§7.4　　欧拉图和哈密顿图

欧拉图和哈密顿图

目的：熟悉欧拉定理的运用、判欧拉图和Hamilton图的方法；

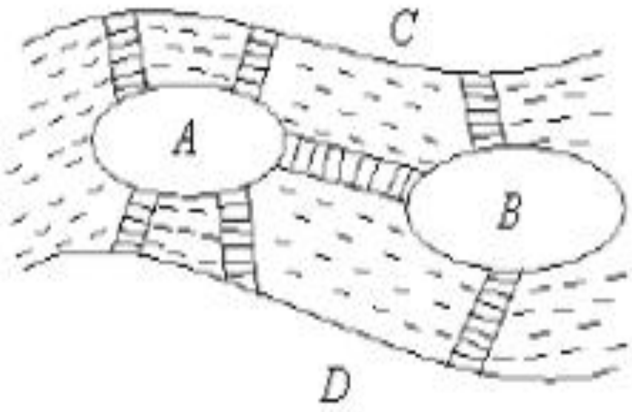
重点：判欧拉图、Hamilton图的算法；欧拉定理的运用；

问题：

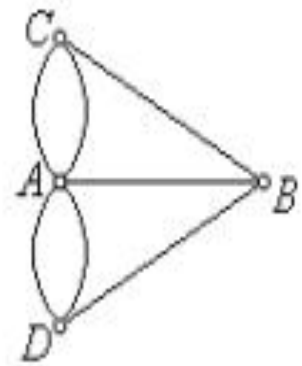
1.什么是欧拉图、Hamilton图？

2.判定条件是什么？

哥尼斯堡桥问题(Königsberg bridges problem)



(1)

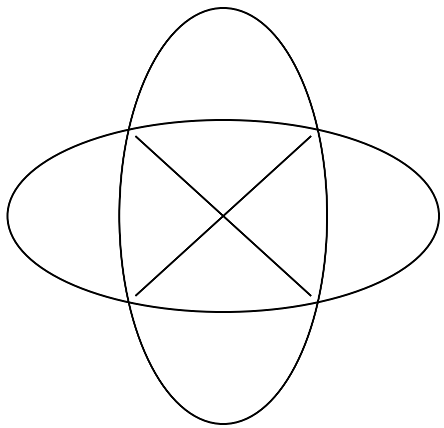


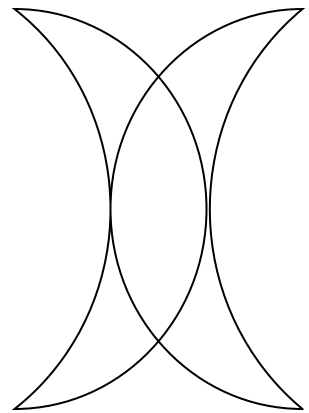
(2)

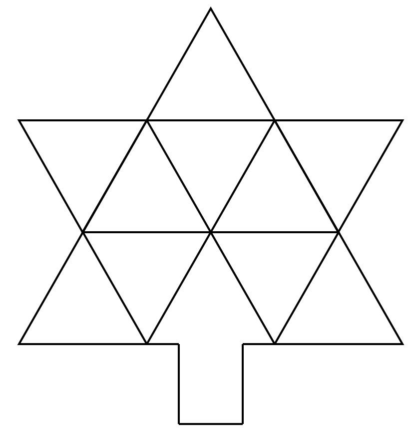
从四块陆地的任何一块出发，怎样通过每座桥恰巧一次，最终回到出发地点？（即找包含所有边的简单闭路径）

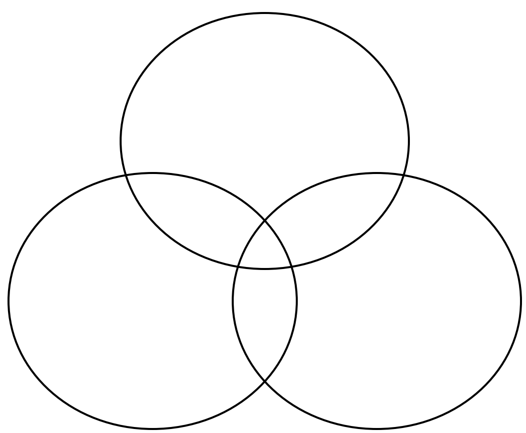
Euler 1736　　瑞士数学家　　证明不可能

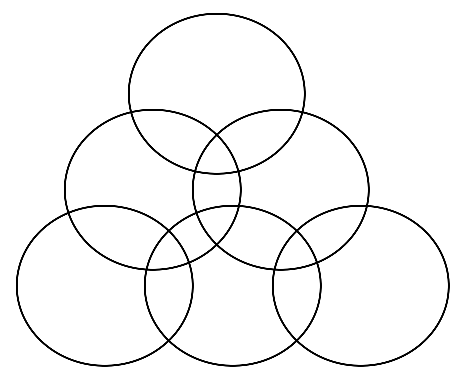
一笔画









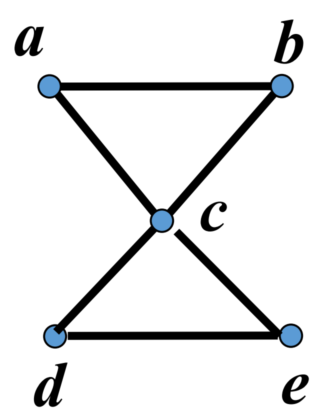


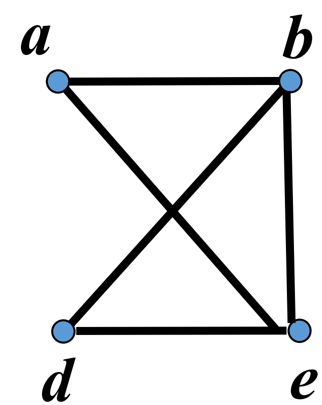
欧拉路径、欧拉闭路

定义7.4.1

(i) 图G中包含其所有边的简单开路径称为 G 的欧拉路径。

(ii)图G中包含其所有边的简单闭路径称为 G 的欧拉闭路（欧拉回路，Euler Tour/Circuit）。





欧拉闭路: a,c,d,e,c,b,a

欧拉路径: *b,a,e,d,b,e*

欧拉图、欧拉有向图

定义7.4.2

(i) 每个结点都是偶结点的无向图称为欧拉图。

(ii)每个结点的出度和入度都相等的有向图称为欧拉有向图。

其他教科书：具有欧拉闭路的无向图称为欧拉图。

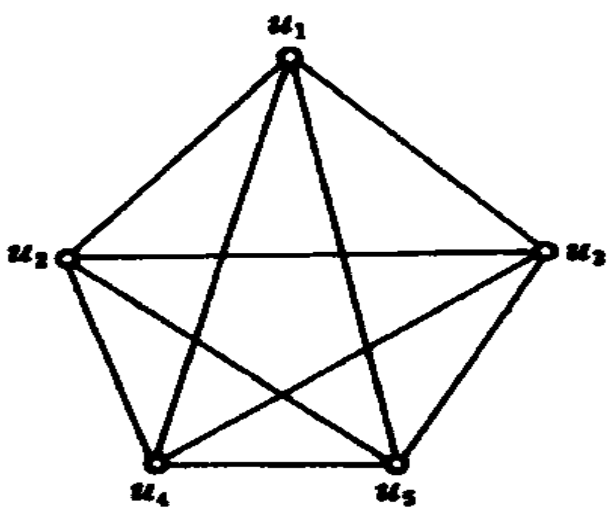


图 13.1 欧拉图

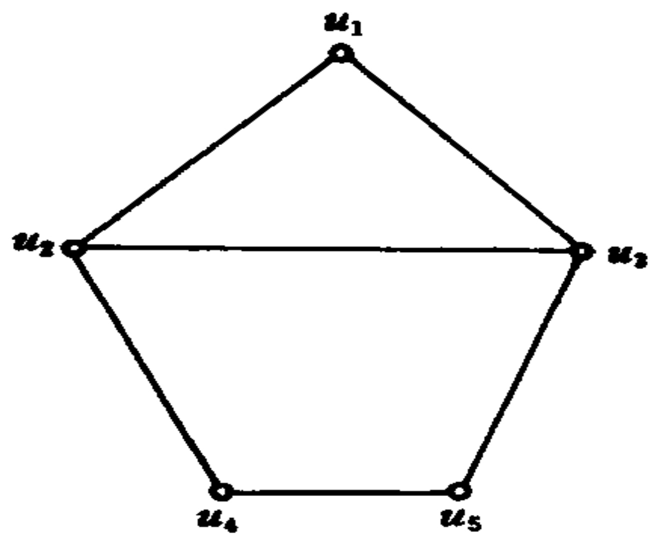


图 13.2 非欧拉图

欧拉定理

定理7.4.1 设 G 是连通无向图，
G是欧拉图(每个结点都是偶结点)当且仅当G有欧拉闭路。

证明：（充分性）

设G 是连通无向图，且有欧拉闭路 C，所以G的每个顶点u都至少在C上出现一次。

当C通过u进去和出来一次，就使u的度数增加2。

又因为C上的边不重复，所以如果C再次通过u，则必有另外两条边使u的次数增加2。

可见，G中每一顶点的度数必定是偶数。

定理7.4.1 设 G 是连通无向图，
G是欧拉图(每个结点都是偶结点)当且仅当G有欧拉闭路。

证明：（必要性） 对G的边的数目 n 用第二归纳法:

i) 若 $n = 0$， 则 G为平凡图，必要性成立。

ii) 令 $n \in I^+$， 设任意边数少于 n 的连通欧拉图均有欧拉闭路。

若G有 n 条边，由于G是连通欧拉图，因此任意结点的度大于1.

由定理7.3.9知，G有回路。设G有长度为m的回路 C。

定理7.3.9 图 G不是非循环图当且仅当 G 有子图 G′，使得 对于G′的任意结点v，皆有 $d_{G'}(v) > 1$。

定理7.4.1 设 G 是连通无向图，
G是欧拉图(每个结点都是偶结点)当且仅当G有欧拉闭路。

证明：（必要性） 对G的边的数目 n 用第二归纳法:

i) 若 $n = 0$， 则 G为平凡图，必要性成立。

ii) 令 $n \in I^+$，设任意边数少于 n 的连通欧拉图均有欧拉闭路。

若G有 n 条边，由于G是连通欧拉图，因此任意结点的度大于1.

由定理7.3.9知，G有回路。设G有长度为m的回路 C。

由定理7.3.6知，在C中存在闭路径$v_0e_1v_1\ldots v_{m-1}e_mv_0$，其中$v_0,v_1,\ldots,v_{m-1}$互不相同。

定理 7.3.6 设v是图G的任意结点，G是回路（或有向回路），当且仅当
(i)G的阶与边数相等，并且
(ii)在G中存在这样一条v到v的闭路径，使得除了v在该闭路径中出现 两次外，其余结点和每条边都在该闭路中恰出现 一次。

定理7.4.1 设 G 是连通无向图，G是欧拉图(每个结点都是偶结点)当且仅当G有欧拉闭路。

证明：（必要性） 对G的边的数目 n 用第二归纳法:

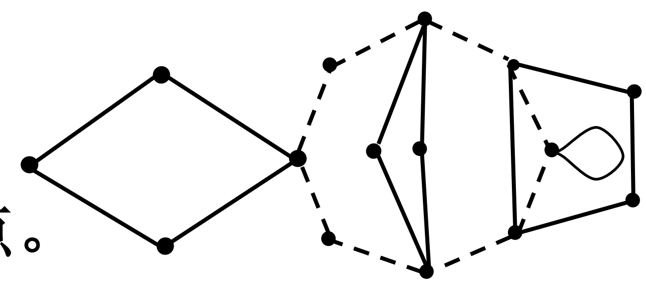
i) 若 $n = 0$， 则 G为平凡图，必要性成立。

ii) 令 $n \in I^+$， 设任意边数少于 n 的连通欧拉图均有欧拉闭路。

若G有 n 条边，由于G是连通欧拉图，因此任意结点的度大于1.

由定理7.3.9知，G有回路。设G有长度为m的回路 C。

由定理7.3.6知，在C中存在闭路径$v_0e_1v_1 \ldots v_{m-1}e_mv_0$，其中$v_0, v_1, \ldots, v_{m-1}$互不相同。



令$G' = G - \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$，设G'有k个分支$G_1, \ldots, G_k$。

由于G是连通的，G'的每个分支与 C 都有公共结点。

设G_i $(1 \le i \le k)$与 C 的一个公共结点为v_{nk}。假定$0 \le n_1 < n_2 < \ldots < n_k \le m-1$。

显然 G_i为边数小于n的连通欧拉图。

由归纳假设，G_i有一条从v_{ni}至v_{ni}的欧拉闭路径P_i

因此,$v_0e_1v_1 \ldots e_{n1}P_1e_{n1+1}v_{n1+1} \ldots e_{nk}P_ke_{nk}+1 \ldots v_{m-1}e_mv_0$是G的一条欧拉闭路。

定理7.4.2 设 $G=\langle V, E, \Psi\rangle$ 为连通无向图，$v_1, v_2 \in V$ 且 $v_1 \neq v_2$。则G 有一条从 v_1 至 v_2 的欧拉路径当且仅当 G 恰有两个奇结点 v_1 和 v_2。

证明：任取 $e \notin E$，并令 $\Psi' = \{<e, \{v_1, v_2\}>\}$，则

G 有一条从 v_1 至 v_2 的欧拉路径 iff

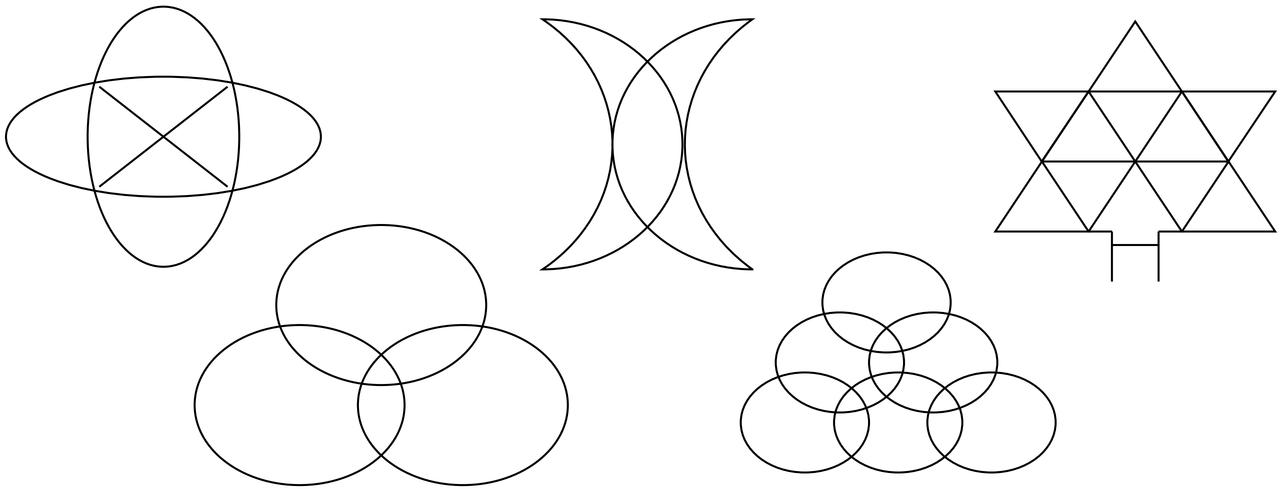
$G' = G + \{e\}_{\Psi'}$ 有一条欧拉闭路 iff

G' 是欧拉图 iff

G' 中每个结点都是偶结点 iff

G 中恰有两个奇结点 v_1 和 v_2

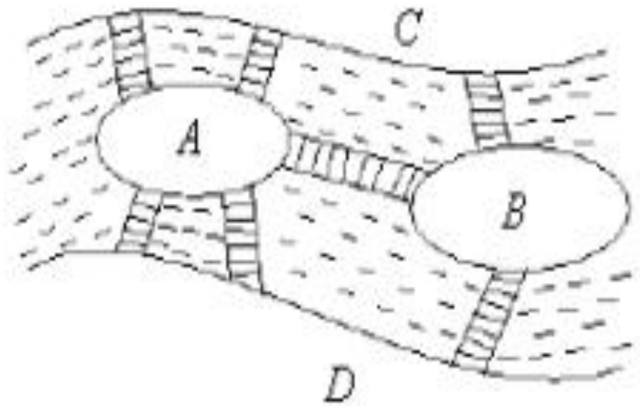
一笔画



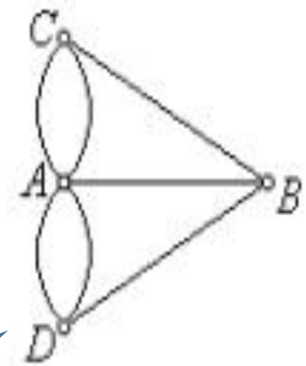
一张连通图能由一笔画出来的充要条件是：

- ✓ 每个交点处的线条数都是偶数；或 （欧拉闭路）
- ✓ 恰有两个交点处的线条数是奇数。 （欧拉路径）

哥尼斯堡桥问题 (Königsberg bridges problem)



(1)



(2)

既无欧拉闭路，
又无欧拉路径

从四块陆地的任何一块出发，怎样通过每座桥恰巧一次，最终回到出发地点？（即找包含所有边的简单闭路径）

Euler 1736　　瑞士数学家　　证明不可能

定理7.4.3 设 G 为弱连通的有向图。G 是欧拉有向图当且仅当 G有欧拉闭路。

每个结点的出度和入度都相等

证明过程与定理7.4.1类似。

定理7.4.4 设 G 为弱连通的有向图。v_1 和 v_2 为 G 的两个不同结点。

G有一条从 v_1 至 v_2 的欧拉路径 当且仅当

$d_G^+(v_1) = d_G^-(v_1)+1$， $d_G^+(v_2) = d_G^-(v_2)-1$

且对 G 的其它结点 v， 均有 $d_G^+(v) = d_G^-(v)$

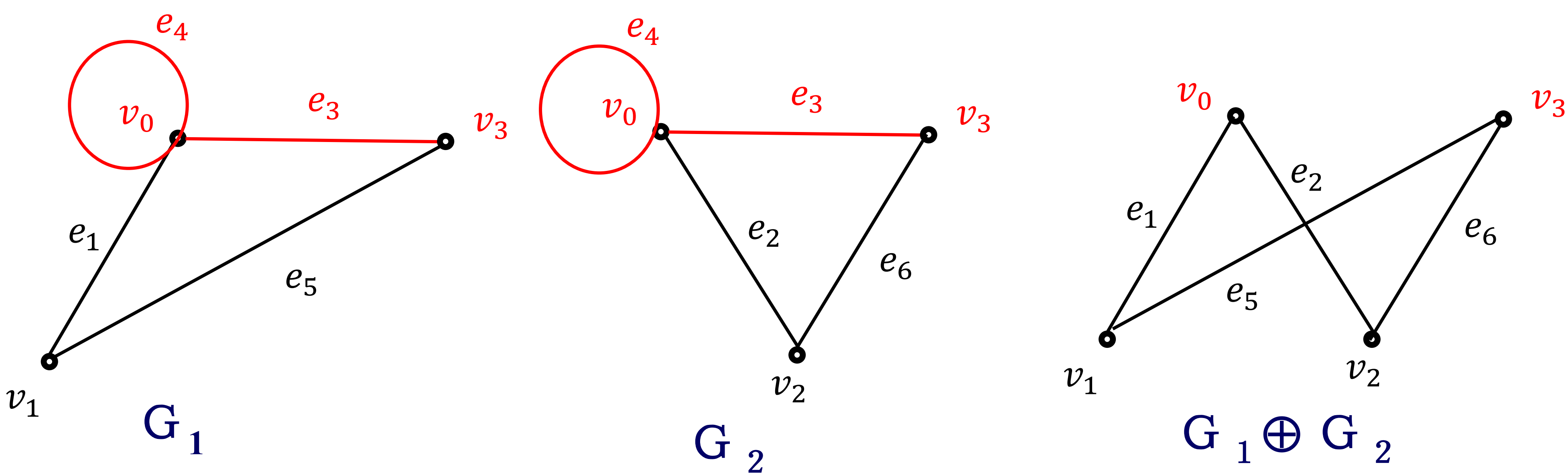
证明过程与定理7.4.2类似。

定理7.4.5 如果G_1和G_2是可运算的欧拉图，则$G_1 \oplus G_2$是欧拉图。

设图$G_1 = \langle V_1, E_1, \Psi_1 \rangle$和$G_2 = \langle V_2, E_2, \Psi_2 \rangle$可运算，

G_1和G_2的环和$G_1 \oplus G_2$：

以$V_1 \cup V_2$为结点集合，以$E_1 \oplus E_2$为边集合的$G_1 \cup G_2$的子图



定理7.4.5 如果G_1和G_2是可运算的欧拉图，则$G_1 \oplus G_2$是欧拉图。

证明：$G_1 = \langle V_1, E_1, \Psi_1 \rangle$，$G_2 = \langle V_2, E_2, \Psi_2 \rangle$，$G_1 \oplus G_2 = \langle V, E, \Psi \rangle$

设v是$G_1 \oplus G_2$的任意结点，则有以下三种可能：

i) $v \in V_1$ 但 $v \notin V_2$;

ii) $v \in V_2$ 但 $v \notin V_1$;

这两种情况下，与 v 相连的边在 $G_1 \oplus G_2$ 中不变，v 仍是 $G_1 \oplus G_2$ 的偶结点。

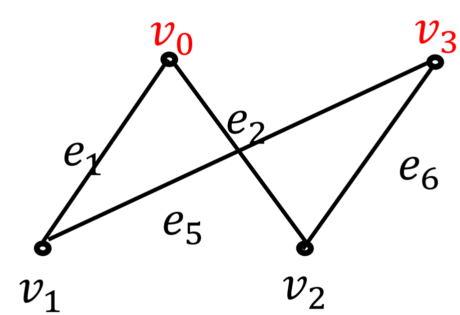
iii) $v \in V_1$ 且 $v \in V_2$;

设 G_1 和 G_2 有 k 条公共边与 j个公共自圈与 v 关联 (此时公共自圈也是公共边)，

则 $d_{G1\oplus G2}(v) = d_{G1}(v) + d_{G2}(v) - 2(k + j)$，

故 v 仍是 $G_1 \oplus G_2$ 的偶结点。

$\therefore$ $G_1 \oplus G_2$ 是欧拉图（图中所有结点均为偶结点）。



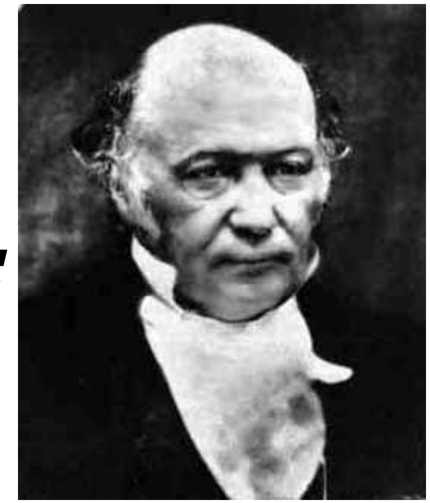
$G_1 \oplus G_2$

Fleury算法

- ◆输入:无向图G.
- ◆输出: 从v到w的欧拉路径/欧拉闭路.
- ◆算法:

1. 从任意一点开始, 沿着没有走过的边向前走
2. 在每个顶点, 优先选择剩下的非桥边, 除非只有唯一一条边
3. 直到得到欧拉回路或宣布失败

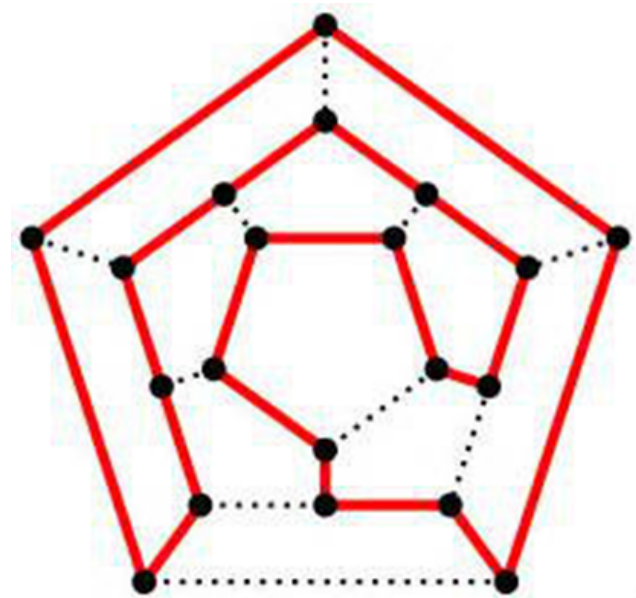
Willam Rowan Hamilton



- **Willam Rowan Hamilton(1805~1865):**
  - 爱尔兰神童(child prodigy)
  - 三一学院(Trinity College)
  - 1827年敦辛克天文台的皇家天文研究员和三一学院的天文学教授

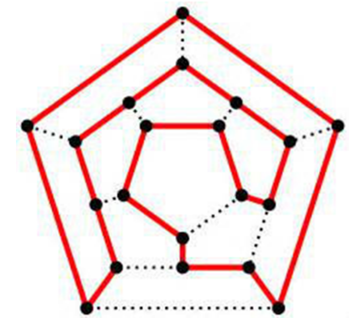
周游世界

- **William Rowan Hamilton, 1857, Icosian game:(哈密顿)** 十九世纪爱尔兰数学家



正十二面体，二十个顶点，三十条棱

周游世界的数学游戏



问：找一条从某城市出发，经过每个城市恰好一次，并且最后回到出发点的路线。

等价于：在图中找出一条包含所有结点的闭路，并且，除始点和终点重合外，这条闭路所含结点是互不相同的。

根据定理7.3.6，这条闭路的所有结点和边组成了一个回路。

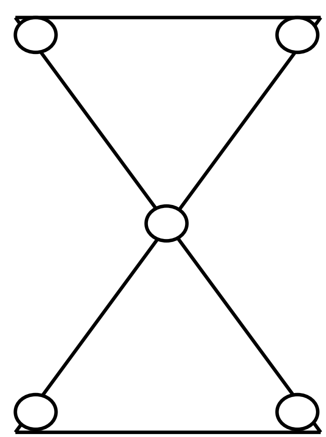
哈密顿回路

定义7.4.3

i) 如果回路 (有向回路) C 是图 G 的生成子图，则称 C 为 G 的哈密顿回路（哈密顿有向回路）。

ii)图G中包含它的所有结点的基本路径称为G的哈密顿路径。

iii) 有哈密顿回路（哈密顿有向回路）的图称为哈密顿图（哈密顿有向图）。



非Hamilton图

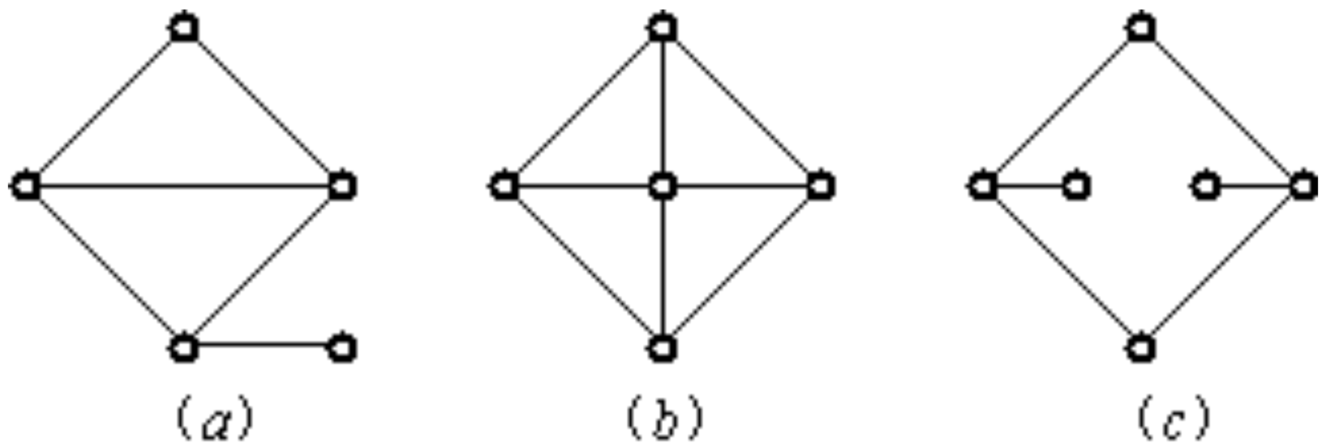


图10-21

（a）有哈密顿路但无哈密顿回路

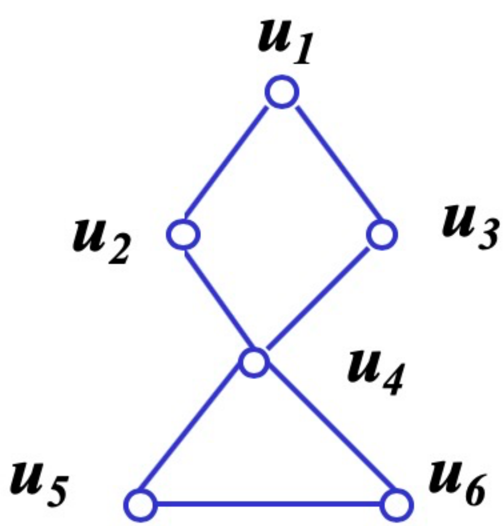
（b）既有哈密顿路又有哈密顿回路

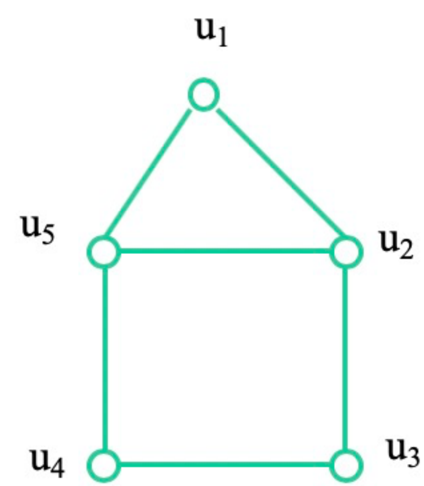
（c）既无哈密顿路也无哈密顿回路

问题：一个图是Hamilton图的充要条件？

哈密顿图

定义（哈密顿图）： 无向图G中穿过每个顶点一次且仅一次的圈，称为哈密顿圈，具有哈密顿圈的图称为哈密顿图.

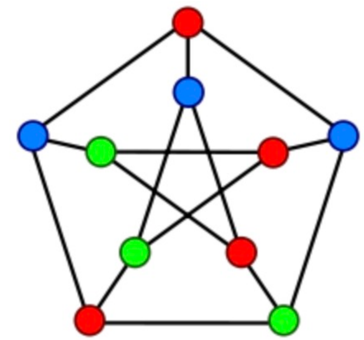




必要条件：哈密顿图子集

定理：设$G=\langle V,E,\Psi\rangle$是哈密顿图，则对V的任意非空真子集 V_1 有

$$W(G-V_1)\leq|V_1|$$



- 本定理的是哈密顿图的必要条件，不是充分条件
- 可以验证彼得松图满足定理中的条件，但不是哈密顿图。
- 逆否定理：若一个图不满足定理中的条件，它一定不是哈密顿图。

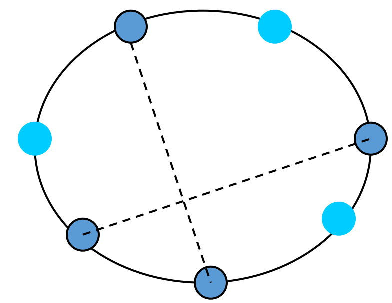
如果存在V的一个非空真子集 V_1 有

$$W(G-V_1) > |V_1|$$

则G不是哈密顿图

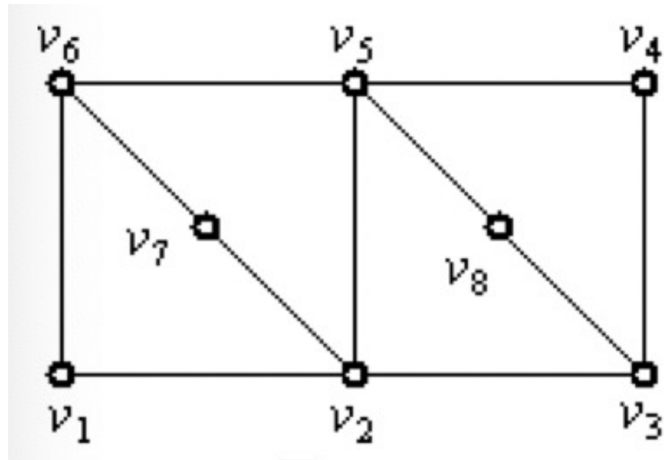
定理：设$G=\langle V, E, \Psi\rangle$是哈密顿图，则对 V 的任意非空真子集 V_1 有

$$W(G-V_1) \leq |V_1|$$



证明：若连通图$G=<V, E>$是哈密顿图，设C是G的哈密顿回路，则$C-V_1$是$G-V_1$的生成子图，所以$W(G-S) \leq W(C-S)$。易知当V_1中的结点互不邻接时，$C-V_1$的连通分支数达到最大值$|V_1|$，所以有$W(C-V_1) \leq |V_1|$。故$W(G-V_1) \leq |V_1|$。

例：说明图G不是哈密顿图。



G

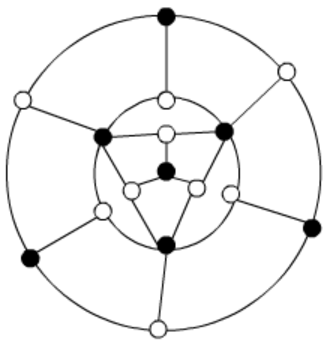
解：取V_1={v_2, v_6}，则G-V_1有3个连通分图，得

$$W(G-V_1) > |V_1|。$$

因此，图G 不是哈密顿图。

必要条件2：标点法

例：判断下图是否有哈密顿回路和哈密顿路径？



黑色点：7个
白色点：9个
因此，既无哈密顿回路又无哈密顿路径。

用黑白两种颜色给图中的点着色，使相邻点的颜色不同。

(1) 对图中任何回路C，任取C中一白点 v，在C中必存在v到v的闭路径P，此时除v外，C中其余结点在P中恰好出现 一次。

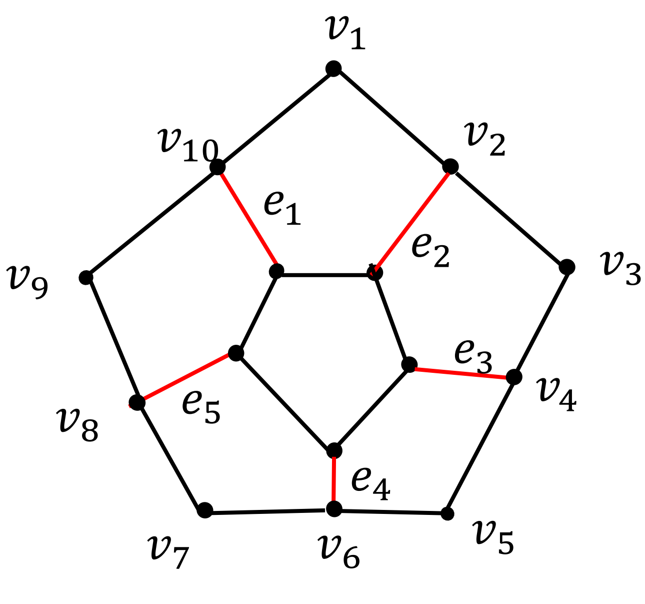
P所经过的结点颜色必定是：白，黑，白，黑，…, 白，黑，白。

由于起、终点两白点为同一点 v，故C中两色结点个数一定相等。

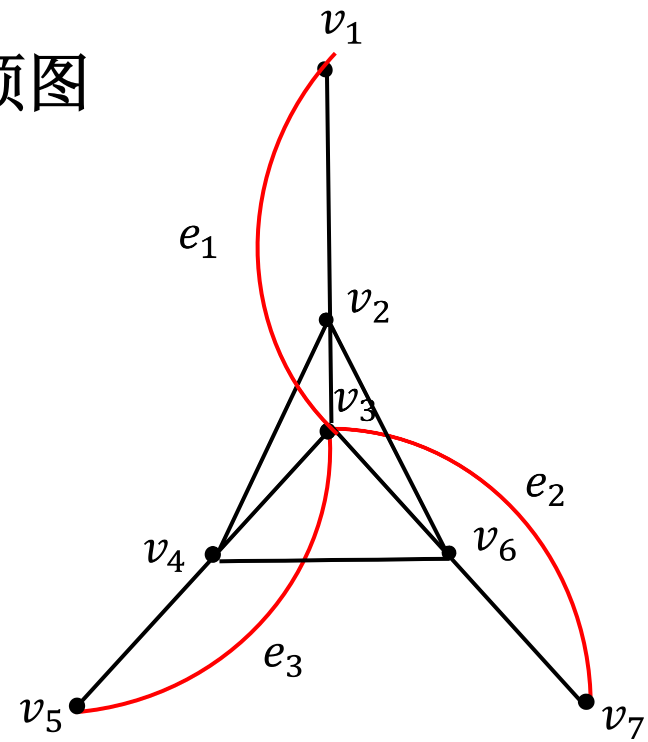
(2) 对图中任何基本路径 P, 假设P从白点出发 ，则P所经过的结点颜色必定是：白，黑，白，黑，…, 最后一点可能是白色也可能是黑色，故P中两色结点个数相等或差 1

必要条件3：去边法

例：判断下面两图G$_1$, G$_2$是否哈密顿图



$< G_1 >$



$< G_2 >$

思想：考虑哈密顿回路 C， 图中每个结点都恰有两条和它关联的边在C上。因此，可以通过对每个结点去掉“多余的边”得到C。

货郎担问题

设有n个城市，城市之间均有道路，道路的长度均大于或等于0，可能是∞（对应关联的城市之间无交通线）。一个旅行商从某个城市出发，要经过每个城市一次且仅一次，最后回到出发的城市，问他如何走才能使他走的路线最短？

- 这个问题可化归为如下的图论问题。

  设$G=<V,E,W>$，为一个n阶完全带权图K_n，各边的权非负，且有的边的权可能为∞。求G中一条最短的哈密顿回路，这就是货郎担问题的数学模型。

- 此问题中不同哈密顿回路的含义：

  将图中生成圈看成一个哈密顿回路，即不考虑始点(终点)的区别以及顺时针行遍与逆时针行遍的区别。