第四章自然数和基数

4.1 自然数及数学归纳法

4.2 基数

自然数和数学归纳法

主要概念：　　集合的后继

主要方法：归纳原理、第一归纳法、第二归纳法

自然数的引进方法

① 公理化方法：皮亚诺公理（G. Peano）

② 构造性方法：借助集合论，具体构造出 N

自然数构造的出发点

1) 自然数的各种性质 (运算、大小次序 及 基本定律) ,

都可以从 **Peano** 公理一一推导出来;

2) 证明构造出来的 “自然数” 满足**Peano**公理，因此具有普通自然数的一切性质。

定义1(后继) 若A为集合，则称$A\cup\{A\}$为A的后继，并记为 A^+。

- 每个集合都有唯一的一个后继。

定理1：设 A 为任意集合， 则

(1) $\varnothing^+ = \{\varnothing\}$；

(2) $\{\varnothing\}^+ = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$；

(3) $A \in A^+$；

(4) $A \subseteq A^+$；

(5) $A^+ \neq \varnothing$ 。

- 当$A \subseteq B$时，不一定有$A^+ \subseteq B^+$。

例：令$A = \emptyset$，$B=\{1\}$ 时，显然$A \subseteq B$。

但 $A^+= \{\emptyset\}$， $B^+=\{1, \{1\}\}$,

显然， A^+不是B^+的子集

另如：$A = \{1\}$，$B=\{1, 2\}$ 时，显然$A \subseteq B$。

但 $A^+= \{1, \{1\}\}$， $B^+=\{1, 2, \{1,2\}\}$,

显然， A^+不是B^+的子集

构造自然数系统<N，+，·>

冯·诺依曼（Von Neumann）方案：

$$0 = \varnothing$$
$$1 = 0^+ = \{\varnothing\} = \{0\}$$
$$2 = 1^+ = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} = \{0, 1\}$$
$$3 = 2^+ = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} = \{0, 1, 2\}$$

…

…

$$n+1 = n^+ = \cdots = \{0, 1, \cdots, n\}$$

…

- 对每个自然数$n \in N$，皆有$n \in n^+$及$n \subseteq n^+$ $(n^+ = n \cup \{n\})$

定义2: 自然数集合N可用归纳定义法定义如下：

(1) $0 \in N$，　这里 $0 = \varnothing$;

(2) 若 $n \in N$，则 $n^{+} \in N$；

(3) 若 $S \subseteq N$, 且满足　　　　（极小化）

(a) $0 \in S$

(b) 如果 $n \in S$，则 $n^{+} \in S$

则 $S = N$。

大于/小于、加法、乘法

对每个自然数 $n \in N$，皆有 $n \in n^{+}$ 及 $n \subseteq n^{+}$，据此有:

定义3: 若 $m, n \in N$ 使 $m \in n$, 则称 m小于n (或 n大于m), 记为 $m < n$ (或 $n > m$)。

- “小于” 关系 $<$ 是自然数集 N 上的反自反、反对称、传递的二元关系

定义4 (归纳定义N上的加法运算 “ + ” 与乘法运算 “ · ”)
对任意的 $n, m \in N$，令

自然数系统 $<N, +, \cdot>$

i) $m + 0 = m$，$m \cdot 0 = 0$;

ii) $m + n^{+} = (m + n)^{+}$，$m \cdot n^{+} = m \cdot n + m$ 。

定理 2：若 $n \in N$，则 $\cup n^{+} = n$ 。

$$0 = \varnothing$$

$$1 = 0^{+} = \{\varnothing\} = \{0\}$$

$$2 = 1^{+} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} = \{0, 1\}$$

$$3 = 2^{+} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} = \{0, 1, 2\}$$

$$4 = 3^{+} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\} = \{0, 1, 2, 3\}$$

…

$$n+1 = n^{+} = \cdots = \{0, 1, \cdots, n\}$$

…

定理 2：若 $n\in N$，则 $\cup n^{+} = n$。

(3) 若 $S \subseteq N$, 且满足

(a) $0\in S$

(b)如果$n\in S$, 则 $n^{+}\in S$

则 $S = N$。

证明：令 $S = \{ n \mid n\in N$ 且 $\cup n^{+} = n \}$，只需证明S=N。

（1）显然 $S \subseteq N$。

（2）只需验证 S 满足自然数的归纳定义中(3)的(a)与(b):

(a) $0\in S$。因为 $0\in N$ 且 $\cup 0^{+} = \cup \varnothing^{+} = \cup\{ \varnothing \} = \varnothing = 0$。

(b) 若 $n\in S$，则 $n\in N$ 且 $\cup n^{+} = n$。下面证明$n^{+}\in S$。

显然，$n^{+}\in N$，且

$$\cup ((n^{+})^{+}) = \cup (n^{+}\cup\{ n^{+} \})$$
$$= (\cup n^{+}) \cup (\cup\{ n^{+} \})$$
$$= n \cup n^{+} = n^{+}。\quad （n\subseteq n^{+}）$$

所以 $n^{+}\in S$。

由自然数集合N的归纳定义法得 $S = N$。

定理3：按上述方法构造出来的自然数系统 $\langle N, +, \cdot \rangle$ 满足以下的皮亚诺 (Peano) 公理：

P1：$0 \in N$；

P2：若 $n \in N$，则有唯一的后继 $n^+ \in N$；

P3：若 $n \in N$，则 $n^+ \neq 0$;

P4：若 n, $m \in N$ 且 $n^+ = m^+$，则 $n = m$;

P5：若 $S \subseteq N$ 满足 （归纳原理）

i) $0 \in S$

ii) 如果 $n \in S$，则 $n^+ \in S$

则 $S = N$。

证明:P1, P2 和 P5 分别为自然数集 N 归纳定义法的 (1), (2), (3)。

P3 可以从定理1 的结论(5) 直接推导出来 (对任意集合A, $A^+ \neq \varnothing$)。

P4：若 n, $m \in N$ 且 $n^+ = m^+$，则由 定理 2 可得：

$$n = \bigcup n^+ = \bigcup m^+ = m 。$$

定理3：按上述方法构造出来的自然数系统 $<N, +, \cdot>$ 满足以下的**皮亚诺 (Peano) 公理**：

P1：$0 \in N$；

P2：若 $n \in N$，则有唯一的后继 $n^+ \in N$；

P3：若 $n \in N$，则 $n^+ \neq 0$；

P4：若 $n, m \in N$ 且 $n^+ = m^+$，则 $n = m$；

P5：若 $S \subseteq N$ 满足 （归纳原理）

i) $0 \in S$; ii) 如果 $n \in S$，则 $n^+ \in S$

则 $S = N$。

Peano公理说明：

P_1: 0 是自然数；

P_2: 每一个自然数 n 都有一个确定的后继数 n^+；

P_3: 没有以 0 为后继的自然数；

P_4: 任意两个不同的自然数，其后继也不一样；

P_5: 自然数集合是 满足 P_1、P_2 条件的极小集合。

性质 （作为集合的自然数的性质）：

(1) 传递性：若 $n_1 \in n_2$ 且 $n_2 \in n_3$，则 $n_1 \in n_3$。

(2) 三歧性：对于任何两个自然数 n_1，n_2， 下列三式恰有一个成立：$n_1 \in n_2$， $n_1 = n_2$， 或 $n_2 \in n_1$。

(3) 良基性：不存在一个自然数的无穷递降序列 $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_i, n_{i+1}, \ldots$ 使得 $n_{i+1} \in n_i$。

由自然数的定义可知，对于每一个自然数，比它小的自然数总是有穷个，并且

$$0 \in 1 \in 2 \in 3 \in \ldots\ldots$$

$$0 \subset 1 \subset 2 \subset 3 \subset \ldots\ldots$$

自然数的性质：

(1) 若$n \in N$，则 $n \notin n$

(2) 若$n, m \in N$, 且$n \in m$, 则$n^+ \in m$或者$n^+ = m$

(3) 若$n, m \in N$，则$n \subset m$ 当且仅当 $n \in m$。

(4) 若$n, m \in N$，则$n \in m$ 当且仅当 $n^+ \in m^+$

(5) 若$n \in N$，则不可能有$m \in N$ 使$n < m < n^+$

例. 试证：若$n\in N$，则 $n\notin n$。

证明: 构造集合 $S=\{n\in N \mid n\notin n\}$。

只需证明 $S=N$。

显然$S\subseteq N$。为证明 $S=N$，只需 验证 S 满足自然数的归纳定义中(3)的(a)与(b)。

(a) $0\in S$: 因为$0=\varnothing\notin\varnothing$ 。

(b) 假设$n\in S$，则 $n\notin n$。下面证明$n^+\in S$，只需证明$n^+\notin n^+$。

假设 $n^+\in n^+$，则 $\{n^+\}\subseteq n^+$。

故 $(n^+)^+=n^+\cup\{n^+\}\subseteq n^+$。

又由 $n^+\subseteq(n^+)^+$，得$n^+=(n^+)^+$，从而$n=n^+$, 矛盾。

因此假设不成立，即$n^+\notin n^+$，得$n^+\in S$。

因此 $S=N$, 结论成立。

例. 试证：若$n, m\in N$, 且$n \in m$, 则$n^+ \in m$或者$n^+=m$ 。

证明: 构造集合 $S=\{m\in N|$ 若$n\in m$, 则$n^+\in m$ 或者$n^+=m\}$。

只需证明 $S = N$。

显然$S \subseteq N$。为证明 $S = N$，只需 验证 S 满足自然数的归纳定义中(3)的(a)与(b)。

(a) $0\in S$: 因为对任意的自然数n, $n\in 0$不成立。

(b) 假设$m\in S$, 则对任意的自然数 n, 若$n\in m$, 则$n^+\in m$或者$n^+=m$。

下面证明$m^+\in S$, 即证明对任意的$n\in m^+$, 则$n^+\in m^+$ 或者$n^+=m^+$ 。

因为$m^+=m\cup\{m\}$, 因此对任意的$n\in m^+=m\cup\{m\}$, 有$n\in m$或者$n=m$。

当$n\in m$时， 由假设得 $n^+\in m$ 或者$n^+=m$。

当$n^+\in m$时， 由于$m\in m^+$, 由传递性得$n^+\in m^+$。

当$n^+ = m$时， 同样由于$m\in m^+$, 得$n^+\in m+$。

当$n=m$时， $n^+=m^+$, 此时$m^+\in S$。

因此， $S = N$，结论成立。