例：证明任何阶大于1的简单无向图必有两个结点的度相等。

证明：设G是一个n阶简单无向图（n>1），则G没有自圈也没有平行边。

(1) 假设 G 的孤立点数目大于1，则G至少有两个孤立点，度为0，结论成立。

(2) 假设G只有一个孤立点，则剩下的n-1个点的度只能为1, 2, …, 或 n-2。因此由抽屉原理知，必有两个结点的度相同。

(3) 假设G没有孤立点，则n个点的度只能为1, 2, …, 或 n-1。同样由抽屉原理知，必有两个结点的度相同。

例：在任意的六个人中，若没有三个人彼此都认识，则必有三个人彼此都不认识。

证明：假设无向图G中有六个结点 A， B， C， D， E， F，表示任意六个人，且G中一条边表示该条边的两个端点互相认识。

假设六个人没有三个人彼此认识，则没有三个点两两之间都邻接。

（1）若A至少与3个其他节点邻接，不妨假设A与C， D， E邻接，

则C,D,E 三个点两两之间都没有边。

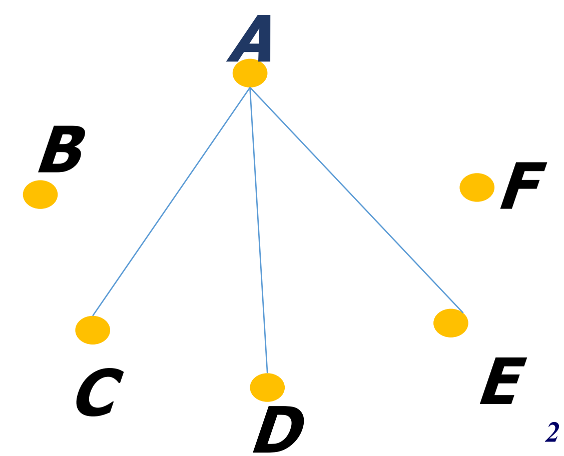
否则，不失一般性,假设C与D邻接，则A,C,D三个人彼此都认识，矛盾。

（2）若A最多只与2个其他节点邻接，则至少有3个点与A不邻接。

假设A与C， D， E不邻接。

由于C,D,E不会两两之间都邻接，假设C,D不邻接，

则有A， C， D两两之间不邻接。



7.2 子图和图的运算

目的： 了解子图和图的基本概念；

重点： 子图、可运算、图的运算；

难点： 图的运算、子图。

1、子图、真子图、生成子图

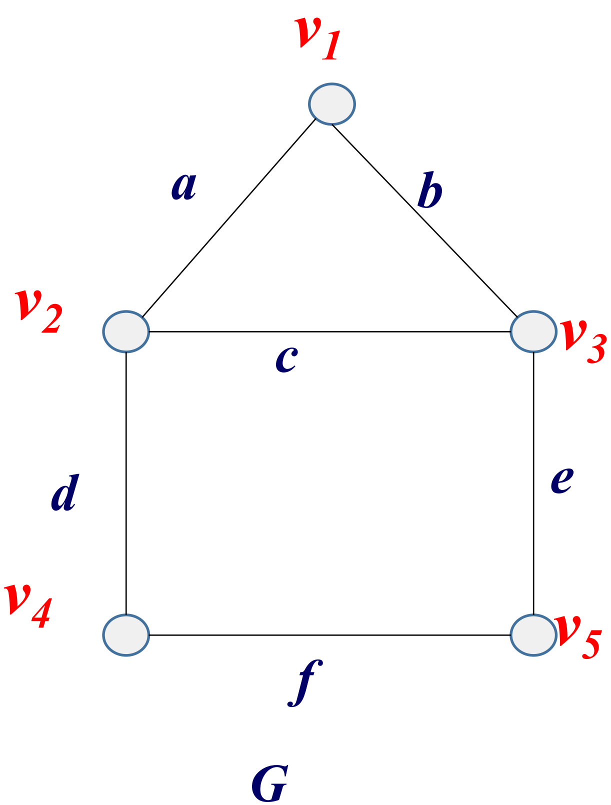
设 $G = \langle V, E, \Psi \rangle$，$G' = \langle V', E', \Psi' \rangle$ 为图。

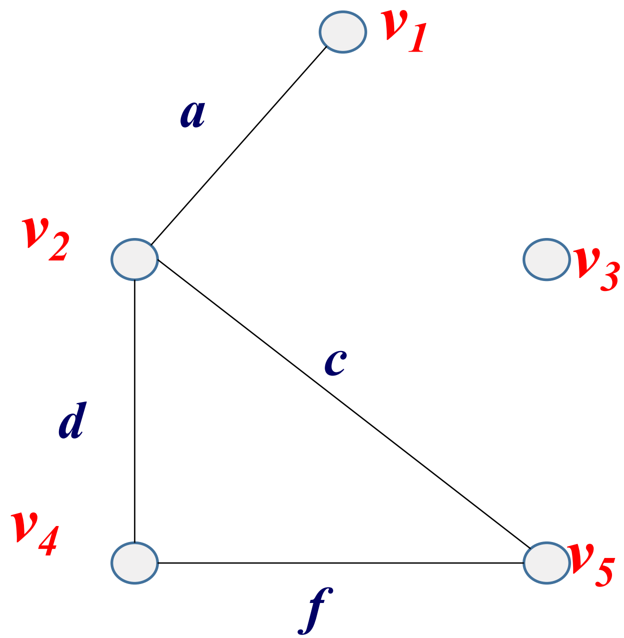
- 如果 $V' \subseteq V$，$E' \subseteq E$，$\Psi' \subseteq \Psi$，则称G'是G的子图，记为 $G' \subseteq G$，并称 G 是 G'的母图。

- 如果 $V' \subseteq V$，$E' \subset E$，$\Psi' \subset \Psi$，则称G'是G的真子图，记为 $G' \subset G$。

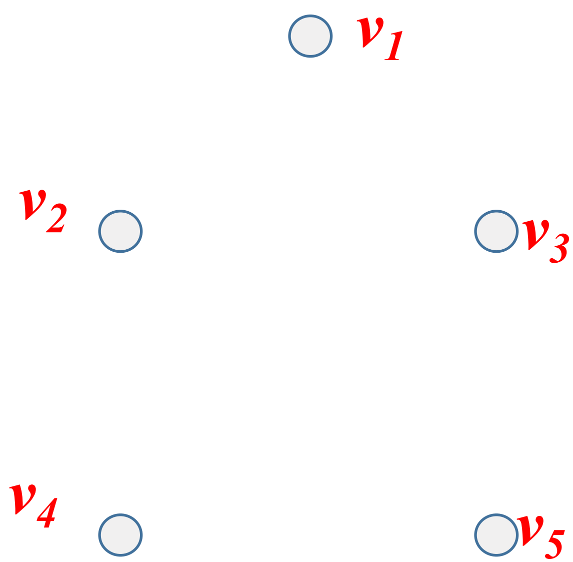
- 如果 $V' = V$，$E' \subseteq E$，$\Psi' \subseteq \Psi$，则称G'是G的生成子图 (Spanning Subgraph)。

G的生成子图?





不是G的子图



是G的真子图

是G的生成子图

导出子图---*由结点集导出的子图*

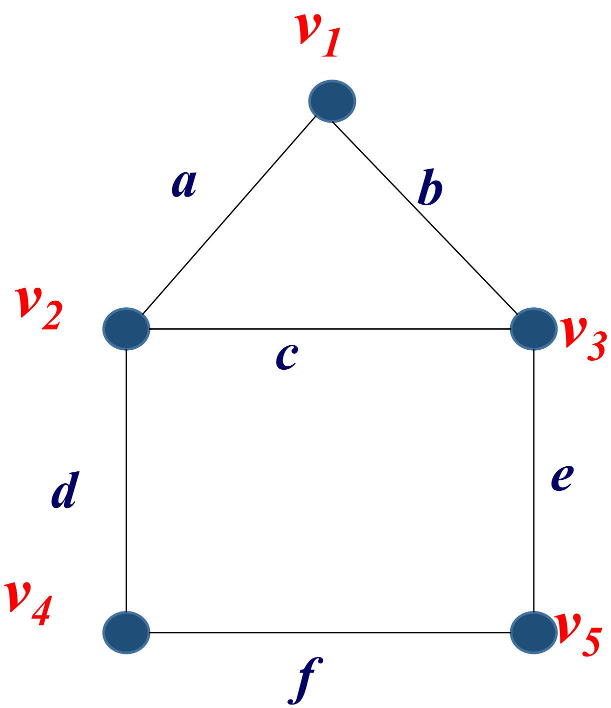
设图$G = \langle V, E, \Psi \rangle$，$V' \subseteq V$ 且 $V' \neq \varnothing$。

- 以 V' 为结点集合，以所有起点和终点均在 V' 中的边为边集合的 G 的子图，称为由 V' 导出的 G 的子图，记为 $G[V']$。（Induced Subgraph）
- ii) 若 $V' \subset V$，导出子图 $G[V-V']$ 记为 $G-V'$。

直观理解：

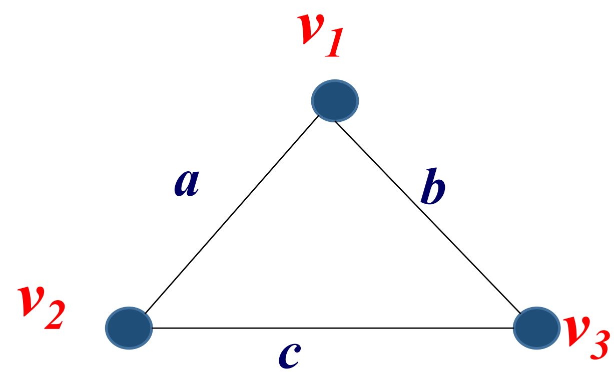
- $G[V']$：以 V' 为节点集合的最大子图。
- $G-V'$：从 G 中去掉 V' 中的结点以及与这些结点关联的所有边而得到的G的子图。

G的导出子图



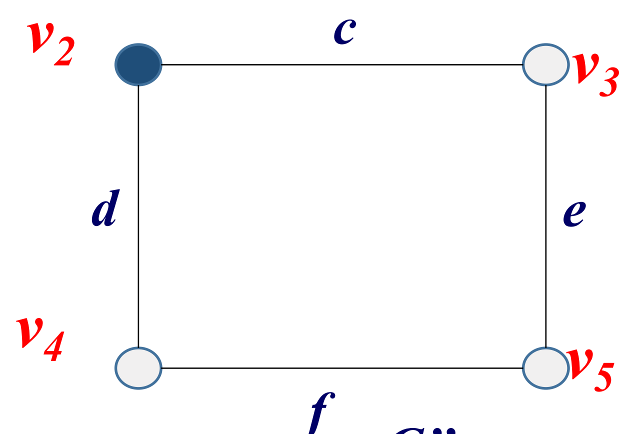
G

$V= \{ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$



G'

$V'=\{v_1, v_2, v_3\}$ $G' = G[V']$



G''

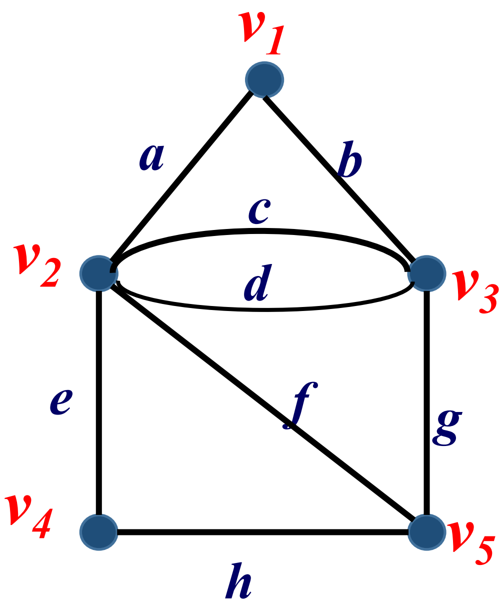
$V''=\{v_2, v_3, v_4, v_5\}$ $G''=G[v'']$

导出子图---*由边集导出的子图*

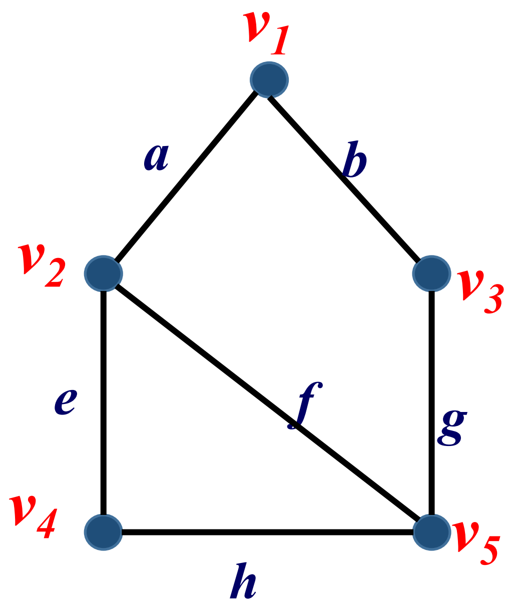
设图 $G = \langle V, E, \Psi \rangle$， $E' \subseteq E$且$E' \neq \varnothing$,

$V' = \{ v \mid v \in V$ 且存在 $e \in E'$使v与e关联$\}$。

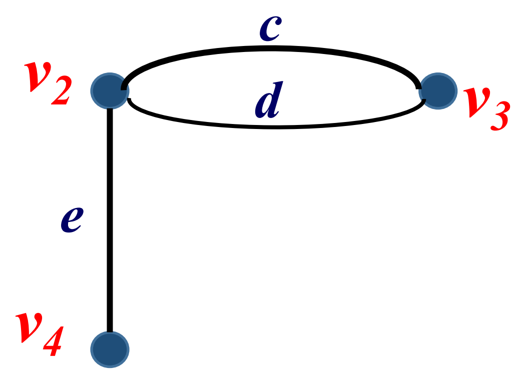
以V'为结点集合，以E'为边集合的G的子图称为由E'导出的子图，记为 $G[E']$。



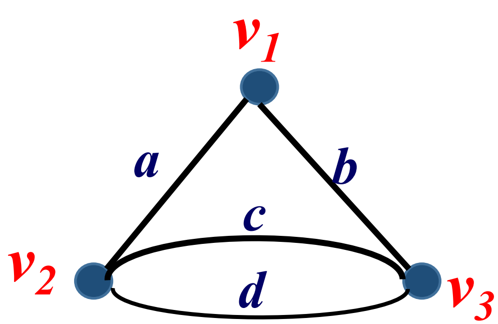
G



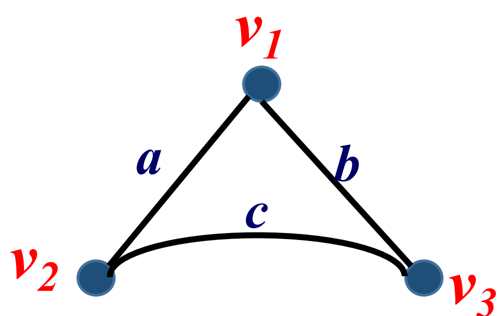
G的生成子图



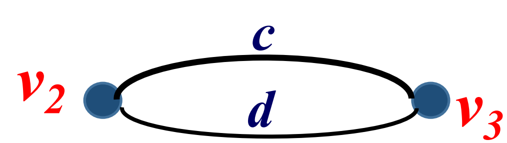
$G - \{v_1, v_5\}$



$G[\{v_1, v_2, v_3\}]$



$G[\{a, b, c\}]$



(f) 可以用什么表示?

图的可运算、不相交边

设图 $G=\langle V, E, \Psi\rangle$ 和 $G'=\langle V', E', \Psi'\rangle$ 同为无向图或同为有向图。

- 如果对于任意 $e\in E\cap E'$，均有 $\Psi(e)=\Psi'(e)$，则称 G 和 G' 是可运算的。
- 如果 $V\cap V'=E\cap E'=\varnothing$，则称 G 和 G' 是不相交的。
  - ✓ 无公共顶点
- 如果 $E\cap E'=\varnothing$，则称 G 和 G' 是边不相交的。
  - ✓ 无公共边，可能有公共点

图的运算：交、并、环和

定义7.2.5 设图$G_1=\langle V_1,E_1,\Psi_1\rangle$和 $G_2=\langle V_2,E_2,\Psi_2\rangle$可运算。

i) 称以$V_1\cap V_2$为结点集合，以$E_1\cap E_2$为边集合的G_1和G_2的公共子图为 G_1和G_2的交，记为 $G_1\cap G_2$。

$(G_1\cap G_2=\langle V_1\cap V_2,\ E_1\cap E_2,\ \Psi_1\cap\Psi_2)$

ii) 称以$V_1\cup V_2$为结点集合，以$E_1\cup E_2$为边集合的G_1和G_2的公共母图为 G_1和G_2的并，记为 $G_1\cup G_2$。

$(G_1\cup G_2=\langle V_1\cup V_2,\ E_1\cup E_2,\ \Psi_1\cup\Psi_2\rangle)$

iii) 称以$V_1\cup V_2$为结点集合，以 $E_1\oplus E_2$为边集合的$G_1\cup G_2$的子图为G_1和G_2的环和，记为$G_1\oplus G_2$。

$G_1\oplus G_2=\langle V_1\cup V_2,\ E_1\oplus E_2,\ \Psi_1\cup\Psi_{2\,E1\oplus E2}\rangle$

图运算的唯一性

定理7.2.1 (图运算的唯一性) 设图 $G_1=\langle V_1, E_1, \Psi_1\rangle$ 和 $G_2=\langle V_2, E2, \Psi2\rangle$ 可运算。

i) 如果 $V_1\cap V_2\neq\varnothing$，则存在唯一的 $G_1\cap G_2$。

（$\because V_1\cap V_2=\varnothing$时，$G_1\cap G_2$不存在）

ii) 存在唯一的 $G_1\cup G_2$和 $G_1\oplus G_2$。

证明：不妨设 G_1和G_2同为有向图，若同为无向图也可同样证明。

i)（存在性）定义 Ψ：$E_1\cap E_2\to(V_1\cap V_2)\times(V_1\cap V_2)$ 为：

对于任意的 $e\in E_1\cap E_2$，$\Psi(e)=\Psi_1(e)=\Psi_2(e)$。

显然，$<V_1\cap V_2, E_1\cap E_2, \Psi>=G_1\cap G_2$。

图运算的唯一性

定理7.2.1 (图运算的唯一性) 设图 $G_1=\langle V_1, E_1, \Psi_1\rangle$ 和 $G_2=\langle V_2, E_2, \Psi_2\rangle$ 可运算。

i) 如果 $V_1\cap V_2\neq\varnothing$，则存在唯一的 $G_1\cap G_2$。

（$\because V_1\cap V_2=\varnothing$时，$G_1\cap G_2$ 不存在）

ii) 存在唯一的 $G_1\cup G_2$和 $G_1\oplus G_2$。

证明：i)（唯一性）

设图 $G=\langle V_1\cap V_2, E_1\cap E_2, \Psi\rangle$ 和

$G'=\langle V_1\cap V_2, E_1\cap E_2, \Psi'\rangle$ 均为 G_1和G_2的交。

因为 $G\subseteq G_1$，所以对任意 $e\in E_1\cap E_2$ 皆有 $\Psi(e)=\Psi_1(e)$。

因为 $G'\subseteq G_1$，所以对任意 $e\in E_1\cap E_2$ 皆有 $\Psi'(e)=\Psi_1(e)$。

这表明 $\Psi=\Psi'$。因此，$G=G'$。

图运算的唯一性

定理7.2.1 (图运算的唯一性) 设图 $G_1 = \langle V_1, E_1, \Psi_1 \rangle$ 和 $G_2 = \langle V_2, E_2, \Psi_2 \rangle$ 可运算。

i) 如果 $V_1 \cap V_2 \neq \varnothing$，则存在唯一的 $G_1 \cap G_2$。

（$\because V_1 \cap V_2 = \varnothing$时，$G_1 \cap G_2$ 不存在）

ii) 存在唯一的 $G_1 \cup G_2$和 $G_1 \oplus G_2$。

证明：ii) （存在性）如下定义 Ψ：$E_1 \cup E_2 \to (V_1 \cup V_2) \times (V_1 \cup V_2)$： 对于任意的 $e \in E_1 \cup E_2$，

$$\Psi(e) = \begin{cases} \Psi_1(e), & e \in E_1 \\ \Psi_2(e), & e \in E_2 - E_1 \end{cases}。$$

显然，$<V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2, \Psi> = G_1 \cup G_2$。

图运算的唯一性

定理7.2.1 (图运算的唯一性) 设图 $G_1=\langle V_1, E_1, \Psi_1\rangle$ 和 $G_2=\langle V_2, E_2, \Psi_2\rangle$ 可运算。

i) 如果 $V_1\cap V_2\neq\varnothing$，则存在唯一的 $G_1\cap G_2$。

（$\because V_1\cap V_2=\varnothing$时，$G_1\cap G_2$不存在）

ii) 存在唯一的 $G_1\cup G_2$和 $G_1\oplus G_2$。

证明：ii)（唯一性）

设图 $G=\langle V_1\cup V_2, E_1\cup E_2, \Psi\rangle$ 和

$G'=\langle V_1\cup V_2, E_1\cup E_2, \Psi'\rangle$ 均为 G_1和G_2的并。

因为 $G_1\subseteq G$且$G_1\subseteq G'$, 所以对任意 $e\in E$， 皆有 $\Psi(e)=\Psi_1(e)=\Psi'_1(e)$。

因为 $G_2\subseteq G$且$G_2\subseteq G'$，所以对任意 $e\in E_2-E_1$，皆有 $\Psi(e)=\Psi_2(e)=\Psi'(e)$。因此$\Psi=\Psi'$，从而 $G=G'$。

图的运算： G - E′

定义7.2.6 设图 $G = \langle V, E, \Psi \rangle$。若 $E' \subseteq E$，记 $\langle V, E - E', \Psi|_{(E - E')} \rangle$ 为 $G - E'$；若 $e \in E$，则记 $G - \{e\}$ 为 $G - e$。

- $G - E'$ 是从 G 中去掉 E' 中的边所得到的G的子图。

注意： 与 E' 中的边相关联的结点并不去掉。

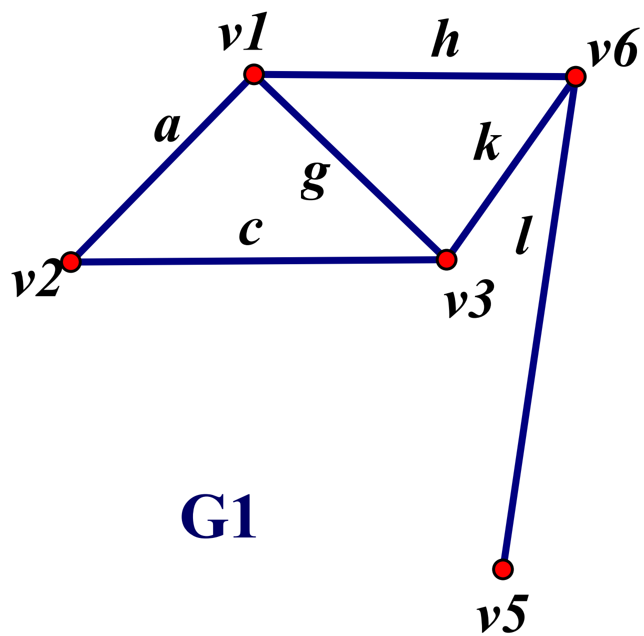
图的运算 $G + E'_{\Psi'}$

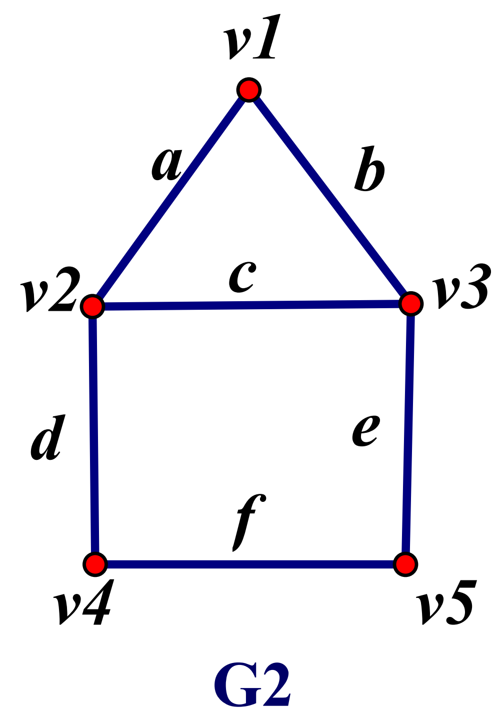
定义7.2.7 设图 $G = \langle V, E, \Psi \rangle$ 和 $G' = \langle V', E', \Psi' \rangle$ 同为无向图或同为有向图， 若G 和 G' 边不相交，且 G' 无孤立点，

则记 $G \cup G'$ 为 $G + E'_{\Psi'}$。

- $G + E'_{\Psi'}$ 是由 G 增加 E' 中的边所得到的图，其中 Ψ' 指出 E' 中的边与结点的关联关系。

例：已知G1,G2，试画出$G1 \cup G2$，$G1 \cap G2$，$G1 \oplus G2$，$(G1 \cup G2)-\{v5,v6\}$, $(G1 \cup G2)-\{g,h\}$, $G2+E'_{\Psi'}$, 其中$E'=\{g\}$, $\Psi'=\{<g,\{v1,v3\}>\}$





G1,G2可运算

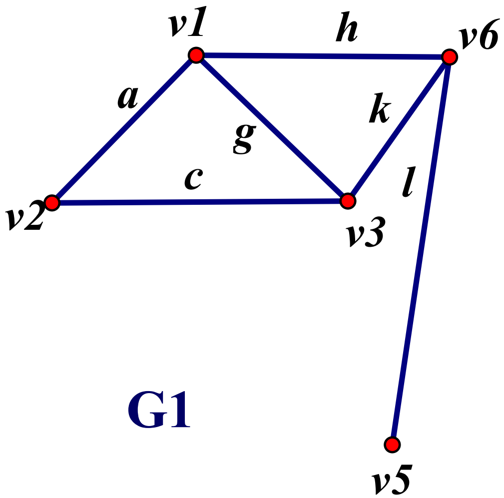
$V_1=\{v1, v2, v3, v5, v6\}$

$E_1=\{a, c, g, h, k, l\}$

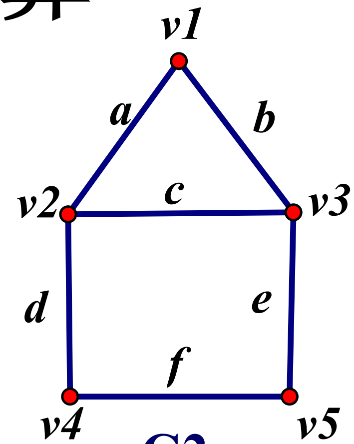
$V_2=\{v1, v2, v3, v4, v5\}$

$E_1=\{a, b, c, d, e, f\}$

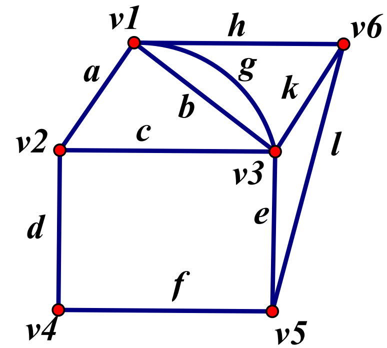
例：图的运算



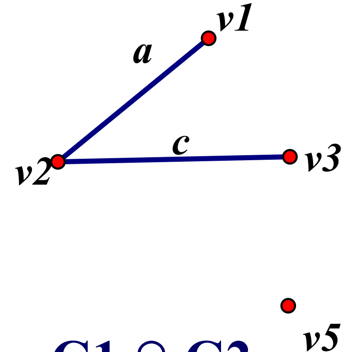
G1



G2



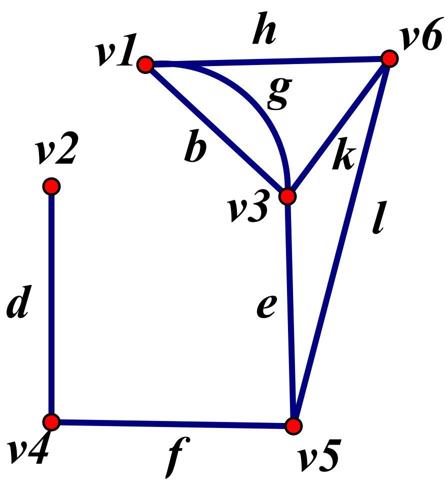
G1 ∪ G2



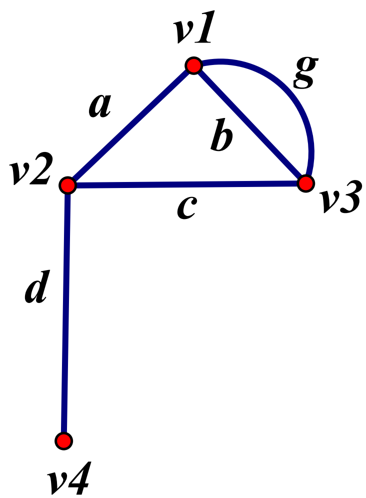
G1 ∩ G2

V_1= {v1, v2, v3, v5, v6}　　V_2= {v1, v2, v3, v4, v5}

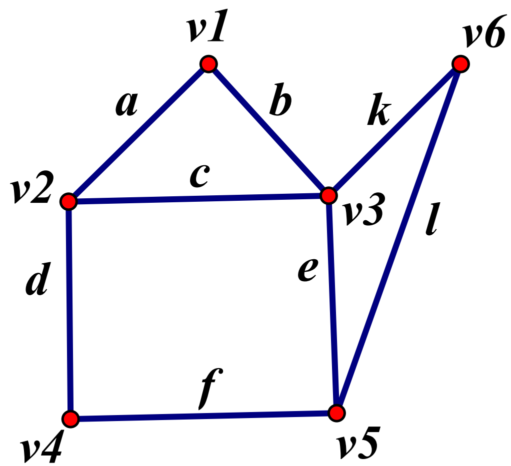
E_1={a, c, g, h, k, *l* }　　E_1={a, b, c, d, e, f }



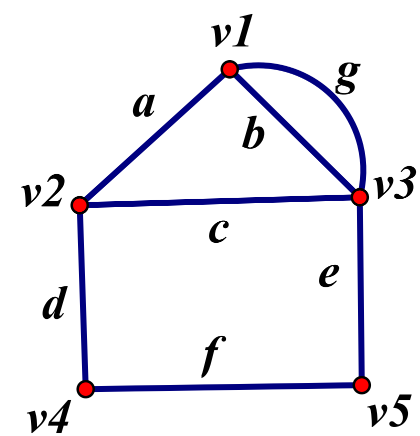
G1 ⊕ G2



(G1 ∪ G2)-{v5,v6}



(G1 ∪ G2)-{g,h}

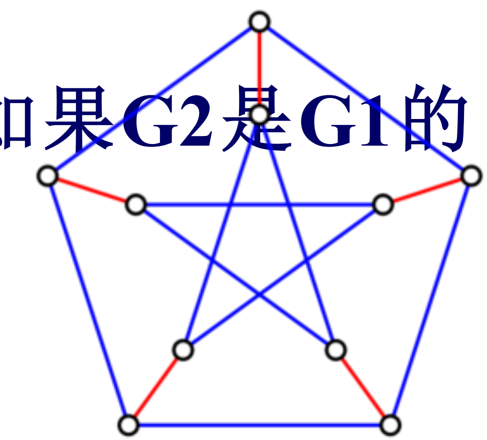


$G2+E'_{\Psi'}$

图的运算—补图

定义7.2.8 设 n 阶无向图 G ＝〈V, E ,Ψ〉是 n 阶完全无向图 K_n 的生成子图，则称 $K_n - E$ 为 G 的 **补图**，记为 $\overline{G}$ 。

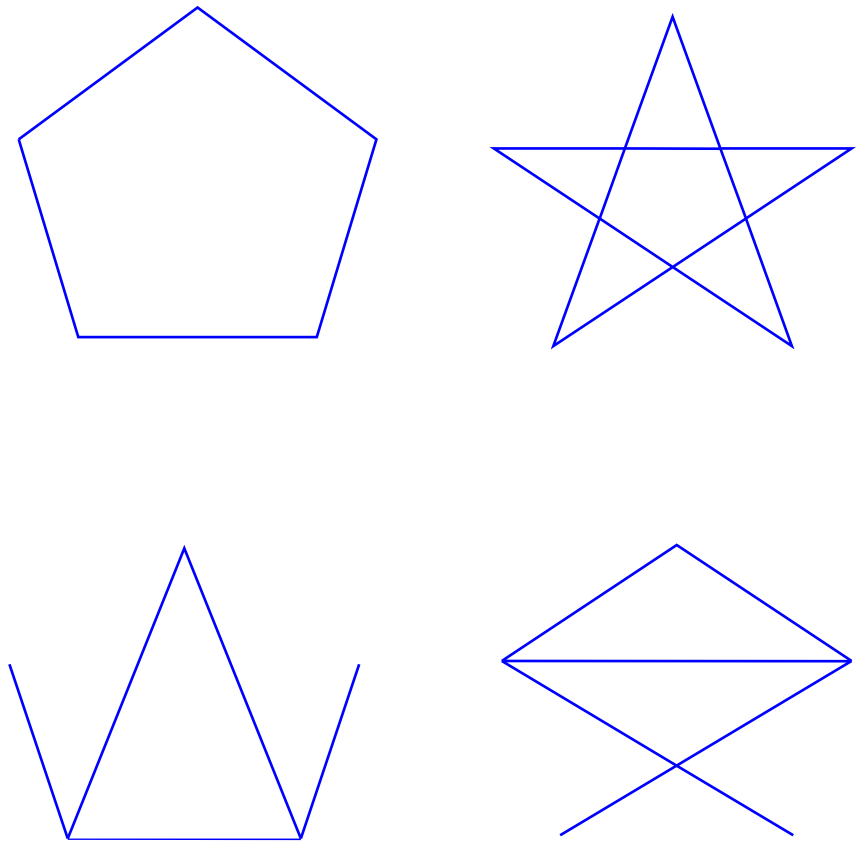
- 简单无向图都有补图，并且一个简单无向图的所有补图都同构。
- 对于任意两个简单无向图G1和G2，如果G2是G1的



问题：

- **完全图的补图是什么？**
- **零图的补图是什么？**

自补图：与其补图同构的简单无向图



互为补图且自补图

定理7.2.2 图同构

设 f 和 g 为图 $G = <V, E, \Psi>$ 和 $G' = <V', E', \Psi'>$ 之间的 同构映射。

i) 若 $v \in V$ 且 $v' = f(v)$，则 $d_G(v) = d_{G'}(v')$;

ii) 若 $S \subseteq V$ 且 $S' = f(S)$，则 $G[S] \cong G'[S']$ 且 $G - S \cong G' - S'$;

iii) 若 $K \subseteq E$ 且 $K' = g(K)$，则 $G[K] \cong G'[K']$ 且 $G - K \cong G' - K'$;

iv) $\overline{G} \cong \overline{G'}$，即 G 的补图与 G′ 的补图仍同构。

小结

图自己家的关系：

- 子图
  - 生成子图
  - 导出子图
    - 由点导出子图
    - 由边导出子图

图和图的关系：

- 可运算
  - 三类典型运算（唯一性）
  - 补图