定义13. 设 R 是集合 A 上的关系，n 是自然数，R 的 n 次幂 R^n 定义如下：

(1) R^0 是集合A上的恒等关系 I_A，即 $R^0 = I_A$；

(2) $R^{n+1} = R^n \circ R$ 。

显然，$R^1 = R^0 \circ R = I_A \circ R = R$

定理 若n, m ∈N且R为集合A上的二元关系，则

(1) $(R^n)^{-1}=(R^{-1})^n$;

(2) $R^n \circ R^m=R^{n+m}$;　　对n进行数学归纳

(3) $(R^m)^n=R^{mn}$。

定理. 设有限集A恰有n个元素。若R为A上的二元关系，则有s, t ∈ N, 使$s < t \leq 2^{n^2}$且$R^s = R^t$。

证：因为A恰有n个元素，因此A上的二元关系最多有2^{n^2}个。

所以在以下的$2^{n^2}+1$个关系

$$R^0, R^1, \ldots, R^{2^{n^2}}$$

中必有两个是相同的，所以必有s, t ∈ N, 使$s<t\leq 2^{n^2}$且$R^s=R^t$

鸽巢原理
（抽屉原理）

例：设R_1和R_2都是集合A上的二元关系。判断以下命题是否成立，给出证明或反例。

(1) 如果R_1和R_2都是自反的，则$R_1 \circ R_2$也是自反的；

(2) 如果R_1和R_2都是反自反的，则$R_1 \circ R_2$也是反自反的；

(3) 如果R_1和R_2都是对称的，则$R_1 \circ R_2$也是对称的；

(4) 如果R_1和R_2都是反对称的，则$R_1 \circ R_2$也是反对称的；

(5) 如果R_1和R_2都是传递的，则$R_1 \circ R_2$也是传递的。

解: (1) 成立。因为R_1和R_2都是自反的, 则对任意的 $x \in A$,

$<x, x> \in R_1$且$<x, x> \in R_2$, 得$<x, x> \in R_1 \circ R_2$。

所以$R_1 \circ R_2$也是自反的。

例：设R_1和R_2都是集合A上的二元关系。判断以下命题是否成立，给出证明或反例。

(3)如果R_1和R_2都是对称的，则$R_1 \circ R_2$也是对称的；

(5) 如果R_1和R_2都是传递的，则$R_1 \circ R_2$也是传递的。

解: (3) 不成立。

反例： $A=\{1, 2, 3\}$, $R_1=\{<1, 2>, <2, 1>\}$, $R_2=\{<2, 3>, <3, 2>\}$是对称的, 但$R_1 \circ R_2=\{<1, 3>\}$ 不是对称的

(5) 不成立。反例:

$R_1=\{<1, 2>, <3, 1>, <3, 2>\}$, $R_2 = \{<2, 3>, <1, 1>\}$是传递的，但 $R_1 \circ R_2 = \{<1, 3>, <3, 1>, <3, 3>\}$不是传递的。

例：设 R 为 A 上的二元关系，试证以下条件成立：

(1) R 为自反的 iff $I_A \subseteq R$;

(2) R为反自反的 iff $I_A \cap R = \varnothing$;

(3) R 为对称的 iff $R = R^{-1}$;

(4) R 为反对称的 iff $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$;

(5) R 为传递的 iff $R \circ R \subseteq R$ 。

例：设 R 为 A 上的二元关系，试证以下条件成立：

(1) R 为自反的 iff $I_A \subseteq R$;

(3) R 为对称的 iff $R = R^{-1}$;

(5) R 为传递的 iff $R \circ R \subseteq R$ 。

证: (1) R 为自反的 iff 对任意的$x \in A$, 有$\langle x, x\rangle \in R$ iff $I_A \subseteq R$。

(3) (必要性) 对任意的$\langle x, y\rangle \in R$，由R的对称性得，$\langle y, x\rangle \in R$，即$\langle x, y\rangle \in R^{-1}$，因此$R \subseteq R^{-1}$。
对任意的$\langle x, y\rangle \in R^{-1}$，有 $\langle y, x\rangle \in R$。因为R是对称的，所以$\langle x, y\rangle \in R$，得$R^{-1} \subseteq R$。故$R = R^{-1}$ 。

(充分性) 对任意的$\langle x, y\rangle \in R$, 因为$R=R^{-1}$, 因此$\langle x, y\rangle \in R^{-1}$, 从而$\langle y, x\rangle \in R$，得R是对称的。

例：设 R 为 A 上的二元关系，试证以下条件成立：

(5) R 为传递的 iff $R \circ R \subseteq R$。

证: (5) (必要性) 对任意的$<x, z> \in R \circ R$, 一定存在$y \in A$,

使得$<x, y>, <y, z> \in R$。

由于R为传递的，必有 $<x, z> \in R$ 。因此$R \circ R \subseteq R$ 。

(充分性) 对任意的$<x, y>, <y, z> \in R$，有$<x, z> \in R \circ R$。

由于$R \circ R \subseteq R$，因此$<x, z> \in R$。所以 R 为传递的

关系合成的矩阵表示：

设 $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_m\}$， $B=\{b_1,b_2,\ldots,b_p\}$， $C=\{c_1,c_2,\ldots,c_n\}$，
R 是 A 到 B的关系， S 是 B 到 C的关系，
关系矩阵 $M_R=(r_{ij})_{m\times p}$， $M_S=(s_{ij})_{p\times n}$， $M_{R\circ S}=(t_{ij})_{m\times n}$

$<a_i, c_j>\in R\circ S$ 当且仅当 存在$b_k\in B$使得$<a_i, b_k>\in R$ 且 $<b_k, c_j>\in S$。

$t_{ij}=1$ 当且仅当 存在$k\in\{1, 2,\ldots, p\}$ 使得 $r_{ik}=s_{kj}=1$

如何由M_R和M_S计算$M_{R\circ S}$?

类比矩阵乘法

$R\circ S$ 的关系矩阵 $M_{R\cdot S}=(t_{ij})_{m\times n}$， 其中

$$t_{ij}=(r_{i1}\wedge s_{1j})\vee(r_{i2}\wedge s_{2j})\vee\ldots\vee(r_{ip}\wedge s_{pj})$$
$$=\bigvee_{k=1}^{p}(r_{ik}\wedge s_{kj})$$

例：设A＝{a, b, c, d}上的关系R＝{<a, b>, <b, a>, <b, c>, <c, d>}，求 R^2 的关系矩阵。

解：

$$M_R=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$M_{R^2}=\begin{bmatrix}\boxed{0\quad 1\quad 0\quad 0}\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

2 关系的运算——闭包

定义14 设 R是集合 A 上的关系。
关系R′ 称为 R的自反（对称、传递）闭包，当且仅当R′满足以下三个条件:
(1) R′是自反的(对称的、传递的);
(2) $R \subseteq R'$;
(3) 对于A上的任何自反（对称、传递）关系R″，
如果 $R \subseteq R''$，则 $R' \subseteq R''$。
将 R的自反，对称，传递 闭包分别记作 r(R), s(R), t(R)。

包含R的最小自反(对称、传递)关系。

定理: 设R为集合A上的二元关系，则
(1) R是自反的 当且仅当 r(R) = R;
(2) R是对称的 当且仅当 s(R) = R;
(3) R是传递的 当且仅当 t(R) = R 。

定理： 设 R 是集合A上的关系，则

(1) $r(R) = R \cup I_A$;

(2) $s(R) = R \cup R^{-1}$

(3) $t(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$

证: (1) 显然， $R \cup I_A$是自反的，且 $R \subseteq R \cup I_A$。

由自反闭包 r(R)的定义可知，$r(R) \subseteq R \cup I_A$。

另外, 由于 r(R) 是A上的自反关系，因此$I_A \subseteq r(R)$。

又因于 $R \subseteq r(R)$, 所以$R \cup I_A \subseteq r(R)$

故 $r(R) = R \cup I_A$ 。

定理： 设 R 是集合A上的关系，则

(1) $r(R) = R \cup I_A$;

(2) $s(R) = R \cup R^{-1}$

(3) $t(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$

证：(2)显然 $R \subseteq R \cup R^{-1}$。

因为 $(R \cup R^{-1})^{-1} = R^{-1} \cup (R^{-1})^{-1} = R^{-1} \cup R = R \cup R^{-1}$,

因此，$R \cup R^{-1}$ 是对称的。

设 R' 是A上任意对称关系 且 $R \subseteq R'$，则 $R^{-1} \subseteq (R')^{-1}$。

因为R'是对称的，所以 $(R')^{-1} = R'$,

故 $R^{-1} \subseteq R'$，所以 $R \cup R^{-1} \subseteq R'$。

由对称闭包定义知，$s(R) = R \cup R^{-1}$

定理： 设 R 是集合A上的关系，则

(3) t(R) ＝ $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$

证明: (3) 首先，显然R $\subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$。

下面证明$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$是传递的。

设任意<x, y> $\in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$，<y, z> $\in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$,

则存在正整数s 和 k，使得<x, y>∈R^s , <y, z>∈ R^k，得

<x, z>∈ R^{s+k} ,

因此有<x, z> $\in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ ，所以$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$是传递的。

由 t(R) 的最小性，得 t(R) $\subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。

定理： 设 R 是集合A上的关系，则

(3) $t(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$

证(续)：下面证明$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 是包含R的最小传递关系。

假设集合A上的传递关系R'包含R，但$\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \nsubseteq R'$。

因此 一定存在$<x, y> \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$, 但$<x, y> \notin R'$。

则存在 $k \in I_+$，有 $<x, y> \in R^s$。

从而存在 $z_1, \ldots, z_{s-1}$， 使得

$<x, z_1>, <z_1, z_2>, \ldots, <z_{s-1}, y> \in R \subseteq R'$。

由于R'是传递的，因此，$<x, y> \in R'$, 矛盾。

综上所述，得$t(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$。

定理： 设 R 是集合A上的关系， A有n个元素，则

$$t(R) = \bigcup_{i=1}^{n} R^i$$

证： 若n=0, 则$t(R)=\phi=\bigcup_{i=1}^{0} R^i$

当n>0时，只需证：对于任意 $k \geq 0$， $R^{n+k} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R^i$.

对k进行数学归纳：

k=0时，$R^{n+k}=R^n \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R^i$;

假设$m \in I_+$, 当 $k<m$时，成立，即$R^{n+k} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R^i$;

定理： 设 R 是集合A上的关系， A有n个元素， 则

$$t(R) = \cup_{i=1}^{n} R^i$$

证(续)： 下面证明$R^{n+m} \subseteq \cup_{i=1}^{n} R^i$.

任取$<x, y> \in R^{n+m}$， 则存在$u_0, u_1, \ldots, u_{n+m} \in A$, 使得$u_0=x$, $u_{n+m}=y$, 且$<u_i, u_{i+1}> \in R$, $i=0, \ldots, n+m-1$。

由于n+m>n, 且A中只有n个元素， 因此$u_1, \ldots, u_{n+m}$中一定有两个数相等。 设$u_i=u_j$ $(1\leq i<j\leq n+m)$, 则有

$<u_0, u_1>, \ldots, <u_{i-1}, u_i>, <u_i, u_{j+1}>, <u_{j+1}, u_{j+2}> \ldots, <u_{n+m-1}, u_{n+m}> \in R$,

即$<u_0, u_{n+1}>=<x, y> \in R^{n+m-(j-i)}$,

由归纳知$R^{n+m-(j-i)} \subseteq \cup_{i=1}^{n} R^i$， 从而$<x, y> \in \cup_{i=1}^{n} R^i$,

得$R^{n+m} \subseteq \cup_{i=1}^{n} R^i$

例：设 集合$A=\{a, b, c\}$上的关系

$$R=\{\langle a, b\rangle,\langle b, c\rangle,\langle c, c\rangle\},$$

试求 $r(R), s(R), t(R)$。

解：$r(R)=R\cup I_A=\{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,c\rangle,\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle\}$

$S(R)=R\cup R^{-1}=\{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,c\rangle,\langle b,a\rangle,\langle c,b\rangle\}$

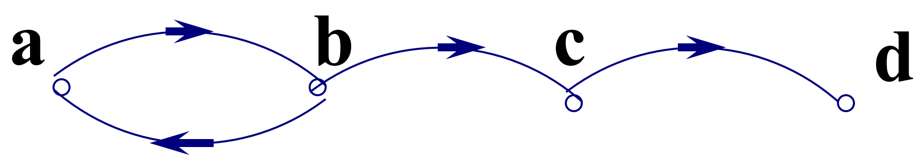
$R^2=\{\langle a, c\rangle,\langle b, c\rangle,\langle c, c\rangle\}$

$R^3=\{\langle a, c\rangle,\langle b, c\rangle,\langle c, c\rangle\}=R^2$

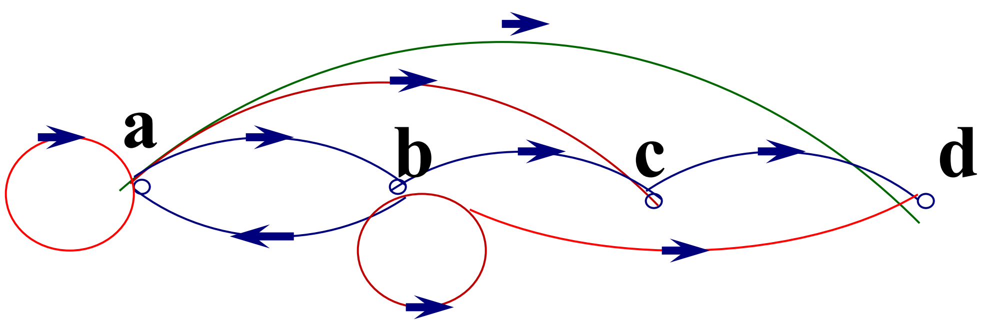
$t(R)=R\cup R^2=\{\langle a, b\rangle,\langle b, c\rangle,\langle c, c\rangle, \langle a, c\rangle\}$

例：设集合A＝{a, b, c, d}, A上的关系

R＝{<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>}，试画出t(R)关系图。



R关系图



t(R)关系图

定理：　设二元关系 R_1, R_2 是集合A上的二元关系，且 $R_1 \subseteq R_2$，则

(1) $r(R_1) \subseteq r(R_2)$；

(2) $s(R_1) \subseteq s(R_2)$；

(3) $t(R_1) \subseteq t(R_2)$。

证: (1) 由 $r(R_2)$ 的定义知， $r(R_2)$ 是自反的，

且 $R_2 \subseteq r(R_2)$。

由于 $R_1 \subseteq R_2$，得 $R_1 \subseteq r(R_2)$。在为 $r(R_1)$ 是包含 R_1 的最小自反关系，因此 $r(R_1) \subseteq r(R_2)$。

(2) , (3) 同理可证。

例：设R_1和R_2都是集合A上的二元关系，试证明：

(1) $r(R_1 \cup R_2) = r(R_1) \cup r(R_2)$

(2) $s(R_1 \cup R_2) = s(R_1) \cup s(R_2)$

(3) $t(R_1) \cup t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$

证：(1) 由于R_1和R_2都是集合A上的二元关系，知$R_1 \cup R_2$也是A上的二元关系。

$$r(R_1 \cup R_2) = (R_1 \cup R_2) \cup I_A = (R_1 \cup I_A) \cup (R_2 \cup I_A)$$
$$= r(R_1) \cup r(R_2)$$

例：设R_1和R_2都是集合A上的二元关系，试证明：

(2) $s(R_1 \cup R_2)=s(R_1) \cup s(R_2)$

证: (2) $s(R_1 \cup R_2) = (R_1 \cup R_2) \cup (R_1 \cup R_2)^{-1}$

$= (R_1 \cup R_2) \cup (R_1^{-1} \cup R_2^{-1})$

$= (R_1 \cup R_1^{-1}) \cup (R_2 \cup R_2^{-1})$

$= s(R_1) \cup s(R_2)$

例：设R_1和R_2都是集合A上的二元关系，试证明：

(3) $t(R_1) \cup t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$

证: (3) 由于$R_1 \subseteq R_1 \cup R_2$, $R_2 \subseteq R_1 \cup R_2$,

因此$t(R_1) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$ 且$t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$，得

$t(R_1) \cup t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$。

$t(R_1 \cup R_2) \subseteq t(R_1) \cup t(R_2)$?

反例：令$A=\{1, 2, 3, 4\}$, $R_1=\{<1, 2>, <2, 3>\}$, $R_2=\{<3, 4>\}$,

得$t(R_1)=\{<1,2>, <2,3>, <1, 3>\}$, $t(R_2)=\{<3, 4>\}$,

$t(R_1) \cup t(R_2) =\{<1, 2>, <2, 3>, <3, 4>, <1, 3>\}$,

$R_1 \cup R_2 = \{<1, 2>, <2, 3>, <3, 4>\}$

而$t(R_1 \cup R_2) =\{<1, 2>, <2, 3>, <3, 4>, <1, 3>, <2, 4>, <1, 4>\}$

定理：设二元关系 $R \subseteq A^2$，则

(1) 若 R 是自反的，则 s (R) 和 t (R) 也是自反的；

(2) 若 R 是对称的，则 r (R) 和 t (R) 也是对称的；

(3) 若 R 是传递的，则 r (R) 也是传递的

证: (1) 由于R是自反的，因此$I_A \subseteq R$。

又由于$R \subseteq s(R)$, $R \subseteq t(R)$，得$I_A \subseteq s(R)$, $I_A \subseteq t(R)$。

所以s(R) 和 t(R) 也是自反的。

定理：设二元关系 $R \subseteq A^2$，则

(1) 若 R 是自反的，则 s (R) 和 t (R) 也是自反的；

(2) 若 R 是对称的，则 r (R) 和 t (R) 也是对称的；

(3) 若 R 是传递的，则 r (R) 也是传递的

证: 因为R是对称的，因此$R=R^{-1}$。

则$r(R)^{-1}=(R\cup I_A)^{-1}=R^{-1}\cup I_A^{-1}=R\cup I_A=r(R)$。

因此 r (R)是对称的。

$(t(R))^{-1}=(\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n)^{-1}=\bigcup_{n=1}^{\infty}(R^n)^{-1}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(R^{-1}\right)^n$

$=\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n=t(R)$。因此t(R)是对称的。

定理：设二元关系 $R \subseteq A^2$，则

(1) 若 R 是自反的，则 s (R) 和 t (R) 也是自反的；

(2) 若 R 是对称的，则 r (R) 和 t (R) 也是对称的；

(3) 若 R 是传递的，则 r (R) 也是传递的

证: (3) 由R是传递的，得$R \circ R \subseteq R$。

$r(R) \circ r(R) = (R \cup I_A) \circ (R \cup I_A) = (R \circ R) \cup R \cup I_A$

$\subseteq R \cup I_A = r(R)$。

因此r (R) 也是传递的。

给出一个实例, 使得s (R)不是传递的

$R=\{<1, 2>, <2,3>, <1,3>\}$

$S(R)=\{<1, 2>, <2, 3>, <1, 3>, <2, 1>, <3, 2>, <3, 1>\}$ 不传递

定理：设二元关系 $R \subseteq A^2$，则

(1) $rs(R) = sr(R)$；

(2) $rt(R) = tr(R)$；

(3) $st(R) \subseteq ts(R)$。

$rs(R)=r(s(R))$

证: (1) 由于 $R \subseteq s(R)$, 得$r(R) \subseteq rs(R)$。

由于$s(R)$是对称的，因此$rs(R)$也是对称的。

由对称闭包的定义知 $sr(R) \subseteq rs(R)$。

由于$R \subseteq r(R)$, 得$s(R) \subseteq sr(R)$。

由于$r(R)$是自反的，因此$sr(R)$也是自反的。

由自反闭包的定义知，$rs(R) \subseteq sr(R)$。

定理：设二元关系 $R \subseteq A^2$，则
(1) $rs(R) = sr(R)$;
(2) $rt(R) = tr(R)$;
(3) $st(R) \subseteq ts(R)$。

证: (2) 由于 $R \subseteq t(R)$, 得$r(R) \subseteq rt(R)$。
由于$t(R)$是传递的，因此$rt(R)$也是传递的。
由传递闭包的定义知$tr(R) \subseteq rt(R)$。
由于$R \subseteq r(R)$, 得$t(R) \subseteq tr(R)$。由于$r(R)$是自反的，因此$tr(R)$也是自反的。
由自反闭包的定义知$rt(R) \subseteq tr(R)$。
故 $rt(R) = tr(R)$。

定理：设二元关系 $R \subseteq A^2$，则

(1) $rs(R) = sr(R)$;

(2) $rt(R) = tr(R)$;

(3) $st(R) \subseteq ts(R)$。

证: (3) 由于$R \subseteq s(R)$, 得$t(R) \subseteq ts(R)$。

由于$s(R)$是对称的，因此$ts(R)$也是对称的。由对称闭包的定义知 $st(R) \subseteq ts(R)$。

给出一个实例 使得$st(R) \neq ts(R)$

$R=\{<1, 2>\}$,

$s(R)=\{<1, 2>, <2, 1>\}$, $ts(R)=\{<1, 2>, <2, 1>, <1, 1>, <2, 2>\}$

$t(R)=\{<1, 2>\}$, $st(R)=\{<1, 2>, <2, 1>\}$.