习题 1.2

9. 设

$$R_0 = \{a \mid a \in R \text{ 且 } a \leq 1\}$$
$$R_i = \{a \mid a \in R \text{ 且 } a < 1 + \frac{1}{i}\}, \ i \in I_+$$

证明 $\bigcap_{i=1}^{\infty} R_i = R_0$

① 若 $x \in R_0$，则 $x \in R$ 且 $x \leq 1$。所以对于任意 $i \in I_+$ 均有 $x < 1 + \frac{1}{i}$。即于任意 $i \in I_+$ 均有 $x \in R_i$。所以 $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} R_i$。

② 若 $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} R_i$，则对于任意 $i \in I_+$ 均有 $x \in R_i$。所以对于任意 $i \in I_+$ 均有 $x < 1 + \frac{1}{i}$。所以，$x \leq 1$，故 $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} R_i$。

所以 $\bigcap_{i=1}^{\infty} R_i = R_0$ 证毕。

习题 1.4

2 c). $(A-B) \times (C-D) = (A \times C) - (B \times D)$

反例：若 $A = C = D = R$，且 $B = \emptyset$

则 $(R - \emptyset) \times (R - R)$，$(A \times C) - (B \times D)$

　　　$\emptyset$　　　　　　$(R \times R) - (\emptyset) = R \times R$

显然，左边是 $\emptyset$，右边是 $R \times R$，则 $(A-B) \times (C-D) = (A \times C) - (B \times D)$ 不成立。

D.) $(A\oplus B)\times(C\oplus D)=(A\times C)\oplus(B\times D)$

反例：$A=C=D=R$ ，$B=\emptyset$

左边是 $R\times\emptyset=\emptyset$，右边是 $(R\times R)\oplus(\emptyset)=R\times R$

设 $A=C=\{1,2\}$，$B=\{1\}$，$D=\{2\}$，则左边 $=\{\langle 2,1\rangle\}$

$(A\oplus B)\times(C\oplus D)$

$\Rightarrow((A-B)\cup(B-A))\times((C-D)\cup(D-C))$

$\Rightarrow(2\cup\emptyset)\times(1\cup\emptyset)$

$\Rightarrow\{\langle 2,1\rangle\}$

$(A\times C)\oplus(B\times D)$

$\Rightarrow(\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle\})\oplus(\{\langle 1,2\rangle\})$

$\Rightarrow(\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle\})\cup\emptyset$

$\Rightarrow\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle\}$

左边和右边 不一样所以 $(A\oplus B)\times(C\oplus D)=(A\times C)\oplus(B\times D)$ 不成立。

7. 证明：$\langle a,b\rangle=\{\{a,A\},\{b,B\}\}$

如取 $A=\emptyset$，$B=\emptyset$ 则：

$\{a,\emptyset\}\times\{b,\emptyset\}=\{\langle a,b\rangle,\langle\emptyset\rangle,\langle\emptyset\rangle,\langle\emptyset\rangle\}$

当 $A=\emptyset$，$B=\emptyset$ 则 $\{\{a,A\},\{b,B\}\}=\langle a,b\rangle$

另外证明：

若 $\langle a,b\rangle=\langle c,d\rangle$ 则 $a=c$ 且 $b=d$

证 $\langle a,b\rangle=\langle c,d\rangle$ 则 $\{\{a,A\},\{b,B\}\}=\{\{c,A\},\{d,B\}\}$

①$\{a,A\}=\{c,A\}$ 且 $\{b,B\}=\{d,B\}$ 所以 $a=c$ 且 $b=d$

②$\{a,A\}=\{d,B\}$ 且 $\{b,B\}=\{c,A\}$

因 $A\neq B$，所以 $a=B$，$d=A$，$b=A$ 且 $c=B$，所以 $a=c$ 且 $b=d$

故总有 $a=c$ 且 $b=d$。