集合论复习课

主要内容

1. 集合

集合的定义、集合的四种表示方法、 集合间的相等和包含关系、 幂集、 集合的运算、 有穷集的计数原理、有序偶和笛卡儿乘积

2. 关系

关系的定义与性质、关系的运算、几种特殊关系（偏序、全序、良序）、等价关系与划分

3. 函数

函数的定义、函数的运算（限制、复合、求逆）、特征函数

4. 自然数与基数

自然数的定义、数学归纳法、自然数的性质、等势、有穷集合与无穷集合、可数无穷集合、不可数集合

集合

1. 集合的定义
2. 集合的四种表示方法、
3. 集合间的相等和包含关系
4. 幂集
5. 集合的运算
6. 有穷集的计数原理
7. 有序偶和笛卡儿乘积

集合的表示方法:

(1) 列举法（枚举法）

(2) 部分列举法

(3) 抽象法（命题法）

(4) 归纳定义法

归纳定义法:

(1) 基本项：已知某些元素属于A（保证A不空）

非空集 $S_0 \subseteq A$；（规定A的一些生成元）

(2) 归纳项：一组规则，从 A 中元素出发，依据这些规则所获得的元素仍然是 A 中的元素；

(3) 极小化:

(a) A中的每个元素都是通过有限次使用(1) 或 (2)获得的。

(b) 如果集合 $S \subseteq A$ 也满足 (1)和 (2)，则 $S = A$ 。

定义7（幂集）：集合 A 的全部子集构成的集合称为A的幂集， 记作 P(A)，即

$$P(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$$

- 设B，C为任意两个集合，则有

(1) 若 $B \subseteq C$，则 $P(B) \subseteq P(C)$

(2) 若$B \subset C$，则$P(B) \subset P(C)$

(1) $P(B) \subseteq P(C)$ 的充分必要条件?

(2) $P(B) \subset P(C)$的充分必要条件？

(3) $P(B) = P(C)$ 的充分必要条件?

定义 8（基数）：有穷集合A中所含有元素的个数称为 A 的基数。 记作 #A（或|A|，n(A)）。

定理 5： 设 A 是有穷集合，则 $\#P(A) = 2^{\#A}$

- 若A为无限集，$\# P(A) > \# A$

  $\# P(N) = \aleph$

集合的运算

定义 9：设 A 和 B 是任意两个集合

(1) $A\cap B = \{x \mid x\in A \land x\in B\}$

(2) $A\cup B = \{x \mid x\in A \lor x\in B\}$

(3) $A-B = \{x \mid x\in A \land x\notin B\}$

定义11 (补集)：设A是全集U的子集，A 相对于 U 的补集 U－A 称为 A 的绝对补集，简称A的补集。记作~A。即：$\sim A = U-A = \{x \mid x\in U \land x\notin A\} = \{x \mid x\notin A\}$

显然，$x\notin A$ 当且仅当 $x\in \sim A$

定义12（对称差集）：设 A 和 B 是任意两个集合，A 和 B 的对称差集，记为 $A\oplus B$，则

$$A\oplus B = (A-B)\cup(B-A) = (A\cup B)-(A\cap B)$$

定理6 设A，B和C为任意三个集合，则有

i) $A \subseteq A \cup B$ 且 $B \subseteq A \cup B$;

ii) $A \cap B \subseteq A$ 且 $A \cap B \subseteq B$;

iii) $A - B \subseteq A$;

iv) $A - B = A \cap \sim B$;

v) 若 $A \subseteq B$，则 $\sim B \subseteq \sim A$;

vi) 若 $A \subseteq C$ 且 $B \subseteq C$，则 $A \cup B \subseteq C$;

vii) 若 $A \subseteq B$ 且 $A \subseteq C$，则 $A \subseteq B \cap C$。

集合运算的基本定律

幂等律： $A \cup A = A$ $A \cap A = A$	交换律： $A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
结合律： $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	
分配律： $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	
同一律： $A \cup \varnothing = A$ $A \cap U = A$	

零律： $A \cup U = U$ $A \cap \varnothing = \varnothing$	否定律： $A \cup \sim A = U$ $A \cap \sim A = \varnothing$
吸收律： $A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	
德·摩尔根律： $\sim (A \cup B) = \sim A \cap \sim B$ $\sim (A \cap B) = \sim A \cup \sim B$	
对合律： $\sim (\sim A) = A$ $\sim \varnothing = U$ $\sim U = \varnothing$	

证明两个集合相等常用以下两种方法：

（1）集合相等定义（元素分析法）

（2）集合运算的基本定律（等式推理）

例：证明 $A - B = A \cap \sim B$

定理7：设 A 和 B是全集U的子集，则下列命题等价：

$(1) A \subseteq B$；$(2) A \cup B = B$; $(3)\ A \cap B = A$; $(4)\ A - B = \varnothing$

作业：$A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$

(两边分别展开)

$$A \cap (B \oplus C) = A \cap ((B - C) \cup (C - B)) \qquad \oplus\text{的定义}$$

$$= (A \cap (B - C)) \cup (A \cup (C - B)) \qquad \text{分配律}$$

$$= (A \cap (B \cap \sim C)) \cup (A \cap (C \cap \sim B)) \qquad \sim\text{的定义}$$

定义13 (集类)：如果一个集合的**所有元素都是集合**，则称该集合为集类。

定义14（集类上的∪、∩运算 (广义并、广义交))

设$\mathcal{B}$为任意集类。

(1) 称集合$\{x \mid$ 有$X \in \mathcal{B}$ 使$x \in X\}$为$\mathcal{B}$的广义并，并记为 $\cup \mathcal{B}$；

(2) 若$\mathcal{B} \neq \varnothing$，则称集合$\{x \mid$ 若$X \in \mathcal{B}$，则$x \in X\}$为$\mathcal{B}$的广义交，记为 $\cap \mathcal{B}$。

定理8：若 A 和 B 是有穷集合，则

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$$

推论1：若A，B 和 C是有穷集合，则

$$\#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C$$

$$- \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C)$$

$$+ \#(A \cap B \cap C)$$

序偶和笛卡尔集

定义15：（有序偶）任给两个对象 x 和 y，将它们按规定的顺序构成的序列，称之为有序偶，记为$<x，y>$。
其中，x 称为有序偶的第一元，y 称为第二元。

定理9 有序偶的唯一性定理：

$<u，v> = <x，y>$当且仅当 $u = x$ 和 $v = y$。

定义16 (n元序偶) 设 $n\in I_+$且 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 为 n 个任意的元素。
i) 若 n=1，则令 $<x_1>= x_1$
ii) 若 n=2，则令 $<x_1, x_2>= \{\{x_1\}, \{x_1, x_2\}\}$
iii) 若 $n >2$，则令 $<x_1, x_2, \ldots, x_n> = <<x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}>, x_n>$
我们称$<x_1, x_2, \ldots, x_n>$为由 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 组成的 n元序偶，
并称每个 x_i（$1\leqslant i\leqslant n$) 为它的第 i 个分量。

2. 关系

关系的定义与性质

关系的运算

几种特殊关系（偏序、全序、良序）

等价关系与划分

定义1 (关系)： 设$n \in I_+$, 且$A_1, A_2, \ldots, A_n$为n个任意的集合，$R \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$,

(1) 称R为$A_1, A_2, \ldots, A_n$的n元关系；

(2) 若$n=2$，则称R为从A_1到A_2的二元关系；

(3) 若$R=\varnothing$, 则称R为空关系；

(4) 若$R= A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$，则称R为全关系

(5) 若$A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, 则称R为A上的n元关系。

X上的全(域)关系：

$$U_X = \{ \langle x_i , x_j \rangle \mid x_i , x_j \in X \} = X \times X$$

X上的恒等关系：$I_X = \{ \langle x, x \rangle \mid x \in X \}$

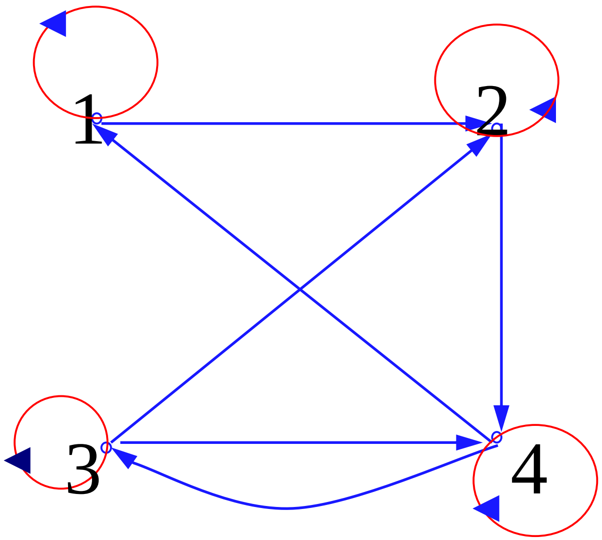
关系的表示：关系图、关系矩阵

定义 4 (关系图) 设A和B为任意的非空有限集，R为任意从A到B的二元关系。以A ∪B中的每个元素为一个结点，对每个<x, y> ∈R，皆画一条从x到y的有向边，就得到一个有向图G_R, 称为R的关系图

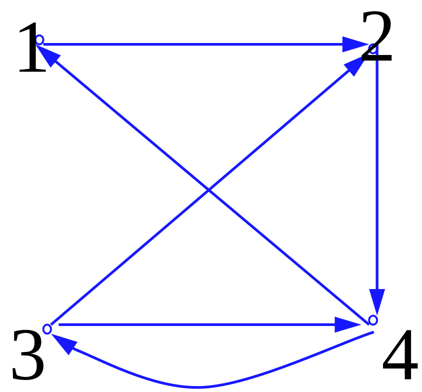
定义5 (关系矩阵)：设 X = { x_1, ……, x_m } , Y = { y_1, ……, y_n }，R 是 X 到 Y 的二元关系。R 的关系矩阵，记作 $M_R = (r_{ij})_{m\times n}$，其中

$$r_{ij} = \begin{cases} 0, \text{若} x_i \bar{R} y_j \\ 1, \text{若} x_i R y_j \end{cases}$$

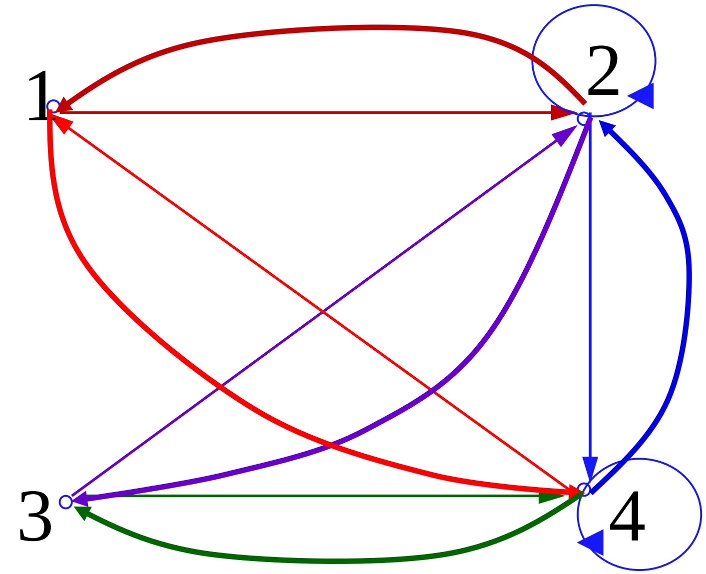
关系的性质：集合X上的二元关系



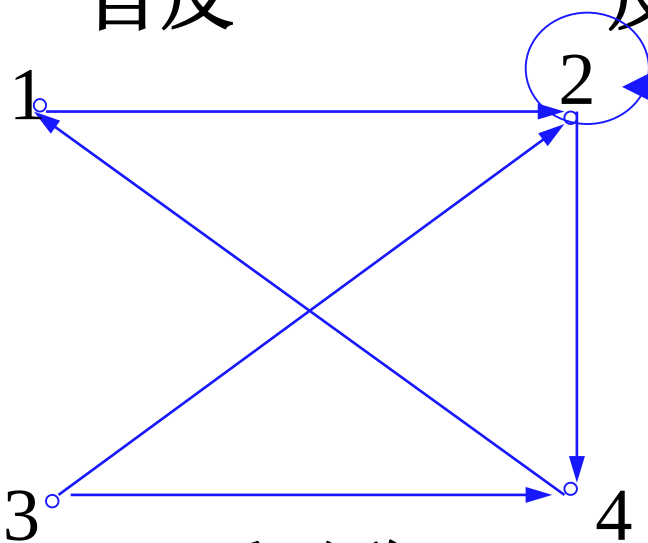
自反



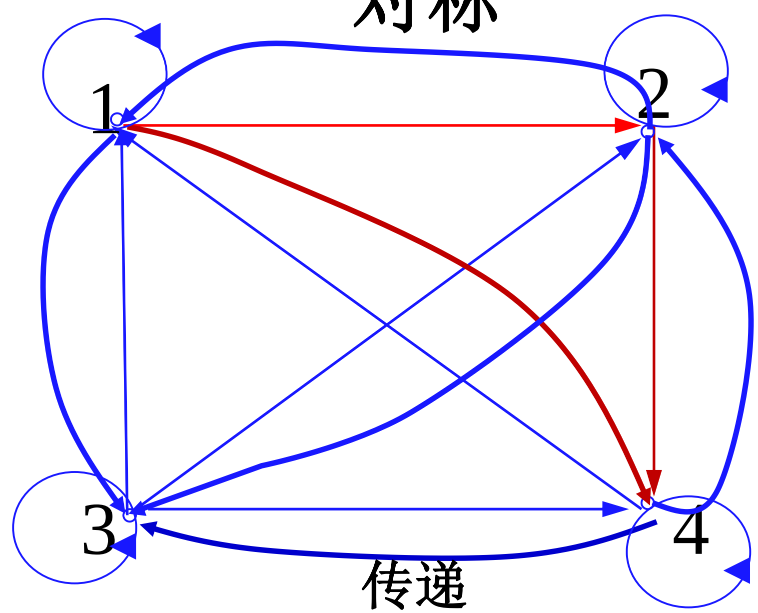
反自反



对称



反对称



传递

关系图和关系矩阵中五种性质的表述

R	自反	反自反	对称	反对称	传递
M_R	对角线元素全1	对角线元素全0	对称矩阵	$r_{ij} \cdot r_{ji}=0$ $(i \neq j)$	若有k使 $r_{ik} \cdot r_{kj}=1$，则 $r_{ij}=1$
G_R	所有结点都有自环	所有结点都无自环	结点间有向边都成对出现	结点间无成对出现的有向边	若 x 到y有一条路径，则必有从 x 到 y 的一条边

关系的运算：集合运算、逆、合成

定义（逆关系） 将关系R中每个有序偶的第一元和第二元对换所得到的关系，称为R的逆关系，记作R^{-1}，

$$R^{-1}=\{<x, y> \mid <y, x>\in R\}。$$

定理：设A,B为非空有限集合，R为从A到B的二元关系。

(1) $M_{R^{-1}}=M_R^{T}$（转置）

(2) 把G_R的每个有向边反向后，得到R^{-1}的关系图$G_{R^{-1}}$

定义（合成） 设 R 是 X 到 Y 的关系， S 是Y到Z 的关系，则$R\circ S=\{<x, z> \mid \exists y\in Y \text{ 使得 } xRy \wedge ySz\}$ 为 X 到 Z 的关系，称为 R 和 S 的合成。

关系的集合运算是否保持五种性质？

R, S	R∩S	R∪S	R−S	R⊕S	～R	R^{-1}	R∘S
自反	√	√				√	√
反自反	√	√	√	√		√	
对称	√	√	√	√	√	√	
反对称	√		√			√	
传递	√					√	

例：设 R 为 A 上的二元关系， 试证以下条件成立：

(1) R 为自反的 iff $I_A \subseteq R$;

(2) R为反自反的 iff $I_A \cap R = \varnothing$;

(3) R 为对称的 iff $R = R^{-1}$;

(4) R 为反对称的 iff $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$;

(5) R 为传递的 iff $R \circ R \subseteq R$ 。

关系的运算——闭包

定义14 设 R是集合 A 上的关系。
关系R′ 称为 R的自反（对称、传递）闭包，
当且仅当 R′满足以下三个条件:
(1) R′是自反的(对称的、传递的);
(2) $R \subseteq R'$;
(3) 对于A上的任何自反（对称、传递）关系R″，
如果 $R \subseteq R''$，则 $R' \subseteq R''$。
将 R的自反 (对称、传递)闭包分别记作 r(R), s(R), t(R)。

包含R的最小自反(对称、传递)关系。

定理: 设R为集合A上的二元关系，则
(1) R是自反的 当且仅当 $r(R) = R$;
(2) R是对称的 当且仅当 $s(R) = R$;
(3) R是传递的 当且仅当 $t(R) = R$ 。

定理： 设 R 是集合A上的关系，则

(1) $r(R) = R \cup I_A$;

(2) $s(R) = R \cup R^{-1}$

(3) $t(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$

定理： 设 R 是集合A上的关系， A有n个元素，则

$$t(R) = \bigcup_{i=1}^{n} R^i$$

定理： 设二元关系 $R_1, R_2 \subseteq A^2$ 且 $R_1 \subseteq R_2$，则

(1) $r(R_1) \subseteq r(R_2)$;

(2) $s(R_1) \subseteq s(R_2)$;

(3) $t(R_1) \subseteq t(R_2)$。

例：设R_1和R_2都是集合A上的二元关系，试证明：

(1) $r(R_1 \cup R_2)=r(R_1) \cup r(R_2)$

(2) $s(R_1 \cup R_2)=s(R_1) \cup s(R_2)$

(3) $t(R_1) \cup t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$

定理：设二元关系 $R \subseteq A^2$，则

(1) 若 R 是自反的，则 s (R) 和 t (R) 也是自反的;

(2) 若 R 是对称的，则 r (R) 和 t (R) 也是对称的;

(3) 若 R 是传递的，则 r (R) 也是传递的

定理：设二元关系 $R \subseteq A^2$，则

(1) $rs(R) = sr(R)$；

(2) $rt(R) = tr(R)$；

(3) $st(R) \subseteq ts(R)$。

几类特殊的关系：集合X上的二元关系

- 偏序： 自反 、反对称、传递
- 严格偏序：反自反、反对称、传递
- 等价关系：自反、 对称、 传递

定义: 在偏序结构$<A, \leq>$中，对于任意两个元素 $x, y \in A$，如果 $x < y$ 且不存在任何其它元素 $z \in A$，使得 $x < z$ 和 $z < y$，则称 y 为 x关于≤的覆盖（遮盖），简称为 y 为 x的覆盖。即
y是x的覆盖 $\Leftrightarrow$ $x < y \wedge \neg \exists z (z \in A \wedge x < z \wedge z < y)$

定理: 设R 是集合A上的二元关系。
(1) 若R是A上的严格偏序关系，则 r(R) 是A上的偏序；
(2) 若R是A上的偏 序，则$R-I_A$是A上的严格偏序。

- 设R为非空有限集A上的偏序，R的哈斯图是一个无向图H_R：集合A的每一个元素为H_R中一个点，对于 $x, y \in A$，
  - ✓ 如果 $x < y$，则点 x 画在点 y 之下，
  - ✓ 如果 y 覆盖 x，则 x 和 y 之间存在一条无向边。

定义 设$<A,\le>$是偏序结构，并且$S\subseteq A$，$S\ne\phi$, 则

(1) b 是 S 的最大元 $\Leftrightarrow b\in S \wedge \forall x\,(x\in S \rightarrow x\le b)$

(2) b 是 S 的最小元 $\Leftrightarrow b\in S \wedge \forall x\,(x\in S \rightarrow b\le x)$

(3) b 是 S 的极大元 $\Leftrightarrow b\in S \wedge \forall x\,(x\in S \wedge b\le x \rightarrow x=b)$

(4) b 是 S 的极小元 $\Leftrightarrow b\in S \wedge \forall x\,(x\in S \wedge x\le b\rightarrow x=b)$

定义6.13 设$<A,\le>$是偏序结构，并且$S\subseteq A$，$S\ne\phi$, 则

(1) b 是 S 的上界 $\Leftrightarrow b\in A \wedge \forall x\,(x\in S \rightarrow x\le b)$

(2) b 是 S 的下界 $\Leftrightarrow b\in A \wedge \forall x\,(x\in S \rightarrow b\le x)$

(3) b 是 S 的最小上界(上确界) $\Leftrightarrow$ b是S的上界, 且对S的任意上界 x， 都有 $b\le x$ 。

(4) b 是 S 的最大下界(下确界) $\Leftrightarrow$ b是S的下界, 且对S的任意下界 x,都有 $x\le b$ 。

定义（良序结构）：设有偏序结构$<A,\le>$，如果A的每一个非空子集都有一个最小元，则称$\le$为良序关系，$<A,\le>$为良序结构。

定理 若$\le$为集合A上的偏序关系，则$\le$为A上良序关系的充分必要条件为

(1) $\le$为A上的全序关系；

(2) A的每个非空子集都有极小元。

定理 设$<A,<>$为全序结构，则$<A,<>$是良序结构的充分必要条件是：不存在A中元素的无穷序列

$$a_0, a_1, a_2, \ldots,$$

使得对每个$i\in N$，皆有$a_{i+1} < a_i$。即不存在A中元素的无穷递降序列。

定义(等价类) 设 R 是集合A上的等价关系。对于每个 $x \in A$，A中与 x 有关系R的元素的集合 称为 x关于R的等价类，简称为 x 的等价类，记作 $[x]_R$，

即：$[x]_R = \{ y \mid y \in A \land xRy \}$，

显然，$[x]_R \subseteq A$

定理 设 R 是非空集合A上的等价关系，则有：

(1) 对于每个 $x \in A$，$x \in [x]_R$，即 $[x]_R$ 是A的非空子集。

(2) $[x]_R = [y]_R$ 当且仅当 xRy。

(3) 若 $x, y \in A$ 且 $x \overline{R} y$，则 $[x]_R \cap [y]_R = \varnothing$。

(4) $\bigcup_{x \in A} [x]_R = A$。

定义(划分). 设A为任意集合且$C \subseteq P(A)$。如果C满足:

(1) 若$S \in C$，则$S \neq \phi$;

(2) $\cup C = A$;

(3) 若$S_1, S_2 \in P(A)$, 且$S_1 \cap S_2 \neq \phi$，则$S_1 = S_2$。

则称C为A的一个划分。

定理. 若R为集合A上的等价关系，则$C_R = \{[x]_R \mid x \in A\}$为A的一个划分。

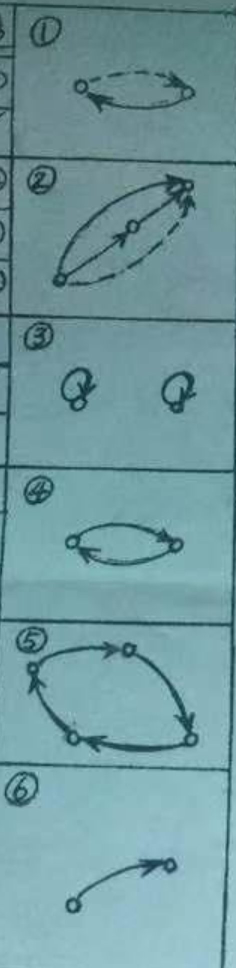
定义. 设R为集合A上的等价关系。称集合$\{ [x]_R \mid x \in A\}$为A关于R的商集，并记为A/R, 并称n(A/R)为R的秩。

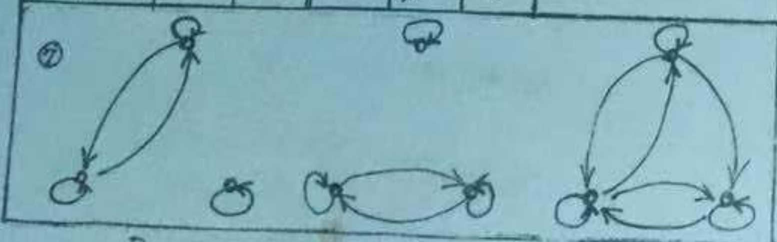
定理. 设C为集合A的一个划分。若令

$$R_C = \{ \langle x, y \rangle \mid \text{存在} S \in C, \text{使} x, y \in S \},$$

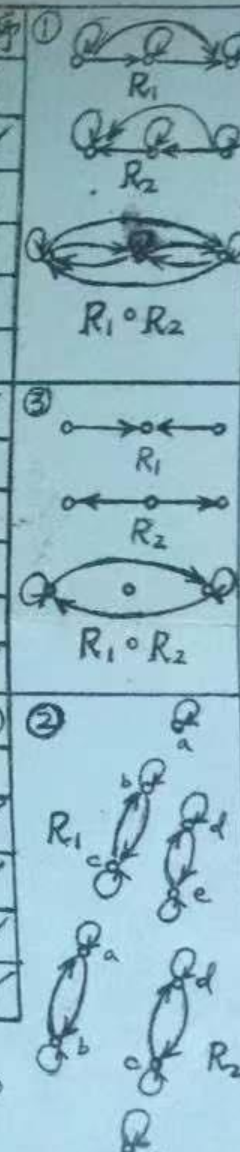
则R_C为A上的等价关系，且$A/R_C = C$。

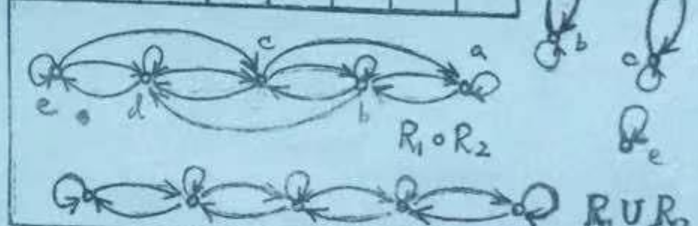
关系表Ⅰ	自反	反自反	对称	反对称	传递
$R_1 \cup R_2$	✓	✓	✓	× ①	× ①
$R_1 \cap R_2$	✓	✓	✓	✓	✓
$R_1 - R_2$	×	✓	✓	✓	× ②
$R_1 \oplus R_2$	×	✓	✓	× ①	× ①
$\sim R$	×	×	✓	×	× ③
I_A	✓	×	✓	✓	✓
I_ϕ	✓	✓	✓	✓	✓
ϕ	×	✓	✓	✓	✓
$A \times A$	✓	×	✓	×	✓
R°	✓	×	✓	✓	✓
R^{-1}	✓	✓	✓	✓	✓
R^2	✓	× ④	✓	× ⑤	✓
$R_1 \circ R_2$	✓	× ④	× ⑦	× ⑤	× ⑦
$S(R)$	✓	✓	✓	×	× ⑥
$t(R)$	✓	× ④	✓	× ⑤	✓
$r(R)$	✓	×	✓	✓	✓
R^+	✓	×	✓	×	✓
R^*	✓	×	✓	×	✓





关系表Ⅱ	相容	等价	拟序	半序	全序	良序
$R_1 \cup R_2$	✓	× ②	×	×	×	×
$R_1 \cap R_2$	✓	✓	✓	✓	✓	✓
$R_1 - R_2$	×	×	×	×	×	×
$R_1 \oplus R_2$	×	×	×	×	×	×
$\sim R$	×	×	×	×	×	×
I_A	✓	✓	×	✓	×	×
I_ϕ	✓	✓	✓	✓	✓	✓
ϕ	×	×	✓	×	×	×
$A \times A$	✓	✓	×	×	×	×
R°	✓	✓	×	✓	×	×
R^{-1}	✓	✓	✓	✓	✓	×
R^2	✓	✓	✓	✓	✓	✓
$R_1 \circ R_2$	× ②	× ②	× ③	× ①	× ①	× ①
$S(R)$	✓	✓	×	×	×	×
$t(R)$	✓	✓	✓	✓	✓	✓
$r(R)$	✓	✓	×	✓	✓	✓
R^+	✓	✓	✓	✓	✓	✓
R^*	✓	✓	×	✓	✓	✓





3. 函数

函数的定义

函数的运算（限制、复合、求逆）

特征函数

定义3.1 (部分函数) 如果从集合 X 到 Y 的二元关系 f 是"单值"的，即 f 满足以下条件：

若$<x, y_1>\in f$ 且$<x, y_2>\in f$，则 $y_1 = y_2$，

就称 f 为从 X 到 Y 的部分函数。

定义3.2 设 f 为从集合 X 到集合 Y 的部分函数。

1) 若 $dom(f) = X$，则称 f 为从 X 到 Y 的全函数，简称 f 为从 X 到 Y 的函数，记为 $f: X \rightarrow Y$。

2) 若 $dom(f) \subset X$，则称 f 为从 X 到 Y 的严格部分函数。

3) 若 $ran(f) = Y$，则称 f 为从 X 到 Y 上的部分函数。

4) 若 $ran(f) \subset Y$，则称 f 为从 X 到 Y 内的部分函数。

5) 若对任意的 x_1，$x_2 \in dom(f)$，

当 $x_1 \neq x_2$ 时，皆有 $f(x_1) \neq f(x_2)$，

则称 f 为从 X 到 Y 的 1 - 1 部分函数。

(即：当 $f(x_1) = f(x_2)$ 时，皆有 $x_1 = x_2$)

函数的运算：合成，求逆

定理 (部分函数的合成) 设 f 为从 X 到 Y 的部分函数，g 为从 Y 到 Z 的部分函数， 则复合关系 $f \circ g$ 为从 X 到 Z 的部分函数。

定义. 设 f 为从X到Y的部分函数，g为从Y到Z的部分函数，则称复合关系 $f \circ g$ 为 f 与 g 的合成（复合）函数，用 $g \circ f$ 表示，即

$g \circ f=\{\langle x, z\rangle \mid x \in X \wedge z \in Z \wedge \exists y\,(y \in Y \wedge y = f(x) \wedge z = g(y))\}$

函数的合成的性质

设 f 为从 X 到 Y 的部分函数，g 为从 Y 到 Z 的部分函数,则 若 f 和 g 都是全函数，则 $g \circ f$ 也是全函数。

定理: 函数 $f : X \to Y$， I_X 和 I_Y 是恒等函数，则

$$f \circ I_X = I_Y \circ f = f$$

定理: 若f是X到Y的部分函数，g是 Y到Z的部分函数，h是Z到W的部分函数，则 $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

定义: 若$f: X \to Y$，

(1) 若$\text{ran}\, f = Y$, 则称f为满射；

即 $\forall y\, (\, y \in Y \to \exists x\, (\, x \in X \wedge f\,(x) = y\,)\,)$

(2) 若f是1-1的，则称f是内射；

即 $\forall x_1 \forall x_2 (x_1 \in X \wedge x_2 \in X \wedge f(x_1)=f(x_2) \to x_1=x_2)$

$\forall x_1 \forall x_2 (\, x_1 \in X \wedge x_2 \in X \wedge x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2))$

(3) 若f既是满射，又是内射，则称f为双射。

定理: 设f: X→ Y和g: Y→Z，则

(1) 若f和g都是满射，则 $g \circ f$ 也是满射。

(2) 若f和g都是内射，则 $g \circ f$ 也是内射

(3) 若f和g都是双射，则 $g \circ f$ 也是双射

定理　设 f： $X \to Y$ 和 g： $Y \to Z$

1) 若 $g \circ f$ 是满射，则 g 是满射；

2) 若 $g \circ f$ 是单射，则 f 是单射；

3) 若 $g \circ f$ 是双射，则 g 是满射且 f 是单射。

函数的运算：求逆

定义　设 X 和 Y 为二集合 且 $f: X \to Y$。

1)若有 $g: Y \to X$ 使 $g \circ f = I_X$，则称 f 为左可逆的，并称 g 为 f 的一个左逆函数，简称 左逆。

2)若有 $g: Y \to X$ 使 $f \circ g = I_Y$，则称 f 为右可逆的，并称 g 为 f 的一个右逆函数，简称 右逆。

3)若有 $g: Y \to X$ 使 $g \circ f = I_X$ 且 $f \circ g = I_Y$，则称 f 为可逆的，并称 g 为 f 的一个逆函数，简称 逆。

逆函数的性质

定理：设 X 和 Y 为二集合且 $X \neq \varnothing$。若$f: X \rightarrow Y$, 则下列条件等价：

(1) f 为内射；

(2) $f：X \rightarrow Y$ 为左可逆

(3) f可左消去，即对任意集合Z及任意的$g: Z \rightarrow X$和 $h: Z \rightarrow X$, 当$f \circ g = f \circ h$时，皆有$g=h$。

定理: 设 X 和 Y 为二集合,若$f：X \rightarrow Y$,则下列条件等价：

(1) f为满射；

(2) f 右可逆；

(3) f 可右消去，即对任意集合Z及任意的 $g: Y \rightarrow Z$和 $h: Y \rightarrow Z$, 当$g \circ f = h \circ f$时，皆有$g=h$。

定理: 设 X 和 Y 为二集合，若 f： X→Y 既是左可逆的，又是右可逆的，则 f 是可逆的，且 f 的左逆和右逆都等于 f 的唯一的逆。

定理：若 X 和 Y 为二集合 且 $f: X \to Y$, 则下列条件等价:

(1) f 是双射；

(2) f 既是左可逆的，又是右可逆的；

(3) f 是可逆的；

(4) f 的 逆关系 f^{-1} 即为 f 的 逆函数。

定理: 设X, Y, Z为三集合。若 $f: X \to Y$ 和 $g: Y \to Z$ 都是可逆的，则 $g \circ f$ 也是可逆的，且 $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$。

定义 (特征函数)设 U 是全集，A 是 U 的子集，A的特征函数χ_A 为如下定义的从U到R的函数：

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & 若\ x \in A \\ 0 & 若\ x \notin A \end{cases}$$

4. 自然数与基数

自然数的定义

数学归纳法

自然数的性质

等势

有穷集合与无穷集合

可数无穷集合

不可数集合

定义1(后继) 若A为集合，则称$A \cup \{A\}$为A的后继，并记为 A^+。

定义2: 自然数的集合N可用归纳定义法定义如下：

(1) $0 \in N$， 这里 $0 = \varnothing$;

(2) 若 $n \in N$， 则 $n^+ \in N$；

(3) 若 $S \subseteq N$, 且满足（极小化）

(a) $0 \in S$

(b) 如果 $n \in S$， 则 $n^+ \in S$

则 $S = N$。

定理(第一数学归纳法)：设$n_0 \in N$。若对每个 $n\in \bar{N}_{n_0}$, 命题P(n)满足：

(1) $P(n_0)$是真；

(2) 对任何 $n\in \bar{N}_{n_0}$，若P(n)为真，则$P(n^+)$也为真。

则对所有 $n\in \bar{N}_{n_0}$，P(n)皆为真。

定理(第二数学归纳法)：设$n_0 \in N$. 若对每个 $n\in \bar{N}_{n_0}$, P(n)满足：

(1) $P(n_0)$是真；

(2) 对任何自然数$n>n_0$, 若当$k\in N$, 且$n_0 \le k < n$时P(k)为真，则P(n)也为真。

则对所有 $n\in \bar{N}_{n_0}$，P(n)皆为真。

定义: 设 A 和 B 为两个集合，若存在从 A 到 B 的双射，则称 A 和 B 对等，或称 A 和 B 等势，记为 A ～ B。

定义: 设A是集合。如果存在n∈N, 使A ～n，则称A为有限集，否则称A为无限集。

定理：任何有限集合都不能与它的真子集对等。

抽屉原理

定义： 设 A 和 B 为二集合。

1) 如果 $A \sim B$，就称 A 和 B 的基数相等，记为 $\#(A) = \#(B)$。

2) 如果存在从 A 到 B 的内射，

就称 A 的基数小于等于 B 的基数，记为 $\#(A) \leq \#(B)$，

或称 B 的基数大于等于 A 的基数， 记为 $\#(B) \geq \#(A)$ 。

3) 如果 $\#(A) \leq \#(B)$ 且 $\#(A) \neq \#(B)$，

就称 A 的基数小于 B 的基数，记为 $\#(A) < \#(B)$，

或称 B 的基数大于 A 的基数，记为 $\#(B) > \#(A)$。

定理：设 A，B 和 C 为三集合，则有

(2) 若 $\#(A) \leq \#(B)$ 且 $\#(B) \leq \#(A)$，则 $\#(A) = \#(B)$；

定理: 若A, B为二集合，则 $\#(B) \leq \#(A)$ 当且仅当存在从 A 到 B 的满射。

可数集：

- N
- N×N
- Q
- Z
- 奇自然数集合
- 偶自然数集合
- N的全体有限子集组成的集合

不可数集：

- R
- R×R
- P(N)
- [0,1], (0,1], [0,1), (0,1)