

Image Deblur

Relazione del progetto per l'insegnamento di
Calcolo Numerico

Mattia Girolimetto
Erik Koci
Andreea Scrob



Dipartimento di Informatica
Università di Bologna
A.A 2021/2022

Non c'è niente di peggio di
un'immagine nitida di un
concetto sfuocato.

Ansel Adams

"Last time I asked: 'What does mathematics mean to you?', and some people answered: "The manipulation of numbers, the manipulation of structures.' And if I had asked what music means to you, would you have answered: 'The manipulation of notes?'"

Serge Lang, The Beauty of Doing Mathematics

Abstract

Nel mondo scientifico come in quello di tutti i giorni, spesso ci si ritrova a fare i conti con delle immagini sfocate. Questo è causato dalle imprecisioni degli strumenti o da condizioni esterne alle quali si è obbligati a sottostare. In questo progetto viene analizzato il problema del deblur, ovvero di come poter costruire un'immagine nitida partendo proprio da foto sfocate. Verranno spiegate, testate e confrontate differenti possibili soluzioni che fanno uso di strumenti matematici per conseguire lo scopo. In particolare sarà proposta una soluzione naïve ricondotta al problema dei minimi quadrati lineari e, partendo da quella, altre due soluzioni migliorate basate sui metodi di regolarizzazione. Verranno confrontati anche diversi algoritmi per implementare queste soluzioni. Il tutto sarà accompagnato da immagini che raffigurano l'integrità e un'accurata raccolta di dati.

Indice

1 Introduzione al deblur	4
1.1 Rappresentare immagini	4
1.2 Point Spread Function	4
1.3 Deblur	6
1.4 PSNR & MSE	6
2 Soluzione Naive	6
2.1 Introduzione	6
2.2 Analisi risultati	6
2.3 Conclusioni	10
3 Regolarizzazione di Tikhonov	10
3.1 Introduzione	10
3.2 Analisi risultati	11
3.3 Discesa del Gradiente VS Gradiente Coniugato	14
3.4 Conclusioni	16
4 Variazione Totale	16
4.1 Introduzione	16
4.2 Analisi risultati	17
4.3 Conclusioni	20
5 Confronto tra metodi	20
6 Analisi statistica	25
7 Bibiliografia & Sitografia	25

1 Introduzione al deblur

Spesso nelle applicazioni scientifiche ci si imbatte nel problema di avere immagini sfocate, ciò è dovuto agli strumenti utilizzati come macchine fotografiche, microscopi e telescopi. Risulta quindi necessario sfruttare dei metodi per renderle più nitide (*deblur*).

1.1 Rappresentare immagini

Le immagini in bianco e nero possono essere rappresentate come matrici di numeri i cui elementi (solitamente da 0 a 255) indicano l'intensità di grigio di un *pixel*. Quelle a colori invece sono il risultato della sovrapposizione di tre di queste matrici i cui numeri questa volta rappresentano l'intensità di rosso, verde e blu.

1.2 Point Spread Function

L'immagine iniziale catturata dallo strumento e quella che effettivamente otteniamo possono essere rappresentate come due funzioni, rispettivamente f e g . La trasformazione di f in g è anch'essa rappresentabile tramite una funzione, chiamata **PSF** (Point Spread Function), che è propria dello strumento di acquisizione e l'effetto visivo causato dalla sua applicazione è detto **blurring**. Quando questo processo agisce su un singolo pixel altera anche quelli circostanti che rientrano in una matrice di dimensione dispari detta *kernel* o matrice di convoluzione. In questo progetto è stato usato un *kernel gaussiano* per l'operatore di blur. Questo dipende da due parametri: la dimensione d e la sua deviazione standard σ .

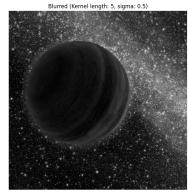
Se si rappresenta l'applicazione del processo detto sopra tramite una matrice A (detta *operatore di blur*), è possibile descrivere il processo di formazione dell'immagine tramite il seguente modello matematico:

$$g = Af$$

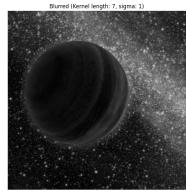
Nel caso pratico, durante la digitalizzazione di un'immagine, viene applicato un ulteriore filtro rappresentato dal *rumore di lettura*. E' possibile quindi modificare il modello precedente per tener conto di questo fattore:

$$g = Af + \eta$$

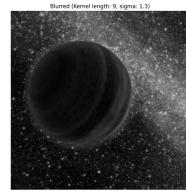
Di seguito sono riportate alcuni risultati del processo di blur con diverse dimensioni e deviazioni standard del kernel su un'immagine 600 x 600 che da questo punto in avanti verrà presa come riferimento per i test e altre due immagini: una raffigurante una radiografia di un cervello umano e un'altra con delle forme geometriche.



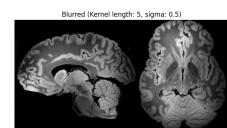
(a) $d = 6, \sigma = 0.5$



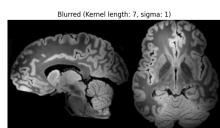
(b) $d = 7, \sigma = 1.0$



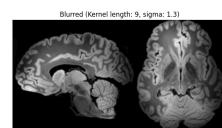
(c) $d = 9, \sigma = 1.3$



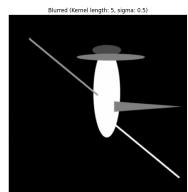
(a) $d = 6, \sigma = 0.5$



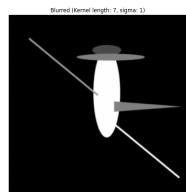
(b) $d = 7, \sigma = 1.0$



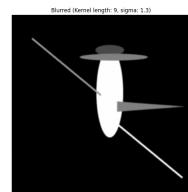
(c) $d = 9, \sigma = 1.3$



(a) $d = 6, \sigma = 0.5$



(b) $d = 7, \sigma = 1.0$



(c) $d = 9, \sigma = 1.3$

1.3 Deblur

Una volta espressa con un modello matematico l'operazione di blur, ci si può chiedere se è possibile invertire il processo ovvero, partendo da un'immagine sfocata ed avendo conoscenza della composizione dell'operatore di blur, ottenere un'immagine nitida più simile possibile a quella originale. Nello studio delle immagini sono state sviluppate diverse tecniche che manipolano la figura usando gli strumenti della matematica.

1.4 PSNR & MSE

Di seguito sono proposti diversi approcci risolutivi assieme ai relativi test. La qualità del risultato per ciascuno è misurata tramite l'*errore quadratico medio (MSE)* e il *peak signal-to-noise ratio (PSNR)*. Il primo indica la discrepanza quadratica media fra i valori dell'immagine sfocata ed i valori dell'immagine reale, mentre il secondo indica il rapporto tra la massima potenza di un segnale e la potenza di rumore che può invalidare la fedeltà della sua rappresentazione compressa.

2 Soluzione Naive

2.1 Introduzione

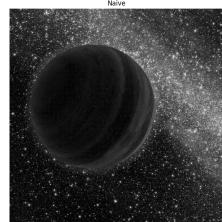
Un primo approccio *naive* è quello di ricondursi al problema dei minimi quadrati lineari e sfruttarlo per risolvere l'equazione precedente.

Dati l'immagine sfocata b e l'operatore di blur A quindi il problema diventa:

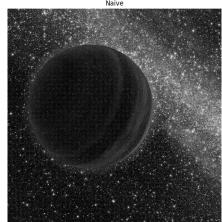
$$x^* = \underset{x}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2$$

2.2 Analisi risultati

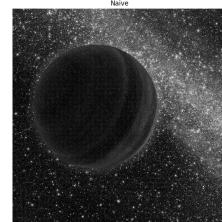
Di seguito sono riportati i risultati di alcuni test eseguiti variando la dimensione del kernel, la sua deviazione standard e la deviazione standard del rumore gaussiano. Per comodità da questo punto in avanti questi parametri verranno chiamati rispettivamente d , σ e s . Tutti i test sono stati svolti sull'immagine di riferimento. con dimensione 600 x 600 e usando il metodo del gradiente coniugato per minimizzare la funzione.



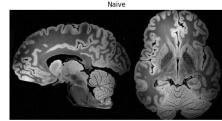
(a) $d = 6, \sigma = 0.5$



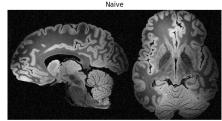
(b) $d = 7, \sigma = 1.0$



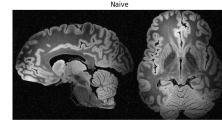
(c) $d = 9, \sigma = 1.3$



(a) $d = 6, \sigma = 0.5$

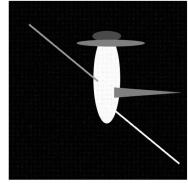


(b) $d = 7, \sigma = 1.0$

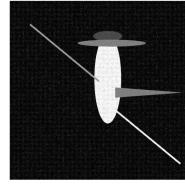


(c) $d = 9, \sigma = 1.3$

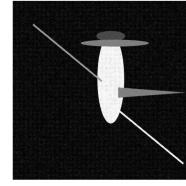
Nei test sulla dimensione del kernel (con σ e s fissati rispettivamente a 0.5 e 0.01) si nota che per valori piccoli la PSRN si stabilizza attorno a 27, per poi abbassarsi fino a raggiungere circa 23 per valori molto alti. Nei test su σ (con $d = 7$ e $s = 0.5$ fissati) si nota che si ottengono valori di PSNR molto alti se $\sigma \in [0, 1; 0, 5]$ mentre per valori più grandi si stabilizza attorno a 20. Infine nei test sulla deviazione standard del rumore gaussiano (con $d = 7$ e $\sigma = 0.5$ fissati) è possibile vedere, com'era prevedibile, che più è basso il valore più l'immagine risulta fedele. Ciò perchè più s è vicino allo zero meno rumore viene applicato nel processo di blur.



(a) $d = 6, \sigma = 0.5$



(b) $d = 7, \sigma = 1.0$

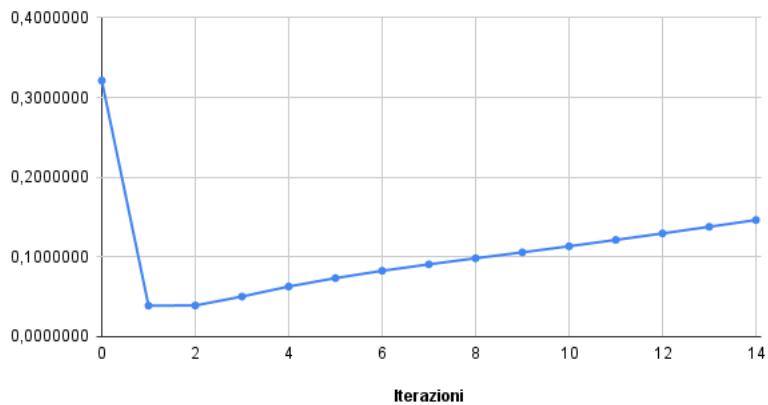


(c) $d = 9, \sigma = 1.3$

Figura 6: Naive

Dimensione Kernel (d)			Deviazione Standard Kernel (σ)			Deviazione Standard Rumore (s)		
$\sigma = 0.5, s = 0.01$			$d = 7, s = 0.01$			$d = 7, \sigma = 0.5$		
d	PSNR	MSE	σ	PSNR	MSE	s	PSNR	MSE
1	46,0233	0,0001	0,03	46,0120	0,00001	0,0050	27,1993	0,0019
3	26,9202	0,0020	0,05	46,0125	0,00002	0,0100	21,1458	0,0077
5	27,2361	0,0019	0,10	45,7960	0,00002	0,0150	17,6368	0,0172
7	27,2163	0,0019	0,30	38,4357	0,0001	0,0200	15,0820	0,0310
9	27,2012	0,0019	0,50	27,1954	0,0019	0,0250	13,1432	0,0485
11	27,2027	0,0019	0,70	22,5941	0,0055	0,0300	11,6032	0,0691
13	27,2245	0,0019	1,00	20,9502	0,0080	0,0350	10,2289	0,0949
15	27,1621	0,0019	1,30	22,3672	0,0058	0,0400	9,0664	0,1240
17	27,2457	0,0019	1,70	22,5950	0,0055	0,0450	8,0592	0,1563
21	27,1954	0,0019	2,20	21,5127	0,0071	0,0500	7,1303	0,1936
49	27,1644	0,0019	2,60	20,9510	0,0080	0,0600	5,5450	0,2789
99	27,1967	0,0019	3,50	19,9164	0,0102	0,0700	4,2635	0,3747
299	27,2429	0,0019	4,70	20,7026	0,0085	0,0800	3,1535	0,4838
599	27,1899	0,0019	5,00	20,8376	0,0082	0,0900	2,1166	0,6142

Errore Relativo Soluzione Naive



Iterazioni	Errore Relativo
0	0,3211758297377572
1	0,0389028416649516
2	0,0390940697379550
3	0,0503406719131519
4	0,0628815598202726
5	0,0734461624036303
6	0,0826155576435253
7	0,0907007102689772
8	0,0983303752040800
9	0,1057864076224074
10	0,113403284728043
11	0,121356904981678
12	0,129515429118821
13	0,137854412873597
14	0,146304879194118

2.3 Conclusioni

Questa formulazione riesce a dare un buon risultato, tuttavia non garantisce una stabilità per quanto riguarda il rumore, per questo motivo è necessario modificarla usando altri metodi come quelli di *regolarizzazione*.

3 Regolarizzazione di Tikhonov

3.1 Introduzione

Il metodo seguente è uno dei più usati per regolarizzare alcuni dei problemi mal posti. Partendo dalla formulazione dei minimi quadrati vista in precedenza, si somma un termine composto da una funzione ϕ (*funzione di regolarizzazione*) ed un $\lambda \in \mathbb{R}$ (*parametro di regolarizzazione*). In particolare il metodo di Tikhonov prevede di scegliere

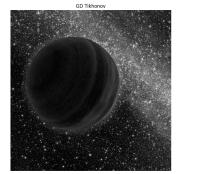
$$\phi = \frac{1}{2} \|x\|_2^2$$

Mentre lo scalare λ resta arbitrario. Dunque il problema da risolvere diventa:

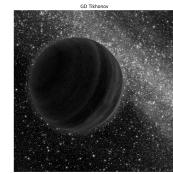
$$x^* = \underset{x}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 + \lambda \frac{1}{2} \|x\|_2^2$$

3.2 Analisi risultati

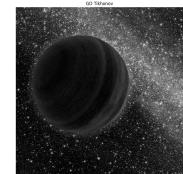
Per la risoluzione del problema sono stati usati due algoritmi differenti: quello del *gradiente coniugato* e quello di *discesa del gradiente*. Sono riportati i risultati di entrambi, eseguiti di consueto sull'immagine di riferimento. Nel caso del gradiente coniugato si è trovato opportuno limitare il numero di iterazioni a 13, mentre nel caso della discesa del gradiente a 50. Il perché di questa scelta verrà motivato alla sezione 3.3.



(a) $d = 6, \sigma = 0.5$



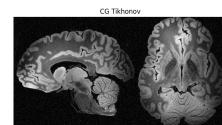
(b) $d = 7, \sigma = 1.0$



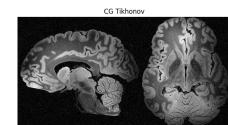
(c) $d = 9, \sigma = 1.3$



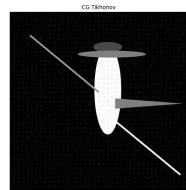
(a) $d = 6, \sigma = 0.5$



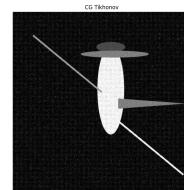
(b) $d = 7, \sigma = 1.0$



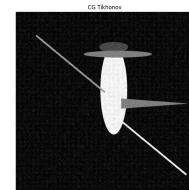
(c) $d = 9, \sigma = 1.3$



(a) $d = 6, \sigma = 0.5$



(b) $d = 7, \sigma = 1.0$



(c) $d = 9, \sigma = 1.3$

Figura 9: Gradiente Coniugato

Gradiente Coniugato					
Dimensione Kernel (d)			Deviazione Standard Kernel (σ)		
$\sigma = 0.5, s = 0.01, \lambda = 10^{-5}$			$d = 7, s = 0.01, \lambda = 10^{-5}$		
d	PSNR	MSE	σ	PSNR	MSE
1	46,0233	0,0001	0,03	46,0121	0,0001
3	26,9582	0,0020	0,05	46,0126	0,0001
5	27,2677	0,0019	0,10	45,7961	0,0001
7	27,2480	0,0019	0,30	38,4366	0,0001
9	27,2330	0,0019	0,50	27,2272	0,0019
11	27,2345	0,0019	0,70	22,6598	0,0054
13	27,2561	0,0019	1,00	21,0494	0,0079
15	27,1941	0,0019	1,30	22,4531	0,0057
17	27,2770	0,0019	1,70	22,6779	0,0054
21	27,2271	0,0019	2,20	21,6176	0,0069
49	27,1964	0,0019	2,60	21,0613	0,0078
99	27,2283	0,0019	3,50	20,0186	0,0100
299	27,2744	0,0019	4,70	20,7729	0,0084
599	27,2216	0,0019	5,00	20,9054	0,0081

Gradiente Coniugato					
Parametro di Regolarizzazione (λ)			Deviazione Standard Rumore (s)		
$d = 7, \sigma = 0.5, s = 0.01$			$d = 7, \sigma = 0.5, \lambda = 10^{-5}$		
λ	PSNR	MSE	s	PSNR	MSE
0,0010	29,4493	0,0011	0,0050	27,2307	0,0019
0,0050	32,7232	0,0005	0,0100	21,1782	0,0076
0,0100	34,0844	0,0004	0,0150	17,6692	0,0171
0,0300	33,7161	0,0004	0,0200	15,1151	0,0308
0,0500	32,0888	0,0006	0,0250	13,1762	0,0481
0,0700	30,6290	0,0009	0,0300	11,6364	0,0686
0,1000	28,9066	0,0013	0,0350	10,2619	0,0941
0,1500	26,7975	0,0021	0,0400	9,0998	0,1230
0,2000	25,2561	0,0030	0,0450	8,0924	0,1552
0,3000	23,0855	0,0049	0,0500	7,1636	0,1921
0,5000	20,4772	0,0090	0,0600	5,5782	0,2768
0,8000	18,3358	0,0147	0,0700	4,2967	0,3718
1,0000	17,4367	0,0180	0,0800	3,1850	0,4803
1,5000	16,0226	0,0250	0,0900	2,1479	0,6098

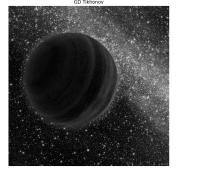
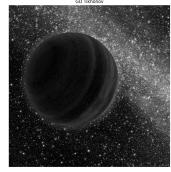
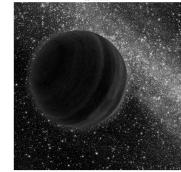
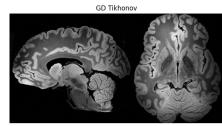
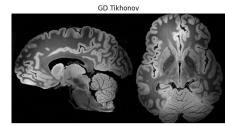
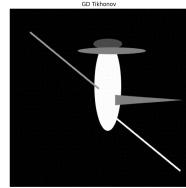
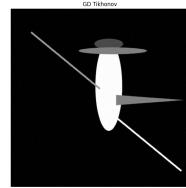
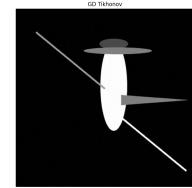
(a) $d = 6, \sigma = 0.5$ (b) $d = 7, \sigma = 1.0$ (c) $d = 9, \sigma = 1.3$ (d) $d = 6, \sigma = 0.5$ (e) $d = 7, \sigma = 1.0$ (f) $d = 9, \sigma = 1.3$ (g) $d = 6, \sigma = 0.5$ (h) $d = 7, \sigma = 1.0$ (i) $d = 9, \sigma = 1.3$

Figura 10: Discesa del gradiente

Discesa del Gradiente					
Dimensione Kernel (d)			Deviazione Standard Kernel (σ)		
$\sigma = 0.5, s = 0.01, \lambda = 10^{-5}$			$d = 7, s = 0.01, \lambda = 10^{-5}$		
d	PSNR	MSE	σ	PSNR	MSE
1	46,0233	0,0001	0,03	46,0121	0,0001
3	34,6372	0,0003	0,05	46,0125	0,0001
5	34,4819	0,0004	0,10	45,7961	0,0001
7	34,4974	0,0004	0,30	38,5602	0,0001
9	34,4791	0,0004	0,50	34,4751	0,0004
11	34,4666	0,0004	0,70	32,5380	0,0006
13	34,4695	0,0004	1,00	30,0166	0,0010
15	34,4832	0,0004	1,30	28,3105	0,0015
17	34,4678	0,0004	1,70	26,7954	0,0021
21	34,4586	0,0004	2,20	25,5907	0,0028
49	34,4883	0,0004	2,60	24,9751	0,0032
99	34,4802	0,0004	3,50	24,2859	0,0037
299	34,4855	0,0004	13	24,0409	0,0039
599	34,4819	0,0004	4,70	24,0320	0,0040
			5,00		

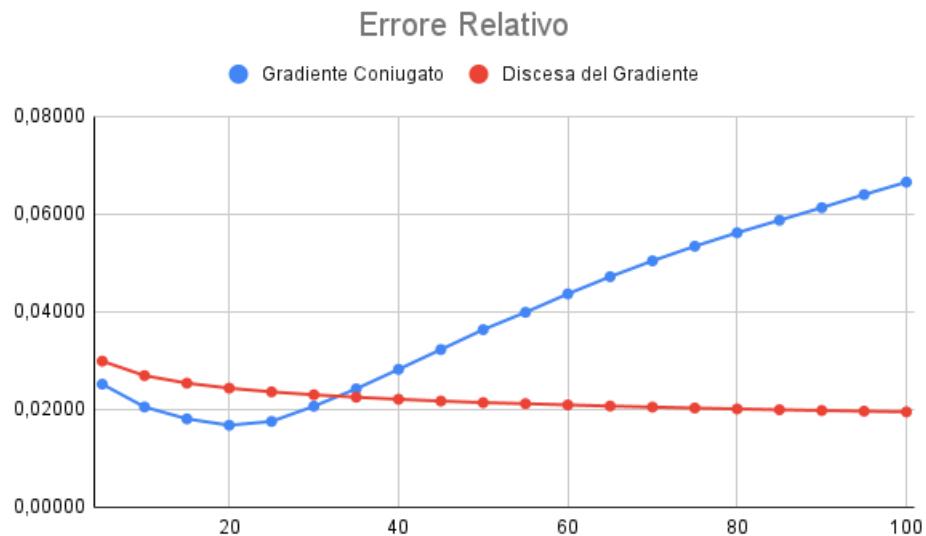
Discesa del Gradiente					
Parametro di Regolarizzazione (λ)			Deviazione Standard Rumore (s)		
$d = 7, \sigma = 0.5, s = 0.01$			$d = 7, \sigma = 0.5, \lambda = 10^{-5}$		
λ	PSNR	MSE	s	PSNR	MSE
0,0010	34,5323	0,0004	0,0050	34,4673	0,0004
0,0050	34,7684	0,0003	0,0100	29,0521	0,0012
0,0100	34,8877	0,0003	0,0150	25,6694	0,0027
0,0300	33,7112	0,0004	0,0200	23,2132	0,0048
0,0500	32,0802	0,0006	0,0250	21,2975	0,0074
0,0700	30,6269	0,0009	0,0300	19,7313	0,0106
0,1000	28,9062	0,0013	0,0350	18,3834	0,0145
0,1500	26,7975	0,0021	0,0400	17,2443	0,0189
0,2000	25,2562	0,0030	0,0450	16,2229	0,0239
0,3000	23,0855	0,0049	0,0500	15,3064	0,0295
0,5000	20,4772	0,0090	0,0600	13,7089	0,0426
0,8000	18,3358	0,0147	0,0700	12,4125	0,0574
1,0000	17,4367	0,0180	0,0800	11,2228	0,0755
1,5000	16,0226	0,0250	0,0900	10,1915	0,0957

Risulta evidente il miglioramento del valore del PSNR rispetto alla soluzione precedente, per maggiori confronti con gli altri metodi rimandiamo alla sezione 5. Si nota inoltre, in alcuni casi, una netta discrepanza tra i due algoritmi risolutivi. Nella sezione successiva verranno messe in evidenza e discusse queste differenze.

3.3 Discesa del Gradiente VS Gradiente Coniugato

Di seguito sono stati messi a confronto i due metodi utilizzati. Sono stati calcolati valori di PSRN, di MSE e l'errore relativo su un numero variabile di iterazioni. I test sono stati eseguiti sempre sull'immagine del pianeta di riferimento, con dimensione del kernel pari a 7, deviazione standard del kernel pari a 1, deviazione standard del rumore pari a $5 \cdot 10^{-3}$ e termine di regolarizzazione pari a 10^{-3} .

Max iter.	PSNR GC	PSNR GD	MSE GC	MSE GD	Errore Rel. GC	Errore Rel. GD
5	27,900	26,514	0,002	0,002	0,0252	0,0299
10	29,924	27,690	0,001	0,002	0,0205	0,0269
15	30,119	28,370	0,001	0,001	0,0181	0,0254
20	29,16	28,836	0,001	0,001	0,0168	0,0244
25	27,629	29,100	0,002	0,001	0,0176	0,0236
30	26,001	29,431	0,003	0,001	0,0207	0,0230
35	24,502	29,632	0,004	0,001	0,0243	0,0225
40	23,180	29,791	0,005	0,001	0,0282	0,0221
45	22,027	29,919	0,006	0,001	0,0323	0,0217
50	21,017	30,021	0,008	0,001	0,0364	0,0214
55	20,142	30,097	0,010	0,001	0,0399	0,0212
60	19,371	30,161	0,012	0,001	0,0437	0,0209
65	18,699	30,211	0,013	0,001	0,0472	0,0207
70	18,108	30,248	0,015	0,001	0,0504	0,0205
75	17,582	30,276	0,017	0,001	0,0534	0,0203
80	17,112	30,294	0,019	0,001	0,0562	0,0201
85	16,691	30,305	0,021	0,001	0,0587	0,0200
90	16,310	30,309	0,023	0,001	0,0613	0,0198
95	15,965	30,308	0,025	0,001	0,0640	0,0197
100	15,648	30,301	0,027	0,001	0,0665	0,0195



Come si può notare dal grafico l'errore relativo del metodo del gradiente coniugato, dopo una prima fase di decrescita, tende a crescere molto più velocemente del metodo di discesa del gradiente che invece segue un andamento più lineare e sembra convergere ad un valore attorno al 2. Se si guarda la qualità del

risultato però ci si accorge che il primo raggiunge un PSNR di 30,119 dopo solo 15 iterazioni, mentre il secondo per raggiungere quel valore ne impiega circa 50. Anche il comportamento dopo il raggiungimento di quella che sembra essere la soluzione ottima è molto diverso: il primo continuando con le iterazioni si allontana sempre più dal risultato, mentre il secondo sembra restare in un intorno del valore ottimo anche dopo molte iterazioni. Se ne conclude che il metodo del gradiente coniugato raggiunge l'ottimo più velocemente ma se si esagera con il numero di iterazioni diventa poco affidabile. D'altro canto quello di discesa è più lento ma più stabile.

3.4 Conclusioni

Usando la formulazione di Tikhonov si ottiene un risultato migliore rispetto alla soluzione naïve, sia con il metodo del gradiente coniugato, sia con quello di discesa del gradiente. Le differenze tra i due sono probabilmente dovute al numero di iterazioni non ideale.

4 Variazione Totale

4.1 Introduzione

Un altro metodo di regolarizzazione usato nell'ambito dell'elaborazione delle immagini è quello di regolarizzazione a variazione totale. Si basa sul principio del rumore che causa un incremento della variazione totale del segnale. Con un segnale bidimensionale, come nel caso delle immagini digitali, la variazione totale TV si calcola:

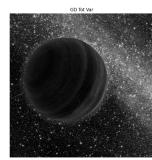
$$TV(u) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sqrt{\|\nabla u(i, j)\|_2^2 + \epsilon^2}$$

Usando TV come funzione di regolarizzazione è possibile quindi riscrivere il problema come:

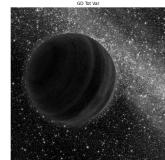
$$x^* = \operatorname{argmin}_x \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 + \lambda TV(u)$$

4.2 Analisi risultati

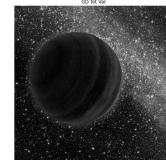
Come per i metodi precedenti sono riportati di seguito alcuni test eseguiti con parametri variabili.



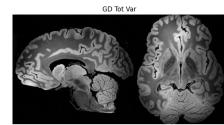
(a) $d = 6, \sigma = 0.5$



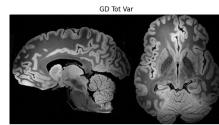
(b) $d = 7, \sigma = 1.0$



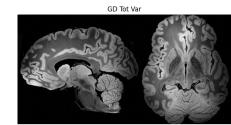
(c) $d = 9, \sigma = 1.3$



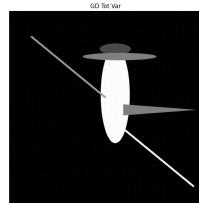
(a) $d = 6, \sigma = 0.5$



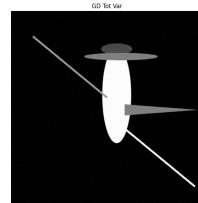
(b) $d = 7, \sigma = 1.0$



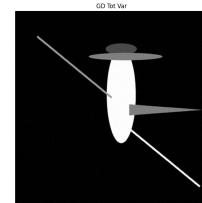
(c) $d = 9, \sigma = 1.3$



(a) $d = 6, \sigma = 0.5$



(b) $d = 7, \sigma = 1.0$



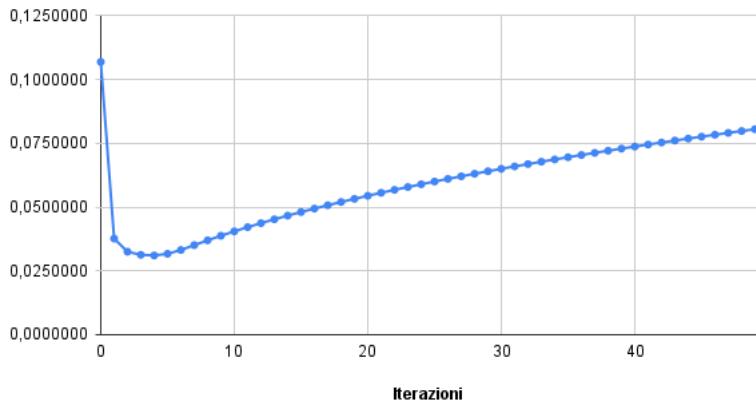
(c) $d = 9, \sigma = 1.3$

Figura 13: Variazione Totale

Dimensione Kernel			Deviazione Standard Kernel (σ)			
Dim.	Kernel	PSNR	MSE	σ	PSNR	MSE
1	46,0258	0,0001		0,03	46,0144	0,0000
3	34,6635	0,0003		0,05	46,0150	0,0000
5	34,5086	0,0004		0,10	45,7986	0,0000
7	34,5242	0,0004		0,30	38,5736	0,0001
9	34,5057	0,0004		0,50	34,5017	0,0004
11	34,4931	0,0004		0,70	32,5543	0,0006
13	34,4961	0,0004		1,00	30,0225	0,0010
15	34,5099	0,0004		1,30	28,3122	0,0015
17	34,4945	0,0004		1,70	26,7945	0,0021
21	34,4853	0,0004		2,20	25,5891	0,0028
49	34,5150	0,0004		2,60	24,9735	0,0032
99	34,5068	0,0004		3,50	24,2843	0,0037
299	34,5120	0,0004		4,70	24,0387	0,0039
599	34,5085	0,0004		5,00	24,0297	0,0040

Parametro di Regolarizzazione (λ)			Deviazione Standard Rumore (s)		
λ	PSNR	MSE	s	PSNR	MSE
0,0010	35,5178	0,0003	0,0050	34,4941	0,0004
0,0050	32,6559	0,0005	0,0100	29,0755	0,0012
0,0100	30,3529	0,0009	0,0150	25,6886	0,0027
0,0300	26,4983	0,0022	0,0200	23,2291	0,0048
0,0500	24,9073	0,0032	0,0250	21,3110	0,0074
0,0700	24,0070	0,0040	0,0300	19,7429	0,0106
0,1000	23,2139	0,0048	0,0350	18,3936	0,0145
0,1500	22,4372	0,0057	0,0400	17,2533	0,0188
0,2000	22,0675	0,0062	0,0450	16,2309	0,0238
0,3000	21,5944	0,0069	0,0500	15,3137	0,0294
0,5000	21,2634	0,0075	0,0600	13,7148	0,0425
0,8000	20,0204	0,0100	0,0700	12,4175	0,0573
1,0000	19,2500	0,0119	0,0800	11,2270	0,0754
1,5000	18,9217	0,0128	0,0900	10,1951	0,0956

Errore Relativo Variazione Totale



Iterazioni	Errore Relativo	Iterazioni	Errore Relativo
0	0,10691452160767745	25	0,060019356148640644
1	0,037655333688010176	26	0,061059773974728344
2	0,03251275664118382	27	0,06207822341455425
3	0,03130497490315447	28	0,06307583547085191
4	0,031051665862452928	29	0,06405365007183683
5	0,03168958680829709	30	0,0650126252669438
6	0,03319137910411622	31	0,06595364528957183
7	0,035089997038348655	32	0,06687752766537063
8	0,03697745164385523	33	0,0677850295785731
9	0,03878113235783735	34	0,068676853636001
10	0,04049859351299123	35	0,06955365306412699
11	0,04213755009927055	36	0,07041603640590115
12	0,043706509390786505	37	0,0712645717870468
13	0,04521304673492498	38	0,07209979076694777
14	0,046663578597460655	39	0,07292219179150843
15	0,04806347880972956	40	0,07373224328809694
16	0,049417261952573635	41	0,07453038644427974
17	0,050728756422287635	42	0,07531703771058508
18	0,05200124690969378	43	0,0760925910613362
19	0,053237585829820855	44	0,07685742003719785
20	0,05444027856484393	45	0,07761187958818772
21	0,05561154773313908	46	0,07835630772934217
22	0,05675338158560937	47	0,07909102702904769
23	0,05786757085285862	48	0,07981634595973
24	0,058955737301748426	49	0,08053256013223578

4.3 Conclusioni

Anche questo metodo risulta complessivamente un buon passo in avanti rispetto alla soluzione naïve. Ottiene ottimi risultati anche se sembra non superare mai il limite della soluzione con Tikhonov (in entrambe le sue implementazioni).

5 Confronto tra metodi

Per facilitare il confronto sono riportati di seguito i dati già mostrati per i vari metodi, raggruppati in base al parametro a cui fanno riferimento. I metodi del gradiente coniugato sono limitati ad un massimo di 13 iterazioni, mentre quelli di discesa del gradiente a 50. Sempre per facilitare il confronto per ogni tabella è riportato un grafico raffigurante i dati di questa.

Dimensione kernel (d)				
d	Naive	Tikhonov (GC)	Tikhonov (DG)	Variazione Totale
1	46,0233	46,0184	46,0233	46,0258
3	26,9202	31,4255	34,6372	34,6635
5	27,2361	30,1496	34,4819	34,5086
7	27,2163	30,1934	34,4974	34,5242
9	27,2012	30,2135	34,4791	34,5057
11	27,2027	30,1994	34,4666	34,4931
13	27,2245	30,2130	34,4695	34,4961
15	27,1621	30,2180	34,4832	34,5099
17	27,2457	30,2246	34,4678	34,4945
21	27,1954	30,2156	34,4586	34,4853
49	27,1644	30,2180	34,4883	34,5150
99	27,1967	30,2047	34,4802	34,5068
299	27,2429	30,1995	34,4855	34,5120
599	27,1899	30,1902	34,4819	34,5085

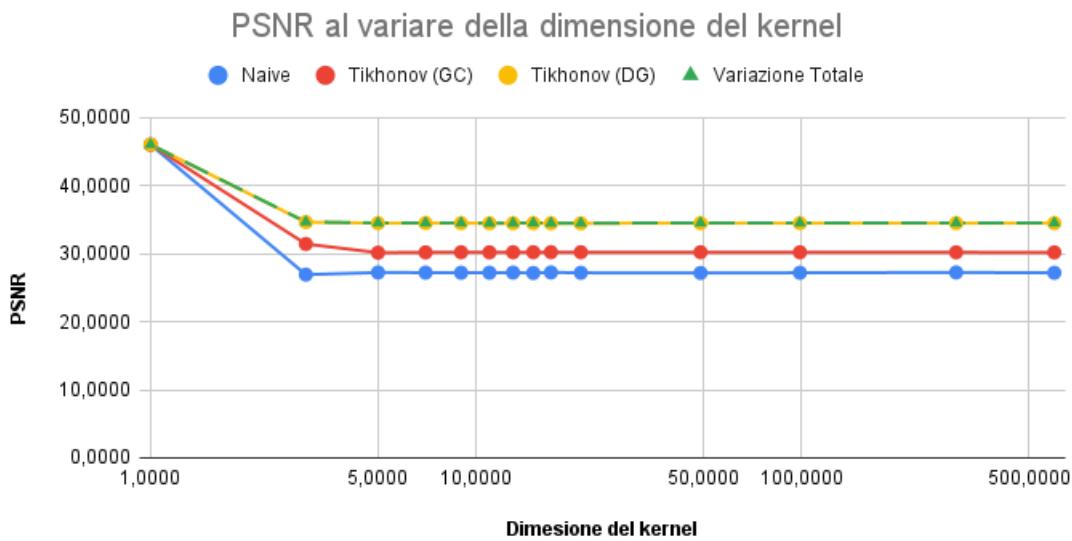
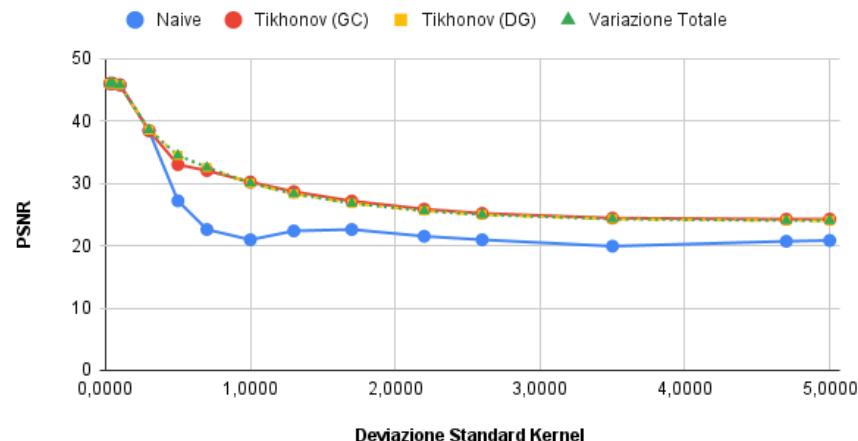


Grafico in scala logaritmica

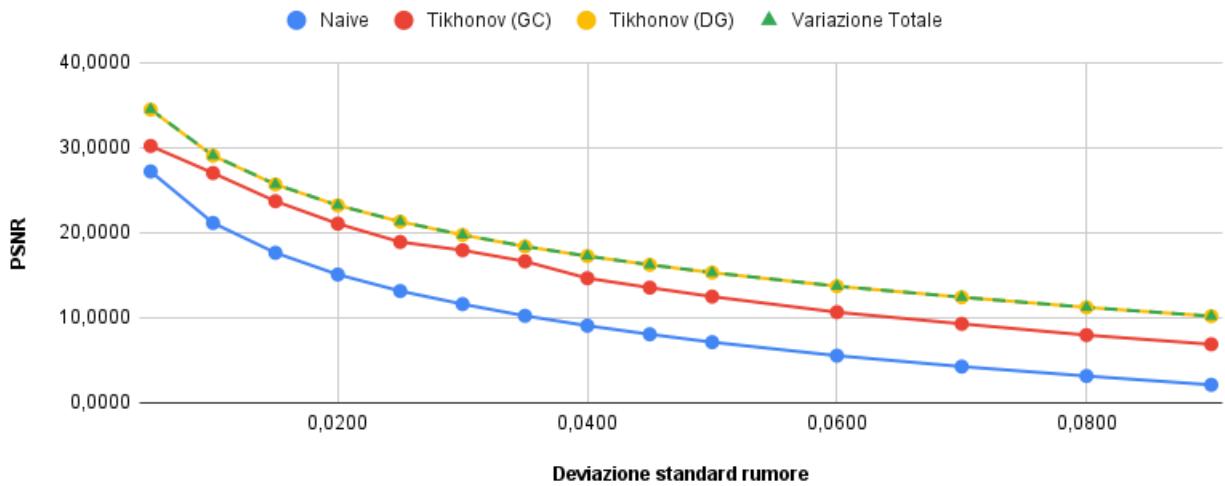
Deviazione Standard Kernel (σ)				
σ	Naive	Tikhonov (GC)	Tikhonov (DG)	Variazione Totale
0,03	46,0120	46,0238	46,0121	46,0144
0,05	46,0125	46,0356	46,0125	46,0150
0,10	45,7960	45,7748	45,7961	45,7986
0,30	38,4357	38,4683	38,5602	38,5736
0,50	27,1954	32,9991	34,4751	34,5017
0,70	22,5941	32,0448	32,5380	32,5543
1,00	20,9502	30,2207	30,0166	30,0225
1,30	22,3672	28,6671	28,3105	28,3122
1,70	22,5950	27,1611	26,7954	26,7945
2,20	21,5127	25,8637	25,5907	25,5891
2,60	20,9510	25,1879	24,9751	24,9735
3,50	19,9164	24,4274	24,2859	24,2843
4,70	20,7026	24,2478	24,0409	24,0387
5,00	20,8376	24,2620	24,0320	24,0297

PSNR al variare della deviazione standard del kernel

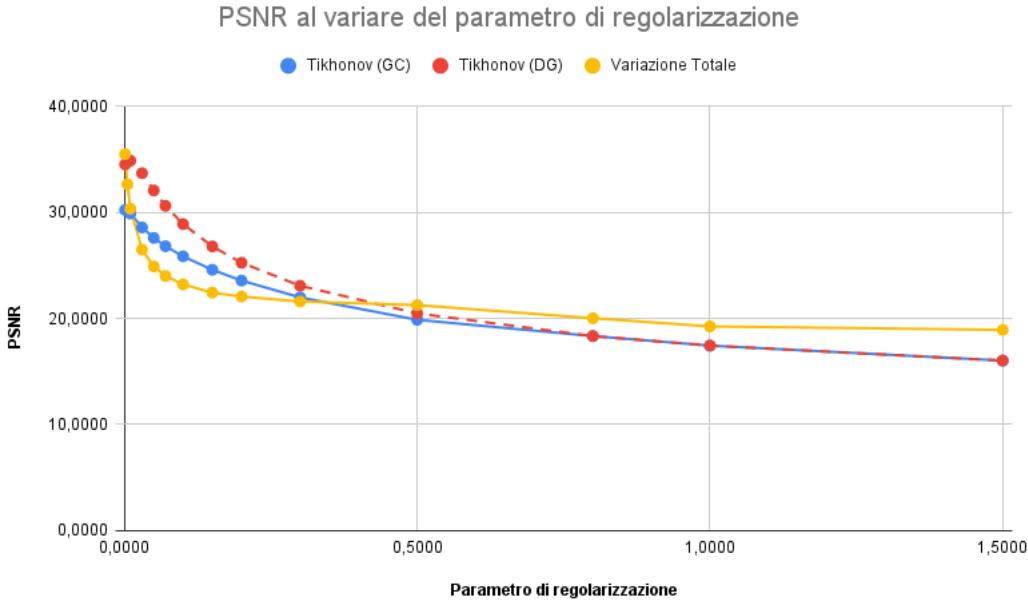


Deviazione Standard del Rumore (s)				
s	Naive	Tikhonov (GC)	Tikhonov (DG)	Variazione Totale
0,005	27,1993	30,1970	34,4673	34,4941
0,010	21,1458	27,0157	29,0521	29,0755
0,015	17,6368	23,7035	25,6694	25,6886
0,020	15,0820	21,0571	23,2132	23,2291
0,025	13,1432	18,9082	21,2975	21,3110
0,030	11,6032	17,9395	19,7313	19,7429
0,035	10,2289	16,6333	18,3834	18,3936
0,040	9,0664	14,6486	17,2443	17,2533
0,045	8,0592	13,5419	16,2229	16,2309
0,050	7,1303	12,4860	15,3064	15,3137
0,060	5,5450	10,6566	13,7089	13,7148
0,070	4,2635	9,2865	12,4125	12,4175
0,080	3,1535	7,9644	11,2228	11,2270
0,090	2,1166	6,8824	10,1915	10,1951

PSNR al variare della deviazione standard del rumore



Parametro di Regolarizzazione (λ)			
λ	Tikhonov GC	Tikhonov DG	Variazione Totale
0,001	30,2434	34,5323	35,5178
0,005	30,1785	34,7684	32,6559
0,010	29,8959	34,8877	30,3529
0,030	28,5895	33,7112	26,4983
0,050	27,6021	32,0802	24,9073
0,070	26,8197	30,6269	24,0070
0,100	25,8625	28,9062	23,2139
0,150	24,5929	26,7975	22,4372
0,200	23,5711	25,2562	22,0675
0,300	21,9863	23,0855	21,5944
0,500	19,8716	20,4772	21,2634
0,800	18,3358	18,3358	20,0204
1,000	17,4367	17,4367	19,2500
1,500	16,0226	16,0226	18,9217



In generale da questi test si nota come il metodo con la variazione totale e quello di Tikhonov diano risultati notevolmente migliori rispetto alla soluzione naïve. Questa è una conclusione che ci si aspettava dato che, come spiegato in precedenza, la soluzione naïve non tiene conto del rumore.

Dai test sulla dimensione e della deviazione standard del kernel e della deviazione standard del rumore, si nota una fedele corrispondenza tra variazione totale e Tikhonov (DG). Questo probabilmente perchè questi parametri non giocano alcun ruolo nella funzione di regolarizzazione, quindi la loro variazione non influenza sullo scarto che hanno dalla soluzione naïve. Scarto che rimane quasi costante per tutti i tre parametri (a parte una perturbazione nel caso della deviazione standard del kernel). Il metodo di Tikhonov (GC) tuttavia rimane, in due di questi tre parametri, inferiore al suo corrispettivo eseguito con il metodo di discesa del gradiente. Questo probabilmente perchè non è stato trovato il giusto numero di iterazioni massime e, come si è visto nel confronto tra i due, il metodo del gradiente coniugato necessita una buona calibrazione sotto questo aspetto.

Diversa la situazione invece per quanto riguarda i test sul parametro di regolarizzazione. Da questi si evince che la soluzione tramite variazione totale mantiene un livello di PSNR più elevato anche per valori grandi di lambda. Si nota anche come in questi test la differenza tra le due implementazioni di Tikhonov sia molto meno marcata.

6 Analisi statistica

Per un'analisi più immediata si estrapolano dai dati la *media* e *deviazione standard*, nota anche come scarto quadratico medio. I dati presi in esame sono il *Mean Squared Error* e il *Peak signal-to-noise ratio* dei metodi utilizzati.

L'errore quadratico medio (o MSE) indica la discrepanza quadratica media tra i valori dei dati osservati ed i valori dei dati stimati. Nella soluzione con variazione totale, che nella tabella sottostante è indicato come "Var. Tot.", questo, in media, è molto alto in confronto agli altri. Esso infatti raggiunge un ordine di grandezza pari a 10^1 , a differenza delle soluzioni naive e Tikhonov con gradiente coniugato (Tk-GC) che si aggirano intorno al 10^{-3} mentre Tikhonov con discesa del gradiente **Tk-GD** a 10^{-4} .

La deviazione standard è indice di dispersione statico, ovvero la valutazione della differenza di dati raccolti, che possiamo esprimere come precisione. Se la deviazione standard è piccola tutte le osservazioni distano poco dalla media, di conseguenza questa è un buon indicatore della serie di dati. Analizzando i valori raccolti risulta che, la media del metodi con MSE più piccolo è quello più preciso e il metodo che corrisponde a tali caratteristiche è quello di Tikhonov con discesa del gradiente. Per quanto riguarda il PSNR, che corrisponde al valore adottato per confrontare la qualità dell'immagine compressa in confronto all'originale, il ragionamento è inverso rispetto alla media, infatti maggiore è questo maggiore è la "somiglianza" con l'immagine originale; in altre parole l'immagine compressa presenta poco rumore.

In questo caso il metodo della variazione totale riesce in media a dare un risultato migliore, ma bisogna anche considerare che ha una deviazione standard maggiore rispetto agli altri metodi.

Metodo	PSNR		MSE	
	Media	Deviazione Standard	Media	Deviazione Standard
Naive	21,1347	0,0222	0,0077	3,9395
Tk-GC	28,9613	0,0424	0,0012	1,2428
Tk-GD	30,6511	0,0737	0,0008	1,4667
Var. Tot	44,2520	0,5136	3,7820	4,2442

7 Bibiliografia & Sitografia

- https://virtuale.unibo.it/pluginfile.php/1072026/mod_resource/content/1/imaging.pdf
- https://virtuale.unibo.it/pluginfile.php/1078642/mod_resource/content/1/deblur_it.pdf
- https://it.wikipedia.org/wiki/Matrice_di_convoluzione
- https://it.wikipedia.org/wiki/Funzione_di_diffusione_del_punto
- https://it.wikipedia.org/wiki/Regolarizzazione_a_variazione_totale
- https://it.wikipedia.org/wiki/Errore_quadratico_medio