

Zustandsregelung

Prof. Dr. Thomas Holzhüter

Fachhochschule Hamburg
Fachbereich Elektrotechnik und Informatik

2009

Inhaltsverzeichnis

Literaturverzeichnis	ii
1 Zustands-Regelung	1
1.1 Zustandsraum-Darstellung	1
1.2 Übertragungs-Funktion	1
1.3 Transformation des Zustandsvektors	2
1.4 Regelungs-Normalform für SISO-System	2
1.5 Mehrgrößen-System	4
1.6 Polvorgabe für Zustands-Regler	5
1.7 Führungsgrößen-Aufschaltung	7
1.8 Polvorgabe für SISO-System in Regelungs-Normalform	8
1.9 Zustands-Regler mit Integralteil	9
1.10 Optimaler Zustandsregler	11
2 Beobachter	14
2.1 Struktur eines Beobachters	14
2.2 Dynamik des Schätzfehlers	15
2.3 Beispiel: Beobachter für Fahrzeug-Lenkung	16
2.4 Kombination von Zustands-Regler und Beobachter	18
2.5 Dualität: Beobachter – Zustandsregler	20
2.6 Beobachter für die Beobachter-Normalform	22
2.7 Entkopplung des Schätzfehlers von der Führungsgröße	23
2.8 Störgrößen-Beobachter	24
2.9 Kalman-Filter	26
2.10 Störgrößen-Beobachter für Mehrgrößen-System	29

Literatur

- [1] O.Föllinger; Regelungstechnik; Hüthig Verlag (1990).
- [2] G.F.Franklin, J.D.Powell, A.Emami-Naeini; Feedback Control of Dynamic Systems; Addison-Wesley (1991).
- [3] J. Lunze; Regelungstechnik 2; Springer (1997).
- [4] K. Ogata; Modern Control Engineering; Prentice Hall (1997)
- [5] H.Unbehauen; Regelungstechnik; Band 2; Vieweg (1982).

1 Zustands-Regelung

1.1 Zustandsraum-Darstellung

Eine Differential-Gleichung höherer Ordnung kann durch ein *System* von Differential-Gleichungen *erster* Ordnung dargestellt werden.

Beispiel: Newton'sches Gesetz (Doppelter Integrator)

$$(1) \quad m \ddot{y}(t) = F(t)$$

Man führt für die Position y der Masse die Bezeichnung $x_1 = y$ und für die Geschwindigkeit \dot{y} die Bezeichnung $x_2 = \dot{y}$. Dann kann die Differential-Gleichung 2.Ordnung (1) geschrieben werden als ein System von zwei Differential-Gleichungen 1.Ordnung:

$$(2) \quad \dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$(3) \quad \dot{x}_2(t) = \frac{1}{m} u(t)$$

Dabei wurde für den System-Eingang $F(t)$ die Standard-Bezeichnung $u(t)$ gewählt. Ein solches Gleichungs-System läßt sich übersichtlicher mit Matrizen und Vektoren schreiben:

$$(4) \quad \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} u$$

$$(5) \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

oder allgemein:

$$(6) \quad \dot{x} = Ax + Bu$$

$$(7) \quad y = Cx + Du$$

Dabei ist $x = (x_1 \ x_2)^T$ der Zustandsvektor des Systems, A die System-Matrix, u die Eingangsgröße des Systems und B die Eingangs-Matrix. Die zweite Gleichung gibt die Ausgangsgröße y an. Dabei ist C die Ausgangs-Matrix und D die Durchgangs-Matrix, die in diesem (nicht untypischen) Fall Null ist.

1.2 Übertragungs-Funktion

Aus der Zustandsraum-Darstellung läßt sich die Übertragungsfunktions berechnen, indem man Gleichung (6) in den Laplace-Bereich transformiert.

$$\begin{aligned} s x(s) &= Ax(s) + B u(s) \\ \Rightarrow (sI - A) x(s) &= B u(s) \\ \Rightarrow x(s) &= (sI - A)^{-1} B u(s) \end{aligned}$$

Dabei ist I die Einheitsmatrix der Dimension n . Es sei daran erinnert, daß bei der Matrizenmultiplikation die Reihenfolge der Faktoren wichtig ist. Aus der Laplace-transformierten Ausgangsgleichung (7) folgt dann schließlich:

$$y(s) = Cx(s) + Du(s) = (C(Is - A)^{-1}B + D) u(s)$$

Damit ergibt sich für die Übertragungs-Funktion

$$(8) \quad G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = C(Is - A)^{-1}B + D$$

Jeder Zustandsraum-Darstellung ist also eindeutig eine Übertragungs-Funktion zugeordnet. Zu einer Übertragungs-Funktion gibt es dagegen (unendlich) viele Zustandsraum-Darstellungen, man kann z.B. die Zustände beliebig umnummerieren oder auch Linear-Kombinationen der Zustände bilden, vgl. Abschnitt 1.3.

1.3 Transformation des Zustandsvektors

Wenn man vom Zustandsvektor x auf einen neuen Zustandsvektor $\tilde{x} = T x$ übergeht, verändern sich auch die Matrizen der Zustandsraum-Darstellung. Damit das Übertragungs-Verhalten $G(s)$ des Systems unverändert bleibt, muß die Transformations-Matrix T regulär sein. Die Matrizen des transformierten Systems

$$(9) \quad \begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \bar{A} \tilde{x} + \bar{B} u \\ y &= \bar{C} \tilde{x} + \bar{D} u \end{aligned}$$

lauten dann

$$(10) \quad \begin{aligned} \bar{A} &= T A T^{-1} \\ \bar{B} &= T B \\ \bar{C} &= C T^{-1} \\ \bar{D} &= D \end{aligned}$$

Man kann leicht prüfen, daß die Übertragungs-Funktion nach (8) mit diesen Matrizen unverändert bleibt.

1.4 Regelungs-Normalform für SISO-System

Wenn die Übertragungsfunktion des Systems gegeben ist, also

$$(11) \quad G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_{n-1}s^{n-1}}{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n} = \frac{Z(s)}{N(s)}$$

dann erfüllt das System die Differentialgleichung

$$(12) \quad \begin{aligned} y^{(n)} &= -a_0y - a_1\dot{y} - \dots - a_{n-1}y^{(n-1)} \\ &\quad + b_0u + b_1\dot{u} + \dots + b_{n-1}u^{(n-1)} \end{aligned}$$

Man kann eine Zustandsraum-Darstellung des Systems erhalten, indem man als Zustände die Variablen

$$\begin{aligned}
(13) \quad x_1(s) &= \frac{1}{N(s)} u(s) \\
x_2(s) &= s x_1(s) = \dot{x}_1(s) \\
&\vdots \\
x_n(s) &= s x_{n-1}(s) = s^{n-1} x_1(s) = x_1^{(n-1)}(s)
\end{aligned}$$

einführt. Die höheren Zustände sind dabei die Ableitungen des ersten Zustandes: $x_j = x_{j-1} = x_1^{(j-1)}, j \in \{2 \dots n\}$. Bei dieser Definition gilt für die Ableitung des Zustandes x_n

$$(14) \quad \dot{x}_n = s s^{n-1} \frac{u(s)}{N(s)} = s^n \frac{u(s)}{N(s)}$$

$$(15) \quad = (N(s) - a_0 - a_1 s - \dots - a_{n-1} s^{n-1}) \frac{u(s)}{N(s)}$$

$$(16) \quad = u(s) - a_0x_1 - a_1x_2 - \dots - a_{n-1}x_n$$

Der Ausgang y des Systems läßt sich schreiben als

$$(17) \quad y(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_{n-1} s^{n-1}}{N(s)} u(s)$$

$$(18) \quad = b_0 x_1(s) + b_1 x_2(s) + \dots + b_{n-1} x_n$$

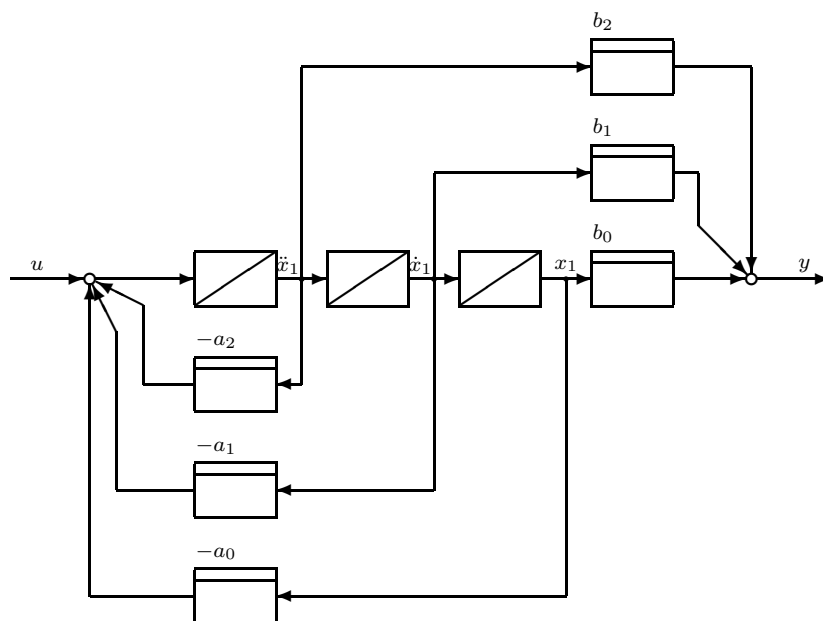


Abbildung 1: Regelungs-Normalform des Systems 2. Ordnung mit der Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2}{a_0 + a_1s + a_2s^2 + s^3}$.

Damit lautet die vollständige Zustandsraum-Darstellung in Matrix-Schreibweise dann:

$$(19) \quad \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$(20) \quad y = (b_0 \ b_1 \ \dots \ b_{n-2} \ b_{n-1}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}$$

Diese Darstellung heißt *Regelungs-Normalform* und ist besonders geeignet für den Entwurf eines Zustandsreglers, vgl. Abschnitt 1.8.

1.5 Mehrgrößen-System

In der Zustandsraum-Darstellung zeigt ist der Unterschied zwischen Eingrößen-Systemem (SISO) und Mehrgrößen-Systemen (MIMO) nicht so deutlich wie im Frequenz-Bereich. Beim SISO-System sind $B = b$ und $C = c^T$ nur Vektoren und D ist nur ein Skalar. Bei MIMO-System sind B, C, D dagegen "echte" Matrizen. Als Beispiel betrachten wir das in Abb. 2 widergegebene Dreitank-System. Zur

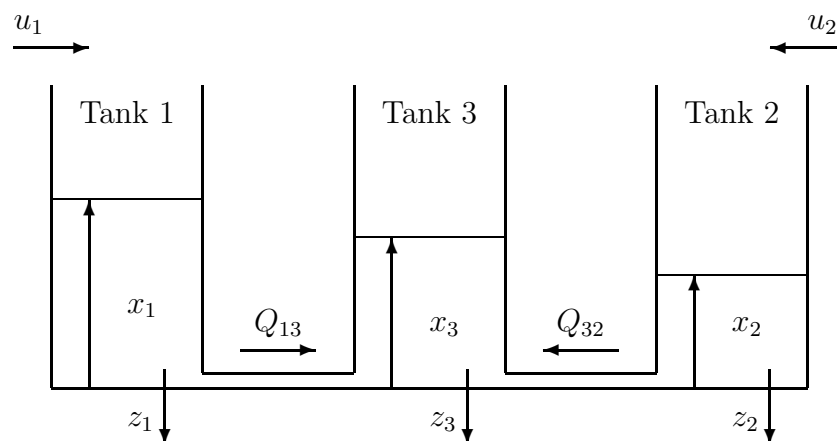


Abbildung 2: Dreitank-System

Vereinfachung der Gleichungen setzen wir alle Konstanten zu Eins und erhalten

$$(21) \quad \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Die Übertragungs-Matrix des Systems ergibt sich nach (8) als

$$(22) \quad G(s) = \frac{1}{s^3 + 7s^2 + 18s + 16} \begin{pmatrix} s^2 + 5s + 7 & -1 \\ -1 & s^2 + 5s + 7 \end{pmatrix}$$

Für Mehrgrößen-Systeme ist die Bestimmung einer kanonischen Form komplizierter als für Eingrößen-Systeme. Es ist offensichtlich, daß etwa die Regelungs-Normalform zwar für die Teil-Übertragungs-Funktion G_{11} aufgestellt werden kann, aber dies ergibt noch keine sinnvolle Zustandsraum-Darstellung für das ganze System.

1.6 Polvorgabe für Zustands-Regler

Für eine lineare Regelstrecke in Zustandsraum-Darstellung kann man durch Rückkopplung mit einem sog. Zustandsregler die Pole des geschlossenen Regelkreises beliebig vorgeben. Der Zustands-Regler erzeugt die Stellgröße nach der Beziehung

$$(23) \quad u = -K x$$

$$= -(K_1, K_2, \dots, K_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Damit gilt für den geschlossenen Kreis aus der Regelstrecke $\dot{x} = Ax + Bu$ mit dem Zustandsregler $u = -Kx$

$$(24) \quad \dot{x} = Ax + B(-Kx) = (A - BK) x$$

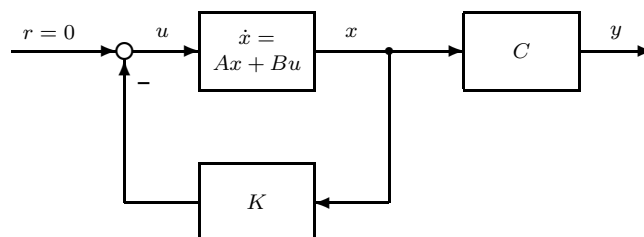


Abbildung 3: Block-Diagramm eines Zustands-Reglers ohne Berücksichtigung der Führungsgröße.

vgl. Abb. 3. Der geschlossene Regelkreis ist also ein lineares System mit der System-Matrix $A_r = (A - BK)$. Die Pole des geschlossenen Kreises, also die Nullstellen des Nennerpolynoms $N_r(s)$ der Übertragungs-Funktion lassen sich wegen

$$(25) \quad N_r(s) = \det(I s - A_r)$$

auch für die Zustandsraum-Darstellung berechnen. Die Nullstellen der Determinante $\det(I\lambda_i - A)$ heißen auch Eigenwerte der Matrix A , weil sie die Gleichung $Ax_i = \lambda_i x_i$ erfüllen, wobei x_i die Eigenvektoren von A sind. Voraussetzung für die Polvorgabe ist die Steuerbarkeit des Systems. Dazu muß man prüfen, ob die Steuerbarkeits-Matrix

$$(26) \quad S_S = (B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B)$$

vollen Rang hat.

Die Vorgabe von Polen (pole placement) über die Gleichung (25) ist jedoch meist nicht analytisch möglich. Eine Ausnahme bildet der Fall, wenn das System in Regelungs-Normalform vorliegt, vgl. Abschnitt 1.8.

Im allgemeinen muß für den Entwurf eines Zustands-Reglers mit vorgegebenen Polen auf numerische Prozeduren zurückgegriffen werden, die heute zum Bestand einer guten mathematischen Software-Bibliothek gehören. In MATLAB beispielsweise lautet der entsprechende Aufruf für SISO-Systeme

`K = acker(A, B, P)`

Dabei sind A, B die Zustandsraum-Matrizen des Systems und P der Spaltenvektor aus den gewünschten Polen. Die Prozedur berechnet den Verstärkungs-Vektor K nach der sog. Ackermann'schen Formel, die jedoch nur für Systeme niedriger Ordnung numerisch zuverlässig ist. Für Systeme höherer Ordnung oder MIMO-Systeme gibt es eine alternative Prozedur

`K = place(A, B, P)`

Sie hat allerdings den Nachteil, daß sie nicht die Vorgabe mehrfacher Pole zuläßt, wie dies beispielsweise bei einer Binomialform gewünscht ist. Die beiden genannten Prozeduren sind nicht in MATLAB selbst, sondern in der CONTROL SYSTEM TOOLBOX enthalten.

Die tatsächlich erreichte Lage der Pole P_1 des geschlossenen Kreises kann durch

`P1 = eig(A-B*K)`

geprüft werden. Dabei werden die Eigenwerte der System-Matrix des geschlossenen Kreises $A_r = (A - BK)$ berechnet, die ja gleich den Polen der Übertragungs-Funktion sind.

Mögliche Vorgaben für die Pole des geschlossenen Kreises sind die üblichen Standardformen: Binomialform, Butterworth, ITAE, Abklingzeitform. Die Binomialform stellt die am leichtesten zu überschauende Vorgabe dar. Sie hat einen n-fachen Pol bei $s = -1/T_0$, es gilt also

$$(27) \quad N(s) = \left(s + \frac{1}{T_0}\right)^n$$

Bei einem Mehrgrößen-System ist im allgemeinen die Verstärkungs-Matrix K durch die Vorgabe der Pole noch nicht eindeutig festgelegt. Die Prozedur `place` benutzt die verbleibenden Freiheitsgrade, um die Sensitivität gegen die Strecken-Parameter zu minimieren. Eine eindeutige Festlegung der Verstärkungs-Matrix K auch bei MIMO-Systemen ergibt sich bei der optimalen Zustands-Regelung, vgl. Abschnitt 1.10.

1.7 Führungsgrößen-Aufschaltung

Der durch (23) gegebene Zustands-Regler berücksichtigt die Führungsgröße gar nicht, es wird also implizit $r = 0$ unterstellt. Um ein sinnvolles Regelverhalten auch bei Führungsgrößen $r \neq 0$ zu erhalten, kann man eine Führungsgrößen-Aufschaltung hinzufügen, vgl. Abb. 4. Der Zustands-Regler wird dann durch die Gleichung

$$(28) \quad u = -K x + N r$$

beschrieben. Die Aufschalt-Matrix N ist bei SISO-Systemen lediglich ein skalarer Verstärkungs-Faktor. Sie sollte so gewählt werden, daß der Regelkreis stationär genau ist. Dies ist dann der Fall, wenn der geschlossene Regelkreis als stationären Endwert der Ausgangsgröße y_∞ gerade die Führungsgröße r hat, also $y_\infty = r$ gilt. Im stationären Zustand gilt $\dot{x} = 0$, also

$$(29) \quad \begin{aligned} 0 &= A x_\infty + B u_\infty \\ &= (A - BK) x_\infty + B N r \end{aligned}$$

$$(30) \quad \Rightarrow x_\infty = -(A - BK)^{-1} B N r$$

Wegen $y_\infty = C x_\infty$ folgt dann:

$$(31) \quad y_\infty = \left(-C(A - BK)^{-1} B N \right) r$$

Die Forderung $y_\infty = r$ erfordert $-C(A - BK)^{-1} B N = I$, also

$$(32) \quad N = - \left(C(A - BK)^{-1} B \right)^{-1}$$

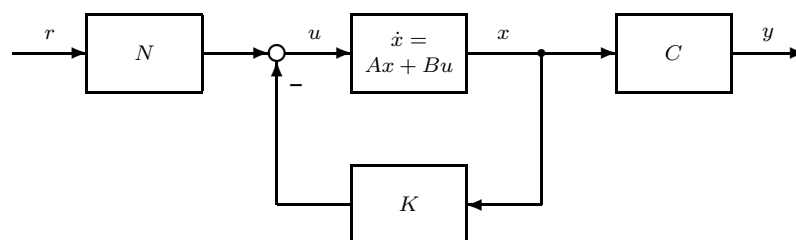


Abbildung 4: Block-Diagramm eines Zustands-Reglers mit Führungsgrößen-Aufschaltung.

Man beachte, daß die Aufschalt-Matrix nach (32) gerade die Inverse der stationären Verstärkung $G_r(0)$ der geregelten Strecke darstellt. Wir unterstellen der Einfachheit halber $D = 0$ und setzen in (8) $s = 0$.

$$(33) \quad G_r(0) = C (I \cdot 0 - (A - B K))^{-1} B = N^{-1}$$

Obwohl also der Zustands-Regler (28) keinen Integralteil enthält, ist der Regelkreis mit der Wahl von N nach (32) auch dann stationär genau, wenn die Strecke selbst keinen Integrator enthält. Da es sich bei der Führungsgrößen-Aufschaltung lediglich um eine Steuerung handelt, ist eine ausreichende Kenntnis der Parameter der Strecke Voraussetzung für den Erfolg.

1.8 Polvorgabe für SISO-System in Regelungs-Normalform

Für ein System in Regelungs-Normalform kann man im Gegensatz zum allgemeinen Fall leicht einen Zustandsregler angeben, der zu vorgegebenen Polen des geschlossenen Kreises führt. Wenn nämlich die Zustandsraum-Darstellung (A, B, C, D) der Strecke Regelungs-Normalform hat, dann hat auch die System-Matrix des geschlossenen Kreises $(A - BK)$ wieder Regelungs-Normalform:

$$(34) \quad \begin{aligned} A - BK &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (K_1 \ K_2 \ \dots \ K_n) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -(a_0 + K_1) & -(a_1 + K_2) & -(a_2 + K_3) & \dots & -(a_{n-1} + K_n) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aus dieser Regelungs-Normalform läßt sich die Übertragungs-Funktion des geschlossenen Regelkreises direkt ablesen:

$$(35) \quad G_r(s) = \frac{Z_r(s)}{(a_0 + K_1) + \dots + (a_{n-1} + K_n)s^{n-1} + s^n} = \frac{Z_r(s)}{N_r(s)}$$

Wenn man also die Pole für den geschlossenen Regelkreis und damit das Nennerpolynom

$$(36) \quad N_r(s) = c_0 + c_1 s + \dots + c_{n-1} s^{n-1} + s^n$$

vorgibt, lassen sich durch Vergleich mit der Regelungs-Normalform wegen $c_k = (a_k + K_{k+1})$ die erforderlichen Verstärkungen für den Zustandsregler direkt angeben:

$$(37) \quad \begin{aligned} K_1 &= c_0 - a_0 \\ K_2 &= c_1 - a_1 \\ &\vdots \\ K_n &= c_{n-1} - a_{n-1} \end{aligned}$$

Bei Wahl der Binomialform für die Polvorgabe bestimmen sich die Koeffizienten c_k in (36) durch Aus-Multiplizieren von (27), also

$$(38) \quad c_k = \binom{n}{k} \frac{1}{T_0^k}$$

Dabei ist n die System-Ordnung.

1.9 Zustands-Regler mit Integralteil

Eine Zustands-Regelung kann stationäre Störungen nicht vollständig ausregeln. Um das zu erreichen, kann man den Regler um einen Integralteil entsprechend Abb. 5 ergänzen. Man beachte, daß die Größe e in Abb. 5 im Falle eines Mehrgrößen-Systems mit m Ausgängen ebenso wie r und y ein Vektor-Signal der Länge m ist und daß entsprechend viele Integratoren vorhanden sein müssen.

Die in Abb. 5 ebenfalls benutzte Führungsgrößen-Aufschaltung nach Abschnitt 1.7 ist nicht unbedingt notwendig. Wenn sie fehlt, bildet der Integralteil die erforderliche stationäre Stellgröße. Da dieser Vorgang jedoch meist langsam ist, empfiehlt sich im Allgemeinen die Aufschaltung, da sie bei Führungsgrößen-Änderungen zu einer schnelleren Antwort führt. Die sich dadurch ergebende Regler-Struktur kann man auch als PI-Zustands-Regelung interpretieren.

Offenbar läßt sich das Block-Diagramm entsprechend Abb. 6 umformen. In dieser Darstellung wird offensichtlich, daß man die gemeinsame Bestimmung von K und K_I als Zustands-Regler-Entwurf für die erweiterte Strecke

$$(39) \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} u$$

mit Zustands-Vektor $x^* = (x^T, e^T)^T$ auffassen kann. Der Zustands-Vektor hat dann die Länge $n + m$. Für dieses erweiterte System

$$(40) \quad \dot{\bar{x}} = \bar{A} \bar{x} + \bar{B} u$$

mit \bar{A}, \bar{B} aus (39) ist also ein Zustands-Regler \bar{K} für eine erweiterte Rückführung

$$(41) \quad u = -\bar{K} \bar{x} = -(K \quad K_I) \begin{pmatrix} x \\ e \end{pmatrix}$$

zu entwerfen. Dies kann z.B. durch Pol-Vorgabe entsprechend Abschnitt 1.6 geschehen. Die Aufspaltung des so gefundenen \bar{K} ist nach (41) offensichtlich. Abb. 7 zeigt für das Dreitank-System aus Abschnitt 1.5 einen Führungs-Sprung mit und ohne Führungs-Aufschaltung.

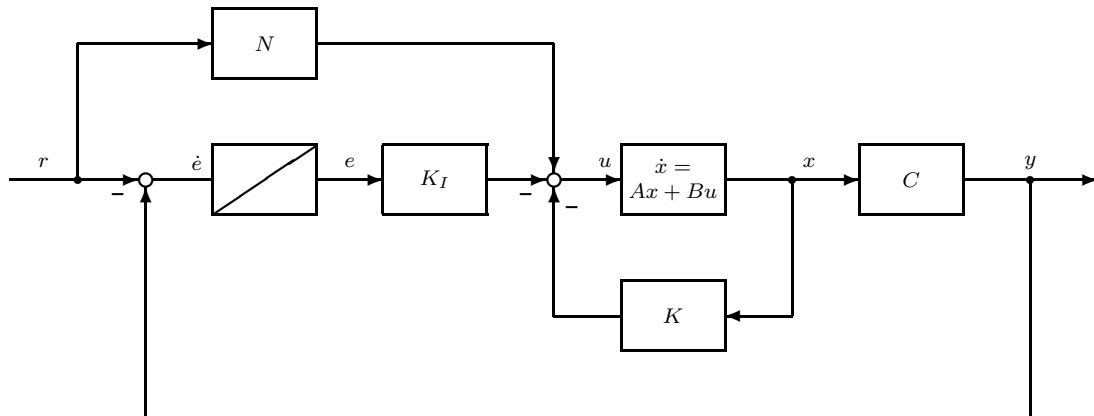


Abbildung 5: Zustands-Regelung mit Integralteil und Führungs-Größen-Aufschaltung.

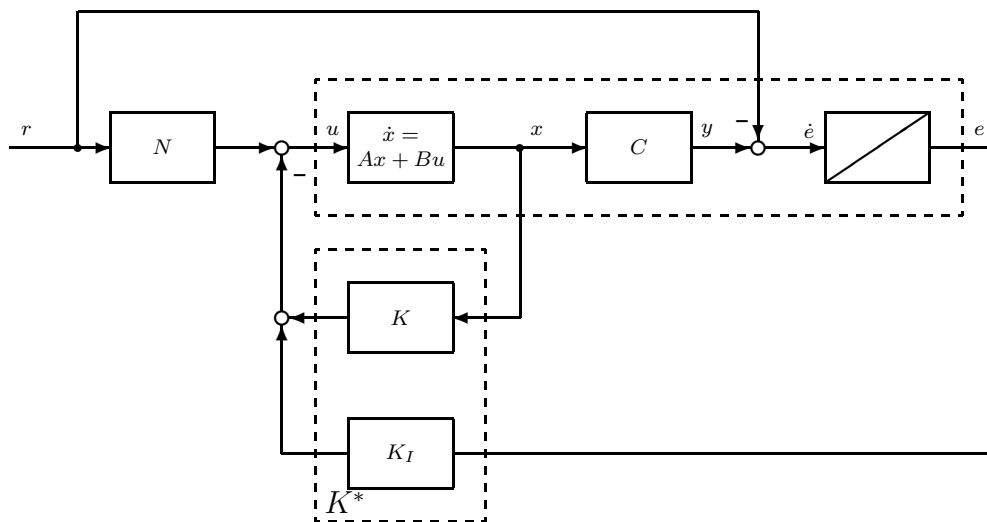


Abbildung 6: Umformung der Zustands-Regelung mit Integralteil zur Zustands-Regelung für die erweiterte Strecke.

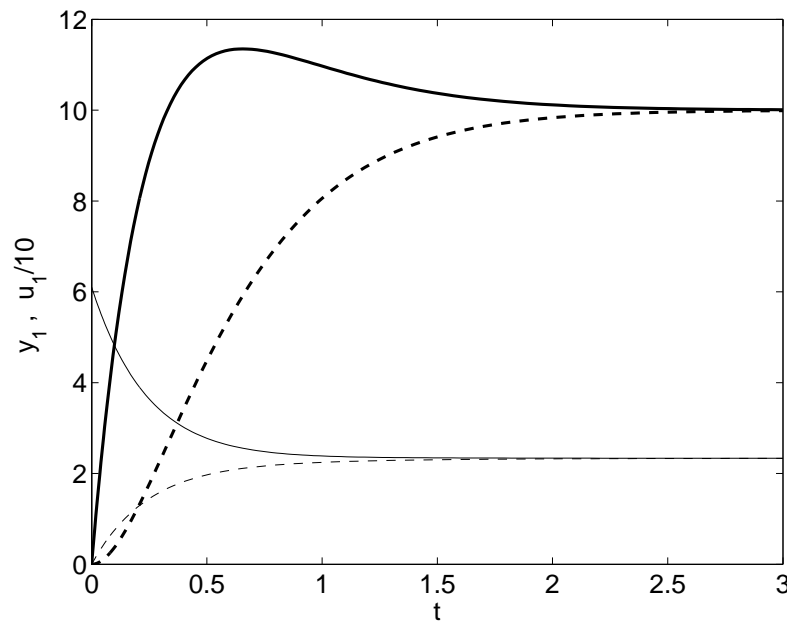


Abbildung 7: Führungs-Aufschaltung beim Zustandsregler für ein Dreitank-System. Verlauf der Regel-Größe y_1 (dick) und der Stellgröße u_1 (dünn) mit Aufschaltung (durchgezogen) und ohne (gestrichelt). Polvorgabe $T_0 = 1/3$, Sollwert $r_1 = 10$.

1.10 Optimaler Zustandsregler

Die Auslegung eines Zustandsreglers über Pol-Vorgabe hat den Nachteil, daß die Wirkung der Wahl der Pole auf Stell- und Regel-Größen nur schwer zu überblicken ist. Eine Alternative bietet die Auslegung des Zustandsreglers über die Minimierung eines Performance-Kriteriums

$$(42) \quad J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt \quad \in \quad \mathbb{R}$$

Dabei sind Q, R symmetrische Matrizen, die die relative Gewichtung der Zustandsgrößen gegenüber der Stellgröße bei der Optimierung des Reglers darstellen.

Der sich ergebende Regler wird als optimaler Zustandsregler oder auch **LQ**-Regler (von: **L**ineares System, **Q**uadratisches Kriterium) bezeichnet.

Im allgemeinen Fall (42) ergibt sich der Vektor der Zustandsrückführungen K über die Lösung einer algebraischen Riccati-Gleichung (quadratische Gleichung für eine unbekannte Matrix).

$$(43) \quad SA + A^T S - SBR^{-1}B^T S + Q = 0$$

Diese Matrix-Gleichung hat genau eine positiv definite Lösung S aus der sich die optimalen Zustands-Rückführung K nach

$$(44) \quad K = R^{-1}B^T S$$

ergibt. Die Lösung der algebraischen Riccati-Gleichung ist mit Ausnahme von sehr einfachen Systemen nur numerisch möglich. In der MATLAB CONTROL SYSTEM TOOLBOX steht dafür die Prozedur `lqr` (linear quadratic regulator) mit der Aufrufsyntax `K=lqr(A,B,Q,R)` zur Verfügung.

Bei einem Eingrößen-System (SISO-System) ist R skalar und man kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit $R = 1$ annehmen, da die Lage des Minimums von J und damit die positiv definite Lösung S durch die Multiplikation mit dem konstanten Faktor $1/R$ nicht verändert wird. Da man außerdem nur eine Ausgangsgröße hat, kann man als vereinfachte Gewichtung

$$(45) \quad R = 1$$

$$(46) \quad Q = C^T \lambda C$$

wählen. Dabei ist λ ein freier Parameter. Wegen $y = C x$ lautet das Kriterium dann

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty (x^T C^T \lambda C x + u^T 1 u) dt \\ &= \int_0^\infty ((x^T C^T) \lambda (C x) + u^T u) dt \\ &= \int_0^\infty (y^T \lambda y + u^T u) dt \end{aligned}$$

Da y und u in diesem Fall skalar sind, ergibt sich insgesamt das Kriterium

$$(47) \quad J = \int_0^\infty (\lambda y^2 + u^2) dt$$

Der Parameter λ legt also die relative Gewichtung der Regel-Größe gegenüber der Stellgröße fest. Bei großem λ wird viel Gewicht auf den Regelfehler gelegt, so daß der Regler "hart" wird, also eine große Bandbreite bekommt. Bei kleinem λ wird die Stellgröße stärker gewichtet und der Regler wird "weich" (kleine Bandbreite).

Für das vereinfachte Kriterium (47) lassen sich die für die Optimalität erforderlichen Pole des geschlossenen Kreises ohne Lösung der Riccati-Gleichung (43) angeben. Sie ergeben sich alternativ als die stabilen Lösungen der Gleichung:

$$(48) \quad 1 + \lambda G(s) G(-s) = 0$$

Dabei ist $G(s)$ die Übertragungsfunktion der Strecke und λ der Gewichtungsfaktor aus dem quadratischen Kriterium (47). Mit diesen Polen kann man dann eine Polvorgabe für die Regelungs-Normalform nach (37) durchführen und die erforderliche Zustands-Rückführung K berechnen.

Aufgabe 2: Zustandsregler für doppelten Integrator

Für die Antriebsregelung eines Satelliten ist ein optimaler Zustandsregler zu entwerfen. Die Bewegung des Satelliten in einer Raumrichtung läßt sich durch das Newton'sche Gesetz beschreiben. Eingangsgröße ist der Schub u , Ausgangsgröße ist die Positions-Koordinate y . Die Bewegungsgleichung lautet also:

$$(49) \quad u = m \ddot{y}$$

Es sei $m = 100$ kg.

a.) Geben Sie die Übertragungs-Funktion des Systems an. Geben Sie die Zustandsraum-Darstellung des Systems mit dem Zustandsvektor $x = (y, \dot{y})^T$ an und in der Regelungs-Normalform an.

b.) Für dieses System ist zunächst ein Zustandsregler so auszulegen, daß der geschlossenen Regelkreis einen Doppelpol bei $s = -1/T_0$ mit $T_0 = 10$ s hat. Geben Sie die Verstärkungen des Zustandsreglers an.

c.) Es soll nun ein optimaler Zustandsregler entworfen werden, der das Performance-Kriterium

$$(50) \quad J = \int_0^\infty (\lambda y^2 + u^2) dt$$

mit $\lambda = 1$ minimiert. Geben Sie die Pole des geschlossenen Regelkreises an.

d.) Geben Sie für den optimalen Zustandsregler aus c.) die Reglerverstärkungen an.

e.) Berechnen Sie den optimalen Zustandsregler über die Riccati-Gleichung (43) und vergleichen Sie mit dem Ergebnis von d.).

2 Beobachter

2.1 Struktur eines Beobachters

Da im allgemeinen nicht der gesamte Zustandsvektor eines Systems durch Messungen erfaßt werden kann, ist es erforderlich, ihn aus den tatsächlich zur Verfügung stehenden Informationen zu rekonstruieren. Dazu benutzt man einen sog. Beobachter. Der Beobachter ist also ein Filter, das als Ausgangsgrößen Schätzwerte für alle Zustandsgrößen des Systems liefert.

Die naheliegendste Variante eines Beobachters wäre eine Konstruktion nach Abb. 8. Der Beobachter ist dann einfach eine mathematische Kopie des wirklichen Systems

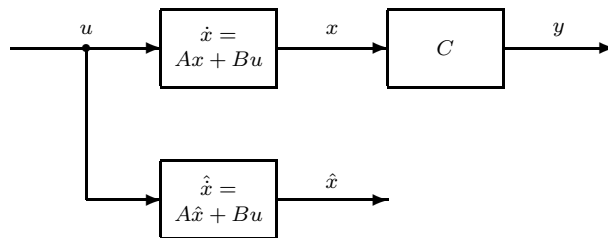


Abbildung 8: Gesteuerter Beobachter ohne Rückkopplung

$$(51) \quad \dot{x} = Ax + Bu$$

die mit demselben Eingangssignal angesteuert wird und Schätzwerte \hat{x} für den Zustandsvektor x produziert. Die Schätzwerte ergeben sich also aus der Differentialgleichung

$$(52) \quad \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu$$

Ein solcher Beobachter liefert allerdings in der Praxis keine befriedigenden Schätzwerte, denn: die Anfangswerte des Systems sind normalerweise nicht bekannt, Störungen auf das tatsächliche System werden nicht erfaßt und die Parameter des System sind nicht hinreichend genau bekannt.

Ein wesentlich verbessertes Verhalten ergibt sich, wenn zusätzlich eine Rückkopplung in den Beobachter eingebaut wird. Dazu werden entsprechend Abb. 9 die Messungen der Ausgangsgröße y des wirklichen Systems mit der Ausgangsgröße \hat{y} des Beobachters verglichen und die Differenz $\tilde{y} = y - \hat{y}$ zur Korrektur des Schätzwertes \hat{x} verwendet.

$$(53) \quad \begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}) \\ \hat{y} &= C\hat{x} \end{aligned}$$

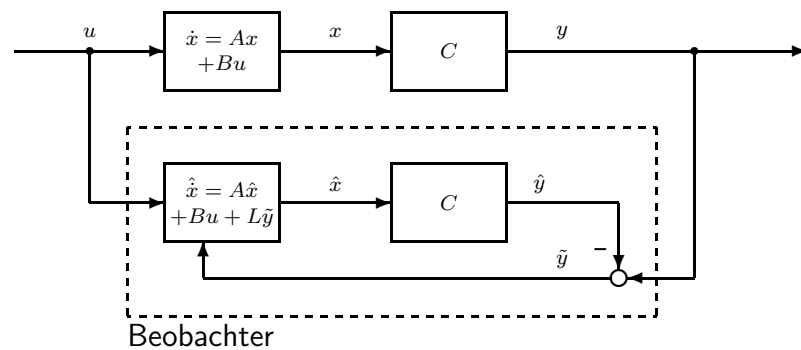


Abbildung 9: Beobachter mit Rückkopplung

Für den Beobachter ergibt sich wegen $y = Cx$ dann das folgende Gleichungssystem

$$(54) \quad \dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly$$

Der Beobachter ist also ein System mit zwei Eingangsgrößen: der Ausgangsgröße y des Systems und der Stellgröße u (bei MIMO-System dies selbst wieder Vektoren).

2.2 Dynamik des Schätzfehlers

Man erwartet von einem Beobachter, daß der Schätzfehler $\tilde{x} = x - \hat{x}$ nach einer gewissen Einschwingzeit gegen Null geht. Um zu ermitteln, welche Bedingungen sich dadurch für die Wahl von L ergeben, betrachten wir das System für \tilde{x} . Wir unterstellen dabei realistischerweise, daß die Messungen der Ausgangsgröße mit einem Meßfehler v behaftet sind

$$(55) \quad y = Cx + v$$

Mit (51) und (53) ergibt sich für den Schätzfehler $\tilde{x} = x - \hat{x}$ nach (54)

$$(56) \quad \dot{\tilde{x}} = Ax - A\hat{x} - L(Cx + v - C\hat{x})$$

Der Schätzfehler wird also durch ein System beschrieben, daß als Eingang den Meßfehler v der Ausgangsgröße des Systems hat.

$$(57) \quad \dot{\tilde{x}} = (A - LC)\tilde{x} - Lv$$

Dabei ist $A_L = (A - LC)$ die System-Matrix des Beobachters. Wesentliche Voraussetzung für ein befriedigendes Verhalten des Beobachters ist die Stabilität des Systems (57), also die Stabilität der Eigenwerte von A_L . dann klingt nämlich der Schätzfehler bei verschwindendem Meßfehler auf Null ab.

Durch die Wahl der Pole des Beobachters, also der Eigenwerte der Matrix $A_L = (A - LC)$, kann man die dynamischen Eigenschaften des Beobachters festlegen. Dieses Polvorgabe-Problem hat sehr viel Ähnlichkeit mit der Polvorgabe für den

Zustands-Regler aus Abschnitt 1.6. So wie für die Polvorgabe bei der Zustands-Regelung die Steuerbarkeit des Systems notwendige Bedingung ist, muß für die Polvorgabe des Beobachters das System beobachtbar sein. Dazu muß man prüfen, ob die Beobachtbarkeits-Matrix

$$(58) \quad \begin{pmatrix} C \\ C A \\ \dots \\ C A^{n-1} \end{pmatrix}$$

vollen Rang hat. Diese Matrix ist dual zur Steuerbarkeits-Matrix (26). Diese Dualität wird in Abschnitt 2.5 noch genauer diskutiert.

2.3 Beispiel: Beobachter für Fahrzeug-Lenkung

Bei der Bewegung eines Fahrzeugs längs einer vorgegebenen Trajektorie wird die Seiten-Abweichung von der Soll-Trajektorie nach Linearisierung durch einen doppelten Integrator beschrieben. Die Ausgangsgröße des Systems $y = x_1$ ist die Quer-Abweichung des Fahrzeugs. Deren Ableitung $\dot{y} = x_2$ ist proportional zum Winkel der Fahrzeug-Richtung mit der Soll-Trajektorie. Wir erhalten das folgende Zustandsraum-System

$$(59) \quad \begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Der Beobachter für dieses System nach (54) mit $L = (L_1, L_2)^T$ ergibt sich als

$$(60) \quad \begin{pmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L_1 & 1 \\ -L_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & L_1 \\ b & L_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix}$$

Der Einfachheit halber nehmen wir $b = 1$ an. Wenn man nun für den Beobachter einen reellen Doppelpol bei $s = -1/T_0$ mit $T_0 = 0.5$ vorgibt, erhält man $L = (4 \ 4)^T$. Die Schätzung von \dot{y} durch den Beobachter bei dem in Abb. 10 dargestellten "Spurwechsel-Manöver" ist in Abb. 11 widergegeben. Dabei ist zum Vergleich auch das Verhalten des Beobachters ohne Rückkopplung, also der Fall $L = (0, 0)^T$ dargestellt. Eine "naive" Lösung des Beobachter-Problems für \dot{y} wäre ein D-T₁-Filter. Die Antwort dieses Filters auf das Eingangs-Signal ist ebenfalls widergegeben. Um die Unterschiede zwischen den Beobachtern deutlich zu machen, ist für die wirkliche Strecke $b = 0.9$ gegenüber $b = 1$ im Beobachter angenommen worden. Dies trägt der in der Praxis vorliegenden Situation Rechnung, daß die System-Parameter nur ungenau bekannt sind. Der Beobachter ohne Rückkopplung reagiert zwar wegen der Kenntnis der Stellgröße schnell, läuft aber wegen des Parameter-Fehlers nicht auf den richtigen Endwert ein. Das DT₁-Filter weist wegen der Tiefpaß-Eigenschaft und der mangelnden Kenntnis der Stellgröße eine deutliche Verzögerung gegenüber dem wirklichen Signal auf, läuft aber wegen der Kenntnis des Ausgangs y auf den richtigen Endwert ein. Der Beobachter kombiniert die Vorteil beider "naiven" Varianten.

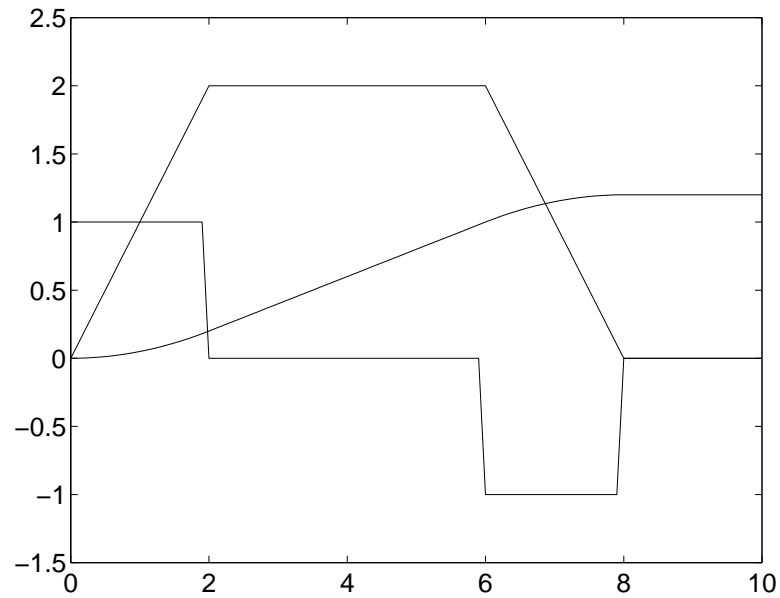
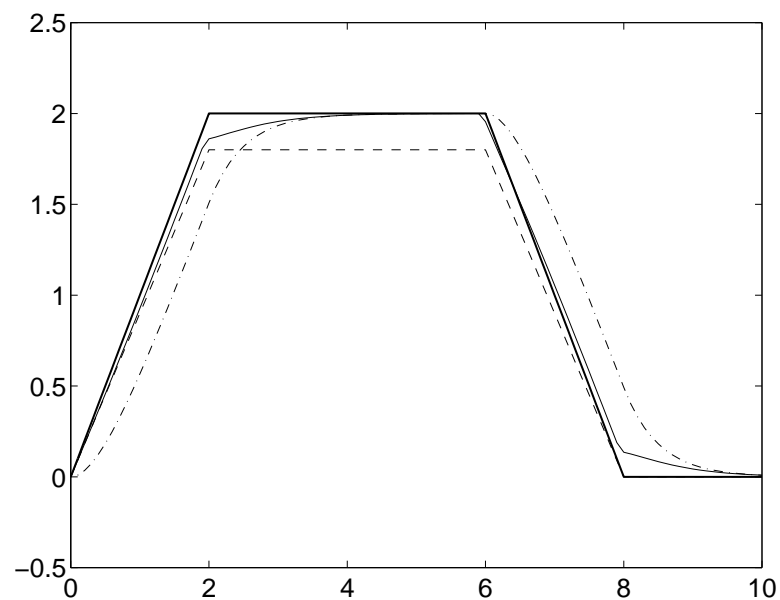


Abbildung 10: Spurwechsel-Manöver bei Fahrzeug-Lenkung

Abbildung 11: Schätzung von \dot{y} durch verschiedene Beobachter bei einem Spurwechsel-Manöver. Strichelungen sind im Text erläutert.

Für die Übertragungs-Funktion $G_{22} = x_2/y$ ergibt sich

$$(61) \quad G_{22}(s) = \frac{s}{(1 + 0.5 s)^2}$$

Der differenzierende Charakter ist anschaulich verständlich, denn dieses Teil-Filter muß aus y die Ableitung \dot{y} bilden. Der Nenner entspricht der Vorgabe eines Doppelpols bei $s = -2$ für den Beobachter.

Eigentlich wird bei einem Beobachter "zu viel" geschätzt. Häufig ist die Meßgröße einer der Zustände. Dann könnte sich der Beobachter darauf beschränken, nur die nicht gemessenen Zustände zu schätzen. Dieser Ansatz führt auf einen sog. reduzierten Beobachter, auf den hier aber nicht näher eingegangen werden soll.

2.4 Kombination von Zustands-Regler und Beobachter

Die Kombination eines Zustandsreglers mit einem Beobachter ermöglicht es, eine Zustandsregelung auch dann zu benutzen, wenn die Zustände nicht direkt gemessen werden. Für die Zustandsregelung werden dann die vom Beobachter geschätzten

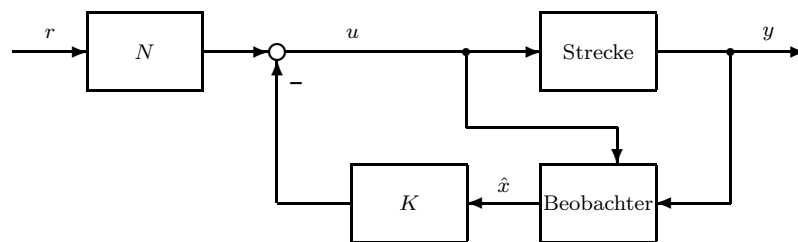


Abbildung 12: Regelkreis mit Beobachter und Zustandsregler

Zustände verwendet. Der Zustandsregler wird dann also durch die Gleichung

$$(62) \quad u = -K\hat{x} + Nr$$

beschrieben. Aus der Zustandsraum-Darstellung des Beobachters nach (54) ergibt sich durch Einsetzen von u aus (62) für den gesamten Zustandsregler mit Beobachter die folgende Zustandsraum-Darstellung:

$$(63) \quad \dot{\hat{x}} = (A - LC - BK)\hat{x} + Ly + BNr$$

$$(64) \quad u = -K\hat{x} + Nr$$

Dieser Regler hat zwei Eingänge: die Ausgangsgröße des Systems y (Regelgröße) und die Führungsgröße r . Daß der Regler nicht einfach nur die Regeldifferenz $e = r - y$ zugeführt bekommt, hat den großen Vorteil, daß die Beobachter-Dynamik keinen Einfluß auf das Führungsverhalten hat, vgl. auch Abschnitt 2.7. Man bezeichnet diesen Reglertyp als Regler mit zwei Freiheitsgraden (englisch: two degrees

of freedom, 2DOF). Im Gegensatz dazu treten beim Regler im Standard-Regelkreis ohne Vorfilter y und r nur als Differenz ($r - y$) auf, so daß hier nur ein Freiheitsgrad gegeben ist (1DOF). Wenn ein Vorfilter für die Führungsgröße vorgesehen wird, erhält man dagegen ebenfalls einen 2DOF-Regler.

Der geschlossene Regelkreis wird insgesamt durch das Zustandsraum-System mit Zustandsvektor $(x \quad \hat{x})$ beschrieben.

$$(65) \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -B K \\ L C & (A - B K - L C) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \hat{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B N \\ B N \end{pmatrix} r$$

Es läßt sich zeigen, daß die Eigenwerte des Systems (65) die Vereinigungsmenge der Eigenwerte des Zustands-Reglers und des Beobachters sind. Die Konstruktion des Reglers läßt sich also in die beiden unabhängigen Teilprobleme Entwurf des Zustands-Reglers und Entwurf des Beobachters zerlegen. Diese Separation von Regler und Beobachter ist eine sehr bemerkenswerte Besonderheit, die nur für lineare Systeme gilt.

Beispiel: Fahrzeug-Lenkung

Wir ergänzen den in Abschnitt 2.3 ermittelten Beobachter für die Fahrzeug-Lenkung um einen Zustands-Regler. Da das System (59) in Regelungs-Normalform vorliegt sind die Rückführ-Verstärkungen leicht zu ermitteln. Bei Vorgabe eines Doppelpols für den Regler bei $s = -2$ ergibt sich $K = (4 \quad 4)$. Damit erhalten wir nach (63) für den Zustands-Regler mit Beobachter das Zustandsraum-System

$$(66) \quad \begin{pmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ r \end{pmatrix}$$

$$(67) \quad u = (-4 \quad -4) \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} + (0 \quad 4) \begin{pmatrix} y \\ r \end{pmatrix}$$

Die Übertragungs-Funktion $G_{uy} = u/y$ ergibt sich als

$$(68) \quad G_{uy}(s) = -\frac{4(2+s)}{s^2 + 8s + 24}$$

wobei man im Standard-Regelkreis das negative Vorzeichen nicht zur Regler-Übertragungs-Funktion rechnen würde. Das Bode-Diagramm Abb. 13 von $-G_{uy}(s)$ zeigt, daß der sich ergebende Regler PD-T₂-Charakter hat. Das Verhalten des Regelkreises bei einem Führungs-Sprung zeigt Abb. 14. Man beachte, daß die Übertragungs-Funktion G_{yr} wegen der Entkopplung des Schätzfehlers (vgl. Abschnitt 2.7) nur zweiter Ordnung ist, obwohl der ganze Regelkreis aus Beobachter und Strecke nach (65) 4. Ordnung ist.

Das Einschwingen des Regelkreises von der Anfangsbedingung $x_0 = (1 \quad 0)^T$ zeigt Abb. 15. Dabei ist unterstellt, daß der Beobachter die Anfangs-Bedingung nicht kennt und $\hat{x}_0 = (0 \quad 0)^T$ annimmt. Entsprechend dauert es eine gewisse Zeit, bis der Beobachter die tatsächliche Regelabweichung erkennt. Dadurch verzögert sich auch die Reaktion in der Stellgröße.

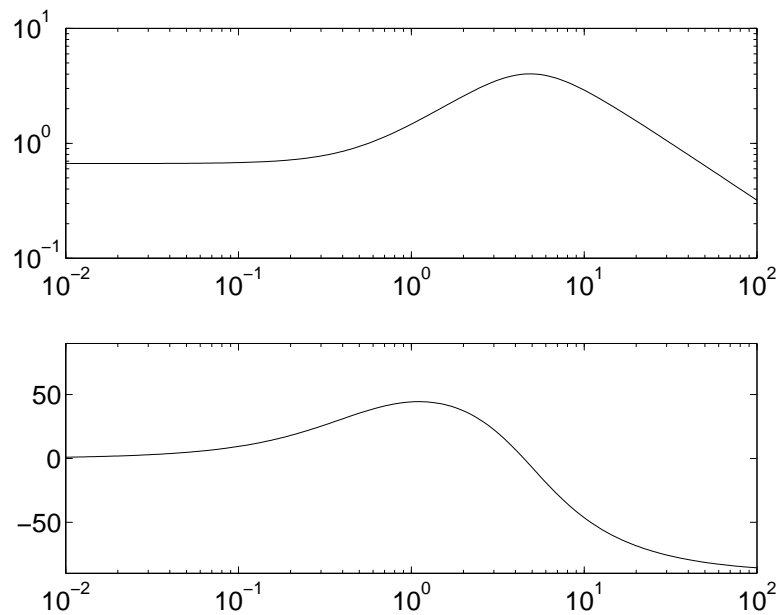


Abbildung 13: Bode-Diagramm des Zustands-Reglers mit Beobachter für die Fahrzeug-Lenkung.

2.5 Dualität: Beobachter – Zustandsregler

Das Problem der Polvorgabe für einen Beobachter hat sehr viel Ähnlichkeit mit der Polvorgabe für einen Zustandsregler. Während beim Zustandsregler die Eigenwerte der Matrix $A_K = (A - BK)$ vorgegeben werden, geschieht dies beim Beobachter für die Matrix $A_L = (A - LC)$. Tatsächlich ist es so, daß man für die Beobachter-Polvorgabe dieselben Algorithmen benutzen kann. Es gilt nämlich die sog. Dualität der beiden Probleme. Da die Transponierte A^T einer Matrix dieselben Eigenwerte wie die Matrix A selbst hat, kann man statt der Eigenwerte von $A_L = (A - LC)$ auch die Eigenwerte von

$$(69) \quad A_L^T = (A - LC)^T = A^T - C^T L^T$$

vorgeben. Bei einem Zustandsregler werden durch geeignete Wahl von K die Eigenwerte der Matrix $A_K = (A - BK)$ vorgegeben. Wenn man nun für A , B , K die Matrizen

$$(70) \quad \begin{aligned} A^* &= A^T \\ B^* &= C^T \\ K^* &= L^T \end{aligned}$$

wählt, erhält die Matrix für die Polvorgabe eines Beobachters dieselbe Form $(A^* - B^* K^*)$ wie die Polvorgabe für einen Zustandsregler. Das Ergebnis ist ein Vektor K^* von Verstärkungen, der transponiert zum Verstärkungs-Vektor L des Beobachters ist, also $L = (K^*)^T$.

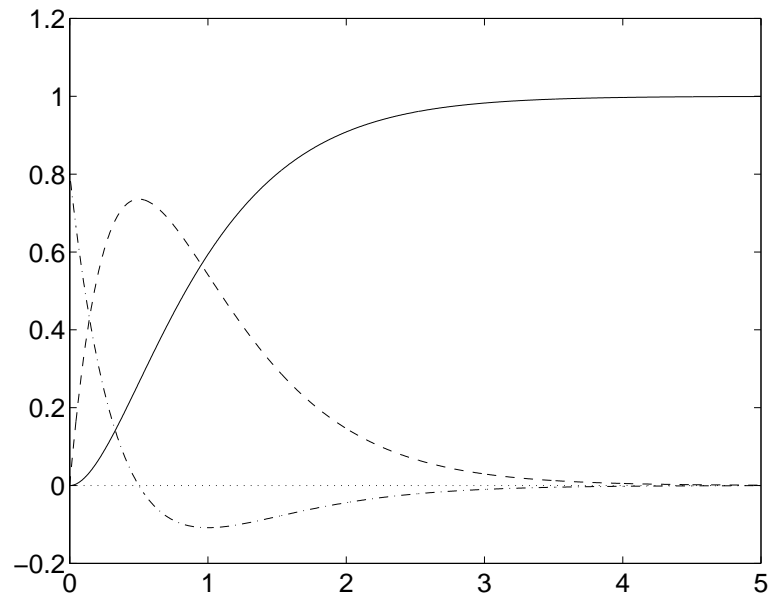


Abbildung 14: Verhalten des Regelkreises bei einem Führungs-Sprung.

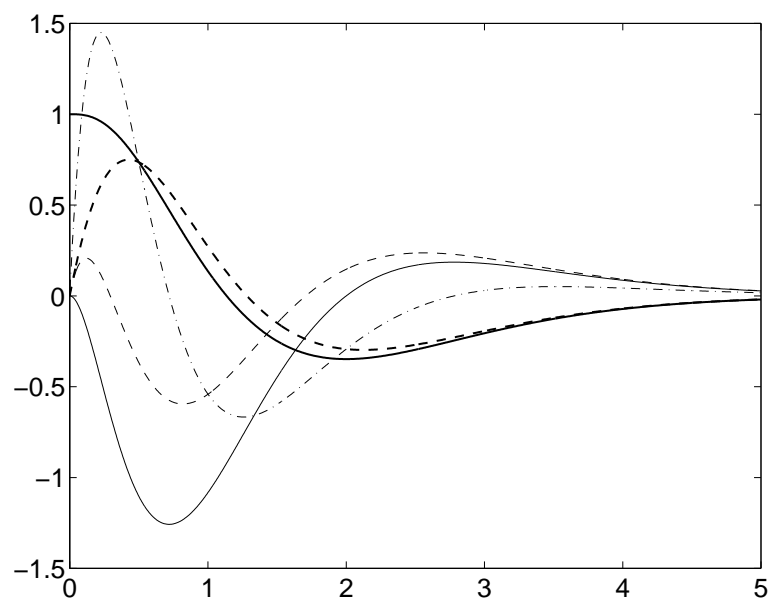


Abbildung 15: Verhalten des Regelkreises bei anfänglichem Regelfehler, den der Beobachter aber nicht kennt. Dick: $x_1 = y$, dünn: $x_2 = z$; die Schätzwerte sind jeweils gestrichelt; strich-punktiert: Stellgröße.

Man kann also den Verstärkungs-Vektor L eines Beobachters durch den MATLAB-Aufruf

$$L = \text{place}(A', C', P)'$$

erhalten, wobei P der Spaltenvektor aus den gewünschten Polen des Beobachters ist. Natürlich ist auch (mit den in Abschnitt 1.6 gemachten Einschränkungen) der Aufruf

$$L = \text{acker}(A', C', P)'$$

möglich. Eine analytische Berechnung des Verstärkungs-Vektors L ist meist nicht möglich. Eine Ausnahme bildet der Fall, wenn das System in Beobachter-Normalform vorliegt, vgl. Abschnitt 2.6.

2.6 Beobachter für die Beobachter-Normalform

Besonders einfach wird die Polvorgabe für den Beobachter, wenn das System in der Beobachter-Normalform gegeben ist. Diese Normalform enthält, wie die Regelungs-Normalform, neben Nullen und Einsen nur die Koeffizienten der Übertragungs-Funktion. Mit

$$(71) \quad F(s) = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_{n-1} s^{n-1}}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n}$$

lautet die Zustandsraum-Darstellung in Beobachtungs-Normalform

$$(72) \quad \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix} u$$

$$y = (0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Offenbar ist die System-Matrix die Transponierte der System-Matrix der Regelungs-Normalform (19) und B und C sind in (72) gegenüber der Regelungs-Normalform vertauscht und transponiert.

Die System-Matrix A_L der Zustandsraum-Darstellung des Beobachters lautet damit

$$(73) \quad A - LC = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} (0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1)$$

Da dieses System wiederum in Beobachtungs-Normalform vorliegt, läßt sich daraus die Übertragungs-Funktion des Beobachters direkt ablesen

$$(74) \quad F_L(s) = \frac{Z_L(s)}{(a_0 + L_1) + (a_1 + L_2)s + \dots + (a_{n-1} + L_n)s^{n-1} + s^n}$$

Wenn man also die Pole für den Beobachter und damit das Nennerpolynom

$$(75) \quad N_L(s) = c_0 + c_1 s + \dots + c_{n-1} s^{n-1} + s^n$$

vorgibt, lassen sich wie beim Zustandsregler in Abschnitt 1.6 wegen $c_k = (a_k + L_{k+1})$ die erforderlichen Verstärkungen für den Beobachter direkt angeben:

$$(76) \quad \begin{aligned} L_1 &= c_0 - a_0 \\ L_2 &= c_1 - a_1 \\ &\vdots \\ L_n &= c_{n-1} - a_{n-1} \end{aligned}$$

Allerdings ist der Beobachter-Entwurf über die Beobachter-Normalform und (76) praktisch nur von geringem Nutzen. Für eine Zustandsregelung benötigt man einen Beobachter für die Zustände des beim Entwurf des Zustands-Reglers benutzten Systems (z.B. in Regelungs-Normalform) und nicht für diejenigen der Beobachter-Normalform.

2.7 Entkopplung des Schätzfehlers von der Führungsgröße

Die geregelte Strecke mit Zustands-Vektor x wird wegen $u = -K\hat{x} + Nr$ durch die Gleichung

$$(77) \quad \dot{x} = Ax + B(-K\hat{x} + Nr)$$

beschrieben. Die Dynamik des Beobachters mit Zustands-Vektor \hat{x} wird durch (63) beschrieben. Aus diesen beiden Gleichungen ergeben sich für den Schätzfehler $\tilde{x} = x - \hat{x}$ die System-Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{x} - \dot{\hat{x}} &= Ax - BK\hat{x} + BNr \\ &\quad - ((A - LC - BK)\hat{x} + Ly + BNr) \\ \dot{\tilde{x}} &= (A - LC)x + LCx - BK\hat{x} + BNr \\ &\quad - (A - LC)\hat{x} - LCx + BK\hat{x} - BNr \end{aligned}$$

Die Abhängigkeit des Schätzfehlers von der Führungsgröße hebt sich offenbar weg und es ergibt sich für den Schätzfehler das autonome System

$$(78) \quad \dot{\tilde{x}} = (A - LC) \tilde{x}$$

Die Beobachter-Dynamik wirkt sich nur im Störverhalten des Reglers aus. Bei Führungsgrößen-Änderungen ergibt sich (bei exakter Kenntnis des Modells) kein neuer Schätzfehler, es findet lediglich durch den Zustandsregler ein Einregeln auf den neuen Sollwert statt.

Die Entkopplung ist anschaulich verständlich. Bei einer Veränderung der Führungsgröße kennt der Beobachter den Eingang der Strecke genau, da die Stellgröße vom Regler selbst erzeugt wird. Wenn das Modell, wie hier unterstellt wird, exakt bekannt ist, kann der Beobachter deswegen die Entwicklung der Zustandsgrößen exakt vorhersagen.

2.8 Störgrößen-Beobachter

Ein Beobachter kann auch benutzt werden, um Störgrößen, die auf ein System wirken, zu ermitteln. Diese Schätzwerte für die Störungen können dann zur Störgrößen-Kompensation verwendet werden.

Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf die in Abb. 16 dargestellte Situation mit Störungen am Eingang der Strecke. Da sich auch Störungen, die an einer anderen Stelle einwirken, auf eine äquivalente Störung am Eingang der Strecke umrechnen lassen, ist dies keine wirkliche Einschränkung. Es werden im einfachsten Fall so viele Störungen angenommen, wie Eingänge der Strecke vorliegen.

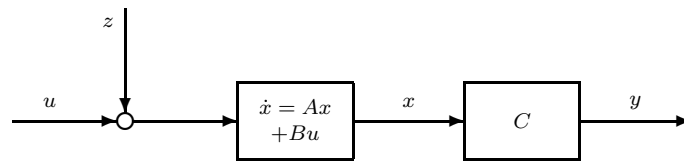


Abbildung 16: Strecken-Modell beim Störgrößen-Beobachter

Man faßt nun die Störungen einfach als eine Erweiterung des Zustands-Vektors auf und nimmt das Modell für die Dynamik der Störungen mit in das System auf. Im einfachsten Fall konstanter Störungen, ergibt sich für die Dynamik der Störungen einfach $\dot{z} = 0$ und damit für das erweiterte System mit Zustands-Vektor $x^* = (x \ z)^T$.

$$(79) \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$(80) \quad y = \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$$

Wenn das System (79) beobachtbar ist, kann dafür entsprechend (53) ein Beobachter mit Zustands-Gleichungen

$$(81) \quad \begin{pmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B & L_x \\ 0 & L_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$$

entworfen werden. Dabei ist $\tilde{y} = y - \hat{y}$ die Innovation. Die Beobachter-Rückführung wurde entsprechend dem Zustandsvektor $(x \ z)^T$ in $(L_x \ L_z)^T$ partitioniert.

Der Regler kann dann den so ermittelten Schätzwert der Störungen für deren Kompensation (Störgrößen-Aufschaltung) benutzen, so daß die Stellgröße insgesamt durch

$$(82) \quad u = -K \hat{x} + N r - \hat{z}$$

gegeben ist. Damit hat der Zustandsregler mit Störgrößen-Kompensation die Zustandsraum-Darstellung

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - L_x C - B K & 0 \\ -L_z C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L_x & B N \\ L_z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ r \end{pmatrix}$$

$$(83) \quad u = (-K \quad -I) \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{z} \end{pmatrix} + (0 \quad N) \begin{pmatrix} y \\ r \end{pmatrix}$$

Dabei hat sich der Term $B\hat{z}$ nach Konstruktion weggehoben, so daß im Block (1, 2) der Systemmatrix eine Null erscheint.

Wir wollen nun zeigen, daß der Regelkreis mit diesem Regler stationär genau ist. Im Gleichgewichts-Zustand ist $\dot{\hat{z}} = 0$. Damit folgt aus der zweiten Komponente von Gleichung (81) wegen $\dot{\hat{z}} = L_z \tilde{y}$ daß auch die Innovation \tilde{y} Null werden muß. Dies ist Ausdruck der Tatsache, daß dieser Teil des Beobachter ein Integrator ist, der nur zur Ruhe kommt, wenn der Eingang Null ist. Damit vereinfacht sich aber die erste Komponente in (81). Einsetzen von (82) ergibt zusammen mit $\tilde{y} = 0$ dann

$$(84) \quad \dot{\hat{x}} = A \hat{x} + B\hat{z} + B(-K \hat{x} + N r - \hat{z})$$

Da sich der Term $B\hat{z}$ weghebt, bleibt für den Endzustand x_∞ wegen $\dot{\hat{x}} = 0$

$$(85) \quad (A - B K) \hat{x}_\infty = -B N r$$

Mit der Wahl von N gemäß (32) ergibt sich damit schließlich

$$(86) \quad \hat{y}_\infty = C \hat{x}_\infty = -C (A - B K)^{-1} B N r = r$$

Man beachte, daß die stationäre Genauigkeit unabhängig davon erreicht wird, ob die System-Matrizen korrekt sind. Lediglich das gewählte N muß zu den im Beobachter angenommenen Matrizen A, B, C und der Rückführung K passen. In seiner Wirkung entspricht der Störgrößen-Beobachter einem Integral-Teil im Zustands-Regler, vgl. Abschnitt 1.9.

Beispiel: PT₁-Strecke mit konstanter Störung

Ein Tanksystem, bei dem ein unbekannter Ablauf vorhanden ist, kann durch ein System nach Abb. 16 modelliert werden. Nach geeigneter Skalierung gilt für das System einschl. der Störgröße

$$(87) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= -x + z + u \\ \dot{z} &= 0 \end{aligned}$$

In Matrix-Schreibweise

$$(88) \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$(89) \quad y = (1 \quad 0) \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$$

Die Vorgabe eines Doppelpols bei $s = -2$ für den Beobachter ergibt $L = (3 \quad 4)$. Damit ist das Beobachter-System nach (54)

$$(90) \quad \begin{pmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ y \end{pmatrix}$$

Das Einlaufen der Schätzwerte von x und z für dieses Beispiel ist in Abb. 17 dargestellt. Es ist als Anfangswert für den Beobachter $(\hat{x} \ \hat{z})^T = (1 \ 0)^T$ angenommen. Stellgröße u und Ausgang y werden entsprechend der Situation bei einer konstanten Störung $z = 1$ als $u = 1$ und $y = 2$ angenommen.

Abb. 18 zeigt einen kombinierten Führungs- und Stör-Sprung mit $r = 1$ und $z = -0.5$. Der Zustands-Regler für die Strecke (87) mit Pol bei $s = -2$ hat die Rückführung $K = -1$. Die Kombination des Störgrößen-Beobachters mit diesem Regler und der Störgrößen-Aufschaltung ergibt wegen $K^* = (K \ -I) = (-1 \ -1)^T$ nach (83) das System

$$(91) \quad \begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{z}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ r \end{pmatrix} \\ u &= (-1 \ -1) \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{z} \end{pmatrix} + (0 \ 2) \begin{pmatrix} y \\ r \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Übertragungs-Funktion des Reglers lautet (ohne Minuszeichen)

$$(92) \quad G(s) = \frac{7s + 8}{s^2 + 5s}$$

Der Regler hat also PI-T₁-Charakter. Er enthält also wie erwartet einen Integralteil, der für stationäre Genauigkeit sorgt.

2.9 Kalman-Filter

Die Auslegung eines Beobachters durch Polvorgabe hat den Nachteil, daß man die Bedeutung der Pole für die Schätzgüte des Beobachters nur schwer beurteilen kann. Eine Alternative bietet das Kalman-Filter. Bis diesem Ansatz wird unterstellt, daß das System entsprechend Abb. 19 mit zwei Arten von Störungen beaufschlagt ist: Störungen w , die auf den Streckeneingang wirken (Prozess-Rauschen), und Meßstörungen v , die auf den Streckenausgang wirken (Meß-Rauschen).

Die Systemgleichungen lauten

$$(93) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + Gw \\ y &= Cx + v \end{aligned}$$

Die Störungen v und w werden als weißes Rauschen mit Mittelwert Null und Varianzen

$$(94) \quad E(ww^T) = Q$$

$$(95) \quad E(vv^T) = R$$

angenommen. Der Zustands-Beobachter mit minimaler Fehler-Varianz (optimaler Beobachter) ist das Kalman-Filter. Dessen Rückführungen L berechnen sich wie die des optimalen Zustandsreglers in Abschnitt 1.10 über eine Matrix-Riccati-Gleichung

$$(96) \quad 0 = AP + PA^T - PC^T R^{-1} CP + GQG^T$$

$$(97) \quad L = PC^T R^{-1}$$

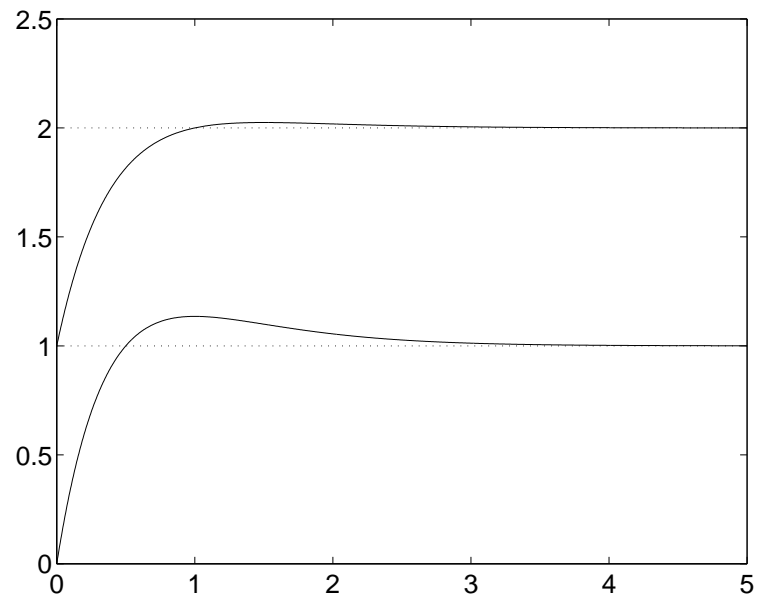


Abbildung 17: Ermittlung der Störgröße durch den Beobachter

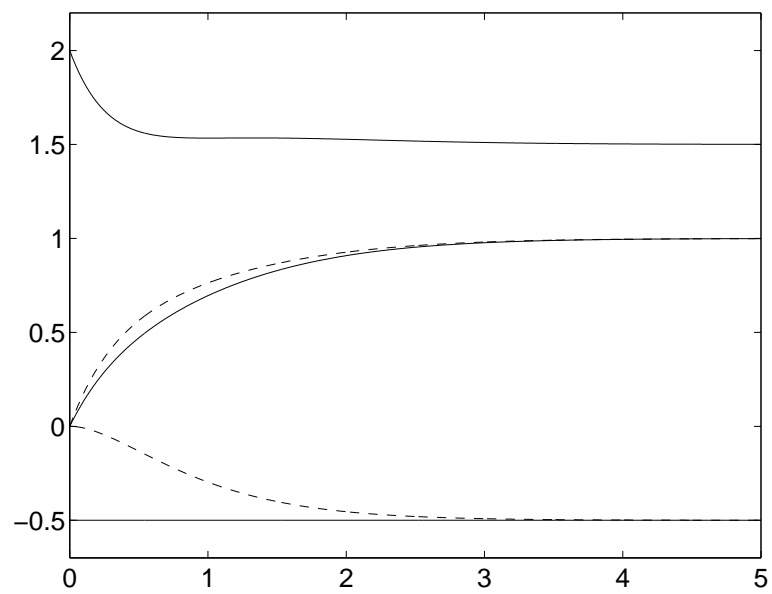


Abbildung 18: Kombiniertes Führungs- und Stör-Sprung

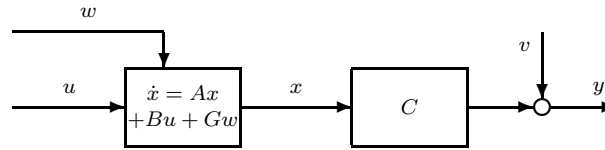


Abbildung 19: Störungs-Annahmen beim Kalman-Filter-Entwurf

Dies ist im wesentlichen dieselbe Gleichung wie die Riccati-Gleichung (43) für den optimalen Zustands-Regler (duale Vertauschung der Matrizen). Die Matrix-Gleichung läßt sich meist nicht analytisch lösen. Der MATLAB-Befehl zur Berechnung der optimalen Rückführungen lautet $L = \text{lqe}(A, G, C, Q, R)$.

Beispiel: Kalman-Filter als Störgrößen-Beobachter

Wir betrachten wieder die Abschnitt 2.8 eingeführte PT₁-Strecke (87) mit konstanter Störung. Bei der Auslegung des Störgrößen-Beobachter durch Polvorgabe ist es unbefriedigend, daß der ganz unterschiedliche Charakter der beiden Zustände nicht ausreichend berücksichtigt wird. Der Zustand $x_2 = z$ ist nur sehr langsam veränderlich, man wünscht sich also u.U. nur eine langsame Reaktion des Beobachters auf Änderungen dieses Zustandes. Eine solche Differenzierung ist bei der Polvorgabe nicht möglich, da der Bezug der Pole zu den einzelnen Zuständen fehlt.

Hier bietet das Kalman-Filter eine Alternative, indem es in Form der Varianzen der Störungen entsprechende Einstell-Parameter bietet. Für das angesprochene Beispiel können wir $R = 1$ setzen. Da beide Zustände mit Störungen beaufschlagt werden, ist $G = I$ und man wählt Q diagonal.

$$(98) \quad Q = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix}$$

Um den nur langsam veränderlichen Charakter der Störung z zu berücksichtigen, werden wir $Q_2 \ll Q_1$ wählen. Die Rückführ-Matrix L bestimmt sich aus der Riccati-Gleichung (96,97). Mit der System-Matrizen aus (88) ergibt sich für die Teil-Ausdrücke in (96)

$$(99) \quad AP + PA^T = \begin{pmatrix} 2(-P_{11} + P_{12}) & (-P_{12} + P_{22}) \\ (-P_{12} + P_{22}) & 0 \end{pmatrix}$$

$$(100) \quad PC^T R^{-1} CP = \begin{pmatrix} P_{11}^2 & (P_{11}P_{12}) \\ (P_{11}P_{12}) & P_{12}^2 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich das Gleichungs-System

$$\begin{array}{rclcl} 2(-P_{11} + P_{12}) & - & P_{11}^2 & + & Q_1 & = & 0 \\ P_{12} + P_{22} & - & P_{11}P_{12} & + & 0 & = & 0 \\ 0 & - & P_{12}^2 & + & Q_2 & = & 0 \end{array}$$

Damit ergibt sich aus (97) die Beobachter-Rückführung

$$(101) \quad L = \begin{pmatrix} P_{11} \\ P_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1 + Q_1 + 2\sqrt{Q_2}} - 1 \\ \sqrt{Q_2} \end{pmatrix}$$

Wählen wir nun $Q_1 = 40$ und $Q_2 = 4$, dann ergibt sich das in Abb. 20 dargestellte Verhalten des Kalman-Filters. Zum Vergleich sind die Verläufe für $Q_1 = Q_2 = 4$ ebenfalls dargestellt.

Im Gegensatz zu Abb. 17 läuft hier die die Schätzung des Zustandes x_1 schnell auf ihren Endwert (den Meßwert) ein, während die Schätzung der konstanten Störung langsamer verläuft. Dies ist auf die Wahl der Varianzen mit $Q_1 \gg Q_2$ zurückzuführen.

2.10 Störgrößen-Beobachter für Mehrgrößen-System

Bei dem in Abschnitt 1.5 betrachteten Dreitank-System bietet es sich an, die Abläufe aus den Tanks als Störgrößen einzuführen. Gleichzeitig ermöglicht dies eine Erfassung möglicher Parameter-Fehler in den Pumpen-Kennlinien. Der Beobachter wirkt dann, wie schon erwähnt, als Integralteil. Wir unterstellen, daß nur die Füllstände von Tank 1 und 2 gemessen werden, Tank 3 dagegen nicht.

Nun ist bei der Modellierung der Störgrößen zu beachten, daß das System mit dem erweiterten Zustandsvektor von den vorliegenden Meßgrößen aus beobachtbar

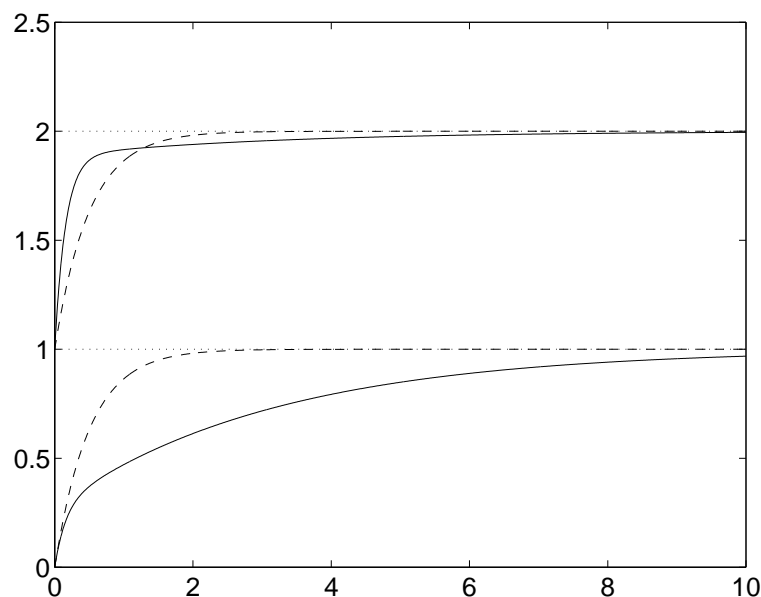


Abbildung 20: Schätzung der Störgröße durch das Kalman-Filter. $Q_2 = 4$; Durchgezogen: $Q_1 = 40$, gestrichelt: $Q_1 = 4$.

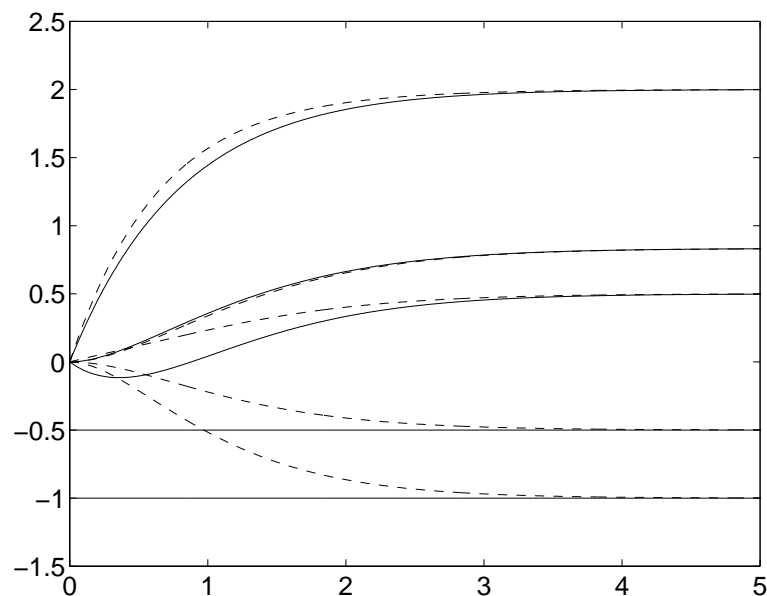


Abbildung 21: Führungs- und Stör-Sprung

sein muß. Man kann sich leicht klarmachen, daß die Einführung von Störgrößen an allen drei Tanks zu einem nicht beobachtbaren System führt. Um ein beobachtbares System zu erhalten, muß man sich auf zwei Störgrößen beschränken, was auch für die stationäre Genauigkeit der gesamten Regelung ausreicht. Aus (21) erhalten wir aus das erweiterte System

$$(102) \quad \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$(103) \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

In Abb. 21 ist für dieses System ein kombinierter Führungs- und Stör-Sprung dargestellt. Die Sollwerte sind $r = (0.5 \ 2)^T$ und die Störgrößen sind $z = (-1 \ -0.5)^T$. Die geschätzten Werte sind jeweils gestrichelt gezeichnet. Man erkennt deutlich, daß der Beobachter eine gewisse Zeit benötigt, bis die Schätzwerte mit den wirklichen Werten übereinstimmen.

MATLAB-Code für Abb. 21

```

A = [-2, 0, 1, 1, 0;
      0,-2, 1, 0, 1;
      1, 1,-3, 0, 0;
      0, 0, 0, 0, 0;
      0, 0, 0, 0, 0];

B = [1,0;0,1;0,0;0,0;0,0];
C = eye(2,5);
D = zeros(2,2);

S = ss(A,B,C,D);

% Beobachter
Lpoles = [0.9,0.95,1,1.05,1.1]*(-2);
L       = place(A',C',Lpoles)';
Sb      = ss(A-L*C,[B,L],eye(2,5),zeros(2,4));

% Regler
Kpoles = [0.9,1,1.1]*(-2);
i0      = [1:3];
Kr      = place(A(i0,i0),B(i0,:), Kpoles);
N       = -inv(C(:,i0)*inv(A(i0,i0)-B(i0,:)*Kr)*B(i0,:));
K       = [Kr, eye(2)];
Sc      = ss(A-L*C-B*K,[L,B*N],-K,[zeros(2,2),N]); % Eingänge (y,r)

% Verknuepfung Regler-Strecke
Sl      = feedback(S*Sc,tf(eye(2))), [1:2], [1:2], 1);

% Simulation
t = linspace(0,10,1000)';
r = ones(size(t))*[0.5,2];
x0=[0;0;0;-1;-0.5;0;0;0;0;0];

[y,t,x] = lsim(Sl(:,3:4),r,t,x0);

k=1; plot(t,x(:,k),'r-',t,x(:,k+5),'r--'); hold on
k=2; plot(t,x(:,k),'g-',t,x(:,k+5),'g--')
k=3; plot(t,x(:,k),'c-',t,x(:,k+5),'c--')
k=4; plot(t,x(:,k),'y-',t,x(:,k+5),'y--')
k=5; plot(t,x(:,k),'m-',t,x(:,k+5),'m--'); hold off

axis([0,5,-1.5,2.5])
sf

```