第四章自然数和基数

4.1 自然数及数学归纳法

4.2 基数

基　　　数

本节讨论度量和比较两个集合大小的方法。

重点掌握　等势，有穷、无穷集合，可数无穷集合，
　　　　　可数、不可数集合，无穷集合的性质，
　　　　　有穷集合、**N** 与 **R** 的基数，基数的比较。

对任意两个有限集合A和B，如何知道A和B中哪个含有更多的元素?

1. 计数法：先数出它们的元素个数，再加以比较。

2. 愚人比宝法：每次各取一，看哪个最后取完。

对无限集，计数法失效。

什么叫做数一个集合中元素个数？

在该集合与某个自然数 之间建立一个双射。

定义: 设 A 和 B 为两个集合，若存在从 A 到 B 的双射，则称 A 和 B 对等，或称 A 和 B 等势，记为 A ～ B。

例: 设集合E = {0, 2, 4, …}，即E是偶自然数集合。

令 $f: N \to E$ 为 f(n) = 2n, 其中 $n \in N$, 则 f 为双射,

故 $N \sim E$。

例: 设集合 $O = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$，即 O 是正奇数集合。

令 $g: N \to O$ 为 g(n) = 2n+1, 其中 $n \in N$, 则 g 为双射,

故 $N \sim O$。

例. 证明：Z～N

例. 证明：Z～N

N:	0	1	2	3	4	5	6	7	…
Z:	0	1	2	3	4	5	6	7	…
		-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	…

证明一:构造从Z到N的双射f:

$$f(x) = \begin{cases} 2n, & n \geq 0 \\ -2n-1, & n < 0 \end{cases}$$

证明二: 构造从N到Z的双射g:

$$g(n) = \begin{cases} n/2\text{，} & n\text{是偶数} \\ -(n+1)/2, & n\text{是奇数} \end{cases}$$

等势关系的性质：

对于任何集合 A , B , C ，均有：

(1) $A \sim A$;

(2) 若 $A \sim B$，则 $B \sim A$;

(3) 若 $A \sim B$，$B \sim C$，则 $A \sim C$。

即 等势关系有自反性 , 对称性和传递性，因此等势是集合族上的等价关系。

定义：设A是集合。如果存在$n \in N$，使$A \sim n$，则称A为有限集，否则称A为无限集。

- 如果存在有限集A和B之间的双射，则A和B的元素个数必相等

定理：任何有限集合都不能与它的真子集对等。

- 以上定理也叫抽屉原理(鸽巢原理)，可通俗表述为：“如果把 n+1 本书放进 n 个抽屉里，至少在一个抽屉里有两本或两本以上的书。”

例: (1) 任意 13 个人，至少有二人生日在同一个月；
(2) 任意 50 个人中，至少有5人生日同月。

- 任何与自身的真子集等势的集合均是无限集 。

定理：任意有穷集合 A 唯一地与一个自然数等势 。

证明：显然，任意有穷集合A都与一个自然数等势。

设对于某两个自然数 m 和 n , $A \sim m$ 且 $A \sim n$, 则 $m \sim n$。

根据自然数的 三岐性 , 则

m = n， 或者 其中一个是另一个的真子集。

因为 $m \sim n$, 所以 后一种可能 是不存在的 ,

因此 只能是 m = n 。

因此任意有穷集合 A 唯一地与一个自然数等势 。

定义（有限集的 基数）： 对于任意有限集 A，存在唯一的自然数 n，使得 $A \sim n$, 称 n 为 A 的基数 , 记为 #A 。

例：在 1, 2, ⋯ , 2n 中任取 n+1个互不相同的数中, 必存在两个数，其中一个数是另一个数的倍数。

证明：任何正整数 n 都可以表示成 $n = 2^m \cdot b$, 其中m=0, 1, 2, ⋯且 b为奇数。

设取出的 n+1 个数为 $k_1, k_2, \cdots, k_{n+1}$, 且

$$k_i = 2^{m_i} \cdot b_i\,,\quad i=1,\ldots, n+1$$

由于 $b_1, b_2, \cdots, b_{n+1}$是n+1个奇数，并且每个$b_i \le k_i$。而在 { 1, 2, ⋯ , 2n } 中只有 n 个不同的奇数，所以必存在 $i, j\ (1 \le i < j \le n+1)$ 使得 $b_i = b_j$ 。

不妨设 $k_i < k_j$，则有 $k_j / k_i = 2^{m_j - m_i}$ 为正整数，因此 k_j 是 k_i的倍数。

- 抽屉原理对于无限集并不成立。

希尔伯特旅馆

设想有一家旅馆，所有的房间都已客满。这时来了一位新客，想订个房间。

(1) 旅馆房间数有限时：“对不起”，旅馆主人说，“所有的房间都住满了。”

(2) 旅馆有无限间房间呢？

把1号房间的旅客移到2号房间，2号房间的旅客移到3号房间，3号房间的旅客移到4号房间等等，这样继续移下去。这样一来，新客就被安排住进了已被腾空的1号房间。

再设想一个有无限个房间的旅馆，各个房间也都住满了客人。这时又来了无穷多位要求订房间的客人。

把1号房间的旅客移到2号房间，2号房间的旅客移到4号房间，3号房间的旅客移到6号房间，如此等等，这样继续下去。现在，所有的单号房间都腾出来了，新来的无穷多位客人可以住进去，问题解决了！

记号：

对任意a, b ∈R, 令

$$(a, b) = \{x \mid x \in R且a < x < b\}$$

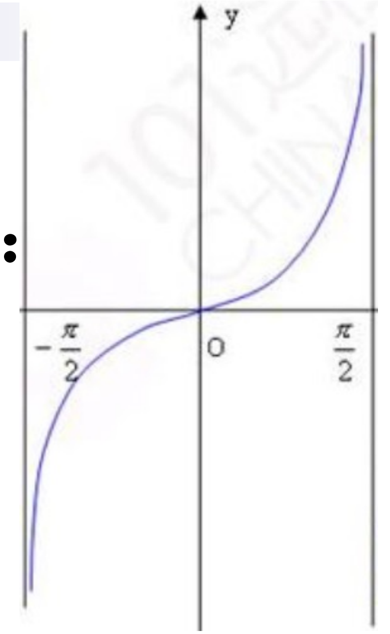
$$(a, b] = \{x \mid x \in R且a < x \le b\}$$

$$[a, b) = \{x \mid x \in R且a \le x < b\}$$

$$[a, b] = \{x \mid x \in R且a \le x \le b\}$$

例: 证明 (0, 1) 与实数集合 R 等势。

证: 可以建立 (0, 1) 到 R 的双射函数 f 如下:



$$f(x) = tg\,(\,(\,x - 1/2\,)\,\pi\,),$$

若$x \in (0, 1)$, 则$(x - 1/2)\pi \in (-\pi/2, \pi/2)$,

显然f是双射, 因此$(0, 1) \sim R$。

例: 如果 $a, b \in R$, $a < b$, 则 $(a, b) \sim R$。

证: 定义 $f: (a, b) \to R$ 如下:

$\forall x \in (a, b)$, 令 $f(x) = tg\left(\dfrac{x - \frac{a+b}{2}}{b-a} \cdot \pi\right)$,

若 $x \in (a, b)$ 时, 则 $\dfrac{x - \frac{a+b}{2}}{b-a} \cdot \pi \in (-\pi/2, \pi/2)$

可证 f 是双射（补充）, 所以 $(a, b) \sim R$。

例: 证明 (0, 1) 与[0,1]等势。

证: 如下定义f: (0, 1) → [0, 1]:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x=\frac{1}{2} \\ 1, & x=\frac{1}{3} \\ \frac{1}{i-2}, & x=\frac{1}{i},\quad i\in N, i\geq 4 \\ x, & \text{其他} \end{cases}$$

可证：f是内射，也是满射（补充）。

例: 证明

(1) (0, 1) 与(0,1]等势;

(2) (0,1) 与[0, 1)等势。

集合的基数

- 拓广集合中含有的元素个数这一概念，引进集合的基数的概念，表示为

$$\#(A),\ \mathrm{card}\,(A)\ 或\ |A|$$

已证：每个有限集都与唯一的自然数 对等。

- 设 $n \in N$，若 $A \sim n$，则令 $\#(A) = n$ 。

- 对于无限集的基数，我们规定特殊的记号：令

$$\#(N) = \aleph_0$$

$\aleph$ 是希伯来语的第一个字母，念作阿列夫。

基数相等和大小顺序

定义： 设 A 和 B 为二集合。

1) 如果 $A \sim B$，就称 A 和 B 的基数相等，记为 $\#(A) = \#(B)$。

2) 如果存在从 A 到 B 的内射，

就称 A 的基数小于等于 B 的基数，记为 $\#(A) \leq \#(B)$，

或称 B 的基数大于等于 A 的基数， 记为 $\#(B) \geq \#(A)$ 。

3) 如果 $\#(A) \leq \#(B)$ 且 $\#(A) \neq \#(B)$，

就称 A 的基数小于 B 的基数，记为 $\#(A) < \#(B)$，

或称 B 的基数大于 A 的基数，记为 $\#(B) > \#(A)$。

定理：设 A 和 B 为任意两个集合，则

$$\#(A) \le \#(B)，\text{或}\ \#(B) \le \#(A)，$$

二者之中至少有一个成立。

- 任何两个基数都可以比较大小

定理：设 A, B和C为任意集合，则

(1) $\#(A) = \#(A)$

(2) 若$\#(A) = \#(B)$, 则 $\#(B) = \#(A)$

(3) 若$\#(A) = \#(B)$且$\#(B) = \#(C)$, 则 $\#(A) = \#(C)$

- 基数的相等关系 “＝” 是等价关系

定理：设 A，B 和 C 为三集合，则有

(1) $\#(A) \le \#(A)$;

(2) 若 $\#(A) \le \#(B)$ 且 $\#(B) \le \#(A)$，则$\#(A) = \#(B)$;

(3) 若 $\#(A) \le \#(B)$ 且 $\#(B) \le \#(C)$，则$\#(A) \le \#(C)$。

其中，(2) 为著名的 伯恩斯坦（E. Bernstein） 定理。

(2) 等价于：如果存在两个内射$f: A \to B$与 $g: B \to A$, 则一定存在双射$h: A \to B$

- 基数的小于等于关系“≤”是偏序

定义（可数集、可列集）：任何与自然数集合N对等的集合称为 可数集或可列集。

- 可数集的基数， 用 $\aleph_0$ 表示， 读作 阿列夫零 。

定理. 以下三个条件等价：
(1) A 为无限集；
(2) A 有可数子集；
(3) A 有与它对等的真子集。

证明: (1)→(2) 设 A 是无穷集合, 如下顺序地从 A 的子集中取元素, 构造一个 无穷序列 $< a_0 , a_1 , a_2, \ldots >$:

从 A 中 选 a_0； 从 $A - \{ a_0 \}$ 中选 a_1;

从 $A - \{ a_0, a_1 \}$ 中选 a_2, ……,

从 $A - \{ a_0 , a_1 , \cdots , a_{n-1} \}$ 中选 a_n,…。

显然，对任意$n \in N$, 若 $\{ a_0 , a_1 , \cdots , a_n \} \subseteq A$, 则必有 $a_{n+1} \in A$ 且$a_{n+1} \notin \{ a_0 , a_1 , \cdots , a_n \}$，否则与A是无穷集合矛盾。

得$B= \{a_i \mid i \in N\}$为A的可数子集。

定理. 以下三个条件等价：

(1) A 为无限集；

(2) A 有可数子集；

(3) A 有与它对等的真子集。

证明: (2)→(3) 设 B是A的可数子集。因此B与N等势，

故有双射$f: N \to B$。

令$C=A-\{f(0)\}$，则C是A的真子集。

下面定义从A到C的双射$g: A \to C$:

对于$x \in B$, $g(x) = f((f^{-1}(x))^{+})$;

对于$x \in A-B$, $g(x)=x$。

显然g是双射，因此A与A的真子集C 等势。

(3)→(1) 可由抽屉原理得到。

定理：可数无穷集合的无穷子集必是可数无穷的。

证明：设 A 是可数无穷集合，S 是 A 的无穷子集，

由于$A \sim N$，故有双射 $f: N \to A$。

则A中的元素可以排列为：$f(0), f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots$

把不在 S 中的元素从这序列中去掉，由于 S 是无穷集合，所以余下的元素仍然是无穷的，用 $f(i_0), f(i_1), f(i_2), \ldots$ 表示。

定义函数 $g: N \to S$，使得 $g(n) = f(i_n)$，则 g 是双射函数，因此 S 是可数无穷的。