Стабилизация неустойчивых периодических траекторий адаптивным методом Пирагаса

Шестаков М.О., студент СПбГУ
Кузнецов Н. В., д.ф.-м.н, проф. СПбГУ
Мокаев Т. Н., д.ф.-м.н.,проф. СПбГУ

Аннотация

В данной работе представлено описание адаптивного метода Пирагаса для стабилизиации неустойчивых периодических траекторий (UPO) и его применение к двум хаотическим системам Ресслера. Реализиация адаптивного алгоритма была проведена на математических пакетах Julia и Matlab, позволяющих решать системы дифференциальных уравнений с запаздыванием.

Введение

В теории управления важную роль играет задача стабилизации хаотических решений динамических систем. Большое число публикаций, посвящённых анализу того, каким образом меняется хаотическое поведение решений, процессу регулирования периодических траекторий в динамических системах непрерывного и дискретного типа является тому подтверждением (см. [9]). Интерес к проблемам стабилизации мотивируется как практическими задачами возникающими в теории управления, так и формулировками открытых матеметических проблем.

Существует несколько наиболее известных методов стабилизации хаотических решений динамических систем [3]:

(i) Метод линеаризации отображения Пуанкаре, который был создан для применения к системам дискретного времени третьего порядка. Его идея состоит расчёте собственных векторов и собственных значений матрицы Якоби для отображения Пуанкаре. Данный метод,который также носит название OGY, предложили Отт, Гребоги и Йорк в статье [2].

(ii) Метод эпизодической пропорциональной обратной связи, применяемый для стабилизации амплитуды предельного цикла. Сама идея метода состоит в измерении локального максимума (или минимума) выхода $y(t)$.

(iii) Метод комбинированного управления, который можно использовать для систем вида

$$\dot{x}(t) = F(x(t)) + Bu \tag{1}$$

при условии, что $detB \neq 0$ и число управлений равно числу состояний системы.

(iv) Классический метод Пирагаса [4]. В данном алгоритме решается задача стабилизации периодического решения нелинейной системы $\dot{x} = F(x, u)$ с помощью закона обратной связи с запазывающим элементом:

$$u(t) = K(x(t) - x(t - \tau)), \tag{2}$$

где K- коэффициент усиления, τ- время запаздывания. Данный метод иначе называют методом управления обратной связи с запаздыванием (DFC).

Согласно [1] одним из преимуществ DFC является то, что он является неинвазивным в том смысле, что сигнал управления исчезает, когда достигается стабилизация. Кроме того DFC не требует точного знания о форме искомого периодического решения или виде исходной системы. Отметим, что дальнейшее исследование метода Пирагоса показало, что он обладает ограничениями. В частности, было показано, что DFC применим для систем с нечетным числом вещественных показателей Флоке (больше 1) [7].

Главным недостатком метода DFC является то, что необходимо заранее обладать информацией о значении периода искомых неустойчивых периодических траекторий (UPO) и о значении коэффициента усиления. Данные значения вычисляются экспериментальным путём, что не позволяет применить этот метод к системам, в которых период исходных траекторий и коэффициент усиления априори неизвестны.

Адаптивный метод Пирагаса

В 2010 году в статье [1] была предложена модификация метода DFC, позволяющая вычислять период искомого решения исходной системы и коэфициент усиления адаптивным путём.

Рассмотрим нелинейную систему в общем виде, которая описывается набором обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{y}(t) = P(y(t), x(t)), \dot{x}(t) = Q(y(t), x(t)), \tag{3}$$

где явная форма непрерывного векторного поля (P, Q) на практике может быть неизвестна, под $y(t)$ - наблюдаемый выходной сигнал, а под $x(t)$ - внутренний сигнал, который недоступен или не представляет интереса.

Чтобы стабилизировать UPO, встроенные в хаотический аттрактор, генерируемый уравнением (3), можно модифицировать уравнение (3) и перейти к управляемой систему с внешним непрерывным входом:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= P(y(t), x(t)) + F(t), \\ \dot{x}(t) &= Q(y(t), x(t)), \\ F(t) &= \gamma(y(t-\tau(t)) - y(t)), \end{aligned} \tag{4}$$

где, в отличие от исходного DFC, в котором величина запаздывания τ и коэффициент усиления γ постоянны, данные величины задаются следующими адаптивными правилами:

$$\begin{aligned} \dot{\tau}(t) &= -r_1(y(t-\tau(t)) - y(t)), \\ \dot{\gamma}(t) &= r_2(y(t-\tau(t)) - y(t))^2 \end{aligned} \tag{5}$$

с постоянными параметрами r_1 и r_2. Начальные значения для уравнений (4) в сочетании с адаптивными правилами (5) принимаются за постоянные на начальном интервале времени. Адаптивные правила (5) показывают, что чем дальше динамика от желаемых UPO, тем быстрее обе переменные подстраиваются под реализацию стабилизации. В частности, монотонность в формуле (5) гарантирует постоянное и достаточно большое усиление контроля в процессе стабилизации.

Результаты

В данной работе адаптивный метод Пирагаса был реализован и применён на примере двух хаотических систем Ресслера.

Рассмотрим следующую систему Ресслера [6]:

$$\begin{cases} \dot{x_1}(t) = -x_2(t) - x_3(t), \\ \dot{x_2}(t) = x_1(t) + 0.2x_2(t), \\ \dot{x_3}(t) = 0.2 + x_3(t)(x_1(t) - 5.7). \end{cases} \tag{6}$$

Управляемая система, позволяющая стабилизировать неустойчивые периодические решения системы (6) имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x_1}(t) = -x_2(t) - x_3(t), \\ \dot{x_2}(t) = x_1(t) + 0.2x_2(t) + F(t), \\ \dot{x_3}(t) = 0.2 + x_3(t)(x_1(t) - 5.7), \\ \dot{\tau}(t) = -r_1(x_2(t-\tau(t)) - x_2(t)), \\ \dot{\gamma}(t) = r_2(x_2(t-\tau(t)) - x_2(t))^2, \end{cases} \tag{7}$$

где $F(t)$ имеет следующий вид:

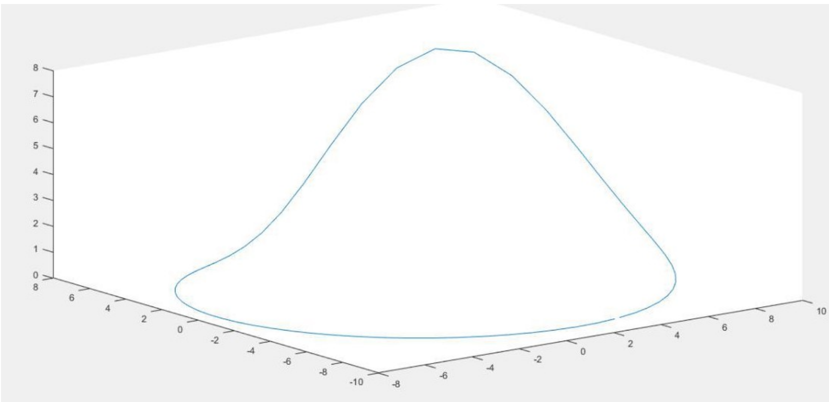
$$F(t) = I_{|S(t)|<F_0}S(t) + F_0 I_{S(t)>F_0} - F_0 I_{S(t)<-F0}, \tag{8}$$

с функцией $S(t) = \gamma(t)(x_2(t-\tau(t)) - x_2(t))$, где I_A - функция индикации множества A, а $F_0 > 0$ - небольшая постоянная. Такая конфигурация возмущений была предложена в статье [8].

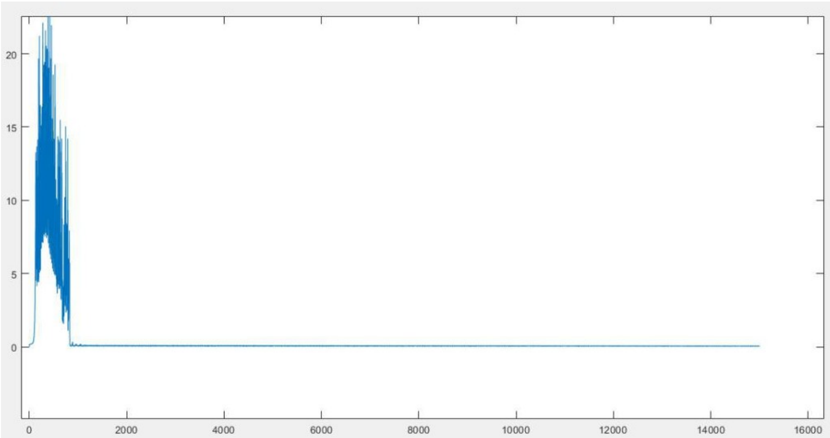
В результате численных экспериментов получилось стабилизировать решение системы (7) с начальными данными $x_1(0) = 1.0, x_2(0) = 1.0, x_3(0) = 1.0, \tau(0) = 1.0, \gamma(0) = 0.55$. В ходе эксперимента были подобраны параметры $r_1 = 0.02, r_2 = 0.01$.

Стабилизация хаотического решения системы (6) была реализована с помощью математических пакетов Matlab и Julia.

Ниже предложен график найденной периодической траектории.



Ниже предложен график изменения величины $||x(t) - x(t-\tau(t))||$ на временном промежутке [0,15000].



Далее рассмотрим следующую системуРесслера [5]:

$$\begin{cases} \dot{x_1}(t) = -x_2(t) - x_3(t), \\ \dot{x_2}(t) = x_1(t), \\ \dot{x_3}(t) = a(x_2(t) - x_2^2(t)) - bx_3(t). \end{cases} \tag{9}$$

Управляемая система, позволяющая стабилизировать неустойчивые периодические решения системы (8) имеет вид:

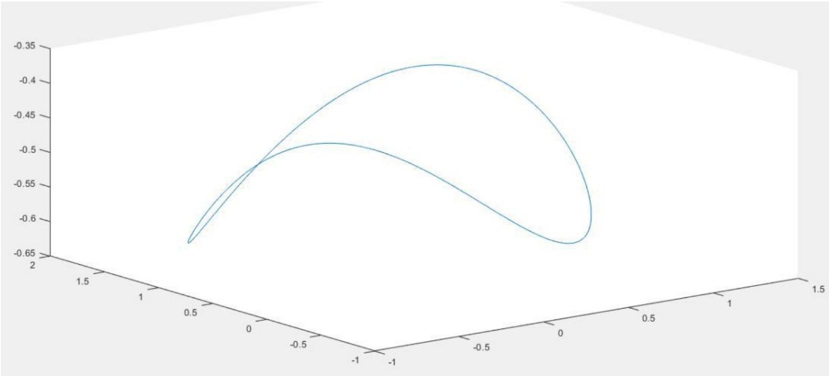
$$\begin{cases} \dot{x_1}(t) = -x_2(t) - x_3(t), \\ \dot{x_2}(t) = x_1(t) + F(t), \\ \dot{x_3}(t) = a(x_2(t) - x_2^2(t)) - bx_3(t), \\ \dot{\tau}(t) = -r_1(x_2(t - \tau(t)) - x_2(t)), \\ \dot{\gamma}(t) = r_2(x_2(t - \tau(t)) - x_2(t))^2, \end{cases} \tag{10}$$

где $F(t)$ имеет вид (8), коэффициенты $a = 0.386, b = 0.2$.

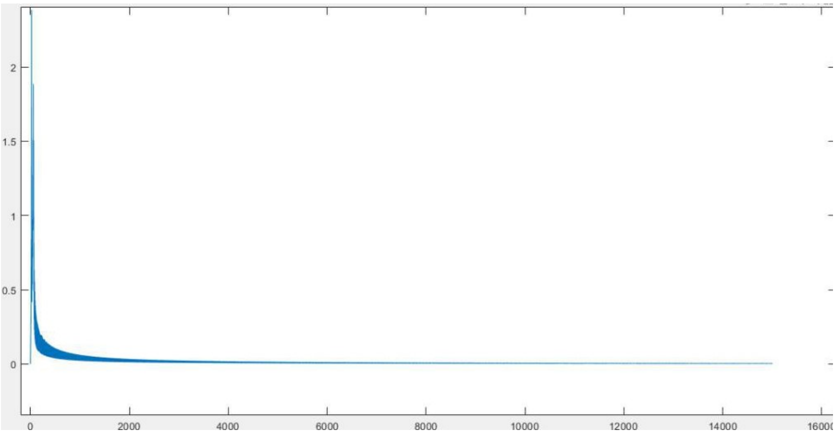
В результате численных экспериментов получилось стабилизировать решение системы (10) с начальными данными $x_1(0) = 0.1, x_2(0) = 0.0, x_3(0) = 0.1, \tau(0) = 1.0, \gamma(0) = 0.2$. В ходе эксперимента были подобраны параметры $r_1 = 0.02, r_2 = 0.01$.

Стабилизация хаотического решения системы (9) была реализована с помощью математических пакетов Matlab и Julia. Стабилизация хаотического рещения для этой системы была реализована впервые. Период найденного решения равен 6.24661, коэффициент усиления равен 0.577081.

Ниже предложен график найденной периодической траектории.



Ниже предложен график изменения величины $||x(t) - x(t - \tau(t))||$ на временном промежутке [0,15000].



Заключение

В данной работе было представлено краткое описание адаптивного метода Пирагаса и его применение к двум системаРесслера. Получилось стабилизировать неустойчивые периодические траектории (UPO) на примере систем (6) и (9) с помощью численных экспериментов, используя математические пакеты Julia и Matlab. Стабилизация неустойчивого периодического решения для системы (9) была получена впервые.

Литература

[1] Lin W. et al. Locating unstable periodic orbits: When adaptation integrates into delayed feedback control //Physical Review E. – 2010. – Т. 82. – №. 4. – С. 046214.

[2] E. Ott, C. Grebogi, and J. A. Yorke, Phys. Rev. Lett. 64, 1196 (1990).

[3] Fradkov A.L. Cybernetic physics: principles and examples // book. - 2003

[4] Pyragas K. Continuous control of chaos by self-controlling feedback //Physics letters A. – 1992. – Т. 170. – №. 6. – С. 421-428.

[5] Rössler O. E. Continuous chaos—four prototype equations //Annals of the New York Academy of Sciences. – 1979. – Т. 316. – №. 1. – С. 376-392.

[6] Kuznetsov N. V., Mokaev T. N. A note on finite-time Lyapunov dimension of the Rossler attractor //arXiv preprint arXiv:1807.00235. – 2018.

[7] Just W. et al. Beyond the odd number limitation: A bifurcation analysis of time-delayed feedback control //Physical Review E. – 2007. – Т. 76. – №. 2. – С. 026210.

[8] Pyragas V., Pyragas K. Delayed feedback control of the Lorenz system: An analytical treatment at a subcritical Hopf bifurcation //Physical Review E. – 2006. – Т. 73. – №. 3. – С. 036215

[9] Леонов Г. А., Звягинцева К. А. Стабилизация по Пирагасу дискретных систем запаздывающей обратной связью с периодическим импульсным коэффициентом усиления //Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. – 2015. – Т. 2. – №. 3.