2 关系的运算

重点：

- **作为集合时的运算**
- **关系的逆、合成运算**
- **自反闭包、对称闭包、传递闭包**
- **关系运算是否保持五大性质**

2 关系的运算——集合运算

定义11 设R和S是从集合A到B的关系，取全集为A×B，则 $R\cap S$，$R\cup S$，$R-S$，$\sim R$，$R\oplus S$ 仍是A到B的关系，并且对于任意 $x\in A$，$y\in B$:

$$x\,(R\cap S)\,y \Leftrightarrow x\,R\,y \wedge x\,S\,y$$

$$x\,(R\cup S)\,y \Leftrightarrow x\,R\,y \vee x\,S\,y$$

$$x\,(R-S)\,y \Leftrightarrow x\,R\,y \wedge x\,\bar{S}\,y$$

$$x\,(\sim R)\,y \Leftrightarrow x\,\bar{R}\,y$$

$$x\,(R\oplus S)\,y \Leftrightarrow x\,(R-S)\,y \vee x\,(S-R)\,y$$

$$\Leftrightarrow (x\,R\,y \wedge x\,\bar{S}\,y) \vee (x\,S\,y \wedge x\,\bar{R}\,y)$$

例：设 R 和 S 是集合 $A=\{1, 2, 3, 4\}$上的关系，

$R=\{<x, y>\mid x-y$ 是 2 的非零整倍数 $\}$

$S=\{<x, y>\mid x-y$ 是 3 的非零整倍数 $\}$

求：$R\cap S$，$R\cup S$，$R-S$和$\sim R$。

解：$R=\{<1, 3>,<3, 1>,<2, 4>,<4, 2>\}$,

$S=\{<1, 4>,<4, 1>\}$。

集合运算

则 $R\cap S=\varnothing$,

$R\cup S=\{<1, 3>, <3, 1>,<2, 4>,<4, 2>,<1, 4>,<4, 1>\}$,

$R-S=\{<1, 3>,<3, 1>,<2, 4>,<4, 2>\}$

$\sim R=\{<1, 1>,<1, 2>,<1, 4>,<2, 1>,<2, 2>,<2, 3>,$
$<3, 2>, <3, 3>,<3, 4>,<4, 1>,<4, 3>,<4, 4>\}$.

$R\cap S=\{<x, y>\mid x-y$是 6 的非零整倍数 $\}$

$R\cup S=\{<x, y>\mid x-y$是 2的非零整倍数或$x-y$是 3的非零整倍数$\}$

$R-S=\{<x, y>\mid x-y$是 2的非零整倍数，但不是 3的非零整倍数$\}$

$\sim R=\{<x, y>\mid x-y$不是 2 的非零整倍数 $\}$

例: 设R_1和R_2是从集合A到集合B的二元关系。证明

(1) $dom(R_1 \cup R_2) = dom(R_1) \cup dom(R_2)$

(2) $ran(R_1 \cap R_2) \subseteq ran(R_1) \cap ran(R_2)$

解: (1) 对任意的 $x \in dom(R_1 \cup R_2)$, 存在$y \in ran(R_1 \cup R_2)$, 使得$<x, y> \in R_1 \cup R_2$。

(a) 若$<x, y> \in R_1$, 则$x \in dom(R_1)$;

(b) 若$<x, y> \in R_2$, 则$x \in dom(R_2)$。

因此，$x \in dom(R_1) \cup dom(R_2)$，从而 $dom(R_1 \cup R_2) \subseteq dom(R_1) \cup dom(R_2)$。

对任意的$x \in dom(R_1) \cup dom(R_2)$,

(a) 若$x \in dom(R_1)$，则存在$y \in ran(R_1)$，有$<x, y> \in R_1$,得$<x, y> \in R_1 \cup R_2$，从而$x \in dom(R_1 \cup R_2)$。

(b) 同理可证，若$x \in dom(R_2)$，必有$x \in dom(R_1 \cup R_2)$。因此$dom(R_1) \cup dom(R_2) \subseteq dom(R_1 \cup R_2)$。

综上所述，$dom(R_1 \cup R_2) = dom(R_1) \cup dom(R_2)$。

例: 设R_1和R_2是从集合A到集合B的二元关系。证明

(1) $dom(R_1 \cup R_2) = dom(R_1) \cup dom(R_2)$

(2) $ran(R_1 \cap R_2) \subseteq ran(R_1) \cap ran(R_2)$

解: (2) 略

问题: $ran(R_1 \cap R_2) = ran(R_1) \cap ran(R_2)$?

例: $A=B=\{1, 2, 3\}$,

$R_1=\{<1, 2>, <2, 3>\}$, $R_2=\{<1, 2>, <1, 3>\}$,

$R_1 \cap R_2=\{<1, 2>\}$,

$ran(R_1 \cap R_2)=\{2\}$, $ran(R_1) \cap ran(R_2)=\{2,3\}$

例：若R和S都是非空集X上的自反(反自反、对称、反对称、传递)关系, 判断 R∩S, R∪S, R－S, ～R, R⊕S是否是自反 (反自反、对称、反对称、传递)的。

R, S	R∩S	R∪S	R－S	R ⊕ S	～R
自反	√	√			
反自反	√	√	√	√	
对称	√	√	√	√	√
反对称	√		√		
传递	√				

2 关系的运算——求逆

定义12 (逆关系) 将关系R中每个有序偶的**第一元和第二元对换**所得到的关系，称为R的逆关系，记作R^{-1}，

$$R^{-1} = \{<x, y> \mid <y, x> \in R\}。$$

例：$R = \{<a, 1>, <a, 3>, <b, 1>, <b, 2>, <c, 1>\}$

$R^{-1} = \{<1, a>, <3, a>, <1, b>, <2, b>, <1, c>\}$

显然，$dom(R^{-1}) = ran(R)$，$ran(R^{-1}) = dom(R)$。

定理: 设A,B为非空有限集合， R为从A到B的二元关系。

(1) $M_{R^{-1}}=M_R^T$（转置）

(2) 把G_R的每个有向边反向后, 得到R^{-1}的关系图$G_{R^{-1}}$

例：设集合A={a, b, c}上的二元关系R为

R={<a, a>, <a, c>, <b, a>, <b, b>, <c, a>, <c, b>}。

试给出R与R^{-1}的关系图与关系矩阵。

定理：若R，R_i(i=0，1，2，…)都是从集合A到集合B的二元关系，K为N的非空子集，则有

(1) $(R^{-1})^{-1}=R$;

(2) $(\sim R)^{-1}=\sim(R^{-1})$;

(3) 如果$R_1 \subseteq R_2$, 则$R_1^{-1} \subseteq R_2^{-1}$;

(4) 如果$R_1 = R_2$, 则$R_1^{-1} = R_2^{-1}$;

(5) $(\bigcup_{n\in K} R_n)^{-1}=\bigcup_{n\in K}(R_n^{-1})$;

(6) $(\bigcap_{n\in K} R_n)^{-1}=\bigcap_{n\in K}(R_n^{-1})$;

(7) $(R_1-R_2)^{-1}=R_1^{-1}-R_2^{-1}$;

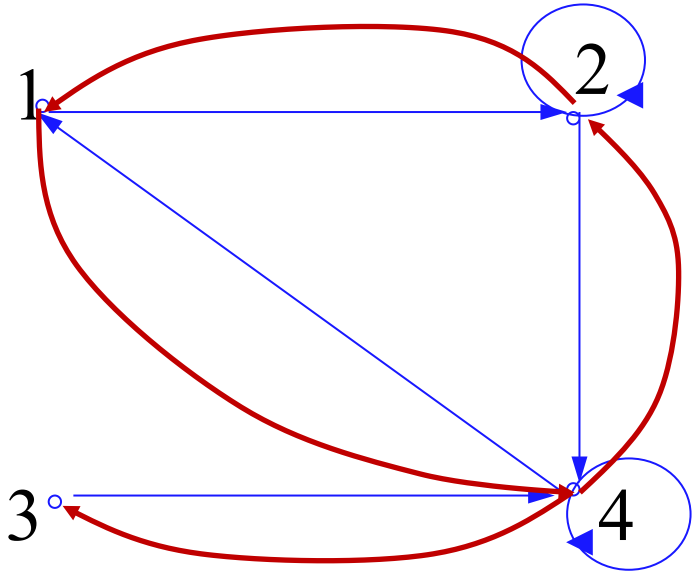
(8) $(R_1\oplus R_2)^{-1}=R_1^{-1}\oplus R_2^{-1}$。

定理: 设R为集合A上的二元关系。则

R是自反的（反自反、对称、反对称、传递）当且仅当 R^{-1}是自反的（反自反、对称、反对称、传递）

逆运算保持关系的五个性质

定理: 集合A上的二元关系 R是对称的当且仅当$R=R^{-1}$。



例：设R为非空有限集A上的二元关系。如果R是反对称的，则$R\cap R^{-1}$的关系矩阵$M_{R\cap R^{-1}}$最多能有多少个元素为 1？

解：由于R是反对称的，则对任意的$x, y \in A$, $x\neq y$, 有若$\langle x, y\rangle \in R$, 则$\langle y, x\rangle \notin R$, 因此$\langle x, y\rangle \notin R^{-1}$，所以$\langle x, y\rangle \notin R \cap R^{-1}$。

若$\langle x, x\rangle \in R$, 则$\langle x, x\rangle \in R^{-1}$，因此; $\langle x, x\rangle \in R \cap R^{-1}$。

因此，$R\cap R^{-1} \subseteq I_A$，得$|R\cap R^{-1}| \leq | I_A | = |A|$。

显然I_A是反对称的，且$I_A\cap I_A^{-1}= I_A$，所以 $M_{R\cap R^{-1}}$最多能有$|A|$个元素为1。

例: 若R为集合A上的二元关系，试证

(1) $R\cup R^{-1}$是A上的包含R的最小对称关系;

(2) $R\cap R^{-1}$为A上的包含在R中的最大对称关系。

$$\boxed{R\cap R^{-1} \subseteq R \subseteq R\cup R^{-1}}$$

证: (1) 分析:

(a) $R \subseteq R\cup R^{-1}$;

(b) $R\cup R^{-1}$是对称的;

(c) $R\cup R^{-1}$是满足以上两个条件的最小的关系。

✓ 设R_1为任意的A上包含R的对称关系，则

$$R\cup R^{-1} \subseteq R_1$$

例: 若R为集合A上的二元关系，试证

(1) $R\cup R^{-1}$是A上的包含R的最小对称关系;

证: (1) (a)显然， $R \subseteq R\cup R^{-1}$ 。

(b) 对于任意$\langle a, b\rangle \in R\cup R^{-1}$,

若$\langle a, b\rangle \in R$, 则$\langle b, a\rangle \in R^{-1}$;若$\langle a, b\rangle \in R^{-1}$, 则$\langle b, a\rangle \in R$。

因此，$\langle b, a\rangle \in R\cup R^{-1}$。所以，$R\cup R^{-1}$为A上的对称关系。

(c) 设R_1为任意的A上包含R的对称关系,

则对于任意$\langle a, b\rangle \in R\cup R^{-1}$,

(i) 若$\langle a, b\rangle \in R$, 由$R \subseteq R_1$ 得 $\langle a, b\rangle \in R_1$;

(ii) 若$\langle a, b\rangle \in R^{-1}$, 则$\langle b, a\rangle \in R$, 由$R \subseteq R_1$得$\langle b, a\rangle \in R_1$。

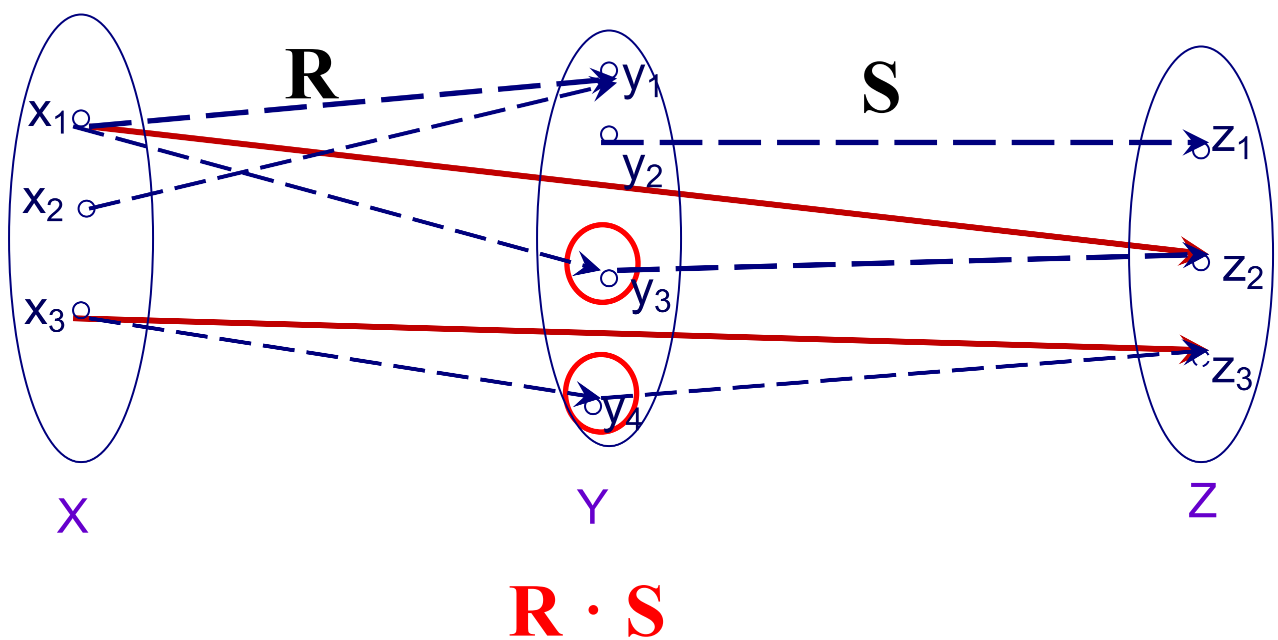
又因为R_1对称，所以$\langle a, b\rangle \in R_1$。

因此，总有$\langle a, b\rangle \in R_1$。所以，$R\cup R^{-1} \subseteq R_1$。

综上所述，$R\cup R^{-1}$为A上包含R的最小对称关系。

2 关系的运算——合成

定义12 (合成) 设 R 是 X 到 Y 的关系， S 是Y到Z 的关系，则 $R \circ S = \{\langle x, z\rangle \mid \exists\, y \in Y$ 使得 $x\,R\,y \wedge y\,S\,z)\}$ 为 X 到 Z 的关系，称为 R 和 S 的合成。



显然， $dom(R \circ S) \subseteq dom(R)$， $ran(R \circ S) \subseteq ran(S)$。

例：设 $R=\{<1,2>,<2,2>,<3,4>\}$,

$S=\{<1,3>,<2,5>,<3,1>,<4,2>\}$

求：$R\circ S$， $S\circ R$， $(R\circ S)\circ R$， $R\circ(S\circ R)$， $R\circ R$。

解：$R\circ S=\{<1,5>,<2,5>,<3,2>\}$

$S\circ R=\{<1,4>,<3,2>,<4,2>\}$

关系的合成运算不满足交换律

$R\circ R=\{<1,2>,<2,2>\}$

$(R\circ S)\circ R=\{<3,2>\}$

$R\circ(S\circ R)=\{<3,2>\}$

可证：关系的合成运算满足结合律。

例: 设 R 和 S 是整数集合 I上的两个关系，

$$R=\{\langle x, 2x\rangle \mid x\in I\},$$

$$S=\{\langle x, 7x\rangle \mid x\in I\}$$

试求 $R\circ S$，$R\circ R$，$R\circ R\circ R$ 和 $R\circ S\circ R$ 。

解: $R\circ S=\{\langle x, 14x\rangle \mid x\in I\}$

$R\circ R=\{\langle x, 4x\rangle \mid x\in I\}$

$R\circ R\circ R=\{\langle x, 8x\rangle \mid x\in I\}$

$R\circ S\circ R=\{\langle x, 28x\rangle \mid x\in I\}$

例: 若R为任意集合A上的空关系或全关系，试证 $R^2=R$

关系复合的性质

定理：设A, B, C和D为任意四个集合，二元关系

$R_1 \subseteq A\times B$，$R_2, R_3 \subseteq B\times C$，$R_4 \subseteq C\times D$：

1) 若 $R_2 \subseteq R_3$，则 $R_1\circ R_2 \subseteq R_1 \circ R_3$ 且 $R_2 \circ R_4 \subseteq R_3 \circ R_4$；
2) $R_1 \circ (R_2 \cup R_3) = (R_1\circ R_2) \cup (R_1\circ R_3)$；
3) $(R_2 \cup R_3) \circ R_4 = (R_2\circ R_4) \cup (R_3\circ R_4)$；
4) $R_1\circ (R_2 \cap R_3) \subseteq (R_1\circ R_2) \cap (R_1\circ R_3)$；
5) $(R_2 \cap R_3) \circ R_4 \subseteq (R_2\circ R_4) \cap (R_3\circ R_4)$；
6) $(R_1\circ R_2)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$；
7) $(R_1\circ R_2) \circ R_4 = R_1\circ (R_2\circ R_4)$。

定理：设A, B, C和D为任意四个集合，二元关系

$R_1 \subseteq A\times B$，$R_2, R_3 \subseteq B\times C$，$R_4 \subseteq C\times D$：

1) 若 $R_2 \subseteq R_3$，则 $R_1 \circ R_2 \subseteq R_1 \circ R_3$ 且 $R_2 \circ R_4 \subseteq R_3 \circ R_4$；

证：对任意 $<x, z> \in R_1 \circ R_2$，存在 $y \in B$，使得 $<x, y> \in R_1$ 且 $<y, z> \in R_2$。

由于 $R_2 \subseteq R_3$，得 $<y, z> \in R_3$，

因此 $<x, z> \in R_1 \circ R_3$。

所以 $R_1 \circ R_2 \subseteq R_1 \circ R_3$。

同理可证 $R_2 \circ R_4 \subseteq R_3 \circ R_4$。

定理：设A, B, C和D为任意四个集合，二元关系

$R_1 \subseteq A\times B$, $R_2, R_3 \subseteq B\times C$，$R_4 \subseteq C\times D$：

4) $R_1\circ (R_2\cap R_3) \subseteq (R_1\circ R_2) \cap (R_1\circ R_3)$;

证: 对任意$<x, z> \in R_1\circ (R_2\cap R_3)$, 则存在$y \in B$，使得

$<x, y> \in R_1$, $<y, z> \in R_2\cap R_3$,

从而$<y, z> \in R_2$且$<y, z> \in R_3$。

因此$<x, z> \in R_1\circ R_2$，$<x, z> \in R_1\circ R_3$，得

$<x, z> \in (R_1\circ R_2) \cap (R_1\circ R_3)$。

从而$R_1\circ (R_2\cap R_3) \subseteq (R_1\circ R_2) \cap (R_1\circ R_3)$。

$(R_1\circ R_2) \cap (R_1\circ R_3) \subseteq R_1\circ (R_2\cap R_3)$ 是否成立？

$R_1=\{<1, 2>, <1, 3>\}$, $R_2=\{<2, 4>\}$, $R_3=\{<3, 4>\}$

定理：设A, B, C和D为任意四个集合，二元关系

$R_1 \subseteq A\times B$, R_2, $R_3 \subseteq B\times C$，$R_4 \subseteq C\times D$:

(6) $(R_1 \circ R_2)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$

证: (6) 对于任意<z, x>,

$$< z, x > \in (R_1 \cdot R_2)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow <x, z> \in R_1 \cdot R_2$$

$$\Leftrightarrow \exists y\ (<x, y> \in R_1 \wedge <y, z> \in R_2)$$

$$\Leftrightarrow \exists y\ (<y, x> \in R_1^{-1} \wedge <z, y> \in R_2^{-1})$$

$$\Leftrightarrow <z, x> \in R_2^{-1} \cdot R_1^{-1}$$

因此，$(R_1 \circ R_2)^{-1} = R_2^{-1} \cdot R_1^{-1}$。

定理：设A, B, C和D为任意四个集合，二元关系

$R_1 \subseteq A\times B$, R_2, $R_3 \subseteq B\times C$，$R_4 \subseteq C\times D$:

(7) $(R_1\circ R_2)\circ R_4 = R_1\circ(R_2\circ R_4)$。

证：(7) 对任意<x, w>:

$<x, w>\in (R_1\circ R_2)\circ R_3$

$\Leftrightarrow \exists z\in C\ (<x, z>\in R_1\circ R_2 \wedge <z, w>\in R_3)$

$\Leftrightarrow \exists z\in C\ (\exists y\in B\ (<x, y>\in R_1 \wedge <y, z>\in R_2)\wedge <z, w>\in R_3)$

$\Leftrightarrow \exists y\in B(<x, y>\in R_1 \wedge \exists z\in C\ (<y, z>\in R_2\wedge <z, w>\in R_3))$

$\Leftrightarrow \exists y\in B(<x, y>\in R_1 \wedge <y, w>\in R_2\circ R_3)$

$\Leftrightarrow <x, w>\in R_1\circ(R_2\circ R_3)$

故 $(R_1\circ R_2)\circ R_3 = R_1\circ(R_2\circ R_3)$。