例：设 R 为 A 上的二元关系，试证以下条件成立：

(1) R 为自反的 iff $I_A \subseteq R$;

(2) R为反自反的 iff $I_A \cap R = \varnothing$;

(3) R 为对称的 iff $R = R^{-1}$;

(4) R 为反对称的 iff $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$;

(5) R 为传递的 iff $R \circ R \subseteq R$。

证: (1) R 为自反的 iff 对任意的$x \in A$, 有$\langle x, x \rangle \in R$

iff $I_A \subseteq R$。

例：设 R 为 A 上的二元关系，试证以下条件成立：

(1) R 为自反的 iff $I_A \subseteq R$;

(2) R为反自反的 iff $I_A \cap R = \varnothing$;

(3) R 为对称的 iff $R = R^{-1}$;

(4) R 为反对称的 iff $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$;

(5) R 为传递的 iff $R \circ R \subseteq R$ 。

证: (3) (必要性) 因为R 为对称，得对任意的$\langle x, y\rangle \in R$, 有$\langle y, x\rangle \in R$，即$\langle x, y\rangle \in R^{-1}$，因此$R \subseteq R^{-1}$。

对任意的$\langle x, y\rangle \in R^{-1}$,$\langle y, x\rangle \in R$。因为R是对称的，所以$\langle x, y\rangle \in R$，得$R^{-1} \subseteq R$。故$R = R^{-1}$ 。

(充分性) 对任意的$\langle x, y\rangle \in R$, 因为$R=R^{-1}$, 因此$\langle x, y\rangle \in R^{-1}$, 从而$\langle y, x\rangle \in R$，得R是对称的。

例：设 R 为 A 上的二元关系，试证以下条件成立：

(5) R 为传递的 iff $R \circ R \subseteq R$。

证: (5) (必要性) 对任意的$<x, z> \in R \circ R$, 一定存在$y \in A$, 使得$<x, y>, <y, z> \in R$。

由于R为传递的，必有 $<x, z> \in R$ 。因此$R \circ R \subseteq R$ 。

(充分性) 对任意的$<x, y>, <y, z> \in R$，有$<x, z> \in R \circ R$。

由于$R \circ R \subseteq R$，因此$<x, z> \in R$。所以 R 为传递的

关系合成的矩阵表示：

设 $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_m\}$， $B=\{b_1,b_2,\ldots,b_p\}$， $C=\{c_1,c_2,\ldots,c_n\}$，
R 是 A 到 B的关系， S 是 B 到 C的关系，
关系矩阵 $M_R=(r_{ij})_{m\times p}$ ， $M_S=(s_{ij})_{p\times n}$ 。

$<a_i, c_j>\in R\circ S$ 当且仅当 存在$b_k\in B$使得$<a_i, b_k>\in R$
且$<b_k, c_j>\in S$。

$t_{ij}=1$ 当且仅当 存在$k\in\{1, 2,\ldots, p\}$ 使得 $r_{ik}=s_{kj}=1$

$R\circ S$ 的关系矩阵 $M_{R\cdot S}=(t_{ij})_{m\times n}$ ， 其中

$$t_{ij} = (r_{i1}\wedge s_{1j}) \vee (r_{i2}\wedge s_{2j}) \vee\ldots\vee (r_{ip}\wedge s_{pj})$$

$$= \vee_{k=1}^{p} (rik\wedge skj)$$

例：设A＝{a, b, c, d}上的关系R＝{<a, b>, <b, a>, <b, c>, <c, d>}，求 R^2 的关系矩阵。

解：

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_R^2 = \begin{bmatrix} \boxed{0 \quad 1 \quad 0 \quad 0} \\ 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2 关系的运算——闭包

定义14 设 R是集合 A 上的关系。
关系R′ 称为 R的自反（对称、传递）闭包，
当且仅当 R′满足以下三个条件：
(1) R′是自反的(对称的、传递的)；
(2) $R \subseteq R'$ ；
(3) 对于A上的任何自反（对称、传递）关系R″，
如果 $R \subseteq R''$，则 $R' \subseteq R''$。
将 R的自反 (对称、传递)闭包分别记作 r(R), s(R), t(R)。

包含R的最小自反(对称、传递)关系。

定理：设R为集合A上的二元关系，则
(1) R是自反的 当且仅当 $r(R) = R$；
(2) R是对称的 当且仅当 $s(R) = R$；
(3) R是传递的 当且仅当 $t(R) = R$ 。

定理： 设 R 是集合A上的关系，则

(1) $r(R) = R \cup I_A$;

(2) $s(R) = R \cup R^{-1}$

(3) $t(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$

证: (1) 显然， $R \cup I_A$是自反的，且 $R \subseteq R \cup I_A$。

由自反闭包 r(R)的定义可知，$r(R) \subseteq R \cup I_A$。

另外, 由于 r(R) 是A上的自反关系，因此$I_A \subseteq r(R)$。

又因于 $R \subseteq r(R)$, 所以$R \cup I_A \subseteq r(R)$

故 $r(R) = R \cup I_A$ 。

定理： 设 R 是集合A上的关系，则

(1) $r(R) = R \cup I_A$;

(2) $s(R) = R \cup R^{-1}$

(3) $t(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$

证：(2)显然 $R \subseteq R \cup R^{-1}$。

因为 $(R \cup R^{-1})^{-1} = R^{-1} \cup (R^{-1})^{-1} = R^{-1} \cup R$

$= R \cup R^{-1}$,

因此，$R \cup R^{-1}$ 是对称的。

设 R' 是A上任意对称关系 且 $R \subseteq R'$，则 $R^{-1} \subseteq (R')^{-1}$。

因为R'是对称的，所以 $(R')^{-1} = R'$，

故 $R^{-1} \subseteq R'$，所以 $R \cup R^{-1} \subseteq R'$。

由对称闭包定义知，$s(R) = R \cup R^{-1}$

定理： 设 R 是集合A上的关系，则

(3) t(R) ＝ $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$

证明: (3) 首先证明t(R) $\subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$。

显然R $\subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$。下面证明$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$是传递的。

设任意<x, y> $\in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$，<y, z> $\in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$, 则存在正整数s 和 k，使得<x, y>$\in R^s$, <y, z>$\in R^k$， 得 <x, z>$\in R^{s+k}$,

因此有<x, z> $\in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ ，所以$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$是传递的。

由 t(R) 的最小性，得 t(R) $\subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。

定理： 设 R 是集合A上的关系，则

(3) $t(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$

证(续)：下面证明$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq t(R)$。只需证明，对任意的$n \in I_+$, $R^n \in t(R)$。对n进行数学归纳：

(a) 当n=1时， 显然$R \in t(R)$成立；

(b) 假设当n>1时， $R^n \in t(R)$；

(c) 下面证明$R^{n+1} \in t(R)$。

设$<x, y> \in R^{n+1}$,由于$R^{n+1} = R^n \circ R$，则存在$z \in A$,使得$<x, z> \in R^n$,$<z, y> \in R$。

根据归纳假设和归纳基础,有$<x, z> \in t(R)$和$<z, y> \in t(R)$，由此可得 $<x, y> \in t(R)$, 则 $R^{n+1} \subseteq t(R)$。

由于对于所有的n≥1，均有 $R^n \subseteq t(R)$。因此 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq t(R)$ 。

定理：设 R 是集合A上的关系，A有n个元素，则

$$t(R) = \bigcup_{i=1}^{n} R^i$$

证：若n=0, 则$t(R)=\phi=\bigcup_{i=1}^{0} R^i$

当n>0时，只需证：对于任意 $k \geq 0$，$R^{n+k} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R^i$.

对k进行数学归纳：

k=0时，$R^{n+k}=R^n \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R^i$;

假设$m \in I_+$, 当 $k<m$时，成立，即$R^{n+k} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R^i$;

定理： 设 R 是集合A上的关系， A有n个元素， 则

$$t(R) = \bigcup_{i=1}^{n} R^i$$

证(续)：下面证明$R^{n+m} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R^i$.

任取$<x, y> \in R^{n+m}$， 则存在$u_0, u_1, \ldots, u_{n+m} \in A$,使得$u_0=x$, $u_{n+m}=y$, 且$<u_i, u_{i+1}> \in R$, $i=0, \ldots, n+m-1$。

由于$n+m>n$, 且A中只有n个元素，因此$u_1, \ldots, u_{n+m}$中一定有两个数相等。设$u_i=u_j$ $(1\le i<j\le n+m)$, 则有

$<u_0, u_1>, \ldots, <u_{i-1}, u_i>, <u_j, u_{j+1}>, \ldots, <u_{n+m-1}, u_{n+m}> \in R$,

即$<u_0, u_{n+1}>=<x, y> \in R^{n+m-(j-i)}$,

由归纳知$R^{n+m-(j-i)} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R^i$，从而$<x, y> \in \bigcup_{i=1}^{n} R^i$,

得$R^{n+m} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R^i$

例：设 集合$A=\{a, b, c\}$上的关系

$$R=\{<a, b>,<b, c>,<c, c>\},$$

试求 $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$。

解：$r(R)=R\cup I_A=\{<a,b>,<b,c>,<c,c>,<a,a>,<b,b>\}$

$S(R)=R\cup R^{-1}=\{<a,b>,<b,c>,<c,c>,<b,a>,<c,b>\}$

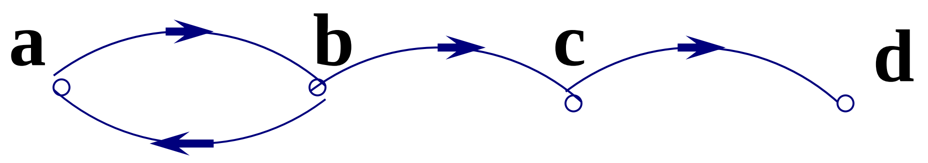
$R^2=\{<a, c>,<b, c>,<c, c>\}$

$R^3=\{<a, c>,<b, c>,<c, c>\}=R^2$

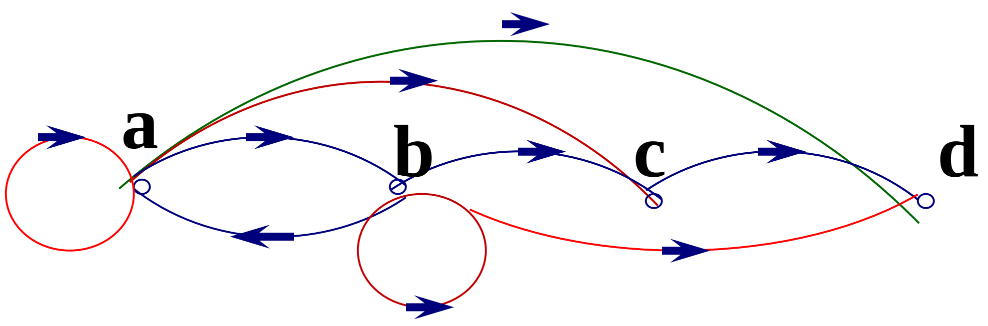
$t(R)=R\cup R^2=\{<a, b>,<b, c>,<c, c>, <a, c>\}$

例：设集合A＝{a, b, c, d}, A上的关系

R＝{<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>}，试画出t(R)关系图。



R关系图



t(R)关系图

定理： 设二元关系 $R_1, R_2 \subseteq A^2$ 且 $R_1 \subseteq R_2$，则

(1) $r(R_1) \subseteq r(R_2)$;

(2) $s(R_1) \subseteq s(R_2)$;

(3) $t(R_1) \subseteq t(R_2)$。

证: (1) 由 $r(R_2)$的定义知， $r(R_2)$是自反的，

且$R_2 \subseteq r(R_2)$。

由于 $R_1 \subseteq R_2$，得$R_1 \subseteq r(R_2)$。在为$r(R_1)$是包含R_1的最小自反关系，因此 $r(R_1) \subseteq r(R_2)$。

(2) , (3) 同理可证。

例：设R_1和R_2都是集合A上的二元关系，试证明：

(1) $r(R_1 \cup R_2)=r(R_1) \cup r(R_2)$

(2) $s(R_1 \cup R_2)=s(R_1) \cup s(R_2)$

(3) $t(R_1) \cup t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$

证：(1) 由于R_1和R_2都是集合A上的二元关系，知$R_1 \cup R_2$也是A上的二元关系。

$$r(R_1 \cup R_2) = (R_1 \cup R_2) \cup I_A = (R_1 \cup I_A) \cup (R_2 \cup I_A)$$
$$= r(R_1) \cup r(R_2)$$

例：设R_1和R_2都是集合A上的二元关系，试证明：

(2) $s(R_1 \cup R_2)=s(R_1) \cup s(R_2)$

证: (2) $s(R_1 \cup R_2) = (R_1 \cup R_2) \cup (R_1 \cup R_2)^{-1}$

$= (R_1 \cup R_2) \cup (R_1^{-1} \cup R_2^{-1})$

$= (R_1 \cup R_1^{-1}) \cup (R_2 \cup R_2^{-1})$

$= s(R_1) \cup s(R_2)$

例：设R_1和R_2都是集合A上的二元关系，试证明：

(3) $t(R_1) \cup t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$

证: (3) 由于$R_1 \subseteq R_1 \cup R_2$, $R_2 \subseteq R_1 \cup R_2$,

因此$t(R_1) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$ 且$t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$，得

$t(R_1) \cup t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$。

$t(R_1 \cup R_2) \subseteq t(R_1) \cup t(R_2)$?

反例： 令$A=\{1, 2, 3, 4\}$, $R_1=\{<1, 2>, <2, 3>\}$,$R_2=\{<3, 4>\}$,

得$t(R_1)=\{<1,2>, <2,3>, <1, 3>\}$, $t(R_2)=\{<3, 4>\}$,

$t(R_1) \cup t(R_2) =\{<1, 2>, <2, 3>, <3, 4>, <1, 3>\}$,

$t(R_1 \cup R_2)= \{<1, 2>, <2, 3>, <3, 4>\}$

而$t(R_1 \cup R_2) =\{<1, 2>, <2, 3>, <3, 4>, <1, 3>, <2, 4>,<1, 4>\}$

定理：设二元关系 $R \subseteq A^2$，则

(1) 若 R 是自反的，则 s (R) 和 t (R) 也是自反的；

(2) 若 R 是对称的，则 r (R) 和 t (R) 也是对称的；

(3) 若 R 是传递的，则 r (R) 也是传递的

证: (1) 由于R是自反的，因此$I_A \subseteq R$。

又由于$R \subseteq s(R)$, $R \subseteq t(R)$，得$I_A \subseteq s(R)$, $I_A \subseteq t(R)$。

所以s(R) 和 t(R) 也是自反的。

定理：设二元关系 $R \subseteq A^2$，则

(1) 若 R 是自反的，则 s (R) 和 t (R) 也是自反的；

(2) 若 R 是对称的，则 r (R) 和 t (R) 也是对称的；

(3) 若 R 是传递的，则 r (R) 也是传递的

证: 因为R是对称的，因此$R=R^{-1}$。

则$r(R)^{-1} = (R \cup I_A)^{-1} = R^{-1} \cup I_A^{-1} = R \cup I_A = r(R)$。

因此 r (R)是对称的。

$(t(R))^{-1} = (\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n)^{-1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (R^n)^{-1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(R^{-1}\right)^n$

$= \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = t(R)$。因此t(R)是对称的。

定理：设二元关系 $R \subseteq A^2$，则

(1) 若 R 是自反的，则 s (R) 和 t (R) 也是自反的；

(2) 若 R 是对称的，则 r (R) 和 t (R) 也是对称的；

(3) 若 R 是传递的，则 r (R) 也是传递的

证: (3) 由R是传递的，得$R \circ R \subseteq R$。

$r(R) \circ r(R) = (R \cup I_A) \circ (R \cup I_A) = (R \circ R) \cup R \cup I_A$

$\subseteq R \cup I_A = r(R)$。

因此r (R) 也是传递的。

给出一个实例, 使得s (R)不是传递的

R={<1, 2>, <2,3>, <1,3>}

S(R)={<1, 2>, <2, 3>, <1, 3>, <2, 1>, <3, 2>, <3, 1>} 不传递

定理：设二元关系 $R \subseteq A^2$，则

(1) $rs(R) = sr(R)$;

(2) $rt(R) = tr(R)$;

(3) $st(R) \subseteq ts(R)$。

证: (1) 由于 $R \subseteq s(R)$, 得$r(R) \subseteq rs(R)$。由于$s(R)$是对称的，因此$rs(R)$也是对称的。

由对称闭包的定义知 $sr(R) \subseteq rs(R)$。

由于$R \subseteq r(R)$，得$s(R) \subseteq sr(R)$。由于$r(R)$是自反的，因此$sr(R)$也是自反的。

由自反闭包的定义知，$rs(R) \subseteq sr(R)$。

定理：设二元关系 $R \subseteq A^2$，则

(1) $rs(R) = sr(R)$;

(2) $rt(R) = tr(R)$;

(3) $st(R) \subseteq ts(R)$。

证: (2) 由于 $R \subseteq t(R)$, 得$r(R) \subseteq rt(R)$。由于$t(R)$是传递的，因此$rt(R)$也是传递的。由传递闭包的定义知

$tr(R) \subseteq rt(R)$。

由于$R \subseteq r(R)$, 得$t(R) \subseteq tr(R)$。由于$r(R)$是自反的，因此$tr(R)$也是自反的。由自反闭包的定义知

$rt(R) \subseteq tr(R)$。

故 $rt(R) = tr(R)$。

定理：设二元关系 $R \subseteq A^2$，则
(1) rs (R) = sr (R)；
(2) rt (R) = tr (R)；
(3) st (R) $\subseteq$ ts (R)。

证：(3) 由于R $\subseteq$s(R)，得t(R) $\subseteq$ts(R)。由于s(R)是对称的，因此ts(R)也是对称的。由对称闭包的定义知

st(R) $\subseteq$ts(R)。

给出一个实例 使得st (R) $\neq$ ts (R)

R={<1, 2>},
s(R)={<1, 2>, <2, 1>}, ts(R)={<1, 2>, <2, 1>, <1, 1>, <2, 2>}
t(R)={<1, 2>}, st(R)={<1, 2>, <2, 1>}.