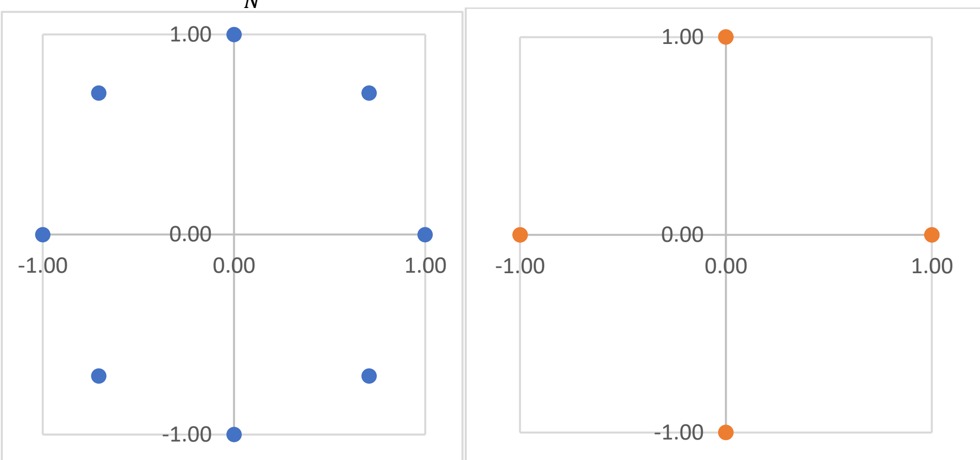
Dyskretna transformata Fouriera

Jest to funkcja nazwijmy ją $F: \{a_n\}_{n \leq N-1} \to \{b_k\}_{1 \leq k \leq N-1}$ gdzie ciąg a_n jest ciągiem próbek funkcji okresowej, na której będziemy dokonywać transformacji, a b_k to ciąg harmoniczny określający udział częstotliwości składowej w próbkowanym fragmencie. Wzór, który opisuje tą transformatę:

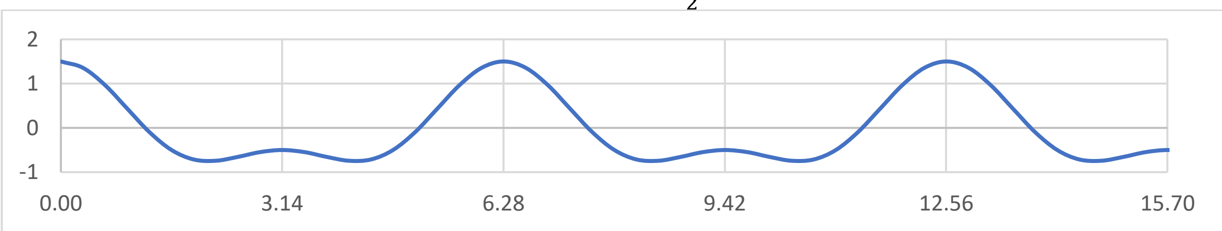
$$b_k = \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{-\frac{2i\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} a_n (\cos\frac{2\pi kn}{N} + i \sin\frac{2\pi kn}{N})$$

Wzór może i wygląda przerażająco na pierwszy rzut oka, lecz to tylko pozory. Skupię się na drugiej wersji wzoru. Jest to porostu rozpisanie $e^{i\varphi}$ na $\cos\varphi + i\sin\varphi$ wersja po lewej może i jest bardziej zwięzła, lecz moim zdanie dobrze maskuje ideę kryjącą się za tym wzorem. Dodatkowo, żeby łatwiej było zrozumieć sens tego wzoru popatrzmy na liczby zespolone jako na płaszczyznę $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Zacznijmy więc od $\cos\frac{2\pi kn}{N} + i\sin\frac{2\pi kn}{N}$ z algebry wiemy, że moduł tego wyrażenia jest zawsze 1. Wiemy, że tych punktów jest N oraz to, że będą one leżały w równych odstępach na okręgu. Położenie tych punktów zależy również od zmiennej k, która decyduje o kącie między punktem n i n+1. Jest on dokładnie równy $\frac{2\pi k}{N}$.



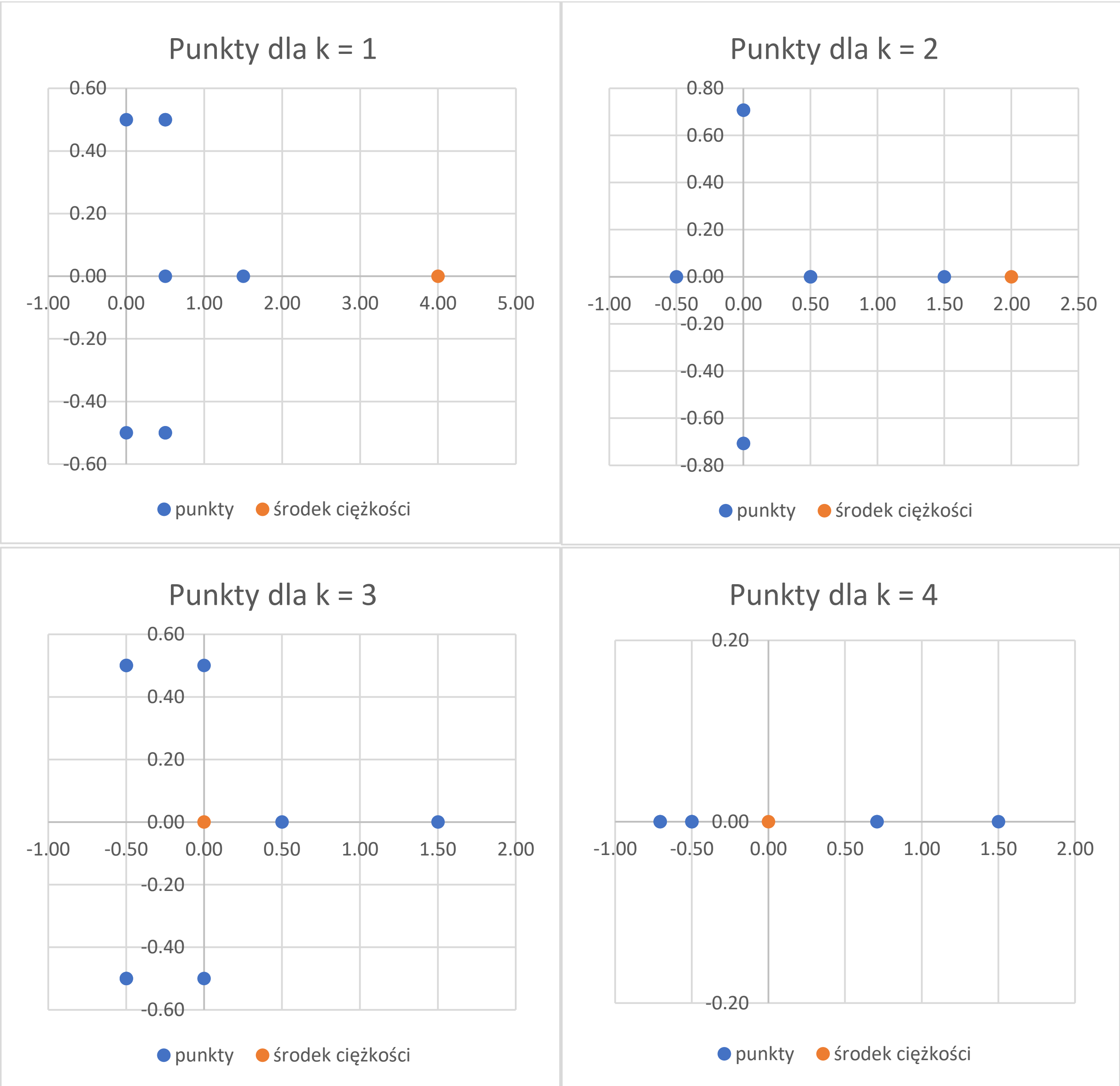
Wykres $\cos\frac{2\pi kn}{8} + i\sin\frac{2\pi kn}{8}$ *dla 0 ≤ n ≤ 7 i k = 1(po lewej) k = 2(po prawej)*

Przemnażając te punkty przez wartość próbki zmieniamy jej odległość od punktu (0, 0). Zapominając na chwilę, że mamy do czynienia z próbkami a nie z całą funkcją to niejako „zawijamy" naszą funkcję wokół początku układu współrzędnych. A zmienna k determinuje jaka jej część przypada na jeden pełny obrót(2π). Dla k=1 cały badany odcinek na jedne pełen obrót, dla k=2 na dwa obroty itd. Spójrzmy na funkcję $A(x) = \cos x + \frac{\cos 2x}{2}$



Wykres funkcji $A(x) = \cos x + \frac{\cos 2x}{2}$

Następnie weźmy 8 próbek dla $\left\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}, 2\pi\right\}$, a następnie przemnóżmy je przez punkty otrzymane z $\cos\frac{2\pi kn}{N} + i\sin\frac{2\pi kn}{N}$



Pozycje punktów po przemnożeniu przez wartości próbek funkcji $A(x) = \cos x + \frac{\cos 2x}{2}$ przez $\cos\frac{2\pi kn}{N} + i\sin\frac{2\pi kn}{N}$ wraz z środkiem ciężkości (sumą po wszystkich punktach)

Możemy dostrzec pewną anomalię, mianowicie środek ciężkości dla k=1 i k=2 jest daleki od początku układu współrzędnych, natomiast dla k=3 i k=4 jest on idealnie w punkcie (0, 0). Dominującym członem naszej funkcji $A(x)$ jest $\cos(x)$, ma on okres równy 2π. Tyle samo co fragment funkcji przypadający na jedno „nawinięcie” przy k = 1. Cosinus przyjmuje wartości ujemne w II i III ćwiartce wykresu więc punkty tam się znajdujące po przemnożeniu przez wartość ujemną znalazły się po drugiej stronie osi y. Dzięki temu punkt ciężkości również się przesunął. Dla k=2 ten efekt zanika, ponieważ wszystkie punkty są podwójne odpowiednio n=1 i n=5 mają te same współrzędne (tak samo n=2 i n=6 itd.), a ponieważ $\cos(x) = -\cos(x + \frac{\pi}{2})$, więc środek ciężkości powinien leżeć w punkcie (0, 0). Powodem tej drugiej anomalii jest człon $\frac{\cos 2x}{2}$ ma on bowiem okres π, czyli znów tyle samo co fragment funkcji przypadający na jedno „nawinięcie" tym razem dla k=2. A więc znów wszystkie punkty przesunął bardziej na prawo. Ponieważ funkcja $A(x)$ nie ma składowych o okresowości $\frac{2\pi}{3}$, lub $\frac{\pi}{2}$ dlatego odpowiednio środek ciężkości dla k=3 i k=4 jest w początku układu współrzędnych.

Reasumując cała idea transformaty Fouriera ta wyznaczanie właśnie tych środków ciężkości, które są zależne od okresów funkcji składowych. Każdy element ciągu b_k reprezentują udział funkcji o okresie $\frac{zakres\ próbkowania}{k}$.