作业 15-图论

习题 7.3

1.

（1）略。

（2）A 到 F 简单路径共 16 条：

其中 8 条不包含自环的简单路径：AcBfChF，AcBgChF，AcBeEiF，AbDdEeBfChF，AbDdEeBgChF，AbDdEiF，AcBgCfBeEiF，AcBfCgBeEiF；

上面 8 条每条路加上 A 的自环又有 8 条。

（3）A 到 F 基本路径共 6 条：AcBfChF，AcBgChF，AcBeEiF，AbDdEeBfChF，AbDdEeBgChF，AbDdEiF

（4）A 到 F 的距离为 3，图的直径为 3

（5）7 个回路：

G[{a}]，G[{b, d, e, c}]，G[{e, i, h, g}]，G[{e, i, h, f}], G[{g, f}]，G[{b, d, i, h, g, c}]，G[{b, d, i, h, f, c}]

3.

（1）对于每个结点v，求$R(v)$。

$R(v_1) = R(v_2) = R(v_3) = R(v_4) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$

$R(v_5) = \{v_5, v_6\}, R(V_6) = \{V_6\}, R(v_7) = \{v_6, v_7\}$

$R(v_8) = \{v_6, v_7, v_8\}, R(v_9) = \{v_9\}, R(v_{10}) = \{v_{10}\}$

（2）找出所有强分支、单向分支和弱分支。

解：强分支 7 个，分别是$\{v_9\}, \{v_{10}\}, \{v_8\}, \{v_7\}, \{v_6\}, \{v_5\}, \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$,

单向分支 4 个，分别是$\{v_9\}, \{v_{10}\}, \{v_6, v_7, v_8\}, \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$,

弱分支 3 个，分别是$\{v_9\}, \{v_{10}\}, \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$,

4.（1）成立。当$v_1 \neq v2$时，距离必定大于 1。

（2）无向图成立。因为无向图是无方向的，反证法可证。

设 v1 与 v2 间的最短路径为 p1，则 len(p1)=d(v1,v2)

假设 v2 与 v1 之间存在一条最短路径 p2，len(p2)=d(v2,v1)，且 len(p2)≠len(p1)，

（1） len(p2)>len(p1)，由于是无向图，p2 也是 v1 到 v2 的路径，与 p1 是 v1 和 v2 的最短路径矛盾

（2） len(p2)<len(p1)，由于是无向图，p1 也是 v2 到 v1 的路径，与 p2 是 v2 和 v1 的最短路径矛盾

综上，原命题成立。

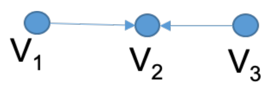
有向图不成立。（易给反例，略。）

（3）无向图成立。

证明：若 v_1 不可达 v_2 或 v_2 不可达 v_3，则显然结论成立；

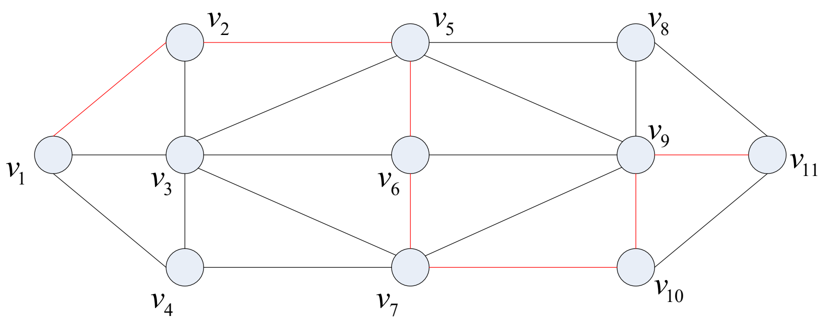
否则，假设 $d(v_1,v_2)+d(v_2,v_3) < d(v_1, v_3)$。设 p_1 是 v_1 到 v_2 的最短路径，p_2 是 v_2 到 v3 的最短路径，则 p_1p_2 为从 v_1 到 v_2 的一条路径，且其长度小于 $d(v_1,v3)$，矛盾。因此假设不成立，即 $d(v_1,v_2)+d(v_2,v_3) \geq d(v_1, v_3)$。

有向图不成立。反例：



9. 存在。（用 W 过程）

15.



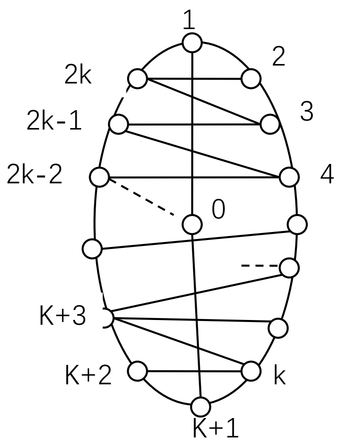
v_1到v_{11}的距离路径如上图红色线，加权距离为：2+1+3+1+1+1+2=11

作业 16-图论

习题 7.4

3. 证明：

设 n=2k+1,将节点编号为 0,1,2⋯2k, 如图所示，摆放节点。



在上图中先取一条哈密顿回路为 0,1,2,2k,3,2k-1,4,2k-2, 5, ⋯k+3,k,k+2,k+1,0,然后将圆周上的结点按逆时针方向依次转动一个位置，然后可以得到另一条回路为：0,2,3,1,4,2k,5,⋯k+4,k+1,k+3,k+2,0;显然，这两条回路是没有公共边。继续这样做下去，共可产生条无公共边的哈密顿回路。

4. 证明：（反证法）

假设存在$n\geq3$时，满足定理条件的非哈密顿n阶简单无向图。对该图尽量加边，使其不是哈密顿图，得到极大非哈密顿图G=(V, E)。

由于$n\geq3$，所以G不是完全图。设u, v是G的不相邻顶点，则G+e(u,v)是哈密顿图，且G+e(u,v)的每个哈密顿圈必然包含边e(u,v)，因此，G中有哈密顿路径$v_1v_2\ldots v_n$，其中$v_1=u$, $v_n=v$。

令$S=\{v_i| e(u,v_{i+1})\in E\}$, $T=\{v_j| e(v_j,v) \in E \}$。显然，$v_n\notin S\cup T$，得 $|S\cup T|<n$。

又因为$S \cap T = \emptyset$（否则，假设$v_k \in S \cap T$，则$e(u, v_{k+1}), e(v, v_k) \in E$，从而G中有哈密顿圈$v_1 v_2 \ldots v_k v_n v_{n-1} \ldots v_{k+1} v_1$），得$d(u)+d(v)=|S|+|T|=|S \cup T|<n$，矛盾。

因此，假设不成立。

5. 证明：设G是任意一个基础图是n阶完全无向图的有向图。对图的阶数n进行数学归纳：

n=2 时，显然成立。

假设 n=k 时成立。当 n=k+1 时，取任一顶点 v，在 G 中去掉该点以及其邻接的边得到图 G’。由归纳假设，图 G’中存在哈密顿路径，设为$v_1, v_2, \ldots, v_k$。如果 G 中v_{k+1}有连向所有其他的顶点 v1,…, vk 的边则存在哈密顿路径$v_{k+1}, v_1, v_2, \ldots, v_k$；如果 G 中所有其他顶点均有连向$v_{k+1}$的边,则有哈密顿路径 $v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}$；假如不是上述两种情况，即$v_{k+1}$既存在入度，也存在出度。

假设 v_i 是第一个满足下列条件的结点：

当 $j \leq i$ 时，有 v_j 连向 v_{k+1} 的边，且有 v_{k+1} 连向 v_{i+1} 的边，则有哈密顿路径 $v_1, v_2, \ldots, v_i, v_{k+1} v_{i+1}, \ldots v_k$。

6. 证明：

充分性：若G为若干个边不相交的回路之并，则G的每个结点的度为偶数，因此，G为欧拉图。

必要性：若 G 为连通欧拉图，则结点均为偶结点，则 G 一定有欧拉闭路 C1，则对 G 删去 C1 中所有边后得到 G1，且 G1 的每个连通分支的结点也均为偶结点，因此每个连通分支有欧拉闭路，即 G 的回路。对每个连通分支减去其欧拉闭路，得到的子图的结点仍均为偶结点，一直进行下去，可得到 G 是若干个边不相交的回路的并。