magisterka brudnopis

marekbauer07

July 2022

1 Cel pracy

2 Czym są typy ilorazowe

W algebrze abstrakcyjnej abstrakcyjnej zbiór pierwotny T, w którym utożsamiamy elementy zgodnie z relacją równoważności ($\sim$) nazywamy strukturą ilorazową. Oznaczmy ją symbolem $T/\sim$. Najlepszym przykładem tego typu struktury jest grupa z modularną arytmetyką. Każdy z nas zaznajomiony z zasadami działania zegara i nikogo nie dziwni że po godzinie 12:00 następuje godzina 1:00. O godzinach na traczy zegara możemy myśleć jako o operacjach w grupie $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, utożsamiamy w niej liczby których operacja dzielenia przez 12 daje taką samą resztę.

$$\cdots \equiv -11 \equiv 1 \equiv 13 \equiv 25 \equiv 37 \equiv \dots \pmod{12} \tag{1}$$

Tak jak podpowiada nam intuicja 1:00 i 13:00 to ta sama godzina w tej arytmetyce.

2.1 Relacja równoważności

Żeby sformalizować typy ilorazowe, będziemy usieli najpierw dokładnie zdefiniować jakie relacje są relacjami równoważności. Każda relacja równoważności spełnia trzy własności:

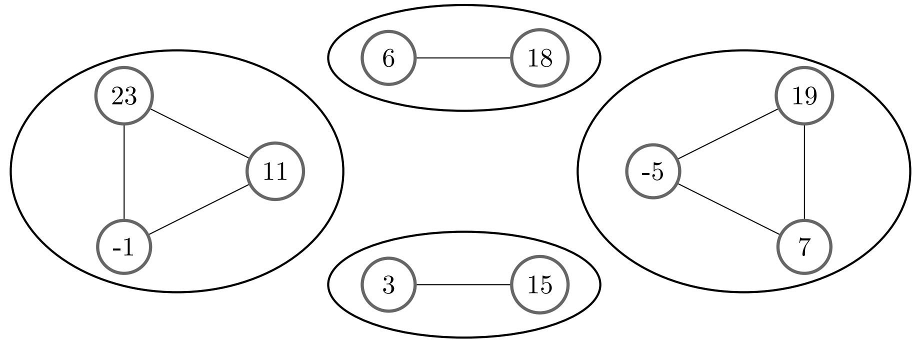
Zwrotność - każdy element musi być w relacji sam z sobą ($a \sim a$)

Symetryczność - jeśli a jest w relacji z b ($a \sim b$) to również b jest w relacji z a ($b \sim a$).

Przechodniość - jeśli a jest w relacji z b ($a \sim b$) oraz b jest w relacji z c ($b \sim c$) to również a jest w relacji c ($a \sim c$).

```
Class equivalance_relation {A: Type} (R: A -> A -> Prop) := {
  equiv_refl  : forall x: A, R x x;
  equiv_sym   : forall x y: A, R x y -> R y x;
  equiv_trans : forall x y z: A, R x y -> R y z -> R x z;
}.
```

Klasa relacji równoważności zapisana w COQ Najlepszym przykładem takiej relacji jest równość, po chwili zastanowienie widać iż spełnia ona wszystkie trzy wymagane własności. Relacje równoważności są uogólnieniem pierwotnego pojęcia równości elementów. Pozwalają one na utożsamienie różnych elementów naszego pierwotnego zbioru z sobą np. godziną 13:00 z 1:00. Innym przykładem może być utożsamienie różnych zapisów tej samej liczby $\frac{1}{2}$ z $\frac{2}{4}$. Z punktu widzenia teorii mnogości utożsamione z sobą elementy tworzą klasy abstrakcji. Tak naprawdę w tej teorii $T/\sim$ jest rodziną klas abstrakcji, inaczej mówiąc rodziną zbiorów elementów które zostały utożsamione relacją $(\sim)$.



Rysunek 1: Przykład elementów utożsamionych z sobą w grupie $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, linie oznaczają elementy będące z sobą w relacji równoważności, a elipsy klasy abstrakcji wyznaczone przez tą relację równoważności

2.2 Spojrzenie teorii typów

Jako że praca skupia się na implementacji typów ilorazowych w COQ, stąd też skupimy się na spojrzeniu teorii na ilorazy, w przeciwieństwie do spojrzenia teorio mnogościowego. W teorii typów $T/\sim$ będziemy nazywać typem ilorazowym stworzonym poprzez podzielenie typu pierwotnego T relacją równoważności $(\sim)$. Będziemy oznaczać $a = b$ w typie $T/\sim$ wtedy i tylko wtedy gdy $a \sim b$. Widzimy zatem iż każdy element typ T jest również elementem typu $T/\sim$. Natomiast nie wszystkie funkcje z typu T są dobrze zdefiniowanymi funkcjami z typu $T/\sim$. Funkcja $f : T \to X$ jest dobrze zdefiniowaną funkcją $f : (T/\sim) \to X$ jeśli spełnia warunek, że $a \sim b$ implikuje $f(a) = f(b)$. Ten warunek jest konieczny, aby nie dało się rozróżnić utożsamionych wcześniej elementów poprzez zmapowanie ich do innego typu. Myśląc o wszystkich elementach będących z sobą w relacji $(\sim)$ jako o jednym elemencie brak tej zasady złamałby regułę monotoniczności aplikacji mówiącej, że $x = y \Rightarrow f(x) = f(y)$.

3 Relacje równoważności generowane przez funkcję normalizującą

Każda funkcja $h : T \to B$ generuje nam pewną relację równoważności $(\sim_h)$ zdefiniowaną poniżej:

$$\forall x, y \in T, x \sim_h y \iff h(x) = h(y) \tag{2}$$

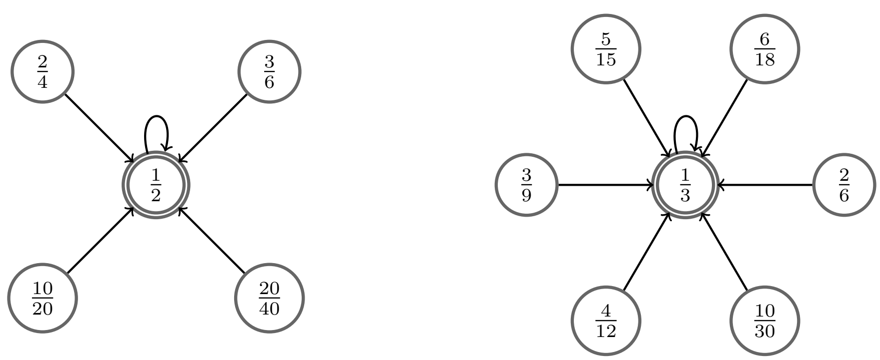
Jak już wspominaliśmy równość jest relacją równoważności, stąd łatwo pokazać iż $(\sim_h)$ jest relacją równoważności. Dowolna funkcja $g : B \to X$ będzie teraz generować dobrze zdefiniowaną funkcję $f : T \sim_h \to X$ w taki sposób, że $f = g \circ h$.

3.1 Funkcja normalizująca

W tej pracy skupimy się na szczególnym przypadku funkcji $h : T \to B$ w którym $B = T$. Dodatkowo będziemy wymagać aby funkcja h była idempotentna. Tak zdefiniowaną funkcję h będziemy nazywać funkcją normalizującą.

```
Class normalizing_function {A: Type} (f: A -> A) :=
  idempotent : forall x: A, f (f x) = f x.
```

Klasa funkcji normalizujących w COQ Mamy zatem zdefiniowane czym są funkcje normalizujące, zbudujmy jeszcze odrobinę intuicji wokół nich. Jak wiemy relacja równoważności łączny utożsamiane z sobą elementy w grupy, a mówiąc ściślej klasy abstrakcji. Celem funkcji normalizujących jest wyznaczenie reprezentanta każdej z klas abstrakcji. Obrazem tej funkcji będzie właśnie zbiór naszych reprezentantów lub inaczej elementów w postaci normalnej. Warunek idempotencji jest konieczny do tego aby obrazem elementu w postaci normalnej był on sam, gdyż nie wymaga on już normalizacji.



Rysunek 2: Przykład elementów utożsamionych z sobą w grupie $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, linie oznaczają elementy będące z sobą w relacji równoważności, a elipsy klasy abstrakcji wyznaczone przez tą relację równoważności

3.2 Przykłady funkcji normalizujących

Wykorzystajmy tutaj już wcześniej przytoczone liczby wymierne. Jednym z sposobów na zdefiniowanie postaci normalnej liczby wymiernej rozumianej jako $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ jest wymuszenie, aby licznik był względnie pierwszy z mianownikiem. Wprawne oko zapewne zauważy, iż 0 nie ma kanonicznej postawi w takiej definicji, ale możemy arbitralnie ustalić, że jego postacią normalną będzie $\frac{0}{1}$. W takim przypadku funkcja normalizująca powinna dzielić licznik i mianownik przez ich największy wspólny dzielnik. W przypadku par nieuporządkowanych, ale na których istnieje jakiś porządek liniowy postacią normalną może być taka para w której mniejszy element występuje na początku, a funkcją normalizującą będzie funkcja sortująca dwa elementy. Ostatnim, a zarazem najprostszym przykładem niech będzie postać normalna elementów w arytmetyce modularnej. Tutaj z normalne będziemy uznawać elementy które są mogą być wynikiem operacji modulo, a sama operacja będzie naszą funkcją normalizującą.

4 Ograniczenia wynikające z użycia normalizacji w typach ilorazowych

Wykorzystanie funkcji normalizujących w definicji typów ilorazowych jest bardzo wygodne z względu na fakt, że może posłużyć nam do ograniczenia liczby reprezentantów danej klasy abstrakcji do tylko jednego, tego który jest w postaci normalnej. Jest to szczególnie użyteczne w COQ, gdyż ten język natywne nie wspiera typów ilorazowych. A utożsamianie elementów z sobą za pomocą aksjomatów z regały prowadzi do wprowadzenia sprzeczności do systemu. Takie podejście niesie jednak z sobą dojść poważne ograniczenie w postaci konieczności istnienia funkcji normalizującej dla danego typu ilorazowego, który chcemy zdefiniować. W teorii mnogości z aksjomatem wyboru, możemy zawsze wykorzystać ów aksjomat mówiący o tym że z każdej rodziny niepustych zbiorów możemy wybrać zbiór selektorów, w naszym przypadku zbiór elementów w postaci normalnej. Niestety nie jest on jednak obliczalny, co powoduje, że COQ nie możemy skorzystać z tego aksjomatu. Jedynie wyszczanie postaci normalnej dla typów z funkcją wyboru oraz rozstrzygalnej relacji równoważności możemy zautomatyzować.

```
Class choosable {A: Type} :=
  xchoose : forall P: A -> bool, (exists x: A, P x = true) -> A.
```

Definicja typu z funkcją wyboru w COQ

Taka funkcja pozwala na łatwe wyznaczenie postaci kanoniczej, gdyż każde element jest sam z sobą w relacji, znalezienie świadka jest trywialne, co pozwala nam Nie we wszystkich przypadkach jest to jednak możliwe. Najprostszym przykładem jest wspominana wcześniej para nieuporządkowana. Jeśli na elementach tej pary istnieje jakiś porządek zupełny, wtedy jak już mówiliśmy możemy ją posortować zapominając jednocześnie oryginalny porządek elementów. Jeśli natomiast nie będziemy mieć do dyspozycji takiego porządku to nie sposób wybrać które z ustawiań jest bardziej normalne $\{\square, \bigcirc\}$ a może $\{\bigcirc, \square\}$.

TU COŚ JESZCZE TRZEBA DOPISAĆ

5 Czym jest podtypowanie

6 Dualne? Co to oznacza?

W poprzedniej sekcji wspomnieliśmy, że podtypowanie jest pojęciem dualnym do ilorazów, tu wyjaśnimy co to oznacza. Dualizm jest pojęciem ze świata teorii kategorii, aby zrozumieć tą sekcję wymagana jest bardzo podstawowa wiedza z tego zakresu. Jeśli ktoś jej natomiast nie posiada może spokojnie ją pominąć gdyż stanowi bardziej ciekawostkę niż integralną część tej pracy. Mówiąc formalnie jeśli σ jest konstrukcją w teorii kategorii to konstrukcję dualną do niej σ^{op} definiujemy poprzez:

- zamianę pojęć elementu początkowego i końcowego nawzajem,
- zmianę kolejności składania morfinizmów.

Mając to już za sobą możemy powiedzieć prostym językiem, że dualność polega na zmianie kierunku strzałek w naszej konstrukcji. Znając to pojęcie możemy

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[d, dashed, "f"] \arrow[dr, "f_2"] & \\ A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & X & \\ A \arrow[ur, "f_1"] \arrow[r, "\eta_1"'] & A \oplus B \arrow[u, dashed, "f"'] & B \arrow[ul, "f_2"'] \arrow[l, "\eta_2"] \end{tikzcd}$$

Rysunek 3: Przykład dwóch dualnych konstrukcji. Po lewej stronie widzimy produkt, a po prawej co-produkt. Oba diagramy komutują.

zadać sobie pytanie gdzie w ilorazach i podtypowaniu występują jakieś strzałki, których kierunki mielibyśmy zamieniać? Mianowicie występują w odpowiednio pushoutach oraz pullbackach.

6.1 Czym jest pushout?

Na rysunku 4 możemy zobaczyć diagram definiujący pojęcie pushoutu. Widzimy, że powstaje on z pewnych dwóch morfinizmów $f : X \to A$ oraz $g : X \to B$. Ponieważ diagram ten komutuje wiemy, że $\eta_1 \circ f = \eta_2 \circ g$. Nasz pushout P jest najlepszym takim obiektem dla którego diagram zachowuje tą własność. Najlepszy definiujemy jako, dla każdego innego obiektu (na diagramie Q), dla którego zewnętrzna część (X, A, B, Q) diagramu komutuje, istnieje unikatowy (dokładnie jeden) morfizm u z P do Q. Warto zaznaczyć, że nie dla każdych

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "\eta_2"] \arrow[dr, bend left, "\zeta_2"] & \\
A \arrow[r, "\eta_1"'] \arrow[drr, bend right, "\zeta_1"'] & P \arrow[dr, dashed, "u"] & \\
 & & Q
\end{tikzcd}
$$

Rysunek 4: Diagram definiujący pushout P. Diagram komutuje.

dwóch morfinizmów $f : X \to A$ oraz $g : X \to B$ istnieje pushout, jeśli jednak istnieje to jest unikatowy z dokładnością do unikatowego izomorfizmu.

6.2 Przykład pushoutu w kategorii *Set*

W definicji pushoutu łatwo możemy zobaczyć morfizmy (strzałki), natomiast trudno odnaleźć ilorazy o których jest ta praca. Dużo łatwiej wyrobić swoją intuicję na bardziej przyziemnym przykładzie. Przenieśmy się w tym celu do kategorii *Set*. Oznacza to ni mniej ni więcej, tylko że nasze obiekty staną się zbiorami, a morfizmy (strzałki) funkcjami na zbiorach. Na rysunku 4 możemy zauważyć, że A, B oraz P tworzą coś na kształt co-produktu. Zatem warto zacząć definiowanie P właśnie od $A \oplus B$. Wszystko byłoby wszystko dobrze gdyby nie to, że nasz diagram powinien komutować, a więc dla każdego $x \in X$ wiemy, że $\eta_1(f(x)) = \eta_2(g(x))$. Aby to zapewnić musimy utożsamić z sobą $f(x) \sim g(x)$, dla każdego $x \in X$. Dzięki podzieleniu przez tą relację zapewnimy sobie komutowane wewnętrznej części diagramu (X, A, B, P). Nie możemy jednak wziąć dowolnej relacji $\sim$ spełniającej ten warunek, gdyż musimy zapewnić istnienie funkcji u do każdego innego zbioru dla którego ten diagram będzie komutował, oznacza to że musi istnieć surjekcja ze zbioru P do Q. Z uwagi na komutowanie funkcja u spełnia $u \circ \eta_1 = \zeta_1$ oraz $u \circ \eta_2 = \zeta_2$. Nasza relacja równoważności musi zatem być tą najdrobniejszą, aby spełnić ten warunek. Jeśli nasz pushout P jest równy $(A \oplus B)/\sim$ diagram 4 będzie komutował. Widzimy zatem, że pushout rzeczywiście ma jakiś związek z typami ilorazowymi, w których to X definiuje które elementy zostaną z sobą utożsamione.

6.3 Sklejanie dwóch odcinków w okrąg, czyli pushout

Rozważyliśmy bardziej przyziemny, lecz dojść abstrakcyjny przykład w kategorii *Set*. Skonstruujmy nieco bardziej wizualny przykład, czyli w naszym przypadku okrąg na rysunku 5. Upewnijmy się, iż rzeczywiście C jest topologicznym okręgiem. Wiemy, że aby diagram 5 komutował $\eta_1(0) = \eta_2(0)$ oraz $\eta_1(1) = \eta_2(1)$. Skleiliśmy zatem z sobą te dwa punkty. Ponieważ C musi być najlepszym obiek-

$$\begin{tikzcd}
\{0,1\} \arrow[r, "id"] \arrow[d, "id"'] & {[0,1]} \arrow[d, "\eta_2"] \\
{[0,1]} \arrow[r, "\eta_1"'] & C
\end{tikzcd}$$

Rysunek 5: Diagram definiujący okrąg C używając pushoutu

tem dla którego diagram komutuje, to żadne inne elementy nie mogą być z sobą sklejone, a więc dla każdego $x \in (0,1)$ wiemy, że $\eta_1(x) \neq \eta_2(x)$. Więc rzeczywiście stworzyliśmy okrąg, z dwóch odcinków oraz dwóch punktów sklejeń. Ta metoda uogólnia się do wyższych wymiarów. Mając dwie n-wymiarowe półkule, a następnie sklejając je w wzdłuż kuli $(n-1)$-wymiarowej otrzymamy kulę n-wymiarową.

6.4 Czym jest pullback?

Wiedząc jak wygląda pushout oraz wiedząc, że pullback jest pojęciem do niego dualnym każdy powinien być w stanie narysować diagram go definiujący. Mo-

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[dr, dashed, "u"] \arrow[drr, bend left, "\zeta_2"] \arrow[ddr, bend right, "\zeta_1"'] & & \\
& P \arrow[r, "2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & B \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & X
\end{tikzcd}$$

Rysunek 6: Diagram definiujący pullback P. Diagram komutuje.

żemy się mu zatem przyjrzeć na rysunku 6. Każdy pullback jest definiowany za pomocą dwóch morfizmów $f : A \to X$ oraz $g : B \to X$, które tworzą strukturę przypominającą co-produkt. Z komutacji wiemy, że $f \circ_1 = g \circ_2$. Podobnie jak w przypadku pushoutu, tu również aby P był pullbackiem to musi być najlepszym obiektem, dla którego diagram komutuje. Oznacza to że dla każdego innego (na diagramie Q), dla którego zewnętrza część diagramu (X, A, B, Q) komutuje to istnieje unikatowy morfizm u z Q do P, który oczywiście zachowuje własność komutacji diagramu. Ponownie nie dla każdych dwóch morfizmów $f : A \to X$ oraz $g : B \to X$ istnieje pushout, jeśli jednak istnieje to jest unikatowy z dokładnością do unikatowego izomorfizmu.

6.5 Przykład pullbacku w kategorii *Set*

Ponownie aby zobaczyć podtypowanie w zdefiniowanym powyżej pullbacku omawiane w tym rozdziale pod-typowanie musimy się przenieść do prostszego świata kategorii *Set*, gdzie żyją zbiory oraz funkcje na zbiorach. Jak widzimy na diagramie 6 struktura A, B oraz P przypomina coś na kształt produktu. Zacznijmy więc definiowanie P właśnie od $A \times B$. Wiemy jednak, że aby diagram komutował to dla każdego elementu $p \in P$ musi zachodzić własność $f(\pi_1(p)) = g(\pi_2(p))$. Ponieważ wstępnie $P = A \times B$ to dla każdej pary $(a, b) \in A \times B$ zachodzi $f(a) = g(b)$. Wystarczy teraz wyrzucić wszystkie elementy nie spełniające tego warunki otrzymując ostatecznie $P = \{(a, b) \in A \times B : f(a) = g(b)\}$. Upewnijmy się jeszcze iż rzeczywiście to jest najlepszy wybór. Weźmy dowolny inny zbiór Q wraz z funkcjami ζ_1 oraz ζ_2 dla którego zewnętrzny diagram 6 komutuje i zdefiniujmy morfizm u jako dla każdego $q \in Q$ mamy $u(q) = (\zeta_1(q), \zeta_2(q))$. Ponieważ funkcje π_1 i π_2 są zwykłymi projekcjami to własności $\zeta_1 = \pi_1 \circ u$ oraz $\zeta_2 = \pi_2 \circ u$ mamy za darmo, a cała reszta diagramu komutuje z względu na na komutowanie zewnętrznej części diagramu. Możemy na w tym miejscu zauważyć iż rzeczywiście pullback ma związek z podtypowaniem, poprzez wyrzucanie elementów które nie spełniają równości $f(a) = g(b)$.

6.6 Pary liczb o tej samej parzystości, czyli pullback

Mamy już za sobą definicję, oraz przykład w kategorii *Set*. Możemy teraz przejść do stworzenia prostego podtypu, w tym przykładzie par liczb całkowitych o tej samej parzystości. Na diagramie 5 widzimy definicję pullbacku P za pomocą

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & \mathbb{Z} \arrow[d, "f"] \\ \mathbb{Z} \arrow[r, "f"'] & \{0, 1\} \end{tikzcd}$$

Rysunek 7: Diagram definiujący pary liczb całkowitych o tej samej parzystości P używając pullbacku

morfizmu $f : \mathbb{Z} \to \{0, 1\}$, zdefiniowanej jako $f(n) = n \bmod 2$. Jak wiemy z poprzedniego przykładu $P = \{(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : n \bmod 2 = m \bmod 2\}$. A więc jest to zbiór to pary dwóch liczb całkowitych, które przystają do siebie mululo 2, czyli mówiąc inaczej mają tą samą parzystość.

6.7 Konkluzja

Jak więc zobaczyliśmy na poprzednich przykładach w teorii kategorii pushouty pozwalają nam na wyznaczenie obiektów, które utożsamiają z sobą pewne elementy używając pewnej relacji równoważności. Czyniąc je odpowiednikiem typów ilorazowych. Natomiast pullbacki pozwalają nam stworzyć obiekty z elementami które spełniają pewien zadany przez pullback warunek, czyniąc z nich odpowiedniki podtypów. Ponieważ te pojęcia są dualne co możemy zobaczyć na diagramach 4 oraz 6, to możemy mówić o tych pojęciach jako dualnych do siebie nawzajem.