2 关系的运算——求逆

定义12 (逆关系) 将关系R中每个有序偶的第一元和第二元对换所得到的关系，称为R的逆关系，记作R^{-1}，

$$R^{-1}=\{<x, y> \mid <y, x> \in R\}。$$

例：$R=\{<a,1>,<a,3>,<b,1>,<b,2>,<c,1>\}$

$R^{-1}=\{<1,a>,<3,a>,<1,b>,<2,b>,<1,c>\}$

显然，$dom(R^{-1})=ran(R)$，$ran(R^{-1})=dom(R)$。

例：设集合A={a, b, c}上的二元关系R为

R={<a, a>, <a, c>, <b, a>, <b, b>, <c, a>, <c, b>}。

试给出R与R^{-1}的关系图与关系矩阵。

定理: 设A,B为非空有限集合，R为从A到B的二元关系。

(1) $\mathbf{M_{R^{-1}}=M_R^T}$（转置）

(2) 把$\mathbf{G_R}$的每个有向边反向后, 得到$\mathbf{R^{-1}}$的关系图$\boldsymbol{G_{R^{-1}}}$

定理：若R，$R_i(i=0, 1, 2, \ldots)$都是从集合A到集合B的二元关系，K为N的非空子集，则有

(1) $(R^{-1})^{-1}=R$;

(2) $(\sim R)^{-1}= \sim(R^{-1})$;

(3) 如果$R_1 \subseteq R_2$, 则$R_1^{-1} \subseteq R_2^{-1}$;

(4) 如果$R_1 = R_2$, 则$R_1^{-1} = R_2^{-1}$;

(5) $(\bigcup_{n\in K} R_n)^{-1}=\bigcup_{n\in K}(R_n^{-1})$;

(6) $(\bigcap_{n\in K} R_n)^{-1}=\bigcap_{n\in K}(R_n^{-1})$;

(7) $(R_1-R_2)^{-1}=R_1^{-1}-R_2^{-1}$;

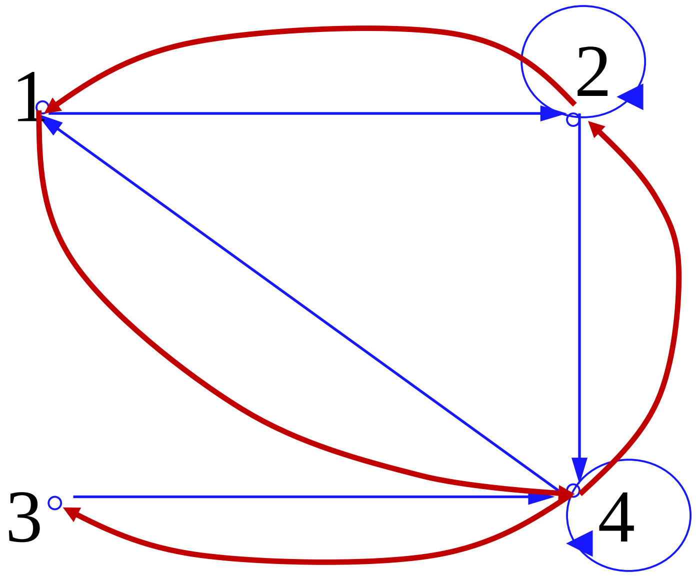
(8) $(R_1\oplus R_2)^{-1}=R_1^{-1}\oplus R_2^{-1}$。

定理: 设R为集合A上的二元关系。则

R是自反的（反自反、对称、反对称、传递）当且仅当

R^{-1}是自反的（反自反、对称、反对称、传递）

定理: 集合A上的二元关系 R是对称的当且仅当$R=R^{-1}$。



例：设R为非空有限集A上的二元关系。如果R是反对称的，则$R\cap R^{-1}$的关系矩阵$M_{R\cap R^{-1}}$最多能有多少个元素为1？

解：由于R是反对称的，则对任意的$x, y \in A$, $x\neq y$, 有

(1) 若$<x, x> \in R$, 则$<x, x> \in R^{-1}$，因此；$<x, x> \in R \cap R^{-1}$。

(2) 若$<x, y> \in R$, 则$<y, x> \notin R$, 因此$<x, y> \notin R^{-1}$，所以

$<x, y> \notin R \cap R^{-1}$。

因此，$R\cap R^{-1} \subseteq I_A$，得$|R\cap R^{-1}| \leq |A|$。

显然I_A是反对称的，且$I_A\cap I_A^{-1}= I_A$,所以 $M_{R\cap R^{-1}}$最多能有$|A|$个元素为1。

例: 若R为集合A上的二元关系，试证

(1) $R\cup R^{-1}$是A上的包含R的最小对称关系;

(2) $R\cap R^{-1}$为A上的包含在R中的最大对称关系。

证: (1) 分析:

(a) $R\cup R^{-1}$包含R;

(b) $R\cup R^{-1}$是对称的;

(c) $R\cup R^{-1}$是满足以上两个条件的最小的关系。

- ✓ 设R_1为任意的A上包含R的对称关系，则

$$R\cup R^{-1}\subseteq R_1$$

例: 若R为集合A上的二元关系，试证

(1) $R\cup R^{-1}$是A上的包含R的最小对称关系;

证: (1) 显然，(a) $R\cup R^{-1}$包含R。

(b) 对于任意$<a, b>\in R\cup R^{-1}$, 若$<a, b>\in R$, 则$<b, a>\in R^{-1}$; 若$<a, b>\in R^{-1}$, 则$<b, a>\in R$。因此，$<b, a>\in R\cup R^{-1}$。所以，$R\cup R^{-1}$为A上的对称关系。

(c) 设R_1为任意的A上包含R的对称关系, 则对于任意$<a, b>\in R\cup R^{-1}$, 若$<a, b>\in R$, 由R_1包含R得$<a, b>\in R_1$;

若$<a, b>\in R^{-1}$, 则$<b, a>\in R$, 由R_1包含R得$<b, a>\in R_1$。

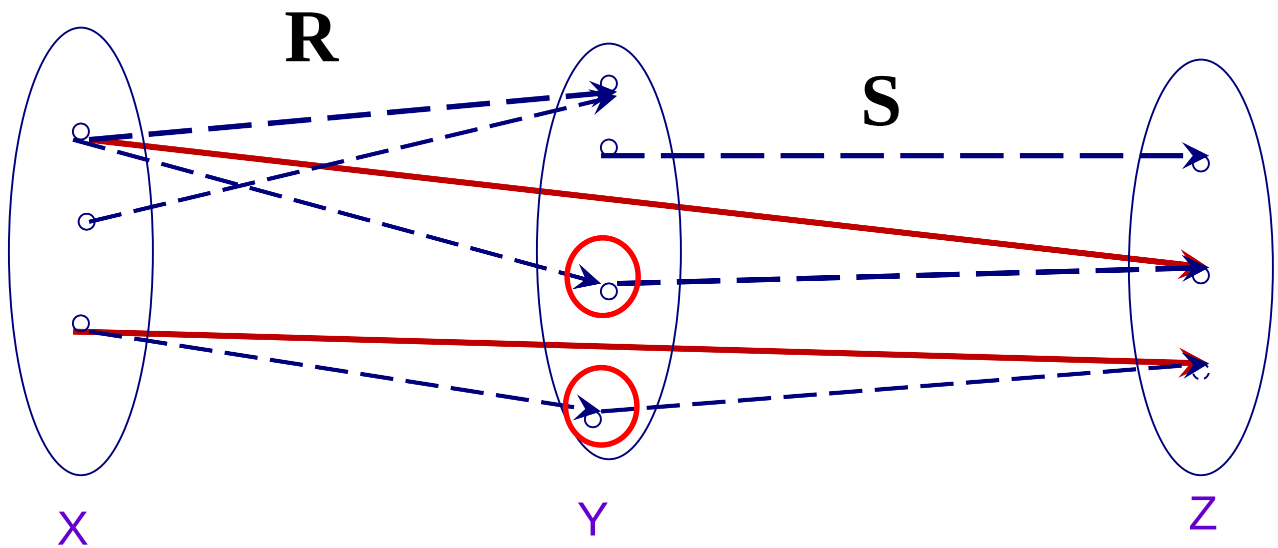
又因为R_1对称，所以$<a, b>\in R_1$。

因此，总有$<a, b>\in R_1$。所以，$R\cup R^{-1}\subseteq R_1$。

综上所述，$R\cup R^{-1}$为A上包含R的最小对称关系。

2 关系的运算——合成

定义12 (合成) 设 **R** 是 **X 到 Y** 的关系， **S** 是**Y到Z** 的关系，则**R ∘ S ＝{<x, z>|∃ y ∈ Y 使得x Ry ∧ ySz) }** 为 **X 到 Z** 的关系，称为 **R** 和 **S** 的合成。



R · S

显然，**dom (R·S) ⊆ dom(R)**，**ran(R·S) ⊆ ran(S)**。

例: 设 $R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,4\rangle\}$,

$S=\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,5\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 4,2\rangle\}$

求: $R\circ S$, $S\circ R$, $(R\circ S)\circ R$, $R\circ(S\circ R)$, $R\circ R$ 。

解: $R\circ S = \{\langle 1,5\rangle, \langle 2,5\rangle, \langle 3,2\rangle\}$

$S\circ R = \{\langle 1,4\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 4,2\rangle\}$

关系的复合运算不满足交换律

$R\circ R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,2\rangle\}$

$(R\circ S)\circ R = \{\langle 3,2\rangle\}$

$R\circ(S\circ R) = \{\langle 3,2\rangle\}$

可证：关系的复合运算满足结合律。

例: 设 R 和 S 是整数集合 I上的两个关系,

$$R=\{\langle x, 2x\rangle \mid x\in I\},$$

$$S=\{\langle x, 7x\rangle \mid x\in I\}$$

试求 $R\circ S$, $R\circ R$, $R\circ R\circ R$ 和 $R\circ S\circ R$ 。

解: $R\circ S=\{\langle x, 14x\rangle \mid x\in I\}$

$R\circ R=\{\langle x, 4x\rangle \mid x\in I\}$

$R\circ R\circ R=\{\langle x, 8x\rangle \mid x\in I\}$

$R\circ S\circ R=\{\langle x, 28x\rangle \mid x\in I\}$

关系复合的性质

定理：设A, B, C和D为任意四个集合，二元关系

$R_1 \subseteq A\times B$, $R_2, R_3 \subseteq B\times C$，$R_4 \subseteq C\times D$：

1) 若 $R_2 \subseteq R_3$，则 $R_1 \circ R_2 \subseteq R_1 \circ R_3$ 且 $R_2 \circ R_4 \subseteq R_3 \circ R_4$;
2) $R_1 \circ (R_2 \cup R_3) = (R_1 \circ R_2) \cup (R_1 \circ R_3)$;
3) $(R_2 \cup R_3) \circ R_4 = (R_2 \circ R_4) \cup (R_3 \circ R_4)$;
4) $R_1 \circ (R_2 \cap R_3) \subseteq (R_1 \circ R_2) \cap (R_1 \circ R_3)$;
5) $(R_2 \cap R_3) \circ R_4 \subseteq (R_2 \circ R_4) \cap (R_3 \circ R_4)$;
6) $(R_1 \circ R_2)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$;
7) $(R_1 \circ R_2) \circ R_4 = R_1 \circ (R_2 \circ R_4)$。

定理：设A, B, C和D为任意四个集合，二元关系

$R_1 \subseteq A\times B$, $R_2, R_3 \subseteq B\times C$，$R_4 \subseteq C\times D$:

1) 若 $R_2 \subseteq R_3$，则 $R_1\circ R_2 \subseteq R_1\circ R_3$ 且 $R_2\circ R_4 \subseteq R_3\circ R_4$;

证：对任意$<x, z> \in R_1\circ R_2$, 存在$y \in B$, 使得$<x, y> \in R_1$

且 $<y, z> \in R_2$。

由于$R_2 \subseteq R_3$, 得$<y, z> \in R_3$,

因此 $<x, z> \in R_1\circ R_3$ 。

所以$R_1\circ R_2 \subseteq R_1\circ R_3$ 。

同理可证$R_2\circ R_4 \subseteq R_3\circ R_4$。

定理：设A, B, C和D为任意四个集合，二元关系

$R_1 \subseteq A\times B$, $R_2, R_3 \subseteq B\times C$，$R_4 \subseteq C\times D$:

4) $R_1\circ (R_2\cap R_3) \subseteq (R_1\circ R_2) \cap (R_1\circ R_3)$;

证: 对任意$<x, z> \in R_1\circ (R_2\cap R_3)$, 则存在$y \in B$，使得

$<x, y> \in R_1$, $<y, z> \in R_2\cap R_3$,

从而$<y, z> \in R_2$且$<y, z> \in R_3$。

因此$<x, z> \in R_1\circ R_2$，$<x, z> \in R_1\circ R_3$，得

$<x, z> \in (R_1\circ R_2) \cap (R_1\circ R_3)$。

从而$R_1\circ (R_2\cap R_3) \subseteq (R_1\circ R_2) \cap (R_1\circ R_3)$。

$(R_1\circ R_2) \cap (R_1\circ R_3) \subseteq R_1\circ (R_2\cap R_3)$ 是否成立？

$R_1=\{<1, 2>, <1, 3>\}$, $R_2=\{<2, 4>\}$, $R3=\{<3, 4>\}$

定理：设A, B, C和D为任意四个集合，二元关系

$R_1 \subseteq A\times B$, R_2, $R_3 \subseteq B\times C$，$R_4 \subseteq C\times D$:

(6) $(R_1\circ R_2)^{-1} = R_2^{-1}\circ R_1^{-1}$

证: (6) 对于任意<z, x>，

$$<z, x> \in (R_1\cdot R_2)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow <x, z> \in R_1\cdot R_2$$

$$\Leftrightarrow \exists y\,(<x, y> \in R_1 \wedge <y, z> \in R_2)$$

$$\Leftrightarrow \exists y\,(<y, x> \in R_1^{-1} \wedge <z, y> \in R_2^{-1})$$

$$\Leftrightarrow <z, x> \in R_2^{-1}\cdot R_1^{-1}$$

因此，$(R_1\cdot R_2)^{-1} = R_2^{-1}\cdot R_1^{-1}$。

定理：设A, B, C和D为任意四个集合，二元关系

$R_1 \subseteq A\times B$, R_2, $R_3 \subseteq B\times C$，$R_4 \subseteq C\times D$:

(7) $(R_1 \circ R_2) \circ R_4 = R_1 \circ (R_2 \circ R_4)$。

证：(7) 对任意$\langle x, w\rangle$:

$\langle x, w\rangle \in (R_1 \circ R_2) \circ R_3$

$\Leftrightarrow \exists z \in C\,(\langle x, z\rangle \in R_1 \circ R_2 \wedge \langle z, w\rangle \in R_3)$

$\Leftrightarrow \exists z \in C\,(\exists y \in B\,(\langle x, y\rangle \in R_1 \wedge \langle y, z\rangle \in R_2) \wedge \langle z, w\rangle \in R_3)$

$\Leftrightarrow \exists y \in B(\langle x, y\rangle \in R_1 \wedge \exists z \in C\,(\langle y, z\rangle \in R_2 \wedge \langle z, w\rangle \in R_3))$

$\Leftrightarrow \exists y \in B(\langle x, y\rangle \in R_1 \wedge \langle y, w\rangle \in R_2 \circ R_3)$

$\Leftrightarrow \langle x, w\rangle \in R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$

故 $(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$。

定义13. 设 R 是集合 A 上的关系，n 是自然数，R 的 n 次幂 R^n 定义如下：

(1) R^0 是集合A上的恒等关系 I_A，即 $R^0 = I_A$；

(2) $R^{n+1} = R^n \circ R$ 。

显然，$R^1 = R^0 \circ R = I_A \circ R = R$

定理 若n, m ∈N且R为集合A上的二元关系，则

(1) $(R^n)^{-1}=(R^{-1})^n$;

(2) $R^n \circ R^m=R^{n+m}$;

(3) $(R^m)^n=R^{mn}$

对n进行数学归纳

定理. 设有限集A恰有n个元素。若R为A上的二元关系，则有s, t ∈ N, 使$s<t\leq 2^{n^2}$且$R^s=R^t$ 。

证：因为A恰有n个元素，因此A上的二元关系最多有2^{n^2}个。

所以在以下的$2^{n^2}+1$个关系

$$R^0, R^1, \ldots, R^{2^{n^2}}$$

中必有两个是相同的，所以必有s, t ∈ N, 使$s<t\leq 2^{n^2}$且$R^s=R^t$

例: 若R为任意集合A上的空关系或全关系，试证 $R^2=R$

例：设R_1和R_2都是集合A上的二元关系。判断以下命题是否成立，给出证明或反例。

(1) 如果R_1和R_2都是自反的，则$R_1 \circ R_2$也是自反的；

(2) 如果R_1和R_2都是反自反的，则$R_1 \circ R_2$也是反自反的；

(3) 如果R_1和R_2都是对称的，则$R_1 \circ R_2$也是对称的；

(4) 如果R_1和R_2都是反对称的，则$R_1 \circ R_2$也是反对称的；

(5) 如果R_1和R_2都是传递的，则$R_1 \circ R_2$也是传递的。

解: (1) 成立。因为R_1和R_2都是自反的, 则对任意的

$x \in A$, $<x, x> \in R_1$且$<x, x> \in R_2$, 得$<x, x> \in R_1 \circ R_2$。

所以$R_1 \circ R_2$也是自反的。

例：设R_1和R_2都是集合A上的二元关系。判断以下命题是否成立，给出证明或反例。

(2) 如果R_1和R_2都是反自反的，则$R_1 \circ R_2$也是反自反的；

(3) 如果R_1和R_2都是对称的，则$R_1 \circ R_2$也是对称的；

(4) 如果R_1和R_2都是反对称的，则$R_1 \circ R_2$也是反对称的；

(5) 如果R_1和R_2都是传递的，则$R_1 \circ R_2$也是传递的。

解: (3) 不成立。

反例： $A=\{1, 2, 3\}$, $R_1=\{<1, 2>, <2, 1>\}$, $R_2=\{<2, 3>, <3, 2>\}$是对称的, 但$R_1 \circ R_2=\{<1, 3>\}$ 不是对称的

例：设R_1和R_2都是集合A上的二元关系。判断以下命题是否成立，给出证明或反例。

(2) 如果R_1和R_2都是反自反的，则$R_1 \circ R_2$也是反自反的；

(3) 如果R_1和R_2都是对称的，则$R_1 \circ R_2$也是对称的；

(4) 如果R_1和R_2都是反对称的，则$R_1 \circ R_2$也是反对称的；

(5) 如果R_1和R_2都是传递的，则$R_1 \circ R_2$也是传递的。

解 (5) 不成立。反例:

$R_1=\{<1, 2>, <3, 1>, <3, 2>\}$, $R_2 = \{<2, 3>, <1, 1>\}$是传递的，但 $R_1 \circ R_2 = \{<1, 3>, <3, 1>, <3, 3>\}$不是传递的。