

РЕАЛИЗАЦИЯ И СРАВНЕНИЕ АЛГОРИТМОВ ВЫЧИСЛЕНИЯ КОНЕЧНО-ВРЕМЕННЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА НА ПРИМЕРЕ СИСТЕМ С ХАОТИЧЕСКИМ ПОВЕДЕНИЕМ

Данилевский А. А., студент мат.-мех. СПбГУ

Кузнецов Н. В., д.ф.-м.н, проф. СПбГУ

Мокаев Т. Н., д.ф.-м.н, проф. СПбГУ

Аннотация

В данной работе приведено сравнение двух реализаций алгоритма вычисления конечно-временных показателей Ляпунова в средах MATLAB и Wolfram Mathematica на примере систем Лоренца и Хенона. Такое сравнение необходимо для разработки эффективных подходов, позволяющих исследовать длительные по времени переходные хаотические процессы (transient chaotic behavior) и вычислять конечно-временную ляпуновскую размерность (finite-time Lyapunov dimension) для сетки точек на аттракторе. С помощью реализации в Wolfram Mathematica исследуется изменение старшего конечно-временного показателя Ляпунова системы с переходным хаотическим поведением на примере системы Лоренца.

Введение

Слово "хаос" переводится с греческого как "раскрываюсь, разверзаюсь" и в общем использовании означает "состояние беспорядка". Однако в теории хаоса этот термин определяется более точно. Есть много определений хаоса (Девани, Руэль-Такенс, Ли-Йорке) [1, 2, 3], но в численных экспериментах под хаосом чаще всего понимают существование ограниченного множества, на котором траектории имеют положительный старший показатель Ляпунова.

Переходный хаос – это динамическое явление, при котором система демонстрирует нерегулярное поведение в течение конечного, но, возможно, длительного времени, и после этого достигает некоторого предельного состояния.

Введем далее необходимые определения динамической системы, конечно-временных ляпуновских показателей, следуя работам [4, 5].

Предположим, дано автономное дифференциальное уравнение:

$$\dot{u} = f(u), \quad t \in \mathbb{R}, \quad u \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

где $f(u)$ непрерывно дифференцируемая вектор-функция $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Определим $u(t, u_0)$ как решение (1) такое, что $u(0, u_0) = u_0$.

Рассмотрим линеаризацию системы (1) вдоль решения $\varphi^t(u)$:

$$\dot{y} = J(\varphi^t(u))y, \quad J(u) = Df(u), \quad (2)$$

где $J(u)$ — $n \times n$ матрица Якоби, элементы которой являются непрерывными функциями от u . Предположим, что $\det J(u) \neq 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим фундаментальную матрицу линеаризованной системы (2) $D\varphi^t(u)$ такую, что $D\varphi^0(u) = I$, где I — единичная $n \times n$ матрица.

Пусть $\sigma_i(t, u) = \sigma_i(D\varphi^t(u))$, $i = 1, \dots, n$ будут сингулярные числа матрицы $D\varphi^t(u)$, отсортированные так, что $\sigma_1(t, u) \geq \dots \geq \sigma_n(t, u) > 0$ для любого u и $t \geq 0$.

Определение 1 *Конечно-временные ляпуновские показатели по сингулярным значениям в точке $u \in \mathbb{R}^n$ обозначим как:*

$$\nu_i(t, u) = \nu_i(D\varphi^t(u)), i = 1, \dots, n, \quad \nu_1(t, u) \geq \dots \geq \nu_n(t, u), \forall t > 0,$$

и определим как:

$$\nu_i(t, u) := \frac{1}{t} \ln \sigma_i(t, u).$$

Показатели Ляпунова динамической системы определяют степень отдаления (или сближения) различных, но близких траекторий динамической системы. Если соответствующий показатель Ляпунова положителен, расстояние между изначально близкими траекториями системы с течением времени увеличивается, если показатель отрицателен — близкие траектории еще более сближаются. И, как говорилось выше, по знаку старшего показателя можно судить о наличии хаотического поведения.

Алгоритм численного нахождения конечно-временных ляпуновских показателей

Показатели Ляпунова произвольной динамической системы крайне редко можно получить аналитически, однако существуют численные методы, которые позволяют вычислять их с приемлемой точностью.

Для численного нахождения конечно-временных ляпуновских показателей использовался один из подходов, описанный в статьях [8, 9, 10, 11].

Алгоритм заключается в представлении фундаментальной матрицы линеаризованной системы (2) по свойству коциклов в виде длинного произведения матриц и дальнейшего использования LR-разложения Холецкого, SVD, лестничного алгоритма QR-разложений матриц для нахождения сингулярных значений.

Сравнение реализаций алгоритма вычисления конечно-временных ляпуновских показателей

Системы с непрерывным временем

Рассмотрим сравнение времени вычисления конечно-временных показателей Ляпунова на примере системы Лоренца [6]:

$$\begin{cases} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= x(\rho - z) - y \\ \dot{z} &= xy - \beta z \end{cases} \quad (3)$$

где σ, ρ, β – положительные параметры.

Реализации были запущены на процессоре Intel(R) Core(TM) i5-4210U CPU @ 1.70GHz 2.40GHz, с ОЗУ 6.00 ГБ, в пакетах прикладных программ MATLAB R2017a и Wolfram Mathematica 11.1 со следующими параметрами: параметры системы $\rho = 28, \sigma = 10, \beta = 8/3$, начальная точка $u_0 = (1, 0, 0)$; временной интервал $[0, T]$; ранг разбиения $\tau = 0.1$; схема интегрирования Дормана-Принса (ode45 в MATLAB); параметр прекращения итераций для адаптивного алгоритма $\delta = 10^{-2}$; относительная и абсолютная погрешность вычисления для системы ОДУ 10^{-6} .

Результаты представлены в таблице 1. Значения времени являются средними значениями по десяти запускам.

Таблица 1: Сравнение времени работы реализаций для системы Лоренца (3).

T	MATLAB, с	Mathematica, с	Улучшение, %
100	18.028	15.574	13.6
500	422.721	325.832	22.9
1000	1402.6	1083.86	22.7

Системы с дискретным временем

В качестве системы с дискретным временем рассмотрим систему Хенона [7]:

$$\begin{cases} x(k+1) &= a + by(k) - x(k)^2 \\ y(k+1) &= x(k) \end{cases}, \quad (4)$$

где a и b – положительные параметры.

Были взяты в качестве значений параметров $a = 1.4, b = 0.3$, начальная точка $(1, 0)$, максимальное время T и параметр прекращения итераций для адаптивного алгоритма $\delta = 10^{-8}$.

Полученные результаты представлены в таблице 2. Значения времени являются средними значениями по десяти запускам.

Таблица 2: Сравнение времени работы реализаций для системы Хенона (4).

T	MATLAB, с	Mathematica, с	Улучшение, %
1000	21.599	12.1938	56.5
5000	556.689	277.125	49.8
10000	2188.018	1099.09	50.2

Сравнение получаемых траекторий

Реализации в пакетах MATLAB и Mathematica отличаются не только временем работы, но и получаемой траекторией динамической системы с хаотическим поведением, что наблюдается как для непрерывной,

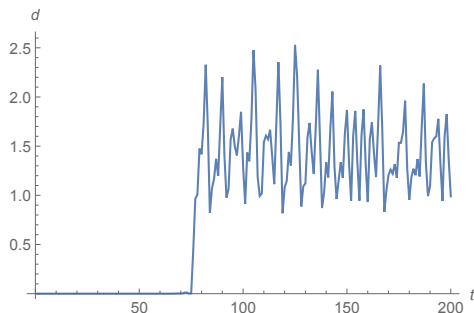


Рис. 1: Разность траекторий системы (4), полученных в MATLAB и Mathematica, где d – евклидово расстояние между точками траекторий в момент времени t .

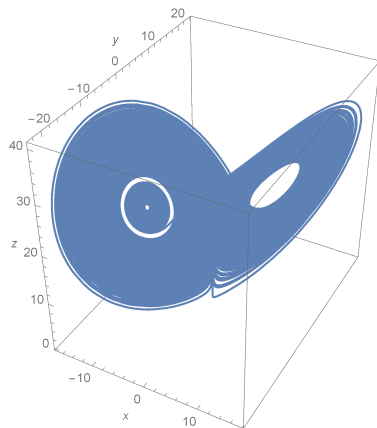


Рис. 2: Для системы (3) с параметрами $\sigma = 10, \rho = 23.94, \beta = \frac{8}{3}$ траектория из точки $u_0 = (-11, 1, 1)$ при $t \in [0, 7 \cdot 10^4]$.

так и для дискретной системы, что связано с различиями в оптимизации арифметических операций в разных средах и языках программирования.

Это продемонстрировано для траекторий дискретной системы (4) на Рис. 1.

На полученные результаты также влияют и многие другие параметры, такие как подход к нахождению фундаментальных матриц и метод интегрирования системы дифференциальных уравнений (в случае непрерывного времени).

Исследование переходных хаотических процессов с помощью конечно-временных показателей Ляпунова

Как уже говорилось ранее, показатели Ляпунова являются эффективным инструментом исследования хаотического поведения систем. Но ставится вопрос, являются ли ляпуновские показатели так же применимыми при изучении хаотических переходных процессов.

С помощью реализации алгоритма вычисления конечно-временных

показателей Ляпунова в среде Wolfram Mathematica были проведены численные эксперименты. Была рассмотрена система Лоренца (3) с параметрами $\sigma = 10, \rho = 23.94, \beta = \frac{8}{3}$. Моделирование показало, что, например, траектория системы, выходящая из начальной точки $u_0 = (-11, 1, 1)$, попадает в окрестность одной из ненулевых точек состояния равновесия за время $t \approx 6.9 \cdot 10^4$ и не покидает ее (Рис. 2).

Если же рассмотреть изменение старшего показателя Ляпунова с течением времени, то можно наблюдать изменение его знака с положительного на отрицательный на более длительном временном интервале, чем было получено при моделировании.

Заключение

В данной работе на примере систем Лоренца и Хенона было проведено сравнение времени работы двух реализаций алгоритма численного нахождения конечно-временных показателей Ляпунова в математических пакетах MATLAB и Mathematica для систем с непрерывным и дискретным временами. Время работы алгоритма также может зависеть от архитектуры компьютера, на котором проводится численный эксперимент, и от операционной системы. Было показано отличие двух траекторий, полученных в разных математических пакетах. Таким образом, можно сказать, что при исследовании систем с хаотическим поведением помимо начальных данных, временного интервала необходимо указывать метод вычисления конечно-временных показателей Ляпунова, метод интегрирования, а также математический пакет, в котором проводится моделирование. При численном моделировании системы Лоренца были численно продемонстрированы трудности описания переходного хаотического поведения посредством анализа знака старшего показателя Ляпунова.

Литература

- [1] Devaney R. L. An introduction to chaotic dynamical systems. – Addison-Wesley Stud., 1989.
- [2] Ruelle D., Takens F. On the nature of turbulence // Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg-RCP25. – 1971. – Vol. 12. – P. 1-44.

- [3] Li T. Y., Yorke J. A. Period three implies chaos // The American Mathematical Monthly. – 1975. – Vol. 82. – №. 10. – P. 985-992.
- [4] Kuznetsov N. The Lyapunov dimension and its estimation via the Leonov method // Physics Letters A. 2016.
- [5] Леонов Г. А. Странные аттракторы и классическая теория устойчивости движения. — Изд-во СПбГУ СПб., 2004.
- [6] Lorenz E. N. Deterministic nonperiodic flow // Journal of the atmospheric sciences. — 1963. — Vol. 20, no. 2. — P. 130–141.
- [7] Henon M. A two-dimensional mapping with a strange attractor. // Communications in Mathematical Physics – 1976. – Vol. 50, no. 1 – P. 69–77.
- [8] Kuznetsov N. V., Leonov G. A., Mokaev T. N., Prasad A., Shrimali M. D. Finite-time Lyapunov dimension and hidden attractor of the Rabinovich system // arXiv preprint arXiv:1412.7667
- [9] Stewart D. E. A new algorithm for the SVD of a long product of matrices and the stability of products// Electronic Transactions on Numerical Analysis. 1997. Vol. 5. P. 29-47.
- [10] Leonov G. A., Kuznetsov N. V., Mokaev T. N. Homoclinic orbits, and self-excited and hidden attractors in a Lorenz-like system describing convective fluid motion // The European Physical Journal Special Topics. – 2015. – T. 224. – №. 8. – C. 1421-1458.
- [11] Kuznetsov N. V., Leonov G. A., Mokaev T. N. Finite-time and exact Lyapunov dimension of the Henon map // arXiv preprint arXiv:1712.01270. – 2017.