



Cours de Robotique Fondamentale

La cinématique des robots séries

Julien Alexandre dit Sandretto
COPRIN
INRIA
Sophia-Antipolis

January 20, 2012

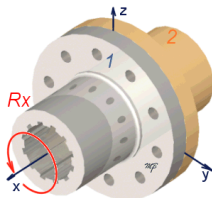
Liaisons entre deux solides

Une liaison entre deux solides est une relation de **contact** entre deux solides.

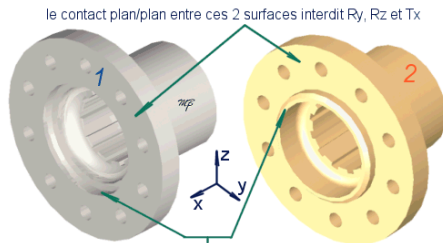
- ▶ **Degrés de liberté d'une liaison** : C'est le nombre de déplacements élémentaires indépendants autorisés par cette liaison.
- ▶ **Classe d'une liaison** : C'est le nombre de déplacements élémentaires interdits. On notera que pour une liaison, la somme des degrés de liberté et de la classe de la liaison est égale à 6.

Liaisons entre deux solides : exemple

Contact Plan/Plan

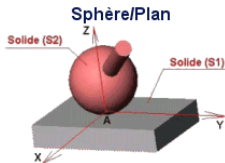


1 ddl, R_x

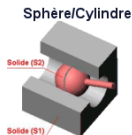


Décomposition des contacts

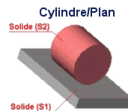
Les différents types de contact



contact ponctuel



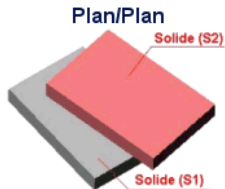
contact linéique



contact linéique



contact surfacique



contact surfacique

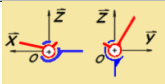

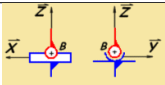

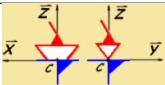

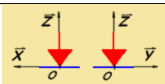

Tableau des liaisons usuelles

Nom de la liaison	Représentations planes	Perspective	Degrés de liberté Trans Ori	mobilités
Encastrement de centre B			$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	Anim
Glissière de centre A et d'axe X			$\begin{pmatrix} T_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	Anim
Pivot de centre A et d'axe X			$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} R_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	Anim

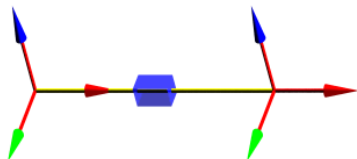
Tableau des liaisons usuelles

Nom de la liaison	Représentations planes	Perspective	Degrés de liberté		mobilités
			Trans	Ori	
Pivot glissant de centre C et d'axe X			$\begin{pmatrix} T_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} R_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	Anim
Hélicoïdale de centre B et d'axe Y			$\begin{pmatrix} 0 \\ T_y \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ T_y * 2p/p \\ 0 \end{pmatrix}$	Anim
Appui Plan de centre D et de normale Z			$\begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R_z \end{pmatrix}$	Anim
Rotule de centre O			$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix}$	Anim

Tableau des liaisons usuelles

Nom de la liaison	Représentations planes	Perspective	Degrés de liberté <i>Trans Ori</i>	mobilités
rotule à doigt de centre O d'axe X			$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix}$	Anim
Linéaire annulaire de centre B et d'axe X			$\begin{pmatrix} T_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix}$	Anim
Linéique rectiligne de centre C, d'axe X et de normale Z			$\begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} R_x \\ 0 \\ R_z \end{pmatrix}$	Anim
Ponctuelle de centre O et de normale Z			$\begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix}$	Anim

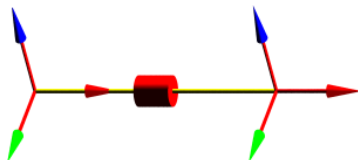
Les articulations des robots



Articulation prismatique, noté P

1 ddl en translation T_z .

Valeur articulaire q = longueur $[m]$.



Articulation rotoïde, noté R

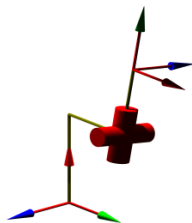
1 ddl en rotation R_z .

Valeur articulaire q = angle $[rad]$, $[^\circ]$.

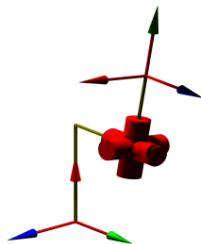
Articulation de $ddl \geq 2$

Dans la plupart des cas, pour modéliser une articulation de $ddl \geq 2$, nous nous ramènerons à une succession d'articulations P ou R.

Exemples :



Articulation cardan RR (2 ddl)



Articulation rotule RRR=S (3 ddl)

Les chaînes cinématiques

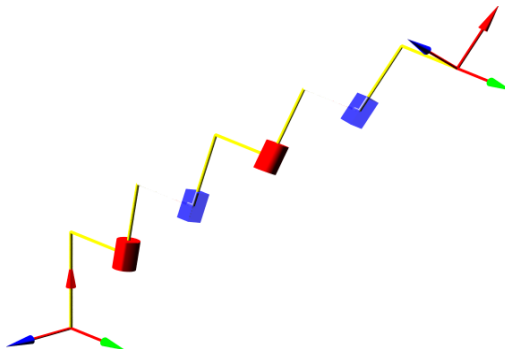
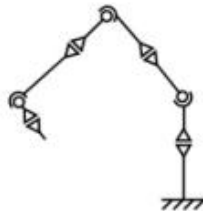
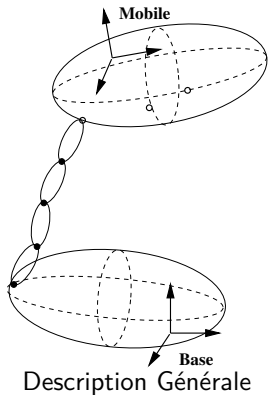


Figure: Chaîne cinématique RPRP

Une chaîne cinématique sera définie par une succession d'articulations rotoïdes ou prismatiques.

Les Robots Séries



Un exemple

Vocabulaire

- ▶ Actionneur, moteur
- ▶ Axe, articulation
- ▶ Corps, segment
- ▶ Organe terminal
- ▶ Effecteur, outil
- ▶ Base



Vocabulaire

- ▶ Coordonnées généralisées $\mathcal{X} = [P, R]$
(position P / orientation R de l'organe terminal)
- ▶ Coordonnées articulaires q
(consignes données aux moteurs : soit rotation autour d'un axe soit translation suivant un axe)
- ▶ Paramètres géométriques ζ
qui définissent de façon statique les dimensions du robot

Indice de mobilité et ddl d'un robot série à n corps

Définition : L' **indice de mobilité** M est le nombre de paramètres variables qui déterminent la configuration du manipulateur

$$M = n$$

Si

- ▶ La chaîne cinématique est simple (chaque articulation a, au plus, un successeur et un prédécesseur)
- ▶ Chaque articulation est de classe 5

En général, le degré de liberté du robot (D_{L_r}) est égal à M sauf si le robot est redondant. Dans tous les cas ...

$$D_{L_r} \leq M$$

Robot redondant

Le nombre de degrés de liberté de l'organe terminal $<$ nombre de variables articulaires actives (d'articulations motorisées).

- ▶ plus de 6 articulations
- ▶ plus de trois articulations rotoïdes d'axes concourants
- ▶ plus de trois articulations rotoïdes d'axes parallèles
- ▶ plus de trois articulations prismatiques
- ▶ deux axes d'articulations prismatiques parallèles
- ▶ deux axes d'articulations rotoïdes confondus

Configurations singulières (localement redondant)

Quelque soit le robot (redondant ou non), il se peut qu'il existe certaines configurations dites *singulières* telle que le nombre de degrés de liberté de l'organe terminal soit inférieur à la dimension de l'*espace opérationnel* (espace dans lequel on représente les ddl de l'OT).

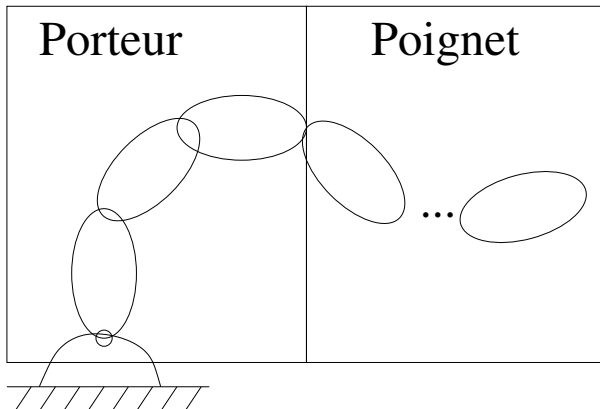
- ▶ deux axes d'articulations prismatiques se retrouvent parallèles
- ▶ deux axes d'articulations rotoïdes se retrouvent confondus

Nombre de morphologies possibles vs nombre de ddl du robot

2 possibilités d'angle entre deux articulations successives : 0° et 90°

ddl	nb structure
2	8
3	36
4	168
5	776
6	3508

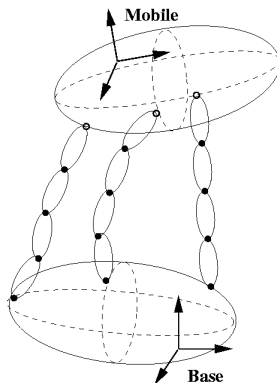
Nous appellerons ...



Propriétés des robots

- ▶ Précision : positionnement absolu imprécis ($> 1 \text{ mm}$):
- ▶ Répétabilité : la répétabilité d'un robot est l'erreur maximale de positionnement répété de l'outil en tout point de son espace de travail ($< 0.1 \text{ mm}$)
- ▶ Vitesse maximale de translation ou de rotation de chaque axe, de translation maximale de l'organe terminal
- ▶ Accélération maximale
 - ▶ Est donnée pour chaque axe dans la configuration la plus défavorable (inertie maximale, charge maximale).
 - ▶ Dépend fortement de l'inertie donc de la position du robot
- ▶ Charge utile :
 - ▶ C'est la charge maximale que peut porter le robot sans dégrader la répétabilité et les performances dynamiques.
 - ▶ La charge utile est nettement inférieure à la charge maximale que peut porter le robot qui est directement dépendante des actionneurs.

Les Robots Parallèles

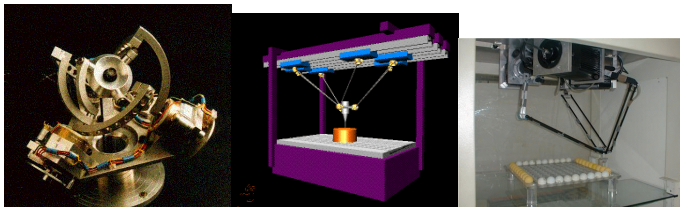


Description Générale, chaîne fermée

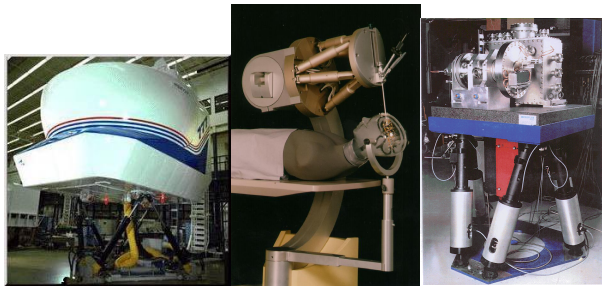


Un exemple

Exemples Robots Parallèles



Différents types d'architectures



La plate-forme de Gough

Caractéristiques

- ▶ Meilleure précision (rigidité, accumulation des erreurs)
- ▶ Peut transporter de lourdes charges
- ▶ Bonnes performances dynamiques
- ▶ Espace de travail plus *limité* (que pour les robots séries)
- ▶ Etude complexe

Le Modèle Géométrique Direct

Des robots (séries ou parallèles)

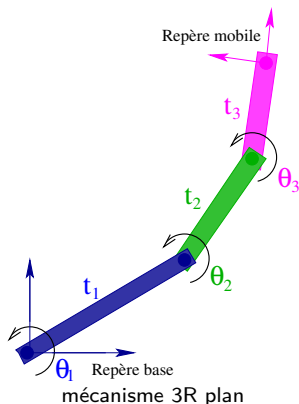
Déterminer: Les coordonnées généralisées (X) en fonction des coordonnées articulaires (q):

$$X = \mathcal{F}_{\text{MGD}}(q_1, q_2, \dots, q_i, \zeta)$$

avec ζ les paramètres géométriques (paramètres qui définissent la géométrie du robot).

Le MGD

exemple



- Identifier les coordonnées articulaires
- Identifier les paramètres géométriques qui définissent le mécanisme
- Associer à chacune des articulations un repère
- Déterminer le positionnement (matrice R , vecteur P) de chaque repères par rapport au précédent.
- Mettre ces changements de repères sous la forme de matrices homogènes
- Montrer comment calculer le MGD de ce mécanisme

Le MGD

solution

- Identifier les coordonnées articulaires

Solution: $q_1 = \theta_1, \quad q_2 = \theta_2, \quad q_3 = \theta_3$

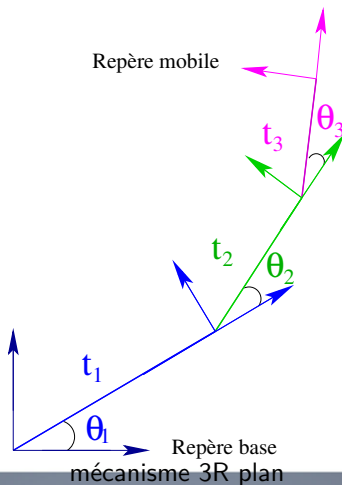
- Identifier les paramètres géométriques qui définissent le mécanisme

Solution: $\zeta = \{t_1, t_2, t_3\}$

Le MGD

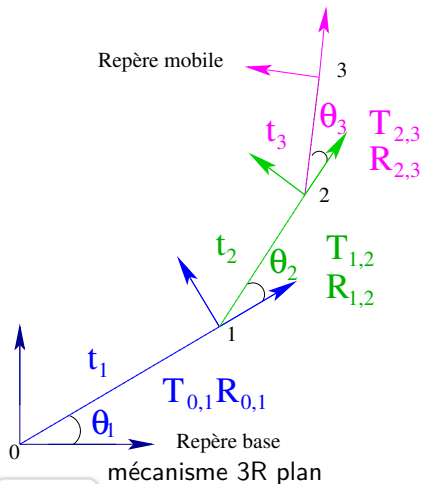
Solution

- Associer à chacune des articulations un repère



Le MGD

Solution



- Déterminer le positionnement (matrice R , vecteur P) de chaque repères par rapport au précédent.

$$R_{i,j} = \begin{pmatrix} \cos \theta_j & -\sin \theta_j \\ \sin \theta_j & \cos \theta_j \end{pmatrix}$$

$$T_{i,j} = \begin{pmatrix} t_j \cdot \cos \theta_j \\ t_j \cdot \sin \theta_j \end{pmatrix}$$

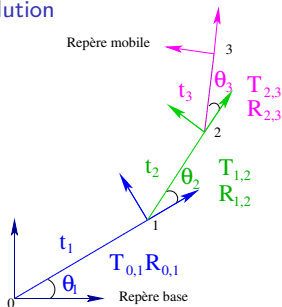
$$i \in 0, 1, 2, j \in 1, 2, 3$$

- Mettre ces changements de repères sous la forme de matrice homogène

$$H_{i,j} = \begin{pmatrix} R_{i,j} & T_{i,j} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le MGD

Solution



- Montrer comment calculer le MGD de ce mécanisme

$$H_{0,3} = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & t_1 \cdot \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & t_1 \cdot \sin \theta_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \dots$$

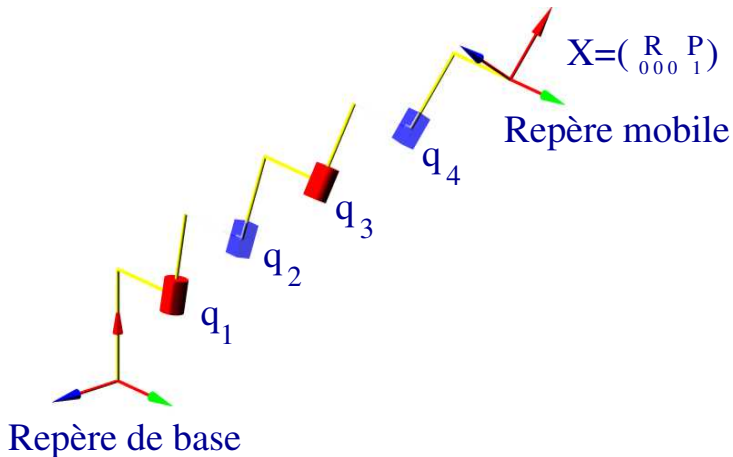
$$\begin{pmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & t_2 \cdot \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & t_2 \cdot \sin \theta_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & t_3 \cdot \cos \theta_3 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & t_3 \cdot \sin \theta_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & -\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & t_1 \cdot \cos \theta_1 + t_2 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) + t_3 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & t_1 \cdot \sin \theta_1 + t_2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) + t_3 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} t_1 \cdot \cos \theta_1 + t_2 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) + t_3 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ t_1 \cdot \sin \theta_1 + t_2 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) + t_3 \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \end{pmatrix}$$

Le Modèle Géométrique Direct

des robots séries



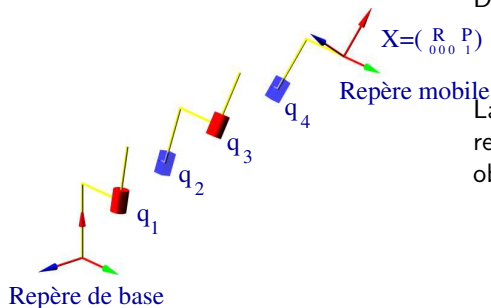
Le Modèle Géométrique Direct

comment modéliser systématiquement une chaîne cinématique

Dans l'espace, nous utiliserons le formalisme de **Denavit-Hartenberg**

- 1 Placer les repères
- 2 Définir les variables articulaires et les paramètres géométriques
- 3 Définir les matrices de transformées homogènes
- 4 Multiplier ces matrices

Calculer le MGD



Déterminer:

$$X = \mathcal{F}_{\text{MGD}}(q_1, q_2, \dots, q_i, \zeta)$$

La transformation homogène entre le repère Ω_0 et le repère mobile Ω_n est obtenue telle que :

$$\mathbf{H}_{\text{DH}} = \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{H}_1 \dots \mathbf{H}_n$$

Il faut projeter \mathbf{H}_{DH} sur $X = [T_x, T_y, T_z, R_x, R_y, R_z]$

De la matrice DH vers 6 parameters $T_x, T_y, T_z, R_x, R_y, R_z$

Nous souhaitons obtenir $X = [T_x, T_y, T_z, R_x, R_y, R_z]$ en fonction des éléments de la matrice \mathbf{H}_{DH} .

Pour la position ...

$$\begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{DH1,4} \\ \mathbf{H}_{DH2,4} \\ \mathbf{H}_{DH3,4} \end{pmatrix}$$

De la matrice DH vers 6 parameters $T_x, T_y, T_z, R_x, R_y, R_z$

Nous souhaitons obtenir $X = [T_x, T_y, T_z, R_x, R_y, R_z]$ en fonction des éléments de la matrice \mathbf{H}_{DH} .

Pour l'orientation ...

Sachant que :

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \psi & -\cos \theta \sin \psi & \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \cos \psi + \cos \phi \sin \psi & \cos \phi \cos \psi - \sin \phi \sin \theta \sin \psi & -\sin \phi \cos \theta \\ -\cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi + \sin \phi \cos \psi & \cos \phi \cos \theta \end{pmatrix}$$

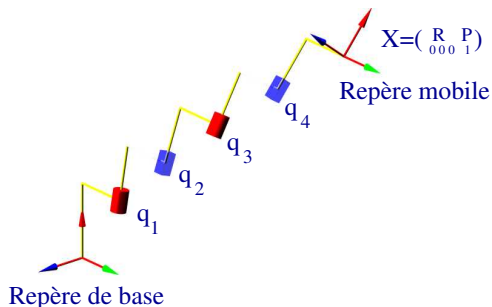
$$R_x = \arctan \frac{\mathbf{H}_{DH3,2} \cdot \mathbf{H}_{DH1,1} - \mathbf{H}_{DH3,1} \cdot \mathbf{H}_{DH1,2}}{\mathbf{H}_{DH1,1} \cdot \mathbf{H}_{DH2,2} - \mathbf{H}_{DH1,2} \cdot \mathbf{H}_{DH2,1}}$$

$$R_y = \arctan \frac{\mathbf{H}_{DH1,3}}{\sqrt{\mathbf{H}_{DH1,1}^2 + \mathbf{H}_{DH1,2}^2 + \mathbf{H}_{DH2,3}^2 + \mathbf{H}_{DH3,3}^2}}$$

$$R_z = \arctan \frac{\mathbf{H}_{DH2,3} \cdot \mathbf{H}_{DH3,1} - \mathbf{H}_{DH2,1} \cdot \mathbf{H}_{DH3,3}}{\mathbf{H}_{DH2,3} \cdot \mathbf{H}_{DH3,2} - \mathbf{H}_{DH2,2} \cdot \mathbf{H}_{DH3,3}}$$

Le Modèle Géométrique Inverse

des robots séries



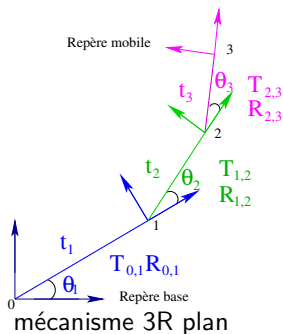
Déterminer:

$$[q_1, q_2, \dots, q_n] = \mathcal{F}_{MGI}(X, \zeta)$$

avec ζ les paramètres géométriques (paramètres qui définissent la géométrie du robot série).

Le MGI

exemple



$$X = \dots$$

$$\begin{pmatrix} t_1 \cdot \cos \theta_1 + t_2 \cdot \cos (\theta_1 + \theta_2) + t_3 \cdot \cos (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ t_1 \cdot \sin \theta_1 + t_2 \cdot \sin (\theta_1 + \theta_2) + t_3 \cdot \sin (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \end{pmatrix}$$

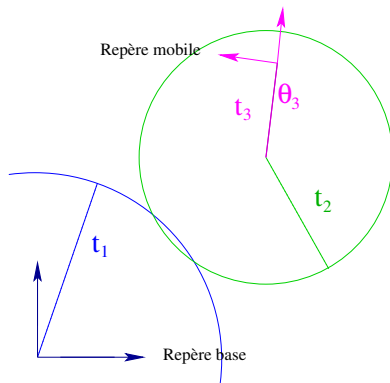
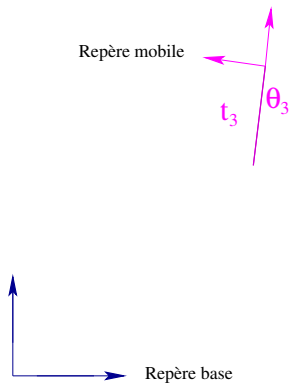
Calculer le MGI, c'est déterminer:

$$[\theta_1, \theta_2, \theta_3] = \mathcal{F}_{\text{MGI}}(X_1, X_2, X_3, \zeta)$$

avec $\zeta = [t_1, t_2, t_3]$

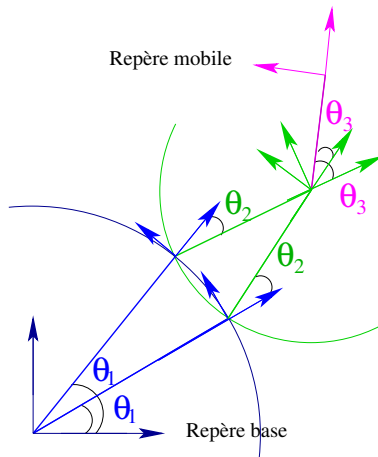
Le MGI exemple

résolution Géométrique 1/2



Le MGI exemple

résolution Géométrique 2/2



Le MGI exemple

résolution Algébrique 1

$$t_1 \cdot \cos \theta_1 + t_2 \cdot \cos (\theta_1 + \theta_2) + t_3 \cdot \cos (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) - X_1 = 0$$

$$t_1 \cdot \sin \theta_1 + t_2 \cdot \sin (\theta_1 + \theta_2) + t_3 \cdot \sin (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) - X_2 = 0$$

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = X_3$$

$$t_1 \cdot \cos \theta_1 + t_2 \cdot \cos (\theta_1 + \theta_2) + t_3 \cdot \cos X_3 - X_1 = 0$$

$$t_1 \cdot \sin \theta_1 + t_2 \cdot \sin (\theta_1 + \theta_2) + t_3 \cdot \sin X_3 - X_2 = 0$$

$$t_1 \cdot \cos \theta_1 + t_2 \cdot \cos (\theta_1 + \theta_2) = u_1 \quad (1)$$

$$t_1 \cdot \sin \theta_1 + t_2 \cdot \sin (\theta_1 + \theta_2) = u_2$$

On sait que

$$\cos^2 (\theta_1 + \theta_2) + \sin^2 (\theta_1 + \theta_2) = 1 \quad (2)$$

Le MGI exemple

résolution Algébrique 2

En reportant, les équations 1 dans l'équation 2.

$$(u_1 - t_1 \cdot \cos \theta_1)^2 + (u_2 - t_1 \cdot \sin \theta_1)^2 = t_2^2$$

Nous obtenons

$$u_1 \cdot \cos \theta_1 + u_2 \cdot \sin \theta_1 = \frac{t_1^2 - t_2^2 + u_1^2 + u_2^2}{2 \cdot t_1}$$

sachant que pour l'équation $X \cdot \sin \alpha + Y \cdot \cos \alpha = Z$:

$$\cos \alpha = \frac{YZ - \epsilon X \sqrt{X^2 + Y^2 - Z^2}}{X^2 + Y^2}$$

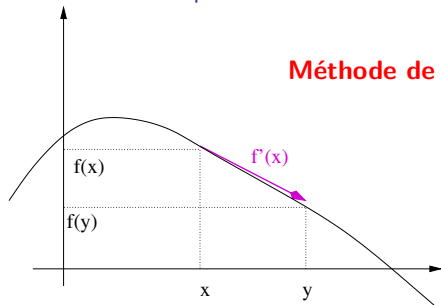
$$\sin \alpha = \frac{XZ + \epsilon Y \sqrt{X^2 + Y^2 - Z^2}}{X^2 + Y^2}$$

avec $\epsilon = + / - 1$.

On en déduit donc θ_1 puis $\theta_1 + \theta_2 \rightarrow \theta_2$ (en utilisant eq. (1)), puis θ_3 .

Le MGI des robot série

Résolution numérique



Méthode de Newton ~ 1670

Nous cherchons à déterminer x tel que $f(x) = 0$, Nous connaissons une approximation de x noté x_0 .

Nous avons

$f(x_0) - f(x) = f'(x_0) \cdot (x_0 - x)$ avec $f(x) = 0$ nous obtenons :

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

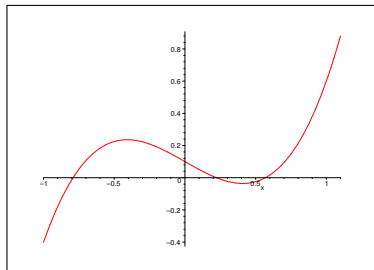
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x+h)}{h} = f'(x)$$

Le schéma de Newton est donc :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Résolution numérique

Newton



$$x^3 - 0.5x + 0.1 = 0$$

$$\triangleright f(x) = x^3 - 0.5x + 0.1$$

$$\triangleright f'(x) = 3x^2 - 0.5$$

$$\triangleright x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 - 0.5x_k + 0.1}{3x_k^2 - 0.5}$$

x_0	0	1	-0.5	-0.4
x_1	0.2	0.76	-1.4	11.4
x_2	0.2211	0.6310	-1.0387	7.6095
x_3	0.2218	0.5796	-0.8555	5.0871
x_4		0.5699	-0.7975	3.4121
x_5		0.5696	-0.7915	2.3048
x_6			-0.7914	1.5799
x_7				1.1143
x_8				0.8270
x_9				0.6645
x_{10}				0.5903
x_{11}				0.5710
x_{12}				0.5696

Résolution numérique

Newton

Calculer $\sqrt{3}$ en utilisant $\{+, \times, \div\}$, 5 et 2.

Solution :

- ▶ Résoudre l'équation $x^2 - N = 0$
- ▶ $x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - N}{2 \cdot x_k}$
- ▶ $x_{k+1} = \frac{1}{2} \left(x_k + \frac{N}{x_k} \right)$
- ▶ $x_0 = 5, x_1 = 2.8, x_2 = 1.9357, x_3 = 1.7428, x_4 = 1.7321.$

Le MGI des robot série

Techniques utilisées

- ▶ Méthode classique (1970-1980)
 - ▶ Utilisable pour la plupart des robots industriels
 - ▶ Résolution simple, utilisation de modèle de résolution
- ▶ Méthode algébrique (Raghavan et Roth 1990)
 - ▶ Technique de l'élimination dyalytique
- ▶ Méthode numérique (Newton)
 - ▶ Quand on ne sait pas faire
 - ▶ Problème de l'unicité des solutions

Le MGI des robot série

Méthode classique

1 Développer l'ensemble des équations possibles

$$H_X = H_{0,1} \cdot H_{1,2} \cdot H_{2,3} \cdot H_{3,4} \cdot H_{4,5} \cdot H_{5,6}$$

$$H_{1,0} \cdot H_X = H_{1,2} \cdot H_{2,3} \cdot H_{3,4} \cdot H_{4,5} \cdot H_{5,6}$$

$$H_{2,1} \cdot H_{1,0} \cdot H_X = H_{2,3} \cdot H_{3,4} \cdot H_{4,5} \cdot H_{5,6}$$

$$H_{3,2} \cdot H_{2,1} \cdot H_{1,0} \cdot H_X = H_{3,4} \cdot H_{4,5} \cdot H_{5,6}$$

$$H_{4,3} \cdot H_{3,2} \cdot H_{2,1} \cdot H_{1,0} \cdot H_X = H_{4,5} \cdot H_{5,6}$$

$$H_{5,4} \cdot H_{4,3} \cdot H_{3,2} \cdot H_{2,1} \cdot H_{1,0} \cdot H_X = H_{5,6}$$

avec $H_{i,j}^{-1} = H_{j,i}$

2 On constate que beaucoup d'équations ont la même forme

Le MGI des robot série

Méthode classique

3 On utilise des formules de type ci-après pour résoudre

Pour l'équation $X \cdot \sin \alpha + Y \cdot \cos \alpha = Z$:

$$\cos \alpha = \frac{YZ - \epsilon X \sqrt{X^2 + Y^2 - Z^2}}{X^2 + Y^2}$$
$$\sin \alpha = \frac{XZ + \epsilon Y \sqrt{X^2 + Y^2 - Z^2}}{X^2 + Y^2}$$

avec $\epsilon = + / - 1$

Remarques

- ▶ Si le poignet est d'axes concourants (rotule), la résolution est plus simple.
- ▶ De la même façon, si la chaîne cinématique possède 3R à axes concourants ou 3 articulations prismatiques (qqsoit leurs positions) le MGI est simplifié
- ▶ Le nombre de solutions du MGI d'un robot à 6 liaisons varie mais ≤ 16 . (16 pour RRRRRR)

Le MGI des robot série

Méthode Algébrique, Générale pour un robot à 6 liaisons

- 1 On utilise les formules suivantes pour obtenir des équations algébriques

$$\cos \alpha = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\sin \alpha = \frac{2 \cdot \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$$

- 2 On utilise une méthode d'élimination algébrique pour éliminer 5 variables parmi les 6
- 3 On obtient un polynôme de degré 16
- 4 Les racines de ce polynômes nous fournissent les solutions

Le MGI des robot série

Méthode Numérique (pour les cas à problèmes)

On utilise un schéma de Newton multivarié :

$$X_{k+1} = X_k - J^{-1}(X_k)F(X_k)$$

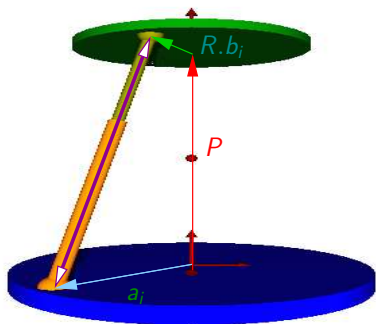
Avec $F = [f_1, \dots, f_n]^T$, $X = [x_1, \dots, x_n]^T$ et J la jacobienne du système définie par :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Attention ! ne fournit qu'une seule solution

Le cas des robots parallèles

Le MGI



$$\rho = \|P + R.b_i - a_i\|$$

Modèle Géométrique Inverse

$$\rho_i = L_i + l_i = \mathcal{MGI}(P, R, \xi_i)$$

$$\rho_i^2 = \|P + R.b_i - a_i\|^2$$

Le cas des robots parallèles

Le MGD

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} P \\ R \end{pmatrix} = \mathcal{MGD}(\rho, \xi)$$

Résoudre le système en P, R :

$$\rho_1^2 - \|P + R.b_1 + a_1\|^2 = 0$$

$$\rho_2^2 - \|P + R.b_2 + a_2\|^2 = 0$$

$$\rho_3^2 - \|P + R.b_3 + a_3\|^2 = 0$$

$$\rho_4^2 - \|P + R.b_4 + a_4\|^2 = 0$$

$$\rho_5^2 - \|P + R.b_5 + a_5\|^2 = 0$$

$$\rho_6^2 - \|P + R.b_6 + a_6\|^2 = 0$$

- ▶ Méthodes numériques [Newton, continuation, analyse par interval]
- ▶ Méthodes algébriques [Groebner, Resultant]