

数学作业纸

班级:

姓名:

编号:

第

页

习题 27

3. a). 若 $\langle a, b \rangle \in R, \langle a, c \rangle \in R$, 则 $\langle b, c \rangle \in R$

若 $\langle a, b \rangle \in R$, 则由于 R 自反, 所以 $\langle a, a \rangle \in R$, 由上式有 $\langle b, a \rangle \in R$, 所以 R 对称。

若 $\langle a, b \rangle \in R, \langle b, c \rangle \in R$, 则因为 R 对称, 所以 $\langle b, a \rangle \in R$ 。由已知条件, 因为 $\langle b, a \rangle \in R$ 且 $\langle b, c \rangle \in R$, 所以 $\langle a, c \rangle \in R$ 。所以 R 传递。

因此, R 是等价关系。

b). R 是等价关系, 若 $\langle a, b \rangle \in R, \langle a, c \rangle \in R$, 则因为 R 对称, 所以 $\langle b, a \rangle \in R$ 。又由于 R 传递, 所以 $\langle b, c \rangle \in R$ 。

因此, 若 $\langle a, b \rangle \in R, \langle a, c \rangle \in R$ 则 $\langle b, c \rangle \in R$ 。

5. a). $A^2 - R_1$

反例: $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$A \times A = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 4, 1 \rangle, \langle 4, 2 \rangle, \langle 4, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle\}$

$R_1 = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle\}$

$A^2 - R_1 = \{\langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 4, 1 \rangle, \langle 4, 2 \rangle, \langle 4, 3 \rangle\}$

只是传递。于是 $A^2 - R_1$ 不是 A 上的等价关系。

c). R_1^2

设 R_1 为自反, 则 R_1^2 为自反, 若 R_1 为对称, 则 R_1^2 为对称, 若 R_1 为传递, 则 R_1^2 为传递。于是 R_1^2 是 A 上的等价关系。

c). $R_1 \circ R_1$

$$R_1 = \{ \langle 1,1 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 3,3 \rangle, \langle 4,4 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 1,3 \rangle, \langle 3,1 \rangle, \langle 3,2 \rangle, \langle 2,3 \rangle \}$$

$$R_2 = \{ \langle 1,1 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 3,3 \rangle, \langle 4,4 \rangle, \langle 1,3 \rangle, \langle 3,1 \rangle \}$$

$$R_1 \circ R_1 = \{ \langle 1,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 1,3 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 3,3 \rangle, \langle 3,1 \rangle, \langle 3,2 \rangle, \langle 4,4 \rangle \}$$

是, $R_1 \circ R_1$ 有自反, 传递和对称。则 $R_1 \circ R_1$ 是 A 上的等价关系。

g). $\epsilon(R_1 \cup R_2)$

6.

8.