定义. 设 f 为从X到Y的部分函数，g为从Y到Z的部分函数, 则称复合关系 $f \circ g$ 为 f 与 g 的合成（复合）函数，用 $g \circ f$ 表示，即

$g \circ f=\{<x, z> \mid x \in X \wedge z \in Z \wedge \exists y\,(y \in Y \wedge y=f(x) \wedge z=g(y))\}$

定理: 设f: X→ Y和g: Y→Z，则

(1) 若f和g都是满射，则 $g \circ f$ 也是满射。

(2) 若f和g都是内射，则 $g \circ f$ 也是内射

(3) 若f和g都是双射，则 $g \circ f$ 也是双射

定理　设 f：X → Y 和 g：Y → Z

1) 若 $g \circ f$ 是满射, 则 g 是满射;

2) 若 $g \circ f$ 是单射, 则 f 是单射;

3) 若 $g \circ f$ 是双射, 则 g 是满射且 f 是单射。

规则：左满 右单

例: 设 $X = \{0, 1, 2\}$，求出 X^X 中满足 $f^2 = f$ 的所有函数。

解:若 $f(a) = a$，则 $f^2(a) = f(a) = a$。

若 $f(a) = b$ ($b \neq a$)，则由 $f^2(a)=f(b) = f(a)=b$,得 $f(b) = b$。

因此，至少存在一个 $a \in X$，使得 $f(a)=a$。

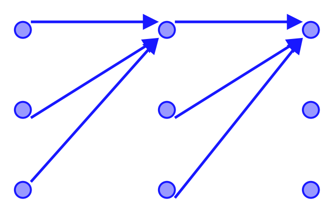
反过来，对任意的 $a \in X$, 若 $f(a) = a$, 则 $f^2(a)=a=f(a)$;

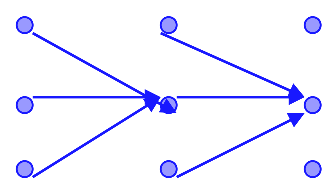
若 $f(a)=b\neq a$, 且 $f(b)=b$，则 $f^2(a)=f(f(a))=f(b)=b=f(a)$。

因此，f是满足 $f^2 = f$ 的函数当且仅当对任意 $a \in X$, $f(a)=a$ 或 $f(a)=b\neq a$ 且 $f(b)=b$。

因此，满足条件 $f^2(x) = f(x)$ 的函数是:

(1) 只有一个 $a\in\{1,2,3\}$,满足 $f(a)=a$:

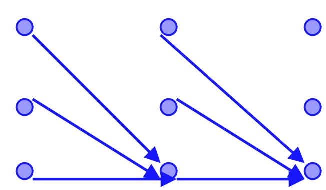




$f_1(x) = \{ <0, 0>, <1, 0>, <2, 0> \}$

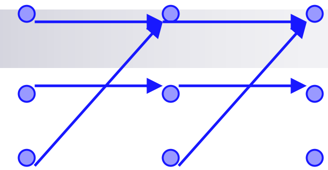
$f_2(x) = \{ <0, 1>, <1, 1>, <2, 1> \}$

$f_3(x) = \{ <0, 2>, <1, 2>, <2, 2> \}$

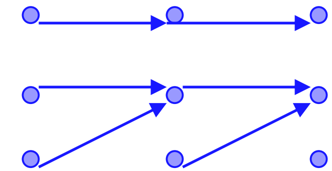


(2) 只有两个a∈{1,2,3},满足f(a)=a:

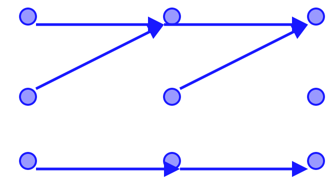
$f_4(x) = \{ \langle 0, 0\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 2, 0\rangle \}$



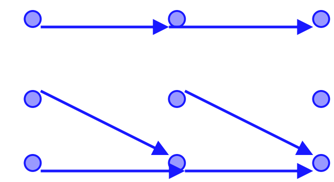
$f_5(x) = \{ \langle 0, 0\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 2, 1\rangle \}$



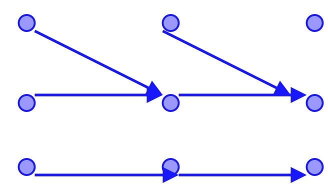
$f_6(x) = \{ \langle 0, 0\rangle, \langle 1, 0\rangle, \langle 2, 2\rangle \}$



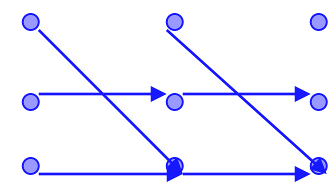
$f_7(x) = \{ \langle 0, 0\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 2\rangle \}$



$f_8(x) = \{ \langle 0, 1\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle \}$

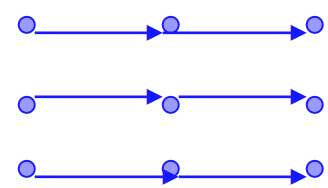


$f_9(x) = \{ \langle 0, 2\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle \}$



(3) 任意a∈{1,2,3}, 满足f(a)=a

$f_{10}(x) = \{ \langle 0, 0\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle \}$



例: 设A={1, 2, …, n}。有多少满足以下条件的从A到A的函数 f:

(1) $f \circ f = f$

(2) $f \circ f = I_A$

(3) $f \circ f \circ f = I_A$

解: (1) 由上例知f是满足 $f^2 = f$ 的函数当且仅当对任意$a \in X$, $f(a)=a$ 或$f(a)=b \neq a$且$f(b)=b$，且至少存在一个$a \in X$，使得$f(a)=a$。

设f是A上的函数，满足只存在k个A中的元素a使得f(a)=a。假设$A' \subseteq A$, $|A'|=k$, 且对任意 $a \in A'$, 有$f(a)=a$，则对任意的$b \in A-A'$, 一定存在一个$c \in A'$, 有$f(b)=c$。

否则，若存在$c' \in A-A'$,使得$f(b)=c'$，则$f(c')=c'$，与只存在k个A中的元素a使得f(a)=a矛盾。

因此，满足$f^2 = f$ 的函数的个数为 $\sum_{k=1}^{n} C_n^k k^{n-k}$

3.3 逆函数

问题：能否用关系的逆定义函数的逆?

例： 设 $f: I \to I$, $f = \{ <i, i^2> \mid i \in I \}$

则 $f^{-1} = \{ <i^2, i>, <i^2, -i> \mid i \in N \}$ (关系的逆)

显然， $<1, 1>$, $<1, -1> \in f^{-1}$,

所以，关系 f^{-1} 不是部分函数,

故 不能把 逆函数 直接定义为 逆关系 。

定义　设 X 和 Y 为二集合 且 $f: X \to Y$。

1)若有 $g: Y \to X$ 使 $g \circ f = I_X$，则称 f 为左可逆的，并称 g 为 f 的一个左逆函数，简称 左逆。

2)若有 $g: Y \to X$ 使 $f \circ g = I_Y$，则称 f 为右可逆的，并称 g 为 f 的一个右逆函数，简称 右逆。

3)若有 $g: Y \to X$ 使 $g \circ f = I_X$ 且 $f \circ g = I_Y$，则称 f 为可逆的，并称 g 为 f 的一个逆函数，简称 逆。

- 一个函数的左逆、右逆和逆不一定存在。即使存在，是否唯一？
- 那么，它们存在的条件是什么？

例：如下定义N上的四个函数：

$f_1=\{ <0, 0>, <1, 0>\}\cup\{ <n+2, n> \mid n \in N \}$

$f_2=\{<0, 1>, <1, 1> \} \cup\{ <n+2, n> \mid n \in N\}$

$g_1=\{<n, n+2>\mid n \in N\}$

$g_2=\{<0, 0> \} \cup \{<n+1, n+3>\mid n \in N\}$

有：$f_1 \circ g_1=f_2 \circ g_1=f_1 \circ g_2=I_N$

对任意$n \in N$,

(1) $(f_1 \circ g_1)(n)= f_1(n+2)=n$;

(2) $(f_2 \circ g_1)(n)= f_2(n+2)=n$;

(3) $n=0$时，$(f_1 \circ g_2)(0)= f_1(0)=0$;

$n>0$时，$(f_1 \circ g_2)(n)=f_1(n+2)=n$

- f_1与f_2都是g_1的左逆
- f_1是g_2的左逆
- g_1与g_2都是f_1的右逆
- g_1是f_2的右逆

例：设 F_X 是所有从 X 到X 的双射的集合，其中 $X = \{1, 2, 3\}$ 。求出 F_X的全部元素，并求出每个元素的逆函数 。

解：因为 F_X 的元素均为双射，所以 $n(F_X) = 3! = 6$ 。

设 $F_X = \{ f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 \}$

$f_1 = \{ <1, 1>, <2, 2>, <3, 3> \}$

$f_2 = \{ <1, 1>, <2, 3>, <3, 2> \}$

$f_3 = \{ <1, 2>, <2, 1>, <3, 3> \}$

$f_4 = \{ <1, 2>, <2, 3>, <3, 1> \}$

$f_5 = \{ <1, 3>, <2, 1>, <3, 2> \}$

$f_6 = \{ <1, 3>, <2, 2>, <3, 1> \}$

故 $f_1^{-1} = f_1$，$f_2^{-1} = f_2$，$f_3^{-1} = f_3$，$f_4^{-1} = f_5$，$f_5^{-1} = f_4$，$f_6^{-1} = f_6$ 。

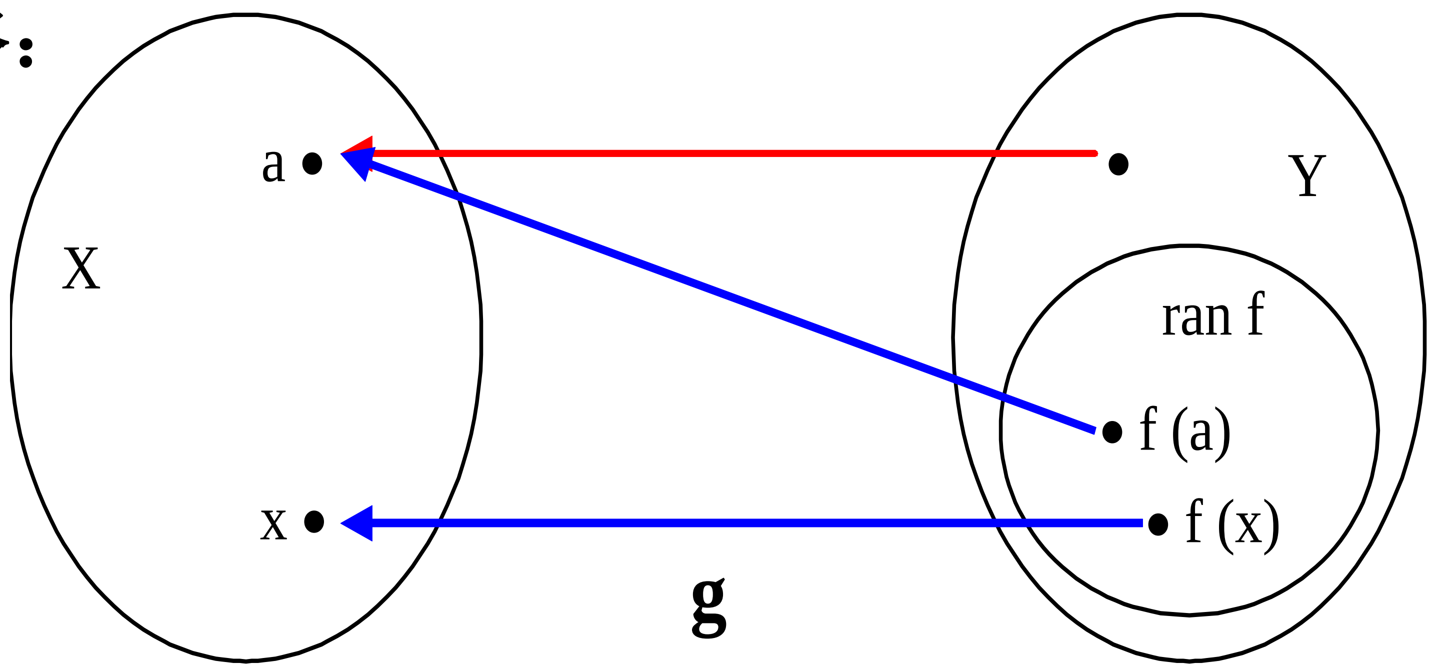
定理：设 X 和 Y 为二集合且 $X \neq \varnothing$。若$f: X \to Y$, 则下列条件等价：

(1) f 为内射；

(2) $f: X \to Y$ 为左可逆

(3) f可左消去，即对任意集合Z及任意的$g: Z \to X$和 $h: Z \to X$, 当$f \circ g = f \circ h$时，皆有$g=h$。

证明思路：



定理：设 X 和 Y 为二集合且 $X \neq \varnothing$。若$f: X \rightarrow Y$, 则下列条件等价：

(1) f 为内射；

(2) $f: X \rightarrow Y$ 为左可逆

(3) f可左消去，即对任意集合Z及任意的$g: Z \rightarrow X$和 $h: Z \rightarrow X$, 当$f \circ g = f \circ h$时，皆有$g=h$ 。

证明：(1) ➔(2) 设f是内射，则对任意的$x, y \in X$, 若$x \neq y$, 则必有有$f(x) \neq f(y)$，因此，f的逆关系f^{-1}为从Y到X的一个部分函数。

又因为$X \neq \varnothing$，令$a \in X$，则定义函数$g: Y \rightarrow X$:

$$g = f^{-1} \cup ((Y - \operatorname{ran} f) \times \{a\}),$$

可证，$g \circ f = I_x$（请补充），即g为f的一个左逆。

定理：设 X 和 Y 为二集合且 $X \neq \varnothing$。若f: X→ Y, 则下列条件等价：

(1) f 为内射；

(2) f：$X \to Y$ 为左可逆

(3) f可左消去，即对任意集合Z及任意的g: $Z \to X$和 h: $Z \to X$, 当$f \circ g = f \circ h$时，皆有g=h 。

证明: (2) →(3) 若 f 为左可逆的，则有 $f_1: Y \to X$ 使

$$f_1 \circ f = I_X ,$$

又由$f \circ g = f \circ h$知，$g = (f_1 \circ f) \circ g = f_1 \circ (f \circ g) = f_1 \circ (f \circ h)$

$$= (f_1 \circ f) \circ h = h$$

定理：设 X 和 Y 为二集合且 $X \neq \varnothing$。若f: X→ Y, 则下列条件等价：

(1) f 为内射；

(2) f： $X \to Y$ 为左可逆

(3) f可左消去，即对任意集合Z及任意的g: $Z \to X$和 h: $Z \to X$, 当$f \circ g=f \circ h$时，皆有g=h 。

证明: (3) →(1) 假设f 不是内射，则必有$a_1, a_2 \in X$, 使得 $a_1 \neq a_2$ 且$f(a_1) = f(a_2)$。

令$h(x)=\begin{cases} x, & x \in X, x \neq a1 \\ a_2, & x = a1 \end{cases}$, 则有h: $X \to X$, 且$h \neq I_x$,

且$f \circ I_X=f=f \circ h$, 与(3) 矛盾，因此f一定是内射。

定理: 设 X 和 Y 为二集合,若f：X $\rightarrow$ Y,则下列条件等价：
(1) f为满射；
(2) f 右可逆；
(3) f 可右消去，即对任意集合Z及任意的 g: Y→ Z和 h:Y→Z, 当$g\circ f=h\circ f$时，皆有g=h。

证明: (1) →(2) 若 f 为满射，则对任意的b $\in$Y，有a $\in$X, 使得b=f(a), 即$f^{-1}[\{b\}]\neq\emptyset$。

如下定义函数f_2: Y $\rightarrow$X, 使得对任意的b $\in$Y，任取 $x_b \in f^{-1}[\{b\}]$, 定义$f_2(b)=x_b$。

则有对任意的b $\in$Y，$(f\circ f_2)(b) = f\circ(f_2(b)) = f(x_b)=b$。

因此$f\circ f_2= I_Y$, 从而f是右可逆。

定理: 设 X 和 Y 为二集合,若f: $X \to Y$,则下列条件等价:
(1) f为满射;
(2) f 右可逆;
(3) f 可右消去，即对任意集合Z及任意的 g: Y→ Z和 h:Y→Z, 当$g \circ f=h \circ f$时，皆有g=h 。

证明: (2) →(3) 若f右可逆，则存在f_3: $Y \to X$, 使得$f \circ f_3=I_Y$.
又由于$g \circ f = h \circ f$，得

$$g = g\circ (f \circ f_3) = (g\circ f) \circ f_3 = (h\circ f) \circ f_3= h\circ(f\circ f_3) = h。$$

定理: 设 X 和 Y 为二集合,若f： X → Y,则下列条件等价:
(1) f为满射;
(2) f 右可逆;
(3) f 可右消去， 即对任意集合Z及任意的 g: Y→ Z和 h:Y→Z, 当$g\circ f=h\circ f$时， 皆有g=h 。

证明: (3) →(1) 假设f不是满射, 则存在$b \in Y$, 使得$b\notin f[X]$。
(1) 若$X=\emptyset$, 则由f: $X \to Y$， 可知$f=\emptyset$. 令Z={1, 2}, 且
g: $Y \to Z$, 满足g(y) = 1, h: $Y \to Z$, 满足h(y)=2。
此时， $g\neq h$， 但 $g\circ f=h\circ f = \emptyset$， 与(3) 矛盾。
(2)若$X\neq\emptyset$, 则有$f[X]\neq\emptyset$。任取$b' \in f[X]$, 显然有$b \neq b'$。
定义 h: Y→X, 满足 $h(y)=\begin{cases} y, & y\in Y, y\neq b \\ b', & y=b \end{cases}$ **， 有$h\neq I_Y$， 且**
$h\circ f = I_Y\circ f$， 与(3) 矛盾。
综上所述， f为满射。

定理: 设 X 和 Y 为二集合，若 f: $X \to Y$ 既是左可逆的，又是右可逆的，则 f 是可逆的，且 f 的左逆和右逆都等于 f 的唯一的逆。

证明: 设g_1, g_2分别是f的左逆与右逆, 即$g_1 \circ f = I_X$, $f \circ g_2 = I_Y$。

则 $g_1 = g_1 \circ I_Y = g_1 \circ (f \circ g_2) = (g_1 \circ f) \circ g_2 = I_X \circ g_2 = g_2$。

因此，g_1是f的逆。

下面证明唯一性。假设g'是f的逆，即$g' \circ f = I_X$, $f \circ g' = I_Y$。

同理可证$g_1 = g'$（略）。

定义：设 X 和 Y 为二集合。若 f：$X \to Y$ 为可逆的，则 f 的 逆函数用 f^{-1} 表示。

定理：若 X 和 Y 为二集合 且 $f : X \to Y$, 则下列条件等价：

(1) f 是双射；

(2) f 既是左可逆的，又是右可逆的；

(3) f 是可逆的；

(4) f 的 逆关系 f^{-1} 即为 f 的 逆函数。

证明: (1)→(2)，(2)→(3)都可由前面的定理直接得到。

(3)→(4) 若f是可逆的，则存在逆f^{-1}: $Y \to X$, 使得

$f \circ f^{-1} = I_Y$, 且$f^{-1} \circ f = I_X$。

因此f是双射。则其逆关系也是双射，即为f的逆。

(4)→(1) 因为f^{-1}是f的逆函数，故f^{-1}既是f的左逆又是f的右逆，即$f^{-1} \circ f = I_X$, $f \circ f^{-1} = I_Y$。

因此f既是内射又是满射，即f 是双射。

定理: 设X, Y, Z为三集合。若 $f: X \to Y$ 和 $g: Y \to Z$ 都是可逆的，则 $g \circ f$ 也是可逆的，且 $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ 。

证明：因为:

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1}$$

$$= g \circ I_Y \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = I_Z$$

同理可得 $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = I_X$

故 $g \circ f$ 是可逆的，且 $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ 。

例：设 A 为有限集 且 $f: A \to A$，证明：

(1) 若有自然数 $n \geq 1$ 使 $f^n = I_A$，则 f 为双射；

(2) 若 f 为双射，则有自然数 $n \geq 1$ 使 $f^n = I_A$。

证明: (1) 由 $f^n = I_A$,有 $f^{n-1} \circ f = f \circ f^{n-1} = I_A$, 且$I_A$为双射。

由$f^{n-1} \circ f = I_A$ 为内射可知f 为内射，

由 $f \circ f^{n-1} = I_A$ 为满射可知f 为满射， 故 f 为双射。

(2) 因 f 为双射, 由归纳法可知:对每个 $n > 0$, f^n 均为双射。

设 n(A)=m, 则A上的双射有 m!个，

由抽屉原理可知：在 f，f^2，f^3，…，$f^{m!+1}$ 这m!+1个双射中，必有两个相等， 不妨设为：$f^{n+k} = f^k$ ($n \geq 1$，$k \geq 1$)，

因 f 为双射，故有逆函数 f^{-1}，得

$$f^n = f^{n+k} \circ (f^{-1})^k = f^k \circ (f^{-1})^k = I_A。$$

例：设f, g, h都是从N到N的函数，其中f(x)=3x, g(x)=3x+1, h(x)=3x+2。找出它们的一个共同左逆。

解：令 $p: N \to N$, 满足对任意 $x \in X$, $p(x) = \lfloor x/3 \rfloor$,

即p(x) 是小于$x/3$的最大整数。

可证：

$$p \circ f = p \circ g = p \circ h = I_N,$$

因此p是f, g, h 的一个共同左逆。

3.4 特征函数

- 用函数来确定集合与集合间的关系

定义：设X为任意集合，f和g都是从X到R的函数。

(1) $f \le g$ 表示对每个x∈X, 皆有$f(x) \le g(x)$;

(2) $f + g$: $X \rightarrow R$, 对每个x∈X, 皆有$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, 称f+g为f和g的和；

(3) $f-g$: $X \rightarrow R$, 对每个x∈X, 皆有$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$, 称f-g为f和g的差；

(4) $f*g$: $X \rightarrow R$, 对每个x∈X, 皆有$(f*g)(x)=f(x)*g(x)$, 称f*g为f和g的积。

定义 (特征函数)设 U 是全集，A 是 U 的子集，A的特征函数χ_A 为如下定义的从U到R的函数：

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & 若\ x \in A \\ 0 & 若\ x \notin A \end{cases}$$

例：设 U 是某大学 全体学生的集合，A 是计算机学院学生的集合，求 $\chi_A(x)$。

解：若 x 是计算机学院的学生，则 $\chi_A(x) = 1$，

若 x 不是计算机学院的学生，则 $\chi_A(x) = 0$。

例：设 $U = \{a, b, c, d\}$，$A = \{a, c\}$，$\chi_A(x)$ 是 特征函数，求 $\chi_A(x)$。

解：$x_A(a) = 1$，$x_A(b) = 0$，$\chi_A(c) = 1$，$\chi_A(d) = 0$

特征函数的性质： 设 A 与 B 是全集 U 的任意两个子集，0表示从U到R的函数$\{\langle x, 0\rangle \mid x\in R\}$, 1表示从U到R的函数$\{\langle x, 1\rangle \mid x\in R\}$。

(1) $0 \le \chi_A \le 1$

(2) $\chi_A=0$ 当且仅当$A=\varnothing$ $\forall x\,(\chi_A(x)=0) \Leftrightarrow A=\varnothing$

(3) $\chi_A=1$ 当且仅当$A=U$ $\forall x\,(\chi_A(x)=1) \Leftrightarrow A=U$

(4) $\chi_A \le \chi_B$当且仅当 $A\subseteq B$ $\forall x\,(\chi_A(x) \le \chi_B(x)) \Leftrightarrow A\subseteq B$

(5) $\chi_A = \chi_B$当且仅当 $A = B$ $\forall x\,(\chi_A(x)=\chi_B(x)) \Leftrightarrow A = B$

(6) $\chi_{\sim A} = 1- \chi_A$ $\forall x, \chi_{\sim A}(x) = 1 - \chi_A(x)$

(7) $\chi_{A\cap B}= \chi_A * \chi_B$ $\forall x, \chi_{A\cap B}(x)= \chi_A(x) * \chi_B(x)$

(8) $\chi_{A\cup B}= \chi_A+\chi_B - \chi_A*\chi_B$ $\forall x, \chi_{A\cup B}(x)= \chi_A(x)+\chi_B(x)- \chi_A(x)*\chi_B(x)$

(9) $\chi_{A-B}= \chi_A - \chi_A*\chi_B$ $\forall x, \chi_{A-B}(x)= \chi_A(x)- \chi_A(x)*\chi_B(x)$

(10) $\chi_A*\chi_B= \chi_A$当且仅当$A\subseteq B$ $\forall x\,(\chi_A(x)*\chi_B(x) =1\Leftrightarrow \chi_A(x) = 1)$

(11) $\chi_A*\chi_A= \chi_A$ $\forall x, \chi_A(x) *\chi_A(x)=\chi_A(x)$

应用

例：证明 $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$

证明：$\chi_{A\cap(B\cup C)}$

$= \chi_A * \chi_{B\cup C}$

$= \chi_A * (\chi_B + \chi_C - \chi_{B\cap C})$

$= \chi_A * \chi_B + \chi_A * \chi_C - \chi_A * \chi_{B\cap C}$

$= \chi_{A\cap B} + \chi_{A\cap C} - \chi_{A\cap(B\cap C)}$

$= \chi_{A\cap B} + \chi_{A\cap C} - \chi_{(A\cap B)\cap(A\cap C)}$

$= \chi_{(A\cap B)\cup(A\cap C)}$

例：证明 $\sim\sim A = A$

证明：$\chi_{\sim\sim A} = 1 - \chi_{\sim A}$

$$= 1 - (1 - \chi_A)$$

$$= \chi_A$$

故 $\sim\sim A = A$。

例: 证明 $\sim(A\cup B) = \sim A\cap\sim B$ 。

证明: $\chi_{\sim(A\cup B)} = 1 - \chi_{A\cup B}$

$= 1 - \chi_A - \chi_B + \chi_A * \chi_B$

$\chi_{\sim A\cap\sim B} = \chi_{\sim A} * \chi_{\sim B}$

$= (1 - \chi_A) * (1 - \chi_B)$

$= 1 - \chi_A - \chi_B + \chi_A * \chi_B$

所以 $\chi_{\sim(A\cup B)} = \chi_{\sim A\cap\sim B}$

从而 $\sim(A\cup B) = \sim A\cap\sim B$

例: 用特征函数求(A-B) ∪ (A-C)=A成立的充分必要条件。

解: $\chi_{(A-B)\cup(A-C)} = \chi_{(A-B)} + \chi_{(A-C)} - \chi_{(A-B)\cap(A-C)}$

$= \chi_A - \chi_A * \chi_B + \chi_A - \chi_A * \chi_C - \chi_{(A-B)} * \chi_{(A-C)}$

$= 2\chi_A - \chi_A * \chi_B - \chi_A * \chi_C$

$- (\chi_A - \chi_A * \chi_B) * (\chi_A - \chi_A * \chi_C)$

$= 2\chi_A - \chi_A * \chi_B - \chi_A * \chi_C - (\chi_A * \chi_A - \chi_A * \chi_A * \chi_C - \chi_A * \chi_B * \chi_A +$

$\chi_A * \chi_B * \chi_A * \chi_C)$

$= \chi_A - \chi_A * \chi_B - \chi_A * \chi_C - \chi_A + \chi_A * \chi_C + \chi_A * \chi_B - \chi_A * \chi_B * \chi_c$

$= \chi_A - \chi_A * \chi_B * \chi_c$

因此 (A-B)∪(A-C)=A 当且仅当 $\chi_A * \chi_B * \chi_c = 0 = \chi_{A\cap B\cap C}$

当且仅当$A\cap B \cap C = \varnothing$ 。