

Progetto esame

Calcolo Numerico
Laurea Triennale in Informatica

a.a. 2021-2022

Informazioni consegna

- Aggiungere i componenti del proprio gruppo in questo form.
- **I gruppi possono essere composti da massimo 3 persone. Nel caso si intenda fare il progetto da soli bisogna comunque aggiungere il proprio nome nel form.**
- Per la consegna è necessario caricare su Virtuale in un archivio compresso la relazione, il notebook Colab e le immagini generate.
- La consegna deve essere effettuata da un qualsiasi membro del gruppo e verrà automaticamente attribuita ai restanti componenti.
- Per i dettagli sulle tempistiche e le scadenze si faccia riferimento a Virtuale.

Deblur Immagini

Il problema di deblur consiste nella ricostruzione di un'immagine a partire da un dato acquisito mediante il seguente modello:

$$b = Ax + \eta$$

dove b rappresenta l'immagine corrotta, x l'immagine originale che vogliamo ricostruire, A l'operatore che applica il blur Gaussiano ed η il rumore additivo con distribuzione Gaussiana di media μ e deviazione standard σ .

Generazione dataset

Generare un set di 8 immagini 512×512 in formato png in scala dei grigi che contengano tra i 2 ed i 6 oggetti geometrici, di colore uniforme, su sfondo nero.

1 Generazione immagini corrotte

Degradare le immagini applicando, mediante le funzioni riportate nel notebook del progetto, l'operatore di blur con parametri

- $\sigma = 0.5$ dimensione 5×5
- $\sigma = 1$ dimensione 7×7
- $\sigma = 1.3$ dimensione 9×9

ed aggiungendo rumore gaussiano con deviazione standard $(0, 0.05]$

2 Soluzione naive

Una possibile ricostruzione dell'immagine originale x partendo dall'immagine corrotta b è la soluzione naive data dal minimo del seguente problema di ottimizzazione:

$$x^* = \arg \min_x \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 \quad (1)$$

La funzione f da minimizzare è data dalla formula $f(x) = \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2$, il cui gradiente ∇f è dato da $\nabla f(x) = A^T Ax - A^T b$.

Utilizzando il metodo del gradiente coniugato implementato dalla funzione `minimize` calcolare la soluzione naive.

3 Regularizzazione

Per ridurre gli effetti del rumore nella ricostruzione è necessario introdurre un termine di regolarizzazione di Tikhonov. Si considera quindi il seguente problema di ottimizzazione.

$$x^* = \arg \min_x \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 + \frac{\lambda}{2} \|x\|_2^2$$

La funzione f da minimizzare diventa $f(x) = \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 + \frac{\lambda}{2} \|x\|_2^2$ il cui gradiente ∇f è dato da $\nabla f(x) = A^T Ax - A^T b + \lambda x$.

Utilizzando il metodo del gradiente coniugato implementato dalla funzione `minimize` ed il metodo del gradiente implementato a lezione, calcolare la soluzione del precedente problema di minimo regolarizzato per differenti valori di λ .

4 Variazione Totale (Facoltativo)

Un'altra funzione adatta come termine di regolarizzazione è la Variazione Totale. Data u immagine di dimensioni $m \times n$ la variazione totale TV di u è definita come:

$$TV(u) = \sum_i^n \sum_j^m \sqrt{\|\nabla u(i, j)\|_2^2 + \epsilon^2}$$

Per calcolare il gradiente dell'immagine ∇u usiamo la funzione `np.gradient` che approssima la derivata per ogni pixel calcolando la differenza tra pixel adiacenti. I risultati sono due immagini della stessa dimensione dell'immagine in input, una che rappresenta il valore della derivata orizzontale 'dx' e l'altra della derivata verticale 'dy'. Il gradiente dell'immagine nel punto (i, j) è quindi un vettore di due componenti, uno orizzontale contenuto in 'dx' e uno verticale in 'dy'.

Come nei casi precedenti il problema di minimo che si va a risolvere è il seguente:

$$x^* = \arg \min_x \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 + \lambda TV(u)$$

il cui gradiente ∇f è dato da

$$\nabla f(x) = (A^T Ax - A^T b) + \lambda \nabla TV(x)$$

Utilizzando il metodo del gradiente implementato a lezione, calcolare la soluzione del precedente problema di minimo regolarizzato per differenti valori di λ .

(Hint:) Per risolvere il problema di minimo è necessario anche calcolare il gradiente della variazione totale che è definito nel modo seguente

$$\nabla TV(u) = -div \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{\|\nabla u\|_2^2 + \epsilon^2}} \right)$$

$$\text{div}(F) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y}$$

$\text{div}(F)$ è la divergenza del campo vettoriale F , nel nostro caso F ha due componenti dati dal gradiente dell'immagine ∇u scalato per il valore $\frac{1}{\sqrt{\|\nabla u\|_2^2 + \epsilon^2}}$. Per calcolare la divergenza bisogna calcolare la derivata orizzontale $\frac{\partial F_x}{\partial x}$ della componente x di F e sommarla alla derivata verticale $\frac{\partial F_y}{\partial y}$ della componente y di F . Per specificare in quale direzione calcolare la derivata con la funzione `np.gradient` utilizziamo il parametro `'axis = 0'` per l'orizzontale e `'axis = 1'` per la verticale.

Relazione

1. Riportare e commentare i risultati ottenuti nei punti 2. 3. (e 4.) su un immagine del set creato e su altre due immagini in bianco e nero (fotografiche/mediche/astronomiche ecc.)
2. Riportare delle tabelle con le misure di PSNR e MSE ottenute al variare dei parametri (dimensione kernel, valore di sigma, la deviazione standard del rumore, il parametro di regolarizzazione).
3. Calcolare sull'intero set di immagini medie e deviazione standard delle metriche per alcuni valori fissati dei parametri.
4. Analizzare su 2 esecuzioni le proprietà dei metodi numerici utilizzati (gradiente coniugato e gradiente) in termini di numero di iterazioni, andamento dell'errore, della funzione obiettivo, norma del gradiente.