# Об интегро-дифференциальных сплайнах двух переменных

Бурова И.Г., проф. каф. вычислительной математики СПбГУ, i.g.burova@spbu.ru  
Широкова Ю.В., асп. каф параллельных алгоритмов СПбГУ

**Аннотация**

В данной работе рассматривается построение аппроксимаций функций двух переменных с помощью локальных интегро-дифференциальных сплайнов двух переменных.

# Введение

Известны различные варианты аппроксимации функций двух переменных интегро-дифференциальными сплайнами. В ряде случаев удобно использовать тензорное произведение одномерных базисных сплайнов (см.[1,2]). Здесь обобщаем построение интегро-дифференциальных сплайнов на случай аппроксимации функции двух переменных.

1. **Построение интегро-дифференциальных сплайнов  
   двух переменных**

Пусть в прямоугольной области  построена прямоугольная сетка узлов с шагом вдоль оси *x* и с шагом вдоль оси *y.* Предполагается, что известны значения функции  , , в узлах сетки, а также интегралы по элементарным прямоугольникам 

1. 
2. Построим аппроксимацию  функции  в каждом отдельном элементарном прямоугольнике  в виде:
3. 
4. 
5. где базисные сплайны , ,  получаем решая систему уравнений (аппроксимационных соотношений):
6. 
7. Используя формулу Тейлора:
8. 
9. 
10. где
11. 
12. 
13. и используя аппроксимационные соотношения, получаем базисные сплайны , ,  решая систему уравнений (аппроксимационных соотношений):
14. 
15. 
16. 

Нетрудно вычислить определитель системы уравнений: .

1. Если область является квадратом, то мы можем рассматривать аппроксимацию на равномерной сетке узлов с шагом , и если возьмем ,  , то тогда формулы для базисных функций можно представить в виде:
2. ,
3. 
4. 
5. **Теорема**. Допустим, что функция  такая, что . Будем считать, что . Для  получим
6. 
7. **Доказательство** следует из формулы Тейлора и соотношений , , .
8. Аналогично можно построить приближение  для  в элементарном прямоугольнике  в виде:
9. 
10. 
11. где базисные сплайны , ,  получаем из соотношений: 
12. В таблице 1 показаны абсолютные значения максимумов погрешностей аппроксимации построенными полиномиальными и экспоненциальными интегро-дифференциальными сплайнами некоторых функций двух переменных в области [-0.4, 0.4]×[-0.4,0.4] при равномерной сетке с шагом *h=0.1*.
13. Таблица 1.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |



# Заключение

В работе представлены формулы интегро-дифференциальных сплайнов для аппроксимации функции двух переменных.

Литература

1. Burova Irina. On Integro-Differential SplinesConstruction. *Advances in Applied and PureMathematics. Proc. of the 7-th International Conf. on Finite Differences, Finite Elements, Finite Volumes, Boundary Elements (F-and-B’14)*. Gdansk. Poland. May 15–17. 2014. pp.57–61.
2. Burova Irina. On Integro-Differential Splines and Solution of Cauchy Problem. Mathematical Methods and Systems in Science and Engineering. *Proc. of the 17th International Conf. on Mathematical Methods, Computational Techniques and Intelligent Systems (MAMECTIC’15). Tenerife, Canary Islands, Spain*, January 10-12, 2015. pp.57–61. pp.48–52.