Составление календарных графиков выполнения работ с помощью методов тропической оптимизации[1]

Кривулин Н.К., д.ф.-м.н., профессор кафедры статистического моделирования СПбГУ, nkk@math.spbu.ru

Губанов С.А., аспирант кафедры статистического моделирования СПбГУ, segubanov@mail.ru

Аннотация

На основе использования методов тропической оптимизации предлагается прямое решение задачи составления оптимального графика выполнения работ проекта при различных ограничениях на время выполнения работ. В качестве критерия оптимальности плана рассматривается минимум максимального разброса времени начала всех работ.

Введение

Задача составления оптимального графика выполнения работ входит в число центральных проблем оптимального планирования в управлении проектами [1, 2]. Один из эффективных методов решения задач календарного планирования состоит в применении моделей и методов тропической математики, которая изучает полукольца и полуполя с идемпотентным сложением [3, 4, 5]. При этом задачи планирования сводятся к задачам тропической оптимизации [6, 7, 8, 9], которые представляют собой задачи оптимизации, сформулированные в терминах тропической математики. В настоящей работе используются методы тропической оптимизации [10, 11, 12] для решения задачи минимизации максимального разброса времени начала работ проекта при заданных временных ограничениях.

Составление оптимального календарного графика

В этом разделе рассматривается задача планирования, которая возникает при составлении оптимальных графиков сроков выполнения работ проекта при необходимости синхронизировать время начала всех

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект №18-010-00723.

работ во времени. Задача заключается в минимизации максимального разброса времени начала всех работ при ограничениях на минимальный временной интервал между началом работ и на наиболее раннее и наиболее позднее допустимое время начала каждой работы.

Рассмотрим проект, который заключается в выполнении n работ. Для каждой работы $i = 1, \ldots, n$ введем обозначения: x_i – время начала, y_i – время завершения работы; g_i – самое раннее допустимое время начала, h_i – наиболее позднее допустимое время завершения работы; c_{ij} – минимальный допустимый временной интервал между началом работ i и j. Если значение величины c_{ij} не задано, то считаем его равным $-\infty$.

Ограничения типа «старт-старт» задают минимальный допустимый интервал между временем начала любых двух работ в форме неравенств

$$\max_{1 \leq j \leq n} (x_j + c_{ij}) \leq x_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Ограничения на время начала выполения работ можно записать при помощи неравенства

$$g_i \leq x_i \leq h_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Критерием оптимальности плана является максимальный разброс времени начала всех работ, который требуется минимизировать,

$$\max_{1 \leq i \leq n} x_i - \min_{1 \leq i \leq n} x_i = \max_{1 \leq i \leq n} x_i + \max_{1 \leq i \leq n} (-x_i).$$

Для составления оптимального графика по критерию минимума максимального разброса времени начала работ при заданных ограничениях необходимо решить задачу

$$\begin{aligned}
\min \quad & \max_{1 \leq i \leq n} x_i + \max_{1 \leq i \leq n} (-x_i); \\
& \max_{1 \leq j \leq n} (c_{ij} + x_j) \leq x_i, \\
& g_i \leq y_i \leq h_i, \quad i = 1, \ldots, n.
\end{aligned} \tag{1}$$

Далее представим эту задачу в терминах тропической математики.

Элементы тропической математики

Приведем обзор основных определений и результатов тропической математики [6, 7, 3, 5], которые потребуются для описания и решения задач оптимизации в следующем разделе.

Рассмотрим множество $\mathbb{X}$, которое замкнуто относительно ассоциативных и коммутативных операций сложения $\oplus$ и умножения $\otimes$, и содержит их нейтральные элементы ноль $\mathbb{0}$ и единицу $\mathbb{1}$. Сложение является идемпотентным, что означает выполнение равенства $x \oplus x = x$ для каждого $x \in \mathbb{X}$, а умножение дистрибутивно относительно сложения и обратимо, то есть для любого ненулевого x существует элемент x^{-1} такой, что $x \otimes x^{-1} = \mathbb{1}$.

Идемпотентное сложение задает частичный порядок: $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x \oplus y = y$. Считаем, что указанный частичный порядок дополнен до линейного порядка.

Для каждого $x \in \mathbb{X}_{+} = \mathbb{X} \setminus \{\mathbb{0}\}$ и целого положительного p определена степень $x^0 = \mathbb{1}$, $x^p = x^{p-1}x$, $x^{-p} = (x^{-1})^p$, $\mathbb{0}^p = \mathbb{0}$. Предполагается, что операция возведения в целую степень может быть распространена на случай рационального показателя степени.

Поскольку $\mathbb{X}_{+}$ образует группу по умножению, структура $\langle \mathbb{X}, \mathbb{0}, \mathbb{1}, \oplus, \otimes \rangle$ называется идемпотентным полуполем. Знак умножения $\otimes$ далее для краткости будет опускаться.

Вещественное полуполе $\mathbb{R}_{\max,+} = \langle \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, -\infty, 0, \max, + \rangle$ является примером идемпотентного полуполя, для которого $\mathbb{0} = -\infty$, $\mathbb{1} = 0$, $\oplus = \max$ и $\otimes = +$.

Обозначим через $\mathbb{X}^{m \times n}$ множество матриц, которые состоят из m строк и n столбцов с элементами из $\mathbb{X}$. Для согласованных по размеру матриц $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$, $\boldsymbol{C} = (c_{ij})$ и скаляра x матричные сложение, умножение и умножение на скаляр определяются формулами

$$\{\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B}\}_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij}, \quad \{\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}\}_{ij} = \bigoplus_{k} b_{ik} c_{kj}, \quad \{x\boldsymbol{A}\}_{ij} = x a_{ij}.$$

Отношение порядка, введенное выше, обобщается на матрицы и понимается покомпонентно.

Обозначим множество векторов-столбцов из n элементов через $\mathbb{X}^n$.

Для каждого вектора $\boldsymbol{x}$ обозначим его транспонированный вектор через $\boldsymbol{x}^T$.

Для любого вектора-столбца $\boldsymbol{x} = (x_i) \in \mathbb{X}^n$ определим его мультипликативно сопряженный вектор-строку $\boldsymbol{x}^{-} = (x_i^{-})$, где $x_i^{-} = x_i^{-1}$, если $x_i \neq \mathbb{0}$, и $x_i^{-} = \mathbb{0}$ в противном случае.

Вектор без нулевых компонент называется регулярным.

Вектор, состоящий из единиц, обозначается через $\mathbf{1} = (\mathbb{1}, \ldots, \mathbb{1})^T$.

Рассмотрим квадратные матрицы в $\mathbb{X}^{n \times n}$. Единичной являтся матрица с элементами, равными $\mathbb{1}$ на главной диагонали и $\mathbb{0}$ – вне ее. Обозначим такую матрицу через $\boldsymbol{I}$.

Для квадратной матрицы $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ и натурального m неотрицательная целая степень определяется следующим образом: $\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{A}^m = \boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{A}$.

Для матрицы $\boldsymbol{A}$ определим след по формуле

$$\operatorname{tr} \boldsymbol{A} = a_{11} \oplus \cdots \oplus a_{nn}.$$

Введем функцию

$$\operatorname{Tr}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{tr} \boldsymbol{A} \oplus \cdots \oplus \operatorname{tr} \boldsymbol{A}^n.$$

Если $\operatorname{Tr}(\boldsymbol{A}) \leq \mathbb{1}$, то определим матрицу Клини

$$\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{A} \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{A}^{n-1}.$$

Для любого вектора $x = (x_i) \in \mathbb{X}^n$ и матрицы $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{X}^{m \times n}$ введем тропические аналоги нормы вектора и матрицы

$$||\boldsymbol{x}|| = \bigoplus_{i=1}^{n} x_i, \quad ||\boldsymbol{A}|| = \bigoplus_{i=1}^{m} \bigoplus_{j=1}^{n} a_{ij}.$$

Задача тропической оптимизации

Пусть заданы матрицы $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{X}^{n \times n}$ и векторы $\boldsymbol{g}, \boldsymbol{h} \in \mathbb{X}^n$. Требуется найти регулярные векторы $\boldsymbol{x} \in \mathbb{X}^n$, которые решают задачу

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{x}^- \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}, \\ & \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x}, \\ & \boldsymbol{g} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{h}. \end{aligned} \tag{2}$$

Введем дополнительные обозначения

$$\boldsymbol{S}_k = \bigoplus_{0 \leq i_1 + \cdots + i_k \leq n-k} \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{i_1} \cdots \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{i_k}, \qquad k = 1, \ldots, n;$$

$$\boldsymbol{T}_k = \bigoplus_{0 \leq i_0 + i_1 + \cdots + i_k \leq n-k-1} \boldsymbol{B}^{i_0}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{i_1} \cdots \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{i_k}), \qquad k = 1, \ldots, n-1.$$

В работе [12] предлагается следующее решение задачи (2).

Теорема 1. *Пусть* $\boldsymbol{A}$ *— матрица со спектральным радиусом* $\lambda > \mathbb{0}$*, а* $\boldsymbol{B}$ *— матрица такая, что* $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{B}) \leq \mathbb{1}$*. Пусть* $\boldsymbol{g}$ *— вектор, а* $\boldsymbol{h}$ *— регулярный вектор такой, что* $\boldsymbol{h}^{-}\boldsymbol{B}^{*}\boldsymbol{g} \leq \mathbb{1}$*.*

Тогда минимальное значение в задаче (2) *равно*

$$\theta = \bigoplus_{k=1}^{n} \mathrm{tr}^{1/k}(\boldsymbol{S}_k) \oplus \bigoplus_{k=1}^{n-1} (\boldsymbol{h}^{-}\boldsymbol{T}_k\boldsymbol{g})^{1/k},$$

а все регулярные решения имеют вид

$$\boldsymbol{x} = (\theta^{-1}\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B})^{*}\boldsymbol{u},$$

где $\boldsymbol{u}$ *— любой регулярный вектор, который удовлетворяет условию*

$$\boldsymbol{g} \leq \boldsymbol{u} \leq (\boldsymbol{h}^{-}(\theta^{-1}\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B})^{*})^{-}.$$

Решение задачи составления оптимального календарного графика работ

В этом разделе предложено решение задачи (1) минимизации максимального разброса времени начала работ проекта при ограничениях вида «старт-старт», а также ограничениях на самое раннее и самое позднее время начала выполнения работ, которое получено путем сведения к задаче тропической оптимизации (2).

Чтобы записать задачу (1) в терминах идемпотентного полуполя $\mathbb{R}_{\max,+}$ в векторном виде, введем матрично-векторные обозначения

$$\boldsymbol{C} = (c_{ij}), \quad \boldsymbol{g} = (g_i), \quad \boldsymbol{y} = (y_i), \quad \boldsymbol{x} = (x_i).$$

Представим целевую функцию задачи в виде векторного выражения

$$\mathbf{1}^{T}\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{-}\mathbf{1} = \boldsymbol{x}^{-}\mathbf{1}\mathbf{1}^{T}\boldsymbol{x},$$

а ограничения задачи – в форме векторных неравенств

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{g} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{h}.$$

Тогда задачу (1) можно сформулировать в виде

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{x}^{-}\mathbf{1}\mathbf{1}^{T}\boldsymbol{x}, \\ & \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x}, \\ & \boldsymbol{g} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{h}. \end{aligned} \tag{3}$$

Заметим, что полученная задача является частным случаем задачи (2) и приведем результат, который описывает ее решение.

Лемма 2. *Пусть $\boldsymbol{C}$ — матрица, $\boldsymbol{g}$ — вектор, а $\boldsymbol{h}$ — регулярный вектор такие, что* $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{C}) \oplus \boldsymbol{h}^{-}\boldsymbol{C}^{*}\boldsymbol{g} \leq \mathbb{1}$. *Определим скаляр*

$$\begin{aligned}\theta = \bigoplus_{k=1}^{n} \bigoplus_{0\leq i_1+\cdots+i_k\leq n-k} (||\boldsymbol{C}^{i_1}||\cdots||\boldsymbol{C}^{i_k}||)^{1/k} \oplus \\ \oplus \bigoplus_{k=1}^{n-1} \bigoplus_{0\leq i_0+i_1+\cdots+i_k\leq n-k-1} (||\boldsymbol{h}^{-}\boldsymbol{C}^{i_0}||||\boldsymbol{C}^{i_1}||\cdots||\boldsymbol{C}^{i_{k-1}}||||\boldsymbol{C}^{i_k}\boldsymbol{g}||)^{1/k}.\end{aligned} \tag{4}$$

Тогда минимум в задаче (3) *равен* θ *и достигается тогда и только тогда, когда*

$$\boldsymbol{x} = (\theta^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}^{T} \oplus \boldsymbol{C})^{*}\boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{g} \leq \boldsymbol{u} \leq (\boldsymbol{h}^{-}(\theta^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}^{T} \oplus \boldsymbol{C})^{*})^{-}. \tag{5}$$

Заключение

В работе рассмотрена задача составления оптимального графика выполнения работ проекта, которая заключается в минимизации максимального разброса времени начала работ при ограничениях вида «старт-старт» и ограничениях на самое раннее и самое позднее время начала работ. Получено прямое аналитическое решение задачи, которое может быть использовано для ее формального анализа и для непосредственных вычислений в реальных практических задачах.

Литература

[1] Neumann K., Schwindt C, Zimmermann. J Project Scheduling with Time Windows and Scarce Resources. Berlin: Springer. 2 ed., 2003. DOI:10.1007/978-3-540-24800-2

[2] V. T'kindt and J.-C. Billaut, Multicriteria Scheduling. Berlin: Springer. 2 ed., 2006. DOI:10.1007/b106275

[3] Кривулин Н. К. Методы идемпотентной алгебры в задачах моделирования и анализа сложных систем. СПб. : Изд-во С.-Петерб. ун-та., 2009.

[4] Маслов В. П., Колокольцев В. Н. Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении. М. : Физматлит, 1994.

[5] Butkovič P.Max-linear Systems: Theory and Algorithms. Springer Monographs in Mathematics. London: Springer, 2010. DOI:10.1007/978-1-84996-299-5

[6] Krivulin N. Tropical optimization problems with application to project scheduling with minimum makespan // Annals of Operations Research. 2017. Vol. 256, N 1. P. 75-92. DOI:10.1007/s10479-015-1939-9

[7] Krivulin N. Tropical optimization problems in time-constrained project scheduling // Optimization. 2017. Vol. 66, N 2. P. 205-224. DOI:10.1080/02331934.2016.1264946

[8] Кривулин Н. К., Губанов С. А. Решение задачи сетевого планирования на основе методов тропической оптимизации // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2016. Вып. 3. С. 62–72.

[9] Кривулин Н. К., Губанов С. А. Использование методов тропической оптимизации в задачах сетевого планирования // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2017. Т. 13. Вып. 4. С. 384–397.

[10] Krivulin N. A multidimensional tropical optimization problem with nonlinear objective function and linear constraints // Optimization. 2015. Vol. 64, N 5. P. 1107-1129. DOI:10.1080/02331934.2013.840624

[11] Krivulin N. A constrained tropical optimization problem. Complete solution and application example // Tropical and Idempotent Mathematics and Applications / Ed. by G. L. Litvinov, S. N. Sergeev. Vol. 616 of Contemporary Mathematics, AMS, 2014. P. 163-177. DOI:10.1090/conm/616/12308

[12] Krivulin N. Direct solution to constrained tropical optimization problems with application to project scheduling //Computational Management Science. 2017. Vol. 14. N 1. P. 91-113. DOI:10.1007/s10287-016-0259-0