第7章 图论

7-2 子图及图的运算

北航计算机学院：李建欣

Tel：82339274（G506）

E-mail：lijx@buaa.edu.cn

http://act.buaa.edu.cn/lijx

主要内容

1. 图论的基本概念
2. 子图和图的运算
3. 路径、回路和连通图
4. 欧拉图和哈密顿图
5. 图的矩阵表示
6. 树、有向树和有序树

§7.2　子图和图的运算

7.2 子图和图的运算

目的： 了解子图和图的基本概念；

重点： 子图、可运算、图的运算；

难点： 图的运算、子图。

- 思考
  - 生成子图 vs 导出子图？
  - 图的运算关系？计算结果是否唯一？

1、子图、真子图、生成子图

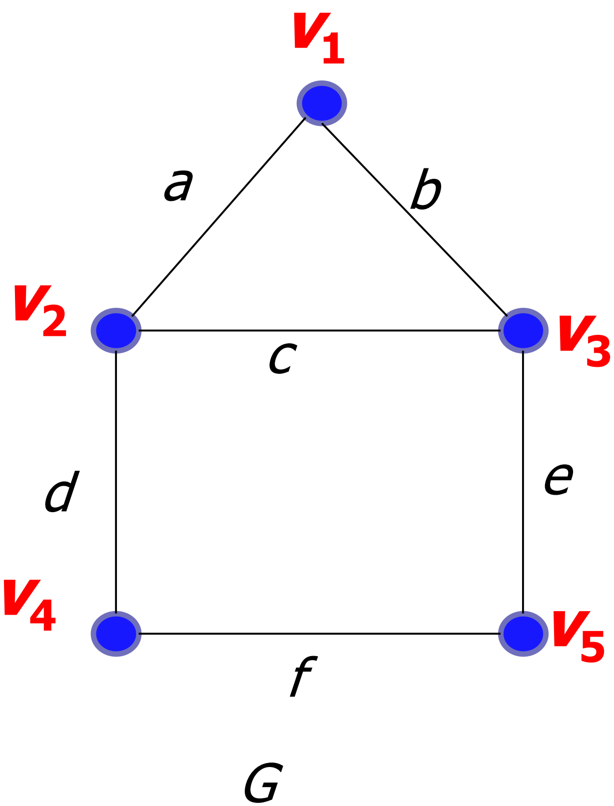
设图 $G = \langle V, E, \Psi \rangle$，$G' = \langle V', E', \Psi' \rangle$ 。

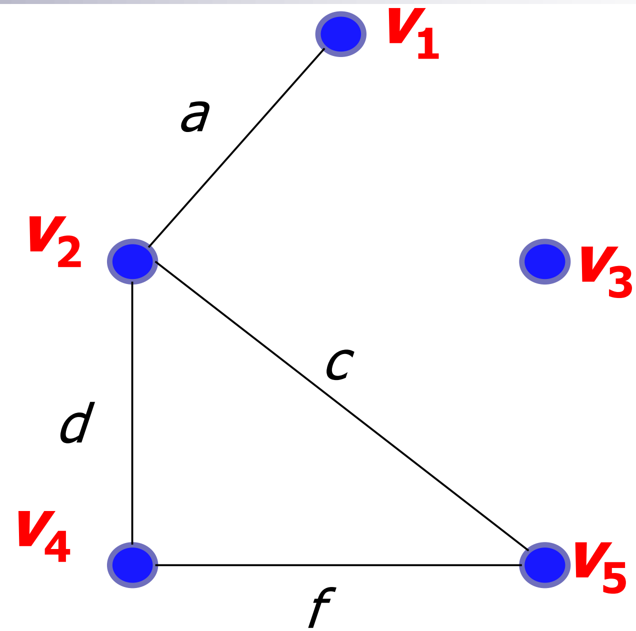
i)如果 $V' \subseteq V$，$E' \subseteq E$，$\Psi' \subseteq \Psi$，则称G′是G的子图，记为 $G' \subseteq G$，**并称 G 是 G′的母图。**

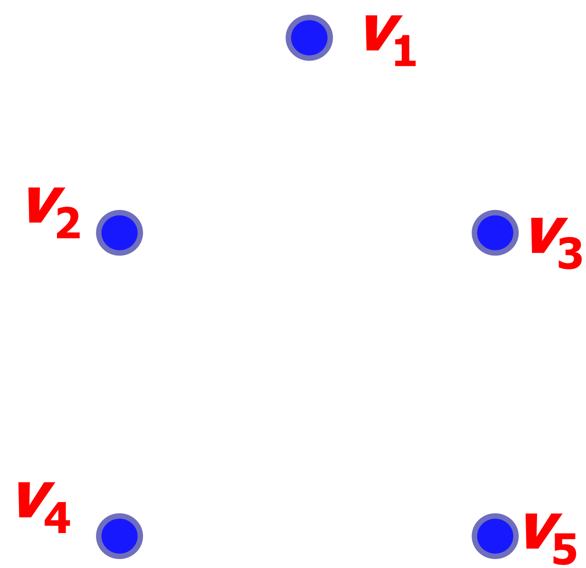
ii)如果 $V' \subseteq V$，$E' \subset E$，$\Psi' \subset \Psi$，则称G′是G的**真子图**，记为 $G' \subset G$。

生成子图：如果 $V' = V$，$E' \subseteq E$，$\Psi' \subseteq \Psi$，则称G′是G的生成子图**(Spanning Subgraph)**。

G的生成子图?







定义7.2.2 由结点集导出的子图

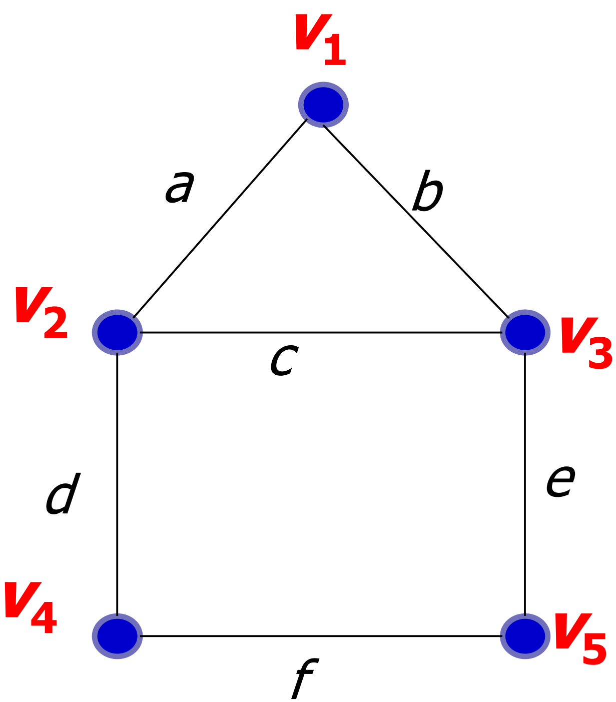
设图G＝〈V， E，Ψ〉，V′⊆ V 且 V′≠ ∅。

i）以 V′ 为结点集合，以起点和终点均在V′ 中边的全体为边集合的 G 的子图，称为**由 V′导出的G的子图**，记为 G［V′］。（Induced Subgraph）

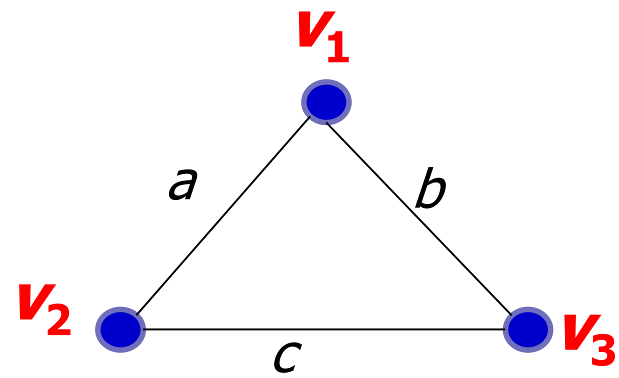
ii) 若 V′⊂ V，导出子图 G［V －V′］记为 G －V′。

- G［V′］直观理解：是以V为节点集合的最大子图。
- G－V′直观理解：是从 G 中**去掉 V′中的结点以及与这些结点关联的边**而得到的G的子图。

G的导出子图

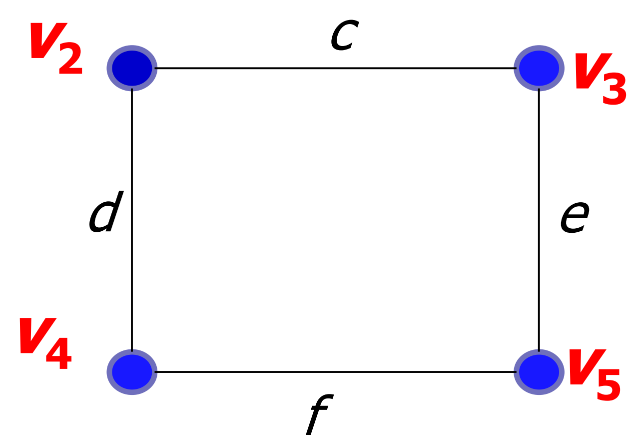


G



G

G[{v₁, v₂, v₃}]?



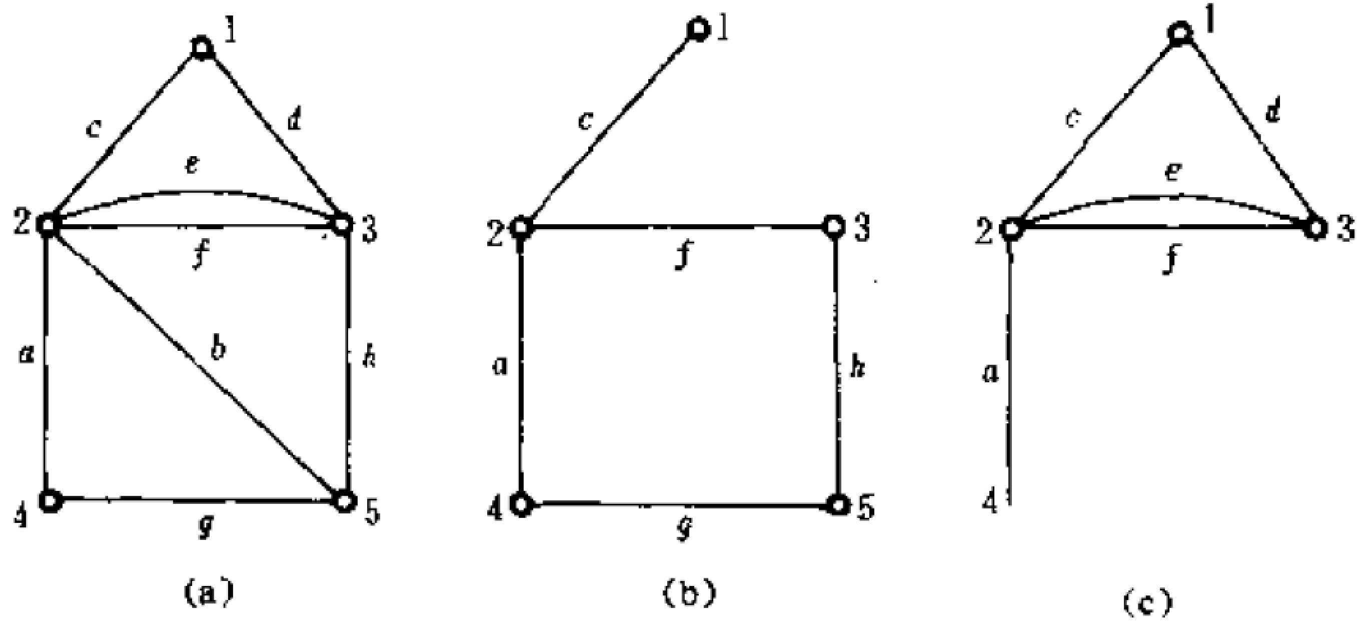
G[{v₂, v₃, v₄ , v₅}]?

定义7.2.3 由边集导出的子图

设图 $G=\langle V, E, \Psi\rangle$， $E'\subseteq E$ 且 $E'\neq\varnothing$，

$V'=\{v \mid v\in V$ 且存在 $e\in E'$ 使 v 与 e 关联$\}$。

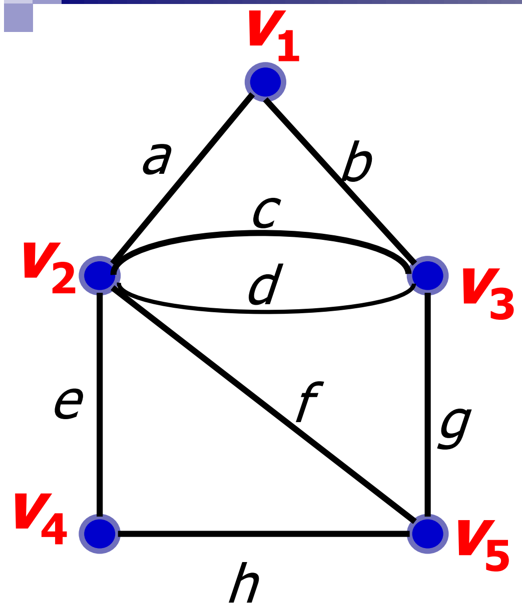
以 V' 为结点集合，以 E' 为边集合的 G 的子图称为 **由 E′导出的子图**，记为 $G[E']$。



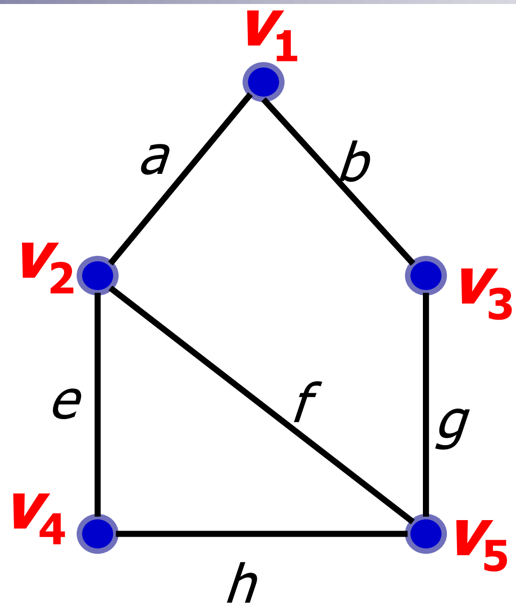
- 图G的子图是G的一部分，
- G的真子图的边比G的边少，
- G的生成子图与G有相同的结点，
- G的导出子图$G[V']$是G的以V'为结点集合的最大子图。

问题1：什么图，是图G的生成子图，又是图G的导出子图？

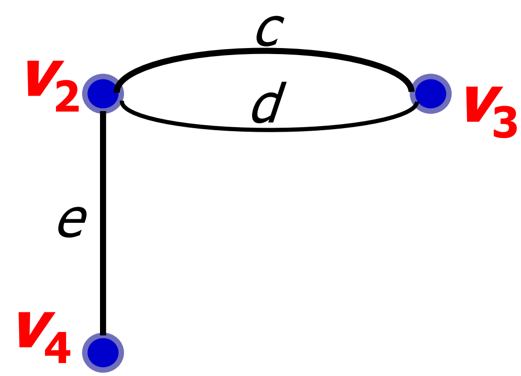
问题2：G以V_1、E_2对应的V_1导出子图，是否一样？



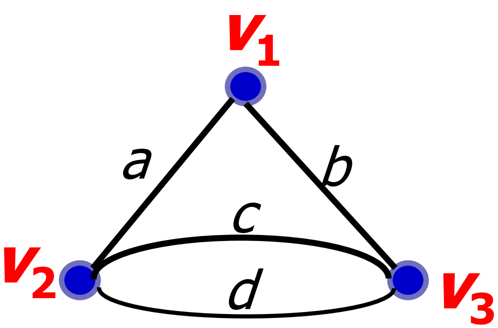
(a)图G



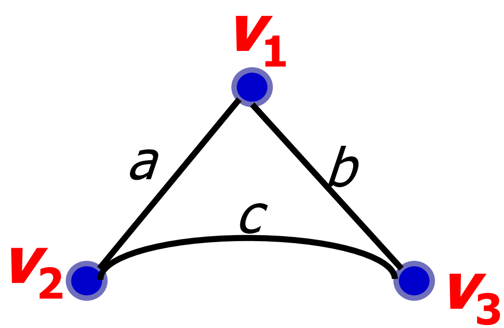
(b)G的生成子图



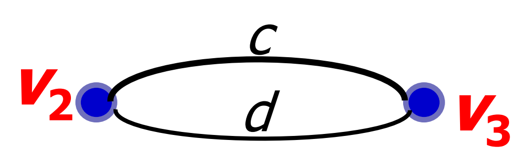
(c) 图$G - \{v_1, v_5\}$



(d) 图$G[\{v_1, v_2, v_3\}]$



(e) 图$G[\{a, b, c\}]$



(f) 可以用什么表示？

图的可运算、不相交边

设图 $G=\langle V, E, \Psi\rangle$ 和 $G'=\langle V', E', \Psi'\rangle$ 同为无向图或同为有向图。

i) 如果对于**任意** $e\in E\cap E'$ **均有** $\Psi(e)=\Psi'(e)$，

则称 G 和 G′是**可运算的**。

ii)如果$V\cap V'=E\cap E'=\varnothing$，则称 G 和 G′是**不相交的**。

无公共顶点

iii)如果 $E\cap E'=\varnothing$，则称 G 和 G′是**边不相交的**。

无公共边（可能有公共点）

交、并、环和

设图 $G_1 = \langle V_1, E_1, \Psi_1 \rangle$ 和 $G_2 = \langle V_2, E_2, \Psi_2 \rangle$ 为可运算的

i) 称以 $V_1 \cap V_2$ 为结点集合，以 $E_1 \cap E_2$ 为边集合的 G_1 和 G_2 的公共子图为 G_1 和 G_2 的**交**，记为 $G_1 \cap G_2$。

ii) 称以 $V_1 \cup V_2$ 为结点集合，以 $E_1 \cup E_2$ 为边集合的 G_1 和 G_2 的公共母图为 G_1 和 G_2 的**并**，记为 $G_1 \cup G_2$。

iii) 称以 $V_1 \cup V_2$ 为结点集合，以 $E_1 \oplus E_2$ 为边集合的 $G_1 \cup G_2$ 的子图为 G_1 和 G_2 的**环和**，记为 $G_1 \oplus G_2$。

$$G_1 \cap G_2 = \langle V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2, \Psi_1 \cap \Psi_2 \rangle$$

$$G_1 \cup G_2 = \langle V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2, \Psi_1 \cup \Psi_2 \rangle$$

$$G_1 \oplus G_2 = \langle V_1 \cup V_2, E_1 \oplus E_2, \Psi_1 \cup \Psi_2 \lceil_{E1 \oplus E2} \rangle$$

显然，并非任何两个图都有交、并和环和，它们必须可运算的才行。

定理7.2.1 图运算的唯一性

设图 $G_1=\langle V_1, E_1, \Psi_1\rangle$ 和 $G_2=\langle V_2, E_2, \Psi_2\rangle$ 是可运算的。

i) 如果 $V_1\cap V_2\neq\varnothing$，则存在唯一的 $G_1\cap G_2$。

（$\because V_1\cap V_2=\varnothing$时，$G_1\cap G_2$ 不存在）

ii) 存在唯一的 $G_1\cup G_2$ 和 $G_1\oplus G_2$。

定理7.2.1 图运算的唯一性

证明：以 i) 为例，不妨设 G_1 和 G_2 同为有向图，若同为无向图也可同样证明。

a)（存在性）

定义 Ψ：$E_1 \cap E_2 \to (V_1 \cap V_2) \times (V_1 \cap V_2)$ 为：

对于任意的 $e \in E_1 \cap E_2$，$\Psi(e) = \Psi_1(e) = \Psi_2(e)$。

显然，$\langle V_1 \cap V_2,\ E_1 \cap E_2,\ \Psi \rangle = G_1 \cap G_2$。

b)（唯一性）

设图 $G = \langle V_1 \cap V_2,\ E_1 \cap E_2,\ \Psi \rangle$ 和

$G' = \langle V_1 \cap V_2,\ E_1 \cap E_2,\ \Psi' \rangle$ 均为 G_1 和 G_2 的交。

因为 $G \subseteq G_1$，所以对任意 $e \in E_1 \cap E_2$ 皆有 $\Psi(e) = \Psi_1(e)$。

因为 $G' \subseteq G_1$，所以对任意 $e \in E_1 \cap E_2$ 皆有 $\Psi'(e) = \Psi_1(e)$。

这表明 $\Psi = \Psi'$。因此，$G = G'$。

运算 $G - E'$

设图 $G = \langle V, E, \Psi\rangle$。对任意的 $E' \subseteq E$，

记 $\langle V, E - E', \Psi\lceil(E - E')\rangle$ 为 $G - E'$；

对任意 $e \in E$，记 $G - \{e\}$ 为 $G - e$。

- $G - E'$ 是从 G 中去掉 E' 中的边所得到的G的子图。

注意：与 E' 中的边相关联的结点并不去掉。

运算 $G + E'_{\Psi'}$

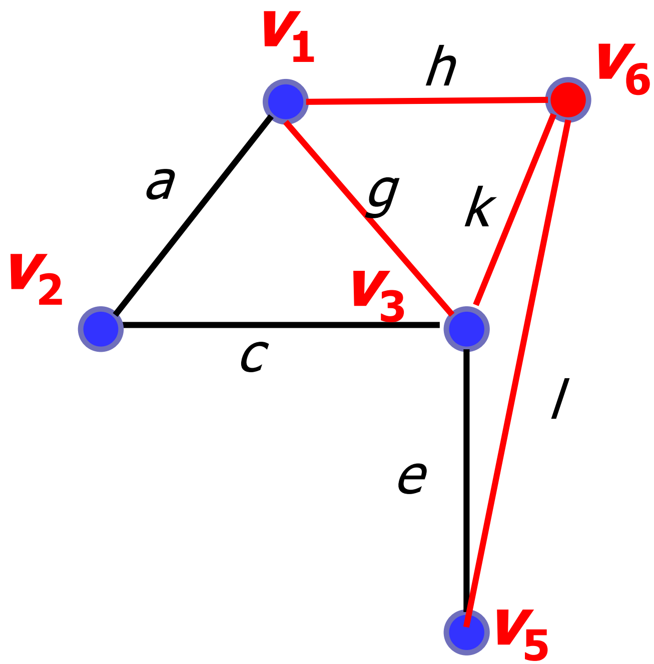
设图 $G = \langle V, E, \Psi \rangle$ 和 $G' = \langle V', E', \Psi' \rangle$ 同为无向图 或 同为

有向图， G 和 G' 边不相交，且 G' 无孤立点，

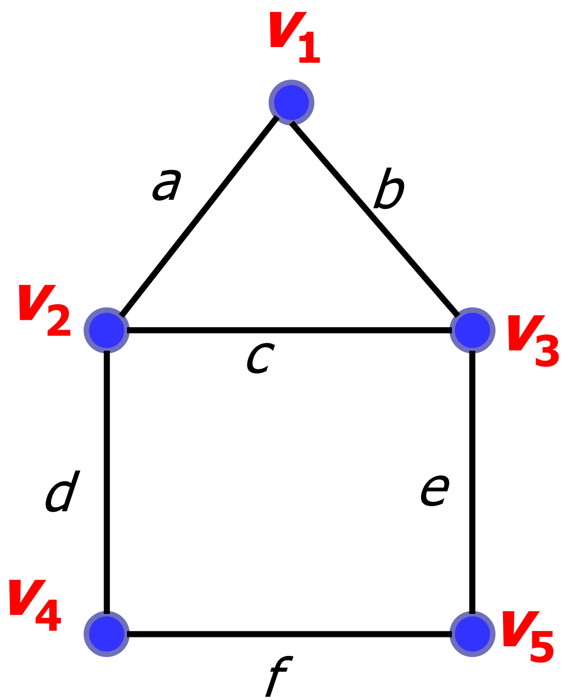
则记 $G \cup G'$ 为 $G + E'_{\Psi'}$。

* $G + E'_{\Psi'}$ 是由 G 增加 E' 中的边所得到的图，

其中 Ψ' 指出 E' 中的边与结点的关联关系。



(a) G_1



(b) G_2

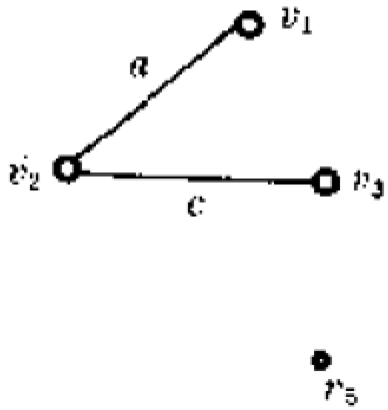
$G_1 \cup G_2$

$G_1 \cap G_2$

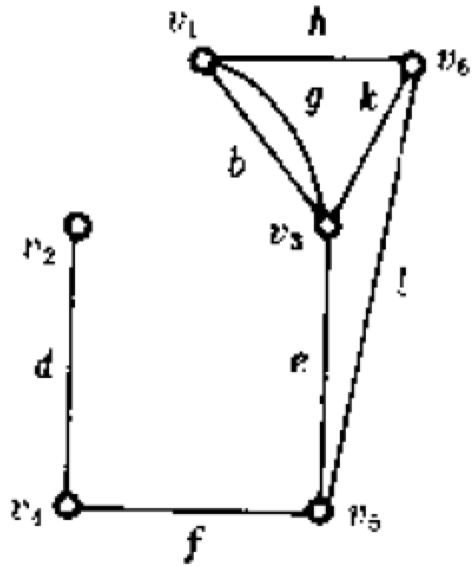
$G_1 \oplus G_2$

$G_1 \cup G_2 - \{v_5, v_6\}$

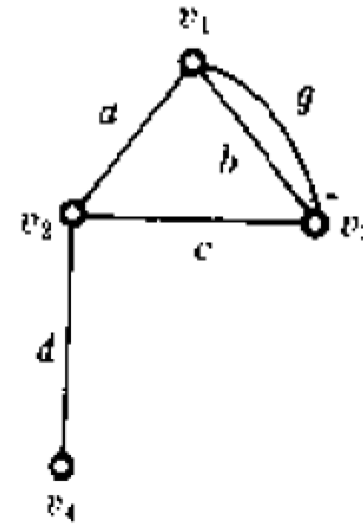
$G_1 \cup G_2 - \{g, h\}$



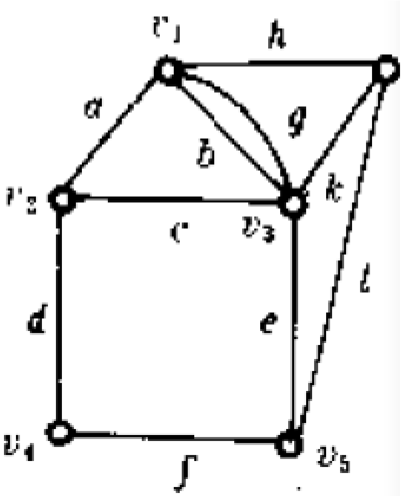
(d) $G_1 \cap G_2$



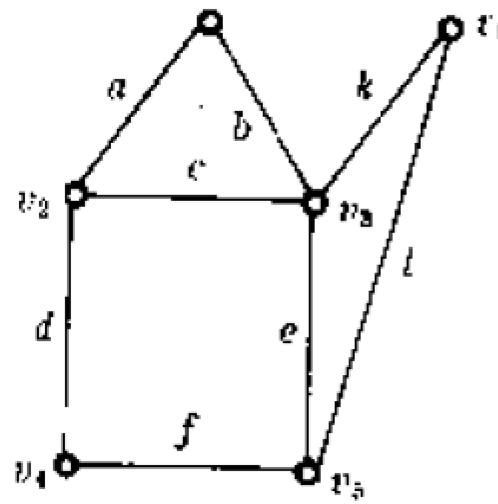
(e) $G_1 \oplus G_2$



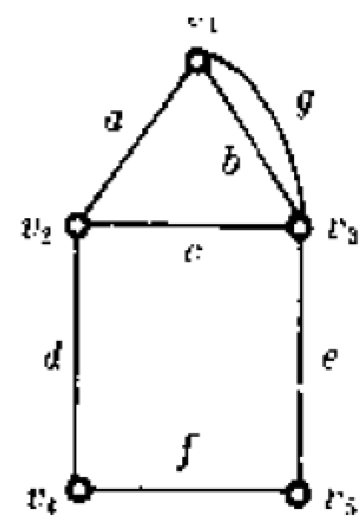
(f) $G_1 \cup G_2 - \{v_5, v_6\}$



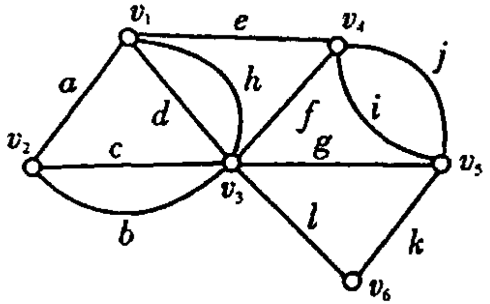
(c) $G \cup G_2$



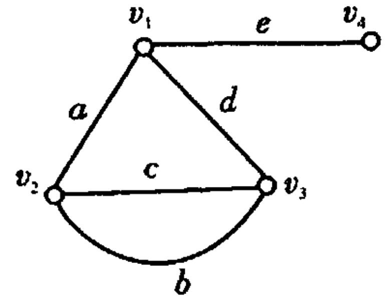
(g) $G_1 \cup G_2 - \{g, h\}$



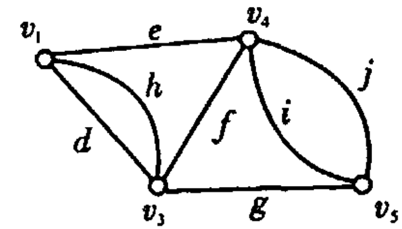
(h) $G_2 + E'_{\varphi}$



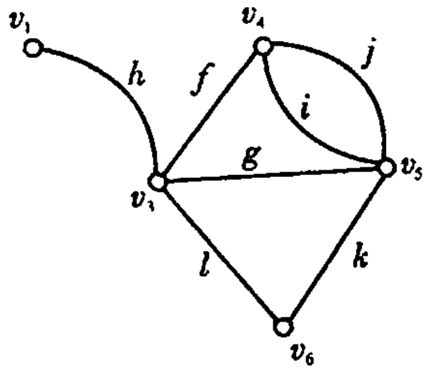
G



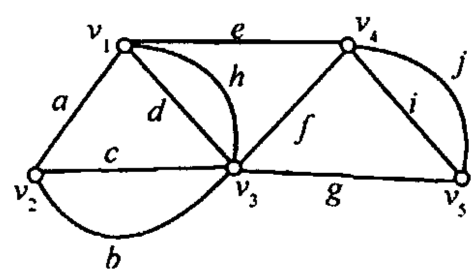
G_1



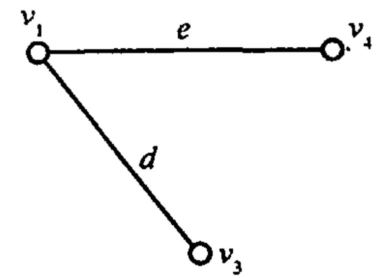
G_2



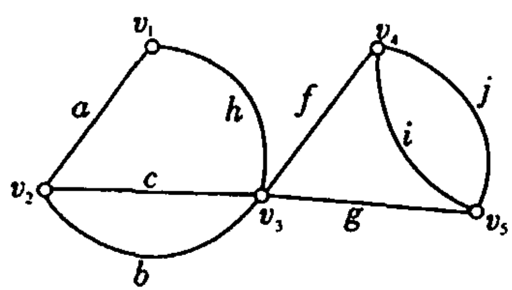
$\overline{G_1} = G - G_1$



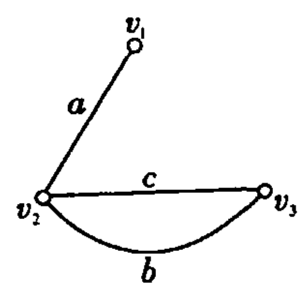
$G_1 \cup G_2$



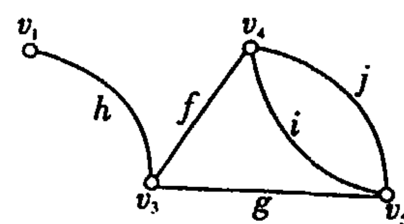
$G_1 \cap G_2$



$G_1 \oplus G_2$



$G_1 - G_2$



$G_2 - G_1$

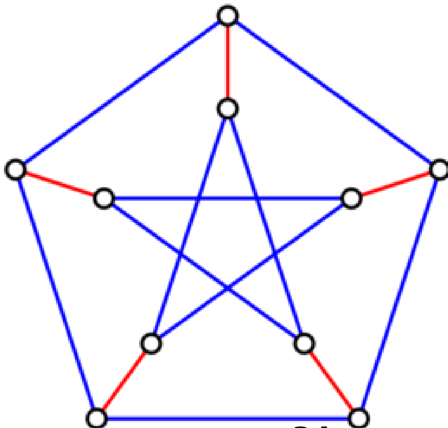
补图

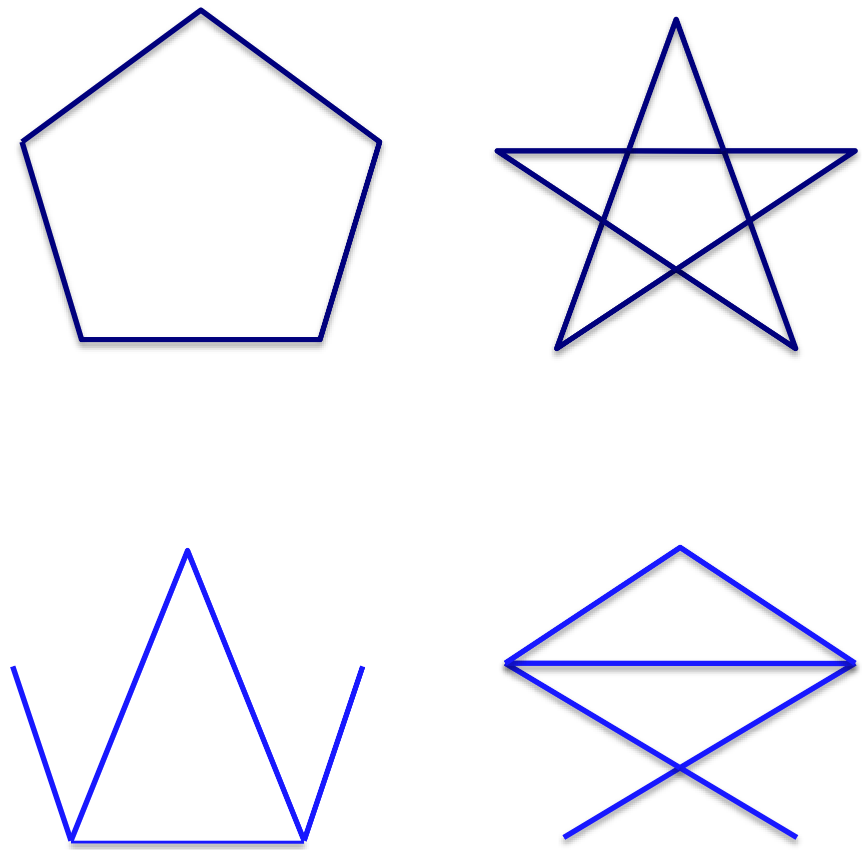
设 n 阶无向图 $G = \langle V, E, \Psi \rangle$ 是 n 阶完全无向图 K_n 的生成子图，则称 $K_n - E$ 为 G 的 **补图**，记为$\bar{G}$。

- 简单无向图都有补图，并且一个简单无向图的所有补图都同构。

思考：

- 完全图的补图是什么？
- 一个节点为5的完全图，找出自补图？





互为补图且自补图

定理7.2.2 图同构

设 f 和 g 为图 $G = <V, E, \Psi>$ 和 $G' = <V', E', \Psi'>$ 之间的 同构映射。

i) 若 $v \in V$ 且 $v' = f(v)$，则 $d_G(v) = d_{G'}(v')$；

ii) 若 $S \subseteq V$ 且 $S' = f(S)$，则 $G[S] \cong G'[S']$ 且 $G - S \cong G' - S'$；

iii) 若 $K \subseteq E$ 且 $K' = g(K)$，则 $G[K] \cong G'[K']$ 且 $G - K \cong G' - K'$；

iv) $\overline{G} \cong \overline{G}'$，即 G 的补图与 G′ 的补图仍同构。

小结

图自己家的关系：

- 子图
  - 生成子图
  - 导出子图
    - 由点导出子图
    - 由边导出子图

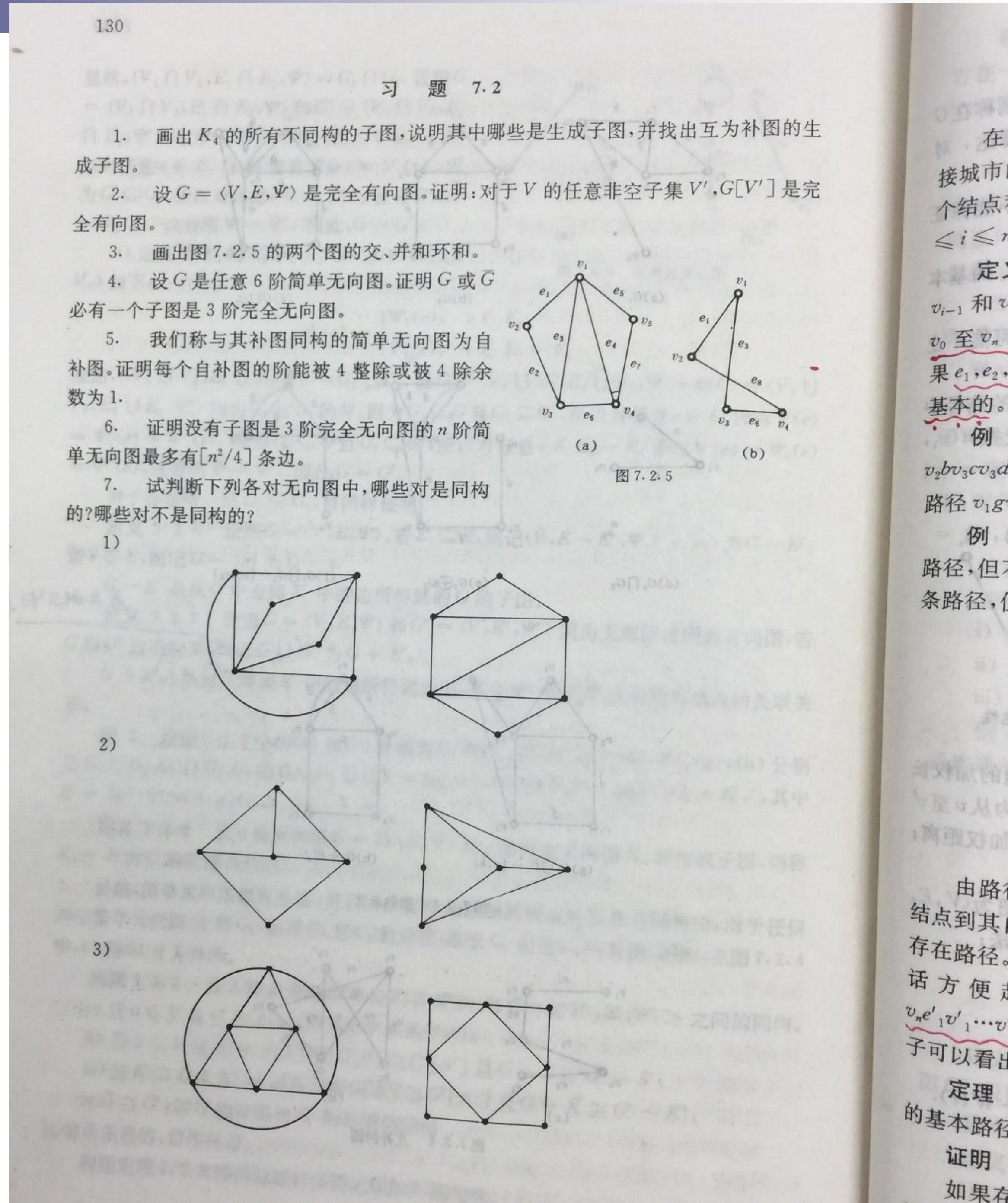
图和图的关系：

- 可运算
  - 三类典型运算（唯一性）
  - 补图

作业

习题7.2

1、3、5、6、7



习　题　7.2

1. 画出 K_4 的所有不同构的子图，说明其中哪些是生成子图，并找出互为补图的生成子图。

2. 设 $G=\langle V,E,\Psi\rangle$ 是完全有向图。证明：对于 V 的任意非空子集 V'，$G[V']$ 是完全有向图。

3. 画出图 7.2.5 的两个图的交、并和环和。

4. 设 G 是任意 6 阶简单无向图。证明 G 或 $\overline{G}$ 必有一个子图是 3 阶完全无向图。

5. 我们称与其补图同构的简单无向图为自补图。证明每个自补图的阶能被 4 整除或被 4 除余数为 1.

6. 证明没有子图是 3 阶完全无向图的 n 阶简单无向图最多有 $[n^2/4]$ 条边。

7. 试判断下列各对无向图中，哪些对是同构的？哪些对不是同构的？

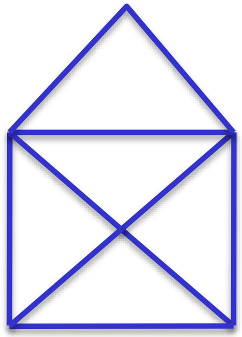
1）

2）

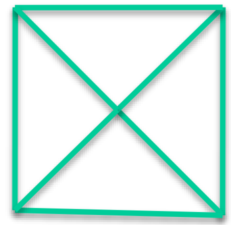
3）

(a)　(b)

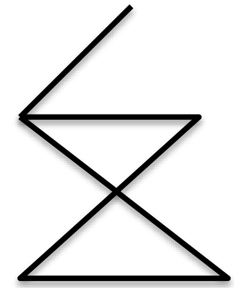
图 7.2.5



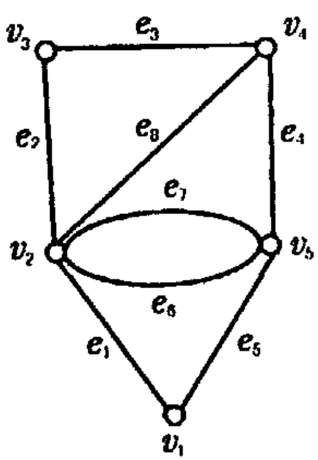
G



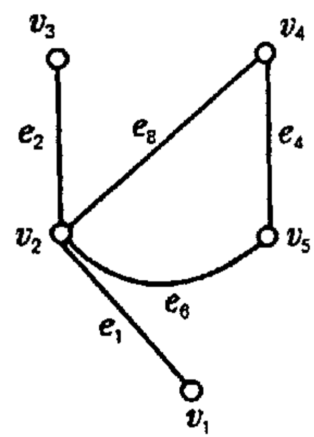
导出子图



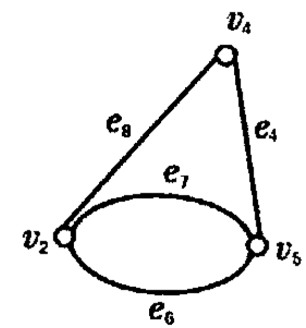
生成子图



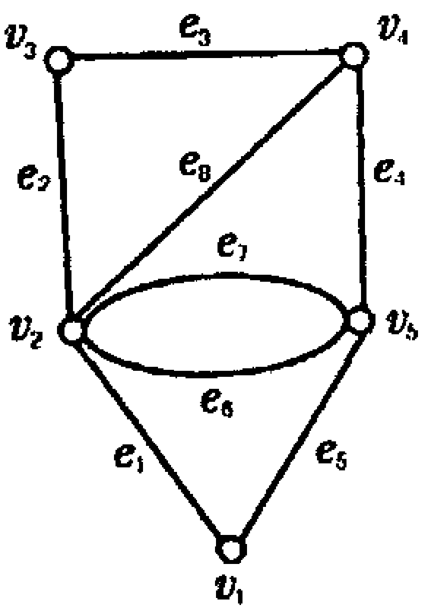
G



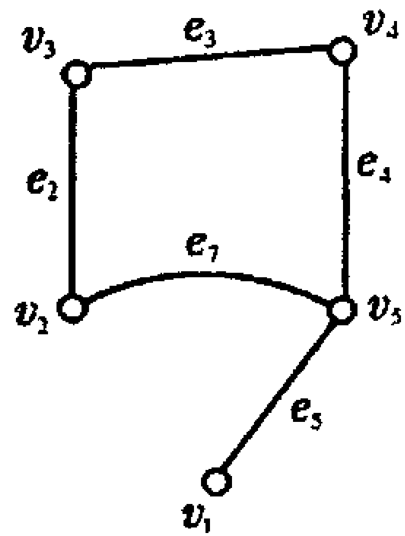
G 的一个生成子图



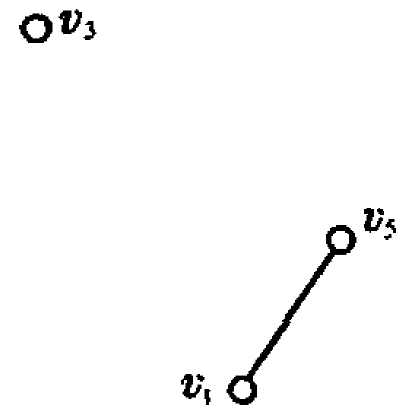
$G\{v_1 , v3\}$



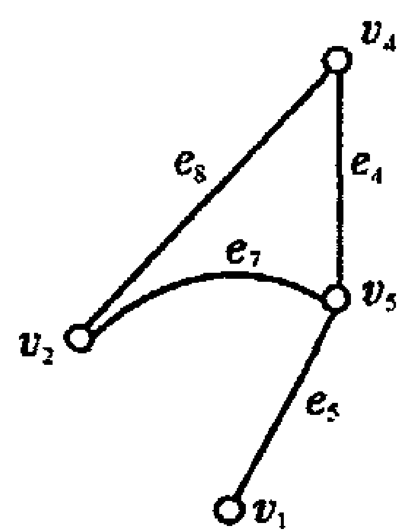
G



$G - \{e_1, e_6, e_8\}$



$G[\{v_1, v_3, v_5\}]$



$G[\{e_4, e_5, e_7, e_8\}]$