张金源-76066001 / 班号：160611

数学作业纸

班级：160611　　姓名：张金源　　编号：76066001　　第　　页

习题3.2

2. 设 f, g, h 是从 R 到 R 的部分函数，对于 $x \neq 0$，f $x \neq 0$，$f(x) = 1/x$。对于 $x \in R$，$g(x) = x^2$，对于 $x \geq 0$，$h(x) = \sqrt{x}$，试求 $f \circ f$，$h \circ g$，$g \circ h$ 及它们的定义域和值域。

5. 设 f 是从 A 到 A 的满射且 $f \circ f = f$ 证明 $f = I_A$

证：① 因为 $f: A \to A$ 为满射，所以 $\forall a \in A$ $\exists$ $x_a \in A$ 使得 $f(x_a) = a$，又因为 $f \circ f = f$ 所以 $f(a) = f(f(x_a)) = f \circ f(x_a) = f(x_a) = a$，即 $f(a) = a$。所以 $I_A \subseteq f$。

② 对于任意 $\langle x, y \rangle \in f$，因为 $I_A \subseteq f$，所以 $\langle x, x \rangle \in f$。而 f 为部分函数即单值，于是 $x = y$。所以 $\langle x, y \rangle = \langle x, x \rangle \in I_A$。所以 $f \subseteq I_A$。

由①和②可知 $I_A = f$。

张金源-76066001 / 班号：160611

7. 设 $A=\{1,2,3\}$。有多少个从A到A的满射 f 使 $f(1)=3$！

9. 设 $f: X \to Y$ 且 $g: Y \to Z$

a). 若 $g \circ f$ 为满射，g 为内射，则 f 为满射

b). 若 $g \circ f$ 为内射，f 为满射，则 g 为内射

a) 证：因为 $g \circ f$ 为满射，所以 g 为满射，而 g 又是内射，所以 g 为双射。假设 f 不是满射，则存在 $y \in Y$ 使得 $y \notin \operatorname{ran} f$。而 g 是双射，所以 $g(y) \in Z$，又 $g \circ f$ 为满射，所以 $\operatorname{ran}(g \circ f) = Z$。即 $g(y) \in \operatorname{ran}(g \circ f)$。所以存在 $x \in X$ 使得 $g(y) = g \circ f(x) = g(f(x))$。因为 g 为内射，所以 $y = f(x)$。因此，$y \in \operatorname{ran} f$。这与 $y \notin \operatorname{ran} f$ 矛盾。所以假设不成立，即 f 是满射。

b.) 证：因为 $g \circ f$ 为内射，所以 f 为内射。而 f 又是满射，所以 f 为双射。假设 g 不是内射，则存在 $y_1, y_2 \in Y$ 使得 $y_1 \neq y_2$ 并且 $g(y_1) = g(y_2)$。因为 f 为双射，所以存在 $x_1, x_2 \in X$ 使得 $x_1 \neq x_2$ 并且 $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$。而 $g \circ f$ 为内射，则 $g \circ f(x_1) \neq g \circ f(x_2)$，即 $g(y_1) \neq g(y_2)$。这与 $g(y_1) = g(y_2)$ 矛盾。所以不成立，即 g 是内射。