回顾

- R 为 A 上的等价关系， x, y∈A
  - ✓ R是自反、对称、传递的
  - ✓ x的等价类： $[x]_R = \{ y \mid y \in A \wedge xRy \}$
    - $[x]_R \neq \emptyset$, $[x]_R \subseteq A$, $[x]_R = [y]_R$ 当且仅当xRy
    - $x \bar{R} y$ 当且仅当 $[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$
    - $\bigcup_{x \in A} [x]_R = A$
  - ✓ A关于R的商 $A/R = \{ [x]_R \mid x \in A \}$ 构成A的一个划分
- $\Pi \subseteq P(A)$ 是A的一个划分，如果Π满足以下三个条件
  - ✓ 若 $S \in \Pi$，则 $S \neq \phi$;
  - ✓ $\bigcup \Pi = A$;
  - ✓ 若 $S_1, S_2 \in \Pi$, 且 $S_1 \cap S_2 \neq \phi$，则 $S_1 = S_2$
- ✓ Π 是A的一个划分，则 $R_\Pi = \{ \langle x, y \rangle \mid$ 存在 $S \in \Pi$, 使 $x, y \in S \}$ 是A上的一个等价关系

例：设C_1和C_2都是集合A的划分。试判断下列集类是不是A的划分，为什么？

(1) $C_1 \cup C_2$;

(2) $C_1 - C_2$。

解: (1) 不是。

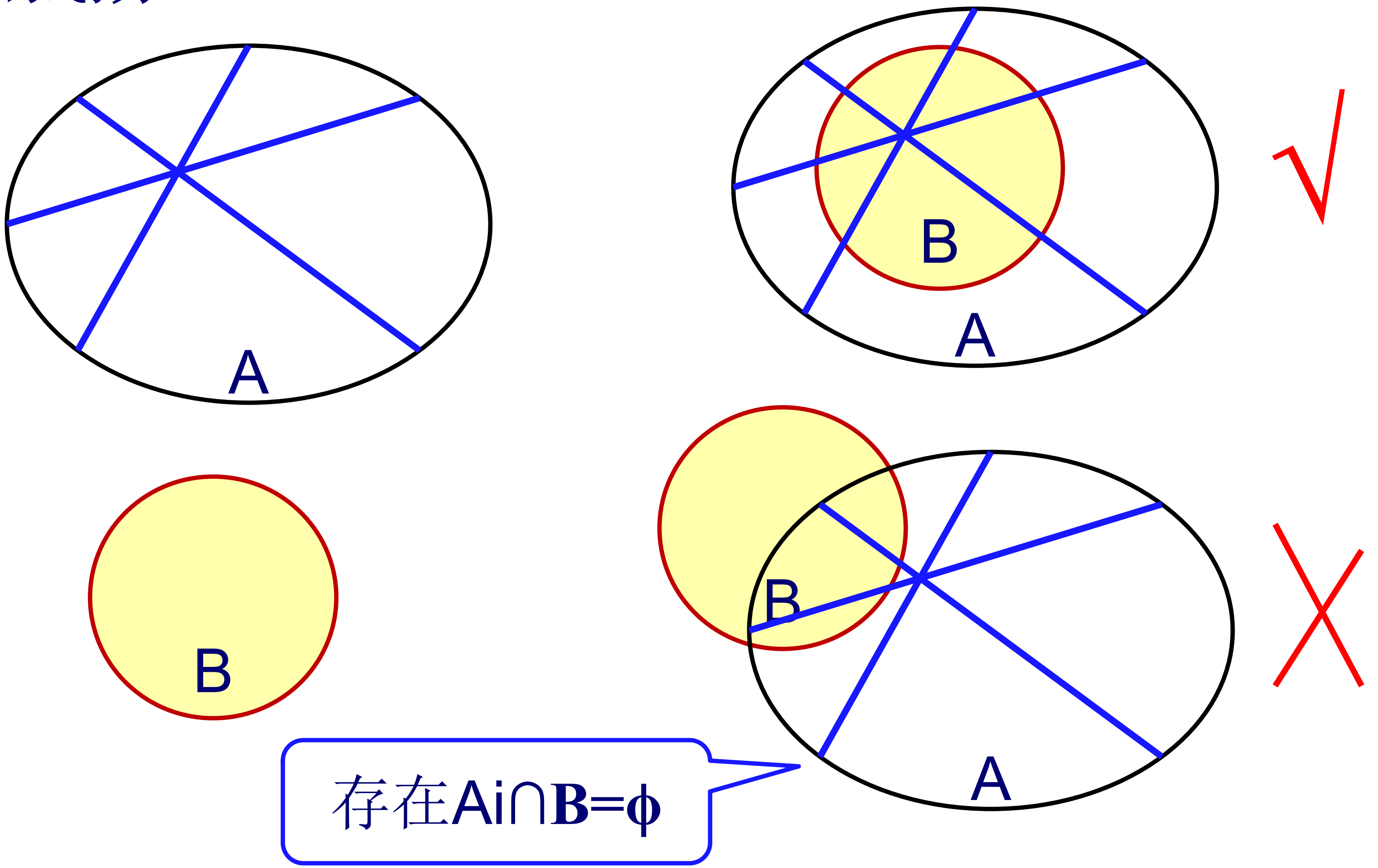
反例：$A=\{1, 2, 3, 4\}$, $C_1=\{ \{1, 2\}, \{3, 4\} \}$，$C_2=\{ \{1, 3\}, \{2, 4\}\}$，$C_1 \cup C_2= \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}\}$。

因为$\{3, 4\} \cap \{1, 3\} \neq \phi$, 因此 $C_1 \cup C_2$不是A的划分。

(3) 不是。

反例：$A=\{1, 2, 3, 4\}$, $C_1=\{ \{1, 2\}, \{3, 4\} \}$，$C_2=\{ \{1, 2\}, \{3\}, \{4\}\}$, $C_1-C_2=\{ \{3, 4\}\}$ 不是A的划分。

例：设$A\cap B$都是非空集，$\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$为$A$的划分。试证明$\{A_1\cap B, A_2\cap B, \ldots, A_n\cap B\}$并不总是集合$A\cap B$的划分。



例：设A为恰含n个元素的非空有限集，则有多少个不同的A上的等价关系？其中秩为2的又有多少？

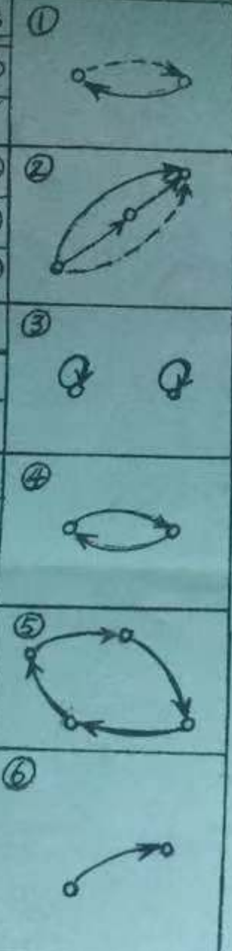
解：设集合$A=\{a_1,\ldots, a_n\}$，则A上的等价关系数目即为集合A上的划分个数。
设s(n, k) 表示包含n个元素的集合A划分成k个子集的划分个数，则A的划分个数为$\sum_{k=1}^{n} s(n,k)$。
（s(n, k)被称为第二类Stirling数，可证明：
$$s(n, k)=k\cdot s(n-1, k)+s(n-1, k-1),\ n\geq k \geq 1$$）
把n个元素划分成k个子集, 有两种情形：
1. a_n构成一个子集，剩下的k-1个子集由$A-\{a_n\}$划分生成,共有S(n-1,k-1)个划分；
2. a_n不单独构成一个子集, 即$A-\{a_n\}$被划分成k个子集,然后再挑选一个子集，把a_n放入，共有$k\cdot s(n-1,k)$个划分。
因此$s(n, k)=k\cdot s(n-1, k)+s(n-1, k-1)$。
显然，$s(n, 1)=1$，$n\geq 1$ 。可递推求出s(n,k)。
秩为2的等价关系数目为 s(n, 2)。

第二章　关系

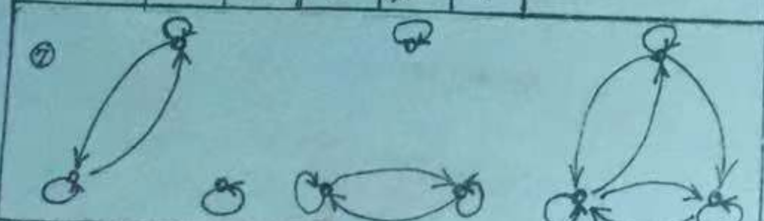
重点掌握:

- 关系的定义
- 全域关系、恒等关系
- 关系的表示: 关系图, 关系矩阵
- 关系的性质: 自反, 反自反, 对称, 反对称, 传递
- 关系运算：集合运算，$R\circ S$, R^{-1}, $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$
- 序关系：偏序（半序）, 严格偏序（拟序）, 全序, 良序、
- 等价关系 与 划分的

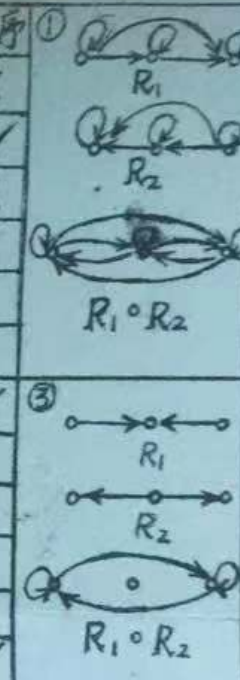
关系表Ⅰ	自反	反自反	对称	反对称	传递
$R_1 \cup R_2$	✓	✓	✓	×①	×①
$R_1 \cap R_2$	✓	✓	✓	✓	✓
$R_1 - R_2$	×	✓	✓	✓	×②
$R_1 \oplus R_2$	×	✓	✓	×①	×①
$\sim R$	×	×	✓	×	×③
I_A	✓	×	✓	✓	✓
I_ϕ	✓	✓	✓	✓	✓
ϕ	×	✓	✓	✓	✓
$A \times A$	✓	×	✓	×	✓
R°	✓	×	✓	✓	✓
R^{-1}	✓	✓	✓	✓	✓
R^2	✓	×④	✓	×⑤	✓
$R_1 \circ R_2$	✓	×④	×⑦	×⑤	×⑦
$S(R)$	✓	✓	✓	×	×⑥
$t(R)$	✓	×④	✓	×⑤	✓
$r(R)$	✓	×	✓	✓	✓
R^+	✓	×	✓	×	✓
R^*	✓	×	✓	×	✓

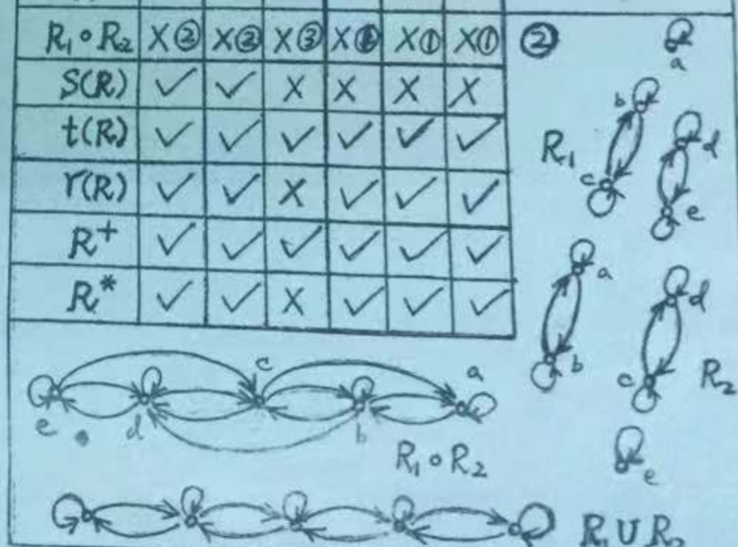


⑦



关系表Ⅱ	相容	等价	拟序	半序	全序	良序
$R_1 \cup R_2$	✓	×②	×	×	×	×
$R_1 \cap R_2$	✓	✓	✓	✓	✓	✓
$R_1 - R_2$	×	×	×	×	×	×
$R_1 \oplus R_2$	×	×	×	×	×	×
$\sim R$	×	×	×	×	×	×
I_A	✓	✓	×	✓	×	×
I_ϕ	✓	✓	✓	✓	✓	✓
ϕ	×	×	✓	×	×	×
$A \times A$	✓	✓	×	×	×	×
R°	✓	✓	×	✓	×	×
R^{-1}	✓	✓	✓	✓	✓	×
R^2	✓	✓	✓	✓	✓	✓
$R_1 \circ R_2$	×②	×②	×③	×①	×①	×①
$S(R)$	✓	✓	×	×	×	×
$t(R)$	✓	✓	✓	✓	✓	✓
$r(R)$	✓	✓	×	✓	✓	✓
R^+	✓	✓	✓	✓	✓	✓
R^*	✓	✓	×	✓	✓	✓





第三章　函数

第三章函数

3.1 基本概念

3.2 函数的复合

3.3 特殊性质的函数与逆函数

3.4 集合的特征函数

3.1 基本概念

重点：

- 函数的定义及判定
- 函数的限制
- 全函数

- 函数是一种特殊类型的二元关系，见下列关系：

$f_1 = \{<a, 2>, <b, 2>, <c, 1>\}$ 是函数

$f_2 = \{<a, 2>, <b, 2>, <a, 1>\}$ 不是函数

定义3.1 (部分函数) 如果从集合 X 到 Y 的二元关系 f 是 “单值” 的，即 f 满足以下条件：

若$<x, y_1> \in f$ 且$<x, y_2> \in f$，则 $y_1 = y_2$，

就称 f 为从 X 到 Y 的部分函数。

- 若 f 是部分函数且$<x, y> \in f$，则称 y 是 f 在 x处的值 (在 f 作用下x的像点)，记为 $y = f(x)$，并称 x 为 y 的一个源像点。

例: 考察下面列举的从R到R的二元关系:

(1) $\ln=\{\langle x, \ln x\rangle \mid x\in R$ 且 $x>0\}$

(2) $\sqrt{\ } = \{\langle x, \sqrt{x}\rangle \mid x\in R$ 且 $x \geq 0\}$

(3) $\exp = \{\langle x, e^x\rangle \mid x \in R\}$

(4) $\arcsin = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in R$ 且 $\sin y=x\}$

不满足单值性

例：下列关系中哪些是部分函数？对于不是部分函数的关系，说明不能构成部分函数的原因。

(1) $\{<x, y> \mid x, y \in N$ 且 $x+y<10\}$；

(2) $\{<x, y> \mid x, y \in R$ 且 $y=x^2\}$；

(3) $\{<x, y> \mid x, y \in R$ 且 $y^2=x\}$。

解: (1) 不是部分函数：存在$<0, 1>, <0, 2> \in f$, 但$1 \neq 2$ 。

(2) 是部分函数；

(3)不是部分函数：存在$<4, 2>, <4, -2> \in f$，但$2 \neq -2$ 。

设 f 为从集合X 到 Y 的部分函数，则

(1) f 的定义域 dom (f):

$$\mathrm{dom}(f) = \{ x \in X \mid \text{有 } y \in Y \text{ 使 } y = f(x) \} \subseteq X$$

若 $x \in \mathrm{dom}(f)$，就称 f 在 x 处有定义, 记为 “ $f(x)\downarrow$”; 否则称 f 在 x处无定义，记为 “ $f(x)\uparrow$”，显然 $\mathrm{dom}(f) \subseteq X$ 。

(2) f 的值域 ran (f):

$$\mathrm{ran}(f) = \{ y \in Y \mid \text{有 } x \in X \text{ 使 } y = f(x) \} \subseteq Y$$

单值性: 对每个 $x \in \mathrm{dom}(f)$，都有唯一的 $y \in \mathrm{ran}(f)$，

使得 $\langle x, y \rangle \in f$

定义3.1 设 f 为从集合 X 到集合 Y 的 部分函数。

1) 若 dom (f) = X，则称 f 为从 X 到 Y 的全函数，简称 f 为从 X 到 Y 的函数，记为 $f: X \to Y$。

2) 若 dom (f) ⊂ X，则称 f 为从 X 到 Y 的严格部分函数。

3) 若 ran (f) = Y，则称 f 为从 X 到 Y 上的部分函数。

4) 若 ran (f) ⊂ Y，则称 f 为从 X 到 Y 内的部分函数。

5) 若对任意的 x_1，$x_2 \in dom(f)$，

当 $x_1 \neq x_2$ 时，皆有 $f(x_1) \neq f(x_2)$，

则称 f 为从 X 到 Y 的 1 - 1 部分函数。

(即：当 $f(x_1) = f(x_2)$ 时，皆有 $x_1 = x_2$)

- 当 *f* 为 X 到 Y 的全函数时，f 既满足单值性，且处处有定义

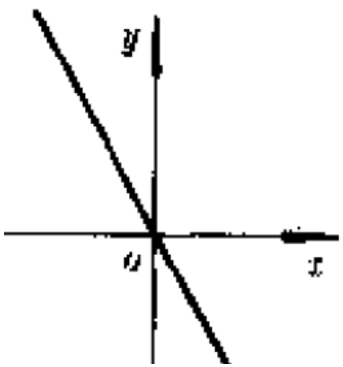
例: 如下定义从R到R的部分函数:

$f_1 = \{<x, -2x> \mid x \in R\}$ R到R上的1-1函数,

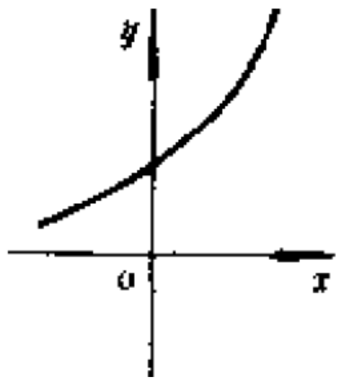
$f_2 = \{< x, 2^x> \mid x \in R\}$ R到R内的1-1函数,

$f_3 = \{ <x, x^3+2x^2> \mid x \in R\}$ R到R上的函数,

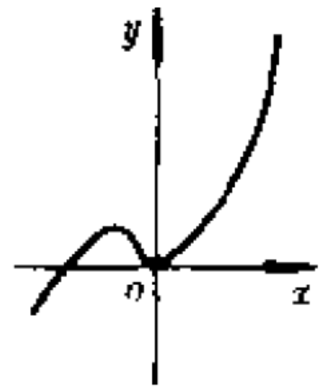
$f_4 = \{<x, x^2>\mid x \in R\}$ R到R内的函数,



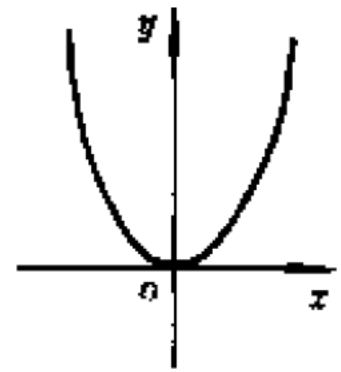
f_1



f_2



f_3



f_4

定义3.2 (函数 f 的限制)：设函数$f: X \to Y$，$A \subseteq X$，则

✓ $f \cap (A \times Y)$ 是从A到Y的函数，称为 f 在 A上的限制，记作 $f|_A$

✓ 称 f 为 $f|_A$ 到 X 的 延拓 。

$f|_A$ 可表示为： $f|_A = \{<x, y> \mid <x, y> \in f \land x \in A\}$

例：设函数 $f: R \to R$ 为： $f(x) = x^2$。

有 $N \subseteq R$ 且 $f|_N = \{<x, x^2> \mid x \in N\} = \{<0,0>, <1,1>, <2,4>, <3,9>, \ldots\ldots\}$

例：设函数 $f: R \to R$, $f(x) = |x|$, $|x|$ 为 x 的绝对值 , 设 R_+ 是正实数集合，$g: R_+ \to R$， $g(x) = x$， 则 :

g 是 f 的限制，即 $g = f|_{R+}$， 而 f 是 g 的 延拓 。

定理 若 f 为从集合 X 到 Y 的部分函数 且 $A \subseteq X$， 则

$$\mathrm{dom}\,(f|_A) = A \cap \mathrm{dom}\, f,$$

$$\mathrm{ran}\,(f|_A) = f[A]$$

若 $A \subseteq \mathrm{dom}(f)$，则 $f|_A$ 是全函数。

定义3.3 (部分函数 f 的 像与源像) 设 f 为从集合 X 到集合 Y 的部分函数，$A \subseteq X$ 且 $B \subseteq Y$。

- ✓ $f[A] = \{ y \mid \text{存在 } x \in A \text{ 使 } y = f(x) \}$
- ✓ $f^{-1}[B] = \{ x \in X \mid \text{存在 } y \in B \text{ 使 } y = f(x) \}$

称 $f[A]$ 为 A 在 f 下的像，$f^{-1}[B]$ 为 B 在 f 下的源像。

即：$f[A] = \{ f(x) \mid x \in A \text{ 且 } f(x)\downarrow \}$

$f^{-1}[B] = \{ x \in X \mid f(x)\downarrow \text{ 且 } f(x) \in B \}$

- $\text{dom}(f) = \{ x \in X \mid \text{有 } y \in Y \text{ 使 } y = f(x) \} = f^{-1}[Y]$
- $\text{ran}(f) = \{ y \mid \text{有 } x \in X \text{ 使 } y = f(x) \} = f[X]$
- 实际上定义了一个新的函数 $F: P(X) \to P(Y)$，

对于 $\forall A \subseteq X, F(A) = \{ f(x) \mid x \in A \text{ 且 } f(x)\downarrow \}$

定理: 设 f 为从集合 X 到集合 Y 的部分函数。

(1) 若 $A_1 \subseteq A_2 \subseteq X$，则 $f[A_1] \subseteq f[A_2]$；

(2) 若 $B_1 \subseteq B_2 \subseteq Y$，则 $f^{-1}[B_1] \subseteq f^{-1}[B_2]$；

(3) 若 $A \subseteq \mathrm{dom}(f)$，则 $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$；

(4) 若 $B \subseteq \mathrm{ran}(f)$，则 $B = f[f^{-1}[B]]$。

证明：(1) 和 (2) 显然，只证 (3) 和 (4)

(3) 任取 $x \in A$，因 $A \subseteq \mathrm{dom}(f)$，故 $f(x)\downarrow$ 且 $f(x) \in f[A]$，

所以 $x \in f^{-1}[f[A]]$。得 $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$ 为什么是$\subseteq$？

4) 任取 $y \in B$，则 $y \in \mathrm{ran}(f)$ (因 $B \subseteq \mathrm{ran}\, f$)。

因此存在 $x \in X$ 使 $y = f(x)$，得 $x \in f^{-1}[B]$，从而 $y \in f[f^{-1}[B]]$。

任取 $y \in f[f^{-1}[B]]$，则存在 $x \in f^{-1}[B]$ 使 $f(x) = y$，所以 $y \in B$。

因此 $B = f[f^{-1}[B]]$。

定理 设 f 为从集合X到Y的部分函数，$\mathcal{A} \subseteq P(X)$, $\mathcal{B} \subseteq P(Y)$

1) $f[\cup\mathcal{A}] = \cup\{ f[X] \mid X \in \mathcal{A} \}$；

2) 若 $\mathcal{A} \neq \varnothing$，则 $f[\cap\mathcal{A}] \subseteq \cap\{ f[X] \mid X \in \mathcal{A}\}$；

3) $f^{-1}[\cup\mathcal{B}] = \cup\{ f^{-1}[Y] \mid Y \in \mathcal{B} \}$；

4) 若 $\mathcal{B} \neq \varnothing$，则 $f^{-1}[\cap\mathcal{B}] = \cap\{ f^{-1}[Y] \mid Y \in \mathcal{B} \}$。

证明：只证 4)，其它的证明与此类似。

任取 $Y \in \mathcal{B}$，则由 $\cap\mathcal{B} \subseteq Y$ 可得 $f^{-1}[\cap\mathcal{B}] \subseteq f^{-1}[Y]$，

故有 $f^{-1}[\cap\mathcal{B}] \subseteq \cap\{ f^{-1}[Y] \mid Y \in \mathcal{B}\}$；

任取 $x \in \cap\{ f^{-1}[Y] \mid Y \in \mathcal{B}\}$，任取 $Y \in \mathcal{B}$，则 $x \in f^{-1}[Y]$，

即 $f(x) \in Y$。

因此 $f(x) \in \cap\mathcal{B}$，即 $x \in f^{-1}[\cap\mathcal{B}]$。

故有：$\cap\{ f^{-1}[Y] \mid Y \in \mathcal{B}\} \subseteq f^{-1}[\cap\mathcal{B}]$。

定义. 设A和B为任意两个集合，记A到B的**全函数**的集合为B^A： $B^A = \{f \mid f: A \to B\}$。

例: 设A为任意集合，B为任意非空集合。

(1) $A^\phi = \{\phi\}$:

因为存在唯一的一个从ϕ到A的函数ϕ,

(2) $\phi^B = \phi$:

因为不存在从B到ϕ的函数,

(3) 是否 存在 从 B 到 $\varnothing$ 的 部分 函数?

定理：若A和B都是有限集，则

$$n(B^A) = (\,n(B)\,)^{n(A)}$$

证明: 设n(A)=m且 n(B)=n，对m用归纳法。

当m=0时，$A=\phi$, $B^\phi=\{\phi\}$, $n(B^\phi)=1=n^0$.

设m=k ($k \geq 0$)时定理成立。

若m=k+1，则$A \neq \phi$, 因此存在$a \in A$。

任取$f \in B^A$, 令$f' = f|_{\{A-\{a\}\}}$, 则f'是从A-{a}到B的函数，得

$f = f' \cup \{\langle a, f(a)\rangle\}$。按照归纳假设，$n(B^{A-\{a\}})=n^k$。

因此，f'可有n^k种选择。

由于 f(a)可取B中的任意元素，所以可有n种选择，故f可有$n^k \cdot n$

$= n^{k+1}$种选择，即$n(B^A)=n^{k+1}$。

例： 设 $X=\{a, b, c\}$, $Y=\{0, 1\}$,

$X\times Y=\{\langle a, 0\rangle,\langle b, 0\rangle,\langle c, 0\rangle,\langle a, 1\rangle,\langle b, 1\rangle,\langle c, 1\rangle\}$,

并且$X\times Y$有 2^6个可能的子集。

然而只有如下2^3个子集定义了从X到Y的全函数：

$f_0=\{\langle a, 0\rangle,\langle b, 0\rangle,\langle c, 0\rangle\}$

$f_1=\{\langle a, 0\rangle,\langle b, 0\rangle,\langle c, 1\rangle\}$

$f_2=\{\langle a, 0\rangle,\langle b, 1\rangle,\langle c, 0\rangle\}$

$f_3=\{\langle a, 0\rangle,\langle b, 1\rangle,\langle c, 1\rangle\}$

$f_4=\{\langle a, 1\rangle,\langle b, 0\rangle,\langle c, 0\rangle\}$

$f_5=\{\langle a, 1\rangle,\langle b, 0\rangle,\langle c, 1\rangle\}$

$f_6=\{\langle a, 1\rangle,\langle b, 1\rangle,\langle c, 0\rangle\}$

$f_7=\{\langle a, 1\rangle,\langle b, 1\rangle,\langle c, 1\rangle\}$

从X到Y的每个全函数恰有$|X|$个有序偶，X中的每一个x 的函数值可有$|Y|$种不同的取法，故从X到Y的函数个数为 $|Y^X|=|Y|^{|X|}$。

例：设A和B为有限集，n(A)=m, 且n(B)=p。

(1) 有多少个从A到B的1-1函数？

(2) 有多少个从A到B上的函数？

例：(1) 显然，当m>p时，不存在从A到B的1-1函数。

当$m \le p$时，从A到B的1-1函数个数为从B中选m个元素构成的排列个数，即 $P_p^m = \frac{p\ !}{(p-m)\ !}$

(2) 当$m < p$时，不存在从A到B上的函数；

当$p = 0$且$m \ne 0$，0个；$p = 0$且$m = 0$，1个；

当 $m \ge p \ge 1$时，从A到B上的一个函数对应集合A的一个包含p个子集的划分，而一个划分对应p!个函数

因此从A到B上的函数个数等于s(m, p) p! 其中， s(m, p)为集合A的包含p个子集的划分个数。

3.2 函数的合成

重点：

- 函数的合成（复合）运算

关系的合成：设 R 是 X 到 Y 的关系， S 是Y 到 Z的关系，

则 $R \circ S = \{<x, z> \mid \exists y \in Y (<x, y> \in R \wedge < y, z> \in S) \}$

为 X 到 Z 的关系，称为 R 和 S 的合成关系。

定理 (部分函数的合成) 设 f 为从 X 到 Y 的部分函数，g 为从 Y 到 Z 的部分函数， 则复合关系 $f \circ g$ 为从 X 到 Z 的部分函数。

证明：若$<x, z_1>, <x, z_2> \in f \circ g$，则有 $y_1, y_2 \in Y$ 使

$<x, y_1>, <x, y_2> \in f$ 且$<y_1, z_1>, <y_2, z_2> \in g$ 。

因为 f，g是部分函数，所以 $y_1 = y_2$ 且$z_1 = z_2$，

因此$f \circ g$ 是一个从 X 到 Z 的部分函数。

定义. 设 f 为从X到Y的部分函数，g为从Y到Z的部分函数, 则称复合关系 $f\circ g$ 为 f 与 g 的合成（复合）函数，用 $g\circ f$ 表示，即

$$g\circ f=\{<x, z> \mid x\in X \wedge z\in Z \wedge \exists y\,(y\in Y \wedge y = f(x) \wedge z = g(y))\}$$

- 合成函数 $g\circ f$ 与合成关系 $f\circ g$ 表示同一个集合。

这种表示上的差异是历史形成的，具有其方便之处:

- $(g\circ f)(x) = g(f(x))$
- 当 $<x, z> \in f\circ g$ 时，必有 $y\in Y$使 $<x, y>\in f$且$<y, z>\in g$

定理：设 f 为从 X 到 Y 的部分函数，g 为从 Y 到 Z 的部分函数，

则 (1) $dom(g \circ f) = f^{-1}[dom\ g]$ 且 $ran(g \circ f) = g[ran\ f]$。

(2) 若 f 和 g 都是全函数，则 $g \circ f$ 也是全函数。

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

证明：(1) 给定任意 $x \in dom(g \circ f)$，则有 $z \in Z$ 使 $\langle x, z\rangle \in g \circ f$，

因此，必有 $y \in Y$ 使 $\langle x, y\rangle \in f$ 且 $\langle y, z\rangle \in g$ 。

但由 $\langle y, z\rangle \in g$ 可知 $y \in dom\ g$，由 $\langle x, y\rangle \in f$ 即得 $x \in f^{-1}[dom\ g]$。

给定任意 $x \in f^{-1}[dom\ g]$，则有 $y \in dom\ g$ 使 $\langle x, y\rangle \in f$ 。

但由 $y \in dom\ g$ 知有 $z \in Z$ 使 $\langle y, z\rangle \in g$，故 $\langle x, z\rangle \in g \circ f$，

这表明 $x \in dom(g \circ f)$ 。

同理可证： $ran(g \circ f) = g[ran\ f]$。

(2)若 f 和 g 都是全函数，则 $f^{-1}[Y] = X$ 且 $dom\ g = Y$，

因此 $dom(g \circ f) = f^{-1}[dom\ g] = f^{-1}[Y] = X$。

这表明 $g \circ f$ 也是全函数。

例. 设 $X = \{1, 2, 3\}$, f, g, h 是从 X 到 X 的函数, 它们分别定义为:

$f = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle\}$

$g = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$

$h = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 1\rangle\}$

求复合函数 $f \circ g$，$g \circ f$，$f \circ g \circ h$

解: $f \circ g = \{\langle 1, 3\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 1\rangle\}$

$g \circ f = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 2\rangle\}$

$f \circ g \circ h = \{\langle 1, 3\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$

例. 设对于 $x \in R$，$f(x) = x+2$，$g(x) = x-2$，$h(x) = 3x$，R 是实数集合。求 $g\circ f$，$f\circ g$，$f\circ f$，$g\circ g$，$f\circ h$，$h\circ g$，$h\circ f$，$(f\circ h)\circ g$，$f\circ(h\circ g)$。

解 $g\circ f = \{ <x , x> \mid x\in R \}$

$f\circ g = \{ <x , x> \mid x\in R \} = g\circ f$

$f\circ f = \{ <x , x+4> \mid x\in R \}$

$g\circ g = \{ <x , x-4> \mid x\in R \}$

$f\circ h = \{ <x , 3x+2> \mid x\in R \}$

$h\circ g = \{ <x , 3x-6> \mid x\in R \}$

$h\circ f = \{ <x , 3x+6> \mid x\in R \}$

$(f\circ h) \circ g = \{ < x, 3x-4 > \mid x\in R \}$

$f\circ(h \circ g) = \{ < x, 3x-4 > \mid x\in R \} = f \circ(h \circ g)$