第六章　　关系

§6.1　关系及其性质

重点：

1. 关系的表示
2. 关系的性质

一、关系的定义

定义6.1 (关系)：

X 到Y的关系：若 R 是 $X \times Y$的子集 (即 $R \subseteq X \times Y$),

则称 R 为 X 到 Y 的二元关系，简称为关系。

当 $X = Y$时，称 R 为 X 上 的二元关系。

若 $<x, y> \in R$, 则可表示成 $x\ R\ y$, 读做 “x与y有关系R”

若 $<x, y> \notin R$, 则记作 $x\ \overline{R}\ y$, 读作 “ x与y不存在关系R”

例1：$A = \{1, 2, 3\}$， $B = \{a, b\}$

$R = \{<1, a>, <1, b>, <2, b>\}$ 是 A 到 B的关系。

例2：实数集合上的大于关系 “ > ” 表示如下：

$> \; = \{ < x, y > \mid x, y$ 是实数 且 $x > y \}$

空关系： 设 X 是集合，$X \times X$的子集 $\varnothing$，称为 X上的空关系。

X上的全域关系：$U_X = \{ <x_i, x_j> \mid x_i, x_j \in X \} = X \times X$

X上的恒等关系：$I_X = \{ < x, x > \mid x \in X \}$

例 3： 设 $X = \{0, 1, 2\}$

$U_X = \{ <0, 0>, <0, 1>, <0, 2>, <1, 0>, <1, 1>, <1, 2>,$
$<2, 0>, <2, 1>, <2, 2> \}$

$I_X = \{ <0, 0>, <1, 1>, <2, 2> \}$

定义6.2 设 $R \subseteq X \times Y$,

$dom(R) = \{ x \in X \mid \exists y \in Y: <x, y> \in R \}$, 为R 的定义域

$ran(R) = \{ y \in Y \mid \exists x \in X: <x, y> \in R \}$, 为R 的值域

显然， $dom(R) \subseteq X$， $ran(R) \subseteq Y$

二、关系的表示（仅讨论从有限集到有限集的二元关系）

1. 关系矩阵：设 $X = \{ x_1, \cdots\cdots, x_m \}$，$Y = \{ y_1, \cdots\cdots, y_n \}$，

R 是 X 到 Y 的二元关系。

R 的关系矩阵，记作 $M_R = (r_{ij})_{m \times n}$， 其中

$$r_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{若 } x_i \overline{R} y_j \\ 1 & \text{若 } x_i R y_j \end{cases}$$

例 6.3 设 $X = \{ x_1 , x_2 \}$，$Y =\{ y_1 , y_2 , y_3\}$，

R是 X 到 Y 的关系。

$$R = \{<x_1 , y_1> , <x_2 , y_1> , <x_2 , y_2> , <x_2 , y_3>\}$$

R的关系矩阵是：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. 关系图：设 X 是有穷集合，则 X 上的二元关系 R 的关系图可构造如下：

X 集合中的元素称为顶点，并用点或小圈表示，对于元素 x_i 和 x_j，分别标以顶点 x_i 和 x_j。如果 $x_i R x_j$，即 $<x_i, x_j> \in R$，就用一条带箭头的弧线把 x_i 和 x_j 连接起来，箭头的方向由 x_i 指向 x_j；如果 $x_i R x_j$ 且 $x_j R x_i$，则在 x_i 和 x_j 之间画上两条方向相反的弧线；

如果 $x_i R x_i$，则画一条从 x_i 出发又返回顶点 x_i 的弧线，称这一条弧线为自环．当 R 中所有有序偶处理完毕后，便得到关系 R 的图．

例 6.4：设 X = { 1 , 2 , 3 , 4 }，R 是集合 X 上的关系,

R = { <1, 2> , <2, 2> , <2, 4> , <3, 2> , <3, 4> , <4, 1> , <4, 3> }

则 R的关系图如下:

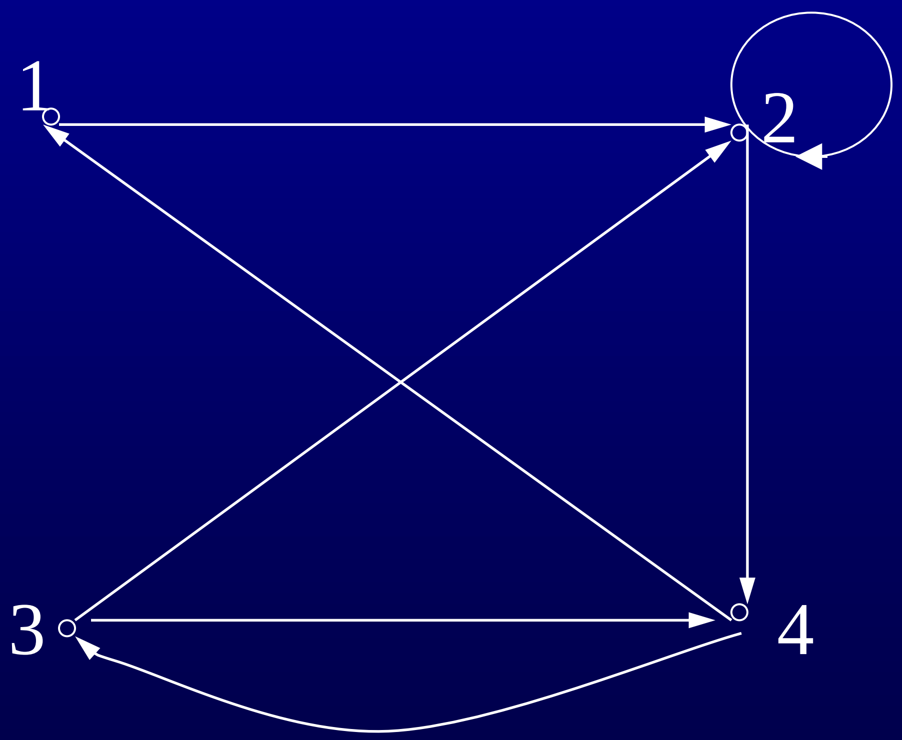


图6.4 集合 X 上的关系图

三、关系的性质 (自反、反自反、对称、反对称、传递)

定义6.3 设 R是非空集合X上的二元关系

R是**自反的** $\Leftrightarrow \forall x\,(x \in X \rightarrow \langle x, x\rangle \in R)$

在R的关系图中，每个顶点均有自环；

在R的关系矩阵中，主对角线的元素均为 1。

R是 **反自反的** $\Leftrightarrow \forall x\,(x \in X \rightarrow \langle x, x\rangle \notin R)$

在R的关系图中，每个顶点均无自环；

在R的关系矩阵中，主对角线的元素均为 0。

R 是对称的 $\Leftrightarrow$

$$\forall x \forall y (x \in X \wedge y \in X \wedge \langle x , y \rangle \in R \rightarrow \langle y , x \rangle \in R)$$

在 R 的关系图中，任意两个不同顶点之间：或者 无弧

或者 有两条方向相反的弧；

R 的关系矩阵是 对称矩阵.

R 是反对称的 $\Leftrightarrow$

$$\forall x \forall y (x \in X \wedge y \in X \wedge \langle x , y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R \rightarrow x = y)$$

$$\Leftrightarrow \forall x \forall y (x \in X \wedge y \in X \wedge \langle x , y \rangle \in R \wedge x \neq y \rightarrow \langle y , x \rangle \notin R)$$

在 R 的关系图中，任意不同顶点之间至多有一条弧；

在 R 的矩阵中， 若 $i \neq j$ 且 $r_{ij} = 1$， 则 $r_{ji} = 0$。

R是传递的$\Leftrightarrow$

$\forall x \forall y \forall z\, (x\in X \land y\in X \land z\in X \land \langle x, y\rangle\in R \land \langle y, z\rangle\in R \rightarrow \langle x, z\rangle\in R)$

在 R 的关系图中，若顶点 x 到顶点 y有一条路径，则必有从 x 到 y 的一条弧（处处有捷径）。

从关系矩阵中不易看出传递关系的特征。

例 (1) X上的恒等关系是自反、对称、反对称、传递的

(2) X上的"<"是反自反、反对称、传递的

思考题

(1) 非空集 X 上的空关系 $\varnothing$？？？

(2) 空集 $\varnothing$上的空关系 $\varnothing$？？？

指出下列二元关系所具有的性质:

例：设 $X = \{1, 2, 3\}$， 集合 X 上的二元关系

- $R_1 = \{ \langle 1, 2\rangle , \langle 2, 3\rangle , \langle 3, 1\rangle \}$
- $R_2 = \{ \langle 1, 2\rangle , \langle 1, 3\rangle \}$
- $R_3 = \{ \langle 1, 2\rangle , \langle 1, 3\rangle , \langle 2, 3\rangle , \langle 3, 2\rangle \}$
- $R_4 = \{ \langle 1, 2\rangle , \langle 2, 1\rangle , \langle 1, 3\rangle , \langle 3, 1\rangle ,$

  $\langle 1, 1\rangle , \langle 2, 2\rangle , \langle 3, 3\rangle \}$

关系图和关系矩阵中五种性质的表述

R	自反	反自反	对称	反对称	传递
M_R	对角线元素全1	对角线元素全0	对称矩阵	$a_{ij}\cdot a_{ji}=0$ $(i\neq j)$	若有k使 $a_{ik}\cdot a_{kj}=1$, 则 $a_{ij}=1$
G_R	所有结点都有自圈	所有结点都无自圈	结点间有向边都成对出现	结点间无成对出现的有向边	处处有捷 径

图6.5 给出了一些关系图，指出由这些图给定的关系所具有的性质，并写出对应的关系矩阵。

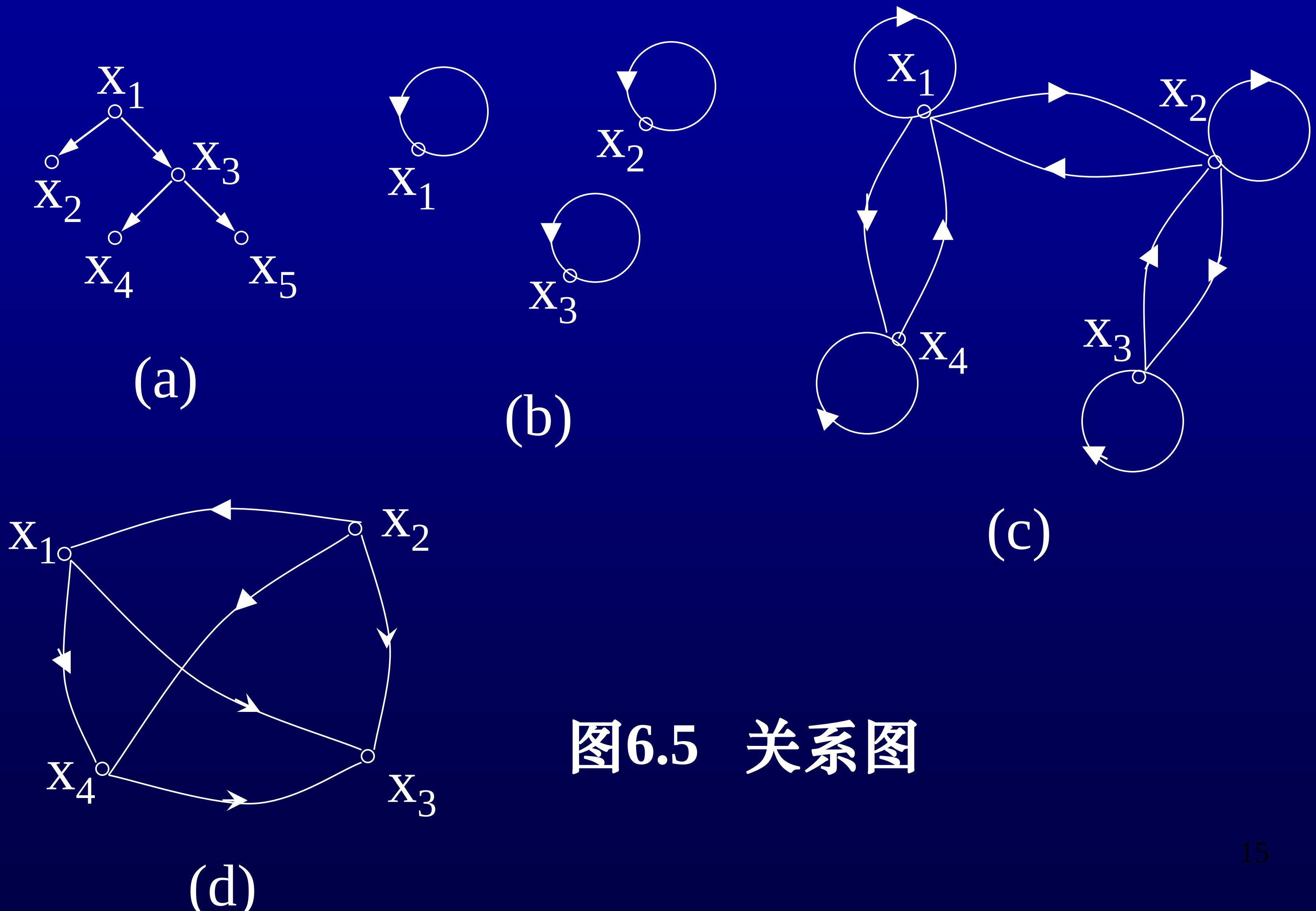


图6.5 关系图

解 图6.5(a) 的关系是反对称的，反自反的.

图6.5(b) 的关系是自反的、对称的、反对称的、和可传递的。

图6.5(c) 的关系是自反的，对称的。

图6.5(d) 的关系是反自反的、反对称的、传递的。

关系图： 直观、形象

关系矩阵：便于计算机处理

思考题： 设 A 为恰有 n 个元素的有限集，

1） A 上共有多少个 不同的自反关系?

2） A 上共有多少个 不同的反自反关系？

3） A 上共有多少个 不同的对称关系?

4） A 上共有多少个 不同的反对称关系？

5） A 上共有多少个 不同的既是对称又反对称的关系？

§6.2关系的运算

重点掌握关系的复合、逆、自反闭包、对称闭包、传递闭包等定义及运算

定义6.4 设R和S是从集合A到B的关系，取全集为$A\times B$，则 $R\cap S$，$R\cup S$，$R-S$，$\sim R$ 仍是A到B的关系，并且对于任意 $x\in A$，$y\in B$:

$$x\,(R\cap S)\,y \iff x\,R\,y \wedge x\,S\,y$$

$$x\,(R\cup S)\,y \iff x\,R\,y \vee x\,S\,y$$

$$x\,(R-S)\,y \iff x\,R\,y \wedge x\,\overline{S}\,y$$

$$x\,(\sim R)\,y \iff x\,\overline{R}\,y$$

例4.12 设 R 和 S 是集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 上的关系，

$R = \{ \langle x, y \rangle \mid x-y$ 是 2 的非零整倍数 $\}$

$S = \{ \langle x, y \rangle \mid x-y$ 是 3 的非零整倍数 $\}$

求：$R \cap S$，$R \cup S$，$R-S$和$\sim R$。

解 $R = \{ \langle 1, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 4, 2 \rangle \}$

$S = \{ \langle 1, 4 \rangle, \langle 4, 1 \rangle \}$

则 $R \cap S = \varnothing$

$R \cup S = \{ \langle 1, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 4, 2 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 4, 1 \rangle \}$

$R - S = \{ \langle 1, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 4, 2 \rangle \}$

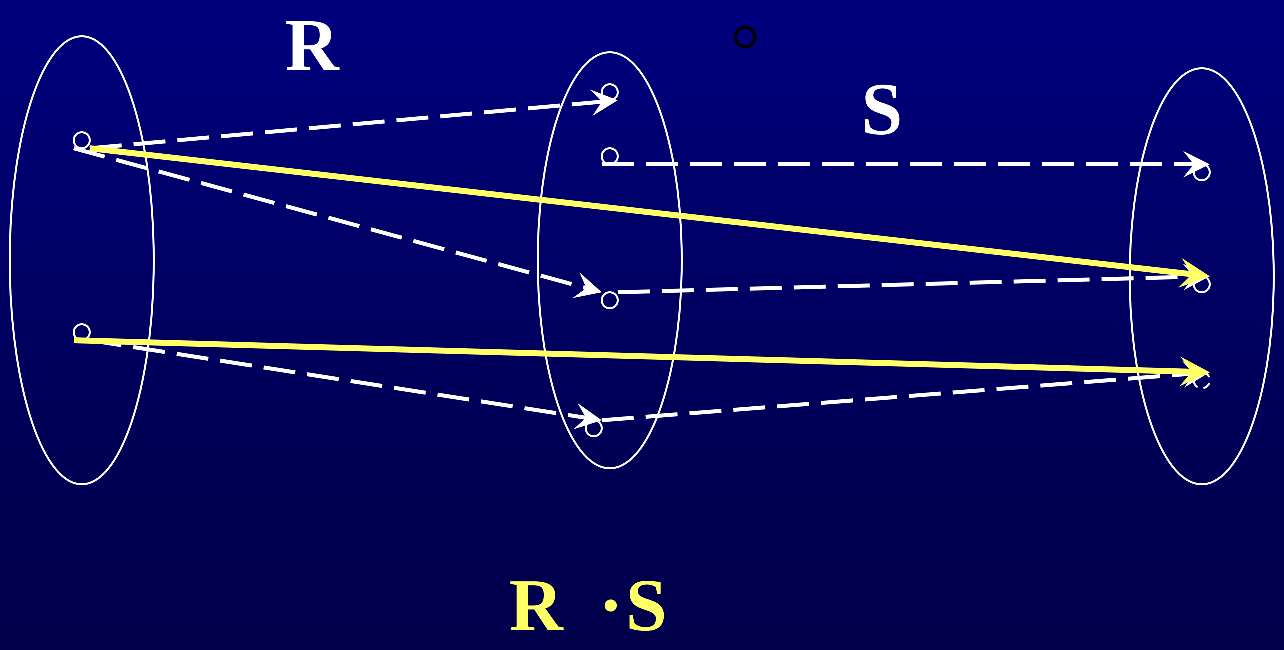
$\sim R = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle,$

$\langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 4, 1 \rangle, \langle 4, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle \}$

定义6.5 设 R 是 X 到 Y 的关系， S 是 Y 到 Z 的关系，

则 $R \cdot S = \{ \langle x, z \rangle \mid \exists\, y \in Y$ 使得: $x\,R\,y \wedge y\,S\,z) \}$

为 X 到 Z 的关系, 称为 R 和 S 的复合关系。



例4.13 设 $R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,4\rangle\}$,

$S = \{\langle 1,3\rangle, \langle 2,5\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 4,2\rangle\}$

求：$R \cdot S$，$S \cdot R$，$(R \cdot S) \cdot R$，$R \cdot (S \cdot R)$，$R \cdot R$。

解：$R \cdot S = \{<1,5>, <2,5>, <3,2>\}$

$S \cdot R = \{<1,4>, <3,2>, <4,2>\}$

$R \cdot R = \{<1,2>, <2,2>\}$

显然，$dom(R \cdot S) \subseteq dom(R)$，$ran(R \cdot S) \subseteq ran(S)$。

$R \cdot S \neq S \cdot R$，故关系的复合运算不满足交换律。

$(R \cdot S) \cdot R = \{<3,2>\}$

$R \cdot (S \cdot R) = \{<3,2>\}$

可证：关系的复合运算满足结合律。

定理6.1 设R，S，P分别是X 到 Y、 Y 到 Z、 Z 到 W 的关系，则 $(R \cdot S) \cdot P = R \cdot (S \cdot P)$。

证明：对任意 $\langle x, w\rangle$：

$\langle x, w\rangle \in (R \cdot S) \cdot P$

$\Leftrightarrow \exists z \in Z(\langle x, z\rangle \in R \cdot S \wedge \langle z, w\rangle \in P)$

$\Leftrightarrow \exists z \in Z(\exists y \in Y(\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in S) \wedge \langle z, w\rangle \in P)$

$\Leftrightarrow \exists y \in Y(\langle x, y\rangle \in R \wedge \exists z \in Z(\langle y, z\rangle \in S \wedge \langle z, w\rangle \in P))$

$\Leftrightarrow \exists y \in Y(\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, w\rangle \in S \cdot P)$

$\Leftrightarrow \langle x, w\rangle \in R \cdot (S \cdot P)$

故 $(R \cdot S) \cdot P = R \cdot (S \cdot P)$。

例6.8 设 R 和 S 是整数集合 Z 上的两个关系，

$R=\{\langle x, 2x\rangle \mid x\in Z\}$，$S=\{\langle x, 7x\rangle \mid x\in Z\}$

求：$R\cdot S$，$R\cdot R$，$R\cdot R\cdot R$ 和 $R\cdot S\cdot R$。

解 $R\cdot S=\{\langle x, 14x\rangle \mid x\in Z\}$

$R\cdot R=\{\langle x, 4x\rangle \mid x\in Z\}$

$R\cdot R\cdot R=\{\langle x, 8x\rangle \mid x\in Z\}$

$R\cdot S\cdot R=\{\langle x, 28x\rangle \mid x\in Z\}$

定义4.16 设 R 是集合 A 上的关系，n 是自然数，R 的 n 次幂 R^n 定义如下：

(1) R^0 是集合A上的恒等关系 I_A，即 $R^0 = I_A$；

(2) $R^{n+1} = R^n \cdot R$ 。

显然，$R^1 = R^0 \cdot R = I_A \cdot R = R$

对 n 归纳易证，对于任意 m, n $\in$ N，

(1) $R^m \cdot R^n = R^{m+n}$

(2) $(R^m)^n = R^{mn}$

关系复合的矩阵表示：

两个关系的复合，也可用矩阵运算来表示。用矩阵运算求两个关系的复合多用于一个集合上的关系的复合。为了不失一般性，下面介绍A到B的关系和B到C的关系的复合。

设$A=\{a_1,a_2,\ldots,a_m\}$，$B=\{b_1,b_2,\ldots,b_p\}$，$C=\{c_1,c_2,\ldots,c_n\}$，
R 是 A 到 B的关系，S 是 B 到 C的关系，
关系矩阵 $M_R=(r_{ij})_{m\times p}$，$M_S=(s_{ij})_{p\times n}$，则
$R\cdot S$ 的关系矩阵 $M_{R\cdot S}=(t_{ij})_{m\times n}$，其中

$$t_{ij}=(r_{i1}\wedge s_{1j})\vee(r_{i2}\wedge s_{2j})\vee\ldots\vee(r_{ip}\wedge s_{pj})$$

$$=\bigvee_{K=1}^{p}(r_{ik}\wedge s_{kj})$$

因为由复合关系的定义，$\langle a_i, c_j\rangle\in R\cdot S$
当且仅当，存在 b_k使得$\langle a_i, b_k\rangle\in R$ 且$\langle b_k, c_j\rangle\in S$。
即$r_{ik}=s_{kj}=1$。故 $r_{ik}\wedge s_{kj}=1$。也就是说，
$r_{i1}\wedge s_{1j}$，$r_{i2}\wedge s_{2j}$，…，$r_{ip}\wedge s_{pj}$中至少有一个是 1，
即 $(r_{i1}\wedge s_{1j})\vee(r_{i2}\wedge s_{2j})\vee\ldots\vee(r_{ip}\wedge s_{pj})=1$。

例：设A＝{a,b,c,d}上的关系R＝{〈a,b〉,〈b, a〉,〈b, c〉,〈c, d〉}，求 R^2 的关系矩阵。

解：

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_R{}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

定义6.7 将关系R中每个有序偶的第一元和第二元对换所得到的关系，称为**R的逆关系**，记作R^{-1}，

$$R^{-1} = \{ \langle x, y\rangle \mid \langle y, x \rangle \in R \}。$$

例如 $R = \{ \langle a,1\rangle, \langle a,3\rangle, \langle b,1\rangle, \langle b,2\rangle, \langle c,1\rangle \}$

$$R^{-1} = \{ \langle 1,a\rangle, \langle 3,a\rangle, \langle 1,b\rangle, \langle 2,b\rangle, \langle 1,c\rangle \}$$

显然，$dom(R^{-1})=ran(R)$，$ran(R^{-1})=dom(R)$，

R^{-1} 的逆关系是 R，即 $(R^{-1})^{-1}=R$。

若R和S都是关系，则 $(R\cup S)^{-1}=R^{-1}\cup S^{-1}$。

R^{-1} 的关系矩阵是：R的关系矩阵 M_R 的**转置矩阵**。

将R的关系图中的每条有向边的方向反向，就得到 R^{-1} 的关系图。

关系复合的性质

设二元关系 $R_1 \subseteq A\times B$，$R_2, R_3 \subseteq B\times C$，$R_4 \subseteq C\times D$：

- 若 $R_2 \subseteq R_3$，则 $R_1 \circ R_2 \subseteq R_1 \circ R_3$ 且 $R_2 \circ R_4 \subseteq R_3 \circ R_4$；
- $R_1 \circ (R_2 \cup R_3) = (R_1 \circ R_2) \cup (R_1 \circ R_3)$；
- $(R_2 \cup R_3) \circ R_4 = (R_2 \circ R_4) \cup (R_3 \circ R_4)$；
- $R_1 \circ (R_2 \cap R_3) \subseteq (R_1 \circ R_2) \cap (R_1 \circ R_3)$；
- $(R_2 \cap R_3) \circ R_4 \subseteq (R_2 \circ R_4) \cap (R_3 \circ R_4)$；
- $(R_1 \circ R_2)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$；
- $(R_1 \circ R_2) \circ R_4 = R_1 \circ (R_2 \circ R_4)$。

思考题

设 R_1 和 R_2 都是集合 A 上的二元关系，证明或用反例推翻以下的论断：

a) 若R_1和R_2都是自反的，则 $R_1 \circ R_2$ (R_1^2) 也是自反的；

b) 若R_1和R_2都是反自反的，则 $R_1 \circ R_2$ (R_1^2) 也是反自反的；

c) 若R_1和R_2都是对称的，则 $R_1 \circ R_2$ (R_1^2) 也是对称的；

d) 若 R_1和R_2都是传递的，则 $R_1 \circ R_2$ (R_1^2) 也是传递的。

定理6.2 设 R 和 S 是关系，则 $(R \cdot S)^{-1} = S^{-1} \cdot R^{-1}$。

证明 对于任意 $\langle z, x\rangle$，

$$\langle z, x\rangle \in (R \cdot S)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \langle x, z\rangle \in R \cdot S$$

$$\Leftrightarrow \exists y\,(\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in S)$$

$$\Leftrightarrow \exists y\,(\langle y, x\rangle \in R^{-1} \wedge \langle z, y\rangle \in S^{-1})$$

$$\Leftrightarrow \langle z, x\rangle \in S^{-1} \cdot R^{-1}$$

因此，$(R \cdot S)^{-1} = S^{-1} \cdot R^{-1}$。

二元关系性质的判断条件

引理 6.1　设 R 为 A 上的二元关系，则有条件成立：

- R 为自反的　iff　$I_A \subseteq R$;
- R 为反自反的　iff　$I_A \cap R = \varnothing$;
- R 为对称的　iff　$R = R^{-1}$;
- R 为反对称的　iff　$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$;
- R 为传递的　iff　$R \circ R \subseteq R$ 。

定义6.8 设 R是集合 A 上的关系。

关系R' 称为 R的自反（对称、传递）闭包，

当且仅当 R'满足以下三个条件：

(1) R'是自反的（对称的、传递的）；

(2) $R \subseteq R'$ ；

(3) 对于A上的任何自反（对称、传递）关系R''，

如果 $R \subseteq R''$，则 $R' \subseteq R''$。

将 R的自反 (对称、传递)闭包分别记作 r(R), s(R), t(R)

可以证明：

R的自反 、对称、传递闭包 r(R), s(R), t(R)的存在性与唯一性。

由定义 6.8 可知：

1）R是自反的　当且仅当　$r(R) = R$；

2）R是对称的　当且仅当　$s(R) = R$；

3）R是传递的　当且仅当　$t(R) = R$ 。

定理 6.3 设 R 是集合A上的关系，则 $r(R) = R \cup I_A$ 。

证明：显然 $R \cup I_A$是自反的，且 $R \subseteq R \cup I_A$，

由自反闭包 $r(R)$的定义可知，$r(R) \subseteq R \cup I_A$ 。

另外, $r(R)$ 是A上的自反关系 且 $R \subseteq r(R)$,

因此 $I_A \subseteq r(R)$，故 $R \cup I_A \subseteq r(R)$。

所以，$r(R) = R \cup I_A$ 。

定理 6.4 设 R 是集合 A 上的关系，则 $s(R) = R \cup R^{-1}$ 。

证明： 因 $(R \cup R^{-1})^{-1} = R^{-1} \cup (R^{-1})^{-1} = R^{-1} \cup R = R \cup R^{-1}$,

由引理 6.1 可知，$R \cup R^{-1}$ 是对称的。显然 $R \subseteq R \cup R^{-1}$。

设 R' 是A上任意对称关系 且 $R \subseteq R'$ ，则 $R^{-1} \subseteq (R')^{-1}$ 。

因为R'是对称的，由引理6.1，$(R')^{-1} = R'$，故 $R^{-1} \subseteq R'$，

所以 $R \cup R^{-1} \subseteq R'$ 。由对称闭包定义知，$s(R) = R \cup R^{-1}$

定理6.5 设 R 是集合A上的关系，则

$$t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$$

证明：只要证明 t(R) 与 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 互相包含即可。

首先用归纳法证：对于任意 $n \geq 1$， $R^n \subseteq t(R)$。

由传递闭包的定义可知，$R \subseteq t(R)$。

设对于任意 $n \ge 1$, $R^n \subseteq t(R)$，下面证明：$R^{n+1} \subseteq t(R)$。

设 $\langle x, y\rangle \in R^{n+1}$，由于$R^{n+1} = R^n \cdot R$，则存在$z \in A$，使得 $\langle x, z\rangle \in R^n$，$\langle z, y\rangle \in R$。根据归纳假设和归纳基础，有 $\langle x, z\rangle \in t(R)$ 和 $\langle z, y\rangle \in t(R)$，由此可得 $\langle x, y\rangle \in t(R)$，则 $R^{n+1} \subseteq t(R)$。由于对于所有的$n\ge1$，均有 $R^n \subseteq t(R)$。因此

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq t(R)$$

再证 $t(R) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$

显然 $R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$。只要再证 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$是传递的即可。

设任意$\langle x, y\rangle \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$，$\langle y, z\rangle \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$，则存在正整数 s 和 k，使得 $\langle x, y\rangle \in R^s$, $\langle y, z\rangle \in R^k$, 这样 $\langle x, z\rangle \in R^{s+k}$，因此有$\langle x, z\rangle \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$，所以 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$是传递的。

由 $t(R)$ 的最小性，得 $t(R) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$。

定理 6. 6 设 R 是集合A上的关系， A有n个元素，则

$$t(R) = \bigcup_{i=1}^{n} R^i$$

证明：只需证：对于任意 $k \geq 0$， $R^{n+k} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R^i$

例：设 集合$A = \{a, b, c\}$ 上的关系

$R = \{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, c\rangle\}$，求：$r(R), s(R), t(R)$。

解 $r(R) = R \cup I_A = \{\langle a,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,c\rangle, \langle a,a\rangle, \langle b,b\rangle\}$

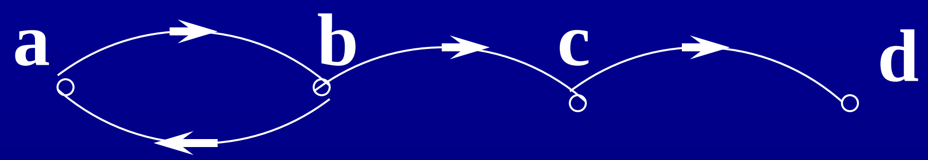
$S(R) = R \cup R^{-1} = \{\langle a,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,c\rangle, \langle b,a\rangle, \langle c,b\rangle\}$

$R^2 = \{\langle a, c\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, c\rangle\}$

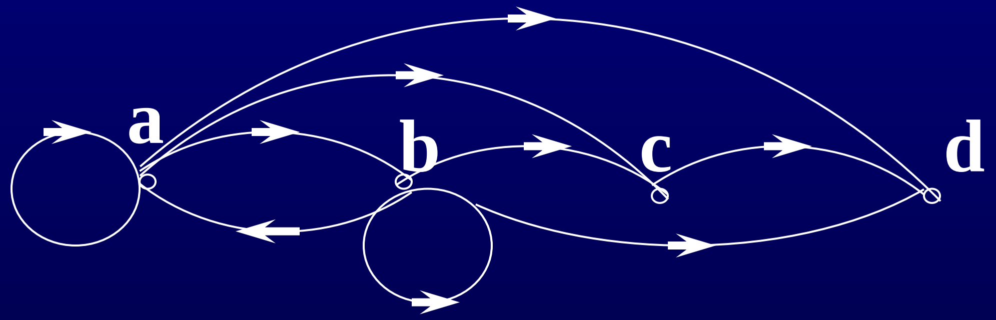
$R^3 = \{\langle a, c\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, c\rangle\} = R^2$

$t(R) = R \cup R^2 = \{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, c\rangle, \langle a, c\rangle\}$

例6.10 设集合A＝｛a, b, c, d｝, A上的关系 R＝｛〈a,b〉,〈b,a〉,〈b,c〉,〈c,d〉｝， 试画出t(R)关系图。



R关系图



t(R)关系图

闭 包 的 性 质

性质 1 设二元关系 R_1，$R_2 \subseteq A^2$ 且 $R_1 \subseteq R_2$，则

i) $r(R_1) \subseteq r(R_2)$;

ii) $s(R_1) \subseteq s(R_2)$;

iii) $t(R_1) \subseteq t(R_2)$。

性质 2 设二元关系 $R \subseteq A^2$,

i) 若 R 是自反的，则 s (R) 和 t (R) 也是自反的；

ii) 若 R 是对称的，则 r (R) 和 t (R) 也是对称的；

iii) 若 R 是传递的，则 r (R) 也是传递的。

性质 3 设二元关系 $R \subseteq A^2$，则

i) $rs(R) = sr(R)$;

ii) $rt(R) = tr(R)$;

iii) $st(R) \subseteq ts(R)$。

§ 6.3 次序关系

次序关系包括：偏序关系，全序关系，严格偏序关系，良序关系。

重点：偏序关系

画哈斯图

求偏序集合中的特殊元素

定义6.9（偏序关系）集合 P上的关系 R 称为 P上的**偏序关系**，当且仅当 R是**自反的**、**反对称的**和**传递的**。

用“≤”表示偏序关系，并用 $\langle P, \leq \rangle$ 表示**偏序结构**。

如果 x , y∈P 且x≤y，则称“ x 小于或等于y ”或“ x 在 y 之前 ”。

例： $\langle N, \leq \rangle$ ，$\langle N, \geq \rangle$ ，$\langle P(A), \subseteq \rangle$ ，$\langle I_+, | \rangle$ 都是偏序结构

定义6.10（全序关系）设 $\langle P, \leq \rangle$ 是一个偏序结构，如果对于任意 x，y∈P，或者 x≤y ，或者 y≤x，则称 ≤ 为 P上的**全序**或 线序，并称 $\langle P, \leq \rangle$ 为**全序结构** 或 链。即

$$(\forall x)(\forall y)(x \in P \wedge y \in P \rightarrow x \leq y \vee y \leq x)$$

对于偏序集合 $\langle P, \leq \rangle$，$x, y \in P$，如果有 $x \leq y$ 或者 $y \leq x$，就说 P的元素 x 和 y 是可比的。

例： $\langle N, \leq \rangle$，$\langle N, \geq \rangle$ 都是全序结构。

它们中的任意元素 x 和 y 都是可比的

而 $\langle P(A), \subseteq \rangle$，$\langle I_+, | \rangle$ 都不是 全序结构

定义6.11（严格偏序关系，又称 拟序关系）

R是集合P上的 严格偏序关系，当且仅当 R是反自反的和传递的。

用 "$<$" 表示 严格偏序关系，并称 "x 小于 y"，

称 $\langle P, < \rangle$ 为严格偏序（拟序）结构。

例 $\langle N, <\rangle$，$\langle N, >\rangle$，$\langle P(A), \subset\rangle$ 都是 严格偏序结构

证明 若 R 是 P上严格偏序关系，则 R 是 反对称的。

证明：假设 R不是反对称的，则存在 $x, y \in P$ 且 $x \neq y$，使得 $\langle x, y\rangle \in R$ 且 $\langle y, x\rangle \in R$

因为R是传递的，所以 $\langle x, x\rangle \in R$，这与 R反自反 矛 盾。

由上述证明可知， P上的严格偏序关系 和 偏序关系有如下关系：

$$< \; = \; \leq - I_P$$

例如：

$$x < y \Leftrightarrow x \leq y \wedge x \neq y$$

在偏序结构 $\langle P, \leq \rangle$ 中，对于任何两个元素 $x, y \in P$，如果 $x < y$ 且不存在任何其它元素 $z \in P$，使得 $x < z$ 和 $z < y$，则称 y **遮盖（覆盖）** x。

$$y \text{ 遮盖 } x \Leftrightarrow x < y \wedge \neg \exists z (z \in P \wedge x < z \wedge z < y)$$

例：P ＝ {1，2，3，4}，≤是 P上的小于 或 等于关系，则 4 遮盖 3，3 遮盖 2，2 遮盖了 1 。

若≤是P上的大于或等于关系，则上述遮盖关系恰好相反

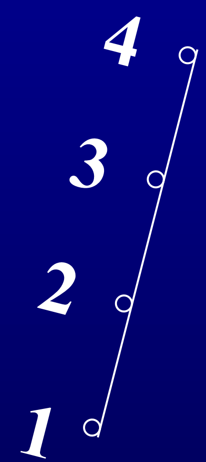
哈斯图： 偏序结构 通常用**简化的关系图**来表示，这种关系图 称为 偏序结构图 或 **哈斯图**。

哈斯图画法如下：集合的每一个元素用一个点表示，对于 $x, y \in P$，如果 $x < y$，则点 x 画在点 y 之下，如果 y 遮盖 x，就在 x 和 y 之间画一条直线，在哈斯图中省略了自环，并约定弧的指向向上，不画箭头。

例：画出满足下列条件的哈斯图．

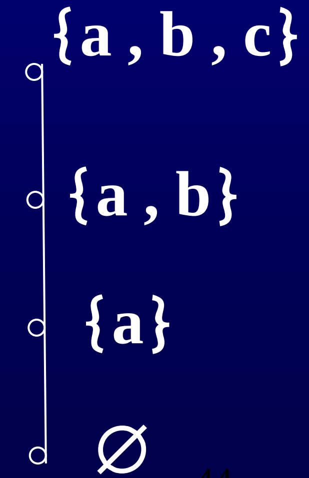
(1) $P_a = \{1, 2, 3, 4\}$，并设 $\leq$ 是 P_a 上的小于或等于关系。

解：见右图



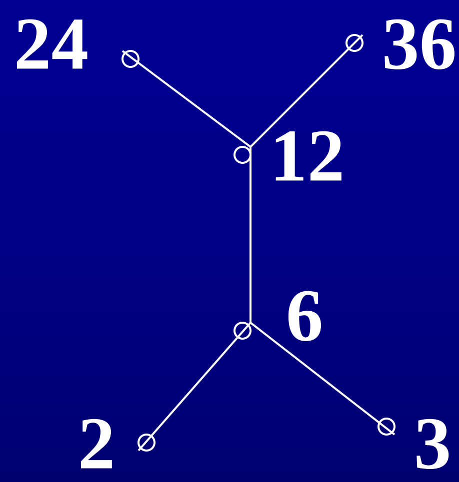
(2) $P_b = \{\varnothing, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$，并设 $\subseteq$ 是 P_b 上的包含关系。

解：见右图



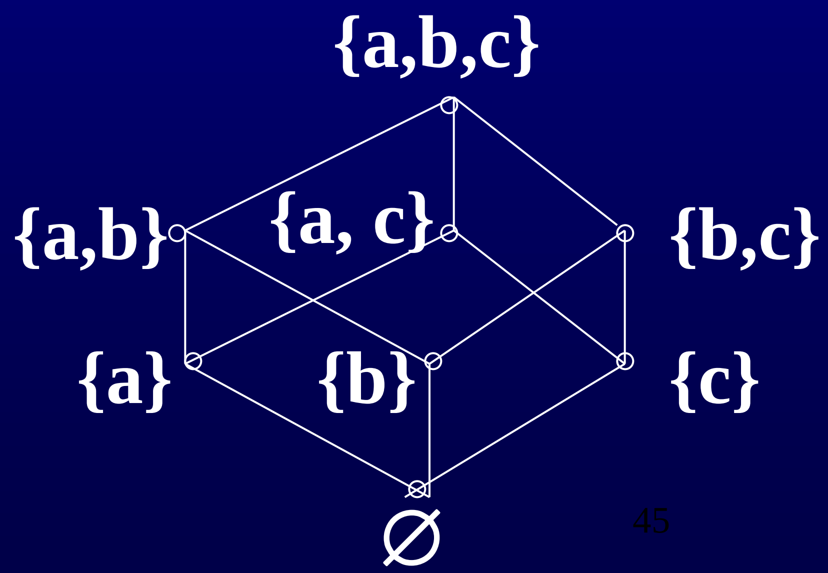
例：设 X = { 2，3，6，12，24，36 }，≤为整除关系，如果 x 整除 y ，便有 x≤y．画出〈X ，≤〉的哈斯图．

解：见右图



例 设 A = {a，b，c}，⊆ 是幂集 ρ(A) 上的包含关系， 画出 〈 ρ(A)，⊆ 〉 的 哈斯图

解：见右图



偏序结构中的特殊元素:

定义6.12 设 $\langle A, \le \rangle$ 是偏序结构，并且 $B \subseteq A$，则

(1) b 是 B 的最大元 $\Leftrightarrow b \in B \wedge \forall x\,(x \in B \rightarrow x \le b)$

(2) b 是 B 的最小元 $\Leftrightarrow b \in B \wedge \forall x\,(x \in B \rightarrow b \le x)$

(3) b 是 B 的极大元 $\Leftrightarrow b \in B \wedge \neg \exists x\,(x \in B \wedge b < x)$

(4) b 是 B 的极小元 $\Leftrightarrow b \in B \wedge \neg \exists x\,(x \in B \wedge x < b)$

定义6.13 设 $\langle A, \le \rangle$ 是偏序结构，并且 $B \subseteq A$，则

(1) b 是 B 的上界 $\Leftrightarrow b \in A \wedge \forall x\,(x \in B \rightarrow x \le b)$

(2) b 是 B 的下界 $\Leftrightarrow b \in A \wedge \forall x\,(x \in B \rightarrow b \le x)$

(3) b 是 B 的最小上界 $\Leftrightarrow$ b是B的上界, 且对B的任意上界 x , 都有 $b \le x$ 。

(4) b 是 B 的最大下界 $\Leftrightarrow$ b是B的下界, 且对B的任意下界 x, 都有 $x \le b$ 。

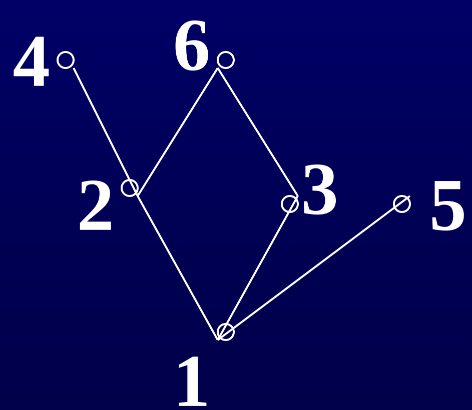
由上述定义可知：

⑴ B的最大元、最小元 若存在，则唯一；

⑵ B的极大元、极小元若存在，不一定唯一；

⑶ 若 B是有穷集，则B的极大元、极小元必存在，但 B的最大元、最小元不一定存在 。

例：设集合 A ＝ {1, 2, 3, 4, 5, 6} ，$\le$ 关系是整除关系，画出哈斯图，并指出A的极大元、极小元、最大元、最小元、上界、下界、最小上界、最大下界.



A的极大元：4，5，6　　极小元：1

最大元：无　　最小元：1

上界：无　　下界：1

最小上界：无　　最大下界：1

定义6.14（良序结构）：一个偏序结构〈P , ≤〉，如果 P 的每一个非空子集都有一个**最小元**，则称≤为**良序关系**，〈P , ≤〉为良序结构。

由定义可知，每个**良序结构**都是**全序结构**（why?）

但**并非每个全序结构都是良序的**，当然有穷的全序结构一定是良序的。

例〈N , ≤〉是全序结构，也是良序结构；

〈I , ≤〉是全序结构，但**不是**良序结构。（why?）

〈Q_+ , ≤〉,〈R_+ , ≤〉是全序结构，但都**不是**良序结构。

（why?）

良序的充要条件

定理A 若≤为集合P上的偏序关系，则 ≤ 为P上良序关系，当且仅当

1）≤为P上的全序关系；

2）P 的每个非空子集都有极小元。

定理B 设〈A, ≤〉为全序结构，则〈A, ≤〉是良序结构的*充要条件*是：不存在 A 中元素的无穷序列 a_0，a_1，a_2，… ，使得对每个 i $\in N$，皆有 $a_{i+1} < a_i$ 。

简而言之，就是：不存在 A 中元素的无穷递降序列。

§ 6.4 等价关系与划分

定义(等价关系) 如果集合A上的关系R是自反、对称、传递的，则称 R 为 A 上的等价关系。

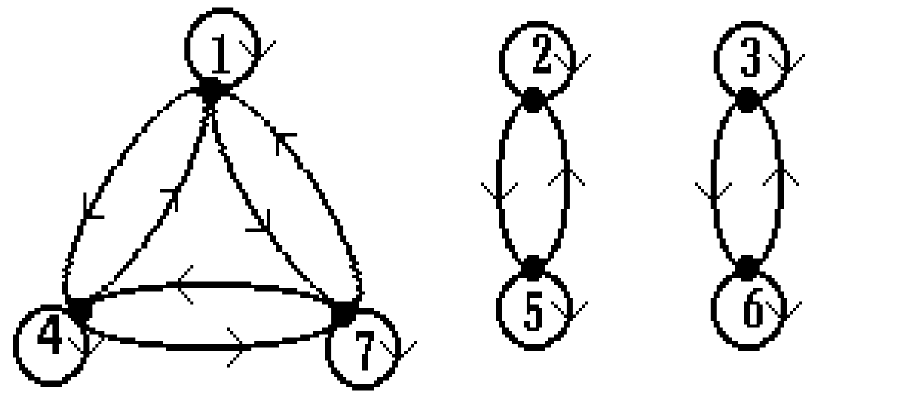
例 6.18　设 R 是集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 上的关系，

$$R = \{ \langle x, y\rangle \mid x \in A \wedge y \in A \wedge 3 \mid (x - y) \}$$ (模3同余关系)

证明 R是一个等价关系，并画出其关系图。

证明：略

其关系图如右图所示，可见R的确是 A 上自反、对称、传递的关系，故 R 是 A 上的等价关系。



模3同余关系的关系图

可以证明：对于任意正整数 m，模m同余关系是等价关系。

若 x 和 y 有 模m同余关系，一般记作 $x \equiv y \pmod{m}$

例：设集合 X 是整数集合 I 的任意子集，证明：

X上的 模m 同余关系 是 等价关系。

证明：自反性：对于任意 $x \in X$，显然 $x \equiv x \pmod{m}$ 。

对称性：对于任意 $x, y \in X$，若 $x \equiv y \pmod{m}$，则存在 $k \in I$，使得 $x - y = k*m$，故 $y - x = (-k)*m$，因此 $y \equiv x \pmod{m}$。

传递性：对于任意 $x, y, z \in X$，若 $x \equiv y \pmod{m}$，$y \equiv z \pmod{m}$，则存在 $k, n \in I$ 使得 $x - y = k*m$，$y - z = n*m$，于是有 $x - z = (k+n)*m$，因此 $x \equiv z \pmod{m}$

综上所述，模m同余关系是等价关系。

定义(等价类) 设 R 是集合A上的**等价关系**。对于每个 $x\in A$，A中与 x 有关系 R 的元素的集合 称为 **x关于R的等价类**，简称为 **x 的等价类**，记作 $[x]_R$，

即： $[x]_R = \{ y \mid y\in A \wedge xRy \}$，

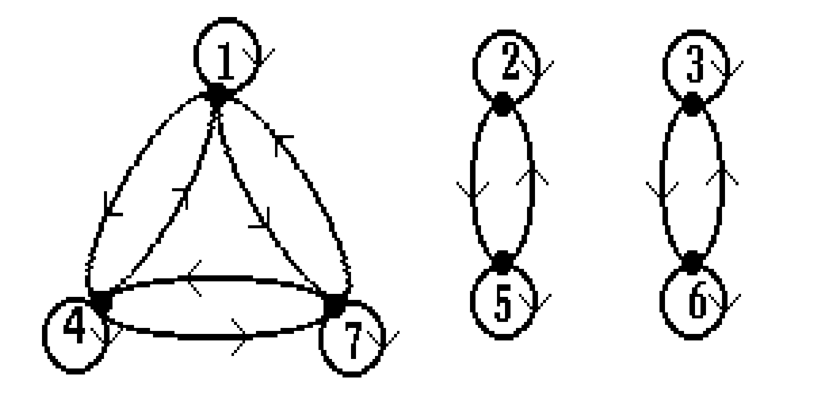
显然 $[x]_R \subseteq A$

对上例给出的集合A=｛1, 2, 3, 4, 5, 6, 7｝上的关系R，A中各元素的等价类如下：

$[1]_R = [4]_R = [7]_R = \{1, 4, 7\}$

$[2]_R = [5]_R = \{2, 5\}$

$[3]_R = [6]_R = \{3, 6\}$



模3同余关系的关系图

定理 设 R 是非空集合A上的**等价关系**，则有：

(1) 对于每个 $x \in A$，$x \in [x]_R$，即 $[x]_R$ 是A的非空子集。

(2) $[x]_R = [y]_R$ 当且仅当 $x R y$。

(3) 若 $x, y \in A$ 且 $x \overline{R} y$，则 $[x]_R \cap [y]_R = \varnothing$。

(4) $\bigcup_{x\in A} [x]_R = A$，其中 $\bigcup_{x\in A} [x]_R$ 表示所有等价类的并集。

证明：(1) 因 R自反，任取 $x \in A$ 均有 $x R x$，故 $x \in [x]_R$，因此，$[x]_R \neq \varnothing$。

(2) 设 $[x]_R = [y]_R$，因为 $y \in [y]_R$，所以 $y \in [x]_R$，由 $[x]_R$ 的定义，可得：$x R y$。

设 $x R y$，任取 $z \in [y]_R$，则有 $y R z$，因 R 传递，故 $x R z$，因此 $z \in [x]_R$，故 $[y]_R \subseteq [x]_R$。因 R对称，所以有 $y R x$，

同理可证：$[x]_R \subseteq [y]_R$。因此，$[x]_R = [y]_R$

（3）假设 $[x]_R \cap [y]_R \neq \varnothing$，则 $\exists z$ 使 $z \in [x]_R$ 且 $z \in [y]_R$，

即 $x R z$， $y R z$，因 R是对称的，故 zRy，因R是传递的，

所以有 $x R y$，这与 $x \overline{R} y$ 的题设 相矛盾！

因此，$[x]_R \cap [y]_R \neq \varnothing$。

（4）任取 $x \in A$，则 $[x]_R \subseteq A$。所以有 $\bigcup_{x \in A} [x]_R \subseteq A$。

任取 $z \in A$，有 $z \in [z]_R$，$[z]_R \subseteq \bigcup_{x \in A} [x]_R$，故有

$z \in \bigcup_{x \in A} [x]_R$。因此，$A \subseteq \bigcup_{x \in A} [x]_R$，所以 $\bigcup_{x \in A} [x]_R = A$。

定义 设 R是集合A上的等价关系，所有**等价类**组成的集合称为 A 关于 R 的**商集**，记作 A / R，即:

$$A / R = \{ [x]_R \mid x \in A \}$$

例：上例中集合 A＝｛1, 2, 3, 4, 5, 6, 7｝关于其等价关系 R 的商集 $A / R = \{ \{1, 4, 7\}, \{2, 5\}, \{3, 6\} \}$

定义 设 A 是非空集合, $\pi \subseteq \rho(A)$ (即π包含 A 的若干子集)。若π满足以下三个条件，则称π为 A上的一个**划分**:

(1) 对于每个 $S \in \pi$，$S \neq \varnothing$;

(2) 对于任意 $B, C \in \pi$，若 $B \neq C$，则 $B \cap C = \varnothing$;

（若 $B \cap C \neq \varnothing$，则$B = C$）

(3) $\cup \pi = A$ 。

定义 设 A 是非空集合，$\pi \subseteq \rho(A)$

(即π包含 A 的若干子集)。

若π满足以下三个条件，则称π为 A上的一个**划分**:

(1) 对于每个 $S \in \pi$，$S \neq \varnothing$;

(2) 对于任意 B, C $\in \pi$，若 $B \neq C$，则 $B \cap C = \varnothing$;

（若 $B \cap C \neq \varnothing$，则$B = C$）

(3) $\cup \pi = A$ 。

例：设 $A = \{a, b, c\}$ ，给定下列 A 的子集的集合：

$B = \{ \{a\}, \{b, c\} \}$

$C = \{ \{a\}, \{b\}, \{c\} \}$

$D = \{ \{a, b\}, \{b, c\} \}$

$E = \{ \{a\}, \{c\} \}$

问：这些集合中 哪些是 A 上的划分？

把π中的元素 称为划分块，π中划分块的个数称为 秩，有有穷个划分块的划分称为有穷划分，否则称为确无穷划分.

例：设 $A = \{a, b, c\}$，给定下列 A 的子集的集合：

$B = \{\{a\}, \{b, c\}\}$

$C = \{\{a, b, c\}\}$

$D = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$

$E = \{\{a, b\}, \{b, c\}\}$

$F = \{\{a\}, \{c\}\}$

$G = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}\}$

问：这些集合中 哪些是 A 上的划分？

定理 非空集合 A 上的等价关系 R, 决定了A上的一个划分，这个划分 就是商集 A / R 。

证明：根据商集定义 $A/R = \{[x]_R \mid \in A\}$ 、等价类的性质定理和划分的定义, 商集 A/R 确是A上的一个划分。

定理 设π是非空集合 A 上的一个划分，若令：

$$R_\pi = \{\langle x, y\rangle \mid \text{存在 } S\in\pi \text{ 使得 } x, y \in S\}$$

即：$x R_\pi y$ 当且仅当 x 和 y 在π的同一个划分块中，

则 R_π 必是 A 上的等价关系 且 $A / R_\pi = \pi$。

称 R_π 为 由π确定的等价关系。

证明：首先证明： R_π 具有自反性、对称性、传递性。

1）自反性: 任取 x∈A，由划分的定义可知: 存在 S∈π使得 x∈ S。所以，x, x∈ S，故有 $x R_\pi x$ 。

2）对称性：设 $x\,R_\pi y$，于是存在 $S\in\pi$使得 x，$y\in S$，

故有 $y\,R_\pi\,x$ 。

3）传递性：设 $x\,R_\pi y$， $y\,R_\pi z$，于是存在 $S\in\pi, T\in\pi$使得 x，$y\in S$ 且 y，$z\in T$。由于π是划分，则由 S 与 T 有公共元 y 可知：$S\cap T\neq\varnothing$，故必有 $S=T$，因此 $z\in S$，所以$x\,R_\pi\,z$。

因此， R_π 是 A 上的等价关系 。

然后证明： $A/R_\pi=\pi$:

1) 先证明$\pi\subseteq A/R_\pi$:

任取 $S\in\pi$, 存在 $x\in S$，则必有 $S=[x]_{R\pi}$ （why?）

由 $[x]_{R\pi}\in A/R_\pi$, 因此 $S\in A/R_\pi$ 。

1) 后 证明 $A/R_\pi\subseteq\pi$:

任取 $[x]_{R\pi} \in A / R_{\pi}$，其中 $x \in A$。

因π为A 上的一个划分，则必有 $S \in \pi$，使得 $x \in S$，

故必有 $S = [x]_{R\pi}$ （**why?**）

因此， $[x]_{R\pi} \in \pi$。

由上述定理，可得如下结论:

若 A 上的一个划分为 $\pi = \{ C_1, C_2, \ldots, C_n \}$,

则π确定的等价关系 就是:

$$R_{\pi} = (C_1 \times C_1) \cup (C_2 \times C_2) \cup \ldots \cup (C_n \times C_n)$$

上述定理表明，由等价关系能够产生一个划分。同样，由一个划分也可以产生一个等价关系。

例：U_X，I_X 分别是 X 上的全域关系和恒等关系，则

$$X / U_X = \{ X \}, \qquad X / I_X = \{ \{x\} \mid x \in X \}$$

例：设 R 是N上的“模6同余”关系，即：

$R = \{ <x, y> \mid x \in N \wedge y \in N \wedge 6 \mid (x-y) \}$，求各元素的等价类和商集

解：等价类是:

$[0]_R = \{ 0, 6, 12, 18, \ldots \} = \{ x \mid x = 6n \wedge n \in N \}$

$[1]_R = \{ 1, 7, 13, 19, \ldots \} = \{ x \mid x = 6n+1 \wedge n \in N \}$

…

$[5]_R = \{ 5, 11, 17, 23, \ldots \} = \{ x \mid x = 6n+5 \wedge n \in N \}$

$N/R = \{ [0]_R, [1]_R, [2]_R, [3]_R, [4]_R, [5]_R \}$

例：$X = \{a, b, c, d, e\}$，划分$\pi = \{ \{a, b\}, \{c\}, \{d,e\} \}$，

求划分π确定的 X 上的等价关系 R。

解：$R = \{ \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle d, e\rangle, \langle e, d\rangle \} \cup I_X$

下接第七章

R_1^2

思考题

1) 有人说：“如果集合A上的二元关系R是对称的和传递的，则R必是自反的”。并给出了如下的证明：

如果$<x, y>\in R$，则由R是对称的可知$<y, x>\in R$，从而由R是传递的得到$<x, x>\in R$和$<y, y> \in R$。因此R是自反的。

请你想一想，他的看法和证明对吗？为什么？

2) 设集合A上的二元关系R是自反的。证明R为等价关系的充要条件是：若 $<a, b>, <a, c> \in$ R, 则 $<b, c> \in R$.

3) 如果集合A上二元关系R满足：

若$<x, y>, <y, z> \in R$，则$<z, x>\in R$。就称R为循环的。

试证明：集合A上的二元关系R为A上的等价关系，当且仅当 R 是自反的和循环的。

R_1^2

思考题

设 R_1和 R_2都是集合A上的等价关系。试判断A上的下列二元关系是不是 A 上的等价关系，为什么？

- A^2-R_1;
- R_1-R_2;
- $r(R_1-R_2)$;
- $R_1 \circ R_2$;
- R_1^2 ;
- $R_1 \cup R_2$;
- $t(R_1 \cup R_2)$;
- $t(R_1 \cap R_2)$ 。

R_1^2

思考题

1、设$\prod_1$和$\prod_2$都是集合A的划分。判断下列集类是不是A的划分，为什么？

a) $\prod_1 \cup \prod_2$；

b) $\prod_1 \cap \prod_2$；

c) $\prod_1 - \prod_2$；

d) $(\prod_1 \cap (\prod_2 - \prod_1)) \cup \prod_1$；

2、设A和B都是非空集，$\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$为A的划分。试证明 $\{A_1 \cap B, A_2 \cap B, \ldots, A_n \cap B\}$并不总是集合 $A \cap B$ 的划分。

R_1^2

思考题*

定义、设$\prod_1$和$\prod_2$都是集合A的划分, 若对每个$S_1 \in \prod_1$， 皆有$S_2 \in \prod_2$使$S_1 \subseteq S_2$， 就称$\prod_1$为$\prod_2$的加细，记为$\prod_1 \leq \prod_2$。

若$\prod_1 \leq \prod_2$且$\prod_1 \neq \prod_2$， 就称$\prod_1$为$\prod_2$的真加细，并记为$\prod_1 < \prod_2$。

3、设R_1和R_2都是集合A上的等价关系，证明：

a) $R_1 \subseteq R_2$ 当且仅当 $A/R_1 \leq A/R_2$。

b) $R_1 \subset R_2$ 当且仅当 $A/R_1 < A/R_2$。

4、如果 n, m$\in I_+$，则 $I/\equiv_n$为 $I/\equiv_m$的 加细 当且仅当 **m | n**。

R_1^2

思考题 **

5、若 R 为集合A上的等价关系，则称 n(A/R) 为R的秩。

如果 i, j$\in$ I_+ 且集合A上的等价关系 R_1与R_2 的秩分别为 i 和 j，则 $R_1 \cap R_2$ 也A上的等价关系 且 $\max\{ i, j \} \le n(A/(R_1 \cap R_2)) \le i \cdot j$。

6、设A为恰含n个元素的非空有限集，则有多少个不同的A上的等价关系？ 其中秩为2的又有多少？

第五章　　集合的基本概念及其运算

重点掌握：

集合的表示。

集合的运算：

$\rho(A)$、$\cap$、$\cup$、$-$、$\sim$、$+$、$\cup A$、$\cap A$、$A \times B$

集合的运算性质

四个等价命题： (1) $A \subseteq B$　　(2) $A \cup B = B$

(3) $A \cap B = A$　(4) $A - B = \varnothing$

集合的 "="、"$\subseteq$" 的定义及证明。

练习：p151　习题 10—（7）、（8），15—（3）、（4），26—（3），13

第六章 关系

重点掌握：

关系的定义

全域关系、恒等关系

关系的表示

关系的性质

关系运算： dom(R) 、ran(R) 、$R \circ S$、R^{-1} 、 r(R)、s(R)、t(R)。

偏序集合 及 哈斯图

等价关系 与 划分的关系

习题p181 —1、3、5、8、25、26、27、29

R是自反的$\Leftrightarrow \forall x(x \in X \rightarrow \langle x, x \rangle \in R)$

R是反自反的$\Leftrightarrow \forall x(x \in X \rightarrow \langle x, x \rangle \notin R)$

R是对称的$\Leftrightarrow \forall x \forall y\, (x \in X \wedge y \in X \wedge \langle x, y \rangle \in R$

$\rightarrow \langle y, x \rangle \in R\,)$

R是反对称的$\Leftrightarrow \forall x \forall y\, (x \in X \wedge y \in X \wedge \langle x, y \rangle \in R$

$\wedge \langle y, x \rangle \in R \rightarrow x = y)$

R是传递的$\Leftrightarrow \forall x \forall y \forall z\, (x \in X \wedge y \in X \wedge z \in X \wedge \langle x,$
$y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R \rightarrow \langle x, z \rangle \in R\,)$