О бескванторной выразимости графика возведения в квадрат в структуре $\langle \mathbb{N}; 1, +, Sq, | \rangle$

Старчак М. Р., аспирант кафедры информатики СПбГУ,
mikhstark@gmail.com

Аннотация

В работе доказывается бескванторная выразимость в структуре $\langle \mathbb{N}; 1, +, Sq, | \rangle$ отношения $x = y^2$. Двухместный предикатный символ $|$ соответствует отношению делимости, а Sq – свойству «являться квадратом некоторого натурального числа». Следствием этого результата является неразрещимость экзистенциальной теории указанной структуры.

Введение

Разрешимость экзистенциальной теории натуральных чисел с единицей, сложением и делимостью была доказана независимо А.П. Бельтюковым [1] и Л. Липшицем [7]. Этот результат примечателен в том смысле, что всякое перечислимое множество выразимо в той же сигнатуре, но с кванторной приставкой вида $\exists ... \exists \forall$ (см. [8]), и, кроме того, как до этого было показано Н.К. Косовским в [2], экзистенциальной выразимости перечислимых множеств можно добиться дополнением сигнатуры любым предикатом степенного роста. Появлению такого рода вопросов непосредственно предшествовало доказательство экзистенциальной выразимости перечислимых множеств с помощью сложения, умножения и равенства, полученное Ю.В. Матиясевичем [3, 4].

Обозначим $Sq(x)$ одноместное отношение, истинное только для тех натуральных чисел x, которые являются квадратами некоторых натуральных чисел. В связи с экзистенциальной выразимостью отношения $x \neq y^2$ в структуре $\langle \mathbb{N}; 1, +, | \rangle$, показанной Л. Липшицем в [8], Л. ван ден Дрисом и А. Уилки [6] был задан вопрос об экзистенциальной выразимости в этой структуре отношения $\neg Sq(x)$. Хотя вопрос о неразрешимости экзистенциальной теории структуры $\langle \mathbb{N}; 1, +, Sq \rangle$ остаётся открытым (см.[9], положительный ответ следовал бы из истинности гипотезы Бюхи), ван ден Дрису и Уилки, по-видимому, было известно о неразрешимости $\exists \mathrm{Th} \langle \mathbb{N}; 1, +, Sq, | \rangle$. Так как автору не удалось найти ссылку на этот результат, в данной заметке мы покажем, что отношение $y = x^2$ выразимо формулой $y = x^2 \Leftrightarrow Sq(y) \wedge Sq(y + 2x + 1) \wedge x \mid y \wedge 1 + x \mid y + 2x + 1$, из чего следует неразрешимость $\exists\mathrm{Th}\langle\mathbb{N}; 1, +, Sq, |\rangle$ и невозможность выразить отношение $Sq(x)$ никакой экзистенциальной формулой с помощью только единицы, сложения и делимости.

Теорема и следствия

Теорема 1. *Отношение $y = x^2$ выразимо бескванторной формулой в структуре $\langle\mathbb{N}; 1, +, Sq, |\rangle$, следовательно, экзистенциальная теория этой структуры неразрешима.*

Доказательство. Покажем, что $y = x^2 \Leftrightarrow Sq(y) \wedge Sq(y + 2x + 1) \wedge x \mid y \wedge 1 + x \mid y + 2x + 1$.

Последнюю делимость можно переписать в виде $1 + x \mid y - 1$. Пусть $y = z^2$, тогда из того, что $x \mid y$ следует, что $z^2 = x \cdot u$ для некоторого $u > 0$ (если $u = 0$, то $y = 0$, поэтому из последней делимости $1 + x \mid x$, из чего уже следует $x = 0$).

Перепишем делимость $1 + x \mid y - 1$ в виде $1 + x \mid x \cdot u - 1$, что равносильно $1 + x \mid u + 1$. Пусть теперь $u + 1 = (x + 1) \cdot v$ для некоторого $v > 0$. Тогда получим цепочку равенств $y + 2x + 1 = x \cdot u + 2x + 1 = x((x + 1)v - 1) + 2x + 1 = x(x + 1)v + (x + 1) = (x + 1)(xv + 1)$. Осталось показать, что невозможно $v > 1$.

Предположим, что $v > 1$ и выполняется $Sq((x + 1)(xv + 1) - 2x - 1) \wedge Sq((x + 1)(xv + 1))$. Пусть $t^2 = (x + 1)(xv + 1)$ для некоторого $t > 0$. Так как $v > 1$, то $t > x + 1$, но в этом случае ближайший квадрат, меньший t^2 есть $(t - 1)^2$ и $t^2 - (t - 1)^2 > 2(x + 1) - 1 = 2x + 1$, поэтому $\neg Sq(t^2 - 2x - 1)$, значит предположение неверно, $v = 1$, а $y = x^2$. $\square$

Выведем два следствия из полученного результата. Первый факт имеет место ввиду разрешимости $\exists\mathrm{Th}\langle\mathbb{N}; 1, +, |\rangle$.

Следствие 1.1. *Отношение $Sq(x)$ не является экзистенциально выразимым в структуре $\langle\mathbb{N}; 1, +, |\rangle$.*

С другой стороны, для теории $\exists\mathrm{Th}\langle\mathbb{N}; 1, +, Sq\rangle$ получим следующее достаточное условие её неразрешимости.

Следствие 1.2. *Если отношение делимости экзистенциально выразимо в структуре $\langle\mathbb{N}; 1, +, Sq\rangle$, то экзистенциальная теория этой структуры неразрешима.*

Заключение

Данная заметка является, по существу, дополнением к работе автора [5] о некоторых вопросах выразимости и разрешимости для отношения $x(x+1) \mid y$. Решенный здесь вопрос был оставлен в указанной работе в качестве открытого и оказался не слишком трудным. Более любопытным мог бы оказаться аналогичный вопрос о выразимости отношения $y = x^2$ некоторой экзистенциальной формулой в структуре $\langle \mathbb{N}; 1, +, Sq, \perp \rangle$, где $\perp$ соответствует двухместному отношению взаимной простоты двух натуральных чисел.

Литература

[1] *Бельтюков А. П.* Разрешимость универсальной теории натуральных чисел со сложением и делимостью // Записки научных семинаров ЛОМИ. 1975. Т. 60. С. 15–28.

[2] *Косовский Н. К.* О решении систем, состоящих одновременно из уравнений в словах и неравенств в длинах слов // Записки научных семинаров ЛОМИ. 1974. Т. 40. С. 24–29.

[3] *Матиясевич Ю. В.* Диофантовость перечислимых множеств // Докл. АН СССР. 1970. Т. 191, № 2. С. 278–282.

[4] *Матиясевич Ю. В.* Десятая проблема Гильберта. М.: Физматлит. 1993.

[5] *Старчак М. Р.* Некоторые проблемы разрешимости и выразимости для предиката делимости на два последовательных числа // Компьютерные инструменты в образовании. 2018. № 6. С. 5-–15.

[6] *van den Dries L., Wilkie A.J.* The laws of integer divisibility, and solution sets of linear divisibility conditions // The Journal of Symbolic Logic. 2003. Vol. 68, no. 2. P. 503–526.

[7] *Lipshitz L.* The Diophantine problem for addition and divisibility // Transactions of the American Mathematical Society. 1976. Vol. 235. P. 271–283.

[8] *Lipshitz L.* Some remarks on the Diophantine problem for addition and divisibility // Bull. Soc. Math. Belg. Ser. B. 1981. Vol. 33, no. 1. P. 41–52.

[9] *Pasten H., Pheidas T., Vidaux X.* A survey on Buchi's problem: new presentationsand open problems // Zap. Nauchn. Sem. POMI. 2010. Vol. 377. P. 111-–140.