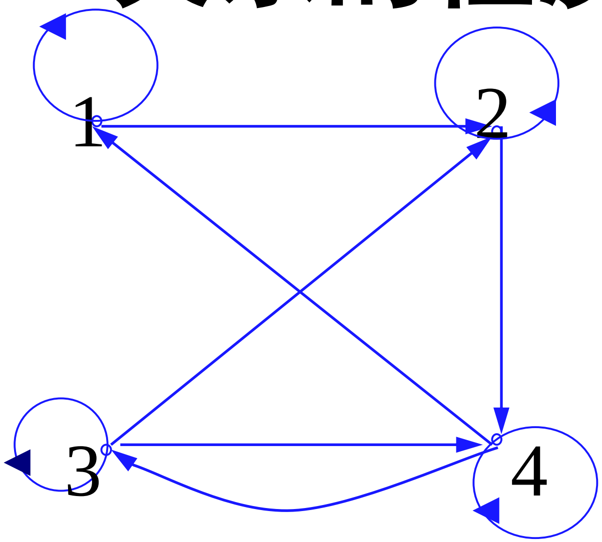
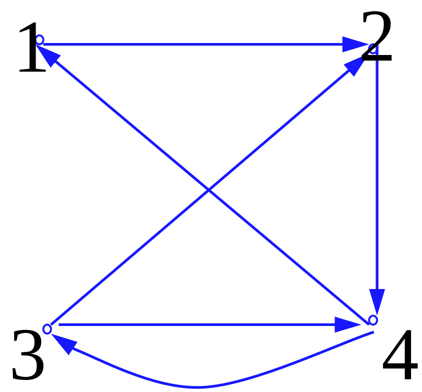
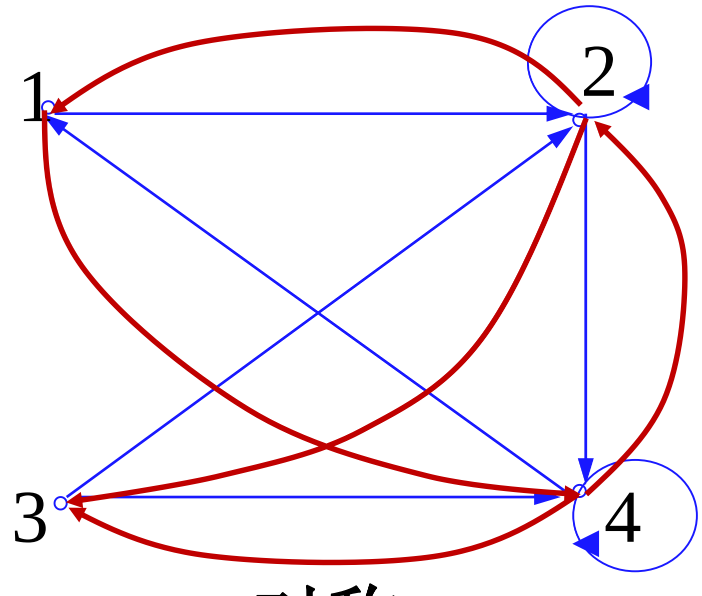
关系的性质



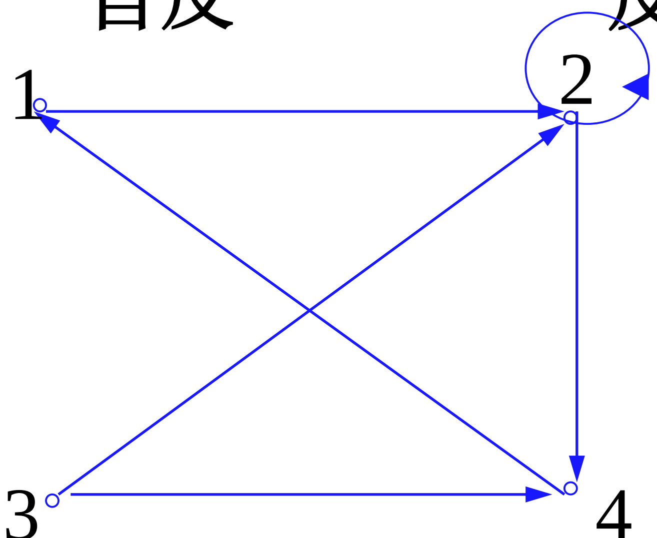
自反



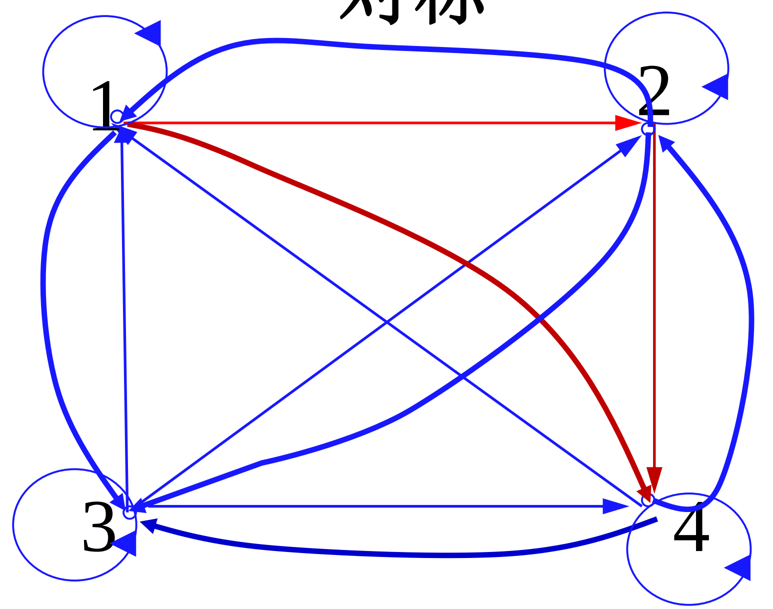
反自反



对称

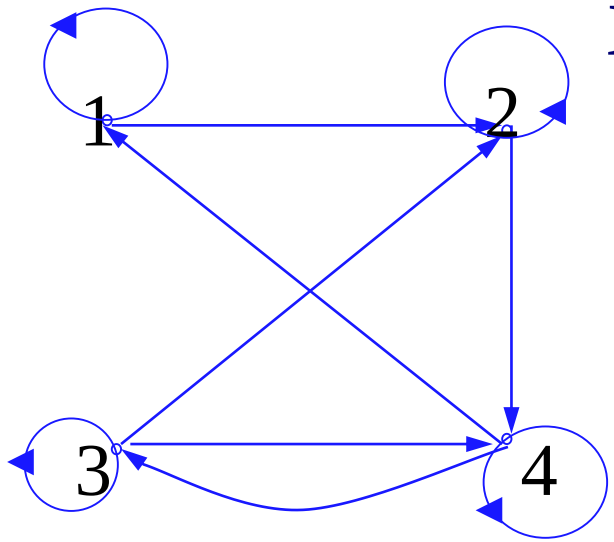


反对称



传递

定义 6 (自反) 设 **R**是集合**X**上的二元关系，**R**是自反的 $\Leftrightarrow$ $\forall x\,(\,x\in X \rightarrow \langle x, x\rangle \in R\,)$

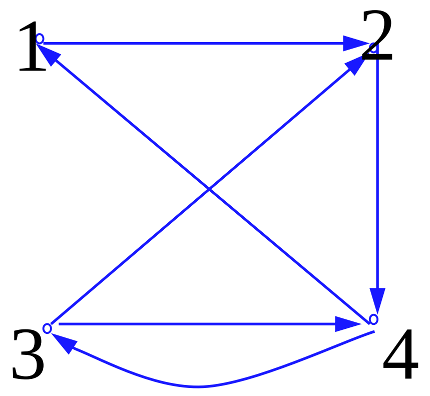


X={1, 2, 3, 4}

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- 在R的关系图中，每个顶点均有自环；
- 在R的关系矩阵中，主对角线的元素均为 1。

定义7(反自反) 设 R是集合X上的二元关系。R是 **反自反的** $\Leftrightarrow \forall x\,(x\in X \rightarrow \langle x, x\rangle \notin R)$

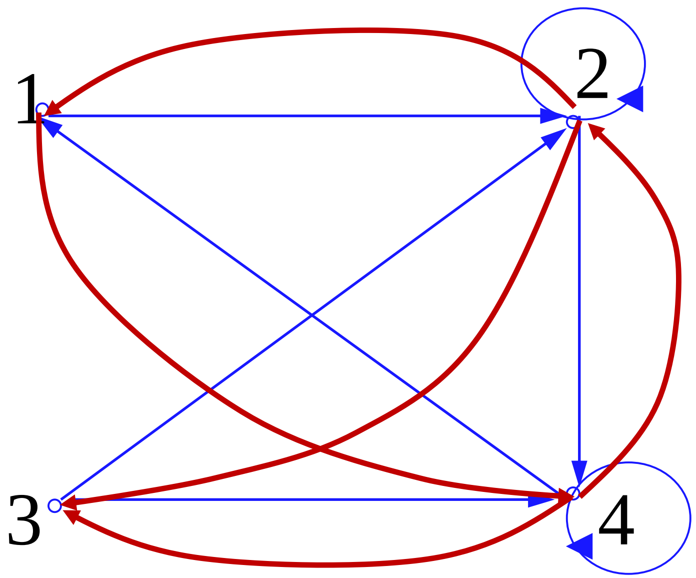


$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- 在R的关系图中，每个顶点均无自环；
- 在R的关系矩阵中，主对角线的元素均为 0。

定义8(对称) 设 **R**是集合**X**上的二元关系。 **R** 是对称的

$\Leftrightarrow \forall x \forall y (x \in X \land y \in X \land \langle x, y \rangle \in R \rightarrow \langle y, x \rangle \in R)$



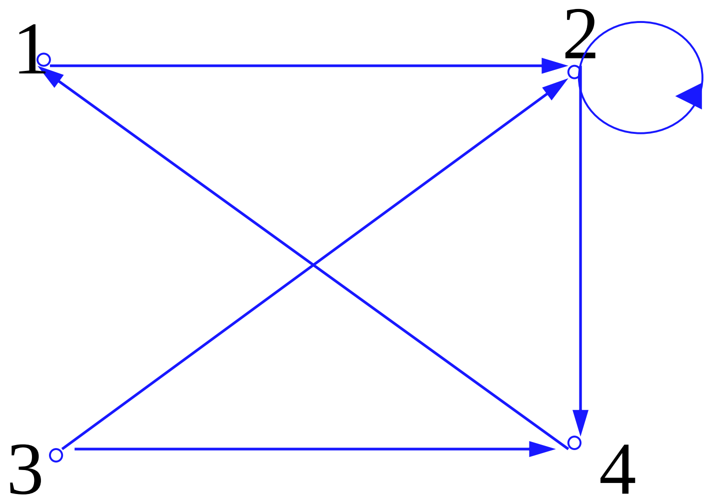
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- 在 **R** 的关系图中，任意两个不同顶点之间：或者无弧 或者 有两条方向相反的弧；
- **R** 的关系矩阵是 对称矩阵.

定义9(反对称) 设 R是集合X上的二元关系。 R 是反对称的

$\Leftrightarrow \forall x \forall y\ (\ x \in X \wedge y \in X\ \wedge <x\ ,\ y> \in R \wedge <y,\ x> \in R \rightarrow x = y\ )$

$\Leftrightarrow \forall x \forall y\ (x \in X \wedge y \in X \wedge <x\ ,\ y> \in R \wedge x \neq y \rightarrow <y\ ,\ x> \notin R\ )$



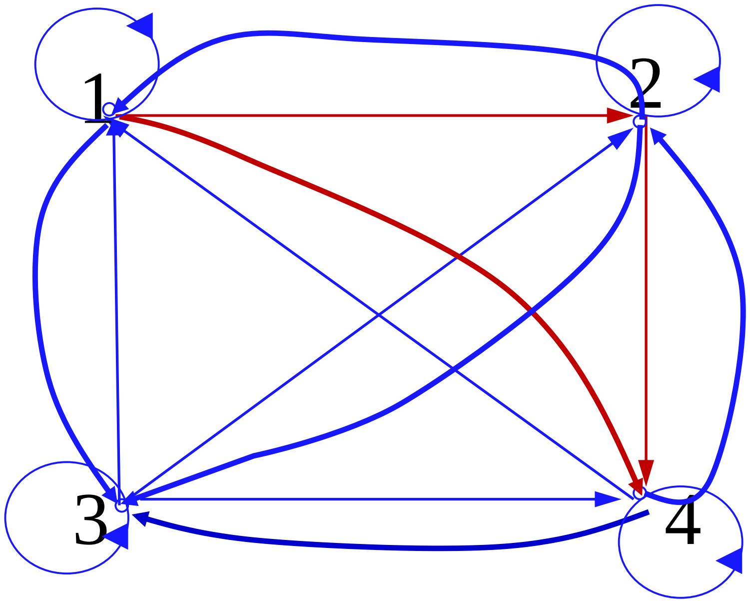
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 在 R 的关系图中，任意不同顶点之间至多有一条弧
- 在 R 的矩阵中， 若 $i \neq j$ 且 $r_{ij} = 1$， 则 $r_{ji} = 0$

  或 $r_{ij} \cdot r_{ji} = 0\ (\ i \neq j\ )$

定义10(传递) 设 R是集合X上的二元关系。 R是传递的 $\Leftrightarrow \forall x \forall y \forall z\,(x \in X \wedge y \in X \wedge z \in X \wedge \langle x, y\rangle \in R$

$\wedge \langle y, z\rangle \in R \rightarrow \langle x, z\rangle \in R\,)$



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- 在 R 的关系图中，若顶点 x 到顶点 y有一条路径，则必有从 x 到 y 的一条边
- 在关系矩阵：若有k使 $r_{ik} \cdot r_{kj} = 1$, 则 $r_{ij} = 1$

关系图和关系矩阵中五种性质的表述

R	自反	反自反	对称	反对称	传递
M_R	对角线元素全1	对角线元素全0	对称矩阵	$r_{ij}\cdot r_{ji}=0$ $(i\neq j)$	若有k使 $r_{ik}\cdot r_{kj}=1$，则 $r_{ij}=1$
G_R	所有结点都有自环	所有结点都无自环	结点间有向边都成对出现	结点间无成对出现的有向边	若 x 到y有一条路径，则必有从 x 到 y 的一条边

例：(1) 夫妻关系是反自反，反对称的

(1) 配偶关系是反自反，对称的

(2) 祖先关系是反自反，反对称，传递的

例 (1) X上的恒等关系I_X是自反、对称、反对称、传递的

(2) X上的“<”是反自反、反对称、传递的

思考题

(1) 非空集 X 上的空关系 ∅

反自反、对称、反对称、传递

(2) 空集 ∅上的空关系 ∅

自反、反自反、对称、反对称、传递

例：设 $X = \{1, 2, 3\}$判断 X 上的以下二元关系的性质

$R_1 = \{ <1, 2>, <2, 3>, <3, 1> \}$

反自反，反对称的

$R_2 = \{ <1, 2>, <1, 3> \}$

反自反，反对称，传递

$R_3 = \{ <1, 2>, <1, 3>, <2, 3>, <3, 2> \}$

反自反的

$R_4 = \{ <1, 2>, <2, 1>, <1, 3>, <3, 1>, <1, 1>, <2, 2>, <3, 3> \}$

自反、对称的

例：指出R上的下列二元关系的性质：

(1) $S=\{<x, y>|x, y\in R$且$x \cdot y > 0\}$；

(2) $S=\{<x, y>|x, y\in R$，4整除$|x-y|$且$|x-y|<10\}$。

解: (1) 由于0 0=0, 因此<0,0> $\notin$S, 因此S不是自反；

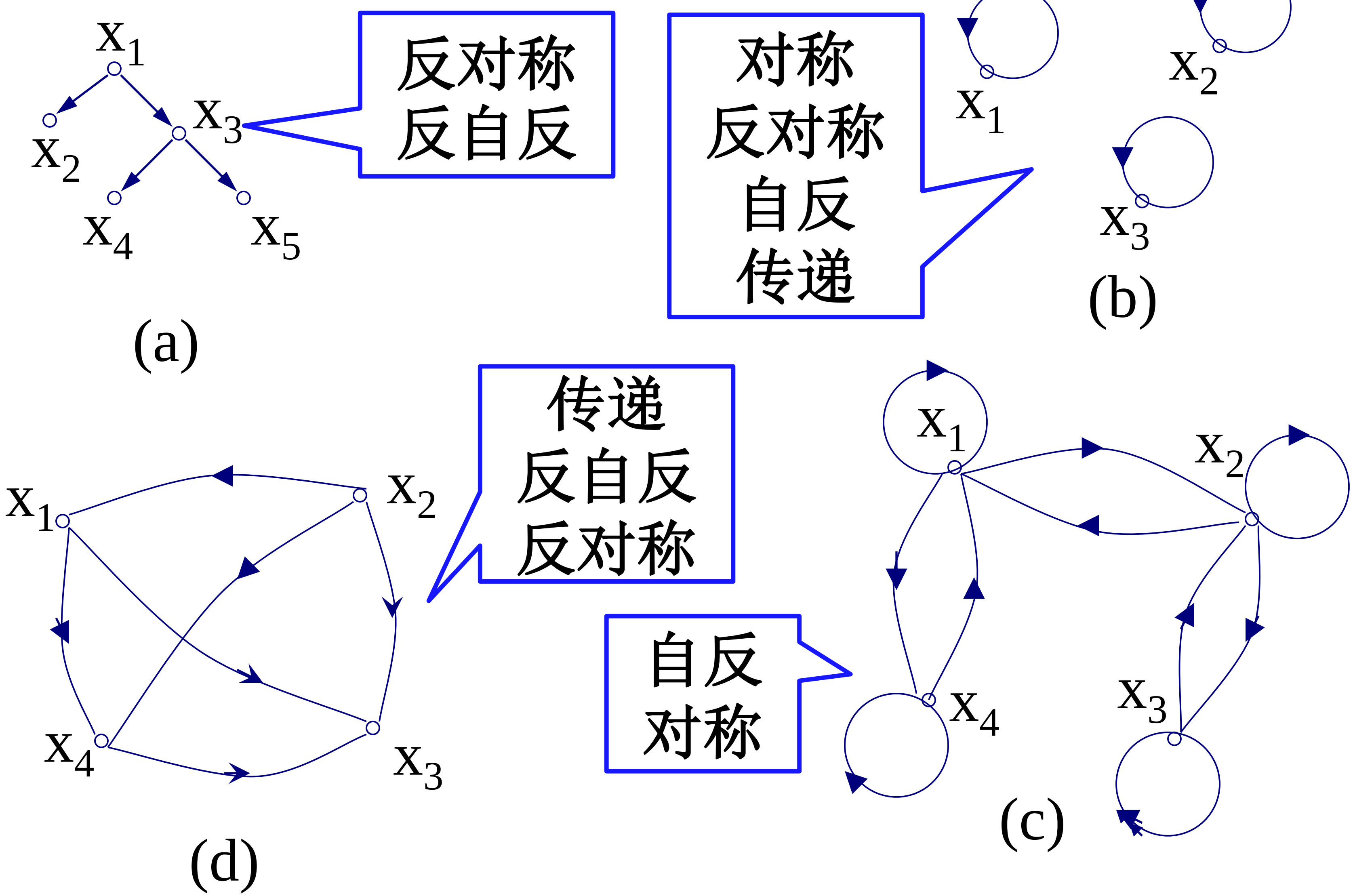
由于<1, 1> $\in$ S, 因此S不是反自反的；

由于对任意的x, y $\in R$, 有$x \cdot y > 0$ 当且仅当$y \cdot x > 0$，因此<x, y> $\in$ S且<y, x> $\in$S。所以S是对称的，且不是反对称的；

假设对任意的x, y, z $\in R$, $x \cdot y > 0$ 且$y \cdot z > 0$。若x为正实数，则y, z必为正实数，且若x为负实数，且y, z必为负实数，因此x $\cdot$z >0。因此<x, y> $\in$ S , <y, z> $\in$ S 且<x, z> $\in$ S 。因此S是传递的。

综上所述，S是 对称、传递的。

例：指出以下关系图给定的关系所具有的性质，并写出对应的关系矩阵。



例：举例说明满足以下性质的二元关系。

(1) 既是自反的，又是反自反的；

(2) 既不是自反的，又不是反自反的；

(3) 既是对称的，又是反对称的；

(4) 既不是对称的，又不是反对称的。

解: (1) 空集上的空关系

(2) 整数上的关系R={<1,1>}

(3) 集合{1, 2, 3}上的关系 {<1,1>, <2, 2>, <3, 3>}

(3) 集合{1, 2, 3}上的关系{<1, 2>, <2, 1>, <1, 3>}

例： 设 A 为恰有 n 个元素的有限集，

(1) A 上共有多少个 不同的自反关系？

(2) A 上共有多少个 不同的反自反关系？

(3) A 上共有多少个 不同的对称关系？

(4) A 上共有多少个 不同的反对称关系？

(5) A 上共有多少个 不同的既是对称又反对称的关系？

解: (1) 设R是A上的自反关系,则对任意 $a \in A$, $<a, a> \in R$。对于A上的其他序偶$<b, c>$, $b \neq c$, $<b, c>$可能属于R, $<b, c>$也可能不属于R.

已知A上的其他序偶个数为n(n-1)，因此A上的自反关系的个数为$C^{1}_{n(n-1)}+C^{2}_{n(n-1)}+\ldots+C^{n(n-1)}_{n(n-1)}=2^{n(n-1)}$

例： 设 A 为恰有 n 个元素的有限集，

(3) A 上共有多少个 不同的对称关系？

解: (3) 设R是A上的对称关系, 则对任意的 $a\in A$, <a, a>可能属于R， 也可能不属于R， 且对于A上的其他序偶<b, c>, $b\neq c$, <b, c> 属于R当且仅当 <c, b>R.

即A上的序偶对<b, c>和<c, b>, $b\neq c$, 必须成对出现。

已知A上的序偶对<b, c>和<c, b>个数为 $n(n-1)/2$，

因此A上的对称关系的个数为 $2^{n(n-1)/2+n}= 2^{n(n+1)/2}$ 。

例： 设 A 为恰有 n 个元素的有限集,

(5) A 上共有多少个 不同的既是对称又反对称的关系？

解: (5) 设R是A上的关系, 且既是对称又反对称, 则R只可能包含以下序偶：<a, a> , a ∈ R.

因此，关系R的个数为2^n 。

2 关系的运算

重点：

- **作为集合时的运算**
- **关系的逆、合成运算**
- **自反闭包、对称闭包、传递闭包**

定义11 设R和S是从集合A到B的关系，取全集为A×B，则 $R\cap S$，$R\cup S$，$R-S$，$\sim R$，$R\oplus S$仍是A到B的关系，并且对于任意 $x\in A$，$y\in B$:

$$x\,(R\cap S)\,y \Leftrightarrow x\,R\,y \wedge x\,S\,y$$

$$x\,(R\cup S)\,y \Leftrightarrow x\,R\,y \vee x\,S\,y$$

$$x\,(R-S)\,y \Leftrightarrow x\,R\,y \wedge x\,\overline{S}\,y$$

$$x\,(\sim R)\,y \Leftrightarrow x\,\overline{R}\,y$$

$$x\,(R\oplus S)\,y \Leftrightarrow x\,(R-S)\,y \vee x\,(S-R)\,y$$

$$\Leftrightarrow (x\,R\,y \wedge x\,\overline{S}\,y) \vee (x\,S\,y \wedge x\,\overline{R}\,y)$$

例：设 R 和 S 是集合 A ＝{1, 2, 3, 4}上的关系，

R＝{<x, y>|x－y 是 2 的非零整倍数 }

S＝{<x, y>|x－y 是 3 的非零整倍数 }

求：R∩S，R∪S，R－S和～R。

解：R ＝{<1, 3>,<3, 1>,<2, 4 >,<4, 2>},

S＝{<1, 4>,<4, 1>}。

则 R∩S＝∅,

R∪S＝{<1, 3>, <3, 1>,<2, 4>,<4, 2>,<1, 4>,<4, 1>},

R－S＝ {<1, 3>,<3, 1>,<2, 4>,<4, 2>}

～R＝{<1, 1>,<1, 2>,<1, 4>,<2, 1>,<2, 2>,<2, 3>,

<3, 2>, <3, 3>,<3, 4>,<4, 1>,<4, 3>,<4, 4>}.

例: 设R_1和R_2是从集合A到集合B的二元关系。证明

(1) $dom(R_1 \cup R_2) = dom(R_1) \cup dom(R_2)$

(2) $ran(R_1 \cap R_2) \subseteq ran(R_1) \cap ran(R_2)$

解: (1) 对任意的 $x \in dom(R_1 \cup R_2)$, 存在$y \in ran(R_1 \cup R_2)$, 使得$<x, y> \in R_1 \cup R_2$。

若$<x, y> \in R_1$, 则$x \in dom(R_1)$;

若$<x, y> \in R_2$, 则$x \in dom(R_2)$。

因此$x \in dom(R_1) \cup dom(R_2)$。

(2) 略

$ran(R_1 \cap R_2) = ran(R_1) \cap ran(R_2)$?

$A=B=\{1,2,3\}$, $R_1=\{<1, 2>, <2, 3>\}$, $R_2=\{<1, 2>, <1, 3>\}$,

$R_1 \cap R_2=\{<1,2>\}$, $ran(R_1 \cap R_2)=\{2\}$, $ran(R_1) \cap ran(R_2)=\{2,3\}$

例：若R和S都是非空集X上的自反(反自反、对称、反对称、传递)的, 判断 R∩S, R∪S, R－S, ～R, R⊕S是否是自反(反自反、对称、反对称、传递)的。

R, S	R∩S	R∪S	R－S	R⊕S	～R
自反	√	√			
反自反	√	√	√	√	
对称	√	√	√	√	√
反对称	√		√		
传递	√				