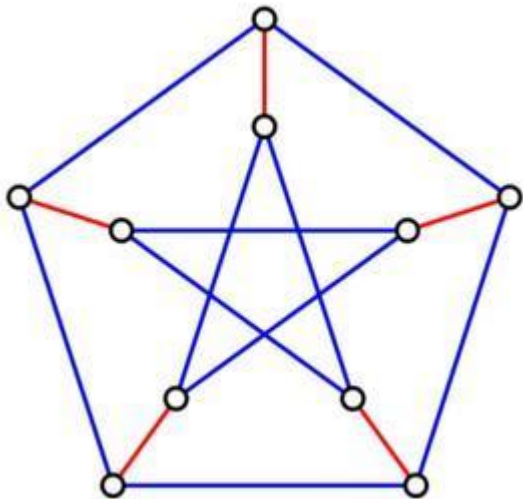


离散数学 2



《图论》

李建欣

北航计算机学院

lijx@act.buaa.edu.cn

<http://act.buaa.edu.cn/lijx>

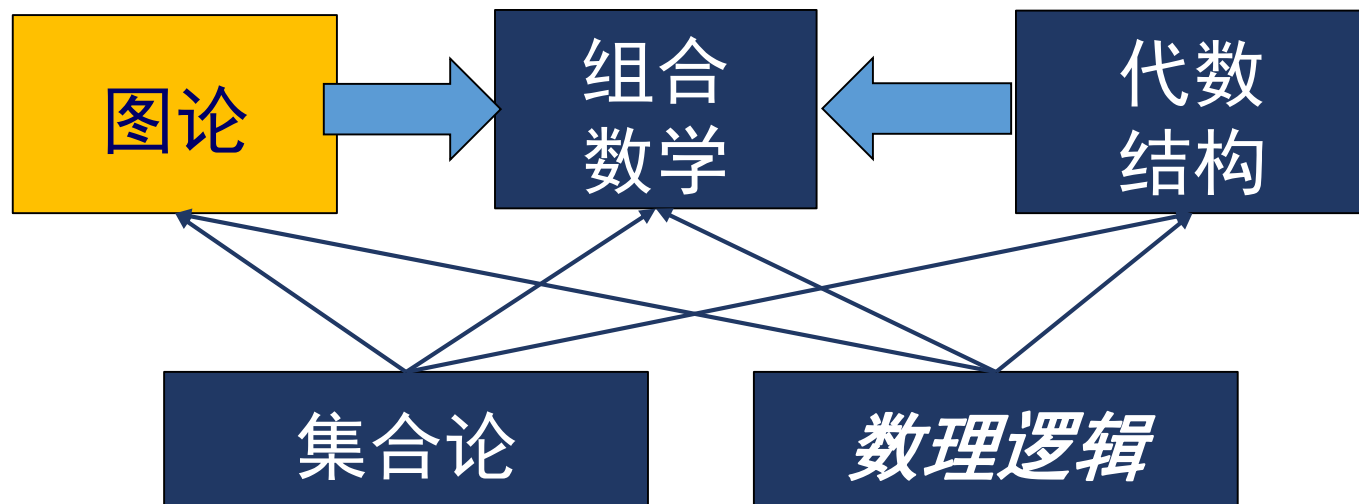
计算机中数学



• 连续与离散

- 微积分等推动工业发展
- 离散数学等推动计算机发展

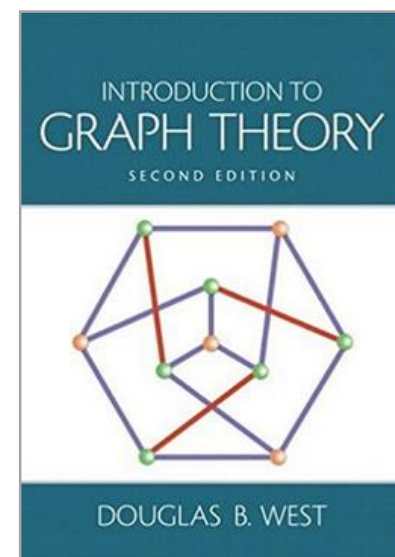
离散数学家族



- **集合论**：集合代数、关系、函数、集合基数
- **数理逻辑**：命题、谓词、模态、时态逻辑、Lambda演算
- **图论**：欧拉图、哈密顿图、生成树、路径
- **代数结构**：代数系统、群、环、格
- **组合数学**：计数、递推关系、生成函数、组合定理

推荐资料

- 离散数学2（国防科大 王兵山）
- [Douglas B. West](#), 《Introduction to Graph Theory (2nd Edition)》
- J.A. Bondy ,U.S.R. Murty
 - 《Graph Theory with Application》(Elsevier,1976)



图论起源



地铁组成的图



社交关系组成的图

图论起源

图论已有二百多年历史

(以Euler研究歌尼斯堡七桥问题为发端)。

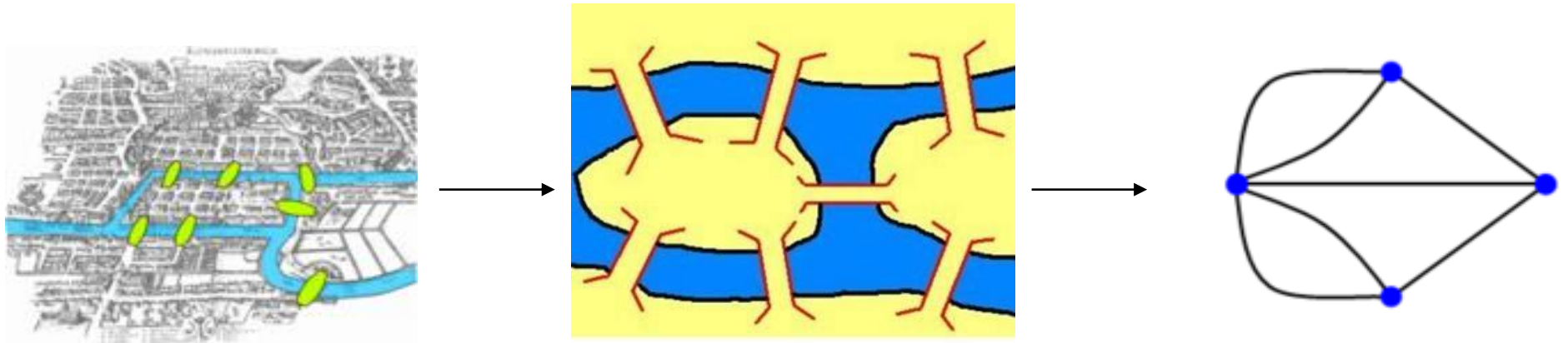
近四十年来发展十分迅速，成为一个新兴的数学分支。

- 1、计算机科学中许多概念、算法需要图论支持(如最短距离，二叉树)。
- 2、为计算机应用建模提供数学工具

Graph Theory - History

Leonhard Euler's paper on

“*Seven Bridges of Königsberg*” , published in 1736.



- 欧拉(L.Euler,1707.4.15-1783.9.18)是瑞士数学家，生于瑞士的巴塞尔(Basel)。
- 与阿基米德、牛顿、高斯列为有史以来贡献最大的四位数学家。



主要内容

1. 图论的基本概念
2. 通路问题
3. 图的矩阵表示
4. 欧拉图和哈密顿图
5. 二分图与图匹配
6. 树、有向树和有序树

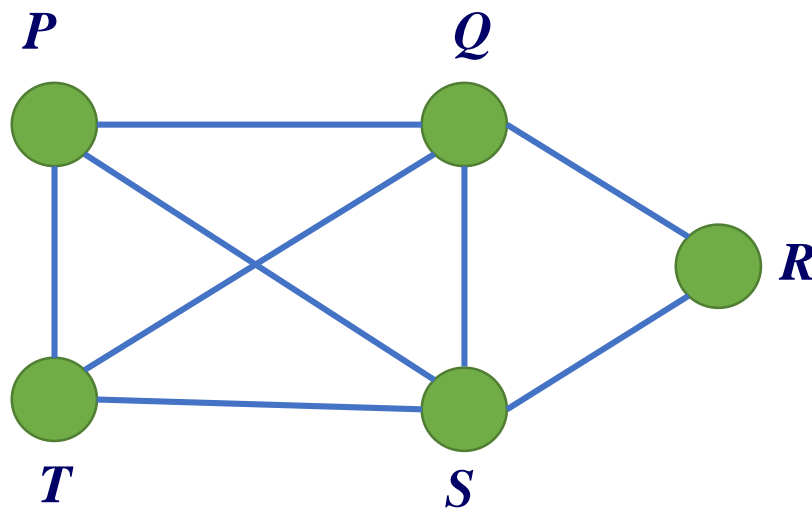
§ 7.1 图论的基本概念

目的： 图论的基本概念；

重点： 边的关系，节点度；

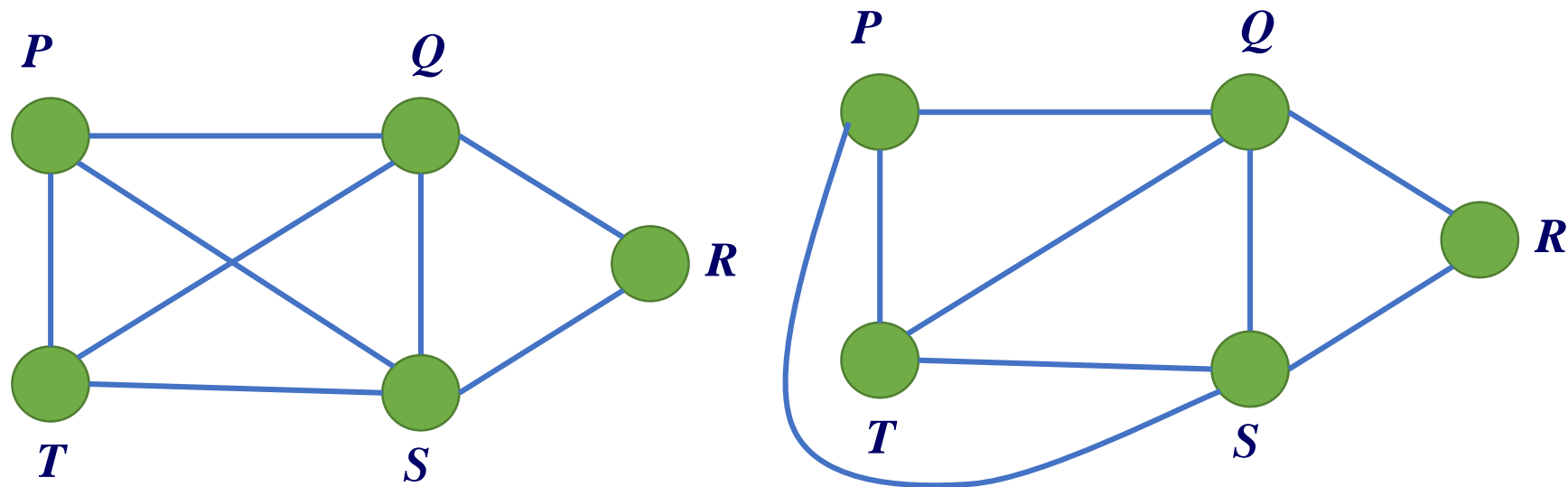
难点： 图同构。

一图看概念



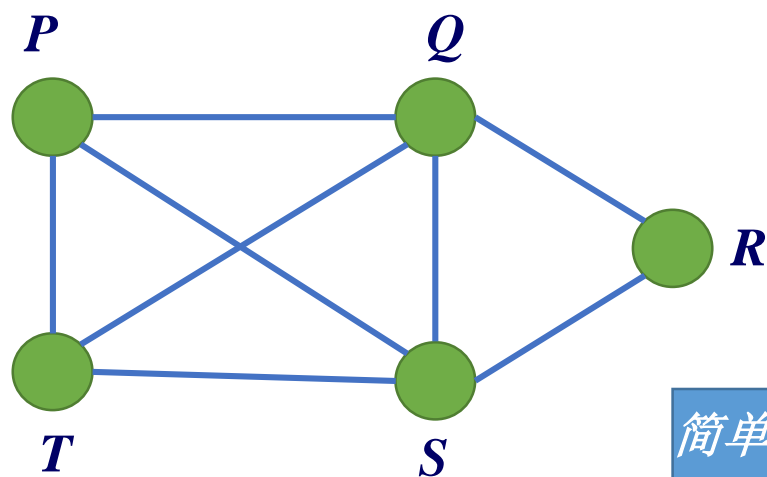
- 其中如 P , Q , T , S , R 称为**顶点(Vertex/Node)**;
- 其中如 PS , TQ 的线称为**边(Edges)**;
- 整个图称为**图(Graph)**;
- **度(degree)**: 以顶点为端的边数目, 例如 P 的度是3;
注意: PS 和 QT 的交叉(intersection)不属于顶点, 例如电路印刷版

一图看概念

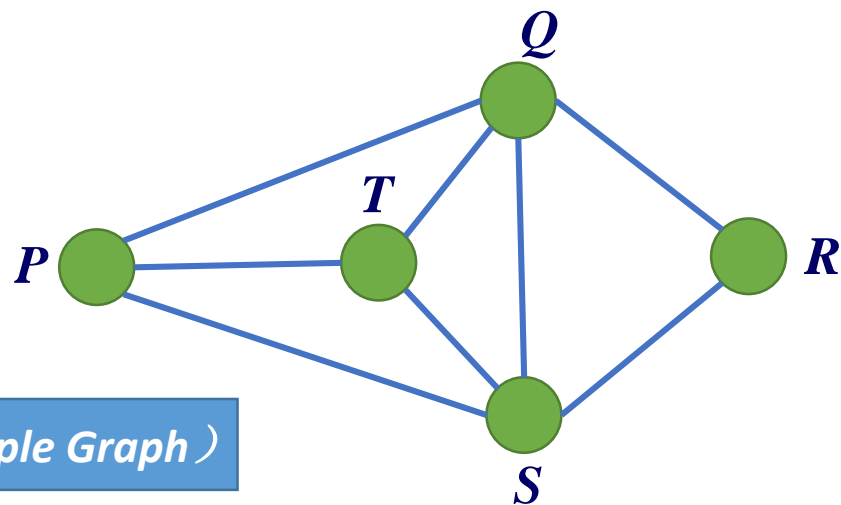


不考虑测量属性（metrical properties），
则两个图是同一个图。

一图看概念



简单图 (simple Graph)



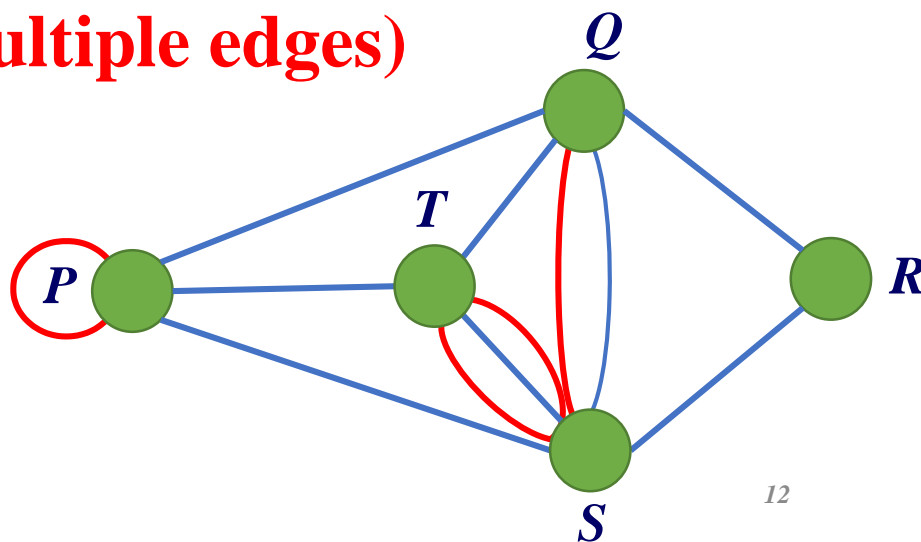
➤ 假设T点成为交通的汇集点？如何避免拥堵

- 其中QS和ST称为**平行边(multiple edges)**

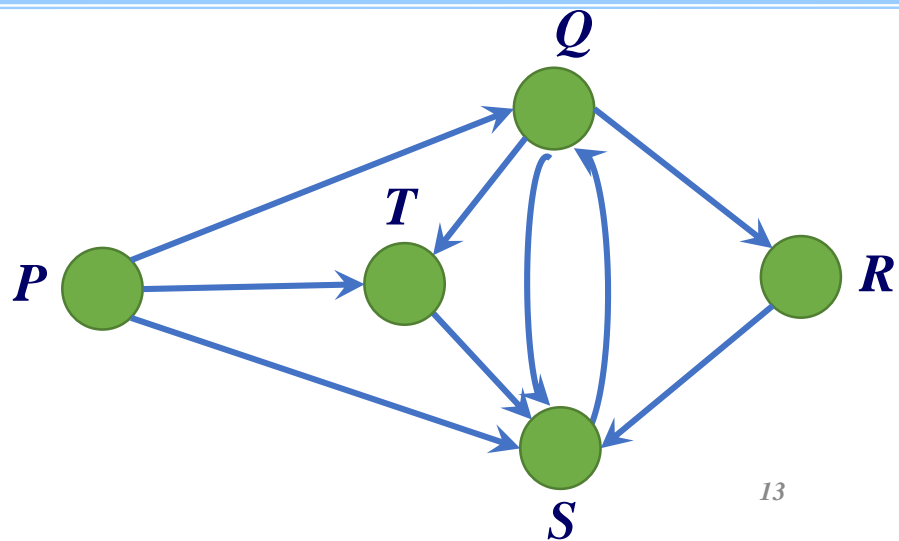
➤ 如果P需要一个停车位

- P称为**自环(loop)**

➤ **简单图(Simple Graph): no loops or multiple edges**



一图看概念



- 有向图（Directed Graph）：例如使得交通道路变成单行线
- Directed Edge称为arc
- 图论干什么？
 - 通路（walk）
 - 路径（Path）
 - 回路（Cycle）

定义7.1.1 图 Graph

图 G 是一个三元组 $G = \langle V, E, \Psi \rangle$, V 和 E 都是有限集合, $V \neq \emptyset$ 。 V 称为**节点集**, E 称为**边集**, Ψ 是从边集 E 到节点的**偶对**（无序或有序）集上的函数。

i) 如果 $\Psi: E \rightarrow \{\{v_1, v_2\} \mid v_1 \in V \text{ 且 } v_2 \in V\}$,

则称 $G = \langle V, E, \Psi \rangle$ 为 **无向图**。

ii) 如果 $\Psi: E \rightarrow V \times V$,

则称 $G = \langle V, E, \Psi \rangle$ 为 **有向图**。

无向图、有向图

无向图和有向图 统称为图,

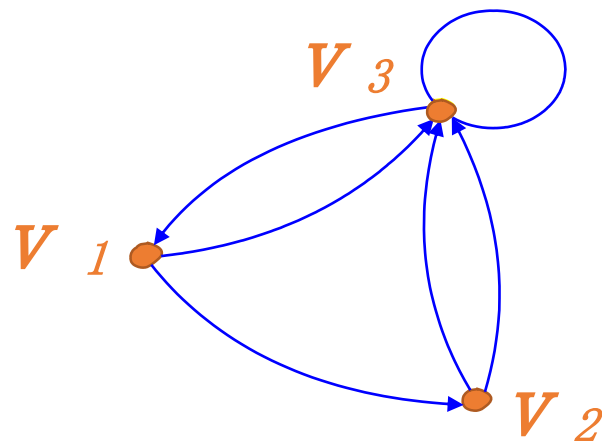
- 其中 V 的元素称为图 G 的**结点 (顶点)**,
- E 的元素称为图 G 的**边**,
- 图 G 的**结点数目**称为它的 **阶**。

例1: Let $V=\{v_1, v_2, v_3\}$, $E=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$.

Let γ be defined by

$\gamma = \{ \langle e_1, \{1, 2\} \rangle, \langle e_2, \{1, 3\} \rangle, \langle e_3, \{1, 3\} \rangle, \langle e_4, \{3, 3\} \rangle, \langle e_5, \{2, 3\} \rangle, \langle e_6, \{2, 3\} \rangle \}$ Then,
 $G=(V, E, \gamma)$ is a graph.

例2:



小结：图的最本质特征

图的最本质内容：**结点和边的对应关系**。

用几何图形表示图：

小圆圈表示结点

- 无向图**：若 $\Psi(e) = \{v_1, v_2\}$ ，就用一条连接结点 v_1 和 v_2 的无向线段 表示边 e
- 有向图**：若 $\Psi(e) = \langle v_1, v_2 \rangle$ ，就用一条由 v_1 指向 v_2 的有向线段 表示边 e

图的基本结构

图的基本结构：

是指图的**顶点之间**，**弧(或边)之间**及**弧(或边)与顶点之间**的连接关系。

主要内容有：

顶点之间的邻接，顶点与边(弧)的关联，边(弧)的相邻，顶点的次数，孤立点，零图、平凡图、正则图、完全图。

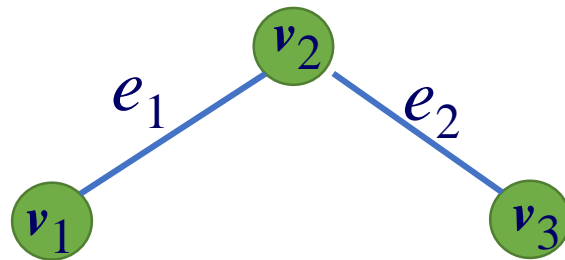
关联、邻接 —— 结点和边的关系

设无向图 $G = \langle V, E, \Psi \rangle$, $e, e_1, e_2 \in E$ 且 $v_1, v_2 \in V$

- 如果 $\Psi(e) = \{v_1, v_2\}$, 则称 e 与 v_1 (或 v_2) 互相**关联**, e 连接 v_1 和 v_2 , v_1 和 v_2 既是 e 的起点, 也是 e 的终点, 也称 v_1 和 v_2 **邻接**。



- 如果两条不同边 e_1 和 e_2 与同一个结点**关联**, 则称 e_1 和 e_2 **邻接**。



关联、邻接 —— 结点和边的关系

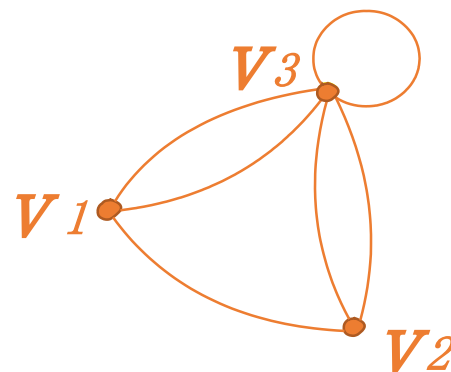
设有向图 $G = \langle V, E, \Psi \rangle$, $e \in E$ 且 $v_1, v_2 \in V$ 。 若 $\Psi(e) = \langle v_1, v_2 \rangle$, 则称 e 连接 v_1 和 v_2 , e 与 v_1 (或 v_2) 互相关联, 分别称 v_1 和 v_2 是 e 的起点和终点, 也称 v_1 和 v_2 邻接。



边的定义：自圈、平行边

设图 $G = \langle V, E, \Psi \rangle$ ， e_1 和 e_2 是 G 的两条不同边。

- i) 如果与 e_1 关联的两个结点相同，则称 e_1 为 **自圈**
(self loop);
- ii) 如果 $\Psi(e_1) = \Psi(e_2)$ ，则称 e_1 与 e_2 **平行**;
- iii) 如果图 G 没有 **自圈**，也没有 **平行边**，则称 G 为 **简单图**
(simple graph)



我们一般只讨论**有限图**。

图中边的定义

图 G 是一个三元组 $G = \langle V, E, \Psi \rangle$, V 和 E 都是有限集合, $V \neq \emptyset$ 。 V 称为**节点集**, E 称为**边集**, Ψ 是从边集 E 到节点的**偶对**（无序或有序）集上的函数。

注意: • E 可为空

• 一个 E 中元素可对应二个相同的 V 中元素

• 多个 E 中的元素可对应 V 中相同的二元素

零图

自圈(自环)

平行边

度 有多少条边与某一个结点相关联？——结点的度

设 v 是图 G 的结点。

- i) 如果 G 是无向图， G 中与 v 关联的边和与 v 关联的自圈的数目之和称为 v 的度，记为 $d_G(v)$ 。
- ii) 如果 G 是有向图， G 中以 v 为起点的边的数目称为 v 的出度，记为 $d_G^+(v)$ ；
 G 中以 v 为终点的边的数目称为 v 的入度，记为 $d_G^-(v)$ ；
 v 的出度与入度之和称为 v 的度，记为 $d_G(v)$ 。

注意：

- 在计算无向图中结点的度时，自圈要考虑两遍，因为自圈也是边。（例）
- 每增加一条边，都使图中所有结点的度数之和增加 2。

定理7.1.1、定理7.1.2

定理7.1.1 设无向图 $G = \langle V, E, \Psi \rangle$ 有 m 条边,

则 $\sum_{v \in V} d_G(v) = 2m$

证: 因为每条边为图中提供次数均为2

定理7.1.2 设有向图 $G = \langle V, E, \Psi \rangle$ 有 m 条边,

则 $\sum_{v \in V} d_G^+(v) = \sum_{v \in V} d_G^-(v) = m$, 且

$\sum_{v \in V} d_G(v) = 2m$ 。

奇结点、偶结点

度为奇数的结点称为奇结点；

度为偶数的结点称为偶结点。

定理7.1.3

任何无向图中都有**偶数**个奇结点。

(An undirected graph has an even number of vertices of odd degrees.)

Proof: Let v_1 and v_2 be the set of vertices of even degree and the set of vertices of odd degree, respectively, in an undirected graph $G = \langle V, E, \Psi \rangle$ with m edges. Then

$$2m = \sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{v \in V_1} \deg(v) + \sum_{v \in V_2} \deg(v)$$

偶数


?? 多少个奇数?

孤立点、端点

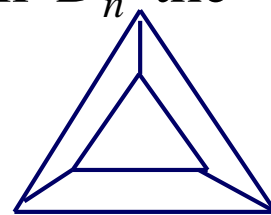
度为 0 的结点 称为 **孤立点**;

度为 1 的结点 称为 **端点**。

特殊图：零图、平凡图、d度正则图、完全图

i) 结点都是孤立点的图称为**零图**(For each integer $n \geq 1$, we let D_n denote the graph with n vertices and no edges. We call D_n the **discrete graph** on n vertices.). D_2 : 

ii) 一阶零图称为**平凡图**。



iii) 所有结点的度均为自然数 d 的无向图称为 **d 度正则图(Regular)**。

iv) 设 $n \in \mathbf{I}_+$, 如果 n 阶简单无向图 G 是 $n-1$ 度正则图, 则称 G 为 **完全无向图 (Complete Graph)**, 记为 K_n 。 K_n 的边数 $m = n(n-1)/2$ 。(A complete graph on n vertices, denoted by K_n , is a simple graph that contains exactly one edge between each pair of distinct vertices.)

v) 设 $n \in \mathbf{I}_+$, 每个结点的出度和入度均为 $n-1$ 的 n 阶简单有向图称为 **完全有向图**。

特殊图：零图、平凡图、 d 度正则图、完全图

注意：

1. 完全图必是正则图，但正则图不一定是完全图。

2. D_n 零图也是正则图

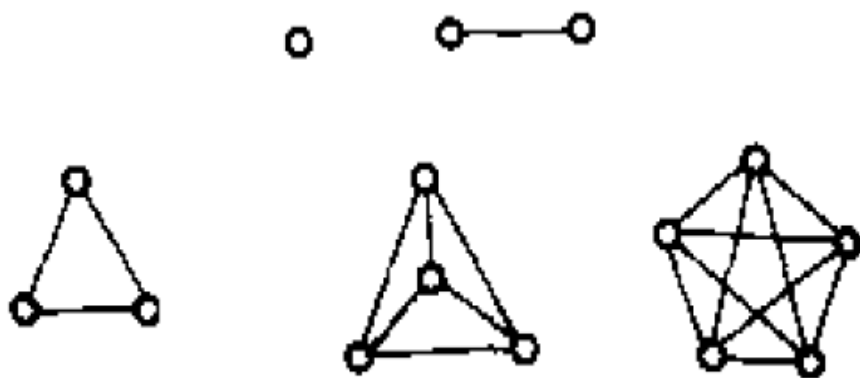


图 7.1.5 一至五阶完全无向图

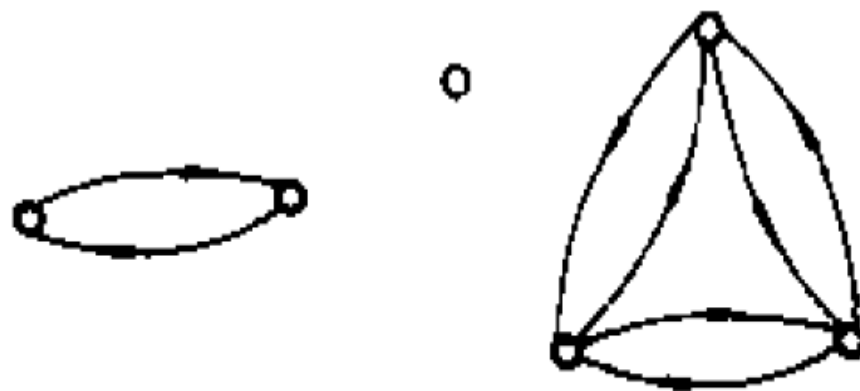


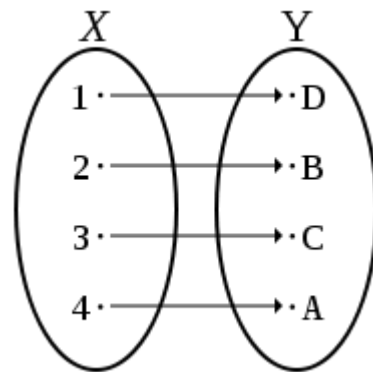
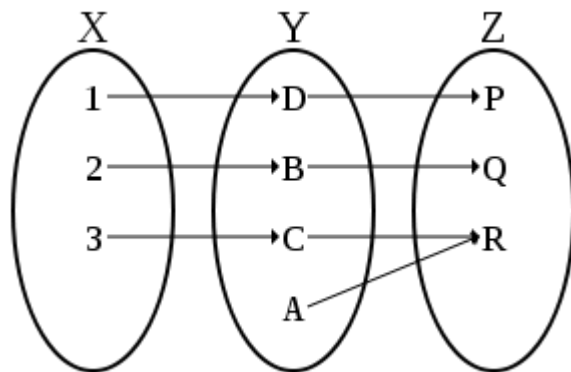
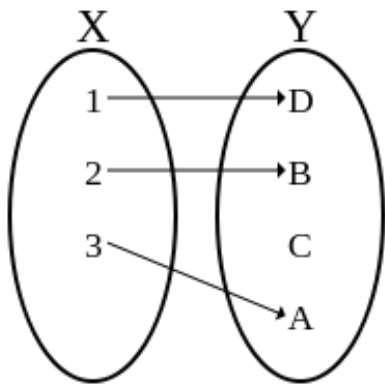
图 7.1.6 一至三阶完全有向图

图的最本质内容：结点和边的关联关系。

单射：指将不同的变量映射到不同的值的函数。

满射：指陪域等于值域的函数。即：对陪域中任意元素，都存在至少一个定义域中的元素与之对应。

双射（也称一一对应）：既是单射又是满射的函数。直观地说，一个双射函数形成一个对应，并且每一个输入值都有正好一个输出值以及每一个输出值都有正好一个输入值



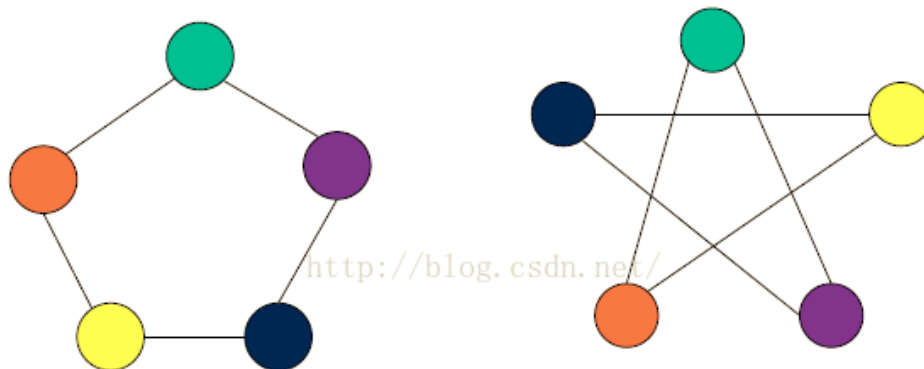
同构 (isomorphism)

设图 $G = \langle V, E, \Psi \rangle$ 和 $G' = \langle V', E', \Psi' \rangle$ 。

如果存在双射 $f: V \rightarrow V'$ 和双射 $g: E \rightarrow E'$ ，使得对于任意 $e \in E$ 及 $v_1, v_2 \in V$ 都有：

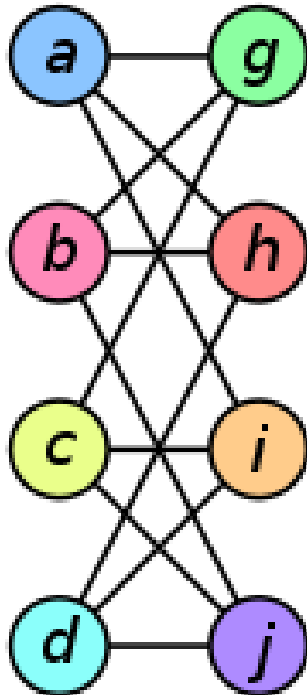
$$\Psi'(g(e)) = \begin{cases} \{f(v_1), f(v_2)\}, & \text{若 } \Psi(e) = \{v_1, v_2\} \\ \langle f(v_1), f(v_2) \rangle, & \text{若 } \Psi(e) = \langle v_1, v_2 \rangle \end{cases}$$

则称 G 与 G' **同构**，记做 $G \cong G'$ ，并称 f 和 g 为 G 与 G' 之间的**同构映射**，简称同构。

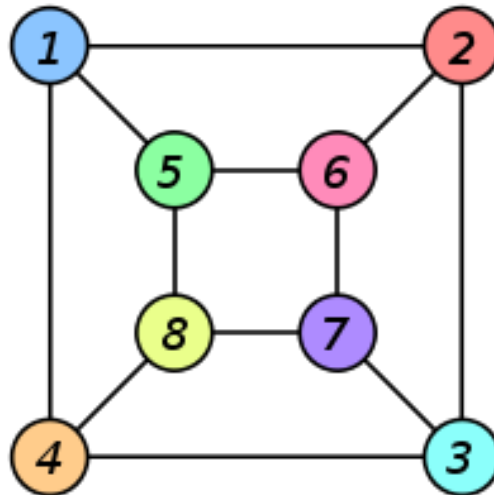


同构 (isomorphism): 实例

Graph G



Graph H



An isomorphism
between G and H,

$$f(a) = 1$$

$$f(b) = 6$$

$$f(c) = 8$$

$$f(d) = 3$$

$$f(g) = 5$$

$$f(h) = 2$$

$$f(i) = 4$$

$$f(j) = 7$$

同构 (isomorphism)

难题：判断两个图**同构**的简单而**充分**的条件？

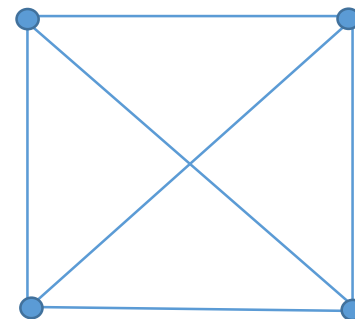
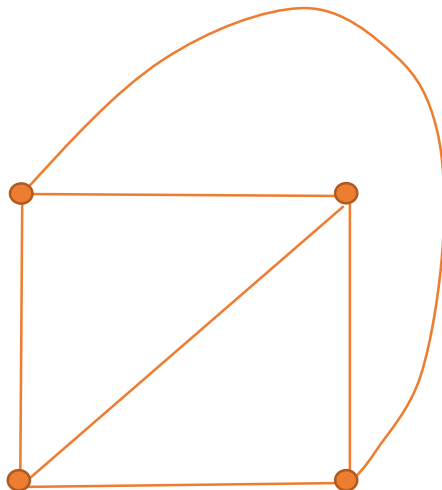
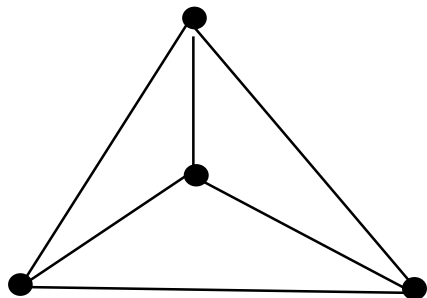
可以给出一些两个图**同构**的**必要条件**！

两个**同构**的图必有(1) 相同的**结点个数**, (2) 相同的**边数**,
和 (3) 相同的**结点度数**, 并且:

- 1) 双射 f **保持**结点之间的邻接关系,
- 2) 双射 g **保持**边之间的邻接关系。

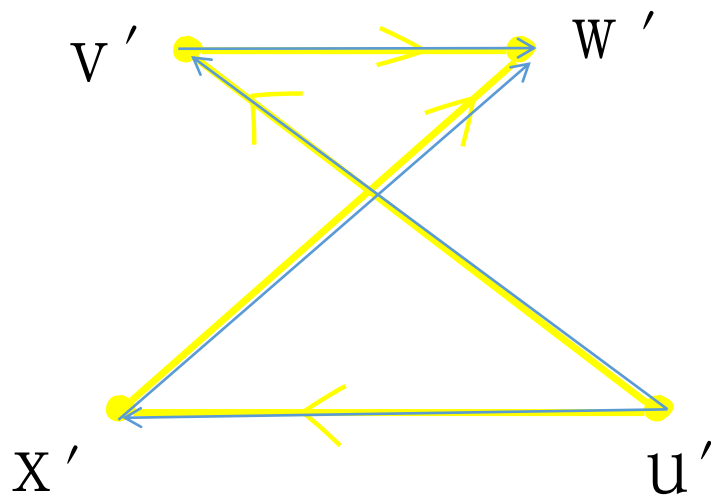
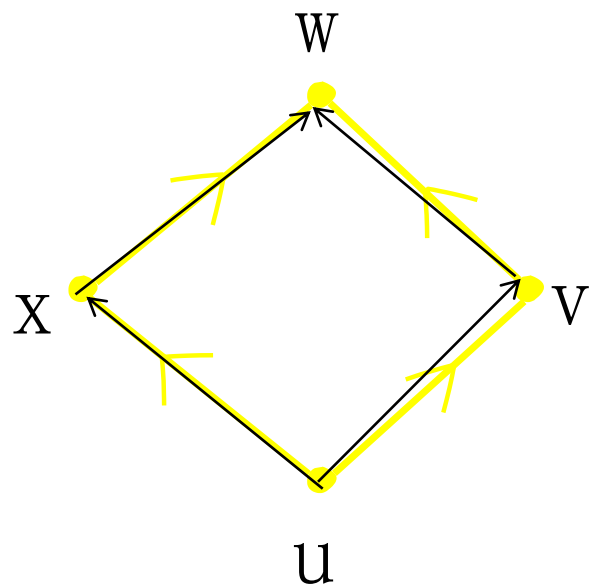
问题：以下图是否同构？

- 三个无向图



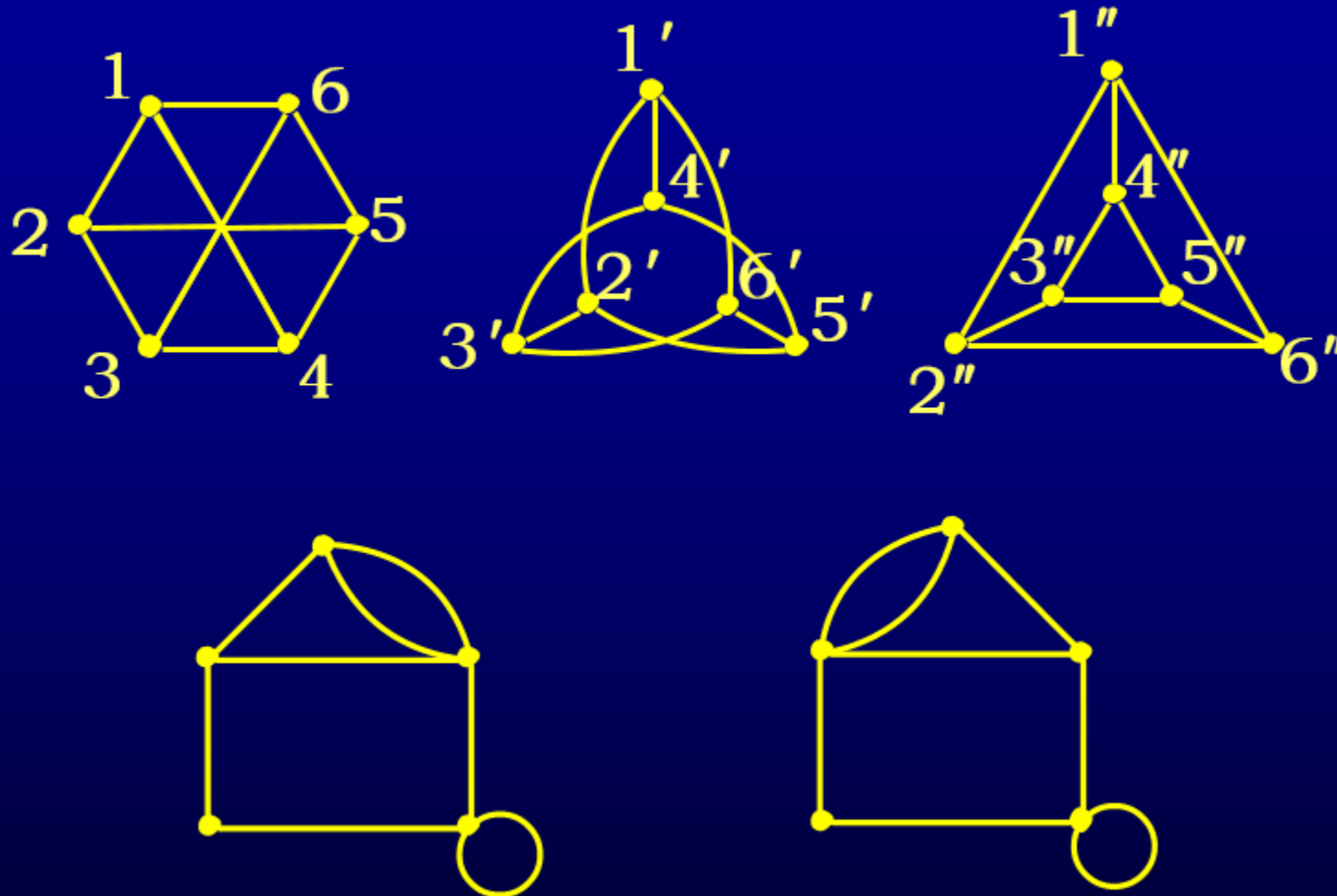
问题：以下图是否同构？

- 两个有向图



同构的有向图

判断下图是否同构？



扩展：图同态（homomorphism）

设图 $G = \langle V, E, \Psi \rangle$ 和 $G' = \langle V', E', \Psi' \rangle$ 。

如果存在 $f: V \rightarrow V'$ 和 $g: E \rightarrow E'$ ，使得

对于任意 $e \in E$ 及 $v_1, v_2 \in V$ 都有：

$$\Psi'(g(e)) = \begin{cases} \{f(v_1), f(v_2)\}, & \text{若 } \Psi(e) = \{v_1, v_2\} \\ \langle f(v_1), f(v_2) \rangle, & \text{若 } \Psi(e) = \langle v_1, v_2 \rangle \end{cases}$$

则称 G 与 G' **同态**，记做 $G \rightarrow G'$ 。

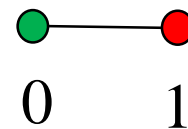
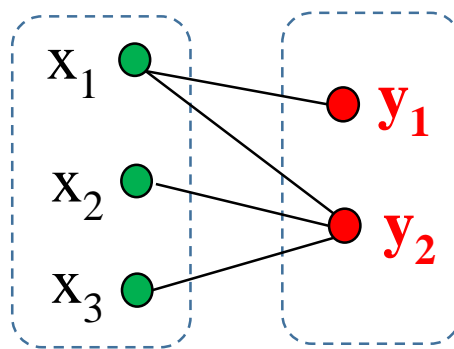


图 论

总结：图的类型

Type	Edges	Multiple Edges Allowed ?	Loops Allowed ?
Simple Graph	undirected	No	No
Multigraph	undirected	Yes	No
Pseudograph	undirected	Yes	Yes
Directed Graph	directed	No	Yes
Directed Multigraph	directed	Yes	Yes

小结

- 图的基本概念:

- 有向图, 无向图, 有限图, 自环, 平行弧, (边), 多重图, 简单图, 带权图, 图的同构

- 图的基本结构是指图的顶点之间, 弧(或边)之间及弧(或边)与顶点之间的连接关系。

- 主要内容有: 顶点之间的邻接, 顶点与边(弧)的关联, 边(弧)的相邻, 顶点的次数, 孤立点, 平凡图, 零图, (n,m) 图的性质定理, 正则图, 完全图。

作业

- 习题7.1

- 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11。

图案Pattern

- 节点从1-5的连接图有多少种？（不存在孤立点）

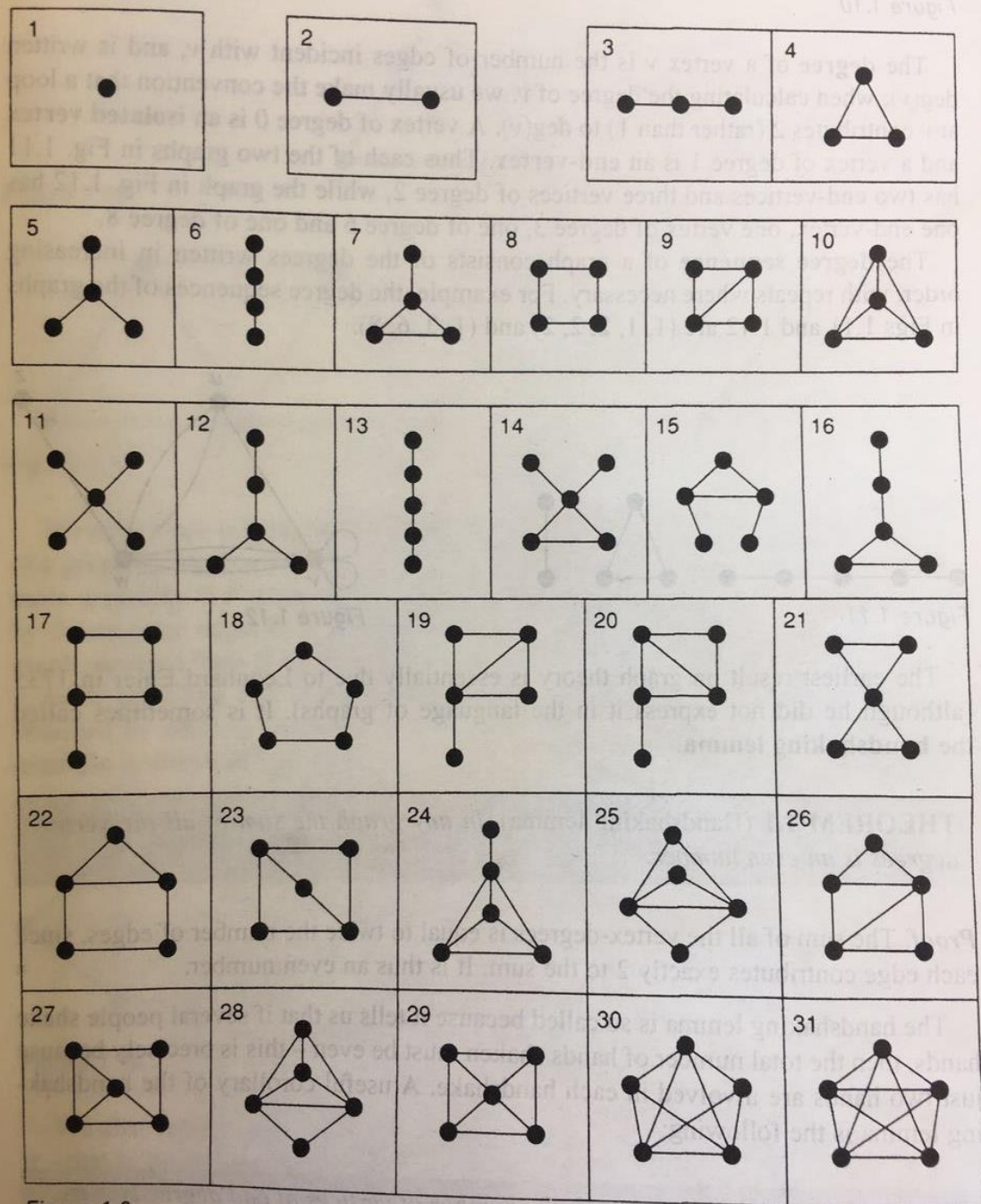


Figure 1.9

数据结构和图的一些可视化学习资料

- 旧金山大学数据结构和算法的可视化学习工具
 - <https://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/Algorithms.html>
- VisuAlgo: 通过动画学习算法和数据结构
 - <https://visualgo.net/en>
- Algomation: 查看、创建和分享算法的学习平台
 - <http://www.algomation.com>
- Algorithm Visualizer
 - <http://algorithm-visualizer.org>

课堂练习

1. 画出图 $G = \langle V, E, \Psi \rangle$ 的图示, 指出其中哪些图是简单图。

a) $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$$

$$\Psi = \{ \langle e_1, \{v_2\} \rangle, \langle e_2, \{v_2, v_4\} \rangle, \langle e_3, \{v_1, v_2\} \rangle, \langle e_4, \{v_1, v_3\} \rangle, \langle e_5, \{v_1, v_3\} \rangle, \langle e_6, \{v_3, v_4\} \rangle, \langle e_7, \{v_4, v_5\} \rangle \}$$

b) $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$$

$$\Psi = \{ \langle e_1, \langle v_1, v_3 \rangle \rangle, \langle e_2, \langle v_1, v_4 \rangle \rangle, \langle e_3, \langle v_4, v_1 \rangle \rangle, \langle e_4, \langle v_1, v_2 \rangle \rangle, \langle e_5, \langle v_2, v_2 \rangle \rangle, \langle e_6, \langle v_3, v_4 \rangle \rangle, \langle e_7, \langle v_5, v_4 \rangle \rangle, \langle e_8, \langle v_5, v_3 \rangle \rangle, \langle e_9, \langle v_5, v_3 \rangle \rangle, \langle e_{10}, \langle v_5, v_3 \rangle \rangle \}$$

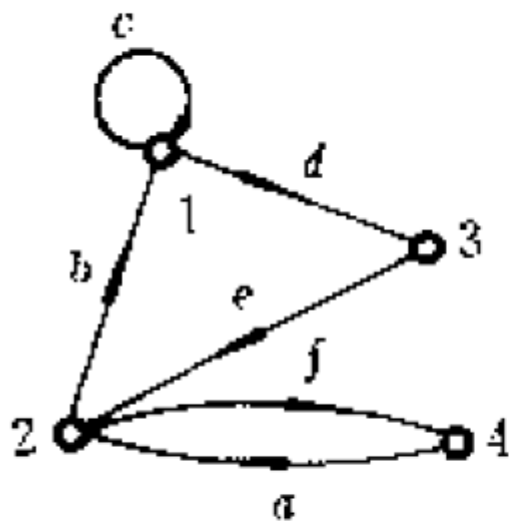
c) $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}\}$$

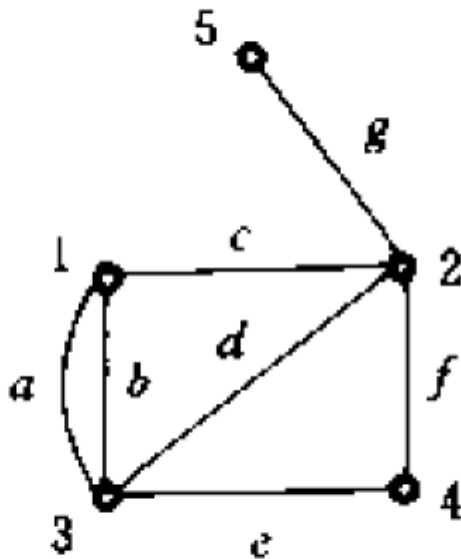
$$\Psi = \{ \langle e_1, \langle v_2, v_1 \rangle \rangle, \langle e_2, \langle v_1, v_2 \rangle \rangle, \langle e_3, \langle v_1, v_3 \rangle \rangle, \langle e_4, \langle v_2, v_4 \rangle \rangle, \langle e_5, \langle v_3, v_4 \rangle \rangle, \langle e_6, \langle v_4, v_5 \rangle \rangle, \langle e_7, \langle v_5, v_3 \rangle \rangle, \langle e_8, \langle v_3, v_5 \rangle \rangle, \langle e_9, \langle v_6, v_7 \rangle \rangle, \langle e_{10}, \langle v_7, v_8 \rangle \rangle, \langle e_{11}, \langle v_8, v_6 \rangle \rangle \}$$

课堂练习

- 抽象数学定义？



(a)



(b)

