Моделирование движений, полученных при решении обобщенных задач Чебышёва

Юшков М.П., профессор кафедры теоретической и прикладной механики СПбГУ yushkovmp@mail.ru

Аннотация

В работе дается анализ многолетних исследований, проведенных на кафедре теоретической и прикладной механики математико-механического факультета СПбГУ, посвященных созданию теории движения неголономных систем со связями высокого порядка и возможности ее эффективного применения для решения некоторых задач управления.

1. Введение и постановка задачи

Общеизвестны блестящие работы П.Л. Чебышёва [1] в самых различных областях математики и механики [1]. В частности, он был создателем теории синтеза механизмов в теории машин и механизмов. Согласно этой теории можно ставить задачу о проектировании такого механизма, определенные точки которого совершают наперед заданное движение. Целый ряд таких механизмов сохранился в Музее истории СПбГУ, в Музее истории математико-механического факультета и на кафедре теоретической и прикладной механики того же факультета [2]. Такие задачи из синтеза механизмов назовем *задачами Чебышёва*.

Поставим теперь более широкую задачу. Рассмотрим механическую систему с координатами $q = (q^1, \dots, q^s)$, движение которой описывается уравнениями Лагранжа второго рода (M — масса всей системы):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q^\sigma} = Q_\sigma \,, \quad \sigma = \overline{1, s}\,,$$
$$T = \frac{M}{2}\, \mathrm{g}_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta \,, \qquad \alpha, \beta = \overline{0, s}\,, \quad q^0 = t\,, \ \dot{q}^0 = 1\,. \tag{1.1}$$

Сформулируем следующую новую задачу: найти такие дополнительные силы $R = (R_1, \dots, R_s)$, присоединив которые к силам $Q = (Q_1, \dots, Q_s)$, то есть переписав уравнения (1.1) в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q^\sigma} = Q_\sigma + R_\sigma \,, \quad \sigma = \overline{1, s}\,, \tag{1.2}$$

[1] Обратим внимание на то, что фамилию Пафнутия Львовича лучше писать через "ё", чтобы правильно поставить ударение при ее чтении.

решением системы (1.2) добъемся удовлетворения дополнительной системе дифференциальных уравнений высокого порядка

$$
\begin{gathered}
f_n^{\varkappa} \equiv a_{n\sigma}^{l+\varkappa}(t, q, \dot{q}, \ldots, \overset{(n-1)}{q})\overset{(n)}{q}{}^{\sigma} + a_{n0}^{l+\varkappa}(t, q, \dot{q}, \ldots, \overset{(n-1)}{q}) = 0\,, \\
\sigma = \overline{1, s}\,, \quad \varkappa = \overline{1, k}\,, \quad k \leqslant s\,, \quad l = s - k\,, \quad n \geqslant 3\,.
\end{gathered}
\tag{1.3}
$$

Здесь (n) обозначает n-ую производную от соответствующей функции.

Отметим, что в сформулированной задаче вместо отыскания движения, удовлетворяющего конкретным условиям, требуется найти такое движение, которое является решением и дополнительной системы дифференциальных уравнений (1.3) порядка $n \geqslant 3$. Поэтому поставленную задачу назовем *обобщенной задачей Чебышёва*[2]. Обратим внимание на то, что формулировка этих задач вводит новый класс задач в теорию управления.

При решении обобщенных задач Чебышёва предлагается дифференциальные уравнения (1.3) рассматривать как программные идеальные линейные неголономные связи высокого порядка $n \geqslant 3$, а их реакции в этом случае будут искомыми управляющими силами R_σ, $\sigma = \overline{1, s}$. Тогда для решения таких задач можно воспользоваться двумя теориями движения неголономных систем со связями высокого порядка, развитыми в докторской диссертации М.П. Юшкова и затем опубликованными в монографии [4]. Большое значение имела дальнейшая дружная и плодотворная работа М.П. Юшкова с Сергеем Андреевичем Зегждой и их учениками, среди которых можно особо выделить члена-корр. Чеченской АН, профессора Ш.Х. Солтаханова. В результате их успешного творческого сотрудничества было решено большое количество новых задач, вошедших в монографии [5, 6], опубликованные издательством "Наука". При этом первая монография [5] была переведена на китайский язык [7], а вторая [6] была опубликована на английском языке издательством "Springer" [8]. Цикл из пяти монографий [4, 5, 6, 7, 8] по неголономной механике в 2011 г. был удостоен Премии Санкт-Петербургского университета "За научные труды".

2. Применение первой теории для решения новых задач механики

В первой теории движения механических систем со связями высокого порядка предлагается при учете связей (1.3) строить совместную систему

[2]Отметим, что эту же задачу по предложению академика С.С. Григоряна называют и *смешанной задачей динамики* (см. статью [3]).

дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций времени обобщенных координат $q^1, \ldots, q^s$ и множителей Лагранжа $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_k$. Видимо, первая реальная задача о движении систем со связями высокого порядка была сформулирована в статьях [9]. В них предлагалось исследовать движение спутника Земли, если, начиная с некоторого момента времени величина его ускорения $|\mathbf{w}_0|$ перестает меняться. Этому соответствует наложение на движение спутника неголономной нелинейной связи второго порядка

$$f_2(q, \dot{q}, \ddot{q}) \equiv (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)^2 + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})^2 - w_0^2 = 0\,. \qquad (2.1)$$

Для применения первой теории продифференцируем связь (2.1) по времени и представим ее в виде линейной неголономной связи третьего порядка.

Как показали численные расчеты в бакалаврской работе 2019-го года В.В. Додонова [10], после закрепления величины ускорения спутник начинает вращаться между двумя концентрическими окружностями, попеременно касаясь каждой из них. Дальнейшее развитие этой работы было проведено студентом третьего курса К.Д. Мазитовым и изложено им на данной Конференции в докладе "Применение первой теории движения систем со связями высокого порядка для исследования движения спутника с постоянным укорением". Он рассматривал движение советского спутника системы "Молния" после закрепления его ускорения в апогее орбиты. Серия таких спутников была запущена специально на высокоэллиптическую орбиту, около перигея которой располагалась Москва, а вблизи апогея Владивосток. В силу выполнения закона площадей [11] спутник быстро движется около Москвы и медленно напротив Владивостока, почти "зависая" над ним. Когда спутник начинает разгоняться, ему на смену приходит следующий. Так обеспечивалась устойчивая связь между столицей и Владивостоком.

3. Применение второй теории для решения некоторых задач механики

Вторая теория движения неголономных систем со связями высокого порядка базируется на применении обобщенного принципа Гаусса, опубликованного в Докладах АН СССР еще в 1983 г. [12]. Построенное по этому принципу дифференциальное уравнение совместно с уравнением связи дает движение спутника, при котором, он превращаясь в космический аппарат, быстро асимптотически выходит на равноускоренное движение по прямой [10].

Различие двух полученных по разным теориям уравнений и результатов их интегрирования объясняется следующим образом. Дело в том, что первой теории соответствует принцип Монжерона–Делеану, требующий минимальности величины силы реакции связи, а во второй теории обобщенный принцип Гаусса минимизирует величину производной по времени от реакции связи. Но по самой постановке задачи движение с постоянной величиной ускорения возможно либо при равномерном вращении точки по окружности, либо при равноускоренном движении по прямой. Именно подобным двум движения и соответствуют результаты, полученные по двум теориям. Таким образом, в рассматриваемой задаче обе теории удачно дополняют друг друга и в итоге дают полное решение исследуемой задачи.

4. Применение второй теории к решению одной из важнейших задач теории управления

Рассмотрим одну из важнейших задач теории управления о нахождении оптимальной управляющей силы, переводящей механическую систему за указанное время из одного фазового состояния в другое. Рассуждения будем вести с помощью решения модельной задачи (подробнее см., напр., в статье [13]) о горизонтальном прямолинейном движении тележки массы M, несущей на тросах длинами l_1 и l_2 массы m_1 и m_2 соответственно (см. рис. 1). За фиксированное время $\widetilde{T}$ требуется выбором горизонтальной силы $F(t)$, приложенной к тележке, переместить висящие грузы на заданное расстояние a из состояния покоя снова в состояние покоя (при покое в конце движения говорят о гашении колебаний механической системы).

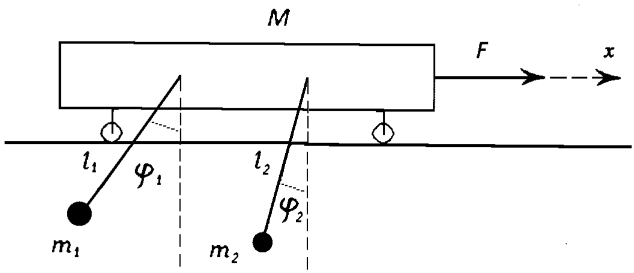

Рис. 1: Тележка с двумя маятниками

Малые колебания системы описываются системой дифференциальных уравнений

$$
\begin{gathered}
(M+m_1+m_2)\ddot{x}-m_1 l_1\ddot{\varphi}_1-m_2 l_2\ddot{\varphi}_2=F\,,\\
\ddot{x}-l_1\ddot{\varphi}_1=\mathrm{g}\varphi_1\,,\\
\ddot{x}-l_2\ddot{\varphi}_2=\mathrm{g}\varphi_2\,,
\end{gathered}
\tag{4.1}
$$

где g — ускорение силы тяжести. По условиям постановки задачи должны выполняться следующие краевые условия:

$$
\begin{gathered}
\varphi_1(0)=\varphi_1(\widetilde{T})=0,\quad \dot{\varphi}_1(0)=\dot{\varphi}_1(\widetilde{T})=0\,,\\
\varphi_2(0)=\varphi_2(\widetilde{T})=0,\quad \dot{\varphi}_2(0)=\dot{\varphi}_2(\widetilde{T})=0\,,\\
x(0)=\dot{x}(0)=\dot{x}(\widetilde{T})=0,\quad x(\widetilde{T})=a\,.
\end{gathered}
\tag{4.2}
$$

Рассматриваемая механическая система имеет нулевую частоту $\Omega_0=0$ и две ненулевых частоты Ω_1, Ω_2. Используя последние, найдем главные формы колебаний и перейдем к безразмерным нормальным координатам x_ρ, $\rho=\overline{0,2}$, при этом первая из них x_0 будет безразмерной координатой центра масс системы, а две последующие — линейными комбинациями углов отклонения маятников. Помимо этого введем безразмерное время $\tau=\Omega_1\,t$ и производные по нему будем обозначать штрихами. Тогда получим систему независимых дифференциальных уравнений

$$
\begin{gathered}
x_0''=u\,,\\
x_\sigma''+\omega_\sigma^2\,x_\sigma=u\,,\quad \sigma=\overline{1,2}\,,\\
\omega_\sigma=\Omega_\sigma/\Omega_1\,.
\end{gathered}
\tag{4.3}
$$

Здесь u — безразмерное управление, пропорциональное силе F.

Решение задачи (4.1)–(4.2) линейно зависит от a, поэтому, не умаляя общности, можно принять, что

$$
x_0(T)=1\,,\quad \text{где}\quad T=\Omega_1\,\widetilde{T}\,.
$$

Тогда граничные условия для системы (4.3) будут таковы:

$$
\begin{gathered}
x_0(0)=x_0'(0)=x_0'(T)=0\,,\quad x_0(T)=1\,,\\
x_\sigma(0)=x_\sigma'(0)=x_\sigma(T)=x_\sigma'(T)=0\,,\quad \sigma=\overline{1,2}\,.
\end{gathered}
\tag{4.4}
$$

Система трех дифференциальных уравнений (4.3) имеет четыре неизвестных функции F, x_0, x_1, x_2. В теории управления обычно замыкают ее требованием экстремальности некоторого функционала. Согласно монографии [14] потребуем минимальности функционала

$$
J=\int\limits_0^T u^2 dt\,.
\tag{4.5}
$$

Один из классических методов решения поставленной задачи (4.3), (4.4), (4.5) опирается на использование принципа максимума Понтрягина. Применяя его, получим безразмерное управление в виде

$$u(\tau) = C_1 + C_2\tau + \sum_{\sigma=1}^{2} \left(C_{2\sigma+1}\cos\omega_\sigma\tau + C_{2\sigma+2}\sin\omega_\sigma\tau\right). \tag{4.6}$$

Здесь $C_k,\ k = \overline{1,6}$, — произвольные постоянные. Выбрав эти постоянные таким образом, чтобы удовлетворялись краевые условия (4.4), однозначно найдем искомое управление $u(\tau)$.

Обратим внимание на то, что изящное представление (4.6) безразмерного управления $u(\tau)$ было получено благодаря тому, что мы переписали систему уравнений Лагранжа второго рода (4.1) в виде системы независимых уравнений (4.3) в главных координатах. Эта форма управления (4.6) позволяет неожиданно установить связь рассматриваемой задачи теории управления с неголономной механикой со связями высокого порядка!

Действительно, обратим внимание на то, что функция (4.6) является общим решением дифференциального уравнения

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\left(\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega_1^2\right)\left(\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega_2^2\right)u = 0\,,$$

которое в размерных переменных принимает вид

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{d^2}{dt^2} + \Omega_1^2\right)\left(\frac{d^2}{dt^2} + \Omega_2^2\right)F = 0\,.$$

Если подставить сюда выражение для F из первого уравнения первоначальной системы (4.1), то получим дифференциальное уравнение 8-го (!) порядка относительно обобщенных координат x, φ_1 и φ_2

$$\begin{gathered} a_{8,x}\,\frac{d^8x}{dt^8} + a_{8,\varphi_1}\,\frac{d^8\varphi_1}{dt^6} + a_{8,\varphi_2}\,\frac{d^8\varphi_2}{dt^8} + \\ + a_{6,x}\,\frac{d^6x}{dt^6} + a_{6,\varphi_1}\,\frac{d^6\varphi_1}{dt^6} + a_{6,\varphi_2}\,\frac{d^6\varphi_2}{dt^6} + \\ + a_{4,x}\,\frac{d^4x}{dt^4} + a_{4,\varphi_1}\,\frac{d^4\varphi_1}{dt^4} + a_{4,\varphi_2}\,\frac{d^4\varphi_2}{dt^4} = 0\,, \end{gathered} \tag{4.7}$$

где коэффициенты являются известными величинами, например, $a_{8,x} = M + m_1 + m_2$, $a_{8,\varphi_1} = -m_1\,l_1$, $a_{8,\varphi_2} = -m_2\,l_2$ и т. д.

Таким образом, при решении поставленной задачи управления с помощью применения принципа максимума Понтрягина НЕПРЕРЫВНО выполняется линейная неголономная связь 8-го порядка (4.7). Это наталкивает на мысль: для решения задачи воспользоваться вместо принципа максимума Понтрягина обобщенным принципом Гаусса, то есть применить для решения поставленной задачи теории управления вторую теорию движения неголономных систем со связями высокого порядка [6, 8]. Используя эту теорию получим представление искомого управления в виде полинома

$$u(t) = \sum_{k=1}^{6} C_k t^{k-1} \,. \tag{4.8}$$

В отличие от управления $u(t)$, задаваемого формулой (4.6), управление, отыскиваемое в виде полинома (4.8), не будет иметь осцилляций, соответствующих собственным частотам системы. Найденная функция будет достаточно гладкой, в чем состоит ее несомненное достоинство.

5. Анализ численных результатов

На рисунках 2 – 3 представлены результаты некоторых расчетов. Рис. 2 соответствуют короткому времени движения, когда $T = T_2$, а рис. 3 — длительному движению, когда $T = 16\,T_2$. Помимо этого принималось, что $T_2 = 0.5\,T_1$ и учитывалось, что $\omega_1 = 1$. T_1, T_2 — периоды колебаний, соответствующие частотам ω_1 и ω_2. Решения, полученные с помощью принципа максимума Понтрягина (назовем это первым методом), изображены штрихованными кривыми, а решениям, полученным с привлечением обобщенного принципа Гаусса (назовем это вторым методом), соответствуют сплошные линии.

Из рис. 2 видно, что при кратковременном движении решения, полученные по обоим методам, практически совпадают, что указывает на доброкачественность предложенного второго метода. В то же время при длительном движении (рис. 3 решения резко различаются. Это различие можно объяснить тем, что управление (4.6), полученное по первому методу, содержит гармоники с собственными частотами системы, что вводит систему в резонанс. В отличие от этого управление (4.8), созданное применением второго метода, задается полиномом, что обеспечивает сравнительно плавное движение системы.

Интересно обратить внимание еще на одно обстоятельство — применение первого метода всегда создает скачки управляющей силы в начале и в конце движения. Если же используется второй метод, то при длительном времени движения подобные скачки исчезают. Поэтому возникает вопрос, нельзя ли удалить скачки управления и при кратковременном движении системы? Этому вопросу посвящен следующий пункт статьи.

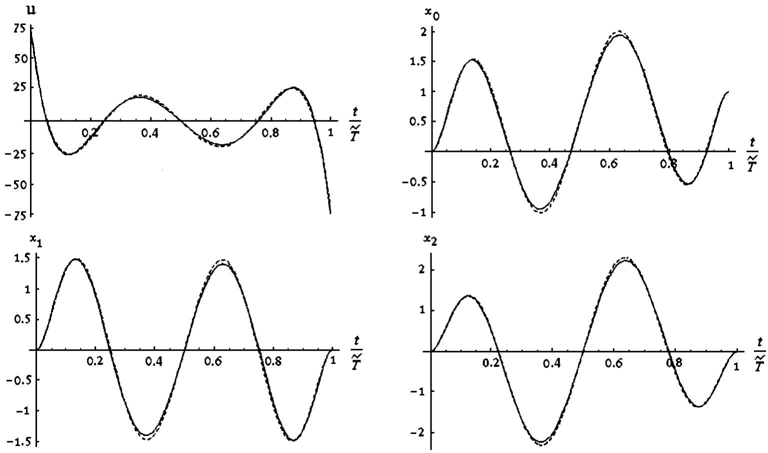

Рис. 2: Кратковременное движение механической системы,
$T = T_2,\ T_2 = 0.5\,T_1$

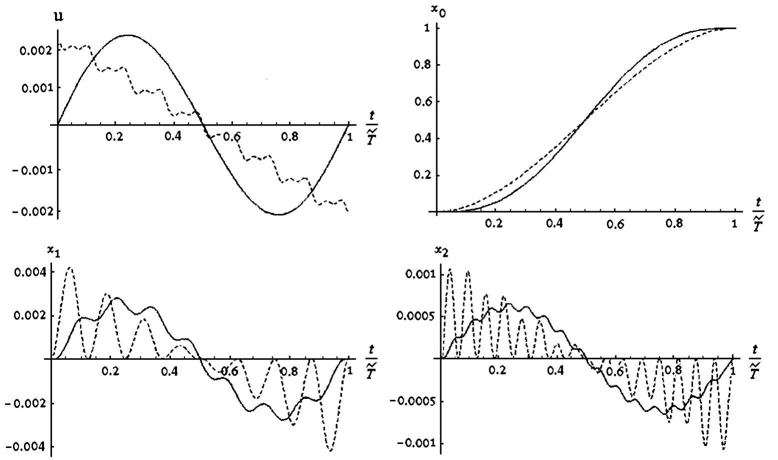

Рис. 3: Длительное движение механической системы,
$T = 16\,T_2,\ T_2 = 0.5\,T_1$

6. Постановка расширенной (обобщенной) краевой задачи

Оказывается, что с помощью применения второго метода возможно найти управление без скачков в начале и в конце движения и при кратковременном движении тележки с маятниками. Для этого следует к граничным условиям (4.4) дополнительно потребовать выполнения следующих требований:

$$x_0''(0) = x_0''(T) = 0\,. \tag{6.1}$$

Обратим внимание на то, что поставленную таким образом расширенную (обобщенную) краевую задачу (4.3), (4.4), (6.1) невозможно решить минимизацией функционала (4.5) с помощью принципа максимума Понтрягина, так как в этом случае количество произвольных постоянных в решении оказывается недостаточным. В отличие от этого решение подобной расширенной краевой задачи с помощью обобщенного принципа Гаусса построить можно, для этого достаточно увеличить его порядок на две единицы. Результат расчета обобщенной краевой задачи для случая $T = T_2,\ T_2 = 0.5\,T_1$ представлен на рис. 4. Как видно из графика безразмерного управления, действительно удалось устранить скачки управляющей силы в начале и в конце движения системы.

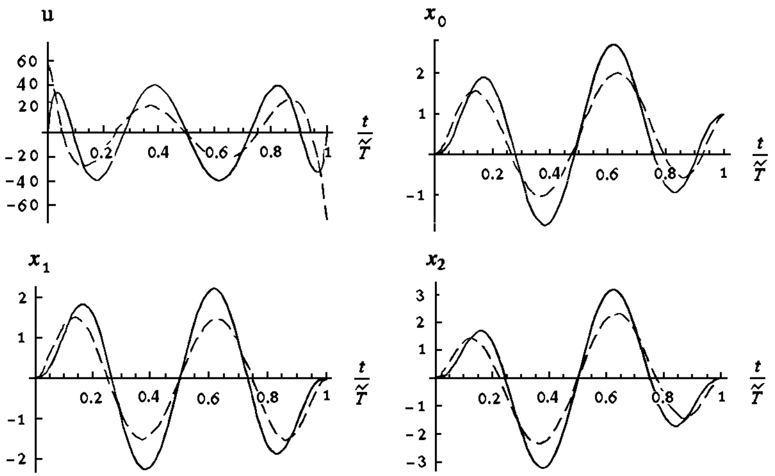

Рис. 4: Кратковременное движение без скачков управляющей силы,
$T = T_2,\ T_2 = 0.5\,T_1$

Таким образом, применение обобщенного принципа Гаусса для гашения колебаний рассматриваемой механической системы становится более предпочтительным, чем минимизация функционала от квадрата управления с помощью применения принципа максимума Понтрягина..

В заключение статьи хочется отметить, что указанные методы для решения практически важных задач успешно используют выпускники кафедры В.В. Додонов (бакалавр) и Т.С. Шугайло (магистр). Первый из них занимается проблемой плавного изменения спутником (или МКС) его угловой ориентации, а второй — проблемой гашения колебаний контейнера портального крана. Полученные результаты они будут докладывать в августе 2019 г. в Уфе на ”XII Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики” и в сетябре на международной научной конференции ”14. Magdeburger Maschinenbautagen” в Магдебурге (Германия). При этом докладываемые ими результаты настолько интересны в практических приложениях, что достойны патентования.

Заключение

В работе формулируется обобщенная задача Чебышёва и предлагается для ее решения использовать две теории движения неголономных систем со связями высокого порядка, разработанные на кафедре теоретической и прикладной механики СПбГУ. Применение этих теорий показывается на решении задачи о движении спутника Земли при фиксации, начиная с некоторого момента времени, величины его ускорения. Помимо этого, демонстрируется эффективность применения второй теории для решения одной из важнейших задач теории управления о нахождении оптимальной силы, переводящей механическую систему с конечным числом степеней свободы за указанное время из одного фазового состояния в другое.

Литература

[1] *Чебышёв П.Л.* Сочинения П.Л. Чебышёва, изданные под ред. А.А. Маркова и Н.Я. Сонина. СПб: Имп. Акад. Наук. Т. I. 1899. 714 с.; Т. II.1907. 736 с.

[2] *Kuteeva G., Yushkov M., Rimushkina E.* Pafnutii Lvovich Chebyshev as a mechanician (2015) 2015 International Conference on Mechanics – Seventh Polyakhov’s Reading, art. no. 7106746

[3] *Зегжда С.А., Юшков М.П.* Смешанная задача динамики // Докл. РАН. 2000. Т. 374. № 5. С. 628-630.

[4] *Зегжда С.А., Солтаханов Ш.Х., Юшков М.П.* Уравнения движения неголономных систем и вариационные принципы механики. СПб: Изд-во С.-Петербург. ун-та. 2002. 276 с.

[5] *Зегжда С.А., Солтаханов Ш.Х., Юшков М.П.* Уравнения движения неголономных систем и вариационные принципы механики. Новый класс задач управления. М.: Наука. Физматлит. 2005. 269 с.

[6] *Зегжда С.А., Солтаханов Ш.Х., Юшков М.П.* Неголономная механика. Теория и приложения. М.: Наука. Физматлит. 2009. 344 с.

[7] *Zegzhda S.A., Soltakhanov Sh.Kh., Yushkov M.P.* Уравнения движения неголономных систем и вариационные принципы механики. Новый класс задач управления (Перевод на китайский язык). Beijing: Beijing Institute of Technology Press. 2007. 268 p.

[8] *Soltakhanov Sh.Kh., Yushkov M.P., Zegzhda S.A.* Mechanics of non-holonomic systems. A new class of control systems. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag. 2009. 329 p.

[9] *Солтаханов Ш.Х., Юшков М.П.* Применение обобщенного принципа Гаусса для составления уравнений движения систем с неголономными связями третьего порядка // Вестн. Ленингр. ун-та. 1990. Сер. 1. Вып. 3. (№ 15). С. 77-83; (Они же.) Уравнения движения одной неголономной системы при наличии связи второго порядка // Вестн. Ленингр. ун-та. 1991. Вып. 4. (№ 22). С. 26-29.

[10] *Dodonov V.V., Soltakhanov Sh.Kh., Yushkov M.P.* The motion of an Earth satellite after imposition of a non-holonomic of the third-order constraint // The Eighth Polyakhov's Reading. AIP (American Institute of Physics) Conference Proceedings 1959, 030006 (2018).

[11] *Поляхов Н.Н., Зегжда С.А., Юшков М.П.* Теоретичская механика. М.: Юрайт. 2015. 592 с.

[12] *Поляхов Н.Н., Зегжда С.А., Юшков М.П.* Обобщение принципа Гаусса на случай неголономных систем высших порядков // Докл. АН СССР. 1983. Т. 269. № 6. С. 1328-1330.

[13] *Zegzhda S., Yushkov M., Soltakhanov Sh., Naumova N., Shugaylo T.* A novel approach to suppression of oscillations // ZAMM (Zeitschrift für angew. Math. und Mech.) May 2018. Vol. 98. Issue 5, pp. 781-788.

[14] *Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н.* Управление колебаниями. М.: Наука. 1980. 383 с.