定义: 设 A 和 B 为两个集合，若存在从 A 到 B 的双射，则称 A 和 B 对等，或称 A 和 B 等势，记为 $A \sim B$。

定义：设A是集合。如果存在$n \in N$, 使$A \sim n$，则称A为有限集，否则称A为无限集。

定理：任何有限集合都不能与它的真子集对等。

定理：任意有穷集合 A 唯一地与一个自然数等势 。

定义 (有限集的 基数)： 对于任意有限集 A，存在唯一的自然数 n，使得 $A \sim n$, 称 n 为 A 的基数 , 记为 #A 。

- $(0, 1) \sim R$,
- $(0, 1) \sim [0,1] \sim (0,1] \sim [0, 1)$

集合的基数

- 拓广集合中含有的元素个数这一概念，引进集合的**基数**的概念，表示为

$$\#(A), \mathrm{card}(A) \text{ 或} |A|$$

已证：每个有限集都与唯一的自然数 对等。

- 设 $n \in N$，若 $A \sim n$，则令 $\#(A) = n$ 。

- 对于无限集的基数，我们规定特殊的记号：令

$$\#(N) = \aleph_0$$

$\aleph$ 是希伯来语的第一个字母，念作阿列夫。

基数相等和大小顺序

定义： 设 A 和 B 为二集合。

1) 如果 $A \sim B$，就称 A 和 B 的基数相等，记为 $\#(A) = \#(B)$。

2) 如果存在从 A 到 B 的内射，

就称 A 的基数小于等于 B 的基数，记为 $\#(A) \leq \#(B)$，

或称 B 的基数大于等于 A 的基数， 记为 $\#(B) \geq \#(A)$ 。

3) 如果 $\#(A) \leq \#(B)$ 且 $\#(A) \neq \#(B)$，

就称 A 的基数小于 B 的基数，记为 $\#(A) < \#(B)$，

或称 B 的基数大于 A 的基数，记为 $\#(B) > \#(A)$。

定理：设 A 和 B 为任意两个集合，则

$\#(A) \le \#(B)$，或 $\#(B) \le \#(A)$，

二者之中至少有一个成立。

- 任何两个基数都可以比较大小

定理：设 A, B和C为任意集合，则

(1) $\#(A) = \#(A)$

(2) 若$\#(A) = \#(B)$, 则 $\#(B) = \#(A)$

(3) 若$\#(A) = \#(B)$且$\#(B) = \#(C)$, 则 $\#(A) = \#(C)$

- 基数的相等关系 “＝” 是等价关系

定理：设 A，B 和 C 为三集合，则有

(1) $\#(A) \leq \#(A)$;

(2) 若 $\#(A) \leq \#(B)$ 且 $\#(B) \leq \#(A)$，则$\#(A) = \#(B)$;

(3) 若 $\#(A) \leq \#(B)$ 且 $\#(B) \leq \#(C)$，则$\#(A) \leq \#(C)$。

其中，(2) 为著名的 伯恩斯坦（E. Bernstein） 定理。

(2) 等价于：如果存在两个内射$f: A \rightarrow B$与 $g: B \rightarrow A$, 则一定存在双射$h: A \rightarrow B$

- 基数的小于等于关系“≤”是偏序

定义（可数集、可列集）：任何与自然数集合N对等的集合称为可数集或可列集。

- 可数集的基数，用 $\aleph_0$ 表示，读作 阿列夫零 。

定理. 以下三个条件等价:
(1) A 为无限集;
(2) A 有可数子集;
(3) A 有与它对等的真子集。

证明: (1)→(2) 设 A 是无穷集合, 如下顺序地从 A 的子集中取元素, 构造一个无穷序列 $< a_0 , a_1 , a_2, \ldots >$:
从 A 中 选 a_0; 从 $A - \{ a_0 \}$ 中选 a_1;
从 $A - \{ a_0, a_1 \}$ 中选 a_2, ……,
从 $A - \{ a_0 , a_1 , \cdots , a_{n-1} \}$ 中选 a_n,…。
显然，对任意$n \in N$, 若 $\{ a_0 , a_1 , \cdots , a_n \} \subseteq A$, 则必有 $a_{n+1} \in A$ 且$a_{n+1} \notin \{ a_0 , a_1 , \cdots , a_n \}$，否则与A是无穷集合矛盾。
得$B= \{a_i \mid i \in N\}$为A的可数子集。

定理. 以下三个条件等价：

(1) A 为无限集；

(2) A 有可数子集；

(3) A 有与它对等的真子集。

证明：(2)→(3) 设 B是A的可数子集。因此B与N等势，故有双射$f: N \to B$。

令$C=A-\{f(0)\}$，则C是A的真子集。

下面定义从A到C的双射$g: A\to C$：

对于$x\in B$, $g(x) = f((f^{-1}(x))^{+})$；

对于$x\in A-B$, $g(x)=x$。

显然g是双射，因此A与A的真子集C 等势。

(3)→(1) 可由抽屉原理得到。

定理：可数无穷集合的无穷子集必是可数无穷的。

证明：设 A 是可数无穷集合， S 是 A 的无穷子集，

由于$A \sim N$, 故有双射 $f: N \to A$ 。

则A中的元素可以排列为: $f(0), f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots$

把不在 S 中的元素从这序列中去掉，由于 S 是无穷集合，所以余下的元素仍然是无穷的，用 $f(i_0), f(i_1), f(i_2), \ldots$ 表示。

定义函数 $g: N \to S$, 使得 $g(n) = f(i_n)$，则 g 是双射函数，因此 S 是可数无穷的。

定理: 若A, B为二集合，则 $\#(B) \le \#(A)$ 当且仅当存在从 A 到 B 的满射。

证明: (充分性) 设 $f:A\to B$ 为满射，则 f 有右逆 $g: B\to A$ 使得 $f\circ g = I_B$。

又因为 I_B 是单射，所以 g 是单射，故 $\#(B) \le \#(A)$ 。

(必要性) 若 $\#(B) \le \#(A)$，则有单射 $g : B\to A$，因此g 有左逆 $f : A\to B$, 使得 $f\circ g = I_B$ 。

又因为 I_B 是 满射， 所以 f 是满射。

- 问题：若A, B为二集合，如何证明$\#(A) = \#(B)$?

例: N×N是可数集。

	0	1	2	3	4	5	6	7…
0	0	1	3	6	10	15		
1	2	4	7	11	16			
2	5	8	12	17				
3	9	13	18					
4	14	19						
5	20							
6								
7								
…								

证明:

(1) 构造一个矩阵$(a_{ij})_{N\times N}$, 其中, N×N中的序偶$\langle i, j\rangle$为矩阵中元素a_{ij}的位置坐标。

(2) 如图所示，把N中元素按顺序放入矩阵

(3) a_{ij}所在的斜线共有$i+j+1$个元素

(4) a_{ij}的值是a_{ij}所在的斜线左方的所有行上的元素的个数再加上i，即 $a_{ij} = 1+2+\ldots+(i+j)+i$

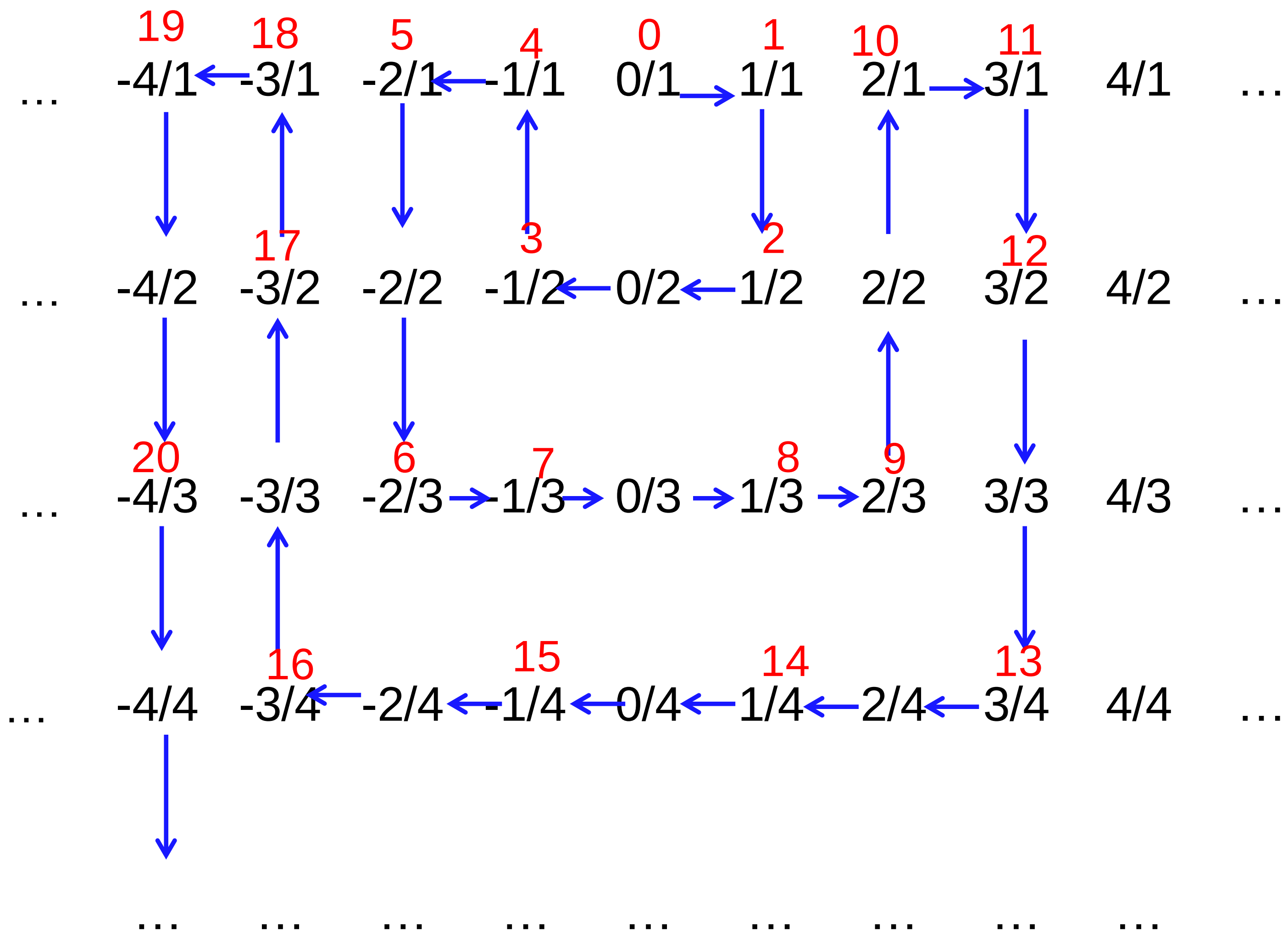
$= (1+i+j)(i+j)/2 + i$

(5) 如下定义函数f: N×N → N, 满足

$f(i, j) =(1+i+j)(i+j)/2 + i$, $i, j \in N$。

可证，f是 双射(补充)。因此N×N是可数集。

例：有理数集合 Q是可数集。



可数集：

- N
- N×N
- Q
- Z
- 奇自然数集合
- 偶自然数集合
- …… ……

有没有不可数集？

定理：对每个集合 A，皆有 $\#(A) < \#(P(A))$。

证: (1) 定义 $g:A \rightarrow P(A)$, 满足对任意的 $a \in A$, $g(a) = \{a\}$。
显然 g 是内射，所以 $\#(A) \leq \#(P(A))$。

(2) 用反证法证明： $\#(A) \neq \#(P(A))$

假设 $\#(A) = \#(P(A))$，则有双射 $f: A \rightarrow P(A)$。

令 $B = \{ a \mid a \in A$ 且 $a \notin f(a) \}$, 则 $B \in P(A)$。

因 f 为双射，故有 $t \in A$ 使 $f(t) = B$。

(1) 若 $t \in B$，按 B 的定义，$t \notin f(t)$，即 $t \notin B$；

(2) 若 $t \notin B$，即 $t \notin f(t)$。而按 B 的定义，$t \in B$。

得，$t \in B$ 当且仅当 $t \notin B$。 这是一个矛盾。

故假设有误，所以必有 $\#((A)) \neq \#(P(A))$。

由 (1) 和 (2) 知，$\#(A) < \#(P(A))$。

- $\#(N) < \#(P(N))$

- 记# (P(N)) $= \aleph$
- $\aleph_0 < \aleph$

$\#(R) = \aleph = \#(P(N))$

$\#(R \times R) = \aleph$

例：证明 $\#(R) = \aleph = \#(P(N))$

证明：由于R与[0,1]等势，因此只需证明P(N)与[0,1]等势，从而可得 $\#(R) = \aleph$。

(1) 首先证明 $\#([0,1]) \leq \#(P(N))$。

定义 $f: P(N) \to [0, 1]$ 为：

(a) $f(\emptyset)=0, f(N)=1$,

(b) $f(A)=\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\chi_A(i)}{2^{i+1}}$，其中 $A \in P(N)$, 且 $A \neq \emptyset$, $A \neq N$。

此时 $0<f(A)<1$。

下面证明f是满射。

对任意 $r \in (0, 1)$, 假设r的二进制表示为 $0.a_0a_1\ldots a_n\ldots$, 其中 $a_i \in \{0, 1\}$, $i \in N$。则r的值为

$$r = a_0 \cdot \frac{1}{2} + a_1 \cdot \frac{1}{2^2} + \ldots + a_n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} + \ldots$$

f是否为内射?

如下定义集合 A_r：$a_i=1$ 当且仅当 $i \in A_r$。显然有

$f(A_r)=\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\chi_A(i)}{2^{i+1}}$。因此f是满射，得 $\#([0,1]) \leq \#(P(N))$。

例：证明 $\#(R) = \aleph = \#(P(N))$

证： (2) 下面证明 $\#(P(N)) \le \#([0,1])$。

定义 $g: P(N) \to [0,1]$ 为：

(a) $g(\emptyset)=0$, $g(N)=1$,

(b) $g(A)=\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\chi_A(i)}{3^{i+1}}$, $A\in P(N)$ 且 $A\neq \emptyset$, $A\neq N$。

下面证明g是内射。对任意集合A, B ∈P(N)， 且A≠B。

(a)显然若A, B中至少有一个为空集或N, 必有 $g(A)\neq g(B)$。

(b)当A, B 均不为空集或N时， 由于A≠B， 得 $A\oplus B\neq\emptyset$。

对任意的 $i\in A\oplus B$, $\chi_{A\oplus B}(i)=1$ 当且仅当 $\chi_A(i)=1$, $\chi_B(i)=0$ 或 $\chi_A(i)=0$, $\chi_B(i)=1$。由此得， $g(A)-g(B)=\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\chi_A(i)-\chi_B(i)}{3^{i+1}}$ 。

假设 i_0 是 $A\oplus B$ 的最小元素。若 $i_0\in A$, 则

$$g(A)-g(B) \ge \frac{1}{3^{i_0+1}} - \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{3^{i_0+j}} = \frac{1}{2}\frac{1}{3^{i_0+1}} > 0。$$

同理可证当 $i_0\in B$ 时， $g(B)-g(A)>0$。

因此g是内射， 得 $\#(P(N)) \le \#([0,1])$。

综上所述， 得 $\#(P(N)) = \#([0,1]) = \#(R)$。

例. 证明: $\#(\mathbf{R}\times\mathbf{R}) = \aleph$

证明:因为[0, 1)与R对等，所以$\#(\mathbf{R}\times\mathbf{R}) = \#[0,1)^2$对等。

又因为 [0,1)与R对等，因此，只需证明$[0,1)^2$与[0,1)对等。

对任意的$x\in[0,1)$, 可把它表示为十进制小数,

即$x=x_1x_2x_3\ldots$, 其中$x_i\in\{0,1,2,\ldots,9\}$, 如果我们不用从某位后全是"9"的十进制小数表示，则这种表示法是唯一的。

(1) 定义函数$f:[0.1)^2\rightarrow[0,1)$：任取$x, y\in[0,1)$, 若 $x=0.x_1x_2x_3\ldots$, $y=0.y_1y_2y_3\ldots$, 则令$f(x, y) = 0.x_1y_1x_2y_2x_3y\ldots$

显然, f是内射，故$\#[0,1)^2\le\#[0.1)$。

如下定义函数$g: [0,1)\rightarrow[0,1)^2$：任取$x\in[0,1)$,

(2) 定义函数$g(x) = \langle x, x\rangle$。显然，f是内射，因此，$\#[0,1)\le\#[0,1)^2$。

综上所述得 $\#[0,1)^2=\#[0,1)$，从而$\#(\mathbf{R}\times\mathbf{R}) = \#\mathbf{R}= \aleph$