作业 11

习题 1.3

1 f). 证明： 设相邻整数为 n, n+1, n+2, 其中，n 为任意整数，下面证明 $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ 能被 9 整除。考虑以下三种情况：

(1) 当 $n\geq 0$ 时，关于 n 用第一归纳法。

(a) 当 $n = 0$ 时，$9 \mid 9$，所以 $n = 0$ 时命题为真；

(b) 对任意的 $k \geq 0$，假设当 $n = k$ 时命题为真，即

$$9 \mid k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3$$

因为 $(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 =$

$k^3+3k^2+3k+1+(k+1)^3+3(k+1)^2+3(k+1)+1+(k+2)^3+3(k+2)^2+3(k+2)+1 =$

$k3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 + 3k^2+3k+1+3(k+1)^2+3(k+1)+1+3(k+2)^2+3(k+2)+1$

$=k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 + 9k^2 + 27k +27=k^3+(k+1)^3+(k+2)^3+9(k^2 + 3k +3)$

由于 $9 \mid k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3$ 且 $9 \mid 9(k^2 + 3k +3)$

所以，$9 \mid (k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3$，即当 $n = k+1$ 时命题也为真。

由(a),(b)可知，对于任意 $n \geq 0$ 均有

$$9 \mid n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 \text{。}$$

(2) 当 $n= -1$ 时，$n^3+(n+1)^3+(n+2)^3= -1+0+1=0$，有 $9|0$。

(3) 当 $n\leq-2$ 时，$n^3+(n+1)^3+(n+2)^3 = - ((-n)^3+(-(n+1))^3+ (-(n+2))^3)$ 。

由(1)知，$9|(-n)^3+(-(n+1))^3+ (-(n+2))^3$，因此 $9|\ n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$。

综上所述，任意三个相邻整数的立方和能被 9 整除。

2. 证明：关于 n 进行第一归纳法，证明若 $n\in N$，则 $n\leq a_n$。

(1) 当 $n=0$ 时，由于最小自然数为 0，因此 $0\leq a_0$。

(2) 假设当 $n=k\geq 0$ 时，命题成立，即 $k\leq a_k$。

当 $n=k+1$ 时，$a_n = a_{k+1}>a_k$，得 $a_{k+1}\geq a_k+1$。

(a) 当 $a_k >k$ 时，由习题 8 结论知（证明见课件），$a_k+1>k+1$。

得 $a_{k+1}\geq a_k+1>k+1$。

(b) 当 $a_k=k$ 时，有 $a_{k+1}\geq a_k+1=k+1$。

综上所述，得若 $n\in N$，则 $n\leq a_n$。

4. 证明：设 $n = (m+1)\ q + r$，$m \geq r > 0$。

分析：首先，甲扳倒 r 根，然后每当乙扳倒 x（$1\leq x \leq m$）根，因为 $1\leq (m+1) - x \leq m$，所以此时甲可扳倒$(m+1) - x$ 根，故甲总能获胜。

证明：对 q（即 n 除以 m+1 的商）用第一归纳法。

(1) 当 $q = 0$ 时，因为 $n = r$ 且 $m \geq r \geq 1$，所以甲可一次将 r 根全部扳倒，则甲获胜。

(2) 对任意的 $k \geq 0$，假设当 $q = k$ 时命题为真，

则当 $q = k+1$ 时，即存在 r 使得 $n = (m+1)\ (q+1) + r$，$m \geq r > 0$，此时甲可扳倒 r 根，然后乙只能扳倒 x（$1\leq x \leq m$）根，此时剩下 $n' = (m+1)q+(m+1)-q$ 根， 因为 $1\leq (m+1) - x \leq m$，则根据归纳假设可知甲总能获胜。

即当 $q = k+1$ 时命题也为真。

由(1),(2)可知，对于任意 $q \geq 0$ 均有甲总能获胜。