第一章 集合的基本概念及其运算

第一章 集合的基本概念及其运算

1 集合与元素

2 集合间的相等和包含关系

3 幂集

4 集合的运算

5 有穷集的计数原理

6 有序偶和笛卡儿乘积

1. 集合与元素

目标要求:

- 会用抽象法表示集合
- 掌握集合的抽象表示和枚举表示的互相转换
- 掌握数学归纳法表示集合

重点难点:

- 集合的抽象表示
- 抽象原则
- 集合的数学归纳法表示

概念的分类：

- 原始概念、不定义概念：无法用其他已经存在的概念来描述的概念。
- 派生概念：可以由其他已经存在的概念来给出定义的概念。

例：欧氏几何学中，“点”和“线”是原始概念

点是没有部分的。
点是没有大小而只有位置，不可分割的图形
线只有长度而没有宽度。

平等四边形、正方形是派生概念

平行四边形：在同一个二维平面内，由两组平行线段组成的闭合图形

正方形：四条边都相等、四个角都是直角的四边形

集合是人们能够明确区分的一些对象(客体)构成的一个整体。（康托）原始概念

例: (1) 全体中国人的集合

(2) 26个英文字母构成的集合

(3) 方程$x^2+x+1=0$的实根的集合

(4) 2019年北航选修《离散数学2》的学生的集合

一个集合可作为另一个集合的元素

(5) a, b和所有整数的集合构成的集合

(6) ~~班上高个子学生够成的集合~~

不能明确区分

(7) 班上1.75以上的高个子学生够成的集合

集合是人们能够**明确区分**的一些对象(客体)构成的一个整体。　（康托）

集合通常用大写英文字母表示：

- N:自然数集合(含0)
- R:实数集合，R^+：正实数集合，R^-：负实数集合
- Q:有理数集合
- I(或Z):整数集合，I^+：正实数集合
  I^-：负整数集合

元素：集合里含有的对象称为该集合的元素

通常用小写英文字母 表示元素：a, b, c,…

集合是人们能够明确区分的一些对象(客体)构成的一个整体；集合里含有的对象称为该集合的元素

设a为任意一个对象，A为任意一个集合。在a和A之间有且仅有以下两种情况之一出现：

- a是A 的元素，记为 $a\in A$，称为 a 属于A或A包含a
- a不是A中的元素，记为$a\notin A$，读作a不属于A或A不包含a。

当$a_1\in A$， $a_2\in A, \ldots, a_n\in A$时，常简写为$a_1,a_2,\ldots, a_n \in A$

几类集合：

单元集：含有一个元素的集合 ，如：{a }, {∅ }

n元集：含有n个元素的集合

有穷集： 由有穷个元素构成的集合

无穷集： 由无穷个元素构成的集合，如：N，R

集合的表示方法:

(1) 列举法（枚举法）

(2) 部分列举法

(3) 抽象法（命题法）

(4) 归纳定义法

列举法：依照任意一种次序，不重复地列举出集合的全部元素，并用一对花括号括起来

例: (1) 小于5的所有正整数：｛1，2，3，4｝

(2) 20以内的所有素数：｛2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19｝

部分列举法：

- 依照任意一种次序，不重复地列举出集合的一部分元素，这部分元素要能 充分体现出该集合的元素在上述次序下的构造规律

例：$N=\{0, 1, 2, \ldots\}$

$Z=\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

不超过100的整数集合$=\{1, 2, \ldots, 100\}$

- 仅适合于元素的构造规律比较明显、简单的集合
- 可以是无限集，也可以是元素个数较多的有限集

抽象法:

- 给出一个与x有关的谓词（命题）P(x)，使得$x \in A$当且仅当P(x)为真
- 称A为“使P(x)为真的x的集合”，记为

$$A = \{x \mid P(x)\}$$

例:

$$S_1 = \{x \mid x\text{是中国的省}\}$$

$$S_2 = \{x \mid x=2k+1 \text{ 且 } k \in N\}$$

$$= \{x \mid x\text{是正奇数}\}$$

$$S_3 = \{n \mid n \in N\text{且}0 \le n < m\},\ m \in N$$

一个集合的抽象描述形式不唯一

定义1(抽象原则): 任给一个性质 P，就确定了一个集合A , A 的元素恰好是具有性质P的对象，即:

$$A = \{x \mid P(x)\}$$

也就是说 $\forall x\,(P(x) \leftrightarrow x \in A)$

例: $A = \{x \mid x$是英文元音字母$\}$

由抽象原则可知，对任意x:

$$x \in A \Leftrightarrow x\text{是英文元音字母}$$

其中，$\Leftrightarrow$ 表示当且仅当。

抽象原则的限制:

(1) 谓词 P(x) 要明确清楚

反例：$A = \{x \mid p(x)\}$，p(x)：x是花园里美丽的花朵}

“美丽” 是一模糊概念。因此A不能够成集合。

(2) 不能取 P(x) 为 $x \notin x$ 这样的谓词来定义集合，否则就会产生悖论 (罗素悖论，B.Russell)。

设 $T = \{x \mid x \notin x\}$，问：T属于T吗？

T不是一个集合

$\forall x: \quad x \in T \Leftrightarrow x \notin x,$

把 T 代入 x 得，

$T \in T \quad \Leftrightarrow \quad T \notin T$，矛盾!

理发师悖论：

在某个城市中有一位理发师，他的广告词写到：“本人的理发技艺十分高超，誉满全城。我将为本城所有不给自己刮脸的人刮脸，我也只给这些人刮脸。我对各位表示热诚欢迎！”

来找他刮脸的人络绎不绝，自然都是那些不给自己刮脸的人。

可是，有一天，这位理发师从镜子里看见自己的胡子长了，他本能地抓起了剃刀，你们看他能不能给他自己刮脸呢？

如果他不给自己刮脸，他就属于“不给自己刮脸的人”，他就要给自己刮脸，而如果他给自己刮脸呢？他又属于“给自己刮脸的人”，他就不该给自己刮脸。

理发师悖论与罗素悖论是等价的：

- ✓ 把每个人看成一个集合：这个人刮脸的对象作为元素
- ✓ 理发师宣称，他的元素，都是城里不属于自身的那些集合，并且城里所有不属于自身的集合都属于他。
- ✓ 问题：他是否属于他自己？

理发师悖论：理发师恰给所有不给自己理发的人理发。

说谎者悖论：我说的这句话是假话。

康托悖论：$\{S \mid S$ 是集合 $\}$

悖论产生的原因：自引用、自作用

集合的公理化：

为了解决集合论中的悖论问题，人们从二十世纪初就开始了公理化集合论的研究。并提出了集合论的多种公理系统。

归纳定义法：

(1) 基本项：已知某些元素属于A（保证A不空）

非空集 $S_0 \subseteq A$；（规定A的一些生成元）

(2) 归纳项： 一组规则，从 A 中元素出发，依据这些规则所获得的元素仍然是 A 中的元素；

(3) 极小化：

(a) A中的每个元素都是通过有限次使用(1) 或 (2) 获得的。

(b) 如果集合 $S \subseteq A$ 也满足 (1)和 (2)，则 $S = A$ 。

- 极小化保证： A 是同时满足 (1) 和(2) 的最小集合
- 第(3)步常常省略不写

例：非负偶数集合

$$E = \{x \mid \exists y\ (y \in N \wedge x = 2y)\}$$

E 的归纳定义如下：

(1). $0 \in E$

(2). 若 $n \in E$，则 $(n+2) \in E$

例：求下列归纳定义的集合 P

(1). $3 \in P$

(2). 若 $x, y \in P$, 则 $(x + y) \in P$

P是由3的倍数的正整数组成：

$$P=\{x \mid \exists y\ (y \in I^{+} \wedge x = 3y)\}$$

思考题

用归纳定义法给出下列集合：

1. 允许有前0的十进制无符号整数的集合;
2. 不允许有前0的十进制无符号整数的集合;
3. 不允许有前0的二进制无符号偶数的集合;
4. 不允许有前0的被3整除的二进制无符号整数的集合
5. 不允许有前0的被 5 整除的二进制无符号整数的集合

1. 允许有前0的十进制无符号整数的集合

解法 一:

1) 令 $S_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \subseteq A_1$;

2) 若 $a \in S_0$ 且 $\alpha \in A_1$ ，则 $a\alpha \in A_1$;

解法 二:

1) 令 $S_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \subseteq A_1$;

2) 若 $\alpha, \beta \in A_1$，则 $\alpha\beta \in A_1$;

2. 不允许有前0的十进制无符号整数的集合;

漏掉很多元素：中间含有0的整数，如302

解法 一:

1) 令 $S_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \subseteq A_2$;

2) 若 $a \in S_0 - \{0\}$ 且 $\alpha \in A_2$ ，则 $a\alpha \in A_2$;

解法 二:

1) 令 $S_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \subseteq A_2$;

2) 若 $\alpha, \beta \in A_2$ 且 $\alpha \neq 0$ ，则 $\alpha\beta \in A_2$;

3. 不允许有前0的二进制无符号偶数的集合;

				0	0
			1	0	2
		1	0	0	4
		1	1	0	6
	1	0	0	0	8
	1	0	1	0	10
	1	1	0	0	12
1	0	0	0	0	14

解:

1) 令 $S_0 = \{0\} \subseteq A_3$;

2) 若 $\alpha \in A_3$, 则 $1\alpha \in A_3$;

3) 若 $\alpha, \beta \in A_3$ 且 $\alpha \neq 0$, 则 $\alpha\beta \in A_3$;

4. 不允许有前0的被3整除的二进制无符号整数的集合。

分析：

(1)不允许有前0的二进制无符号整数可分为3类：

a) N_0: 能被3整除

b) N_1: 除以3余数为1

c) N_2: 除以3余数为2

(2) 设α是一个没有前0的二进制无符号整数，

a) α0是α的2倍

b) α1是α的2倍加1

$\alpha \in N_0 \rightarrow \alpha 0 \in N_0$ $\alpha 1 \in N_1$	$\alpha \in N_1 \rightarrow \alpha 0 \in N_2$ $\alpha 1 \in N_0$	$\alpha \in N_2 \rightarrow \alpha 0 \in N_1$ $\alpha 1 \in N_2$

4. 不允许有前0的被3整除的二进制无符号整数的集合。

$\alpha \in N_0 \rightarrow \alpha 0 \in N_0$ $\alpha 1 \in N_1$	$\alpha \in N_1 \rightarrow \alpha 0 \in N_2$ $\alpha 1 \in N_0$	$\alpha \in N_2 \rightarrow \alpha 0 \in N_1$ $\alpha 1 \in N_2$

1)基本项： $\{0\} \subseteq N_0$，$\{1\} \subseteq N_1$，$\varnothing \subseteq N_2$;

2）归纳项：

若 $\alpha \in N_0$ 且 $\alpha \neq 0$，则 $\alpha 0 \in N_0$，$\alpha 1 \in N_1$；

若 $\alpha \in N_1$，则 $\alpha 0 \in N_2$，$\alpha 1 \in N_0$；

若 $\alpha \in N_2$，则 $\alpha 0 \in N_1$，$\alpha 1 \in N_2$。

其中，N_0 就是我们所要的集合。

集合的联立归纳定义法

四种表示方法的比较

表 示 方 式	适 用 对 象	特 点
列举法	有限集	直观
部分列举法	有限集或无限集	直观
命题法	任意集	易表达
归纳法	非空集	易计算机实现