第一章 集合的基本概念及其运算

第一章 集合的基本概念及其运算

1 集合与元素

2 集合间的相等和包含关系

3 幂集

4 集合的运算

5 有穷集的计数原理

6 有序偶和笛卡儿乘积

1. 集合与元素

目标要求：

- 会用抽象法表示集合
- 掌握集合的抽象表示和枚举表示的互相转换
- 掌握数学归纳法表示集合

重点难点：

- 集合的抽象表示
- 抽象原则
- 集合的数学归纳法表示

概念的分类：

- 原始概念、不定义概念：无法用其他已经存在的概念来描述的概念。
- 派生概念：可以由其他已经存在的概念来给出定义的概念。

例：欧氏几何学中，“点”和“线”是原始概念

点是没有部分的。
线只有长度而没有宽度。
直线是它上面的点一样地平放着的线。

平等四边形、正方形是派生概念

平行四边形：在同一个二维平面内，由两组平行线段组成的闭合图形

正方形：四条边都相等、四个角都是直角的四边形

集合是人们能够明确区分的一些对象(客体)构成的一个整体。（康托）原始概念

例: (1) 全体中国人的集合

(2) 26个英文字母构成的集合

(3) 方程$x^2+x+1=0$的实根的集合

(4) 2018年北航计算机学院选修《离散数学2》的学生的集合

一个集合可作为另一个集合的元素

(5) a, b和所有整数的集合构成的集合

不能明确区分

(6) ~~班上高个子学生够成的集合~~

(7) 班上1.75以上的高个子学生够成的集合

集合是人们能够明确区分的一些对象(客体)构成的一个整体。 （康托）

集合通常用大写英文字母表示：

- N:自然数集合(含0)
- R:实数集合 R^{+}： 正实数集合 R^{-}： 负实数集合
- Q:有理数集合
- I(或Z):整数集合 I^{+}： 正实数集合
  I^{-}： 负整数集合

元素：集合里含有的对象称为该集合的元素

通常用小写英文字母 表示元素：a, b, c,...

集合是人们能够明确区分的一些对象(客体)构成的一个整体；集合里含有的对象称为该集合的元素

设a为任意一个对象，A为任意一个集合。在a和A之间有且仅有以下两种情况之一出现：

- a是A 的元素，记为 $a\in A$，称为 a 属于A或A包含a
- a不是A中的元素，记为$a\notin A$，读作a不属于A或A不包含a。

当$a_1\in A$， $a_2\in A, \ldots, a_n\in A$时，常简写为$a_1,a_2,\ldots, a_n \in A$

几类集合：

单元集：含有一个元素的集合 ，如：$\{a\}, \{\varnothing\}$

n元集：含有n个元素的集合

有穷集： 由有穷个元素构成的集合

无穷集： 由无穷个元素构成的集合 ，如：N，R

集合的表示方法:

(1) 列举法（枚举法）

(2) 部分列举法

(3) 抽象法（命题法）

(4) 归纳定义法

列举法：依照任意一种次序，不重复地列举出集合的全部元素，并用一对花括号括起来

例: (1) 小于5的所有正整数：｛1，2，3，4｝

(2) 20以内的所有素数：｛2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19｝

部分列举法：

- 依照任意一种次序，不重复地列举出集合的一部分元素，这部分元素要能 充分体现出该集合的元素在上述次序下的构造规律

例：$N=\{0, 1, 2, \ldots\}$

$Z=\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

不超过100的整数集合$=\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$

- 仅适合于元素的构造规律比较明显、简单的集合
- 可以是无限集，也可以是元素个数较多的有限集

抽象法:

- 给出一个与x有关的谓词（命题）P(x)，使得$x \in A$当且仅当P(x)为真
- 称A为“使P(x)为真的x的集合”，记为

$$A = \{x \mid P(x)\}$$

例:

$$S_1 = \{x \mid x\text{是中国的省}\}$$

$$S_2 = \{x \mid x=2k+1 \text{ 且 } k \in N\}$$

$$= \{x \mid x\text{是正奇数}\}$$

$$S_3 = \{n \mid n \in N\text{且}0 \le n < m\},\ m \in N$$

一个集合的抽象描述形式不唯一。

定义1(抽象原则): 任给一个性质 P，就确定了一个集合A , A 的元素恰好是具有性质P的对象，即:

$$A = \{x \mid P(x)\}$$

也就是说 $\forall x\,(P(x) \leftrightarrow x \in A)$

例: $A = \{x \mid x\text{是英文元音字母}\}$

由抽象原则可知，对任意x:

$$x \in A \Leftrightarrow x\text{是英文元音字母}$$

其中, $\Leftrightarrow$ 表示当且仅当。

抽象原则的限制:

(1) 谓词 P(x) 要明确清楚

反例：$A = \{x \mid p(x)\}$，$p(x)$：x是花园里美丽的花朵

“美丽”是一模糊概念。因此A不能够成集合。

(2) 不能取 P(x) 为 $x \notin x$ 这样的谓词来定义集合，否则就会产生悖论 (罗素悖论，B.Russell)。

设 $T = \{x \mid x \notin x\}$，问：T属于T吗？

T不是一个集合

$\forall x: \quad x \in T \Leftrightarrow x \notin x$，

把 T 代入 x 得，

$T \in T \quad \Leftrightarrow \quad T \notin T$， 矛盾!

理发师悖论：

在某个城市中有一位理发师，他的广告词写到：“本人的理发技艺十分高超，誉满全城。我将为本城所有不给自己刮脸的人刮脸，我也只给这些人刮脸。我对各位表示热诚欢迎！”

来找他刮脸的人络绎不绝，自然都是那些不给自己刮脸的人。

可是，有一天，这位理发师从镜子里看见自己的胡子长了，他本能地抓起了剃刀，你们看他能不能给他自己刮脸呢？

如果他不给自己刮脸，他就属于“不给自己刮脸的人”，他就要给自己刮脸，而如果他给自己刮脸呢？他又属于“给自己刮脸的人”，他就不该给自己刮脸。

理发师悖论与罗素悖论是等价的：

如果把每个人看成一个集合，这个集合的元素被定义成这个人刮脸的对象。那么，理发师宣称，他的元素，都是城里不属于自身的那些集合，并且城里所有不属于自身的集合都属于他。那么他是否属于他自己？

理发师悖论：理发师恰给所有不给自己理发的人理发。

说谎者悖论：我说的这句话是假话。

悖论产生的原因：自引用、自作用

集合的公理化：

为了解决集合论中的悖论问题，人们从二十世纪初就开始了公理化集合论的研究。并提出了集合论的多种公理系统。

归纳定义法：

(1) 基本项：已知某些元素属于A（保证A不空）

非空集 $S_0 \subseteq A$；（规定A的一些生成元）

(2) 归纳项：一组规则，从 A 中元素出发，依据这些规则所获得的元素仍然是 A 中的元素；

(3) 极小化：

(a) A中的每个元素都是通过有限次使用(1) 或 (2) 获得的。

(b) 如果集合 $S \subseteq A$ 也满足 (1)和 (2)，则 $S = A$ 。

- 极小化保证：A 是同时满足 (1) 和(2) 的最小集合
- 第(3)步常常省略不写

例：非负偶数集合

$$E = \{x \mid \exists y\,(y \in N \wedge x = 2y)\}$$

E 的归纳定义如下：

(1). $0 \in E$

(2). 若 $n \in E$，则 $(n+2) \in E$

例：求下列归纳定义的集合 P

(1). $3 \in P$

(2). 若 $x, y \in P$, 则 $(x + y) \in P$

显然，P是由3的倍数的正整数组成。

思考题

用归纳定义法给出下列集合：

1. 允许有前0的十进制无符号整数的集合；
2. 不允许有前0的十进制无符号整数的集合；
3. 不允许有前0的二进制无符号偶数的集合；
4. 不允许有前0的被3整除的二进制无符号整数的集合
5. 不允许有前0的被 5 整除的二进制无符号整数的集合

1. 允许有前0的十进制无符号整数的集合

解法 一:

1) 令 $S_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \subseteq A_1$;

2) 若 $a \in S_0$ 且 $\alpha \in A_1$ ，则 $a\alpha \in A_1$;

解法 二:

1) 令 $S_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \subseteq A_1$;

2) 若 $\alpha, \beta \in A_1$，则 $\alpha\beta \in A_1$;

2. 不允许有前0的十进制无符号整数的集合;

解法 一:

1) 令 $S_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \subseteq A_2$;

2) 若 $a \in S_0 - \{0\}$ 且 $\alpha \in A_2$ ，则 $a\alpha \in A_2$;

解法 二:

1) 令 $S_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \subseteq A_2$;

2) 若 $\alpha, \beta \in A_2$ 且 $\alpha \neq 0$ ，则 $\alpha\beta \in A_2$;

3. 不允许有前0的二进制无符号偶数的集合；

				0	0
			1	0	2
		1	0	0	4
		1	1	0	6
	1	0	0	0	8
	1	0	1	0	10
	1	1	0	0	12
1	0	0	0	0	14

解：

1) 令 $S_0 = \{0\} \subseteq A_3$ ；

2) 若 $\alpha \in A_3$，则 $1\alpha \in A_3$ ；

3) 若 $\alpha, \beta \in A_3$ 且 $\alpha \neq 0$，则 $\alpha\beta \in A_3$ ；

4. 不允许有前0的被3整除的二进制无符号整数的集合。

分析：

(1)不允许有前0的二进制无符号整数可分为3类：

a) N_0: 能被3整除

b) N_1: 除以3余数为1

c) N_2: 除以3余数为2

(2) 设α是一个没有前0的二进制无符号整数，

a) α0是α的2倍

b) α1是α的2倍加1

$\alpha \in N_0 \rightarrow \alpha 0 \in N_0$ $\alpha 1 \in N_1$	$\alpha \in N_1 \rightarrow \alpha 0 \in N_2$ $\alpha 1 \in N_0$	$\alpha \in N_2 \rightarrow \alpha 0 \in N_1$ $\alpha 1 \in N_2$

4. 不允许有前0的被3整除的二进制无符号整数的集合。

$\alpha \in N_0 \Rightarrow \alpha 0 \in N_0$ $\alpha 1 \in N_1$	$\alpha \in N_1 \Rightarrow \alpha 0 \in N_2$ $\alpha 1 \in N_0$	$\alpha \in N_2 \Rightarrow \alpha 0 \in N_1$ $\alpha 1 \in N_2$

1)基本项： $\{0\} \subseteq N_0$， $\{1\} \subseteq N_1$， $\varnothing \subseteq N_2$;

2）归纳项：

若 $\alpha \in N_0$ 且 $\alpha \neq 0$，则 $\alpha 0 \in N_0$， $\alpha 1 \in N_1$；

若 $\alpha \in N_1$，则 $\alpha 0 \in N_2$， $\alpha 1 \in N_0$；

若 $\alpha \in N_2$，则 $\alpha 0 \in N_1$， $\alpha 1 \in N_2$。

其中， N_0 就是我们所要的集合。

集合的联立归纳定义法

四种表示方法的比较

表 示 方 式	适　用　对　象	特　　点
列举法	有限集	直观
部分列举法	有限集或无限集	直观
命题法	任意集	易表达
归纳法	非空集	易计算机实现

2 集合间的相等和包含关系

目标要求：

掌握集合相等（=）、包含（⊆）的定义。

掌握 ∈、=、⊆ 之间的联系与区别。

掌握空集的性质

重点难点：

集合间的相等与包含关系

空集的性质

证明集合相等

定义2 (集合相等)（外延性公理）：设 A, B 为任意两个集合，**若A和B含有相同的元素，则称A和B相等**，记作：A=B，即

$$A = B \Leftrightarrow \forall x\,(x\in A \leftrightarrow x\in B)$$

或者

$$A = B \Leftrightarrow \forall x\,(x\in A\rightarrow x\in B) \wedge \forall x\,(x\in B\rightarrow x\in A)$$

例：

1. $\{x \mid x \le 4$且x是正整数$\} = \{1,2,3,4\}$

   $=\{x \mid x<6$且 x能整除 $12\}$

2. $\{x \mid x^2-1 = 0\} = \{-1, 1\}$

3. $\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\}$

—— 集合与其元素排列次序无关。

4. $\{a, b, a\} = \{a, a, b, b, a\} = \{a, b\}$

——集合与其元素重复出现次数无关

$\{a, a, b, b, a\}$ 称为多重集，也称为 bag

由外延性公理可知，对于任意集合A, B, C有

1. $A = A$
2. $A = B \leftrightarrow B = A$
3. $A = B \wedge B = C \rightarrow A = C$

注意：作为集合的元素，未加任何限制，

一个集合的元素可以是一个集合。

例如：**{Ø，1，2，3，{1，2}}**

定义3 (子集或包含)：若集合A的每一个元素都是集合 B 的元素，则称 A是 B的子集，也称A包含于B 或 B包含A。记作：$A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$，

即 $A \subseteq B \;\Leftrightarrow\; \forall x\,(\, x \in A \rightarrow x \in B\,)$

由定义3 可知：对任意集合A有：$A \subseteq A$

定义4（真子集或真包含）：设 A, B是任意集合，若 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$，则称 A为B的真子集，也称 A 真包含于 B，或 B 真包含A。记作：

$$A \subset B \text{ 或 } B \supset A$$

显然，$A \subset B \;\Leftrightarrow\; A \subseteq B \wedge A \neq B$

关系“$\in$”和“$\subseteq$”的区别：

$\in$：构成集合A的元素 a与A是“$\in$”关系

$\subseteq$：集合A的子集 B与A是“$\subseteq$”关系

例：4 $\in$\{\{1，3 \}，4\}，

\{1，3\} $\in$ \{\{1，3\}，4\}，

\{4\} $\subseteq$ \{\{1，3\}，4\} $\subseteq$ \{\{1，3\}，4，5，7\}

例：判断下列命题是否为真

(1) $\{a\} \in \{\{a\}\}$

(2) $\{a\} \subseteq \{\{a\}\}$ ×

(3) $\{a\} \in \{a\}$ ×

(4) $\{a\} \subseteq \{a\}$

(5) $\{a, b\} \in \{a, b, c, \{a, b\}\}$

(5) $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c, \{a, b\}\}$

例：若 $A \in B$，$B \in C$，则 $A \in C$吗？(或 $A \notin C$吗？)

解：一般不成立。

例如：(1) $A = \{1\}$, $B = \{\{1\}, 2\}$, $C = \{\{\{1\}, 2\}, 3\}$,

有 $A \notin C$ 。

(2) $A = \{1\}$, $B = \{\{1\}\}$, $C = \{\{\{1\}\}, \{1\}\}$,

有 $A \in C$

定理1：设 A, B 是两个集合，则

$A = B$ 当且仅当 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$

证：$A=B \Leftrightarrow \forall x(x\in A \leftrightarrow x\in B)$ (集合相等定义）

$\Leftrightarrow \forall x(x\in A\rightarrow x\in B) \wedge \forall x\,(x\in B\rightarrow x\in A)$

$\Leftrightarrow A\subseteq B \wedge B\subseteq A$ （子集定义）

推论：对任意集合A，$A \subseteq A$

定理2：设 A，B，C都是集合，若 $A\subseteq B$ 且 $B \subseteq C$，则 $A \subseteq C$

证：对任意x， $x\in A \Rightarrow x\in B$ $(A\subseteq B)$

$\Rightarrow x\in C$ $(B\subseteq C)$

所以 $A\subseteq C$ 成立 (注：$P \Rightarrow Q$表示 P为真推出Q为真)

例：设A, B和C为集合。证明或用反例推翻以下命题

(1) 若$A \notin B$, 且 $B \notin C$, 则$A \notin C$

(2) 若$A \in B$, 且$B \notin C$, 则$A \notin C$

(3) 若$A \subseteq B$，且$B \notin C$, 则$A \notin C$

解: (1) 反例：$A=\{a\}, B=\{b\}, C=\{\{a\}\}$

(2) 反例：$A=\{a\}, B=\{\{a\}, b\}, C=\{\{a\}, c\}$

(3) 反例：$A=\{a\}, B=\{a, b\}, C=\{\{a\}\}$

定义5（全集U）：在对集合的研究中，如果所讨论的集合，都是某一固定集合的子集，就称该集合为全集，记作 U，即

$$U = \{x \mid p(x) \vee \neg p(x)\}$$

- 全集 U 是一个相对概念，它的选取与的研究的问题有关，随着研究问题的不同可选取不同的集合作为全局
- 有时并不具体指明全集是什么，但总是假定所涉及的每个集合都是全集的一个子集

定义 6（空集$\varnothing$）：不含有任何元素的集合 称为空集，记作：$\varnothing$，即

$$\varnothing = \{x \mid p(x) \land \neg p(x)\},$$

其中p(x) 是任意谓词。

例：判断下列关系是否成?

(1) $\varnothing \in \varnothing$ ✗

(2) $\varnothing \subseteq \varnothing$

(3) $\varnothing \in \{\varnothing\}$

(4) $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$

定理 3：设 A 是任意集合，则 $\varnothing \subseteq A$。

证：$\varnothing \subseteq A \Leftrightarrow \forall x\,(x \in \varnothing \rightarrow x \in A)$,

而 $x \in \varnothing$ 为假,

故 $\forall x\,(x \in \varnothing \rightarrow x \in A)$ 是永真式，故 $\varnothing \subseteq A$ 成立

定理4：空集是唯一的。

证：假设空集不唯一。令 $\varnothing_1$ 和 $\varnothing_2$ 都是空集， 则有

$\varnothing_1 \subseteq \varnothing_2$，同时 $\varnothing_2 \subseteq \varnothing_1$，由定理 1，$\varnothing_1 = \varnothing_2$。

3 幂集

目标要求：

掌握幂集的定义

会求集合的幂集

定义7（幂集）：集合 A 的全部子集构成的集合称为A的幂集， 记作 P(A)，即

$$P(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$$

例：A = {a, b, c}，求 P(A)

解： A的 0 元子集： $\varnothing$,

A的 1 元子集： {a}, {b}, {c}

A的 2 元子集： {a, b}, {a, c}, {b, c}

A的 3 元子集： {a, b, c}

则 A的幂集：

$$P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

定义7（幂集）：集合 A 的全部子集构成的集合称为A的幂集，记作 P(A)，即

$$P(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$$

由定义7，以下成立：

(1) $B \subseteq A$ iff $B \in P(A)$

(2) $\varnothing \in P(A)$

(3) $A \in P(A)$

(4) 若集合 S 有穷，则S的幂集 P(S) 也有穷;反之亦然。

例: 求下列集合的幂集

$P(\varnothing) = \{\varnothing\}$

$P(\{\varnothing\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

$P(\{a,\{a\}\}) = \{\varnothing, \{a\}, \{\{a\}\}, \{a, \{a\}\}\}$

$P(P(\{\varnothing\})) = P(\{\varnothing, \{\varnothing\}\})$

$= \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$

例：设B，C为任意两个集合，求证

(1) 若 $B \subseteq C$，则 $P(B) \subseteq P(C)$

(2) 若 $B \subset C$，则 $P(B) \subset P(C)$

证明: (1) 对于任意 x,

$x \in P(B) \Leftrightarrow x \subseteq B \Rightarrow x \subseteq C$（$B \subseteq C$, 定理2）

$\Leftrightarrow x \in P(C)$

所以 $P(B) \subseteq P(C)$（$\subseteq$的定义）

(2) 由 $B \subset C$ 得 $B \subseteq C$，因此 $P(B) \subseteq P(C)$。

思考题

(1) $P(B) \subseteq P(C)$ 的充分必要条件?

(2) $P(B) \subset P(C)$的充分必要条件?

(3) $P(B) = P(C)$ 的充分必要条件?

定义 8（基数）：有穷集合A中所含有元素的个数称为 A 的基数。 记作 #A（或|A|，n(A)）。

- 若集 A含有 n个元素，则其m元子集有 C_n^m 个，其中，C_n^m 是从n个元素中取出 m 个元素的组合数。

定理 5： 设 A 是有穷集合，则 $\#P(A) = 2^{\#A}$

证：设A有n个元素，即#A=n, 则A的m元子集有C_n^m个,

所以 A 共有 $C_n^0 + C_n^1 + \cdots\cdots + C_n^n$ 个子集

由二项式定理：

$$(x+y)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} y + \cdots\cdots + C_n^n y^n$$

令x = y =1, 则 $(1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + \cdots\cdots + C_n^n = 2^n$

4 集合的运算

重点：集合运算及运算性质

难点：证明两个集合相等

集合的运算：∩（交）、∪（并）、

－（差，也称相对补）、

~（补，也称绝对补）、⊕（对称差）

广义交、广义并

定义 9：设 A 和 B 是任意两个集合

(1) $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

(2) $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

(3) $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

定义 10：若 A 和 B 没有公共元素，即 $A \cap B = \varnothing$，则称 A 和 B 不相交。

例：设 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{3,4,5,6\}$，求 $A\cup B$，$A\cap B$，$A-B$ 和 $B-A$。

解：$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$，$A\cap B=\{3,4\}$,

$A-B=\{1,2\}$, $B-A=\{5,6\}$

例：证明 $A-B=A\cap\sim B$

证：根据抽象原则，对于任意 x

$x\in A-B \Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B$ （－ 定义）

$\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in\sim B$ （～ 定义）

$\Leftrightarrow x\in A\cap\sim B$ （∩ 定义）

定义11 (补集): 设A是全集U的子集，A 相对于 U 的补集 U－A 称为 A 的绝对补集，简称A的补集。记作~A。

即：$\sim A = U - A = \{x \mid x \in U \land x \notin A\} = \{x \mid x \notin A\}$

显然，$x \notin A$ 当且仅当 $x \in \sim A$

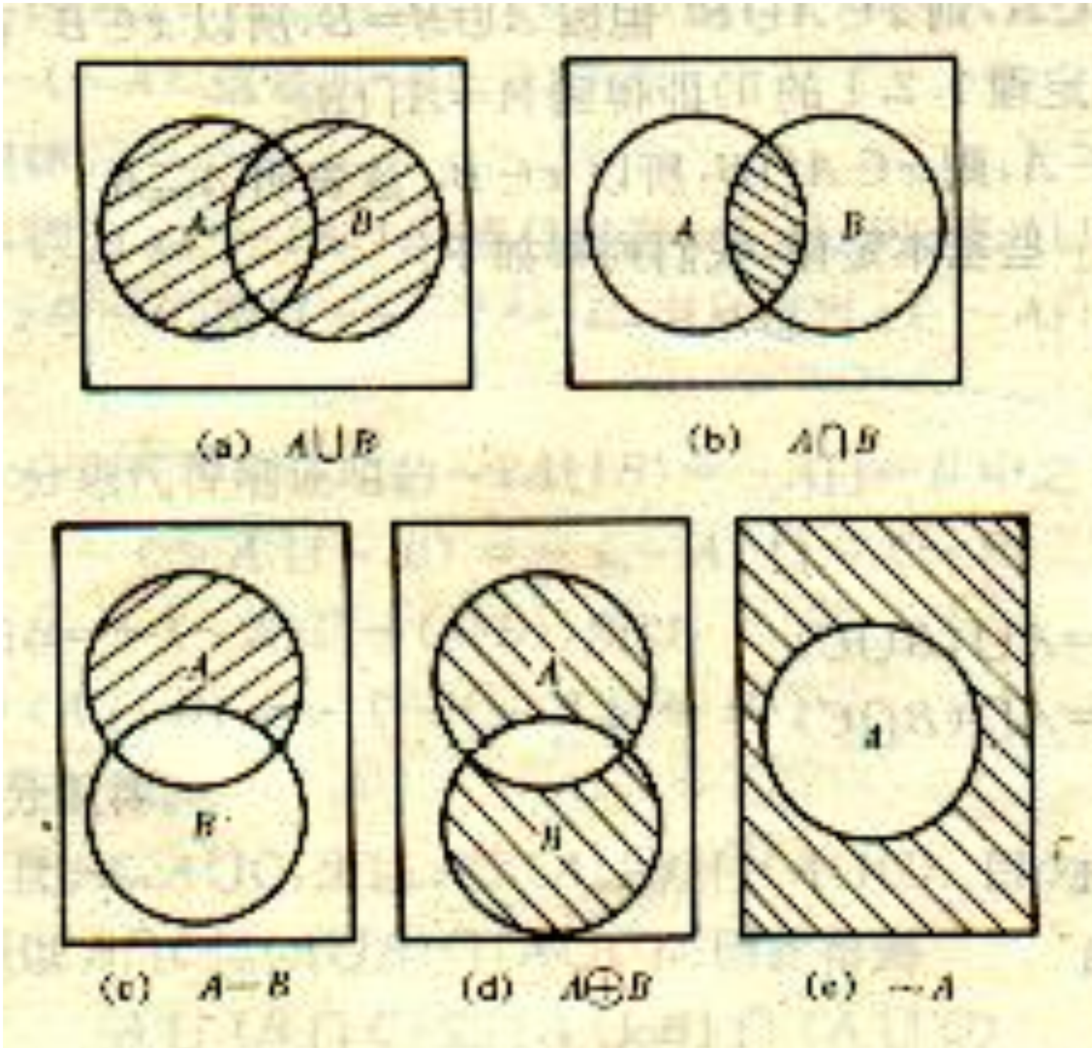
定义12（对称差集）： 设 A 和 B 是任意两个集合，A 和 B 的对称差集，记为 $A \oplus B$，则

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

例：设 U ={1，2，3，4} 且 A= {1，2}，B={2，3，4}。

则 $\sim A = \{3，4\}$，$A \oplus B = \{1，3，4\}$。

文氏图



定理6 设A，B和C为任意三个集合，则有

i) $A \subseteq A \cup B$ 且 $B \subseteq A \cup B$;

ii) $A \cap B \subseteq A$ 且 $A \cap B \subseteq B$;

iii) $A - B \subseteq A$;

iv) $A - B = A \cap \sim B$;

v) 若 $A \subseteq B$，则 $\sim B \subseteq \sim A$;

vi) 若 $A \subseteq C$ 且 $B \subseteq C$，则 $A \cup B \subseteq C$;

vii) 若 $A \subseteq B$ 且 $A \subseteq C$，则 $A \subseteq B \cap C$。

例: 设A与B是任意集合。

(1) $x \in A \oplus B$ iff $(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)$

(2) $x \notin A \oplus B$ iff $(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \notin A \wedge x \notin B)$

(3) $A - B = \varnothing$ iff $A \subseteq B$

(4) $A \cup B = \varnothing$ iff $A = B = \varnothing$

怎么证明?

(5) $A \oplus B = \varnothing$ iff $A = B$

(6) $A \oplus B = A \oplus C$ iff $B = C$

(7) $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$ iff $A \subseteq B$ 或 $B \subseteq A$

集合运算的基本定律

幂等律： $A \cup A = A$ $A \cap A = A$	交换律： $A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
结合律： $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	
分配律： $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	
同一律： $A \cup \varnothing = A$ $A \cap U = A$	

零律： $A \cup U = U$ $A \cap \varnothing = \varnothing$	否定律： $A \cup \sim A = U$ $A \cap \sim A = \varnothing$
吸收律： $A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	
德·摩尔根律： $\sim (A \cup B) = \sim A \cap \sim B$ $\sim (A \cap B) = \sim A \cup \sim B$	
对合律： $\sim (\sim A) = A$ $\sim \varnothing = U$ $\sim U = \varnothing$	

对集合运算的基本定律的说明

- 在不含– 的集合恒等式中，将 $\cup$ 和 $\cap$ 互换，$\varnothing$ 和 U 互换，得到的仍是集合恒等式。—— 对偶原理

吸收律：$A \cup (A \cap B) = A$ 零律：$A \cup U = U$

$A \cap (A \cup B) = A$ $A \cap \varnothing = \varnothing$

- 将不含 → 和↔ 的命题逻辑等值式中的 $\vee$ 换为 $\cup$，$\wedge$ 换为 $\cap$，$\neg$ 换为 ~，0 换为 $\varnothing$，1 换为 U，$\Leftrightarrow$ 换为 =，就得到集合恒等式。

$\neg\neg P \Leftrightarrow P$	双重否定律
$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$	交换律
$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$	
$(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$	结合律
$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$	
$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	分配律
$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	
$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$	德·摩尔根律
$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$	
$P \vee P \Leftrightarrow P$	幂等律
$P \wedge P \Leftrightarrow P$	
$R \vee F \Leftrightarrow R$	同一律
$R \wedge T \Leftrightarrow R$	
$R \vee T \Leftrightarrow T$	零　律
$R \wedge F \Leftrightarrow F$	
$P \vee \neg P \Leftrightarrow T$	
$P \wedge \neg P \Leftrightarrow F$	

将不含 → 和↔ 的命题逻辑等值式中的 ∨ 换为 ∪ ，∧ 换为 ∩ ，¬ 换为 ~ ，0 换为 ∅ ，1 换为 U，⇔ 换为 = ，就得到集合恒等式。

定理7：设 A 和 B是全集U的子集，则下列命题等价：

(1)$A \subseteq B$；(2)$A \cup B = B$; (3) $A \cap B = A$; (4) $A - B = \varnothing$

证: **(1)⇒(2)**：对于任意 x，由“∪”定义可知

如果$x \in B$， 则$x \in A \cup B$，因此 $B \subseteq A \cup B$

对于任意 x， $x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \vee x \in B$

$\Rightarrow x \in B \vee x \in B \Rightarrow x \in B$

常用于证明两个集合的包含关系

所以 $A \cup B = B$

(2) ⇒(3) : $A \cap B = A \cap (A \cup B) = A$ （吸收律）

(3) ⇒(4) : $A - B = (A \cap B) - B = A \cap B \cap \sim B = \varnothing$

(4) ⇒(1) : 反证法，假设 $A \subseteq B$不成立，则存在x，

$x \in A$但 $x \notin B$，因此 $x \in A - B$，即$A - B \neq \varnothing$，与已知条件（4）矛盾。故必有$A \subseteq B$。

定理7：设 A 和 B是全集U的子集，则下列命题等价：
(1)$A \subseteq B$； (2)$A \cup B = B$; (3) $A \cap B = A$; (4) $A - B = \varnothing$

例：设A，B，C是任意集合，试证：

若$A \subseteq B$且 $C \subseteq D$，则 $A \cup C \subseteq B \cup D$

证明：因为 $A \subseteq B$且$C \subseteq D$，则

$A \cup B = B$ 且 $C \cup D = D$（四个等价命题）

因此， $(A \cup B) \cup (C \cup D) = B \cup D$

即（ $A \cup C$）$\cup$（$B \cup D$）＝ $B \cup D$

所以 $A \cup C \subseteq B \cup D$ （四个等价命题）

证明两个集合相等常用以下两种方法：

（1）集合相等定义（元素分析法）

（2）集合运算的基本定律（等式推理）

例：试证：$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$。

证明: (方法一)对任意 x,

$$x\in A-(B\cup C)\Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B\cup C$$

$$\Leftrightarrow x\in A\wedge\neg(x\in B\cup C)$$

$$\Leftrightarrow x\in A\wedge\neg(x\in B\vee x\in C)$$

$$\Leftrightarrow x\in A\wedge(x\notin B\wedge x\notin C)$$

$$\Leftrightarrow(x\in A\wedge x\notin B)\wedge(x\in A\wedge x\notin C)$$

$$\Leftrightarrow x\in A-B\wedge x\in A-C$$

$$\Leftrightarrow x\in(A-B)\cap(A-C)$$

所以，$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$。

例： 试证：$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$。

证明：(方法二)

$A-(B\cup C)$

$=A\cap\sim(B\cup C)$

$=A\cap(\sim B\cap\sim C)$ 德·摩尔根律

$=(A\cap A)\cap(\sim B\cap\sim C)$ 幂等律

$=(A\cap\sim B)\cap(A\cap\sim C)$ 结合律，交换律

$=(A-B)\cap(A-C)$

例：设A, B, C是任意集合, 试证以下命题成立

(1) $A \cap (B-A) = \varnothing$

(2) $A-(A-B) = A \cap B$

(3) $(A-B) \oplus B = (A-B) \cup B$

证明: (1) $A \cap (B-A) = A \cap (B \cap \sim A)$

$= A \cap (\sim A \cap B)$ (交换律)

$= (A \cap \sim A) \cap B$ (结合律)

$= \varnothing \cap B$ (否定律)

$= \varnothing$ (零律)

例：设A, B, C是任意集合, 试证以下命题成立

(1) $A\cap(B-A)=\varnothing$

(2) $A-(A-B)=A\cap B$

(3) $(A-B)\oplus B=(A-B)\cup B$

证明: (2) $A-(A-B)=A\cap\sim(A-B)$

$=A\cap\sim(A\cap\sim B)$

$=A\cap(\sim A\cup B)$ (德·摩尔根律)

$=(A\cap\sim A)\cup(A\cap B)$ (分配律)

$=\varnothing\cup(A\cap B)$ (否定律)

$=A\cap B$ (零律)

例：设A, B, C是任意集合, 试证以下命题成立

(1) $A\cap(B-A)=\varnothing$

(2) $A-(A-B)=A\cap B$

(3) $(A-B)\oplus B=(A-B)\cup B$

证明: (3)

$(A-B)\ \oplus B$

$=((A-B)-B)\cup(B-(A-B))$ （$\oplus$ 的定义)

$=(A\cap\sim B\cap\sim B)\cup(B\cap\sim(A\cap\sim B))$

$=(A\cap\sim B)\cup(B\cap(B\cup\sim A))$ (幂等律、德·摩尔根律)

$=(A-B)\cup B$ (-的定义、吸收律)

例：给出下列各式成立的充分必要条件，并加以证明

(1) $(A-B)\cup(A-C)=\varnothing$;

(2) $A-B=B$;

(3) $(A-B)\oplus(A-C)=\varnothing$。

解: (1) $(A-B)\cup(A-C)=\varnothing$

iff $A-B=\varnothing$ 且 $A-C=\varnothing$

iff $A\subseteq B$ 且 $A\subseteq C$ iff $A\subseteq B\cap C$

(2) A-B=B iff A= B= ∅

(必要性) 反证法。如果A ≠∅, B= ∅ 或B≠∅, A= ∅,
显然A-B≠B。

假设A ≠∅且B ≠∅:

(a) 如果A=B, 显然A-B≠B;

(b) 如果A≠B。假设存在c ∈A，但c ∉B，则c ∈A-B，矛盾。假设存在c ∉ A，但c ∈ B，则c ∉ A-B，矛盾。

因此若A-B=B，则 A= B= ∅。

(充分性) 若A= B= ∅，则A-B=B= ∅

(3) $(A-B) \oplus (A-C) = \varnothing$

$$(A - B) \oplus (A - C) = (A \cap \sim B) \oplus (A \cap \sim C)$$

$$= ((A \cap \sim B) \cup (A \cap \sim C)) - ((A \cap \sim B) \cap (A \cap \sim C))$$

$$= ((A \cap \sim B) \cup (A \cap \sim C)) \cap \sim ((A \cap \sim B) \cap (A \cap \sim C))$$

$$= ((A \cap \sim B) \cup (A \cap \sim C)) \cap (\sim (A \cap \sim B) \cup \sim (A \cap \sim C))$$

$$= ((A \cap \sim B) \cup (A \cap \sim C)) \cap ((\sim A \cup B) \cup (\sim A \cup C))$$

$$= (A \cap (\sim B \cup \sim C)) \cap (\sim A \cup (B \cup C))$$

$$= (A \cap (\sim B \cup \sim C)) \cap (B \cup C)$$

$$= A \cap ((B \cup C) \cap \sim (B \cap C))$$

$$= A \cap (B \oplus C)$$

得 $(A–B) \oplus (A–C) = \varnothing$ 的充分必要条件为$A \cap (B \oplus C) = \varnothing$ 。