例. 证明：若n, m∈N，则$n\subset m$ 当且仅当 $n\in m$。

证明: (充分性)

若$n\in m$，则对任意的$x\in n$, 由自然数的传递性得

$x\in m$。因此$n\subseteq m$。

又由于 $n\notin n$, 且$n\in m$, 因此$n\subset m$。

(必要性) 若$n\subset m$, 构造集合$S=\{m\in N \mid n\subset m \Rightarrow n\in m\}$。

下面证明$S=N$。

显然$S\subseteq N$，为证明 $S=N$，只需 验证 S 满足自然数的归纳定义中(3)的(a)与(b):

(a) $0\in S$：因为没有自然数n满足$n\subset 0=\varnothing$;

(b)若$m\in S$, 则对任意的$n\in N$, 若$n\subset m$, 则 $n\in m$.下面证明$m^+\in S$。

对任意的$n\in N$, 假设$n\subset m^+=m\cup\{m\}$成立,下面证明$n\in m^+$。

由三歧性，考虑以下三种情形：$n\in m$, $n=m$, $m\in n$。

例. 证明：若$n, m \in N$，则$n \subset m$ 当且仅当 $n \in m$。

证明: (续)对任意的$n \in N$, 假设$n \subset m^{+} = m \cup \{m\}$成立,下面证明$n \in m^{+}$。由三歧性，考虑以下三种情形：$n \in m$, $n = m$, $m \in n$。

(i) 首先证明$m \in n$不成立。假设$m \in n$, 则有$m^{+} = n$ 或者 $m^{+} \in n$，得$m^{+} = n$ 或者$m^{+} \subset n$ 与$n \subset m^{+}$矛盾。

(i) 若$n \in m$，由$m^{+} = m \cup \{m\}$，得$n \in m^{+}$。

(ii) 若$n = m$，同样由$m^{+} = m \cup \{m\}$得$n \in m^{+}$。

综上所述，由自然数集合的归纳定义得$S = N$。所以命题成立。

例. 证明：若$n, m\in N$，则$n\in m$ 当且仅当 $n^+\in m^+$。

证明: (必要性) 假设 $n\in m$，则$n\subset m$。

已知 $n^+=n\cup\{n\}, m^+=m\cup\{m\}$。

由$n\in m$知$\{n\}\subseteq m$。

因此，$n^+=n\cup\{n\}\subseteq m$，从而 $n^+\subseteq m^+=m\cup\{m\}$ 。

又由于$m\notin m$, 得$n^+\subset m^+$，从而$n^+\in m^+$ 。

(充分性) 反证法。假设$n\notin m$, 则由自然数的三歧性知 $n=m$ 或者$m\in n$。

若$n=m$，则$n^+=m^+$，与$n^+\in m^+$矛盾；

若$m\in n$, 则由必要性证明知$m^+\in n^+$，与$n^+\in m^+$矛盾。

因此假设不成立，即一定有$n\in m$。

例. 证明：若$n\in N$，则不可能有$m\in N$ 使$n<m<n^+$。

证明: (反证法) 假设有$m \in N$使$n < m<n^+$。

由$n < m$ 可知$n \in m$，从而有$n \subset m$。

因为$n \in m$ 且$n \subset m$，所以 $n\cup\{n\} \subseteq m$，即$n^+ \subseteq m$。

又由$m < n^+$，可知$m \in n^+$，从而有 $m \subset n^+$。

由于$n^+ \subseteq m$与$m \subset n^+$矛盾，所以假设不成立，

即不可能有$m \in N$使$n < m < n^+$。

数学归纳法

定理3：按上述方法构造出来的自然数系统 $<N, +, \cdot>$ 满足以下的皮亚诺 (Peano) 公理：

P1： $0 \in N$；

P2： 若 $n \in N$， 则有唯一的后继 $n^+ \in N$；

P3： 若 $n \in N$， 则 $n^+ \neq 0$；

P4： 若 n, $m \in N$ 且 $n^+ = m^+$， 则 $n = m$；

P5： 若 $S \subseteq N$ 满足 （归纳原理）

i) $0 \in S$

ii) 如果 $n \in S$， 则 $n^+ \in S$

则 $S = N$。

称Peano公理的P5为归纳原理，是数学归纳法的基础。

第一数学归纳法

对任意$n \in N$, 令$N_n=\{0, 1,2, \ldots, n-1\}$, $\overline{N}_n=N-N_n=\{n,n+1,n+2, \ldots\}$

定理 (第一数学归纳法)：设$n_0 \in N$。若对每个 $n \in \overline{N}_{n_0}$,

命题 P(n) 满足：

(1) $P(n_0)$是真；

(2) 对任何 $n \in \overline{N}_{n_0}$，若P(n)为真，则$P(n^+)$也为真。

则对所有 $n \in \overline{N}_{n_0}$， P(n)皆为真。

数学归纳法是论域为自然数集合的推理规则：

- $P(0) \wedge (\forall n)(P(n) \rightarrow P(n+1)) \Rightarrow (\forall n) P(n)$
- $P(k) \wedge (\forall n)(n \geq k \wedge P(n) \rightarrow P(n+1)) \Rightarrow (\forall x)(x \geq k \rightarrow P(x))$

定理 (第一数学归纳法)：设$n_0 \in N$。若对每个 $n \in \bar{N}_{n_0}$，命题 P(n) 满足：

(1) $P(n_0)$是真；

(2) 对任何 $n \in \bar{N}_{n_0}$，若P(n)为真，则$P(n^+)$也为真。

则对所有 $n \in \bar{N}_{n_0}$， P(n)皆为真。

证明：令 $S=\{ n \mid n \in N$且$P(n_0+n)$为真$\}$。显然有$S \subseteq N$。下面证明N=S。

(a) $0 \in S$: 因为$P(n_0)$为真，即$P(n_0+0)$为真。

(b) 若$n \in S$,则$n \in N$, $P(n_0+n)$为真.下面证明$n^+ \in S$。

因为$n_0+n^+=(n_0+n)^+ \in N$, 且$n_0+n \in \bar{N}_{n_0}$，由题设(2)知则$P((n_0+n)^+)$ 为真，即$P(n_0+ n^+)$为真，得$n^+ \in S$。

由自然数的归纳定义得 S=N。

定理 (第一数学归纳法)：设$n_0 \in N$。若对每个 $n \in \bar{N}_{n_0}$，命题 P(n) 满足：

(1) $P(n_0)$是真；

(2) 对任何 $n \in \bar{N}_{n_0}$，若P(n)为真，则$P(n^+)$也为真。

则对所有 $n \in \bar{N}_{n_0}$，P(n)皆为真。

用第一归纳法进行证明的步骤：

(i) 直接验证当$n=n_0$时，命题成立；

(ii) 对任意的自然数$k \geq n_0$时，假定当n=k时命题为真，

证明当n=k+1时命题也真。

例. 试证：若$n \in N$, 则$4^{n+1}-3n-4$是9的倍数。

证: 使用第一归纳法，对n进行归纳证明：

(1) 当$n=0$时，$4^{0+1}-3\cdot 0-4=0$是9的倍数；

(2) 对任意的$k\in N$, 假设当$n=k$时命题为真，即$4^{k+1}-3k-4$为9的倍数。则当$n=k+1$时，

有 $4^{(k+1)+1}-3(k+1)-4 = 4\cdot 4^{k+1}-3k-3-4$

$$= 4(4^{k+1}-3k-4)+9(k+1)$$

由于 4k+1- 3k-4是9的倍数，得$4^{(k+1)+1}-3(k+1)-4$也是9的倍数, 即当$n=k+1$时命题为真。

因此结论成立。

例. 试证：若$n \in N$, 则$2^{n+1} > n(n+1)$

证: 使用第一归纳法，对n进行归纳证明：

(1) 当$n=0$时，$2^{0+1}=1> 0(0+1)=0$;

当$n=1$时，$2^{1+1}=4 > 1(1+1)=2$;

当$n=2$时，$2^{2+1}=8 > 2(2+1)=6$;

因此，当$n=0,1$或2时，命题成立。

(2) 对任意的自然数 $k \geq 2$时，假定当$n=k$时，命题成立，

即$2^{k+1} > k(k+1)$。当$n=k+1$时，

$2^{k+1+1} =2\cdot 2^{k+1} > 2k(k+1) \geq (k+2)(k+1)$，即命题成立。

因此，由归纳证明得命题成立。

只有当$k \geq 2$时成立

第二数学归纳法：是一种更强形式的数学归纳法

定理(第二数学归纳法)：设$n_0 \in N$. 若对每个 $n \in \bar{N}_{n_0}$, P(n)满足：

(1) $P(n_0)$是真；

(2) 对任何自然数$n>n_0$, 若当$k \in N$, 且$n_0 \le k < n$时$P(k)$为真，则$P(n)$也为真。

则对所有 $n \in \bar{N}_{n_0}$， P(n)皆为真。

第二归纳法的证明步骤：

(i)直接验证当$n=n_0$时，命题为真；

(ii)对任意的自然数$m> n_0$时，假定对任意的自然数k $(n_0 \le k<m)$，当$n=k$时命题皆真,证明当$n=m$时命题也真。

定理(第二数学归纳法):设$n_0 \in N$. 若对每个$n \in \bar{N}_{n_0}$，P(n)满足:

(1) $P(n_0)$是真;

(2) 对任何自然数$n>n_0$, 若当$k\in N$, 且$n_0 \le k < n$时$P(k)$为真，则 $P(n)$也为真。

则对所有 $n \in \bar{N}_{n_0}$， P(n)皆为真。

证明: 对每个$n \in \bar{N}_{n_0}$, 用$Q(n_0)$表示以下命题:

如果$k\in N$, 且$n_0 \le k \le n$, 则P(k)皆真。

下面验证Q(n)满足第一归纳法的条件。

(i) 因为$Q(n_0)$就是$P(n_0)$，所以由(1)知，$Q(n_0)$为真;

(ii) 对于任意的$n \in \bar{N}_{n_0}$, 假定Q(n)为真，下面证明$Q(n^+)$为真。根据Q(n)的定义，当$k\in N$且$n_0 \le k \le n$时P(k)皆真。因为没有$m\in N$能使$n<m<n^+$, 因此当$n_0 \le k < n^+$时，P(k)也皆真。从而由题设(2)知$P(n^+)$为真, 即$Q(n^+)$为真。

根据第一归纳法，由(i), (ii)知，对任意的$n \in \bar{N}_{n_0}$，Q(n)皆为真。从而由Q(n)的定义知，对任意的$n \in \bar{N}_{n_0}$，P(n)皆为真。

例. 证明: 任意的整数$n \geq 2$都能写成质数的乘积 .

证明： 使用第二数学归纳法，对n进行归纳证明。

(1) $n=2$时， 因为2是质数，2本身就是质数的乘积；

(2) 假设对每个自然数k, 当 $2 \leq k < n$时， k都能写成质数 的乘积, 下面证明n也能写成质数的乘积.

分两种情况：

(1) 若n是质数, 显然它就是一个质数的乘积.

(2) 若n不是质数, 则n可写成$n=a \times b$, 其中， a, b均为整数且$2 \leq a, b < n$。

由归纳假设知，a和b都可写成质数的乘积，所以n也能写成质数的乘积.

根据第二数学归纳法结论成立.

例. 设有两个口袋，分别装有m个球和n个球，并且 m>n。今有二人进行取球比赛，其比赛规则如下：

(1) 二人轮流从口袋里取球，每次只准一个人取；

(2) 每人每次只能从一个口袋里取且至少得取出一个球，多取不限；

(3) 最后取完口袋里的球者为获胜者。

试证明：先取者总能获胜。

证明：关于n进行第二数学归纳法证明：

(1) 当n=0时，仅一个口袋里有球，先取者全部取出即胜，此时命题为真。

(2) 对任意的自然数p>0,假定 对任意的自然数k<p,当n=k时，命题为真。当n=p时，

因为m>p，所以先取者可以从装有m个球的口袋里取出(m-p)个球，此时两个口袋都只有p个球，且后选者需要从一个口袋里取出至少一个球。所以先取者再取时，一个口袋里有p个球，另一个口袋里不足p个球。

根据归纳假设，先取者总能获胜，即当n=p时，命题为真。

错误的例子:

例. 证明若n为自然数，则n+1=n。

证明：对任意的k∈N, 假设当n=k时命题为真，即k+1=k。

从而得到(k+1)+1=k+1，即当n=k+1时命题也为真。

因此由第一归纳法得知，若n为自然数，则n+1=n。

例. 证明世界上所有的人都同岁。

证明: (1) 当n=1时，因为只有一个人，他和他自己同岁，命题为真。

(2) 假定对任意的自然数k>1, 当n=k时命题为真，即任意k个人都同岁。任取 k+1个人，假定为$a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$。

根据假定，$a_1, a_2, \ldots, a_k$同岁，$a_2, a_3, \ldots, a_{k+1}$也同岁。

所以a1,a2,..., a_{k+1}都与a_2同岁，表明$a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$必同岁。

因此，n=k+1时命题也为真。

例：证明以下的二重归纳原理的正确性：设 $i_0, j_0 \in N$。假定对任意自然数$i \geq i_0$ 及 $j \geq j_0$ 皆有一个命题 $P(i, j)$ 满足：

1) $P(i_0, j_0)$为真；

2) 对任意自然数 $k \geq i_0$ 及 $l \geq j_0$，

若$P(k, l)$ 为真，则$P(k+1, l)$ 和 $P(k, l+1)$皆真。

则对任意自然数 $i \geq i_0$ 及 $j \geq j_0$，$P(i, j)$ 皆真。

证明：（第一归纳法）

对于每个$i \geq i_0$，令Q(i)表示命题：对于任意$j \geq j_0$，P (i, j)皆为真。

下面验证：Q(i)满足第一归纳法的条件。

(i) $Q(i_0)$为真（为此对 j 施用第一归纳法）：

(a) $P(i_0, j_0)$为真;

(b) 若$P(i_0, j)$为真, 则$P(i_0, j+1)$为真；由归纳法可知，$Q(i_0)$为真。

(ii)若Q(i)为真($i \geq i_0$)，即对于任意$i \geq i_0$，$j \geq j_0$，P (i, j)为真。

则对于任意$j \geq j_0$，P(i+1, j)为真，即Q (i+1)为真。

由i)和ii)可知，对于任意$i \geq i_0$，Q (i)皆真。

所以，对于任意$i \geq i_0$，$j \geq j_0$，P (i, j)为真。

例：设n，m都是正整数，用二重数学归纳法证明方程

$$x_1+x_2+\cdots x_m=n$$

的非负整数解的个数为C^n_{n+m-1}。