

АНАЛИЗ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ ФАЗОВОЙ АВТОПОДСТРОЙКИ

Кузнецов Н. В., д.ф.-м.н, проф. СПбГУ

Лобачев М. Ю.^{1,2}, студент СПбГУ

Юлдашев М.В., д.ф.-м.н, проф. СПбГУ

Юлдашев Р.В., д.ф.-м.н, проф. СПбГУ

Аннотация

Данная работа посвящена анализу полосы удержания, полосы захвата и полосы захвата без проскальзывания для различных схем ФАПЧ на примере системы ФАПЧ типа 2 третьего порядка с передаточной функцией, имеющей два нуля в числителе. Основные подходы базируются на теории Ляпунова для цилиндрического фазового пространства и её развитии Г.А. Леоновым.

Введение

Схемы фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ, phase-locked loops, PLL) являются нелинейными системами управления и широко применяются в системах беспроводной связи, компьютерных архитектурах, системах навигации (GPS, ГЛОНАСС), приёмниках радио и телевидения [1–4]. Впервые они были описаны в работе французского инженера Анри де Беллиссизе в 1932 году [5], а впоследствии получили широкое распространение как на практике, так и в инженерной [6–11] и математической литературе [12–16]. Задачей данных систем является подстройка частоты управляемого генератора под частоту входного сигнала.

Анализ системы ФАПЧ

Следуя классическим работам [7, 17, 18], будем проводить анализ схемы ФАПЧ в пространстве фаз сигналов. Рабочим режимам генераторов в пространстве фаз сигналов соответствуют асимптотически

¹ Автор представляет статью на конференции

² e-mail: st048700@student.spbu.ru

устойчивые состояния равновесия системы автономных дифференциальных уравнений, описывающих данную модель (вывод системы можно найти, например, в [19–21]):

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bv_e(\theta_e), \\ \dot{\theta}_e = \omega_e^{\text{free}} - K_{\text{vco}}(c^*x + hv_e(\theta_e)), \end{cases} \quad (1)$$

здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – состояние фильтра (Loop filter, см. Рис. 1), $\theta_e(t) = \theta_{\text{ref}}(t) - \theta_{\text{vco}}(t) \in \mathbb{R}$ – разность фаз эталонного и подстраиваемого генераторов, A – постоянная $n \times n$ матрица, b и c – постоянные n -векторы, h – число, соответствующие передаточной функции фильтра: $H(s) = -c^*(A - sI)^{-1}b + h$, $v_e(\theta_e(t))$ – характеристика фазового детектора (PD), $K_{\text{vco}} > 0$ – коэффициент усиления подстраиваемого генератора (VCO), ω_e^{free} – разность собственных частот генераторов.

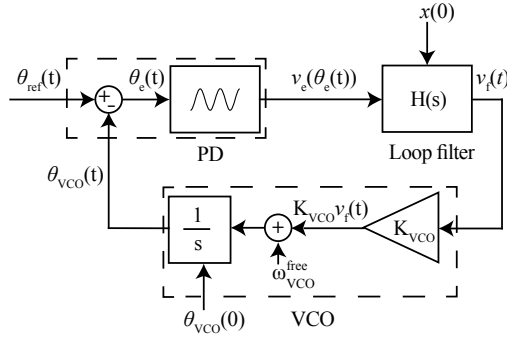


Рис. 1: Схема классической системы ФАПЧ в пространстве фаз сигналов.

В современной инженерной литературе по ФАПЧ рекомендуется использование передаточных функций фильтра, имеющих один нулевой полюс (такие системы называют ФАПЧ типа 2 [7]), а также дополнительных устойчивых звеньев. Первое свойство позволяет расширить полосу захвата [22], а второе нужно для улучшения фильтрующих свойств системы [7, 23]. Рассмотрим ФАПЧ типа 2 с передаточной функцией фильтра

$$H(s) = \frac{1 + s\tau_2}{s(s + \tau_1)} + 1. \quad (2)$$

Задача исследования полосы удержания, соответствующей разности частот, при которой существуют асимптотически устойчивые состояния равновесия, сводится к применению критерия Рауса-Гурвица [24],

однако при анализе полосы захвата и полосы захвата без проскальзывания необходимо использовать нелинейные методы.

Говорят, что если

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} |\theta_e(0) - \theta_e(t)| > 2\pi,$$

то имеет место *проскальзывание цикла* [20].

Определение 1 [25] *Наибольший интервал отклонения частот такой, что система (1) является глобально асимптотически устойчивой и, находясь в рабочем режиме, возвращается в рабочий режим без проскальзывания цикла после любого изменения ω_e^{free} в пределах этого интервала.*

Используя теорему, которая обобщает теорему Барбашина-Красовского [26] и принцип Ла-Салля [27] на цилиндрическое фазовое пространство (см. [28, стр.193], [29, стр.103], [13, стр.20]), и идеи работ [30, 31], можно эффективно определить области параметров системы ФАПЧ типа 2, соответствующие глобальной асимптотической устойчивости³, а также получить оценку полосы захвата без проскальзывания:

$$[0, \omega_l) \supset [0, \sqrt{\frac{K_{\text{vco}}}{\tau_1}}). \quad (3)$$

Строгий анализ и получение оценки (3) полосы захвата без проскальзывания можно найти в [36]. Проведённое в MATLAB компьютерное моделирование подтверждает полученные результаты.

Заключение

В данной работе предложен подход к анализу систем ФАПЧ типа 2, позволяющий свести исследование полос захвата и захвата без проскальзывания к проверке частотных условий, что существенно сокращает время при проектировании.

Литература

- [1] S.V. Ahamed V.B. Lawrence. *Design and Engineering of Intelligent Communication Systems*. Springer, 1997.

³Найденное при таком подходе условие глобальной устойчивости расширяет область устойчивости, которая была получена в работах Д. Абрамовича [32–35] без строгого применения теории Ляпунова в цилиндрическом фазовом пространстве.

- [2] A.M. Meystel, A. Meystel, J.S. Albus. *Intelligent systems: architecture, design, and control*. Wiley, 2002.
- [3] K.K. Sarma, M.P. Sarma, M. Sarma. *Recent Trends in Intelligent and Emerging Systems*. Springer India, 2015.
- [4] K. Wendt G. Fredentall. Automatic frequency and phase control of synchronization in TV receivers. *Proc. IRE*, 31(1):1–15, 1943.
- [5] H. Bellescize. La réception synchrone. *L'onde Électrique*, 11:230–340, 1932.
- [6] R.E. Best. *Phase-Locked Loops: Design, Simulation and Application*. McGraw-Hill, 6th edition, 2007.
- [7] F.M. Gardner. *Phaselock Techniques*. Wiley, 3rd edition, 2005.
- [8] V.F. Kroupa. *Frequency Stability: Introduction and Applications*. IEEE Series on Digital & Mobile Communication. Wiley-IEEE Press, 2012.
- [9] A.J. Viterbi. Acquisition range and tracking behavior of phase-locked loops. *JPL, California Institute of Technology, Pasadena, External Publ*, 673, 1959.
- [10] V.V. Shakhgil'dyan A.A. Lyakhovkin. *Sistemy fazovoi avtopodstroiki chastoty (in Russian)*. Svyaz', Moscow, 1972.
- [11] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, N.J, 2002.
- [12] G.A. Leonov, V. Reitmann, V.B. Smirnova. *Nonlocal Methods for Pendulum-like Feedback Systems*. Teubner Verlagsgessellschaft, Stuttgart-Leipzig, 1992.
- [13] G Leonov. Phase synchronization: theory and application. *Autom. Remote Control*, 67(10):1573–1609, 2006.
- [14] N. N. Bautin Ye. A. Leontovich. *Methods and Procedures for the Qualitative Investigation of Dynamical Systems in a Plane (in Russian)*. Nauka, Moscow, 1976.
- [15] A.Kh. Gelig, G.A. Leonov, V.A. Yakubovich. *Stability of Nonlinear Systems with Nonunique Equilibrium (in Russian)*. Nauka, 1978. (English transl: *Stability of Stationary Sets in Control Systems with Discontinuous Nonlinearities*, 2004, World Scientific).

- [16] G.A. Leonov V.B. Smirnova. *Mathematical problems of theory of phase synchronization*. Nauka, St. Petersburg [in Russian], 2000.
- [17] V.V. Shakhgil'dyan A.A. Lyakhovkin. *Fazovaya avtopodstroika chastoty (in Russian)*. Svyaz', Moscow, 1966.
- [18] A. Viterbi. *Principles of coherent communications*. McGraw-Hill, New York, 1966.
- [19] E.V. Kudryashova, N.V. Kuznetsov, G.A. Leonov, M.V. Yuldashev, R.V. Yuldashev. Nonlinear analysis of PLL by the harmonic balance method: limitations of the pull-in range estimation. *IFAC-PapersOnLine*, 50(1):1451–1456, 2017.
- [20] G.A. Leonov, N.V. Kuznetsov, M.V. Yuldashev, R.V. Yuldashev. Hold-in, pull-in, and lock-in ranges of PLL circuits: rigorous mathematical definitions and limitations of classical theory. *IEEE Transactions on Circuits and Systems—I: Regular Papers*, 62(10):2454–2464, 2015.
- [21] G. Bianchi, N.V. Kuznetsov, G.A. Leonov, M.V. Yuldashev, R.V. Yuldashev. Limitations of PLL simulation: hidden oscillations in MATLAB and SPICE. *International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT 2015)*, 2016-January:79–84, 2016.
- [22] R. E. Best. *Costas Loops: Theory, Design, and Simulation*. Springer International Publishing, 2018.
- [23] Mikel Ugarte Alfonso Carlosena. Performance Comparison and Design Guidelines for Type II and Type III PLLs. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 34(10):3395–3408, 2015.
- [24] F. R. Gantmacher J. L. Brenner. *Applications of the Theory of Matrices*. Courier Corporation, 2005.
- [25] N.V. Kuznetsov, G.A. Leonov, M.V. Yuldashev, R.V. Yuldashev. Solution of the Gardner problem on the lock-in range of phase-locked loop. *ArXiv e-prints*, 2017. 1705.05013.
- [26] E.A. Barbashin N.N. Krasovskii. On stability of motion in the large. *Doklady Mathematics*, 86(3):453–456, 1952.

- [27] Joseph La Salle Solomon Lefschetz. *Stability by Liapunov's Direct Method with Applications by Joseph L Salle and Solomon Lefschetz*, volume 4. Elsevier, 2012.
- [28] V.A. Yakubovich, G.A. Leonov, A.Kh. Gelig. *Stability of Stationary Sets in Control Systems with Discontinuous Nonlinearities*. World Scientific, Singapore, 2004.
- [29] G.A. Leonov N.V. Kuznetsov. *Nonlinear mathematical models of phase-locked loops. Stability and oscillations*. Cambridge Scientific Publishers, 2014.
- [30] G.A. Leonov K.D. Aleksandrov. Frequency-Domain Criteria for the Global Stability of Phase Synchronization Systems. *Doklady Mathematics*, 92(3):764–768, 2015.
- [31] Yu. N. Bakaev. Stability and dynamical properties of astatic frequency synchronization system. *Radiotekhnika i Elektronika (in Russian)*, 8(3):513–516, 1963.
- [32] D. Abramovitch. Lyapunov redesign of classical digital phase-lock loops. *American Control Conference, 2003. Proceedings of the 2003*, volume 3, pages 2401–2406. IEEE, 2003.
- [33] D. Abramovitch. Analysis and design of a third order phase-lock loop. *21st Century Military Communications – What's Possible?. Conference record. Military Communications Conference*, pages 455–459, 1988.
- [34] D. Abramovitch. Lyapunov redesign of analog phase-lock loops. *Communications, IEEE Transactions on*, 38(12):2197–2202, 1990.
- [35] D. Abramovitch. Method for guaranteeing stable non-linear PLLs, 2004. US Patent App. 10/414,791, <http://www.google.com/patents/US20040208274>.
- [36] Кузнецов Н.В., Лобачев М.Ю., Юлдашев М.В., Юлдашев Р.В. О проблеме Гарднера оценки полосы быстрого захвата без проскальзывания для системы ФАПЧ третьего порядка. *Доклады Академии наук*, 2019. [Статья отправлена в редакцию].