第四章自然数和基数

4.1 自然数及数学归纳法

4.2 基数

自然数和数学归纳法

主要概念：　　集合的后继

主要方法：归纳原理、第一归纳法、第二归纳法

自然数的引进方法

① 公理化方法：皮亚诺公理（G. Peano）；

② 构造性方法：借助集合论，具体构造出 N。

自然数构造的出发点

1) 自然数的各种性质 (运算、大小次序 及 基本定律) ,

都可以从 Peano 公理一一推导出来;

2) 证明构造出来的 “自然数” 满足Peano公理，因此

具有普通自然数的一切性质。

定义1(后继) 若A为集合，则称$A\cup\{A\}$为A的后继，并记为 A^+。

- 每个集合都有唯一的一个后继。

定理1：设 A 为任意集合， 则

(1) $\varnothing^+ = \{\varnothing\}$；

(2) $\{\varnothing\}^+ = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$;

(3) $A \in A^+$;

(4) $A \subseteq A^+$;

(5) $A^+ \neq \varnothing$ 。

- 当$A \subseteq B$时，不一定有$A^+ \subseteq B^+$。

例：令$A = \emptyset$，$B=\{1\}$ 时，显然$A \subseteq B$。

但 $A^+= \{\emptyset\}$， $B^+=\{1, \{1\}\}$,

显然，A^+不是B^+的子集

另如：$A = \{1\}$，$B=\{1, 2\}$ 时，显然$A \subseteq B$。

但 $A^+= \{1, \{1\}\}$， $B^+=\{1, 2, \{1,2\}\}$,

显然，A^+不是B^+的子集

构造自然数系统<N，+，·>

冯·诺依曼（Von Neumann）方案：

$$0 = \varnothing$$
$$1 = 0^+ = \{\varnothing\} = \{0\}$$
$$2 = 1^+ = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} = \{0, 1\}$$
$$3 = 2^+ = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} = \{0, 1, 2\}$$
$$\cdots$$
$$\cdots$$
$$n+1 = n^+ = \cdots = \{0, 1, \cdots, n\}$$
$$\cdots$$

- 对每个自然数$n \in N$，皆有$n \in n^+$及$n \subseteq n^+$
  ($n^+ = n \cup \{n\}$)

定义2: 自然数的集合N可用归纳定义法定义如下：

(1) $0 \in N$， 这里 $0 = \varnothing$；

(2) 若 $n \in N$， 则 $n^{+} \in N$ ；

(3) 若 $S \subseteq N$, 且满足 （极小化）

(a) $0 \in S$

(b) 如果 $n \in S$， 则 $n^{+} \in S$

则 $S = N$。

大于/小于、加法、乘法

对每个自然数 $n\in N$，皆有 $n\in n^+$ 及 $n\subseteq n^+$，据此有:

定义3: 若 $m, n\in N$ 使 $m\in n$, 则称 m小于n (或 n大于 m), 记为 $m<n$ (或 $n>m$)。

- "小于" 关系 $<$ 是自然数集 N 上的反自反、反对称、传递的二元关系

定义4 (归纳定义N上的加法运算 " + " 与乘法运算 " · ") 对任意的 $n, m\in N$，令

i) $m+0=m$， $m\cdot 0=0$;

ii) $m+n^+=(m+n)^+$， $m\cdot n^+=m\cdot n+m$ 。

自然数系统 $<N, +, \cdot>$

定理 2：若 n∈ N，则 $\cup n^+ = n$ 。

$$0 = \varnothing$$

$$1 = 0^+ = \{\varnothing\} = \{0\}$$

$$2 = 1^+ = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} = \{0, 1\}$$

$$3 = 2^+ = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} = \{0, 1, 2\}$$

$$4 = 3^+ = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\} = \{0, 1, 2, 3\}$$

…

$$n+1 = n^+ = \cdots = \{0, 1, \cdots, n\}$$

…

定理 2：若 $n\in N$，则 $\cup n^+ = n$。

(3) 若 $S\subseteq N$, 且满足
(a) $0\in S$
(b) 如果 $n\in S$, 则 $n^+\in S$
则 $S = N$。

证明：令 $S = \{ n \mid n\in N$ 且 $\cup n^+ = n \}$，只需证明S=N。

（1）显然 $S\subseteq N$。

（2）只需验证 S 满足自然数的归纳定义中(3)的(a)与(b):

(a) $0\in S$。因为 $0\in N$ 且 $\cup 0^+ = \cup \varnothing^+ = \cup\{\varnothing\} = \varnothing = 0$。

(b) 若 $n\in S$，则 $n\in N$ 且 $\cup n^+ = n$。显然，$n^+\in N$，且

$$\cup ((n^+)^+) = \cup (n^+\cup\{n^+\})$$

$$= (\cup n^+)\cup(\cup\{n^+\})$$

$$= n\cup n^+ = n^+ 。\quad (n\subseteq n^+)$$

所以 $n^+\in S$。

由自然数集合N的归纳定义法的 iii), 由 (a) 和 (b) 即知 $S = N$。

定理3：按上述方法构造出来的自然数系统 $\langle N, +, \cdot \rangle$ 满足以下的皮亚诺 (Peano) 公理：

P1：$0 \in N$；

P2：若 $n \in N$，则有唯一的后继 $n^+ \in N$；

P3：若 $n \in N$，则 $n^+ \neq 0$；

P4：若 $n, m \in N$ 且 $n^+ = m^+$，则 $n = m$；

P5：若 $S \subseteq N$ 满足（归纳原理）

i) $0 \in S$

ii) 如果 $n \in S$，则 $n^+ \in S$

则 $S = N$。

证明:P1, P2 和 P5 分别为自然数集 N 归纳定义法的 (1), (2), (3)。

P3 可以从定理1 的(5) 直接推导出来。

P4：若 $n, m \in N$ 且 $n^+ = m^+$，则由 定理 2 可得：

$$n = \cup n^+ = \cup m^+ = m 。$$

定理3：按上述方法构造出来的自然数系统 $\langle N, +, \cdot \rangle$ 满足以下的皮亚诺 (Peano) 公理：

P1：$0 \in N$；

P2：若 $n \in N$，则有唯一的后继 $n^+ \in N$；

P3：若 $n \in N$，则 $n^+ \neq 0$；

P4：若 $n, m \in N$ 且 $n^+ = m^+$，则 $n = m$；

P5：若 $S \subseteq N$ 满足 （归纳原理）

i) $0 \in S$; ii) 如果 $n \in S$，则 $n^+ \in S$

则 $S = N$。

Peano公理说明：

(1) 0 是自然数；

(2) 每一个自然数 n 都有一个确定的后继数 n^+；

(3) 没有以 0 为后继的自然数；

(4) 任意两个不同的自然数，其后继也不一样；

(5) 自然数集合是满足 1)、2) 条件的极小集合。

性质 （作为集合的自然数的性质）：

(1) 传递性：若 $n_1 \in n_2$ 且 $n_2 \in n_3$，则 $n_1 \in n_3$。

(2) 三歧性：对于任何两个自然数 n_1，n_2，下列三式

恰有一个成立：$n_1 \in n_2$， $n_1 = n_2$， 或 $n_2 \in n_1$。

(3) 良基性：不存在一个自然数的无穷递降序列

$n_1, n_2, n_3, \ldots, n_i, n_{i+1}, \ldots$ 使得 $n_{i+1} \in n_i$。

由自然数的定义可知，对于每一个自然数，比它小的自然数总是有穷个，并且

$$0 \in 1 \in 2 \in 3 \in \ldots\ldots$$

$$0 \subset 1 \subset 2 \subset 3 \subset \ldots\ldots$$

自然数的性质：

(1) 若$n \in N$，则 $n \notin n$

(2) 若$n, m \in N$, 且$n \in m$, 则$n^+ \in m$或者$n^+ = m$

(3) 若$n, m \in N$，则$n \subset m$ 当且仅当 $n \in m$。

(4) 若$n, m \in N$，则$n \in m$ 当且仅当 $n^+ \in m^+$

(5) 若$n \in N$，则不可能有$m \in N$ 使$n < m < n^+$

例. 试证：若$n\in N$，则 $n\notin n$。

证明: (反证法) 假设有$\mathbf{n} \in \mathbf{N}$使$\mathbf{n} \in \mathbf{n}$，即 $\{\mathbf{n}\} \subseteq \mathbf{n}$，

故$\mathbf{n}^+ = \{\mathbf{n}\} \cup \mathbf{n} \subseteq \mathbf{n}$。

同时$\mathbf{n} \subseteq \mathbf{n}^+$，所以$\mathbf{n} = \mathbf{n}^+$。

又因为$\mathbf{n}=(\mathbf{n}-1)^+$, 因此$(\mathbf{n}-1)^+ = \mathbf{n}^+$。

由皮亚诺公理得$\mathbf{n}-1=\mathbf{n}$，矛盾。

因此假设不成立，即$\mathbf{n}\notin n$

例. 试证：若$n, m \in N$, 且$n \in m$, 则$n^+ \in m$或者$n^+=m$ 。

证明: 构造集合 $S=\{m \in N \mid$ 若$n \in m$, 则$n^+ \in m$ 或者$n^+=m\}$。

只需证明 $S = N$。

显然$S \subseteq N$。为证明 $S = N$，只需 验证 S 满足自然数的归纳定义中(3)的(a)与(b)。

(a) $0 \in S$: 因为对任意的自然数n, $n \in m$不成立。

(b) 假设$m \in S$, 则对任意的自然数 n, 若$n \in m$, 则$n^+ \in m$或者$n^+=m$。下面证明$m^+ \in S$。

因为$m^+=m \cup \{m\}$，对任意的$n \in m^+$, 有$n \in m$或者$n=m$。

当$n \in m$时，由假设得 $n^+ \in m$ 或者$n^+=m$。

当$n^+ \in m$时，由于$m \in m^+$, 由传递性得$n^+ \in m^+$。

当$n^+ = m$时，同样由于$m \in m^+$, 得$n^+ \in m+$。

当$n=m$时，$n^+=m^+$, 此时$m^+ \in S$。

因此， $S = N$，即命题得证。

例. 证明：若$n\in N$，则不可能有$m\in N$使$n<m<n^+$。

证明: (反证法) 假设有$m\in N$使$n<m<n^+$。

由$n<m$可知$n\in m$，从而有$n\subset m$。

因为$n\in m$且$n\subset m$，所以$n\cup\{n\}\subseteq m$，即$n^+\subseteq m$。

又由$m<n^+$，可知$m\in n^+$，从而有$m\subset n^+$。

由于$n^+\subseteq m$与$m\subset n^+$矛盾，所以假设不成立，

即不可能有$m\in N$使$n<m<n^+$。

定理3：按上述方法构造出来的自然数系统 $<N, +, \cdot>$ 满足以下的皮亚诺 (Peano) 公理：

P1：$0 \in N$；

P2：若 $n \in N$，则有唯一的后继 $n^+ \in N$；

P3：若 $n \in N$，则 $n^+ \neq 0$;

P4：若 $n, m \in N$ 且 $n^+ = m^+$，则 $n = m$;

P5：若 $S \subseteq N$ 满足 （归纳原理）

i) $0 \in S$

ii) 如果 $n \in S$，则 $n^+ \in S$

则 $S = N$ 。

称Peano公理的P5为归纳原理，是数学归纳法的基础。

第一数学归纳法

对任意n∈N, 令N_n={0, 1,2, …, n-1}, $\overline{N}_n$=N-N_n={n,n+1,n+2, …}

定理(第一数学归纳法)：设n_0 ∈N。 若对每个 n∈$\overline{N}_{n_0}$, 命题P(n)满足：

(1) P(n_0)是真；

(2) 对任何 n∈$\overline{N}_{n_0}$，若P(n)为真，则P(n^+)也为真。

则对所有 n∈$\overline{N}_{n_0}$， P(n)皆为真。

数学归纳法是论域为自然数集合的推理规则：

- $P(0) \land (\forall n)(P(n) \to P(n+1)) \Rightarrow (\forall n) P(n)$
- $P(k) \land (\forall n)(n \geq k \land P(n) \to P(n+1)) \Rightarrow (\forall x)(x \geq k \to P(x))$

定理(第一数学归纳法)：设$n_0 \in N$。 若对每个 $n \in \bar{N}_{n_0}$，命题P(n)满足：

(1) $P(n_0)$是真；

(2) 对任何 $n \in \bar{N}_{n_0}$，若P(n)为真，则$P(n^+)$也为真。

则对所有 $n \in \bar{N}_{n_0}$， P(n)皆为真。

证明：令 $S=\{ n \mid n \in N$且$P(n_0+n)$为真$\}$。显然有$S \subseteq N$。下面证明N=S。

(a) $0 \in S$: 因为$P(n_0)$为真，即$P(n_0+0)$为真。

(b) 若$n \in S$,则$n \in N$, $P(n_0+n)$为真.下面证明$n^+ \in S$。

因为$n_0+n^+ =(n_0+n)^+ \in N$, 且$n_0+n \in \bar{N}_{n_0}$，由题设(2)知则$P((n_0+n)^+)$ 为真，即$P(n_0+ n^+)$为真，得$n^+ \in S$。

由自然数的归纳定义得 S=N。

定理(第一数学归纳法)：设$n_0 \in N$。若对每个$n \in \bar{N}_{n_0}$，命题P(n)满足：

(1) $P(n_0)$是真；

(2) 对任何$n \in \bar{N}_{n_0}$，若P(n)为真，则$P(n^+)$也为真。

则对所有$n \in \bar{N}_{n_0}$，P(n)皆为真。

第一归纳法的证明步骤：

(i) 直接验证当$n=n_0$时，命题成立；

(ii) 对任意的自然数$k \geq n_0$时，假定当n=k时命题为真，

证明当n=k+1时命题也真。

例. 试证：若$n \in N$, 则$4^{n+1}-3n-4$是9的倍数。

证: 使用第一归纳法，对n进行归纳证明：

(1) 当$n=0$时，$4^{0+1}-3\cdot 0-4=0$是9的倍数；

(2) 对任意的$k\in N$, 假设当$n=k$时命题为真，即$4^{k+1}-3k-4$为9的倍数。则当$n=k+1$时,

有 $4^{(k+1)+1}-3(k+1)-4 = 4\cdot 4^{k+1}-3k-3-4$

$= 4(4^{k+1}-3k-4)+9(k+1)$

由于 $4k+1-3k-4$是9的倍数，得$4^{(k+1)+1}-3(k+1)-4$也是9的倍数, 即当$n=k+1$时命题为真。

因此结论成立。

例. 试证：若$n \in N$, 则$2^{n+1} > n(n+1)$

证: 使用第一归纳法，对n进行归纳证明：

(1) 当$n=0$时，$2^{0+1}=1> 0(0+1)=0$;

当$n=1$时，$2^{1+1}=4 > 1(1+1)=2$;

当$n=2$时，$2^{2+1}=8 > 2(2+1)=6$;

因此，当n=0,1或2时，命题成立。

(2) 对任意的自然数 $k \geq 2$时，假定当$n=k$时，命题成立，

即$2^{k+1} > k(k+1)$。当$n=k+1$时，

$2^{k+1+1} =2\cdot 2^{k+1} > 2k(k+1) \geq (k+2)(k+1)$，即命题成立。

因此，由归纳证明得命题成立。

只有当$k \geq 2$时成立

第二数学归纳法：是一种更强形式的数学归纳法

定理(第二数学归纳法)：设$n_0 \in N$. 若对每个 $n \in \bar{N}_{n_0}$，P(n)满足：

(1) $P(n_0)$是真；

(2) 对任何自然数$n>n_0$, 若当$k \in N$, 且$n_0 \le k < n$时$P(k)$为真，则$P(n)$也为真。

则对所有 $n \in \bar{N}_{n_0}$，P(n)皆为真。

第二归纳法的证明步骤：

(i)直接验证当$n=n_0$时，命题为真；

(ii)对任意的自然数$m> n_0$时，假定对任意的自然数k ($n_0 \le k<m$)，当$n=k$时命题皆真,证明当$n=m$时命题也真。

定理(第二数学归纳法):设$n_0 \in N$. 若对每个$n \in \bar{N}_{n_0}$, P(n)满足:

(1) $P(n_0)$是真;

(2) 对任何自然数$n>n_0$, 若当$k \in N$, 且$n_0 \le k < n$时$P(k)$为真,

则$P(n)$也为真。

则对所有 $n \in \bar{N}_{n_0}$， P(n)皆为真。

证明: 对每个$n \in \bar{N}_{n_0}$, 用$Q(n_0)$表示以下命题:

如果$k \in N$, 且$n_0 \le k \le n$, 则P(k)皆真。

下面验证Q(n)满足第一归纳法的条件。

(i) 因为$Q(n_0)$就是$P(n_0)$，所以由(1)知，$Q(n_0)$为真;

(ii) 对于任意的$n \in \bar{N}_{n_0}$, 假定Q(n)为真。

根据Q(n)的定义，当$k \in N$且$n_0 \le k \le n$时P(k)皆真。因为没有$m \in N$能使$n<m<n^+$, 因此当$n_0 \le k < n^+$时，P(k)也皆真。从而由题设(2)知$P(n^+)$为真, 即$Q(n^+)$为真。

根据第一归纳法，由(i), (ii)知，对任意的$n \in \bar{N}_{n_0}$，Q(n)皆为真。

从而由Q(n)的定义知，对任意的$n \in \bar{N}_{n_0}$， P(n)皆为真。

例. 证明: 任意的整数$n \geq 2$都能写成质数的乘积 .

证明： 使用第二数学归纳法，对n进行归纳证明。

(1) $n=2$时，因为2是质数，2本身就是质数的乘积；

(2) 假设对每个自然数k, 当 $2 \leq k < n$时，k都能写成质数 的乘积, 下面证明n也能写成质数的乘积.

分两种情况:

(1) 若n是质数, 显然它就是一个质数的乘积.

(2) 若n不是质数, 则n可写成$n=a \times b$, 其中，a, b均为整数且$2 \leq a, b < n$。

由归纳假设知，a和b都可写成质数的乘积，所以n也能写成质数的乘积.

根据第二数学归纳法结论成立.