定义(等价关系) 如果集合A上的关系R是自反、对称、传递的，则称 R 为 A 上的等价关系。

定义(等价类) 设 R 是集合A上的等价关系。对于每个 $x \in A$，A中与 x 有关系R的元素的集合 称为 x关于R的等价类，简称为 x 的等价类，记作 $[x]_R$，

即：$[x]_R = \{ y \mid y \in A \wedge x R y \}$，

显然，$[x]_R \subseteq A$

定理 设 R 是非空集合A上的等价关系，则有：

(1) 对于每个 $x \in A$，$x \in [x]_R$，即 $[x]_R$ 是A的非空子集。

(2) $[x]_R = [y]_R$ 当且仅当 $x R y$。

(3) 若 $x, y \in A$ 且 $x \bar{R} y$，则 $[x]_R \cap [y]_R = \varnothing$。

(4) $\bigcup_{x \in A} [x]_R = A$。

定义(划分). 设A为任意集合且$C \subseteq P(A)$。如果C满足：

(1) 若$S \in C$，则$S \neq \phi$;

(2) $\cup C = A$;

(3) 若$S_1, S_2 \in P(A)$, 且$S_1 \cap S_2 \neq \phi$，则$S_1 = S_2$。

则称C为A的一个划分。

定理. 若R为集合A上的等价关系，则$C_R = \{[x]_R \mid x \in A\}$为A的一个划分。

定义. 设R为集合A上的等价关系。称集合$\{ [x]_R \mid x \in A\}$为A关于R的商集，并记为A/R, 并称n(A/R)为R的秩。

定理. 设C为集合A的一个划分。若令

$$R_C = \{ \langle x, y \rangle \mid \text{存在} S \in C, \text{使} x, y \in S \},$$

则R_C为A上的等价关系，且$A/R_C = C$。

例：设 R 是N上的“模6同余”关系，即：

$R = \{ <x, y> \mid x \in N \wedge y \in N \wedge 6 \mid (x-y) \}$，求各元素的等价类和商集。

解：等价类是：

$[0]_R = \{ 0，6，12，18，\ldots， \} = \{ x \mid x = 6n, n \in N \}$

$[1]_R = \{ 1，7，13，19，\ldots， \} = \{ x \mid x = 6n+1, n \in N \}$

…

$[5]_R = \{ 5，11，17，23，\ldots， \} = \{ x \mid x = 6n+5, n \in N \}$

$N / R = \{ [0]_R，[1]_R，[2]_R，[3]_R，[4]_R，[5]_R \}$

例：U_A，I_A 分别是 A 上的全域关系和恒等关系，则

$$A / U_A = \{ A \}$$

$$A / I_A = \{ \{x\} \mid x \in A \}$$

例：A= {a, b, c, d, e}，划分C = { {a, b}, {c}, {d,e} }，求划分C确定的 A 上的等价关系 R。

解：$R = \{ \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle d, e\rangle, \langle e, d\rangle \} \cup I_A$

例. 设R_1, R_2都是集合A上的等价关系。试判断下列A上的二元关系是不是A上的等价关系，并给出理由。

(1) A^2-R_1； (2) R_1-R_2； (3) $R_1{}^2$； (4) $r(R_1-R_2)$；

(5) $R_2\circ R_1$； (6) $R_1\cup R_2$； (7) $t(R_1\cup R_2)$； (8) $t(R_1\cap R_2)$。

解: (2) 不是： R_1-R_2不是自反的。

(4) 不一定： $r(R_1-R_2)$不一定是传递的：

反例：$A=\{1, 2, 3, 4\}$,

$R1=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$,

$R2=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle\}$

$R1-R2=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$

$r(R_1-R_2)=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$ 不是传递的。

例. 设R_1, R_2都是集合A上的等价关系。试判断下列A上的二元关系是不是A上的等价关系，并给出理由。

(1) A^2-R_1； (2) R_1-R_2； (3) R_1^2； (4) $r(R_1-R_2)$；
(5) $R_2 \circ R_1$； (6) $R_1 \cup R_2$； (7) $t(R_1 \cup R_2)$ ； (8) $t(R_1 \cap R_2)$。

解: (6) 不一定： $R_1 \cup R_2$不一定是传递的。

反例：A={1, 2, 3, 4},

$R_1 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle\}$,

$R_2 = \{\langle 2, 2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 2\rangle\}$

$R_1 \cup R_2 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$

因为$\langle 1, 3\rangle \notin R_1 \cup R_2$， $R_1 \cup R_2$不是传递的。

(8) 是。

例：设C_1和C_2都是集合A的划分。试判断下列集类是不是A的划分，为什么？

(1) $C_1 \cup C_2$；

(2) $C_1 - C_2$。

解: (1) 不是。

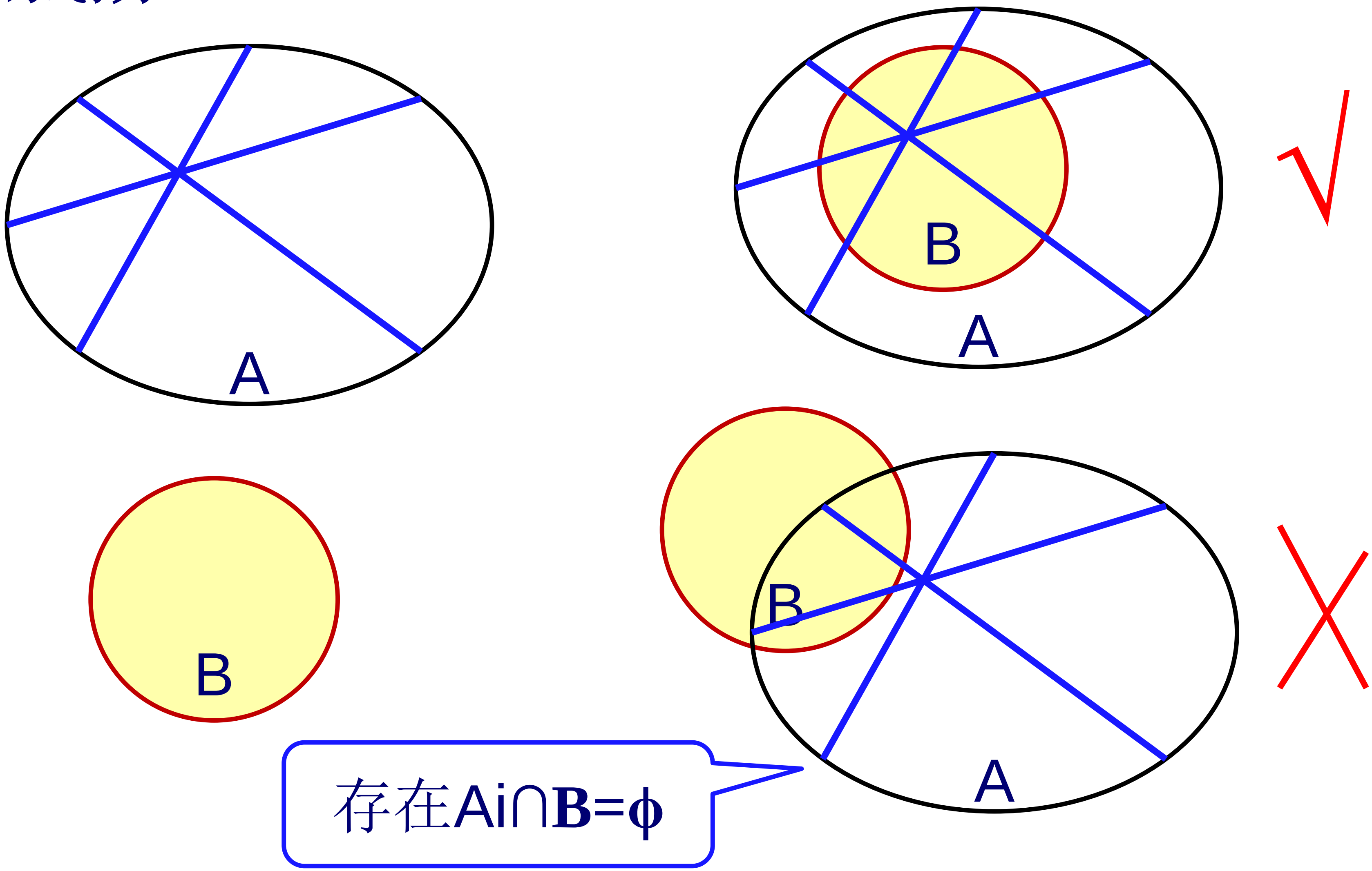
反例：$A=\{1, 2, 3, 4\}$, $C_1=\{ \{1, 2\}, \{3, 4\} \}$，$C_2=\{ \{1, 3\}, \{2, 4\}\}$，$C_1 \cup C_2= \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}\}$。

因为$\{3, 4\} \cap \{1, 3\} \neq \phi$, 因此 $C_1 \cup C_2$不是A的划分。

(3) 不是。

反例： $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $C_1=\{ \{1, 2\}, \{3, 4\} \}$，$C_2=\{ \{1, 2\}, \{3\}, \{4\}\}$, $C_1-C_2=\{ \{3, 4\}\}$ 不是A的划分。

例：设$A\cap B$都是非空集，$\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$为A的划分。试证明$\{A_1\cap B, A_2\cap B, \ldots, A_n\cap B\}$并不总是集合$A\cap B$的划分。



例：设A为恰含n个元素的非空有限集，则有多少个不同的A上的等价关系？其中秩为2的又有多少？

解：设集合$A=\{a_1,\ldots, a_n\}$，则A上的等价关系数目即为集合A上的划分个数。

设s(n, k) 表示包含n个元素的集合A划分成k个子集的划分个数，则A的划分个数为$\sum_{k=1}^{n} s(n,k)$。

（s(n, k)被称为第二类Stirling数，可证明:

$$s(n, k)=k\cdot s(n-1, k)+s(n-1, k-1),\ n\geq k \geq 1$$）

把n个元素划分成k个子集, 有两种情形:

1. a_n构成一个子集，剩下的k-1个子集由$A-\{a_n\}$划分生成,共有S(n-1,k-1)个划分；

2. a_n不单独构成一个子集, 即$A-\{a_n\}$被划分成k个子集,然后再挑选一个子集，把an放入，共有k·S(n-1,k)个划分。

因此$s(n, k)=k\cdot s(n-1, k)+s(n-1, k-1)$。

显然，$p(n, 1)=1$，$n\geq 1$ 。(请补充证明后面部分)

例：若R为集合A上的等价关系，则称n(A/R)为R的秩。如果$i, j \in I_+$且集合A上的等价关系R_1与R_2的秩分别为n和m，则$R_1 \cap R_2$也为A上的等价关系且

$$\max\{ n, m \} \le n(A/(R_1 \cap R_2)) \le n \cdot m。$$

证明: (1) 易证$R_1 \cap R_2$也A上的等价关系 (补充证明)。

(2) 设$n(A/R_1)=n$, $n(A/R_2)=m$, $n(A/ R_1 \cap R_2)=p$，且

$C_1, \ldots, C_n$是 R_1 对应的划分，

$D_1, \ldots, D_m$是 R_2 对应的划分，

$E_1, \ldots, E_p$是 $R_1 \cap R_2$ 对应的划分，

则有$C_i \neq C_j$, $D_i \neq D_j$, $E_i \neq E_j$, $i \neq j$。

可证明：位于R_1（R_2）对应的划分中任意两个不同的子集C_i, C_j (D_i, D_j)中的元素也一定位于$R_1 \cap R_2$对应的划分的两个不同的子集；因此，有$\max\{ n, m \} \le n(A/(R_1 \cap R_2))$。

第六章　关系

重点掌握:

关系的定义

全域关系、恒等关系

关系的表示: 关系图, 关系矩阵

关系的性质: 自反, 反自反, 对称, 反对称, 传递

关系运算： 集合运算，$R \cdot S$, R^{-1}, $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$

序关系：偏序（半序）, 严格偏序（拟序）, 全序, 良序

等价关系 与 划分的关系