Wenn Kaninchen Domino spielen – Folgen, Rekursionen und Reihen

Thomas Speckhofer

1. Folgen

Folge = Aneinanderreihung von endlich oder unendlich vielen Zahlen (oder anderen Objekten)

- formal: unendliche Folge = Funktion von den natürlichen Zahlen in die reellen Zahlen / komplexen Zahlen / …
- Notation: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ($n =$ Index, $a_n = n$ -tes Element der Folge, n -tes Folgenglied)

Definition/Darstellung von Folgen

explizite Darstellung durch eine Formel

- z. B. $a_n = n^2 + n + 1$ für alle $n \geq 0$

implizite Definition/Beschreibung des Folgenglieds a_n durch gewisse Eigenschaften

- z. B. $p_n =$ die n -te Primzahl;
- $a_n =$ Anzahl der Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$.

rekursive Darstellung: a_n kann mit einer Formel aus den vorherigen Folgengliedern berechnet werden

- z. B.: $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$ für alle $n \geq 1$;
- $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ für $n \geq 0$.

Beispiele

Arithmetische Folgen

$a_{n+1} = a_n + d$ für alle $n \in \mathbb{N}$

explizite Darstellung: $a_n = a_0 + n \cdot d$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Geometrische Folgen

$a_{n+1} = q \cdot a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$

explizite Darstellung: $a_n = a_0 \cdot q^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Die Fibonacci-Folge

benannt nach Leonardo Fibonacci

$\rightarrow$ beschrieb Wachstum einer Kaninchenpopulation:

- erstes Paar wird im ersten Monat geboren
- jedes Paar, das 2 Monate oder älter ist, bringt pro Monat ein weiteres Paar zur Welt.

Startwerte: $(F_0 = 0)$, $F_1 = F_2 = 1$

Rekursion: $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ für alle $n \geq 0$.

Die Fibonacci-Folge

Wie kann man die Fibonacci-Zahlen effizient am Computer berechnen?

- naiver Algorithmus: F_n rekursiv berechnen
- schneller: Schleife
- noch schneller:

$$\begin{aligned} F_{2n} &= F_n(2F_{n+1} - F_n) \\ F_{2n+1} &= F_n^2 + F_{n+1}^2. \end{aligned}$$

$\rightarrow F_n$ kann in $\mathcal{O}(\log_2(n))$ Schritten berechnet werden.

Finden expliziter Darstellungen

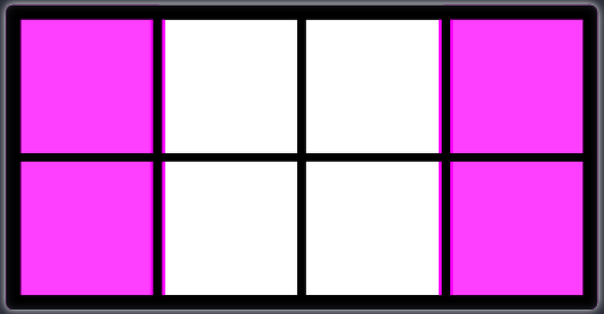
Beispiel: Es sei $A_0 = \{1, 2\}$, und für $n > 0$ entstehe die Menge A_n aus A_{n-1}, indem man zu A_{n-1} alle natürlichen Zahlen hinzunimmt, die sich als Summe von zwei verschiedenen Zahlen aus A_{n-1} darstellen lassen. Es sei a_n die Anzahl der Zahlen in A_n. Man bestimme a_n als Funktion von n.

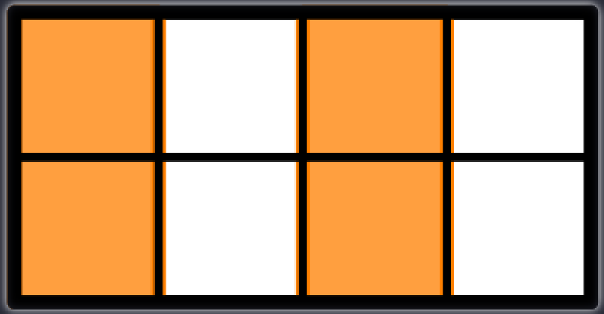
Rekursion: $a_{n+1} = 2a_n - 1$ für $n \geq 0$; $a_0 = 2$.

Explizite Formel: $a_n = 2^n + 1$.

Finden expliziter Darstellungen

Beispiel: Wie viele Möglichkeiten gibt es, eine Fläche mit den Abmessungen 1 Meter mal n Meter mit Fliesen auszulegen, wenn folgende Fliesen zur Verfügung stehen? (Die quadratische Fliese hat Seitenlänge 1 Meter.)





Fibonacci-Folge – explizite Darstellung

$F_0 = 0$, $F_1 = 1$

$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ für $n \geq 0$.

Formel von Moivre-Binet:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right), \qquad (n \geq 0)$$

C -finite Folgen

Eine C -finite Folge ist eine Folge, die eine lineare Rekursion mit konstanten Koeffizienten erfüllt:

Definition: Eine Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ heißt C -finit, wenn Zahlen $c_0, \ldots, c_r$ mit $c_0 \neq 0$ und $c_r \neq 0$ existieren, sodass

$$c_r a_{n+r} + \cdots + c_1 a_{n+1} + c_0 a_n = 0, \qquad (n \geq 0).$$

Wir nennen r die *Ordnung* der Rekursion.

$\implies$ Alle Elemente sind eindeutig durch die $r+1$ Koeffizienten $c_0, \ldots, c_r$ sowie r Startwerte $a_0, \ldots, a_{r-1}$ festgelegt.

Finden expliziter Darstellungen

Satz. Seien $c_0, c_1, \ldots, c_{r-1} \in \mathbb{C}$ mit $c_0 \neq 0$. Angenommen,

$$x^r + c_{r-1}x^{r-1} + \cdots + c_1 x + c_0 = (x - q_1)^{m_1} \cdot \cdots \cdot (x - q_k)^{m_k}$$

für $m_j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und paarweise verschiedene $q_j \in \mathbb{C}$. Dann sind die Lösungen der Rekursion

$$a_{n+r} + c_{r-1}a_{n+r-1} + \cdots + c_1 a_{n+1} + c_0 a_n = 0, \qquad n \geq 0$$

genau die Linearkombinationen der Folgen

$$(n^i q_j^n)_{n\geq 0}, \qquad \text{für } 1 \leq j \leq k,\ 0 \leq i \leq m_j - 1.$$

Finden expliziter Darstellungen

Lösungsmethode:

- Charakteristisches Polynom aus der Rekursion ablesen
- Nullstellen q_j des charakteristischen Polynoms bestimmen
- Ansatz: Linearkombination von Folgen der Form q_j^n bzw. nq_j^n, $n^2q_j^n$, … (falls q_j eine mehrfache Nullstelle ist)
- Startwerte einsetzen und die unbekannten Koeffizienten bestimmen (lineares Gleichungssystem).

Finden expliziter Darstellungen

Beispiel: Man finde eine explizite Darstellung der Folge $(a_n)_{n\geq 0}$, die definiert ist durch $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ und

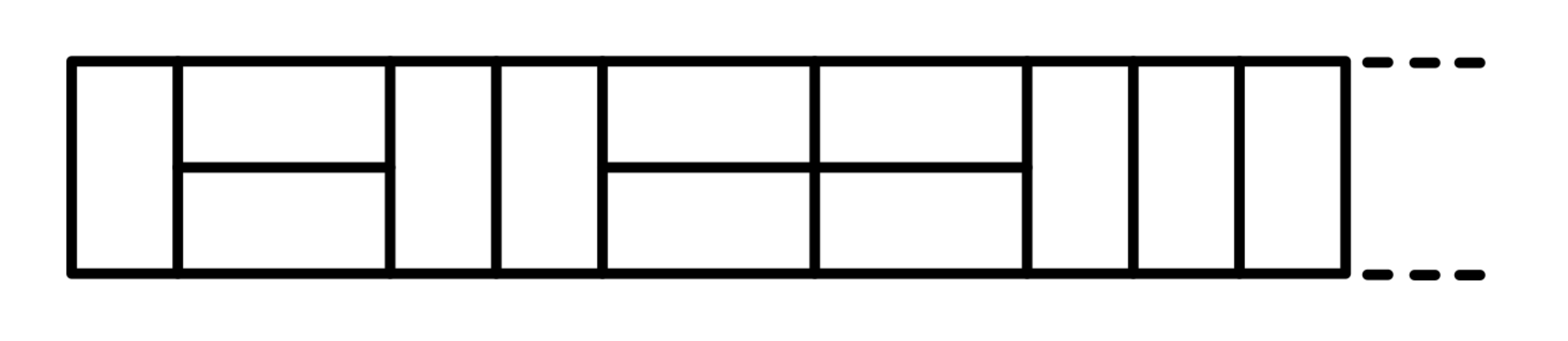
$$a_{n+3} - 3a_{n+2} + 3a_{n+1} - a_n = 0, \qquad n \geq 0.$$

Lösung:

$$a_n = \frac{1}{2}n(n+1) = \binom{n+1}{2}$$

Finden expliziter Darstellungen

Beispiel: Für jedes n bestimme man die Anzahl der Möglichkeiten, einen $(2 \times n)$-Streifen mit (1×2)-Domino-Steinen zu überdecken.

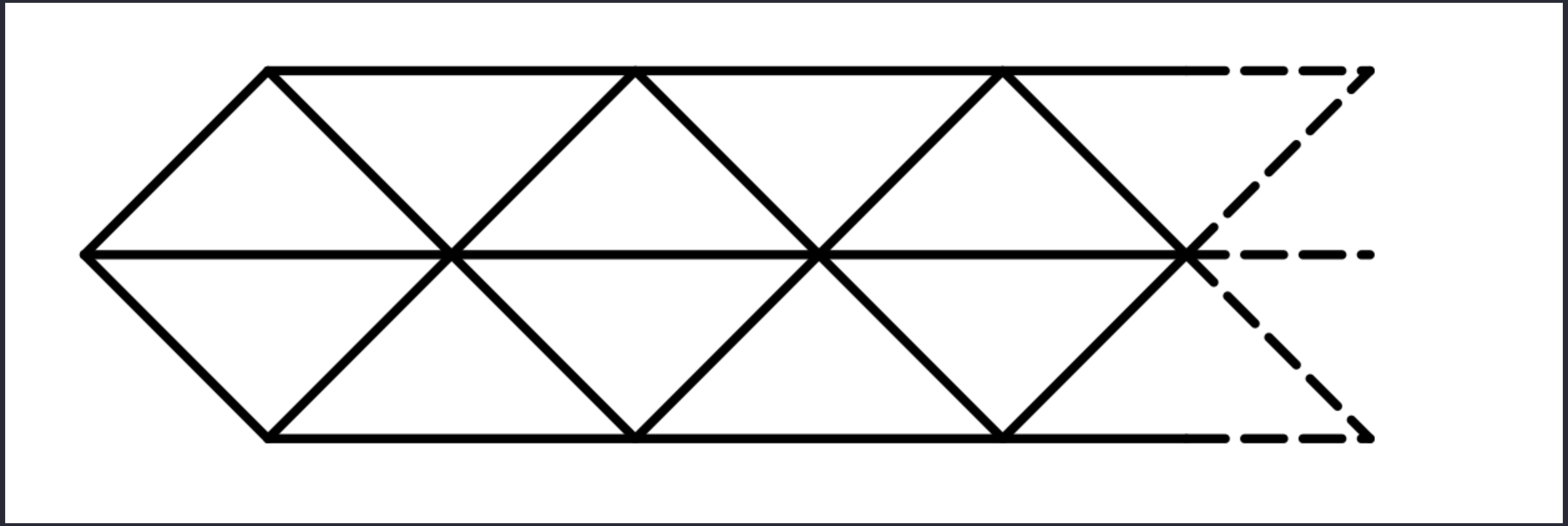


Finden expliziter Darstellungen

Beispiel (Türme von Hanoi): Gegeben ist ein Turm aus n gelochten Scheiben, die von groß nach klein geordnet auf einen von drei Stäben gesteckt sind. Ziel ist es, den kompletten Scheiben-Stapel auf einen anderen Stab zu versetzen, wobei immer nur eine Scheibe bewegt werden darf und nie eine größere auf eine kleinere Scheibe gesteckt werden darf. Man bestimme $a_n =$ die minimale Anzahl an Zügen, die dafür benötigt werden.

Mehr als eine Rekursion

Beispiel: In einem Straßennetz, dessen Anfang unten gezeichnet ist, sind die Punkte in der mittleren Horizontalen der Reihe nach mit $1, 4, 7, \ldots$ bezeichnet. Die oberen Punkte der Reihe nach mit $2, 5, 8, \ldots$ und die unteren der Reihe nach mit $3, 6, 9, \ldots$. Wie viele Wege von “1” nach “$3n+1$” gibt es, die die Punkte nur in monoton wachsender Reihenfolge besuchen?



Mehr als eine Rekursion

Beispiel: Max und Moritz stehlen einander mit Begeisterung das Taschengeld. Jede Nacht stiehlt Max ein Drittel von Moritz’ Besitz, während Moritz gleichzeitig die Hälfte aus Max’ Sparschwein plündert. Zu Beginn hat jeder 100 €. Wieviel Geld hat jeder nach n Tagen?

2. Reihen und Summenformeln

Reihe – Definition

Eine Reihe ist eine Folge, deren Glieder die Partialsummen einer anderen Folge sind.

Beispiel: **Geometrische Reihe**

- Geometrischen Folge: $a_{n+1} = qa_n\,,\, n \geq 0$
- Partialsummen:

$$
\begin{aligned}
s_n &= \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n \\
&= a_0(1 + q + q^2 + \cdots + q^n) = a_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}
\end{aligned}
$$

Geometrische Reihe

Fortsetzung

- Partialsummen: $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 \frac{1-q^{n-1}}{1-q}$
- Falls $|q| < 1$ ist, dann **konvergiert** q^{n-1} gegen 0 für $n \to \infty$, also $\lim_{n\to\infty} q^{n-1} = 0$.
- Summenformel für die geometrische Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} q^k = a_0 \cdot \frac{1}{1-q}, \qquad |q| < 1.$$

Gaußsche Summenformel

Formel für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen:

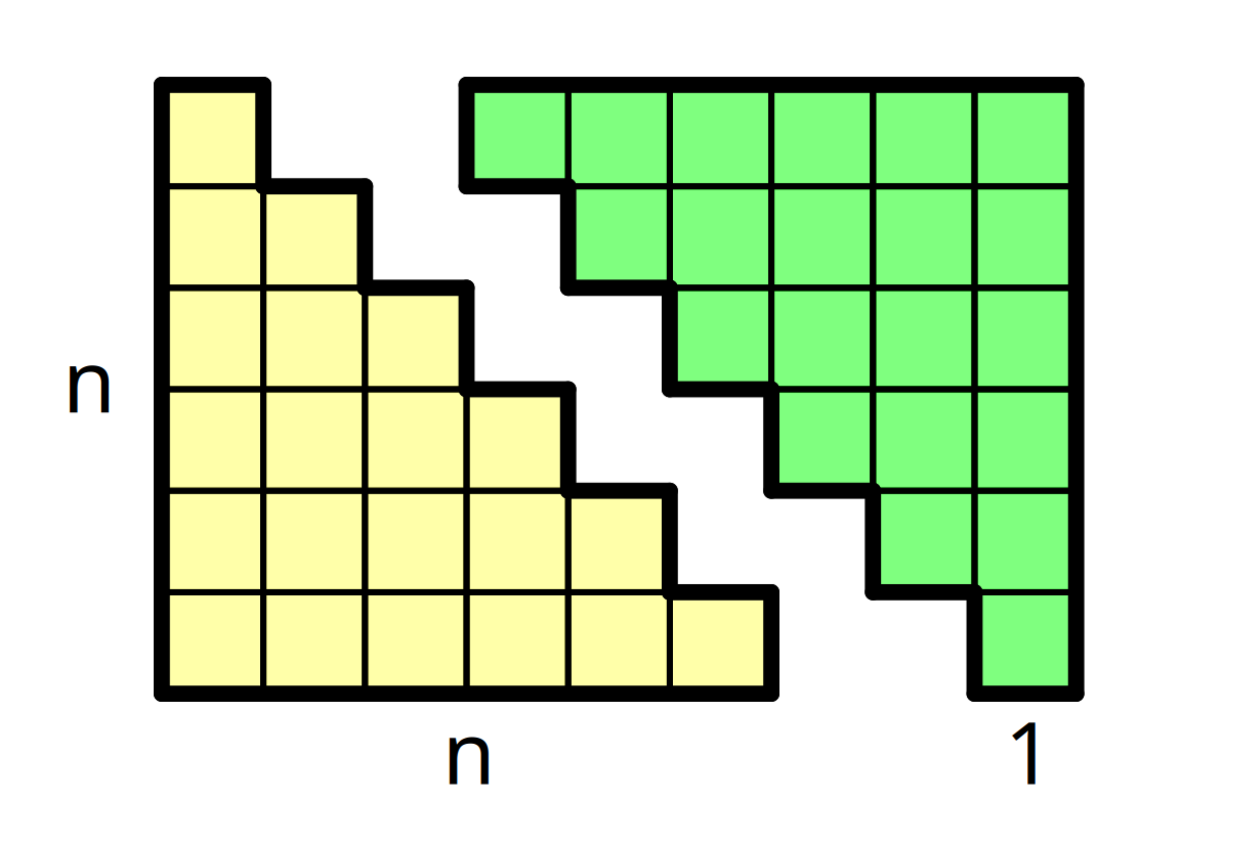
$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Beweis:

- Geometrische Begründung
- Beweis mit **vollständiger Induktion**

Gaußsche Summenformel

$$1+2+3+4+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$



Vollständige Induktion

Ziel: Eine Aussage für alle natürlichen Zahlen beweisen.

2 Beweisschritte:

- Induktionsanfang/Basis: Zeige, dass die Aussage für $n = 0$ (bzw. $n = 1$) gilt.
- Induktionsschritt $n \to n + 1$: Zeige: Wenn die Aussage für eine natürliche Zahl n gilt, dann gilt sie auch für ihren Nachfolger $n + 1$.

Analogie: Domino-Steine (Wenn man den ersten Domino-Stein umwirft und weiß, dass jeder Stein den nächsten umwerfen wird, dann weiß man, dass alle Domino-Steine umfallen werden.)

Beispiel: Summe der Quadrate der Fibonacci-Zahlen

Beispiel: Man zeige, dass für alle $n \geq 0$ gilt:

$$F_0^2 + F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}.$$

Lösung: Beweis durch vollständige Induktion.

Gaußsche Summenformel

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Beweis durch vollständige Induktion.

Weitere Potenzsummenformeln

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

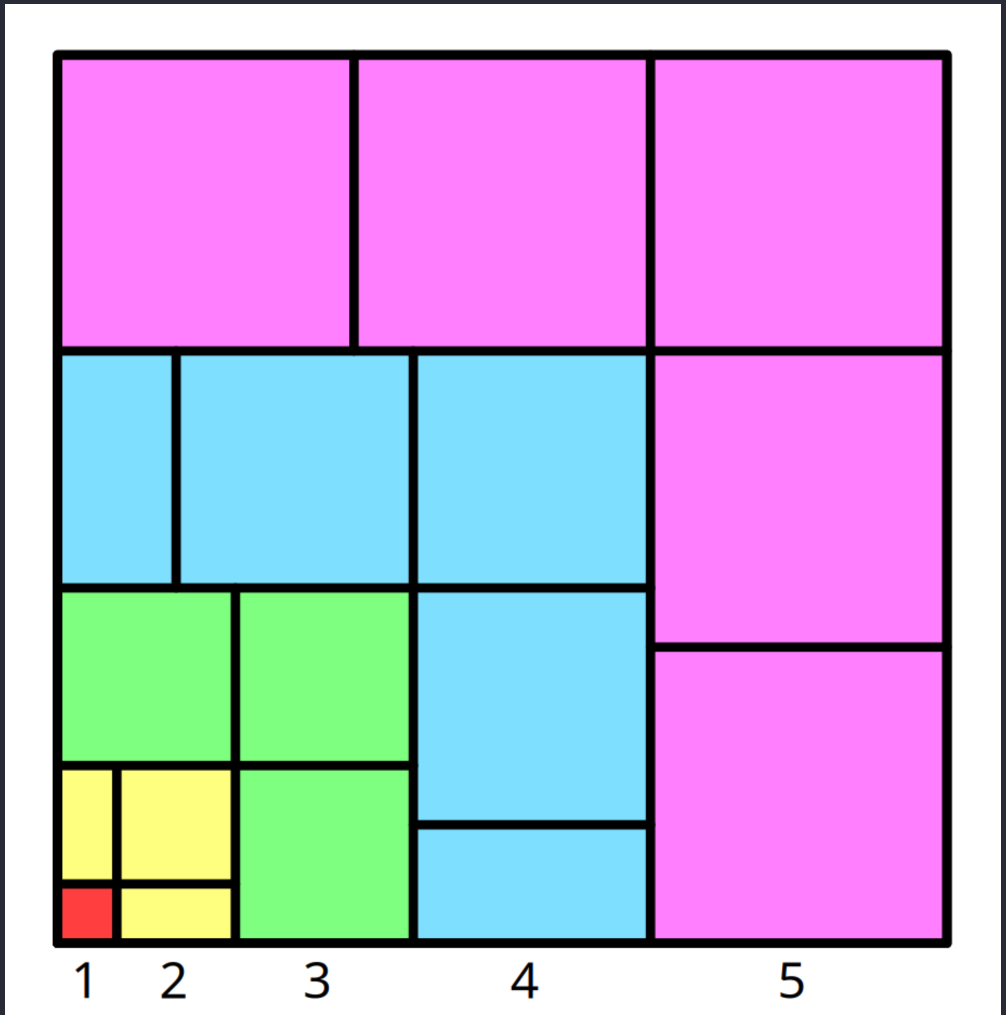
$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = (1 + 2 + \cdots + n)^2$$

$$1^4 + 2^4 + \cdots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

$$\ldots$$

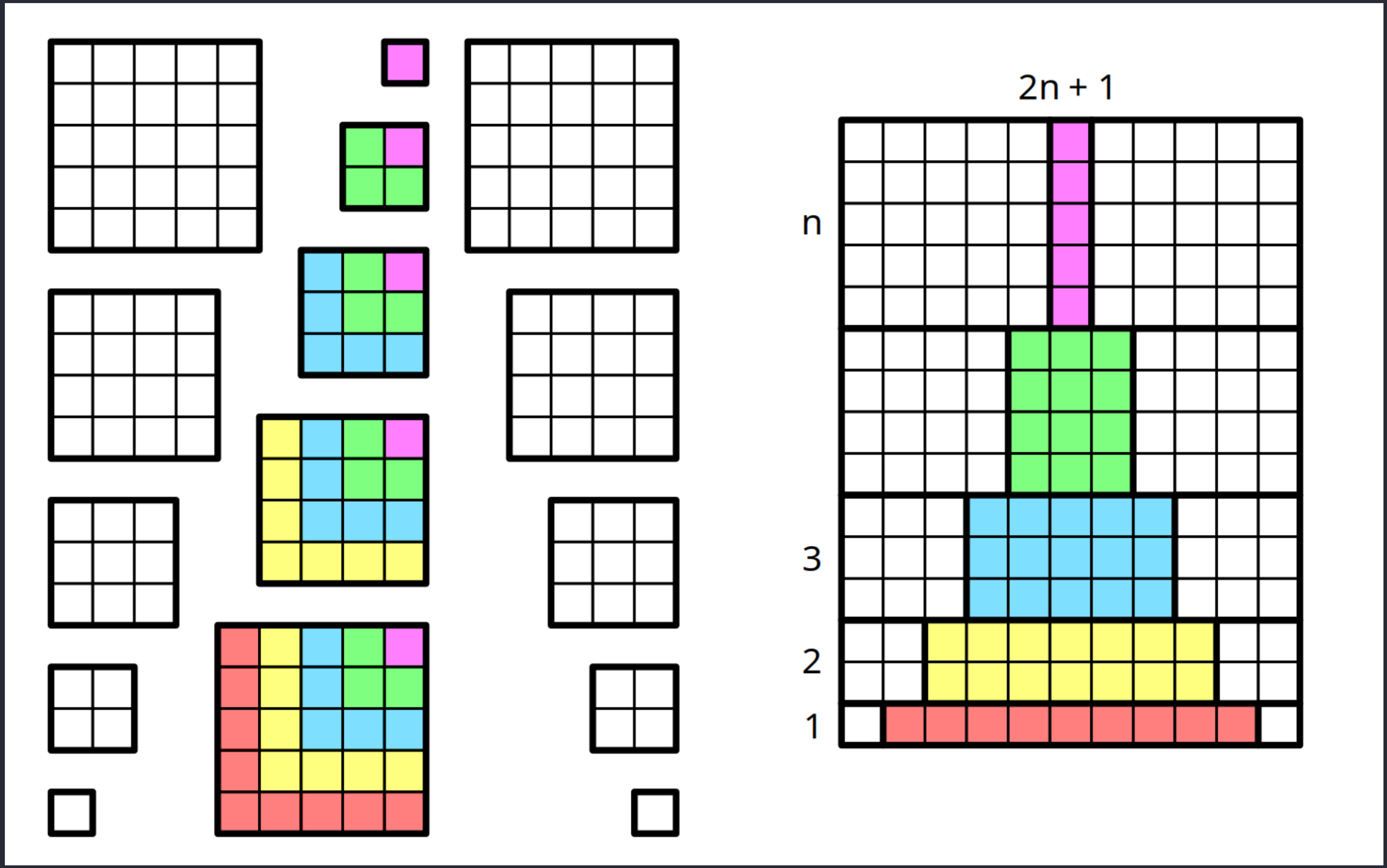
Summe der 3. Potenzen

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$$



Summe der Quadrate

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$



Danke für eure Aufmerksamkeit!