Хаос в системе финансового рынка

Камбалин А. В., студент мат.-мех. СПбГУ
Мокаев Т. Н., д.ф.-м.н, проф. СПбГУ
Кузнецов Н. В., д.ф.-м.н, проф. СПбГУ

Аннотация

В данной работе изучается система, описывающая поведение активов на финансовом рынке, рассматриваются хаотические аттракторы при различных параметрах, вычисляются конечно-временные показатели Ляпунова для оценки конечно-временной размерности Ляпунова, которая характеризует хаотичность системы.

Введение

Моделирование поведения финансовых потоков в условиях глобального рынка является на сегоднешний день актуальной задачей, этому посвящены, например, работы [1, 3] В частности, моделирование с помощью систем дифференциальных уравнений позволяет применять богатый аппарат теории устойчивости для исследования поведения тех или иных описываемых показателей, особенно интересным является тот случай, когда поведение системы становится хаотичным. Хаотическое поведение может быть описана с помощью ляпуновских показателей, для вычисления которых часто нет аналитических выражений, поэтому существуют разные численно-аналитические методы для получения их численных оценок.

Введем далее необходимые определения динамической системы, аттрактора и размерности Ляпунова следуя работе [4, 9].

Пусть дано автономное дифференциальное уравнение:

$$\dot{u} = f(u), \quad t \in \mathbb{R},\ u \in \mathbb{R}^3, \tag{1}$$

где $f(u)$ непрерывно дифференцируемая функция $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Определим $u(t, u_0)$, как решение такое, что $u(0, u_0) = u_0$.

Определение 1 *Говорим, что замкнутое и ограниченное множество K для системы является:*

1. *локальным аттрактором, если это минимальное локально притягивающее множество т.е.* $\lim_{t\to+\infty} \operatorname{dist}(K, u(t, u_0)) = 0\ \forall u_0 \in K(\varepsilon)$, *где $K(\varepsilon)$ – некоторая ε-окрестность множества K.*

2. *глобальным аттрактором, если это минимальное глобально притягивающее множество т.е.* $\lim_{t\to+\infty} \operatorname{dist}(K, u(t, u_0)) = 0\ \forall u_0 \in \mathbb{R}^3$.

где $\operatorname{dist}(K, u) = \inf_{v\in K} ||v - u||$ *есть расстояние от точки* $u \in \mathbb{R}^3$ *до множества* K.

Пусть непустое множество $K \subset \mathbb{R}^3$ инвариантно относительно системы (1). Рассмотрим линеаризацию системы (1) вдоль решения $LE^t(u)$:

$$\dot{y} = J(\varphi^t(u))y, \quad J(u) = Df(u), \tag{2}$$

где $J(u)$ — 3×3 матрица Якоби, элементы которой являются непрерывными функциями от u. Предположим, что $\det J(u) \neq 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}^3$. Рассмотрим фундаментальную матрицу линеаризованной системы (2) $D\varphi^t(u)$ такую, что $D\varphi^0(u) = I$, где I — единичная 3×3 матрица.

Пусть $\sigma_i(t, u) = \sigma_i(D\varphi^t(u))$, $i = 1, 2, 3$ будут сингулярные числа матрицы $D\varphi^t$(u), отсортированные так, что $\sigma_1(t, u) \geq \sigma_2(t, u) \geq \sigma_3(t, u) > 0$ для любого u и $t \geq 0$.

Определим функцию сингулярных чисел порядка $d \in [0, 3]$ в точке $u \in \mathbb{R}^3$ следующим образом

$$\begin{cases} \omega_0(D\varphi^t(u)) = 1, \quad \omega_3(D\varphi^t(u)) = \sigma_1(t, u)\sigma_2(t, u)\sigma_3(t, u) \\ \omega_d(D\varphi^t(u)) = \sigma_1(t, u) \cdots \sigma_{\lfloor d\rfloor}(t, u)\sigma_{\lfloor d\rfloor+1}(t, u)^{d-\lfloor d\rfloor}, \quad d \in (0, 3), \end{cases} \tag{3}$$

где $\lfloor d\rfloor$ это наибольшее целое число не превосходящее d.

Определение 2 *Локальную размерность Ляпунова в точке* $u \in \mathbb{R}^3$ *определим как*

$$\dim_{\mathrm{L}}(\varphi^t, u) = \sup\{d \in [0, 3] : \omega_d(D\varphi^t(u)) \geq 1\}$$

и размерность Ляпунова относительно инвариантного множества K *определим как*

$$\dim_{\mathrm{L}}(\varphi^t, K) = \sup_{u\in K} \dim_L(\varphi^t, u) = \sup_{u\in K} \sup\{d \in [0, 3] : \omega_d(D\varphi^t(u)) \geq 1\}.$$

Определение 3 *Размерность Ляпунова динамической системы относительно инвариантного множества* K *определим как*

$$\dim_{\mathrm{L}} K = \inf_{t\geq 0} \dim_L(\varphi^t, K).$$

Определение 4 *Функции показателей Ляпунова по сингулярным значениям в точке $u \in \mathbb{R}^3$ обозначим как:*

$$LE_i(t,u) = LE_i(D\varphi^t(u)), i = 1,2,3, \quad LE_1(t,u) \geq LE_2(t,u) \geq LE_3(t,u)$$

и определим как:

$$LE_i(t,u) := \frac{1}{t} \ln \sigma_i(t,u).$$

Определение 5 *Ляпуновские показатели по сингулярным значениям в точке $u \in \mathbb{R}^3$ определим как:*

$$LE_i(u) := \limsup_{t \to +\infty} LE_i(t,u) = \limsup_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \ln \sigma_i(t,u), i = 1,2,3.$$

Для того, чтобы получить численную оценку размерности одной траектории будем использовать формулу Каплана-Йорке:

$$\dim_{\mathrm{L}}^{\mathrm{KY}}(\{LE_i(t,u)\}_1^3) = j(t,u) + \frac{LE_1(t,u) + LE_2(t,u) + \ldots + LE_j(t,u)}{|LE_{j+1}(t,u)|}, \tag{4}$$

где $LE_i(t,u)$ - i-ый ляпуновский показатель в точке $u \in \mathbb{R}^3$,
$j(t,u) = \max\limits_{m \in \{1,2,3\}} \sum\limits_{i=1}^{m} LE_i(t,u) \geq 0.$

Далее делается оценка размерности Ляпунова с помощью конечно-временных показателей Ляпунова.

Численная оценка размерности Ляпунова

Рассмотрим следующую систему [1]:

$$\begin{cases} \dot{x} = z + (y - a)\,x, \\ \dot{y} = 1 - by - x^2, \\ \dot{z} = -x - cz \end{cases} \quad , a > 0,\ b > 0,\ c > 0. \tag{5}$$

Она описывает качественное изменение цены на рынке, в зависимости от некоторых факторов. Параметры a, b, c – количество сбережений, инвестиционные затраты, эластичность спроса на рекламу, соответственно. Переменные описывают: x - процентная ставка, y - инвестиционный спрос, z - цена.

Данная система так же интересна тем, что не сводится к системе Лоренцевсокого типа [10], поэтому прямой перенос или обобщение результатов на систему (5) невозможен. Сперва, чтобы была возможность численно исследовать об аттракторы системы, было доказано следующее утверждение о диссипативности.

Теорема 1 *Система 5 диссипативна по Левинсону, для функции Ляпунова* $V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$ *выполнено следующее равенство*

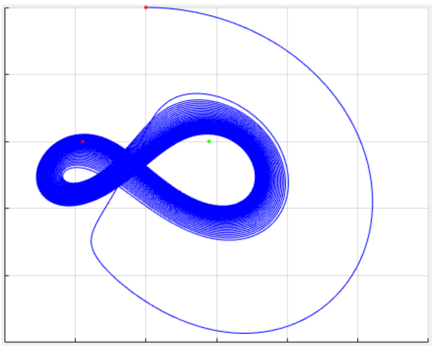
$$V' \leq -PV + Q, \ P, Q > 0$$

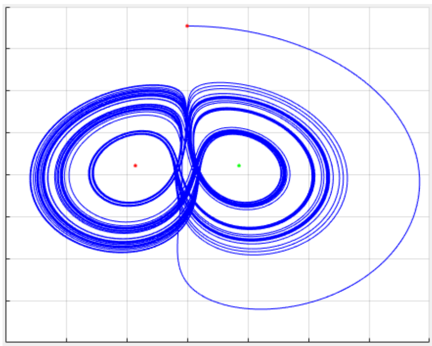
Радиусом диссипативности будет: Если $b > a$*, то* $R^2 = \frac{1}{4ab}$*, если же* $a > b$*, то* $R^2 = \frac{1}{b^2}$

Легко видеть, что данная система будет иметь 3 состояния равновесия:

$$S_0 = \left(0, \frac{1}{b}, 0\right), S_{1,2} = (\mp\sqrt{(c-b-abc)/c}, \frac{(1+ac)}{c}, \pm\frac{1}{c}\sqrt{(c-b-abc)/c})$$

Рассмотрим как себя ведут траектории системы для разных значений параметров и вычислим конечно-временную размерность Ляпунова, с помощью метода вычисления конечно-временных показателей Ляпунова FTLE [2, 8] Полученные значения указаны на рисунках.

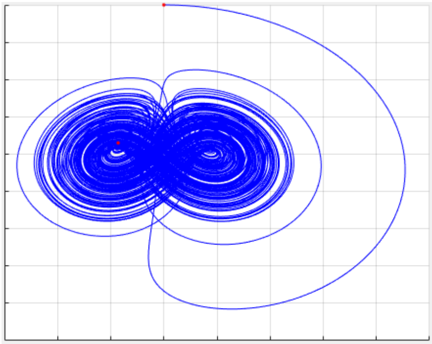




Аттракторы системы (5) с параметрами $a = 3, b = 0.2, c = 1$ и $a = 0.55, b = 0.2, c = 1.5$ Тогда численно получим $\dim_L K_1 \approx 2.0406$, $\dim_L K_2 \approx 2.0484$

Так же можно проверить численно гипотезу Идена-Кузнецова: *Размерность самовозбуждающегося аттрактора не превосходит размерности стационарного состояния, его породившего*[5], которая подтверждается во всех приведённых случаях. Так для параметров $a = 3, b =$

$0.2, c = 1$ полученная размерность $\dim_L S_1 = 2.3426$, а для самовозбуждающегося аттрактора $\dim_L K_1 = 2.0376$, что подтверждает гипотезу в данном случае.



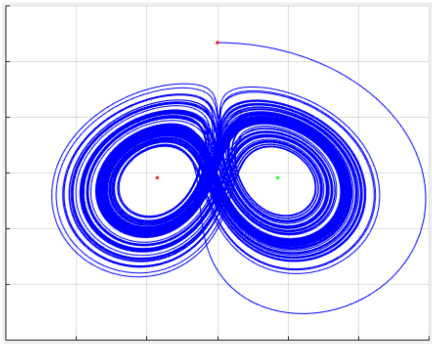


Рис. 1: Аттракторы системы (5) с параметрами $a = 0.3, b = 0.2, c = 1$ и $a = 0.2, b = 0.3, c = 1.4$ Тогда численно получим $\dim_L K_1 \approx 2.0806$, $\dim_L K_2 \approx 2.0807$

Заключение

В данной работе была рассмотрена система моделирующая финансовый рынок, для разных видов аттракторов были получены численные оценки размерности Ляпунова, так же была численно проверена гипотеза Идена для соответствующих состояний равновесия

В дальнейшем планируется с помощью аналитических методов(см. [6, 4, 7])для данной системы сделать оценки размерности Ляпунова.

Литература

[1] Ma Jun-hai, Chen Yu-shu Study for the bifurcation topological structure and the global complicated character of a kind if nonlinear finance system. //IFAC Proceedings Volumes. – 2001. – V. 22. – №. 11. – C. 45-50.

[2] Kuznetsov N. V., Leonov G. A., Mokaev T. N., Prasad A., Shrimali M. D. Finite-time Lyapunov dimension and hidden attractor of the Rabinovich system // arXiv preprint arXiv:1412.7667

[3] Abd-Elouahab, Mohammed Salah and Hamri, Nasr-Eddine and Wang, Junwei. Chaos control of a fractional-order financial system // Mathematical Problems in Engineering. 2010. Vol. 2010

[4] Kuznetsov N. The Lyapunov dimension and its estimation via the Leonov method // Physics Letters A. 2016.

[5] Eden A. An abstract theory of L-exponents with applications to dimension analysis (PhD thesis). – Indiana University, 1989.

[6] Г. А. Леонов. Функции Ляпунова в оценках размерности аттракторов динамических систем // Записки научных семинаров ПОМИ: 2000. Vol. 226.

[7] Kuznetsov N. V., Leonov G. A., Mokaev T. N. The Lyapunov dimension and its computation for self-excited and hidden attractors in the Glukhovsky-Dolzhansky fluid convection model // arXiv preprint arXiv:1509.09161

[8] Kuznetsov N. V., Leonov G. A., Mokaev T. N. Finite-time and exact Lyapunov dimension of the Henon map // arXiv preprint arXiv:1712.01270. – 2017.

[9] Леонов Г. А. Странные аттракторы и классическая теория устойчивости движения. — Изд-во СПбГУ СПб., 2004.

[10] Leonov G. A., Kuznetsov N. V., Mokaev T. N. Homoclinic orbits, and self-excited and hidden attractors in a Lorenz-like system describing convective fluid motion // The European Physical Journal Special Topics. – 2015. – T. 224. – №. 8. – C. 1421-1458.