第三章 函数

第三章函数

3. 1 基本概念

3. 2 函数的复合

3. 3 特殊性质的函数与逆函数

3. 4 集合的特征函数

3.1 基本概念

重点：

- 函数的定义及判定
- 函数的限制
- 全函数

- 函数是一种特殊类型的二元关系，见下列关系：

$f_1 = \{<a, 2>, <b, 2>, <c, 1>\}$ 是函数

$f_2 = \{<a, 2>, <b, 2>, <a, 1>\}$ 不是函数

定义3.1 (部分函数) 如果从集合 X 到 Y 的二元关系 f 是 “单值” 的，即 f 满足以下条件：

若 $<x, y_1> \in f$ 且 $<x, y_2> \in f$，则 $y_1 = y_2$，

就称 f 为从 X 到 Y 的部分函数。

- 若 f 是部分函数且 $<x, y> \in f$，则称 y 是 f 在 x处的值 (在 f 作用下x的像点)，记为 $y = f(x)$， 并称 x 为 y 的一个源像点。

设 f 为从集合X 到 Y 的部分函数，则

(1) f 的定义域 dom (f):

$$\mathrm{dom}(f) = \{\, x \in X \mid 有\ y \in Y 使\ y = f(x) \,\}$$

$$(\langle x, y\rangle \in f)$$

若 $x \in \mathrm{dom}(f)$，就称 f 在 x 处有定义, 记为 "$f(x)\downarrow$"; 否则称 f 在 x处无定义，记为 "$f(x)\uparrow$"，显然 $\mathrm{dom}(f) \subseteq X$ 。

(2) f 的值域 ran (f):

$$\mathrm{ran}(f) = \{\, y \in Y \mid 有\ x \in X 使\ y = f(x) \,\}$$

$$(\langle x, y\rangle \in f)$$

显然 $\mathrm{ran}(f) \subseteq Y$ 。

即: 对每个 $x \in \mathrm{dom}(f)$，都有唯一的 $y \in \mathrm{ran}(f)$ 使得 $\langle x, y\rangle \in f$

例：设 U是全集， P(U)是U的幂集。两个集合的并和交运算可如下定义：

$$\cup: P(U) \times P(U) \to P(U)$$

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$$

$$\cap: P(U) \times P(U) \to P(U)$$

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}$$

例：N 是自然数集合，函数 S：N →N 定义为：

对任意 $n \in N$， $S(n) = n+1$ 。

显然，$S(0) = 1$， $S(1) = 2$，函数 S 称为后继函数 。

例: 考察下面列举的从R到R的二元关系:

(1) $\ln=\{\langle x, \ln x\rangle \mid x\in R$ 且 $x>0\}$

(2) $\sqrt{\ } = \{\langle x, \sqrt{x}\rangle \mid x\in R$ 且 $x \ge 0\}$

(3) $\exp = \{\langle x, e^x\rangle \mid x \in R\}$

(4) $\arcsin = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in R$ 且 $\sin y=x\}$ ✗

例：下列关系中哪些是部分函数？对于不是部分函数的关系，说明不能构成部分函数的原因。

(1) $\{<x, y> \mid x, y \in N$ 且 $x+y<10\}$；

(2) $\{<x, y> \mid x, y \in R$ 且 $y = x^2\}$；

(3) $\{<x, y> \mid x, y \in R$ 且 $y^2 = x\}$。

解: (1) 不是部分函数：存在$<0, 1>, <0, 2> \in f$, 但$1 \neq 2$ 。

(2) 是部分函数；

(3)不是部分函数：存在$<4, 2>, <4, -2> \in f$，但$2 \neq -2$ 。

定义3.2 设 f 为从集合 X 到集合 Y 的 部分函数。

1) 若 dom (f) = X，则称 f 为从 X 到 Y 的全函数，简称 f 为从 X 到 Y 的函数，记为 $f: X \to Y$。

2) 若 dom (f) $\subset$ X，则称 f 为从 X 到 Y 的严格部分函数。

3) 若 ran (f) = Y，则称 f 为从 X 到 Y 上的部分函数。

4) 若 ran (f) $\subset$ Y，则称 f 为从 X 到 Y 内的部分函数。

5) 若对任意的 x_1，$x_2 \in$ dom (f)，

当 $x_1 \neq x_2$ 时，皆有 $f(x_1) \neq f(x_2)$，

则称 f 为从 X 到 Y 的 1 - 1 部分函数。

(即：当 $f(x_1) = f(x_2)$ 时，皆有 $x_1 = x_2$)

- 当 f 为 X 到 Y 的全函数时，f 既满足单值性，且处处有定义

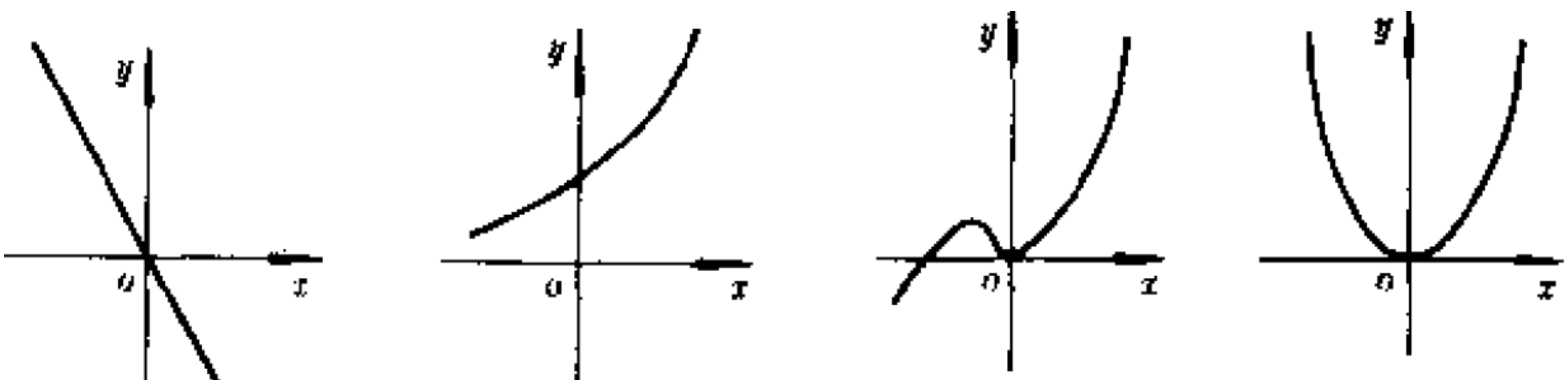
例: 如下定义从R到R的部分函数:

$f_1 = \{<x, -2x> \mid x \in R\}$ R到R上的1-1函数,

$f_2 = \{< x, 2^x> \mid x \in R\}$ R到R内的1-1函数,

$f_3 = \{ <x, x^3+2x^2> \mid x \in R\}$ R到R上的函数,

$f_4 = \{<x, x^2>\mid x \in R\}$ R到R内的函数,



f_1 f_2 f_3 f_4

例：(1) 实数的平方根运算 $x^{1/2}$ 是从R到R内的部分函数，因为 $x^{1/2}$ 对 $x<0$ 无定义．

(2) $f(x) = 1/x$ 是从R到R 的部分函数，因为 $1/x$ 在 $x = 0$处无定义．

(3) $f(x) = x$ 是一个从R到R上的全函数 。

定义7.3(函数 f 的限制)：设函数f : X→Y，A ⊆ X，则 $f \cap (A \times Y)$ 是从 A 到 Y 的函数，称为 f 在 A上的限制，记作 $f|_A$，又称 f 为 $f|_A$ 到 X 的延拓。$f|_A$ 可表示为：

$$f|_A = \{<x, y> \mid <x, y> \in f \wedge x \in A\}$$

例：设函数 f : R→R 为：$f(x) = x^2$。

则 N ⊆ R 且

$$f|_N = \{<x, x^2> \mid x \in N\}$$
$$= \{<0, 0>, <1, 1>, <2, 4>, <3, 9>, \ldots\ldots\}$$

例：设函数 f : R → R, $f(x) = |x|$, $|x|$ 为 x 的绝对值，设 R_+ 是正实数集合，$g : R_+ \to R$，$g(x) = x$，则：

g 是 f 的限制，即 $g = f|_{R+}$，而 f 是 g 的延拓。

定义(部分函数 f 的像与源像) 设 f 为从集合 X 到集合 Y 的部分函数，$A \subseteq X$ 且 $B \subseteq Y$。令

$$f[A] = \{ y \mid 存在\ x \in A\ 使\ y = f(x) \}$$

$$f^{-1}[B] = \{ x \in X \mid 存在\ y \in B\ 使\ y = f(x) \}$$

称 f[A] 为 A 在 f 下的像，$f^{-1}[B]$ 为 B 在 f 下的源像。

即：

$$f[A] = \{ f(x) \mid x \in A\ 且\ f(x)\downarrow \}$$

$$f^{-1}[B] = \{ x \in X \mid f(x)\downarrow\ 且\ f(x) \in B \}$$

- $\mathrm{dom}(f) = \{ x \in X \mid 有\ y \in Y\ 使\ y = f(x) \} = f^{-1}[Y]$
- $\mathrm{ran}(f) = \{ y \mid 有\ x \in X\ 使\ y = f(x) \} = f[X]$
- 实际上定义了一个新的函数 $F: P(X) \to P(Y)$,

  对于 $\forall A \subseteq X, F(A) = \{ f(x) \mid x \in A\ 且\ f(x)\downarrow \}$

定理: 设 f 为从集合 X 到集合 Y 的部分函数。

(1) 若 $A_1 \subseteq A_2 \subseteq X$， 则 $f[A_1] \subseteq f[A_2]$;

(2) 若 $B_1 \subseteq B_2 \subseteq Y$， 则 $f^{-1}[B_1] \subseteq f^{-1}[B_2]$;

(3) 若 $A \subseteq dom(f)$， 则 $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$;

(4) 若 $B \subseteq ran(f)$， 则 $B = f[f^{-1}[B]]$。

证明：1) 和 2) 显然，只证 3) 和 4)

3) 任取 $x \in A$, 因 $A \subseteq dom(f)$, 故 $f(x)\downarrow$且 $f(x) \in f[A]$， 所以 $x \in f^{-1}[f[A]]$。

为什么是$\subseteq$？

4) 任取 $y \in B$，则 $y \in ran(f)$ (因 $B \subseteq ran f$)。

因此有 $x \in X$ 使$y = f(x)$, 从而得 $x \in f^{-1}[B]$得$y \in f[f^{-1}[B]]$。

另一方面，若 $y \in f[f^{-1}[B]]$，则有 $x \in f^{-1}[B]$ 使 $f(x) = y$， 所以 $y \in B$。因此$B = f[f^{-1}[B]]$。

定理 设 f 为从集合X到Y的部分函数，$A \subseteq P(X)$, $B \subseteq P(Y)$

1) $f[\cup A] = \cup\{ f[X] \mid X \in A \}$;

2) 若 $A \neq \varnothing$，则 $f[\cap A] \subseteq \cap\{ f[X] \mid X \in A \}$;

3) $f^{-1}[\cup B] = \cup\{ f^{-1}[Y] \mid Y \in B \}$;

4) 若 $B \neq \varnothing$，则 $f^{-1}[\cap B] = \cap\{ f^{-1}[Y] \mid Y \in B \}$。

证明：只证 4)，其它的证明与此类似。

任取 $Y \in B$，则由 $\cap B \subseteq Y$ 可得 $f^{-1}[\cap B] \subseteq f^{-1}[Y]$,

故有 $f^{-1}[\cap B] \subseteq \cap\{ f^{-1}[Y] \mid Y \in B \}$;

任取 $x \in \cap\{ f^{-1}[Y] \mid Y \in B \}$, 任取 $Y \in B$, 则 $x \in f^{-1}[Y]$,

即 $f(x) \in Y$。

因此 $f(x) \in \cap B$，即 $x \in f^{-1}[\cap B]$ 。

故有：$\cap\{ f^{-1}[Y] \mid Y \in B \} \subseteq f^{-1}[\cap B]$ 。

定理 若 f 为从集合 X 到 Y 的部分函数 且 $A \subseteq X$，则

$$\mathrm{dom}\,(f|_A) = A \cap \mathrm{dom}\, f,$$

$$\mathrm{ran}\,(f|_A) = f[A]$$

若 $A \subseteq \mathrm{dom}\,(f)$，则 $f|_A$ 是全函数。

定义. 设A和B为任意两个集合，记A到B的全函数的集合为B^A： $B^A = \{f \mid f : A \to B\}$。

例: 设A为任意集合，B为任意非空集合。

(1) $A^{\phi}=\{\phi\}$:

因为存在唯一的一个从ϕ 到A的函数ϕ，

(2) $\phi^{B}= \phi$:

因为不存在从B到ϕ的函数，

(3) 是否 存在 从 B 到 $\varnothing$ 的 部分 函数?

定理：若A和B都是有限集，则

$$n(B^A) = (\, n(B)\,)^{n(A)}$$

证明: 设n(A)=m且 n(B)=n，对m用归纳法。

当m=0时，A= ϕ, $B^{\phi}=\{\phi\}$, $n(B^{\phi}) =1 =n^0$.

设m=k ($k \geq 0$)时定理成立。

若m=k+1，则$A \neq \phi$, 因此存在$a \in A$。

任取$f \in B^A$, 令$f' = f|_{\{A-\{a\}\}}$, 则f'是从A-{a}到B的函数，得

$f = f' \cup \{<a, f(a)>\}$。按照归纳假设，$n(B^{A-\{a\}})=n^k$。

因此，f'可有n^k种选择。

由于 f(a)可取B中的任意元素，所以可有n种选择，故f可有$n^k \cdot n$

$= n^{k+1}$种选择，即$n(B^A)=n^{k+1}$。