第7章 图论

7-7 图的复习

北航计算机学院：李建欣

Tel：82339274（G506）

E-mail：lijx@buaa.edu.cn

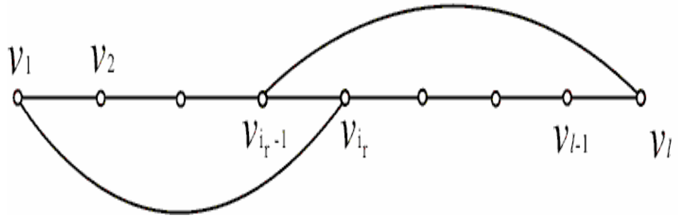
http://act.buaa.edu.cn/lijx

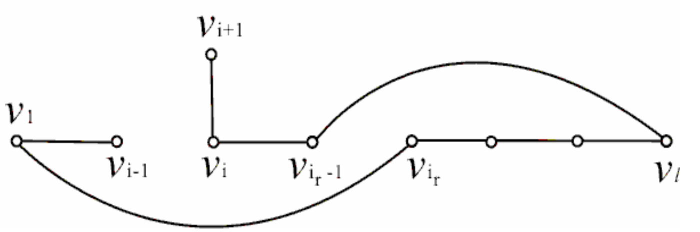
图论

- 1. 图论的基本概念
- 2. 子图和图的运算
- 3. 路径、回路和连通图
- 4. 欧拉图和哈密顿图
- 5. 图的矩阵表示
- 6. 树、有向树和有序树
- 7. 二分图
- 8. 平面图
- 9. 网络流

证明题7.4.4

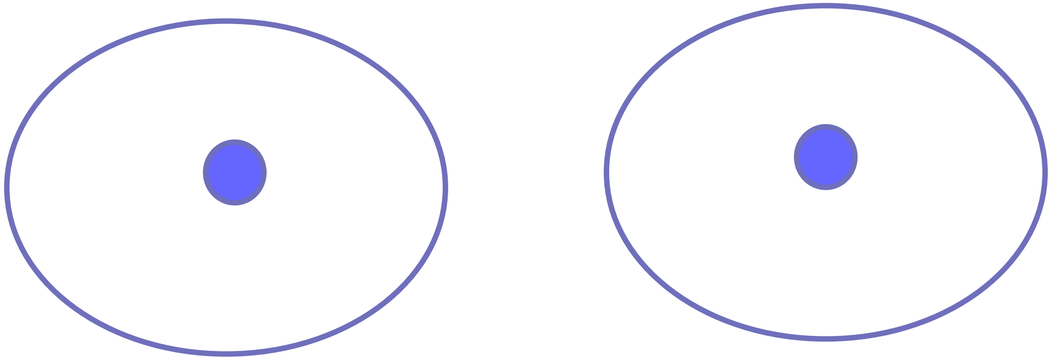
- 定理 设G是具有n个顶点的简单无向图。若G中任意两个不相邻结点u，v度次数之和大于或等于n-1，则G中存在一条哈密顿路。
  - 如果任意d(v)+d(u)≥n，则G是哈密顿图
- 证明思路：
  - (1)证明连通性？
  - (2) 路径扩展方法？





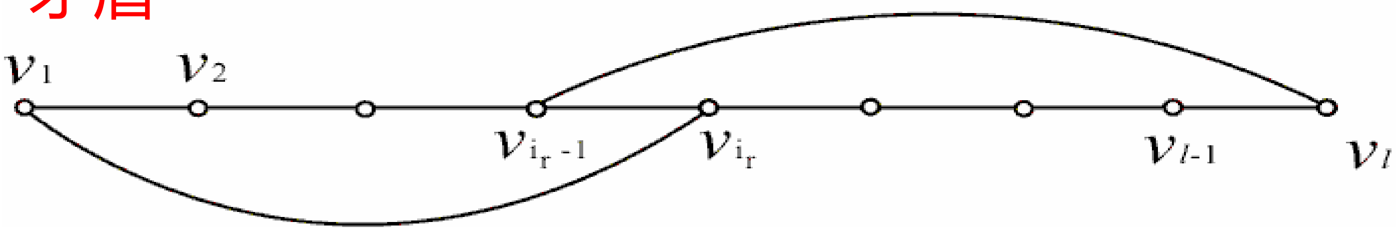
证明题7.4.4

- 1. 证明是连通性（反证法）
  - 假设不连通，至少两个分支G1,G2，各取u，v
  - 则$d(u) \le |G1|-1$，则$d(v) \le |G2|-1$
  - 则$d(u)+d(v)=|G1|+|G2|-2=n-2$
  - 与题设矛盾



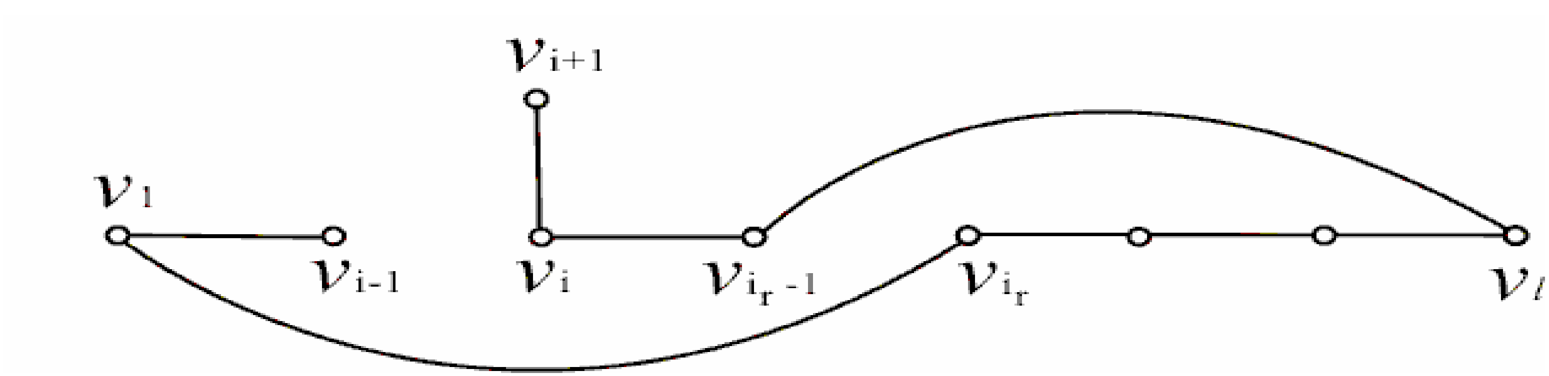
证明题7.4.4

- 2. 证明存在哈密顿通路
  - 假设存在最长的基本路径$\Gamma = v_1, v_2, \dots, v_l$
  - 如果$l < n$，证明存在经过$v_1, v_2, \dots, v_l$的回路
    - i) 如果v_1, v_l相邻，则存在Γ 与(v_1, v_l)构成回路。
    - ii)如果v_1, v_l不相邻，如何证明仍有回路？
      - 基本路径条件➔说明v_1, v_l只能与Γ内的结点相邻
    - 设v_1与$\underbrace{v_{i1}，v_{i2}, \dots, v_{ik}}_{\text{假设有k个结点}}$相邻
    - 则v_l不与k个结点左面相邻（重点，否则回路），则相邻结点数➔$l-k-1$，则$d(v_1)+d(v_l)=k+l-k-1=l-1<n-1$, 矛盾



证明题7.4.4

- iii) 扩展路径法
  - 已证明当l<n, 内部比存在回路，G是连通的
  - **存在不在Γ的结点v与回路结点相邻**（一个圈+一个点）
  - 可以扩展Γ，说明Γ不是基本路径，因此l=n
- iv) $\Gamma=v_1,v_2, \ldots,v_n$是哈密顿通路，如果v1,vn相邻得证；不相邻仍然可以用ii)方法构造一条经过Γ的回路



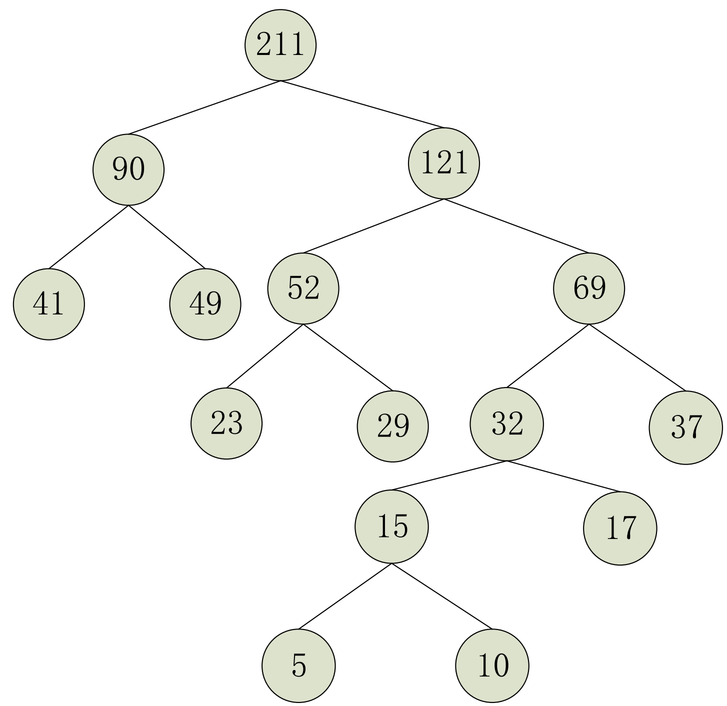
判断题

- ( )1. 若无向图G 中任意结点v的度数$d_G(v) \geq 2$，则G中必存在回路。
- ( )2. n 阶二叉树有 (n +1) / 2个叶结点。
- ( )3. 任何图均有奇数个偶结点。
- ( )4. n 阶二叉树有 (n –1) / 2个分支结点。

计算题

- 一、试求叶的权分别为5，10，17，23，29，37，41，49的**最优叶加权二叉树**及其**叶加权路径长度。**

5	10	17	23	29	37	41	49
	15	17	23	29	37	41	49
		32	23	29	37	41	49
		32		52	37	41	49
				52	69	41	49
				52	69		90
					121		90
							211



其叶加权路径长度L=15+32+69+52+121+90+211=590。

证明题

- 二、设 n 阶**连通无向图**G恰有n–1条边，直接用**归纳法**证明：G是**非循环的。**

证明：**施归纳于n：**

当n =1时，由G有n–1条边可知：G有0条边，即G没有自圈，G是**非循环的**，因此命题为真。（**2分**）

假设对任意k≥1, 当n =k时命题为真。（**1分**）

当n =k+1时：因G为**连通的**，且有k条边，故任意结点v的度数$d_G(v) \ge 1$。若G中任意结点v的度数$d_G(v) \ge 2$，则G的度≥ 2(k+1)，则G中边的个数≥ k+1；这与G有**k条边**的条件**矛盾！**因此，G中必有**结点**v_1的度数$d_G(v_1)=1$。（**3分**）

显然，k 阶无向图$G - v_1$连通且有k – 1 条边，由归纳假设G 是非循环的。设与v_1相邻的结点为v_2，v_1与v_2的连接边为e，G可由$G - v_1$添加结点v_1与连接边e得到，所以G也是是**非循环的**，即n =k+1时命题亦为真。（**3分**）

综上所述，命题为真。（**1分**）

证明题

七、设n阶简单有向图G = <V，E，ψ> 的**基础图为简单完全无向图**，证明：

$$\sum_{v\in V}(d_G^+(v))^2=\sum_{v\in V}(d_G^-(v))^2$$ 。（8分）

证明： 对 n 阶简单有向图 G 有：

$$\sum_{v\in V} d_G^+(v)=\sum_{v\in V} d_G^-(v)$$

即：$\sum_{v\in V}(d_G^+(v)-d_G^-(v))=0$ （**3 分**）

又因为 **G 的基础图为简单完全无向图**，则对 G 中的任意节点 v：

$d_G^+(v)+d_G^-(v)=n-1$ （**2 分**）

故：$\sum_{v\in V}(d_G^+(v)-d_G^-(v))(d_G^+(v)+d_G^-(v))=\sum_{v\in V}(d_G^+(v)-d_G^-(v))(n-1)=0$

$$\sum_{v\in V}(d_G^+(v)^2-d_G^-(v)^2)=0$$ （**3 分**）

因此：$\sum_{v\in V}(d_G^+(v))^2=\sum_{v\in V}(d_G^-(v))^2$

7.1-7.6：图论

- 1. 图论的基本概念
- 2. 子图和图的运算
- 3. 路径、回路和连通图
- 4. 欧拉图和哈密顿图
- 5. 图的矩阵表示
- 6. 树、有向树和有序树

7.1 图论的基本概念

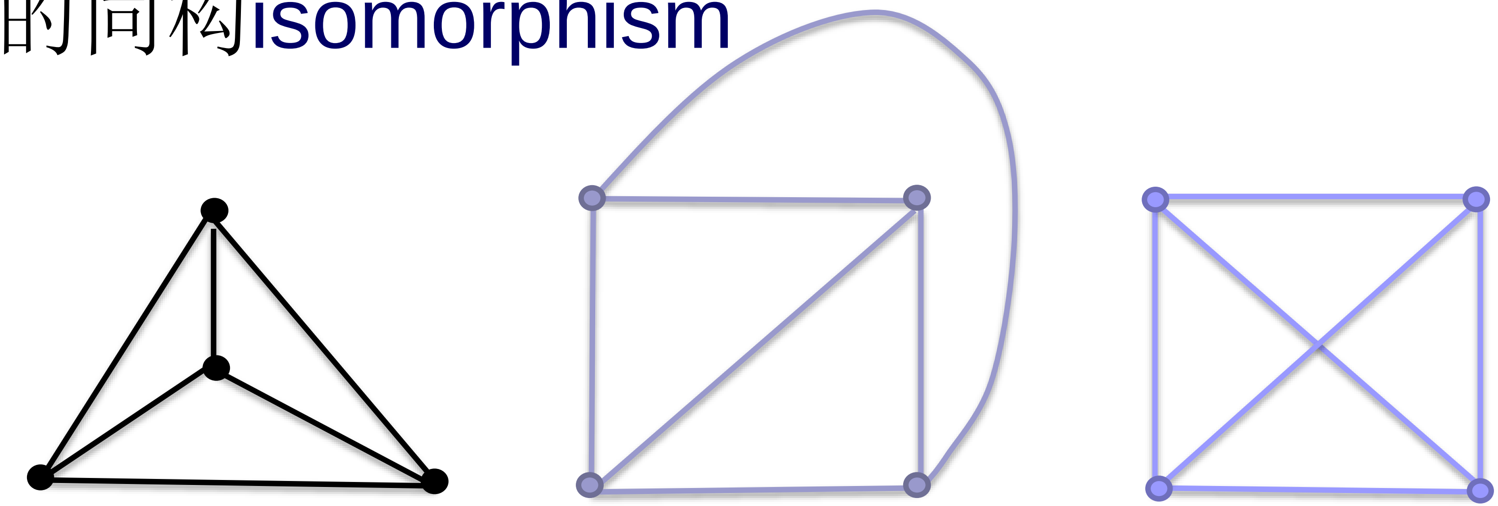
- 目的：图论的基本概念；
- 重点：边的关系，结点度；
- 难点：图同构。
- **本质：结点和边的对应关系**
  - **图的基本结构顶点之间、边(弧)之间，以及顶点与边(弧)的连接关系**

7.1 图论的基本概念

- 图的基本概念：
  - 有向图，无向图，有限图，自环（自圈），平 行弧,（边），多重图，简单图，带权图，图的同构
- 图的基本结构是指图的顶点之间，弧(或边)之间及弧(或边)与顶点之间的连接关系。
  - 主要内容有：顶点之间的邻接，顶点与边(弧)的关联，边(弧)的相邻，顶点的次数，孤立点，平凡图，零图，(n,m)图的性质定理，正则图，完全图。

7.1 图论的基本概念

- 图的同构isomorphism



难题：判断两个图同构的简单而充分的条件？

可以给出一些两个图同构的必要条件！

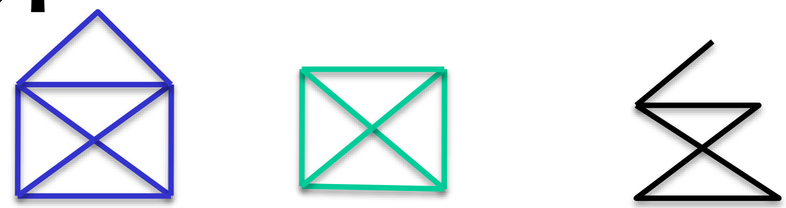
两个同构的图必有(1) 相同的结点个数, (2) 相同的边数，和（3）相同的结点度数

7.2 子图及图的运算

- **目的：**了解子图和图的基本概念；
- **重点：**子图、可运算、图的运算；
- **难点：**图的运算、子图

7.2 子图及图的运算

- 子图关系



G 导出子图 生成子图

- 子图
  - 生成子图
  - 导出子图
    - 由点导出子图
    - 由边导出子图

- 图的运算

- 可运算
  - 三类典型运算（唯一性）
  - 补图

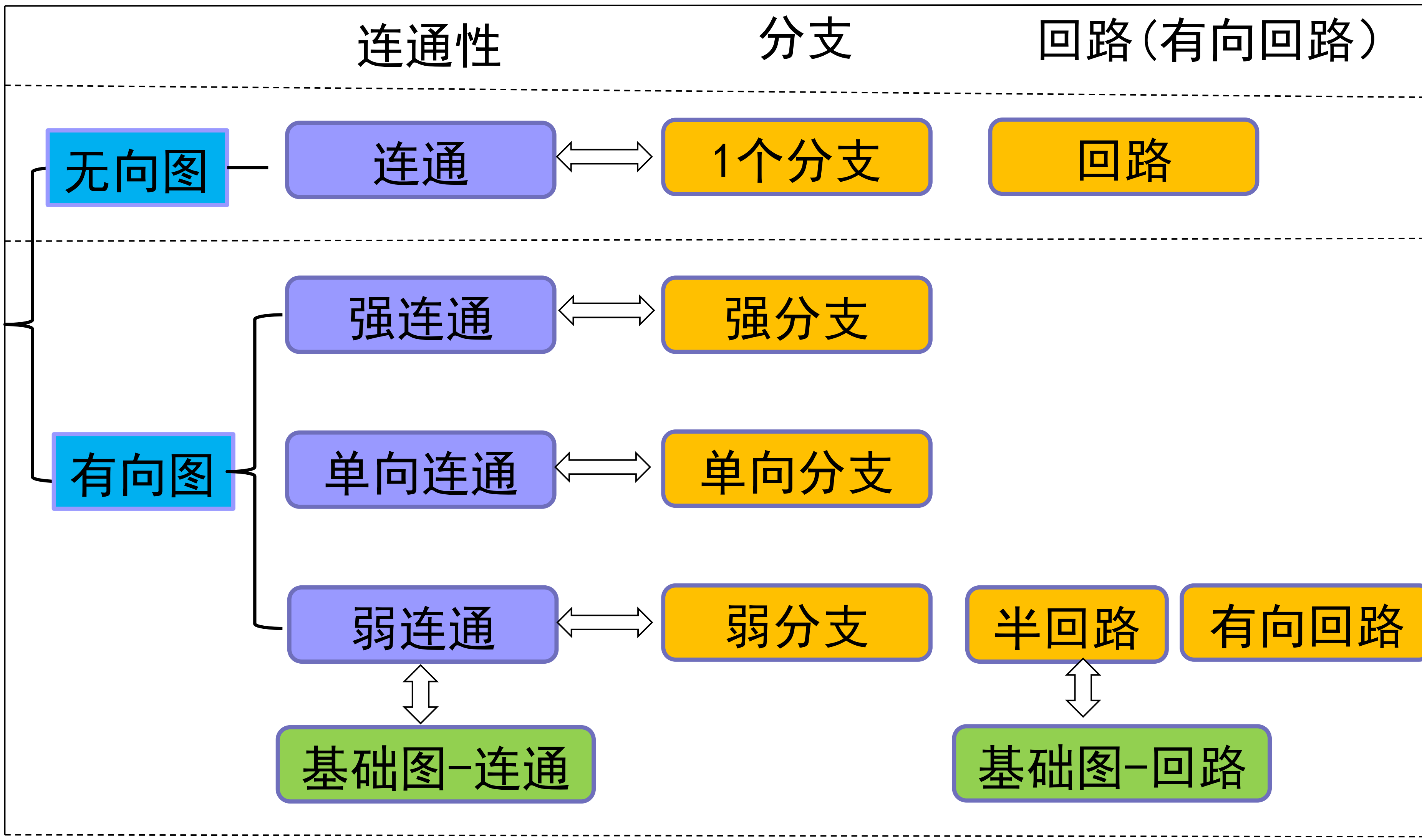
7-3 路径、回路和连通性

目的：了解与路径、回路、连通性、分支、非循环图相关的基本概念；掌握求加权路径的算法、判一个图是否有回路、有有向回路、有半回路的过程；

重点：路径、回路、连通、分支等重要概念；求加权路径的算法；判回路、有向回路、半回路、循环图；

难点：几种判定方法及其原理。

7-3 路径、回路和连通性



连通性
分支
回路(有向回路)
无向图
连通
1个分支
回路
有向图
强连通
强分支
单向连通
单向分支
弱连通
弱分支
半回路
有向回路
基础图-连通
基础图-回路

一些基本性质

- n 阶图中的基本路径的长度小于 n？
- 回路是连通 2 度正则图？
- 半回路是基础图是回路的有向图？
- 有向回路是每个结点的出度和入度均为 1 的弱连通有向图？
- 如果有向图 G 有子图 G′满足：对于 G′中的任意结点 v，$d_{G'}^{-}(v) > 0$，则 G 有有向回路。
- 图 G不是 非循环图 当且仅当G 有子图 G′满足：对于G′的任意结点v，$d_{G'}(v) > 1$？

7-3 路径、回路和连通性

设 G 为 n 阶简单无向图

1) 若 G 的任意两个结点的度数之和大于等于 n – 1 ，则 G 是连通的。

2) 若 对G 的任意结点 v ，

皆有$d_G(v) \geq (n-1)/2$ ，则 G 是连通的。

7-4 欧拉图和哈密顿图

目的：熟悉欧拉定理的运用、判欧拉图和Hamilton图的方法；

重点：判欧拉图、Hamilton图的算法；欧拉定理的运用；

问题：

1.什么是欧拉图、Hamilton图？

2.判定条件是什么？

7-4 欧拉图和哈密顿图

- 每个结点都是偶结点的无向图称为欧拉图。
- 每个结点的出度和入度都相等的有向图称为欧拉有向图。

- 欧拉定理。

7.5 图的矩阵表示

目的：图的各种矩阵表示及性质、图的各种表示之间的关联性质；

重点：图的各种矩阵表示、各种表示之间的关联性质；

难点：图的各种表示之间的关联性质。

7.6 树、有向树、有序树

目的：树的六种定义，了解分支、森林、生成树、生成森林、最小生成树、枝、弦、基本回路、有向树、有向森林、二叉树、最优二叉树、有序树、有序森林、定位二元有序树等概念和性质；掌握求最小生成树、最优二叉树的算法、定位二元有序树和有序森林的双射关系，以及有关的证明方法；

重点：树的六种定义，各种概念、算法及基本的证明思路；

难点：通过树的六种定义方式如何发现树的各种性质，大量相关知识点在证明种的综合运用。

概念图谱

无向图G

什么是树？ **树** $\xrightarrow{\text{G去掉连通约束}}$ **森林**

6个条件(连通;非循环;无自圈;v和v’有唯一路径；G-e非连通;n(E)=n-1)

是否存在？

生成森林 任意G都存在

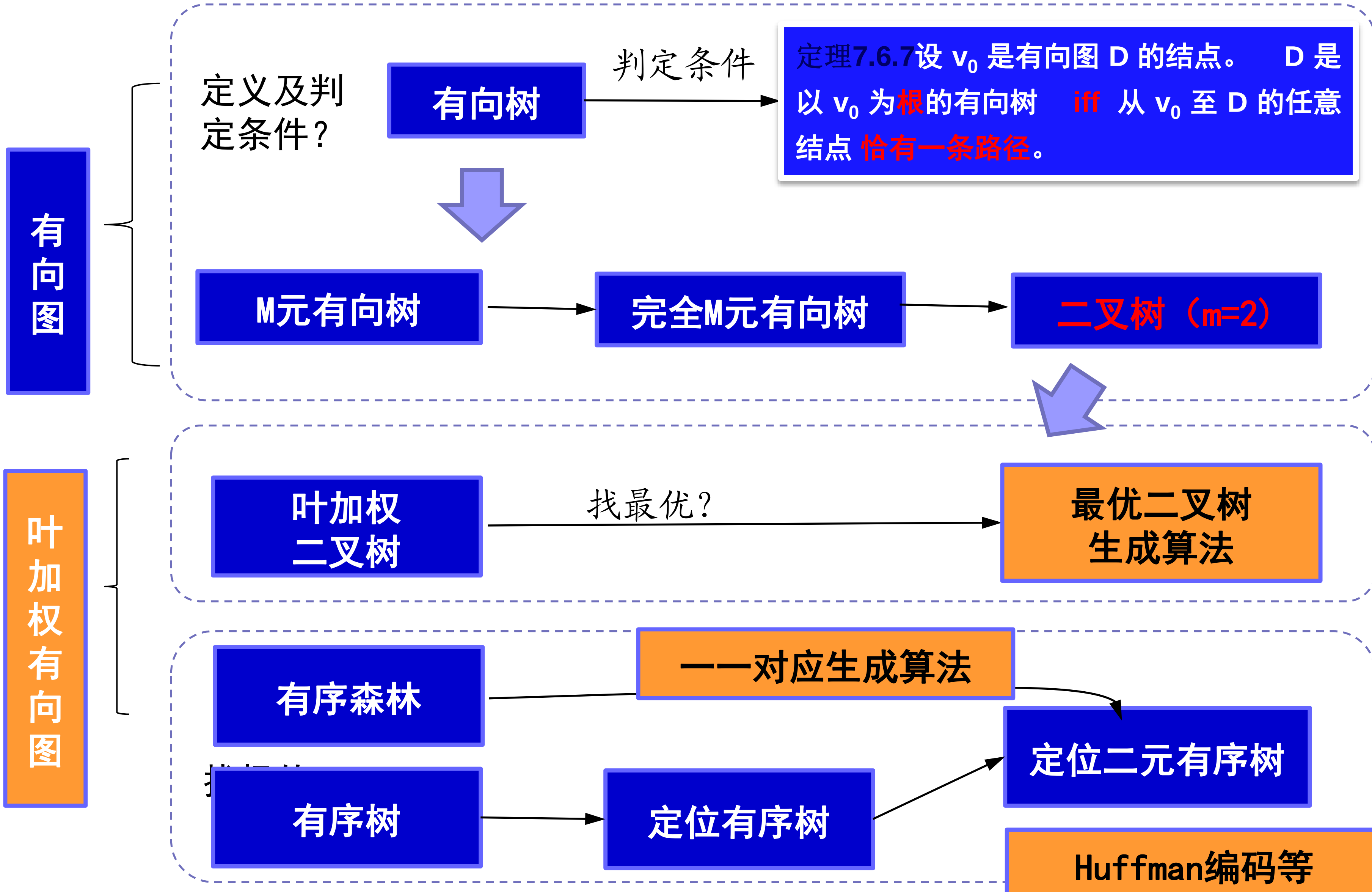
生成树 连通图G

如何找？ **N阶连通无向图** $\xrightarrow[\text{破圈法}]{\text{避圈法}}$ **树**

加权图

找极值？ **最小生成树算法（MST）**

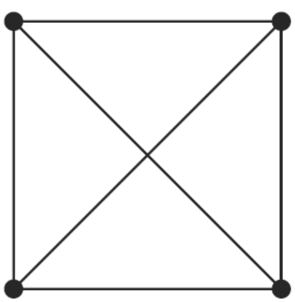
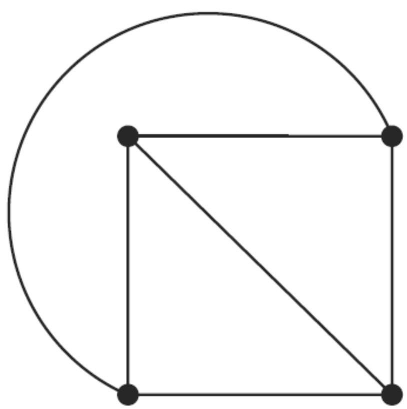
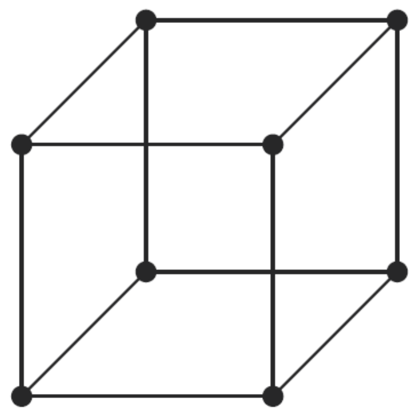
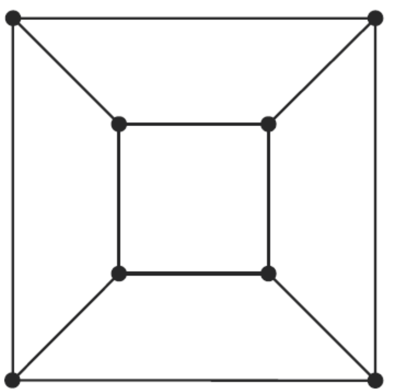
概念图谱


有向图
定义及判定条件？
有向树
判定条件
定理7.6.7设 v_0 是有向图 D 的结点。 D 是以 v_0 为根的有向树 iff 从 v_0 至 D 的任意结点 恰有一条路径。
M元有向树
完全M元有向树
二叉树（m=2）
叶加权有向图
叶加权二叉树
找最优？
最优二叉树生成算法
有序森林
一一对应生成算法
定位二元有序树
有序树
定位有序树
Huffman编码等

- 图论中其他内容

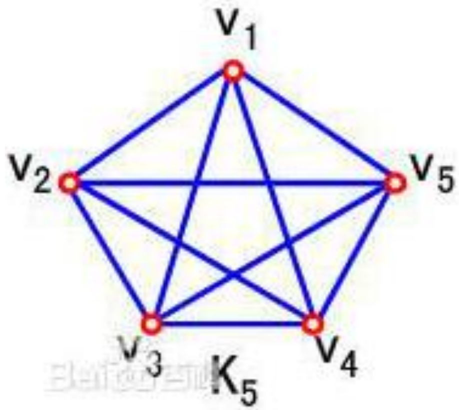
7.8 平面图（ Planar Graph ）

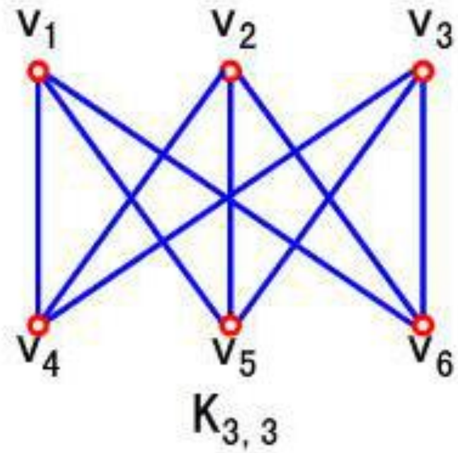
- 问题：在电路板印刷等，如何保证一个图不嫌不相交？
- 定义：设图G=<V,E>，若在平面上能够无交叉线地画图G，则称G是平面图

7.8 平面图

- 问题：
  - 是否存在非平面图？
  - 是否存在充分必要条件？





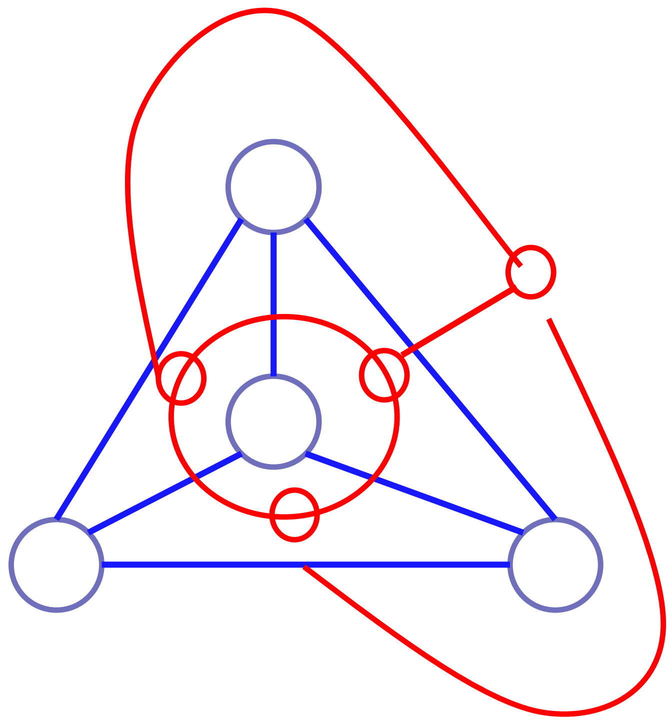
- Kuratowski定理（库拉托夫斯基定理）
  - 一个图是平面图的**必要充分条件是 它不包含任何同胚于K5或K3,3的子图**

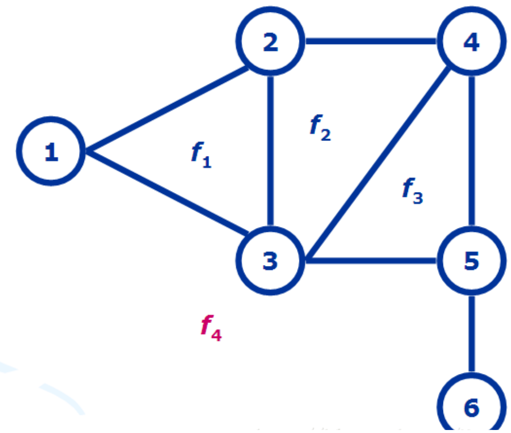
7.8 平面图

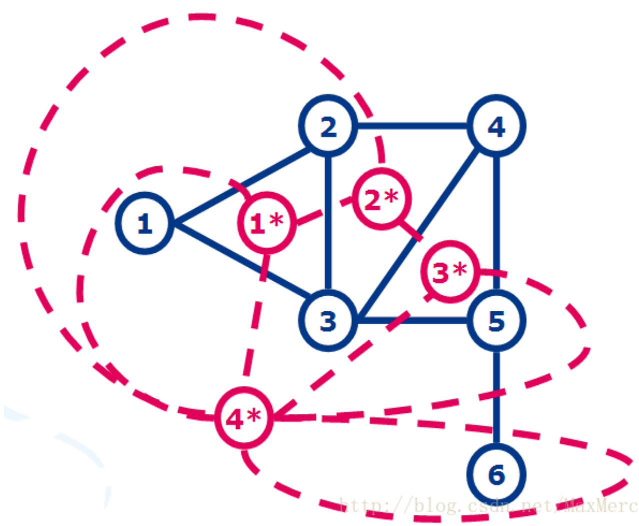
- 问题： Kuratowski定理实际并不容易用？
  - （定理）欧拉公式：设G为n阶m条边r个面的连通平面图，则$n-m+r=2$。
  - 定理：设G是n阶（$n \geq 3$）m条边的简单平面图，则$m \leq 3n-6$
    - 提示：每个面至少3条边，每条边之多是2个面边界

平面图：对偶图

- 对平面着色等价于对对偶图的顶点着色







四色猜想：每个平面地图用4种颜色，就保证不会有两个邻接区域颜色相同

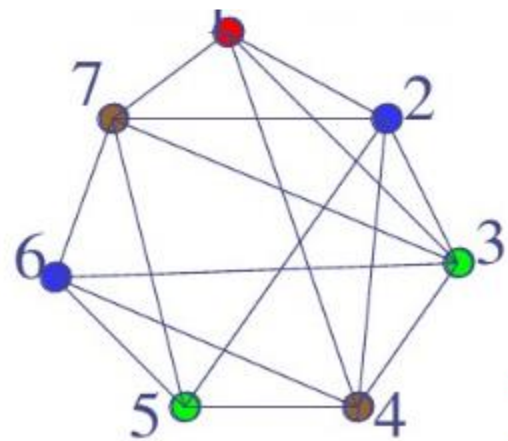
图着色问题Graph Coloring

- 推广：给定一个无向图G=（V, E），其中V为顶点集合，E为边集合，图着色问题即为将V分为K个颜色组，每个组形成一个独立集，即其中没有相邻的顶点。其优化版本是希望获得最小的K值。若n是奇数，则色数=3
- 典型的NP-完全问题
- Welch-powell算法
  - 结点按度数降序排序
  - 先染色最高度数结点，以及不相邻结点着色
  - 依次着色

图着色问题Graph Coloring

- 典型色数
  - 完全图K_n图
    - 色数=n
  - 圈图C_n图
    - 若n是偶数，则色数=2
- 广泛应用
  - 调度问题
    - 科目n
    - 边：同人同考（冲突）
    - 色数：非同考科目

例如以下7门课程有公共学生12；13；14；17；23；24；25；27；34；36；37；45；46；56；57；67。问：如何尽可能少的时段安排考试，无学生冲突



1	1
2	2，6
3	3，5
4	4，7