О вероятностном решении некоторых нелинейных уравнений относительно мер

Некруткин В. В., к. ф.-м. н., доцент кафедры статистического моделирования СПбГУ, vnekr@statmod.ru,

Суровикина Т.О., студентка кафедры статистического моделирования СПбГУ, tamara.surovikina@gmail.com

Аннотация

В работе строится процесс, описывающий движение и столкновения пробной частицы в сосуде с другими такими же частицами, и предъявляется нелинейное уравнение в мерах, решением которого является распределение соответствующей характеристики этого процесса. Особенностью рассматриваемого процесса является возможность вылета частиц из сосуда, в котором происходит их движение.

Введение. Два известных нелинейных уравнения относительно мер

Уравнения больцмановского типа. Некоторые физические процессы описываются при помощи уравнений в мерах. Например, в книге [1, гл. 4] рассматриваются, в частности, следующее уравнение, соответствующее в динамике разреженных газов нелинейному уравнению Больцмана для псевдомаксвелловских частиц:

$$\phi_t(dy) = e^{-\lambda t} \int_D \phi_0(dx)\delta_{S_t(x)}(dy) +$$
$$+ \int_0^t \lambda e^{-\lambda(t-s)} ds \Big(\int_D \delta_{S_{t-s}(x)}(dy) T(dx; y_1, y_2) \int_{D^2} \phi_s(dy_1)\phi_s(dy_2) \Big). \quad (1)$$

Здесь $(D, \rho, \mathcal{B})$ — фазовое пространство движущихся частиц, $S_t : D \mapsto D$, $t \geq 0$ — полугруппа, описывающая их свободное движение, ϕ_0 — вероятностное распределение, задающее начальное положение частиц, $T(\cdot\,; y_1, y_2)$ — "ударная трансформанта", описывающее положение первой из двух сталкивающихся частиц после их столкновения, если до столкновения они имели координаты y_1 и y_2.

Наконец, λ — это параметр показательного распределения EXP(λ), задающего время свободного движения частиц между столкновениями.

С точки зрения физической интерпретации мера ϕ_t отвечает за совместное распределение координаты и скорости пробной частицы в момент времени t.

В [1] описан случайный процесс Φ_t, "решающий" уравнение (1) в том смысле, что распределение $\mathcal{L}(\Phi_t)$ равно ϕ_t (см. [1, теор. 4.1.1]).

Формально этому "столкновительному" процессу соответствует следующий алгоритм, являющийся основой для решения уравнения (1) методом Монте-Карло.

Алгоритм 1.

1. $n \leftarrow 1, t_0 \leftarrow t$.

2. $y_n \leftarrow \phi_0(\cdot), t_n \leftarrow 0$.

3. $\tau \leftarrow \mathrm{EXP}(\lambda)$.

4. Если $t_n+\tau \le t_{n-1}$, то $y_n \leftarrow S_\tau(y_n), t_n \leftarrow t_n+\tau, n \leftarrow n+1$ и goto(2).

5. $r \leftarrow t_{n-1}-t_n$, $y_n \leftarrow S_r(y_n)$. Если $n > 1$, то $y_{n-1} \leftarrow T(\cdot; y_{n-1}, y_n)$, $n \leftarrow n-1$ и goto(3), иначе — $\Phi_t \leftarrow y_n$ и STOP.

Здесь под записью вида $y \leftarrow \psi(\cdot)$ понимается действие "получить реализацию y случайной величины, имеющей распределение $\psi(\cdot)$". Кроме того, под goto(k) подразумевается переход к k-ому шагу алгоритма.

Заметим, что решающим моментом доказательства теоремы 4.1.1 в [1]) является представление $\mathcal{L}(\Phi_t)$ в виде суммы мер, индексированных всевозможными бинарными деревьями (так называемые "суммы Вальда", [1, лем. 4.1.1]), а также рассмотрения специального марковского процесса с фазовым пространством $\mathrm{D} = \cup_n D^n$.

Несмотря на то, что моделирование столкновительного процесса является несмещенным, трудоемкость его растет экспоненциально с ростом t. Поэтому на практике для решения уравнения (1) используют другие процессы, связанные с так называемым "распространением хаоса". Библиографию, относящуюся к использованию распространения хаоса к уравнениям типа (1), можно найти в [2].

"Стационарное" нелинейное уравнение в мерах. Уравнение (1) описывает динамику попарно сталкивающихся частиц. Представляют интерес, однако, и "стационарные" уравнения в мерах, решение которых не зависит от времени. Одно из таких уравнений рассмотрено в [1, гл. 3]. Это уравнение (см. уравнение 3.4.3 [1, гл. 3]) в удобных для нас обозначениях можно записать в виде

$$\phi(dy) = (1-p)\int_{D^2} T(dy; y_1, y_2)\phi(dy_1)\phi(dy_2) + p\phi_0(dy), \quad 0 < p < 1, \quad (2)$$

причем основные параметры этого уравнения совпадают с параметрами уравнения (1), поэтому их описание опущено. Отметим только, что в данном случае нет никакого "свободного движения" частиц, но есть новый параметр p, имеющий смысл вероятности столкновения двух частиц.

Уравнению (2) соответствует процесс, описываемый следующим алгоритмом, результатом выполнения которого является случайная величина Φ.

Алгоритм 2

1. $n \leftarrow 1$.
2. $y_n \leftarrow \phi_0(\cdot)$.
3. $\alpha \leftarrow \mathrm{U}_{0,1}(\cdot)$.
4. Если $\alpha > p$, то $n \leftarrow n+1$ и goto(2).
5. Если $n > 1$, то $y_{n-1} \leftarrow T(\cdot; y_{n-1}, y_n)$, $n \leftarrow n-1$ и goto(3);
6. Иначе — $\Phi \leftarrow y_n$ и STOP.

Для описанного процесса известен следующий результат (теорема 4.3.3 [1]).

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — однородная марковская цепь (ОМЦ) с фазовым пространством $\mathbf{D} = \cup_{n\geq 1} D^n \cup \{\Delta\}$, начальным распределением ϕ_0, сосредоточенном в D и переходной функцией P такой, что $P(\{\Delta\}; \Delta) = 1$, $P(\{\Delta\}; y) = p$ при $y \in D$ и

$$P(dx^m; y^n) = \begin{cases} (1-p)\otimes_{i=1}^n \delta_{y_i}(dx_i)\phi_0(dx_{n+1}), & m{=}n{+}1 \geq 2, \\ p\otimes_{i=1}^n \delta_{y_i}(dx_i)T(dx_{n-1}; y_{n-1}, y_n), & m{=}n{-}1 \geq 1. \end{cases}$$

Теорема 1. *Пусть $\tau + 1$ — момент обрыва описанной ОМЦ. Если $p \geq 1/2$, то τ конечно почти всюду и распределение $\mathcal{L}(\xi_\tau)$ равно ϕ, где ϕ удовлетворяет уравнению* (2).

Таким образом, в [1] описаны два нелинейных уравнения относительно мер, одно из которых (уравнение (1)) описывает динамику положения движущихся и взаимодействующих частиц по времени, а второе (уравнение (2)) является “стационарным”, но в нём отсутствует движение частиц между столкновениями. При этом в обоих случаях описаны процедуры моделирования, “решающие” эти уравнения. Целью данной работы стало в некотором роде совмещение этих двух подходов. То есть нужно получить “стационарное” уравнение (и соответствующий процесс моделирования), в котором учитывается движение частиц между столкновениями.

Движение пробной частицы в сосуде с взаимодействующими частицами.

Описание алгоритма. При описании столкновительного процесса Алгоритма 1 предполагалось, что все частицы рождаются в множестве D и в своем движении из этого множества не вылетают.

Здесь мы рассмотрим случай, когда множество D имеет две “границы” Γ_1 и Γ_2 (все три множества попарно непересекаются), имеющие следующий смысл: в множестве Γ_1 частицы рождаются (соответствующее распределение обозначено ψ) и оттуда влетают в область D, а при достижении множества Γ_2 частицы вылетают из D.

При этом движение частиц в множестве D по-прежнему описывается полугруппой S_t, а время достижения множества Γ_2 из точки $x \in D \cup \Gamma_1$ обозначается $t(x)$.

Кроме того, в новом алгоритме задействован еще и параметр p, имеющий тот же смысл, что и в Алгоритме 2.

Опишем новый алгоритм моделирования процесса взаимодействия частиц, результат которого обозначен Φ.

Алгоритм 3

1. $n \leftarrow 1$.
2. $z_n \leftarrow \psi(\cdot)$, $t \leftarrow t(z_n)$.
3. $\eta \leftarrow \mathrm{EXP}(\lambda)$.
4. Если $\eta < t$, то $z_n \leftarrow S_\eta(z_n)$, иначе — $\Phi \leftarrow \Delta$, STOP.
5. $\alpha \leftarrow \mathrm{U}_{0,1}(\,\cdot\,)$.
6. Если $\alpha > p$, то $n \leftarrow n+1$, goto (2).

7. Если $n > 1$, то $z_{n-1} \leftarrow T(\cdot; z_{n-1}, z_n)$, $t \leftarrow t(z_{n-1})$, $n \leftarrow n-1$ и goto (3), иначе — $\Phi \leftarrow z_1$, STOP.

Проиллюстрируем работу алгоритма на графическом примере, имеющем вид бинарного дерева. Здесь под τ_i понимаются конкретные реализации случайной величины η, имеющей распределение EXP(λ). При этом на рис. 1 подразумевается, что за времена τ_i соответствующие частицы не вылетают из области и поэтому в результате $\Phi \in D$ (иначе $\Phi = \Delta$).

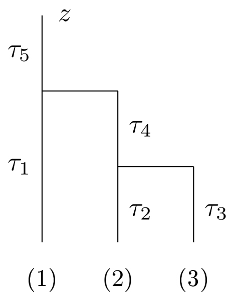

Рис. 1: Пример изображения работы алгоритма

На рисунке 1 изображена следующая ситуация: первая частица рождается на Γ_1 и свободно движется τ_1 единиц времени, не вылетая из области D. Затем (с вероятностью $1-p$) она "дожидается" партнера для возможного столкновения. Первый кандидат на роль этого партнера — вторая частица, которая рождается и свободно движется в течение времени τ_2, также не вылетая из области D.

Однако здесь столкновения первой и второй не происходит, поскольку (с вероятностью $1-p$) вторая частица тоже должна "дожидаться" партнера для возможного столкновения.

Поэтому рождается третья частица, движущаяся в течение времени τ_3 и остающаяся в результате этого движения в D. И эта частица сталкивается со второй, поскольку реализуется событие с вероятностью p, а не с $1-p$.

В результате столкновения третья частица исчезает, а вторая приобретает новую фазовую координату. Потом эта частица свободно движется в течение времени τ_4, останавливается в D и сталкивается (с вероятностью p) с первой.

Наконец, первая частица после столкновения движется τ_5 единиц времени, останавливается в точке $z \in D$ и, поскольку осуществляется событие с вероятностью p, то работа алгоритма заканчивается, и его результатом оказывается $\Phi = z$.

Уравнение в мерах. Обозначим Θ событие, состоящее в том, что алгоритм завершил работу.

Предложение 1. *1. Если $p \geq 1/2$ или $\sup_x t(x) < \infty$, то* $\mathrm{P}(\Theta) = 1$.

2. Пусть $\mathrm{P}(\Theta) = 1$. *тогда выполняются следующие утверждения.*

- *Мера $\mathcal{L}(\Phi, \Phi \in D)$ удовлетворяет уравнению*

$$\phi(\cdot) = \int_{D^2} \Psi(\cdot; x_1, x_2) \phi(dx_1) \phi(dx_2) + \theta(\cdot), \tag{3}$$

где

$$\theta(A) = p \int_{\Gamma_1} \psi(dx) \int_0^{t(x)} \lambda e^{-\lambda z} \, \delta_{S_x(z)}(A) dz.$$

и

$$\Psi(A; x_1, x_2) = (1-p) \int_D T\big(dy; x_1, x_2\big) \int_0^{t(y)} \lambda e^{-\lambda z} \, \delta_{S_z(y)}(A) dz.$$

- *Итерации*

$$\phi^{(n)}(\cdot) = \int_{D^2} \Psi(\cdot; x_1, x_2) \phi^{(n-1)}(dx_1) \phi^{(n-1)}(dx_2) + \theta(\cdot), \quad \phi^{(0)} = \theta,$$

сходятся к ϕ.

Метод Монте-Карло для решения уравнения (3). Рассмотрим итерационное решение ϕ уравнения (3) и, взяв измеримую ограниченную функцию $h : D \mapsto \mathbb{R}$, поставим задачу построения несмещенной оценки интеграла $J = \int_D h d\phi$. Если процесс Алгоритма 3 обрывается с вероятностью 1, то из Предложения 1 следует, что случайная величина

$$\xi = \begin{cases} h(\Phi), & \Phi \in D, \\ 0, & \Phi = \Delta \end{cases}$$

как раз обладает этим свойством, причем $\mathrm{D}\xi < \infty$.

Если, однако, $p > 1/2$, то можно построить оценку J с меньшей дисперсией.

Для этого достаточно вместо распределения $\mathrm{EXP}(\lambda)$ времени свободного движения частиц (см. третий пункт Алгоритма 3) ввести урезанное показательное распределение $\mathrm{EXP}_T(\lambda)$ с плотностью

$$p_T(t) = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{1 - \exp(-\lambda T)}\ , \quad 0 < t < T,$$

таким образом, что частица, стартующая из точки x движется по траектории, определяемой полугруппой S_t в течение случайного времени с плотностью распределения $p_{t(x)}$, а оценка при этом получает множитель $1 - e^{-\lambda t(x)}$. Таким образом, в исходном алгоритме надо изменить третью строчку на $\eta \leftarrow \mathrm{EXP}_{t(x)}(\lambda), \Phi \leftarrow \Phi \cdot (1 - e^{-\lambda t(z_n)})$ и считать, что Φ инициируется единицей, а при завершении алгоритма — домножается на значение координаты пробной частицы, то есть $\Phi \leftarrow \Phi \cdot z_1$ вместо $\Phi \leftarrow z_1$.

Заключение

Таким образом, в настоящей работе рассмотрено уравнение (3), обладающее чертами как уравнения (1), так и уравнения (2), и построен случайный процесс, “решающий” это уравнение.

Литература

[1] S.M. Ermakov, V.V. Nekrutkin, A.S. Sipin. Random Processes for Classical Equations of Mathematical Physics. // Kluwer Academic Publishers, 1989.

[2] V. Nekrutkin, Kac particle systems with free motion and equations of Boltzmann type.// Monte Carlo Methods and Appl., 9, No 1, 13-25, 2003.