

ЛОКАЛИЗАЦИЯ СЛОЖНЫХ АВТОКОЛЕБАНИЙ В РЕЛЕЙНЫХ СИСТЕМАХ С ИДЕАЛЬНЫМ ГИСТЕРЕЗИСОМ

Кузнецов Н. В., д.ф.-м.н, проф. СПбГУ
Мокаев Р. Н., к.ф.-м.н, мл. науч. сотр. СПбГУ
Акимова Е. Д., студент 4 курса СПбГУ

Аннотация

В данной работе разрабатывается аналитико-численный алгоритм поиска сложных автоколебаний в релейных системах с идеальным гистерезисом. Алгоритм, реализованный в среде Matlab, применяется к модифицированной системе Фиттса. Результат работы алгоритма сравнивается с уже имеющимся результатом, полученным методом точечных отображений Андронова.

Введение

С конца XIX века активно ведётся изучение вопроса о наличии периодических колебаний (предельных циклов) в различных нелинейных динамических системах автоматического регулирования. Устойчивому предельному циклу в фазовом пространстве системы соответствует наличие автоколебаний. Во многих случаях автоколебания нежелательны, однако для некоторых систем они являются основным рабочим режимом [11]. В связи с этим поиск автоколебаний является актуальной и сложной задачей [6, 8].

На сегодняшний день существует большое количество методов поиска автоколебаний, например, метод гармонического баланса [3], метод точечных отображений Андронова [1], метод Цыпкина [4] и метод годографа возмущённой релейной системы (LPRS) [7]. Особый интерес представляют системы, в фазовом пространстве которых присутствуют сложные автоколебания, то есть автоколебания с переключением режима не на полупериоде, поскольку поиск таких автоколебаний выходит за рамки многих уже существующих методов. Однако подход, основанный на анализе отображений Пуанкаре, который использовался при разработке метода LPRS, может быть применён для их локализации.

Аналитико-численный алгоритм поиска сложных колебаний

Рассмотрим следующую систему:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx, \\ u &= -\operatorname{sign} y,\end{aligned}\tag{1}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ — вектор состояния, $y \in \mathbb{R}^1$ — выход, u — управление. Тогда решение при постоянном управлении u задаётся следующим образом:

$$x(t) = e^{At}x(0) + A^{-1}(e^{At} - I)Bu.\tag{2}$$

Будем считать, что решение (2) имеет два переключения режима на периоде. Пусть моменту времени $t = 0$ соответствует смена режима управления с -1 на $+1$, а $\rho_p = x(0)$ — вектор состояния в момент времени $t = 0$. Обозначим через θ_1 и θ_2 длительности положительного и отрицательного управления соответственно. Тогда векторы состояния в моменты времени θ_1 и $\theta_1 + \theta_2$ можно записать следующим образом

$$x(\theta_1) = \eta_p = e^{A\theta_1}\rho_p + A^{-1}(e^{A\theta_1} - I)B,\tag{3}$$

$$x(\theta_1 + \theta_2) = x(T) = \rho_p = e^{A\theta_2}\eta_p - A^{-1}(e^{A\theta_2} - I)B.\tag{4}$$

Уравнения (3) и (4) задают отображение Пуанкаре для системы (1). Чтобы найти периодическое решение этой системе, требуется найти неподвижную точку отображения Пуанкаре.

Исходя из этих условий смены режима для идеального реле и уравнений (3)-(4), были рассмотрены следующие функции

$$f_\rho^+(T, \lambda) = -C(I - e^{AT})^{-1}A^{-1}(e^{AT} - 2e^{A\theta_2} + I)B,\tag{5}$$

где $\theta_2 = T(1 - \lambda)$ и

$$f_\eta^+(T, \lambda) = C(I - e^{AT})^{-1}A^{-1}(2e^{A\theta_1} - e^{AT} - I)B,\tag{6}$$

где $\theta_1 = \lambda T$ и $\lambda = \frac{\theta_1}{\theta_1 + \theta_2}$ — относительная длительность управления.

Варьируя на некотором промежутке значения периода T , ищем $\lambda \in (0, 0.5)$ (аналогично можно рассмотреть $\lambda \in (0.5, 1)$), при которых точка пересечения функций (5) и (6) лежит на оси абсцисс. По

каждой паре найденных значений T и λ можно найти частоту $\omega = \frac{2\pi}{T}$ асимметричного периодического решения, а также его начальные данные: решив систему уравнений (3), (4) относительно ρ_p , η_p и подставить найденные значения T и λ в ρ_p . Чтобы удостовериться, что θ_1 — длительность положительного управления¹, следуя [2], проверяется условие на начальные данные x_0 , а именно $CAx_0 + CB > 0$.

В результате работы описанного алгоритма мы получим начальные данные и значения T , а также λ , которые соответствуют асимметричным периодическим решениям с двумя переключениями режима на периоде.

Проверка работоспособности алгоритма проводилась на нескольких системах третьего порядка [5, 12] и на модифицированной системе Фиттса, записанной в виде 1, где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.98191881 & -0.121308 & -2.0254 & -0.12 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T.$$

С помощью разработанного алгоритма были получены параметры ω , T , λ и начальные данные двух асимметричных решений² (см. таблицу 1), с заданной точностью совпадающие с параметрами и начальными данными решений, полученными в работе [10]. По найденным начальным данным решения были визуализированы с помощью вычислительного пакета для интегрирования решений по Филиппову [9] (см. Рис. 1).

ω	0.672578883897450
T	9.341930675506603
λ	0.348516212311929

а)

x_1	0.625205195766569
x_2	3.732409701410928
x_3	-0.000000025440151
x_4	-3.475417022924710

б)

Таблица 1: Параметры и начальные данные асимметричного решения модифицированной системы Фиттса с первым положительным управлением.

¹Аналогично исследуется случай, когда θ_1 — длительность отрицательного управления.

²Параметры асимметричного решения с первым отрицательным управлением совпадают с параметрами, представленными в таблице 1а, а его начальные данные симметричны начальным данным, представленным в таблице 1б.

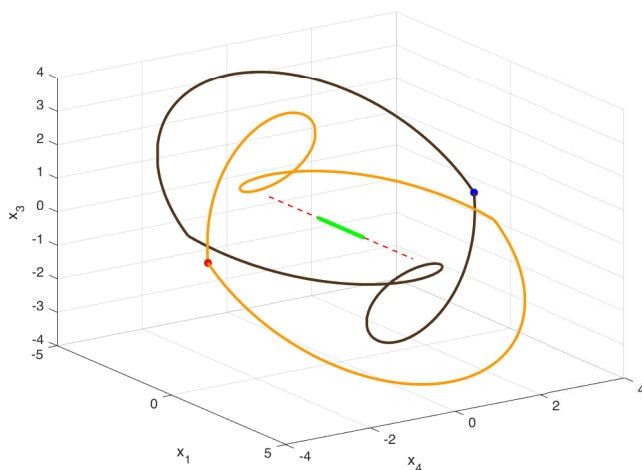


Рис. 1: Периодические траектории, соответствующие начальным данным из таблицы 1б.

Заключение

В данной работе был сформулирован и описан аналитико-численный алгоритм поиска асимметричных автоколебаний с двумя переключениями режима на периоде в релейных системах с идеальным гистерезисом. Работоспособность сформулированного алгоритма была проверена на нескольких известных релейных системах. В дальнейшем планируется обобщение алгоритма для поиска решений с бóльшим количеством смен режима на периоде, а также для систем с гистерезисом.

Литература

- [1] Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. Изд. 2-е, перераб. и дополн. Н. А. Железцовым. — М.: Физматгиз, 1959.
- [2] Гелиг А. Х., Майер А. Неклассические дифференциальные уравнения // Вестник Санкт-Петербургского университета. — 2006. — Сер. 1, вып. 4. — Стр. 7–18.

- [3] *Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.* Новые методы нелинейной механики и их применение к изучению работы электронных генераторов. — М.: ОНТИ, 1934.
- [4] *Цыпкин Я. З.* Релейные автоматические системы. — М.: Наука, 1974.
- [5] *Atherton D. P.* Correspondence: Analytical determination of limit cycles for a class of third-order non-linear system // International Journal of Control, 1975. — Vol. 21, No 6. — Pp. 1021–1023.
- [6] *Bazanella A., Parraga A.* Limit Cycles in Sampled-Data Relay Feedback Systems // Journal of Control, Automation and Electrical Systems. — 2016. — Vol. 27, no. 3. — Pp. 237–249.
- [7] *Boiko I.* Discontinuous control systems: frequency-domain analysis and design. — Birkhäuser Basel, 2009.
- [8] *Boiko I.* On Loeb's criterion of orbital stability of self-excited periodic motions // 15th International Workshop on Variable Structure Systems. — 2018. — Pp. 464–469.
- [9] *Piironen P. T., Kuznetsov Yu. A.* An event-driven method to simulate Filippov systems with accurate computing of sliding motions // ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS). — 2008. — Vol. 34, no. 3. — P. 13.
- [10] *Kuznetsov N. V., Mokaev T. N., Mokaev R. N., Yuldashev M. V., Yuldashev R. V.* Coexistence of hidden attractors and multistability in counterexamples to the Kalman conjecture // 11th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems (submitted). — 2019.
- [11] *Strogatz S. H.* Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering. — Perseus Books, 1994.
- [12] *Varigonda S., Georgiou T.* Dynamics of relay relaxation oscillators // IEEE Trans. Automat. Contr. — 2001. — Vol. 46, no. 1. — Pp. 65–77.