第四章自然数和基数

4.1 自然数及数学归纳法

4.2 基数

定理: 若A, B为二集合，则 $\#(B) \le \#(A)$ 当且仅当存在从 A 到 B 的满射。

证明: (充分性) 设 $f:A\to B$ 为满射，则 f 有右逆 $g: B\to A$ 使得 $f\circ g = I_B$。

又因为 I_B 是单射，所以 g 是单射，故 $\#(B) \le \#(A)$ 。

(必要性) 若 $\#(B) \le \#(A)$，则有单射 $g : B\to A$，因此g 有左逆 $f : A\to B$, 使得 $f\circ g = I_B$ 。

又因为 I_B 是 满射， 所以 f 是满射。

- 问题：若A, B为二集合，如何证明 $\#(A) = \#(B)$?

例: N×N是可数集。

	0	1	2	3	4	5	6	7…
0	0	1	3	6	10	15		
1	2	4	7	11	16			
2	5	8	12	17				
3	9	13	18					
4	14	19						
5	20							
6								
7								
…								

证明:

(1) 构造一个矩阵$(a_{ij})_{N\times N}$, 其中, N×N中的序偶$<i, j>$为矩阵中元素a_{ij}的位置坐标。

(2) 如图所示, 把N中元素按顺序放入矩阵

(3) a_{ij}所在的斜线共有$i+j+1$个元素

(4) a_{ij}的值是a_{ij}所在的斜线左方的所有行上的元素的个数再加上i, 即 $a_{ij} = 1+2+\ldots+(i+j)+i$

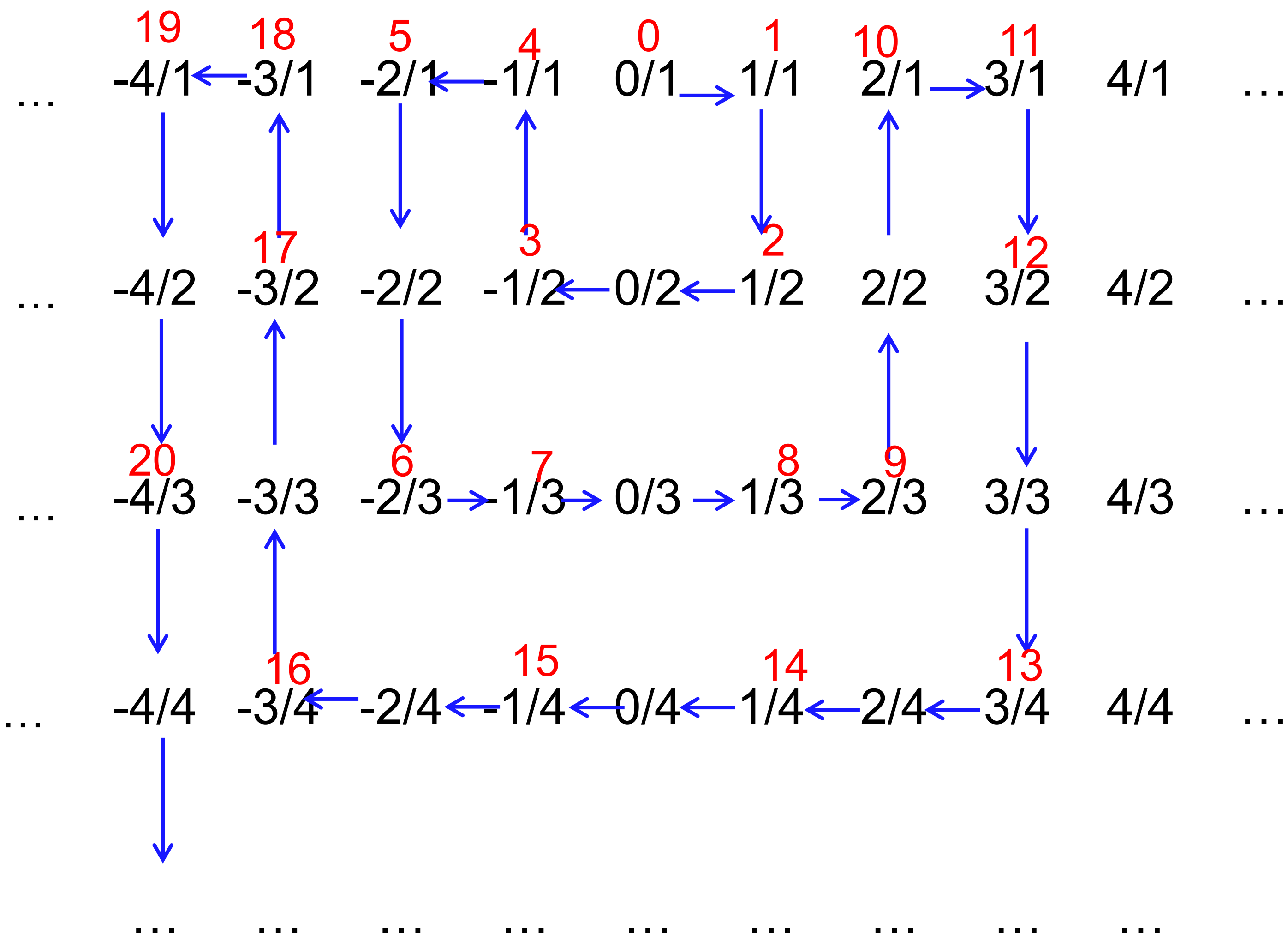
$= (1+i+j)(i+j)/2 + i$

(5) 如下定义函数f: N×N → N, 满足

$f(i, j) =(1+i+j)(i+j)/2 + i$, $i, j \in N$。

可证, f是 双射(补充)。因此N×N是可数集。

例：有理数集合 Q是可数集。



可数集：

- N
- N×N
- Q
- Z

有没有不可数集？

- 奇自然数集合
- 偶自然数集合
- … …

定理：对每个集合 A，皆有 $\#(A) < \#(P(A))$。

证: (1) 定义 $g:A \to P(A)$, 满足对任意的 $a \in A$, $g(a)=\{a\}$。显然 g 是内射，所以 $\#(A) \le \#(P(A))$ 。

(2) 用反证法证明： $\#(A) \ne \#(P(A))$

假设 $\#(A) = \#(P(A))$，则有双射 $f: A \to P(A)$。

令 $B = \{ a \mid a \in A$ 且 $a \notin f(a) \}$，则 $B \in P(A)$。

因 f 为双射，故有 $a' \in A$ 使 $f(a') = B$ 。

(a) 若 $a' \in B$，按照 B 的定义，$a' \notin f(a')$，即 $a' \notin B$；

(b) 若 $a' \notin B$，即 $a' \notin f(a')$。而按 B 的定义，$a' \in B$。

得，$a' \in B$ 当且仅当 $a' \notin B$，矛盾。

故假设有误，所以必有 $\#((A)) \ne \#(P(A))$ 。

由 (1) 和 (2) 知，$\#(A) < \#(P(A))$ 。

- $\#(N) < \#(P(N))$

- 记 $\#(P(N)) = \aleph$
- $\aleph_0 < \aleph$
- 结论：
  - ✓ $\#(R \times R) = \aleph$
  - ✓ $\#(R) = \aleph = \#(P(N))$

例：证明 #(R) =ℵ= # (P(N))

证明：由于R与[0,1]等势，因此只需证明P(N)与[0,1]等势，从而可得#(R) =ℵ。

(1) 首先证明#([0,1]) ≤ # (P(N))。

定义 f: P(N) →[0, 1]为：

(a) f(∅)=0, f(N)=1,

(b) $f(A)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\chi_A(i)}{2^{i+1}}$，其中A∈P(N), 且A≠ ∅, A≠ N。

此时0<f(A)<1。

下面证明f是满射。

对任意r∈ (0, 1), 假设r的二进制表示为$0.a_0a_1\ldots a_n\ldots$, 其中$a_i\in\{0, 1\}$, i∈N。则r的值为

$$r = a_0\cdot\frac{1}{2}+a_1\cdot\frac{1}{2^2}+\ldots+a_n\cdot\frac{1}{2^{n+1}}+\ldots$$

f是否为内射?

如下定义集合A_r：$a_i=1$ 当且仅当$i\in A_r$。显然有

$f(A_r)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\chi_A(i)}{2^{i+1}}$。因此f是满射，得#([0,1]) ≤ # (P(N)) 。

例：证明 #(R) =ℵ= # (P(N))

证： (2) 下面证明# (P(N)) ≤ #([0,1])。

定义g: P(N) → [0,1]为：

(a) g(∅)=0, g(N)=1,

(b) $g(A)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\chi_A(i)}{3^{i+1}}$, A∈P(N) 且A≠ ∅, A≠ N。

下面证明g是内射。对任意集合A, B ∈P(N)，且A≠B。

(a)显然若A, B中至少有一个为空集或N, 必有g(A)≠ g(B)。

(b)当A, B 均不为空集或N时，由于A≠B，得A⊕B≠∅。

对任意的i∈A⊕B, $\chi_{A\oplus B}(i)=1$当且仅当$\chi_A(i)=1$, $\chi_B(i)=0$或$\chi_A(i)=0$，$\chi_B(i)=1$。计算 $g(A)-g(B)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\chi_A(i)-\chi_B(i)}{3^{i+1}}$ 。

假设i_0是A⊕B的最小元素。若$i_0 \in A$, 则 $i_0 \notin B$, 有

$$g(A) - g(B) \geq \frac{1}{3^{i_0+1}} - \sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{3^{i_0+j}} = \frac{1}{2}\frac{1}{3^{i_0+1}} > 0。$$

同理可证当$i_0 \in B$时，g(B)-g(A)>0。

因此g是内射，得 # (P(N)) ≤ #([0,1])。

综上所述，得# (P(N)) = #([0,1])= #(R)。

例. 证明: $\#(\mathbf{R}\times\mathbf{R}) = \aleph$

证明:因为$[0, 1)$与R对等，所以$\#(R\times R) = \#[0,1)^2$对等。

又因为 $[0,1)$与R对等，因此，只需证明$[0,1)^2$与$[0,1)$对等。

对任意的$x\in[0,1)$, 可把它表示为十进制小数,

即$x=x_1x_2x_3\ldots$, 其中$x_i\in\{0,1,2,\ldots,9\}$, 如果我们不用从某位后全是“9”的十进制小数表示，则这种表示法是唯一的。

(1) 定义函数$f:[0.1)^2 \to [0,1)$：任取$x, y\in[0,1)$, 令

$x=0.x_1x_2x_3\ldots$, $y=0.y_1y_2y_3\ldots$, 则令$f(x, y) = 0.x_1y_1x_2y_2x_3y\ldots$

显然, f是内射，故$\#([0,1)^2) \le \#([0.1))$。

(2) 定义函数$g: [0,1) \to[0,1)^2$：任取$x\in[0,1)$, $g(x) = \langle x, x\rangle$。

显然，f是内射，因此，$\# [0,1) \le \# [0,1)^2$。

综上所述得 $\#([0,1))^2 =\#([0,1))$，从而$\#(R \times R) = \aleph$。

例. 证明：实数集合 R 是不可数的 。

证明：首先证明(0, 1)是不可数的，由于R和(0,1)是对等的，从而证明了R是不可数的。

假设(0, 1)是可数的, 则(0,1)与自然数集合N对等，于是能够把 (0, 1)中的元素排列成无穷序列s_0 , s_1 , s_2 , … s_n , …, 其中，$s_i \in (0, 1)$, $i \in N$。

而且每个s_i可表示成十进制小数$s_i = 0.y_1y_2y_3\cdots$，其中 $y_i \in \{0, 1, 2, \cdots, 9\}$ 。(假设不用从某位后全是“9”的十进制小数表示。)

将(0,1)的元素s_1 , s_2 , s_3 , ⋯ s_n , ⋯ 表示成：

$$s_0 = 0.a_{11}a_{12}a_{13}\cdots$$
$$s_1 = 0.a_{21}a_{22}a_{23}\cdots$$
$$\cdots$$
$$s_n = 0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}\cdots$$
$$\cdots$$

将(0,1)的元素$S_1, S_2, S_3, \cdots S_n, \cdots$表示成：

$$S_0 = 0.a_{00}a_{11}a_{02}\cdots$$

$$S_1 = 0.a_{10}a_{11}a_{12}\cdots$$

$$\cdots$$

$$S_n = 0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}\cdots a_{nn}\ldots$$

$$\cdots$$

证(续): 构造一个实数 $r = 0.b_0b_1b_2\cdots b_n\cdots$, 其中:

$$b_j = \begin{cases} 1, a_{ii} \neq 1 \\ 2, a_{ii} = 1 \end{cases}, \quad j \in N$$

可得：在小数点后第1个位置 上 r 与 s_0 不同，

在小数点后第2个位置 2上r 与 s_1不同，…,

在小数点后第n+1个位置上r与s_n上不同，$n \in N$.

所以 r 不同于 $s_0, s_1, s_2, \cdots s_n, \cdots$

这表明 $r \notin (0,1)$，矛盾 . 因此 (0, 1) 是不可数的 .

又因为实数集合 R 和集合 (0, 1) 是等势的 , 从而 R 也是不可数的 .

例. 证明: 全体从N到N的严格单调递增函数组成的集合，其基数大于 $\aleph_0$

证明：设F是全体从N到N的严格单调递增函数组成的集合。首先证明$\aleph_0 \le \#(F)$，然后证明$\#(F) \ne \aleph_0$。

(1) ($\aleph_0 \le \#(F)$) 如下定义$f: N \to F$:

对任意的$n \in N$, $f(n)$是N到N的函数，记$f(n)$为f_n，满足对任意的$m \in N$,

$$f_n(m)=(n+1)\cdot m。$$

显然，f_n是从N到N的严格单调递增函数。

而且当$n \ne n'$时，$f_n \ne f_{n'}$，即f是单射。

因此，$\aleph_0 \le \#(F)$。

证明(续): (2) $(\#(F)\neq\aleph_0)$ 反证法。假设$\#(F)=\aleph_0$,则存在双射$g: N\to F$。对任意 $n\in N$, 记$g(n)=g_n$, 即g_n是从N到N的严格单调递增函数。

递归构造 $g': N\to N$

(a) $g'(0) = g_0(0)+1$;

(b) $g'(n) = \max\{g'(n-1), g_n(n)\}+1$, $n\geq 1$.

显然，g'是N到N的严格单调递增函数.

下面证明$g'\notin F$。

$g_0(0)$	$g_0(1)$	$g_0(2)$	$g_0(3)$	$g_0(4)$
$g_1(0)$	$g_1(1)$	$g_1(2)$	$g_1(3)$	$g_1(4)$
$g_2(0)$	$g_2(1)$	$g_2(2)$	$g_2(3)$	$g_2(4)$
$g_3(0)$	$g_3(1)$	$g_3(2)$	$g_3(3)$	$g_3(4)$
$g_4(0)$	$g_4(1)$	$g_4(2)$	$g_4(3)$	$g_4(4)$

可证对任意 $n\in N, g'(n)\neq g_n(n)$,从而g'与F中的任意一个函数都不相等。

(i) 当$n=0$时， $g'(0) = g_0(0)+1 \neq g_0(0)$;

(ii) 当$k>0$时， 假设$n=k$时$g'(k)\neq g_k(k)$, 当$n=k+1$时，

$g'(k+1)=\max\{g'(k), g_{k+1}(k+1)\}+1$。

当$g'(k) \geq g_{k+1}(k+1)$时, $g'(k+1)=g'(k)+1>g_{k+1}(k+1)$;

当$g'(k) < g_{k+1}(k+1)$时, $g'(k+1)=g_{k+1}(k+1)+1>g_{k+1}(k+1)$.

由归纳证明知，对任意的 $n\in N, g'(n)\neq g_n(n)$， 得g'与F中的任意一个函数都不相等，即$g'\notin F$，与F是包含所有从N到N的严格递增函数的集合矛盾。因此假设不成立，即$\#(F)\neq\aleph_0$, 得$\#(F)>\aleph_0$

例. 证明：N的全体有限子集组成的集合是可数无穷集,即其基数为$\aleph_0$。

证明：记N的全体有限子集组成的集合为S, 定义函数

$f: S \rightarrow N$为：对N的任意的有限子集$S_1=\{n_0, n_1, n_2, \ldots, n_k\}$, $k \geq 0$，$f(S_1)= 2^{n_0} + 2^{n_1}+\ldots 2^{n_k}$。

下面证明f是双射。

(1) 首先证明f是满射。

对任意的自然数$n \in N$, n总可以写成如下形式：

$n = 2^{i_0} + 2^{i_1}+\ldots 2^{i_k}$, 其中$i_0, i_1, \ldots, i_k$都是自然数，且

$i_0>i_1>\ldots>i_k \geq 0$。

此时,有$f(\{i_0, i_1, \ldots, i_k\}) =n$，因此，f是满射。

例. 证明：N的全体有限子集组成的集合是可数无穷集，即其基数为$\aleph_0$。

证明：(2) 下面证明f 是单射。

对N的任意两个不同有限子集$S_1=\{n_0, n_1, n_2, \ldots, n_k\}$与$S_2=\{m_0, m_1,\ldots, m_j\}$，有

$f(S_1)= 2^{n_0} + 2^{n_1}+\ldots +2^{n_k}$，$f(S_2)= 2^{m_0} + 2^{m_1}+\ldots+ 2^{m_j}$

不妨假设$n_0 > n_1 >\ldots > n_k$且$m_0 > m_1 > \ldots > m_j$。

令i是最大的自然数，满足 $n_{k-i} \neq m_{j-i}$, 且$n_{k-i+1}=m_{j-i+1},\ldots, n_k=m_j$。

则 $f(S_1)-f(S_2) = 2^{n_0}+\ldots+ 2^{n_{k-i}} - 2^{m_0} -\ldots-2^{m_{j-i}}$

不妨设$n_{k-i} > m_{j-i}$, 则

$$f(S_1)-f(S_2) =2^{m_{j-i}}(2^{n_0-m_{j-i}}+\ldots+ 2^{n_{k-i}-m_{j-i}} - 2^{m_0-m_{j-i}} -\ldots- 2^{m_{j-i+1}-m_{j-i}} -1)$$

显然, $f(S_1)-f(S_2) \neq 0$。因此 f为单射

综上所述，f为双射，得N的全体有限子集组成的集合与N对等，即为可数无穷集。