Калибровочные соотношения для эрмитовых сплайнов на произвольной сетке

Демьянович Ю.К, профессор кафедры параллельных алгоритмов СПбГУ, y.demjanovich@spbu.ru

Евдокимова Т.О., доцент кафедры параллельных алгоритмов СПбГУ, t.evdokimova@spbu.ru,
Иванцова О.Н., доцент кафедры параллельных алгоритмов СПбГУ, o.ivancova@spbu.ru

Аннотация

Рассматриваются пространства (вообще говоря, неполиномиальных) сплайнов, пригодные для решения интерполяционной задачи Эрмита (с производными первого порядка) и для построения всплескового (вэйвлетного) разложения. Базис сплайнов получается из аппроксимационных соотношений при минимальной (почти везде на рассматриваемом промежутке (α, β)) кратности накрытия носителями базисных функций, поэтому эти сплайны относятся к классу минимальных сплайнов.

Введение

Данная работа идейно примыкает к работам [1]–[4], в которых строятся пространства сплайнов лагранжева типа. Здесь рассматривается обработка потоков, включающих поток значений производной аппроксимируемой функции (это весьма важно для качественной аппроксимации) и строится всплесковое разложение сплайнов эрмитова типа (на неравномерной сетке), не встречавшееся ранее даже в полиномиальном случае. В предлагаемой работе построены формулы аппроксимации и интерполяции для рассматриваемого потока. Полученные базисные функции имеют компактный носитель, причем добавление одного узла ведет к увеличению размерности сплайнового пространства на две единицы (к прежнему базису добавляется два базисных вэйвлета). Как известно, в классической теории иногда возникает вопрос о построении сплайнов на отрезке $[a, b] \in R^1$; в связи с этим заметим, что при предлагаемом подходе все построения распространяются и на случай отрезка $[a, b] \subset (\alpha, \beta)$: достаточно рассмотреть сужение всех обсуждаемых функций на упомянутый отрезок.

Сплайны эрмитова типа

Рассмотрим четырех-компонентную вектор-функцию

$$\varphi(t) = ([\varphi]_0(t),\ [\varphi]_1(t),\ [\varphi]_2(t),\ [\varphi]_3(t))^T,\ [\varphi]_i(t) \in C^1(\alpha,\beta),\ i = 0,1,2,3.$$

Пусть выполнено условие

$$(A) \quad W(x,y;\varphi) := \det(\varphi(x), \varphi'(x), \varphi(y), \varphi'(y)) \neq 0 \ \ \forall x,y \in (\alpha,\beta), x \neq y.$$

Пусть X — сетка вида

$$X:\ \ldots < x_{-1} < x_0 < x_1 < \ldots;\ \text{пусть}\ \alpha = \lim_{j\to-\infty} x_j,\ \beta = \lim_{j\to+\infty} x_j, \quad (2.1)$$

Введем обозначения $G := \cup_{j\in Z}(x_j, x_{j+1})$, $\varphi_j := \varphi(x_j)$, $\varphi'_j := \varphi'(x_j)$.

Рассмотрим функции $\omega_j(t),\ t \in G,\ j \in Z$, удовлетворяющие аппроксимационным соотношениям

$$\sum_j (\varphi'_{j+1}\omega_{2j-1}(t) + \varphi_{j+1}\omega_{2j}(t)) = \varphi(t), \quad (2.2)$$

предполагая, что

$$\operatorname{supp}\omega_{2j-1} \subset [x_j, x_{j+2}], \qquad \operatorname{supp}\omega_{2j} \subset [x_j, x_{j+2}] \qquad \forall j \in Z. \quad (2.3)$$

При фиксированном $k \in Z$ из (2.2)–(2.3) для $t \in (x_k, x_{k+1})$ получаем

$$\varphi'_k\omega_{2k-3}(t) + \varphi_k\omega_{2k-2}(t) + \varphi'_{k+1}\omega_{2k-1}(t) + \varphi_{k+1}\omega_{2k}(t) = \varphi(t). \quad (2.4)$$

Благодаря свойству (A) система (2.4) однозначно разрешима; при $t \in (x_k, x_{k+1})$ из (2.4) находим

$$\omega_{2k-3}(t) = \frac{\det(\varphi(t), \varphi_k, \varphi'_{k+1}, \varphi_{k+1})}{\det(\varphi'_k, \varphi_k, \varphi'_{k+1}, \varphi_{k+1})},\ \omega_{2k-2}(t) = \frac{\det(\varphi'_k, \varphi(t), \varphi'_{k+1}, \varphi_{k+1})}{\det(\varphi'_k, \varphi_k, \varphi'_{k+1}, \varphi_{k+1})},$$

$$\omega_{2k-1}(t) = \frac{\det(\varphi'_k, \varphi_k, \varphi(t), \varphi_{k+1})}{\det(\varphi'_k, \varphi_k, \varphi'_{k+1}, \varphi_{k+1})},\ \omega_{2k}(t) = \frac{\det(\varphi'_k, \varphi_k, \varphi'_{k+1}, \varphi(t))}{\det(\varphi'_k, \varphi_k, \varphi'_{k+1}, \varphi_{k+1})},$$

откуда (последовательно полагая $k = q,\ k = q+1$) легко выводим

$$\omega_{2q-1}(t) = \frac{\det(\varphi'_q, \varphi_q, \varphi(t), \varphi_{q+1})}{\det(\varphi'_q, \varphi_q, \varphi'_{q+1}, \varphi_{q+1})}, \quad t \in (x_q, x_{q+1}), \quad (2.5)$$

$$\omega_{2q-1}(t) = \frac{\det(\varphi(t), \varphi_{q+1}, \varphi'_{q+2}, \varphi_{q+2})}{\det(\varphi'_{q+1}, \varphi_{q+1}, \varphi'_{q+2}, \varphi_{q+2})}, \quad t \in (x_{q+1}, x_{q+2}), \tag{2.6}$$

$$\omega_{2q}(t) = \frac{\det(\varphi'_q, \varphi_q, \varphi'_{q+1}, \varphi(t))}{\det(\varphi'_q, \varphi_q, \varphi'_{q+1}, \varphi_{q+1})}, \quad t \in (x_q, x_{q+1}), \tag{2.7}$$

$$\omega_{2q}(t) = \frac{\det(\varphi'_{q+1}, \varphi(t), \varphi'_{q+2}, \varphi_{q+2})}{\det(\varphi'_{q+1}, \varphi_{q+1}, \varphi'_{q+2}, \varphi_{q+2})}, \quad t \in (x_{q+1}, x_{q+2}) \tag{2.8}$$

для любого $q \in Z$.

Теорема 1. *Пусть $\varphi \in C^1(\alpha, \beta)$ и пусть выполнено условие (A); тогда при любом $q \in Z$ функции $\omega_{2q-1}(t)$ и $\omega_{2q}(t)$, задаваемые формулами (2.3) и (2.5)–(2.8), могут быть продолжены по непрерывности на весь интервал (α, β) до функций класса $C^1(\alpha, \beta)$. Кроме того, выполнены соотношения*

$$\omega_{2q-1}(x_q) = 0, \quad \omega_{2q-1}(x_{q+1}) = 0, \quad \omega_{2q-1}(x_{q+2}) = 0, \tag{2.9}$$

$$\omega'_{2q-1}(x_q) = 0, \quad \omega'_{2q-1}(x_{q+1}) = 1, \quad \omega'_{2q-1}(x_{q+2}) = 0, \tag{2.10}$$

$$\omega_{2q}(x_q) = 0, \quad \omega_{2q}(x_{q+1}) = 1, \quad \omega_{2q}(x_{q+2}) = 0, \tag{2.11}$$

$$\omega'_{2q}(x_q) = 0, \quad \omega'_{2q}(x_{q+1}) = 0, \quad \omega'_{2q}(x_{q+2}) = 0, \tag{2.12}$$

где использованы прежние обозначения для продолженных функций.

Замечание 1. Если компоненты $[\varphi(t)]_i$ вектора $\varphi(t)$ задаются равенствами $[\varphi(t)]_i = t^i$, то функции $\omega_{2q-1}(t)$ и $\omega_{2q}(t)$ представляют известный интерполяционный базис пространства кубических эрмитовых сплайнов.

Пространство $S^1_\varphi(X) := \{u \mid u = \sum_j c_j \omega_j \quad \forall c_j \in R^1, \ j \in Z\}$ называется *пространством сплайнов эрмитова типа (первой высоты)*. Ввиду свойства (A) функции ω_j, $j \in Z$, линейно независимые. Множество $\{\omega_j\}_{j \in Z}$ называется *главным базисом пространства* $S^1_\varphi(X)$.

Замечание 2. Соотношениям (2.9)–(2.12) можно придать вид

$$\omega_{2s-1}(x_j) = 0, \quad \omega'_{2s-1}(x_j) = \delta_{s+1,j}, \tag{2.13}$$

$$\omega_{2s}(x_j) = \delta_{s+1,j}, \quad \omega'_{2s}(x_j) = 0 \qquad \forall s, j \in Z. \tag{2.14}$$

Калибровочные соотношения для сплайнов эрмитова типа

В множестве X рассмотрим подмножество $\widehat{X}$,

$$\widehat{X}: \quad \ldots < \widehat{x}_{-2} < \widehat{x}_{-1} < \widehat{x}_0 < \widehat{x}_1 < \widehat{x}_2 < \ldots, \lim_{j\to-\infty} \widehat{x}_j = \alpha, \lim_{j\to+\infty} \widehat{x}_j = \beta.$$

Обозначим $\chi(s)$ монотонно возрастающую целочисленную функцию такую, что

$$\widehat{x}_j = x_{\chi(j)}. \tag{3.1}$$

Пусть $Z^* = \chi(Z)$. Введенная функция обратима на Z^* и порождает отображение $\widehat{X} \mapsto X$ являющееся вложением $\widehat{X}$ в X.

Повторяем построения (2.2)–(2.8) с использованием только что введенной новой сетки $\widehat{X}$ и функций $\widehat{\omega}_j$, для которых

$$\operatorname{supp} \widehat{\omega}_{2j-1} \subset [\widehat{x}_j, \widehat{x}_{j+2}], \qquad \operatorname{supp} \widehat{\omega}_{2j} \subset [\widehat{x}_j, \widehat{x}_{j+2}] \qquad \forall j \in Z. \tag{3.2}$$

При фиксированном $i \in Z$ для $t \in (\widehat{x}_i, \widehat{x}_{i+1})$ аналогично (2.4) имеем

$$\widehat{\varphi}\,'_i \widehat{\omega}_{2i-3}(t) + \widehat{\varphi}_i \widehat{\omega}_{2i-2}(t) + \widehat{\varphi}\,'_{i+1} \widehat{\omega}_{2i-1}(t) + \widehat{\varphi}_{i+1} \widehat{\omega}_{2i}(t) = \varphi(t), \tag{3.3}$$

где $\widehat{\varphi}_j = \varphi_{\widehat{x}_j}$, $\widehat{\varphi}\,'_j = \varphi'_{\widehat{x}_j} \quad \forall j \in Z$.

Из соотношений (3.2)–(3.3) найдем (при $p \in Z$)

$$\widehat{\omega}_{2p-1}(t) = \frac{\det(\widehat{\varphi}\,'_p, \widehat{\varphi}_p, \varphi(t), \widehat{\varphi}_{p+1})}{\det(\widehat{\varphi}\,'_p, \widehat{\varphi}_p, \widehat{\varphi}\,'_{p+1}, \widehat{\varphi}_{p+1})}, \; t \in (\widehat{x}_p, \widehat{x}_{p+1}), \tag{3.4}$$

$$\widehat{\omega}_{2p-1}(t) = \frac{\det(\varphi(t), \widehat{\varphi}_{p+1}, \widehat{\varphi}\,'_{p+2}, \widehat{\varphi}_{p+2})}{\det(\widehat{\varphi}\,'_{p+1}, \widehat{\varphi}_{p+1}, \widehat{\varphi}\,'_{p+2}, \widehat{\varphi}_{p+2})}, \; t \in (\widehat{x}_{p+1}, \widehat{x}_{p+2}), \tag{3.5}$$

$$\widehat{\omega}_{2p}(t) = \frac{\det(\widehat{\varphi}\,'_p, \widehat{\varphi}_p, \widehat{\varphi}\,'_{p+1}, \varphi(t))}{\det(\widehat{\varphi}\,'_p, \widehat{\varphi}_p, \widehat{\varphi}\,'_{p+1}, \widehat{\varphi}_{p+1})}, \; t \in (\widehat{x}_p, \widehat{x}_{p+1}), \tag{3.6}$$

$$\widehat{\omega}_{2p}(t) = \frac{\det(\widehat{\varphi}\,'_{p+1}, \varphi(t), \widehat{\varphi}\,'_{p+2}, \widehat{\varphi}_{p+2})}{\det(\widehat{\varphi}\,'_{p+1}, \widehat{\varphi}_{p+1}, \widehat{\varphi}\,'_{p+2}, \widehat{\varphi}_{p+2})}, \; t \in (\widehat{x}_{p+1}, \widehat{x}_{p+2}). \tag{3.7}$$

Аналогично формулам (2.13)–(2.14) для функций (3.4)–(3.7) справедливы равенства

$$\widehat{\omega}_{2s-1}(\widehat{x}_j) = 0, \qquad \widehat{\omega}\,'_{2s-1}(\widehat{x}_j) = \delta_{s+1,j}, \tag{3.8}$$

$$\widehat{\omega}_{2s}(\widehat{x}_j) = \delta_{s+1,j}, \qquad \widehat{\omega}'_{2s}(\widehat{x}_j) = 0 \qquad \forall s, j \in Z. \tag{3.9}$$

Пусть $q = \chi(i)$, $q + k = \chi(i + 1)$, так что между узлами $\widehat{x}_i$ и $\widehat{x}_{i+1}$ находятся узлы x_j, $j = q + 1, q + 2, \ldots, q + k - 1$:

$$\widehat{x}_i = x_q < x_{q+1} < x_{q+2} < \ldots < x_{q+k-1} < x_{q+k} = \widehat{x}_{i+1}. \tag{3.10}$$

В работе [5] показано, что если из исходной сетки удалить один узел, то связываемые с новой сеткой координатные функции $\widehat{\omega}_j$ представляют собой линейные комбинации исходных (упомянутые линейные комбинации называются калибровочными соотношениями). Отсюда следует, что при удалении группы узлов соответствующие координатные функции также будут обладать этим свойством. Для определения коэффициентов калибровочных соотношений воспользуемся биортогональной системой функционалов, представленной формулами (3.8)–(3.9).

Таким образом, принимая во внимание расположение носителей функций $\widehat{\omega}_j(t)$, $j \in \{2i - 3, 2i - 2, 2i - 1, 2i\}$ и функций ω_{2s-3}, ω_{2s-2}, ω_{2s-1}, ω_{2s} (см. формулы (2.3)), для $t \in (\widehat{x}_i, \widehat{x}_{i+1})$ имеем представления

$$\widehat{\omega}_j(t) = \sum_{\left(\widehat{x}_i, \widehat{x}_{i+1}\right) \cap (x_s, x_{s+2}) \neq \emptyset} (c^{(j)}_{2s-1}\omega_{2s-1}(t) + c^{(j)}_{2s}\omega_{2s}(t)), \tag{3.11}$$

$$j \in \{2i - 3, 2i - 2, 2i - 1, 2i\}.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть i — фиксированное целое число и $k = \chi(i+1) - \chi(i) + 1$. В перечисленных условиях при $t \in (\widehat{x}_i, \widehat{x}_{i+1})$ верны следующие соотношения*

$$\widehat{\omega}_j(t) = \sum_{s=q-1}^{q+k-1} \left(\widehat{\omega}'_j(x_{s+1})\omega_{2s-1}(t) + \widehat{\omega}_j(x_{s+1})\omega_{2s}(t)\right), \tag{3.12}$$

где $j \in \{2i - 3, 2i - 2, 2i - 1, 2i\}$, $q = \chi(i)$.

Доказательство. Соотношение (3.11) можно переписать в виде

$$\widehat{\omega}_j(t) = \sum_{s=q-1}^{q+k-1} (c^{(j)}_{2s-1}\omega_{2s-1}(t) + c^{(j)}_{2s}\omega_{2s}(t)), \; j \in \{2i - 3, 2i - 2, 2i - 1, 2i\}. \tag{3.13}$$

Подставляя $t = x_r$, $r \in \{q, q + 1, \ldots, q + k\}$ в формулу (3.13), имеем

$$\widehat{\omega}_j(x_r) = \sum_{s=q-1}^{q+k-1} (c^{(j)}_{2s-1}\omega_{2s-1}(x_r) + c^{(j)}_{2s}\omega_{2s}(x_r)). \tag{3.14}$$

Учитывая соотношения

$$\omega_{2s-1}(x_r) = 0, \qquad \omega_{2s}(x_r) = \delta_{s+1,r},$$

в правой части соотношения (3.14) найдем разве лишь одно ненулевое слагаемое, а именно — слагаемое с индексом $s = r-1$:

$$\widehat{\omega}_j(x_r) = c_{2r-2}^{(j)}\omega_{2r-2}(x_r) = c_{2r-2}^{(j)}.$$

Итак,

$$c_{2s}^{(j)} = \widehat{\omega}_j(x_{s+1}) \qquad \forall s \in \{q-1, q, \ldots, q+k-1\}. \tag{3.15}$$

Дифференцируя соотношение (3.15) и подставляя $t = x_r$ в полученное тождество, находим

$$\widehat{\omega}\,'_j(x_r) = \sum_{s=q-1}^{q+k-1}(c_{2s-1}^{(j)}\omega\,'_{2s-1}(x_r) + c_{2s}^{(j)}\omega\,'_{2s}(x_r)), \tag{3.16}$$

Учитывая соотношения $\omega\,'_{2s-1}(x_r) = \delta_{s+1,r}$, $\omega_{2s}(x_r) = 0$, видим, что в правой части равенства (3.16) найдется разве лишь одно ненулевое слагаемое (в данном случае, “первое”), а именно слагаемое с индексом $s = r-1$; таким образом, имеем $\widehat{\omega}\,'_j(x_r) = c_{2r-3}^{(j)}$. Итак,

$$c_{2s-1}^{(j)} = \widehat{\omega}\,'_j(x_{s+1}) \qquad \forall s \in \{q-1, q, \ldots, q+k-1\}. \tag{3.17}$$

Подставляя (3.15) и (3.17) в (3.13), находим соотношения (3.12).

Теорема 3. *В условиях теоремы 2 соотношения (3.12) могут быть представлены в форме*

$$\widehat{\omega}_{2i-3}(t) = \omega_{2q-3}(t) + \sum_{s'=q+1}^{q+k-1}\Big(\widehat{\omega}\,'_{2i-3}(x_{s'})\omega_{2s'-3}(t) + \widehat{\omega}_{2i-3}(x_{s'})\omega_{2s'-2}(t)\Big).$$

$$\widehat{\omega}_{2i-2}(t) = \omega_{2q-2}(t) + \sum_{s'=q+1}^{q+k-1}\Big(\widehat{\omega}\,'_{2i-2}(x_{s'})\omega_{2s'-3}(t) + \widehat{\omega}_{2i-2}(x_{s'})\omega_{2s'-2}(t)\Big).$$

$$\widehat{\omega}_{2i-1}(t) = \sum_{s'=q+1}^{q+k-1}\Big(\widehat{\omega}\,'_{2i-1}(x_{s'})\omega_{2s'-3}(t) + \widehat{\omega}_{2i-1}(x_{s'})\omega_{2s'-1}(t)\Big) + \omega_{2q+2k-3}(t).$$

$$\widehat{\omega}_{2i}(t) = \sum_{s'=q+1}^{q+k-1}\Big(\widehat{\omega}\,'_{2i}(x_{s'})\omega_{2s'-3}(t) + \widehat{\omega}_{2i}(x_{s'})\omega_{2s'-2}(t)\Big) + \omega_{2q+2k-2}(t).$$

Следствие 1. *Если выполнены условия теоремы 1 и $k = 2$, то соотношениям можно придать вид*

$$\widehat{\omega}_{2i-3}(t) = \omega_{2q-2}(t) + \widehat{\omega}\,'_{2i-3}(x_{q+1})\omega_{2q-1}(t) + \widehat{\omega}_{2i-3}(x_{q+1})\omega_{2q}(t).$$

$$\widehat{\omega}_{2i-2}(t) = \omega_{2q-2}(t) + \widehat{\omega}\,'_{2i-2}(x_{q+1})\omega_{2q-1}(t) + \widehat{\omega}_{2i-2}(x_{q+1})\omega_{2q}(t).$$

$$\widehat{\omega}_{2i-1}(t) = \widehat{\omega}\,'_{2i-1}(x_{q+1})\omega_{2q-1}(t) + \widehat{\omega}_{2i-1}(x_{q+1})\omega_{2q}(t) + \omega_{2q+1}(t).$$

$$\widehat{\omega}_{2i}(t) = \widehat{\omega}\,'_{2i}(x_{q+1})\omega_{2q-1}(t) + \widehat{\omega}_{2i}(x_{q+1})\omega_{2q}(t) + \omega_{2q+2}(t).$$

Замечание 3. При алгоритмической реализации полезно иметь в виду, что случай $k = 1$ соответствует отображению χ, при котором между узлами $\widehat{x}_i$ и $\widehat{x}_{i+1}$ нет узлов сетки X, т.е. $\chi(i) = q$, $\chi(i+1) = q+1$, так что $\widehat{x}_i = x_q$, $\widehat{x}_{i+1} = x_{q+1}$ (см. (3.1) и (3.10)); при этом формулы теорем 1 и 2 сохраняются и в случае $k = 1$, если считать, что при $m > n$ символы вида $\sum_{i=m}^{n} a_i$ означают нуль.

Теперь будем считать, что $q = \chi(i)$, $q+k = \chi(i+1)$, $q-k\,' = \chi(i-1)$, так что между узлами $\widehat{x}_{i-1}$ и $\widehat{x}_i$ находятся узлы x_j, $j = q-1, q-2, \ldots, q-k+1$, а между узлами $\widehat{x}_i$ и $\widehat{x}_{i+1}$ располагаются узлы x_j, $j = q+1, q+2, \ldots, q+k-1$:

$$\widehat{x}_{i-1} = x_{q-k\,'} < x_{q-k\,'+1} < \ldots < x_{q-2} < x_{q-1} < \widehat{x}_i = x_q < x_{q+1} <$$

$$< x_{q+2} < \ldots < x_{q+k-1} < x_{q+k} = \widehat{x}_{i+1}.$$

Теорема 4. *Если выполнено условие (A), то при $t \in (\alpha, \beta)$ для любого $i \in Z$ справедливы соотношения*

$$\widehat{\omega}_j(t) = \sum_{s=q\,'}^{q+k-2} \Big(\widehat{\omega}\,'_j(x_{s+1})\omega_{2s-1}(t) + \widehat{\omega}_j(x_{s+1})\omega_{2s}(t)\Big), \qquad (3.18)$$

где $j \in \{2i-3, 2i-2\}$, $q = \chi(i)$, $q\,' = \chi(i-1)$, $k = \chi(i+1) - q$.

Замечание 4. Вводя замену индекса $i\,' = i-1$, получим $q = \chi(i\,'+1)$, $q\,' = \chi(i\,')$, $k = \chi(i\,'+2) - q$. Если положить $s\,' = s+1$, то формула (3.18) может быть записана в следующей эквивалентной форме

$$\widehat{\omega}_j(t) = \sum_{s\,'=q\,'+1}^{q+k-1} \Big(\widehat{\omega}\,'_j(x_{s\,'})\omega_{2s\,'-3}(t) + \widehat{\omega}_j(x_{s\,'})\omega_{2s\,'-2}(t)\Big) \qquad (3.19)$$

$$j \in \{2i\,'-1, 2i\,'\} \quad \forall i\,' \in Z.$$

При каждом $i \in Z$ рассмотрим $j \in \{2i-1, 2i\}$ и положим $q = \chi(i+1)$, $q' = \chi(i)$, $k = \chi(i+2) - q$. Ввиду (3.19) имеем

$$\widehat{\omega}_j(t) = \sum_{s=\chi(i)}^{\chi(i+2)} \Big(\widehat{\omega}'_j(x_s)\omega_{2s-3}(t) + \widehat{\omega}_j(x_s)\omega_{2s-2}(t)\Big).$$

Поскольку очевидно, что $\widehat{\omega}'_j(x_{\chi(i)}) = \widehat{\omega}'_j(x_{\chi(i+2)}) = 0$ и $\widehat{\omega}_j(x_{\chi(i)}) = \widehat{\omega}_j(x_{\chi(i+2)}) = 0$, то предыдущее соотношение можно записать в виде

$$\widehat{\omega}_j(t) = \sum_{s=\chi(i)+1}^{\chi(i+2)-1} \Big(\widehat{\omega}'_j(x_s)\omega_{2s-3}(t) + \widehat{\omega}_j(x_s)\omega_{2s-2}(t)\Big).$$

Вид матрицы перехода

При каждом $i \in Z$ для $j \in \{2i-1, 2i\}$ рассмотрим числа $p_{j,k}$ $\forall k \in Z$, определяемые соотношениями

$$p_{j,2\sigma-3} = \widehat{\omega}'_j(x_\sigma),\ p_{j,2\sigma-2} = \widehat{\omega}_j(x_\sigma),\ \forall \sigma \in \{\chi(i)+1, \dots, \chi(i+2)-1\}, \tag{3.20}$$

а неупомянутые в этом перечне числа $p_{j,k}$ будем считать равными нулю:

$$p_{j,k} = 0\ \forall j \in Z\ \forall k \notin \{2\chi(i)-1, 2\chi(i), \dots, 2\chi(i+2)-4\}. \tag{3.21}$$

Обозначим P бесконечную матрицу, $P := (p_{i,j})_{i,j\in Z}$, элементы которой задаются равенствами (3.20)–(3.21).

Таким образом, строка матрицы P с номером $2i-1$ имеет вид

$$\dots, 0, 0, \widehat{\omega}'_{2i-1}(x_{\chi(i)+1}), \widehat{\omega}_{2i-1}(x_{\chi(i)+1}), \dots, \tag{3.22}$$

$$\dots, \widehat{\omega}'_{2i-1}(x_{\chi(i+2)-1}), \widehat{\omega}_{2i-1}(x_{\chi(i+2)-1}), 0, 0, \dots,$$

а следующая строка (строка с номером $2i$) отличается от упомянутой лишь тем, что всюду вместо $\widehat{\omega}_{2i-1}$ следует писать $\widehat{\omega}_{2i}$. Номера столбцов, в которых находятся упомянутые ненулевые элементы, таковы

$$2\chi(i)-1, 2\chi(i), 2\chi(i)+1, 2\chi(i)+2, \dots, 2\chi(i+2)-5, 2\chi(i+2)-4; \tag{3.23}$$

общее число таких столбцов равно $2(\chi(i+2)-\chi(i))-2$.

Если i заменить на $i+1$, то придется рассматривать строки с номерами $j \in \{2i+1, 2i+2\}$; множества их ненулевых элементов сдвинутся так, что начало их окажется в столбце с номером $2\chi(i+1)-1$:

$$2\chi(i+1)-1, 2\chi(i+1), 2\chi(i+1)+1, 2\chi(i)+2, \dots, 2\chi(i+3)-5, 2\chi(i+3)-4; \tag{3.24}$$

Номера общих столбцов в множествах (3.23) и (3.24) следующие

$$2\chi(i+1)-1, 2\chi(i+1), 2\chi(i+1)+1, 2\chi(i)+2, \ldots, 2\chi(i+2)-5, 2\chi(i+2)-4. \tag{3.25}$$

Заключение

Поскольку кратность накрытия носителями координатных функций $\widehat{\omega}_j$ равна четырем, то столбцы построенной матрицы P содержат не более четырех ненулевых элементов (в последовательных четырех строках), а сама матрица имеет очевидную ступенчатую структуру (3.22)–(3.25).

Литература

[1] Демьянович Ю.К. Локальная аппроксимация на многообразии и минимальные сплайны. СПб., 1994. 356 с.

[2] Демьянович Ю.К. Всплески & минимальные сплайны. СПб., 2003. 200 с.

[3] Демьянович Ю.К., Макаров А.А. Калибровочные соотношения для неполиномиальных сплайнов // Сб. Проблемы математического анализа. Вып.34. 2006. С.39–54.

[4] Демьянович Ю.К. Всплесковые разложения на неравномерной сетке. Труды СПбМО, 2007. Т.13. С.27–51.

[5] Yu.K.Dem'yanovich. On embedding and extended smoothness of spline spaces // Far East J. of Math. Sciences (FJMS) 102, pp. 2025–2052.