

БИЕКТИВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ В ПРОГРАММИРОВАНИИ

Костин В.А., ассистент кафедры Информатики СПбГУ,
v.kostin@spbu.ru

Аннотация

В настоящее время имеют большое значение электронные курсы лекций. Одной из тем современного электронного курса практического программирования может быть тема, связанная с изучением алгоритмических свойств складываемых перестановок.

Введение

Биективные отображения $\{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$, где n – натуральное число в программировании называют **перестановками порядка n** .

Следуя [1], рассмотрим вначале задачу о складывании единичной полоски марок. Пусть задана прямоугольная полоска бумаги формы $1 \times n$, разбитая на n единичных клеток (марок). Все клетки последовательно пронумерованы натуральными числами $1, \dots, n$. Предположим, что полоска складывается (сгибанием по линиям разбивки на клетки) таким образом, что все клетки находятся под одной единственной. Тогда каждому такому складыванию соответствует некоторая перестановка $f = \langle a_1 a_2 \dots a_n \rangle$, где a_1 – номер клетки, расположенной сверху, a_2 – номер клетки, расположенной непосредственно под a_1 , и т. д.

Определение. Перестановка называется **складываемой**, если ей соответствует некоторое складывание полоски, и **нескладываемой** в противном случае.

Например, перестановка $\langle 3 \ 4 \ 2 \ 1 \rangle$ – складываемая, $\langle 3 \ 2 \ 4 \ 1 \rangle$ – нескладываемая.

В качестве операции, заданной на множестве всех перестановок, рассмотрим булевскую функцию, истинную для складываемых перестановок и ложную в противном случае.

Задачи для самостоятельного программирования

1. Постройте алгоритм вычисления указанной выше логической функции:

а) вначале постройте алгоритм вычисления подобной функции, которая принимает истинное значение только в случае, когда единичная полоска склеена в кольцо (замкнутая полоска) так, что после n -й клетки следует первая.

б) Реализуйте разработанный алгоритм на языке программирования высокого уровня по рекурсивной схеме.

в) Реализуйте разработанный алгоритм на языке программирования высокого уровня по итеративной схеме.

г) Реализуйте параллельный вариант разработанного алгоритма .

2. Разработайте алгоритм и реализуйте его на языке программирования высокого уровня для вычисления функции принимающей истинное значение для складываемых перестановок, соответствующих незамкнутым единичным полоскам, и ложное в противном случае.

3. Разработайте программу генерации всех складываемых перестановок n -го порядка в лексикографическом порядке.

4. Подобно тому, как это сделано в [2] для перестановок общего вида, Оцените в среднем по всем складываемым перестановкам размерности n число совершаемых транспозиций элементов перестановки при переходе от одной складываемой к следующей при их генерации лексикографическом порядке.

5. Определите порядок генерации всех складываемых перестановок размерности n , при котором осуществляется минимальное число транспозиций при переходе от одной складываемой к следующей. Реализуйте подобный алгоритм генерации складываемых перестановок на языке программирования высокого уровня.

Задачи для самостоятельного исследования.

1. Постройте формальную грамматику, порождающую все складываемые перестановки, и определите ее тип.

2. Пусть $A(n)$ – число складываемых перестановок размерности n , $F(t)$ – экспоненциальная производящая функция для последовательности

$A(n)$, т.е. $F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A(n)}{n!} t^n$. Определите радиус сходимости $F(t)$.

3. Определите возможные комбинаторные тождества (рекуррентные соотношения) для элементов последовательности $A(n)$.

4. Можно ли с помощью элементарных операций арифметики и алгебры написать замкнутую формулу (см. [3]) для $A(n)$. (Проблема С. Улама).

5. Обобщите предложенный материал для прямоугольных карт формы $p \times m$.

Литература

1. Костин В.А. Задача о складывании марок. Компьютерные инструменты в образовании №3-4, СПб, 1998.
2. Липский. В. Комбинаторика для программистов. Мир, М. 1988.
3. Грэхем Р., Кнут Д. Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики. Мир, М. 1998.