

# Расчет ферм<sup>1</sup>

Наумова Н. В., доцент кафедры теоретической и прикладной механики  
СПбГУ, n.v.naumova@spbu.ru

Бондаренко С. О., студент математико-механического факультета СПбГУ,  
st062459@student.spbu.ru

## Аннотация

В работе рассмотрена задача по определению реакций внешних опор и усилий во всех стержнях фермы. Получены точные аналитические выражения для всех компонентов усилий. Приведено сравнение аналитических и численных результатов. Численные результаты получены с использованием программного комплекса ANSYS.

## Введение

Ферма (фр. *ferme*, от лат. *firmitas* – *прочный*) – стержневая система в строительной механике, остающаяся геометрически неизменяемой после замены ее жестких узлов шарнирными. В элементах фермы, при отсутствии расцентровки стержней и внеузловой нагрузки, возникают только усилия растяжения-сжатия.

Фермы образуются из прямолинейных стержней, соединенных в узлах, в геометрически неизменяемую систему, к которой нагрузка прикладывается только в узлах. Ферменные конструкции – это одна из новых технологий, использованных НАСА при строительстве Международной космической станции. Фермы, доставляемые на орбиту шаттлом, монтируются его экипажем и служат для негерметичного хранения грузов, установки радиаторов, солнечных батарей и различного оборудования.

Преобладающая часть опубликованных работ (см., например, [1], [2]) посвящена расчетам ферм либо только аналитическими, либо численными методами. В предлагаемой статье для проверки достоверности полученных аналитических результатов проведено повторное решение поставленной задачи с использованием программного комплекса ANSYS. Таким образом, решена задача по определению реакций внешних опор и усилий во всех стержнях фермы. Получены точные аналитические выражения для всех компонентов усилий. Приведено сравнение аналитических и численных результатов.

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 19-01-00208-а)

## Постановка задачи

Рассмотрим ферменную конструкцию (рис. 1), состоящую из 7 одинаковых стержней длины  $l$ . В узлах IV и V приложены внешние нагрузки  $P$  и  $Q$ , в узле I – шарнирно-неподвижная опора, в узле V – подвижный шарнир. Требуется рассчитать усилия растяжения (или сжатия) в каждом стержне, а также определить силы реакции связей (в узлах I и V).

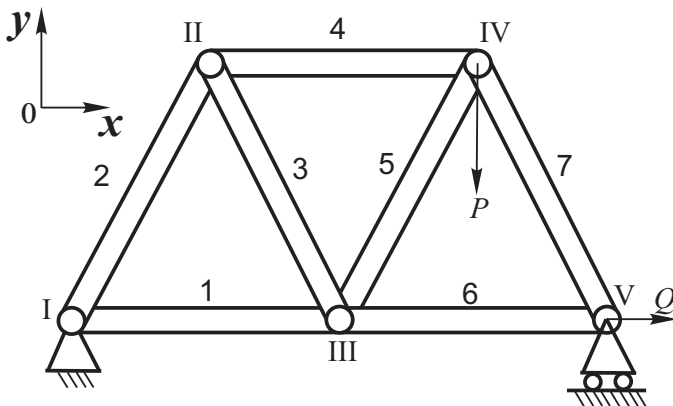


Рис. 1: Пример ферменной конструкции

## Аналитические расчеты

Расчет ферм подразумевает определение реакций внешних связей (опор) фермы, а также нахождение усилий во всех ее стержнях. Для определения реакций внешних связей рассмотрим ферму как одно твердое тело, а усилия, возникающие в стержнях, найдем *методом вырезания узлов*. Для того, чтобы поставленная задача была статически разрешима, должны быть выполнены следующие условия:

- Так как ферма "в целом" представляет собой твердое тело, для которого можно написать 3 уравнения равновесия (в случае плоской задачи), то количество неизвестных сил реакций связи должно быть не больше трех.
- У фермы не должно быть "лишних" стержней при соблюдении жесткости всей конструкции, это означает, что должна выполняться связь

между количеством узлов и стержней  $S = 2 \cdot N - 3$ , где  $N$  — количество узлов,  $S$  — количество стержней.

- Стержни фермы работают только на растяжение или сжатие, не испытывают изгибов.

Метод вырезания узлов сводится к последовательному рассмотрению условий равновесия сил, сходящихся в каждом из узлов фермы. Суть метода состоит в рассмотрении в качестве объекта равновесия один, ”вырезанный” из фермы узел, находящийся под действием заданных сил, действующих на этот узел (для опорных узлов добавляются реакции опор), и сил реакции стержней, соединенных в этом узле (принцип освобождения от связей), которые для рассматриваемого узла являются связями.

На каждый узел действует плоская система сходящихся сил. Выпишем условия равновесия такой системы сил в проекциях на оси  $Ox$  и  $Oy$ . Силы реакции связей в узлах I и V обозначим  $X_A$ ,  $Y_A$ ,  $Y_B$ .

$$\text{узел I : } X_A + F_1 + F_2 \cdot \cos 60^\circ = 0, \quad (1)$$

$$Y_A + F_2 \cdot \sin 60^\circ = 0, \quad (2)$$

$$\text{узел II : } F_4 + F_3 \cdot \cos 60^\circ - F_2 \cdot \cos 60^\circ = 0, \quad (3)$$

$$- F_2 \cdot \sin 60^\circ - F_3 \cdot \sin 60^\circ = 0, \quad (4)$$

$$\text{узел III : } -F_1 - F_3 \cdot \cos 60^\circ + F_5 \cdot \cos 60^\circ + F_6 = 0, \quad (5)$$

$$F_3 \cdot \sin 60^\circ + F_5 \cdot \sin 60^\circ = 0, \quad (6)$$

$$\text{узел IV : } -F_4 - F_5 \cdot \cos 60^\circ + F_7 \cdot \cos 60^\circ = 0, \quad (7)$$

$$-P - F_5 \cdot \sin 60^\circ - F_7 \cdot \sin 60^\circ = 0, \quad (8)$$

$$\text{узел V : } -F_6 - F_7 \cdot \cos 60^\circ + Q = 0, \quad (9)$$

$$Y_B + F_7 \cdot \sin 60^\circ = 0. \quad (10)$$

Решая систему (1) — (10), получим следующие значения для неизвестных сил:

$$F_1 = Q + \frac{P}{4\sqrt{3}}, \quad F_2 = -\frac{P}{2\sqrt{3}}, \quad F_3 = -F_2 = -F_4 = -F_5, \quad (11)$$

$$F_6 = Q + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot P, \quad F_7 = 3 \cdot F_5, \quad X_A = -Q, \quad Y_A = \frac{1}{4}P, \quad Y_B = \frac{3}{4}P. \quad (12)$$

## Численные расчеты

Для проверки достоверности полученных аналитических результатов проведем повторное решение данной задачи с использованием программного комплекса ANSYS. Геометрические размеры фермы задаются размерами стержней  $l = 10$  м. Предполагается, что все стержни имеют одинаковую длину, жесткость, которая определяется модулем упругости  $E = 2.07 \cdot 10^{11}$  Па и площадью поперечного сечения  $S = 10^{-3}$  м. Величины внешних нагрузок  $P = 1000$  Н,  $Q = 100$  Н. Отнесем ферму к декартовой прямоугольной системе координат  $Oxy$ , как показано на рис. 1. Координаты узлов фермы могут быть вычислены по параметру длины  $l$ .

Во время сеанса работы пользователя все выполняемые команды записываются в файл \*.log. Командный файл может быть использован для повторного выполнения некоторых действий и расчета аналогичных задач.

## Заключение

В таблице 1 приведены численные значения сил, возникающих в стержнях рассматриваемой фермы, а также значения сил реакции связей в узлах I и V.

Номер стержня	Усилие, N	Аналит. формулы (11) — (12)	Метод конечных элементов, ANSYS
1	$F_1$	244.337	244.34
2	$F_2$	- 288.675	- 288.676
3	$F_3$	288.675	288.676
4	$F_4$	- 288.675	- 288.676
5	$F_5$	- 288.675	- 288.676
6	$F_6$	533.012	533.01
7	$F_7$	- 866.025	-866.025
узел I	$R_A$	269.26	269.26
узел V	$Y_B$	750	750

Таблица 1: Сравнение аналитических и численных результатов.

В узле I найдена суммарная реакция  $R_A$ . Сравнение численных и аналитических расчетов, полученных по формулам (11) — (12) показывает до-

статочно хорошее совпадение результатов. Максимальная относительная погрешность составляет 2%. Изначально предполагалось, что все неизвестные усилия  $F_i$  являются сжимающими, поэтому знак *минус* в таблице 1 означает, что данный стержень, находится под воздействием не сжимающего, а, наоборот, растягивающего усилия.

## Литература

- [1] *Смоляго Н. А., Яковлев О.А.* Совершенствование структуры плоской фермы. Вестник науки и образования Северо-Запада России. 2015. Т.1, Вып. 1. <http://vestnik-nauki.ru/>
- [2] *Воробьев А. В., Фаизов И.Н.* Проектирование усиления раскосной фермы. Вестник ПНИПУ. Строительство и архитектура. 2012. Вып. 1.
- [3] *Васильев А. А.* Металлические конструкции, 1976. Глава IX Фермы. 3 Краткий исторический обзор развития металлических конструкций. Стр. 8–10
- [4] *Васильев А. А.* Металлические конструкции, 1976. Глава IX Фермы. 33 Характеристика, классификация, компоновка и типы сечения ферм. Стр. 210–213.
- [5] *Файбишенко В. К.* Металлические конструкции, 1984. Глава 5 Фермы. 5.2 Стропильные фермы, очертания и типы решеток. Стр. 92–98.
- [6] *Файбишенко В. К.* Металлические конструкции, 1984. Глава 5 Фермы. 5.5 Работа и расчет стропильных ферм. Стр. 105–110.
- [7] *Будур А. И., Белогуров В. Д.* Стальные конструкции. Справочник конструктора / Под общей ред. Шимановского А. В.. – К.: Сталь, 2010. – 299 с.