2 集合间的相等和包含关系

目标要求：

掌握集合相等（=）、包含（$\subseteq$）的定义。

掌握 $\in$、$=$、$\subseteq$ 之间的联系与区别。

掌握空集的性质

重点难点：

集合间的相等与包含关系

空集的性质

证明集合相等

定义2 (集合相等)（外延性公理）：设 A, B 为任意两个集合，**若A和B含有相同的元素，则称A和B相等**，记作：A=B，即

$$A = B \Leftrightarrow \forall x\,(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

或者

$$A = B \Leftrightarrow \forall x\,(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \forall x\,(x \in B \rightarrow x \in A)$$

例：

1. $\{x \mid x \le 4$且x是正整数$\} = \{1,2,3,4\}$

$=\{x \mid x<6$且 x能整除 $12\}$

2. $\{x \mid x^2-1 = 0\} = \{-1, 1\}$

3. $\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\}$

—— 集合与其元素排列次序无关。

4. $\{a, b, a\} = \{a, a, b, b, a\} = \{a, b\}$

—— 集合与其元素重复出现次数无关

$\{a, a, b, b, a\}$ 称为多重集，也称为 bag

由外延性公理可知，对于任意集合A, B, C有

1. $A = A$
2. $A = B \leftrightarrow B = A$
3. $A = B \wedge B = C \rightarrow A = C$

注意：作为集合的元素，未加任何限制，

一个集合的元素可以是一个集合。

例如：{Ø，1，2，3，{1，2}}

定义3 (子集或包含)：若集合A的每一个元素都是集合 B 的元素，则称 A是 B的子集，也称 A包含于B 或 B包含A。

记作：$A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$，即

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$$

由定义3 可知：对任意集合A有：$A \subseteq A$

定义4（真子集或真包含）：设 A, B是任意集合，若 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$，则称 A为B的真子集，也称 A 真包含于 B，或 B 真包含A。记作：

$$A \subset B \text{ 或 } B \supset A$$

显然，$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$

关系“$\in$”和“$\subseteq$”的区别：

$\in$：构成集合A的元素 a与A是“$\in$”关系

$\subseteq$：集合A的子集 B与A是“$\subseteq$”关系

例：集合A={a, b, c, {a, b}}, B={a, b}, C={{a, b}, c}

c $\in$A， {c} $\subseteq$ A

B$\in$A, B $\subseteq$ A

C $\subseteq$ A

例：判断下列命题是否为真

(1) $\{a\} \in \{\{a\}\}$

(2) $\{a\} \subseteq \{\{a\}\}$ ×

(3) $\{a\} \in \{a\}$ ×

(4) $\{a\} \subseteq \{a\}$

(5) $\{a, b\} \in \{a, b, c, \{a, b\}\}$

(5) $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c, \{a, b\}\}$

例：若 $A \in B$，$B \in C$，则 $A \in C$吗？(或 $A \notin C$吗？)

解：一般不成立。

例如：(1) $A = \{1\}$, $B = \{\{1\}, 2\}$, $C = \{\{\{1\}, 2\}, 3\}$,

有 $A \notin C$ 。

(2) $A = \{1\}$, $B = \{\{1\}\}$, $C = \{\{\{1\}\}, \{1\}\}$,

有 $A \in C$

定理1：设 A, B 是两个集合，则

$A = B$ 当且仅当 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$

证：$A=B \Leftrightarrow \forall x(x\in A \leftrightarrow x\in B)$ (集合相等定义）

$\Leftrightarrow \forall x(x\in A\rightarrow x\in B) \wedge \forall x\,(x\in B\rightarrow x\in A)$

$\Leftrightarrow A\subseteq B \wedge B\subseteq A$ （子集定义）

推论：对任意集合A，$A \subseteq A$

定理2：设 A，B，C都是集合，若 $A\subseteq B$ 且 $B \subseteq C$，则 $A \subseteq C$

证：对任意x，$x\in A \Rightarrow x\in B$ $(A\subseteq B)$

$\Rightarrow x\in C$ $(B\subseteq C)$

所以 $A\subseteq C$ 成立 (注：$P \Rightarrow Q$表示 P为真推出Q为真)

例：设A, B和C为集合。证明或用反例推翻以下命题

(1) 若$A \notin B$, 且 $B \notin C$, 则$A \notin C$

(2) 若$A \in B$, 且$B \notin C$, 则$A \notin C$

(3) 若$A \subseteq B$，且$B \notin C$, 则$A \notin C$

解: (1) 反例：$A=\{a\}, B=\{b\}, C=\{\{a\}\}$

(2) 反例：$A=\{a\}, B=\{\{a\}, b\}, C=\{\{a\}, c\}$

(3) 反例：$A=\{a\}, B=\{a, b\}, C=\{\{a\}\}$

定义5（全集U）：在对集合的研究中，如果所讨论的集合，都是某一固定集合的子集，就称该集合为全集，记作 U，即

$$U = \{x \mid p(x) \vee \neg p(x)\}$$

- 全集 U 是一个相对概念，它的选取与的研究的问题有关，随着研究问题的不同可选取不同的集合作为全集
- 有时并不具体指明全集是什么，但总是假定所涉及的每个集合都是全集的一个子集

定义 6（空集$\varnothing$）：不含有任何元素的集合 称为空集，记作：$\varnothing$，即

$$\varnothing = \{x \mid p(x) \wedge \neg p(x)\},$$

其中p(x) 是任意谓词。

定理 3：设 A 是任意集合，则 $\varnothing \subseteq A$。

证: (反证法) 假设存在集合A，使得$\varnothing \subseteq A$不成立，则必存在某个元素$a \in \varnothing$且$a \notin A$，与$\varnothing$为空集矛盾。

定理4：空集是唯一的。

证：假设空集不唯一。令 $\varnothing_1$ 和 $\varnothing_2$ 都是空集，则有 $\varnothing_1 \subseteq \varnothing_2$，同时 $\varnothing_2 \subseteq \varnothing_1$，由定理 1，$\varnothing_1 = \varnothing_2$。

例：判断下列关系是否成立？

(1) $\varnothing \in \varnothing$ ×

(2) $\varnothing \subseteq \varnothing$

(3) $\varnothing \in \{\varnothing\}$

(4) $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$

3 幂集

目标要求：

掌握幂集的定义

会求集合的幂集

定义7（幂集）：集合 A 的全部子集构成的集合称为A的幂集， 记作 P(A)，即

$$P(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$$

例：$A = \{a, b, c\}$，求 $P(A)$

解： A的 0 元子集： $\varnothing$,

A的 1 元子集： $\{a\}, \{b\}, \{c\}$

A的 2 元子集： $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$

A的 3 元子集： $\{a, b, c\}$

则 A的幂集：

$$P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

定义7（幂集）：集合 A 的全部子集构成的集合称为A的幂集， 记作 P(A)，即

$$P(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$$

由定义7，以下成立：

(1) $B \subseteq A$ iff $B \in P(A)$

(2) $\varnothing \in P(A)$

(3) $A \in P(A)$

(4) 若集合 S 有穷，则S的幂集 P(S) 也有穷;反之亦然。

例: 求下列集合的幂集

$P(\varnothing) = \{\varnothing\}$

$P(\{\varnothing\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

$P(\{a,\{a\}\}) = \{\varnothing, \{a\}, \{\{a\}\}, \{a, \{a\}\}\}$

$P(P(\{\varnothing\})) = P(\{\varnothing, \{\varnothing\}\})$

$= \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$

例：设B，C为任意两个集合，求证

(1) 若 $B \subseteq C$，则 $P(B) \subseteq P(C)$

(2) 若$B \subset C$，则$P(B) \subset P(C)$

证明: (1) 对于任意 x,

$X \in P(B) \Leftrightarrow X \subseteq B \Rightarrow X \subseteq C$（$B \subseteq C$, 定理2）

$\Leftrightarrow X \in P(C)$

所以 $P(B) \subseteq P(C)$（$\subseteq$的定义）

(2) 由$B \subset C$得 $B \subseteq C$，因此 $P(B) \subseteq P(C)$。

又由$B \subset C$，一定存在 x，使得

$x \in C, x \notin B \Rightarrow \{x\} \subseteq C, \{x\} \nsubseteq B$

$\Rightarrow \{x\} \in P(C), \{x\} \notin P(B)$

因此，$P(B) \subset P(C)$。

思考题

(1) $P(B) \subseteq P(C)$ 的充分必要条件?

(2) $P(B) \subset P(C)$的充分必要条件？

(3) $P(B) = P(C)$ 的充分必要条件?

定义 8 （基数）：有穷集合A中所含有元素的个数称为 A 的基数。 记作 #A（或|A|，n(A)）。

- 若集 A含有 n个元素，则其m元子集有 C_n^m个，其中，C_n^m是从n个元素中取出 m 个元素的组合数。

定理 5： 设 A 是有穷集合，则 #P(A) = $2^{\#A}$

证：设A有n个元素，即#A=n, 则A的m元子集有C_n^m个，

所以 A 共有 $C_n^0 + C_n^1 + \cdots\cdots + C_n^n$ 个子集

由二项式定理：

$$(x+y)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} y + \cdots\cdots + C_n^n y^n$$

令x = y =1, 则 $(1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + \cdots\cdots + C_n^n = 2^n$

4 集合的运算

重点：集合运算及运算性质

难点：证明两个集合相等

集合的运算：∩（交）、∪（并）、

－（差，也称相对补）、

~（补，也称绝对补）、⊕（对称差）

广义交、广义并

定义 9：设 A 和 B 是任意两个集合

(1) $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

(2) $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

(3) $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

定义 10：若 A 和 B 没有公共元素，即 $A \cap B = \varnothing$，则称 A 和 B 不相交。

例：设 $A=\{1，2，3，4\}$，$B=\{3，4，5，6\}$，

求 $A\cup B$，$A\cap B$，$A-B$ 和 $B-A$。

解：$A\cup B=\{1，2，3，4，5，6\}$

$A\cap B=\{3, 4\}$,

$A-B=\{1, 2\}$, $B-A=\{5, 6\}$

例：证明 $A-B=A\cap\sim B$

证：根据抽象原则，对于任意 x

$x\in A-B \Leftrightarrow x\in A \land x\notin B$ （－ 定义）

$\Leftrightarrow x\in A \land x\in\sim B$ （～ 定义）

$\Leftrightarrow x\in A\cap\sim B$ （∩ 定义）

定义11 (补集): 设A是全集U的子集，A 相对于 U 的补集 U－A 称为 A 的绝对补集，简称A的补集。记作~A。

即： $\sim A = U - A = \{x \mid x \in U \wedge x \notin A\} = \{x \mid x \notin A\}$

显然， $x \notin A$ 当且仅当 $x \in \sim A$

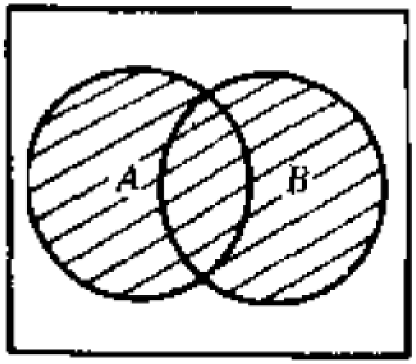
定义12（对称差集）： 设 A 和 B 是任意两个集合，A 和 B 的对称差集，记为 $A \oplus B$，定义为

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

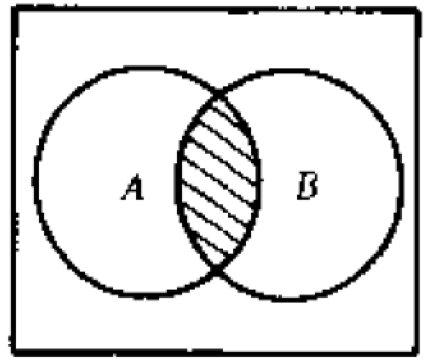
例：设 U ={1，2，3，4} 且 A= {1，2}，B={2，3，4}。

则 $\sim A = \{3, 4\}$， $A \oplus B = \{1, 3, 4\}$。

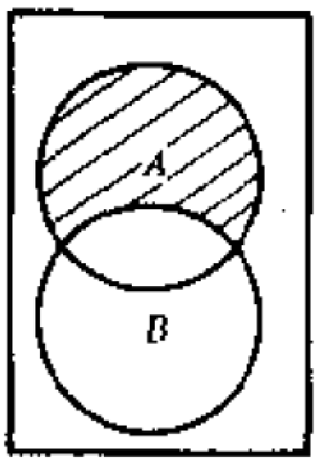
文氏图



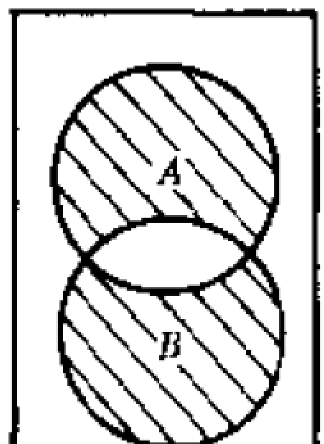
(a) $A \cup B$



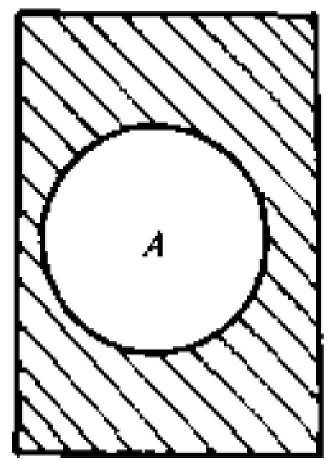
(b) $A \cap B$



(c) $A - B$



(d) $A \oplus B$



(e) $\sim A$

定理6 设A，B和C为任意三个集合，则有

i) $A \subseteq A \cup B$ 且 $B \subseteq A \cup B$;

ii) $A \cap B \subseteq A$ 且 $A \cap B \subseteq B$;

iii) $A - B \subseteq A$;

iv) $A - B = A \cap \sim B$;

v) 若 $A \subseteq B$，则 $\sim B \subseteq \sim A$;

vi) 若 $A \subseteq C$ 且 $B \subseteq C$，则 $A \cup B \subseteq C$;

vii) 若 $A \subseteq B$ 且 $A \subseteq C$，则 $A \subseteq B \cap C$。

例: 设A与B是任意集合。

(1) $x \in A \oplus B$ iff $(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)$

(2) $x \notin A \oplus B$ iff $(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \notin A \wedge x \notin B)$

(3) $A - B = \varnothing$ iff $A \subseteq B$

(4) $A \cup B = \varnothing$ iff $A = B = \varnothing$

怎么证明?

(5) $A \oplus B = \varnothing$ iff $A = B$

(6) $A \oplus B = A \oplus C$ iff $B = C$

(7) $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$ iff $A \subseteq B$ 或 $B \subseteq A$

集合运算的基本定律

幂等律： $A \cup A = A$ $A \cap A = A$	交换律： $A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
结合律： $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	
分配律： $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	
同一律： $A \cup \varnothing = A$ $A \cap U = A$	

零律： $A \cup U = U$ $A \cap \varnothing = \varnothing$	否定律： $A \cup \sim A = U$ $A \cap \sim A = \varnothing$
吸收律： $A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	
德·摩尔根律： $\sim (A \cup B) = \sim A \cap \sim B$ $\sim (A \cap B) = \sim A \cup \sim B$	
对合律： $\sim (\sim A) = A$ $\sim \varnothing = U$ $\sim U = \varnothing$	

对集合运算的基本定律的说明

- 在不含 – 的集合恒等式中，将 ∪ 和 ∩互换，∅ 和 U 互换，得到的仍是集合恒等式。—— 对偶原理

吸收律：$A \cup (A \cap B) = A$　　　零律：$A \cup U = U$

$A \cap (A \cup B) = A$　　　$A \cap \varnothing = \varnothing$

- 将不含 → 和↔ 的命题逻辑等值式中的 ∨ 换为 ∪，∧ 换为 ∩，¬ 换为 ~，0 换为 ∅，1 换为 U，⇔ 换为 =，就得到集合恒等式。

$\neg\neg P \Leftrightarrow P$	双重否定律
$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$	交换律
$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$	
$(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$	结合律
$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$	
$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	分配律
$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	
$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$	德·摩尔根律
$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$	
$P \vee P \Leftrightarrow P$	幂等律
$P \wedge P \Leftrightarrow P$	
$R \vee F \Leftrightarrow R$	同一律
$R \wedge T \Leftrightarrow R$	
$R \vee T \Leftrightarrow T$	零　律
$R \wedge F \Leftrightarrow F$	
$P \vee \neg P \Leftrightarrow T$	
$P \wedge \neg P \Leftrightarrow F$	

将不含 $\rightarrow$ 和 $\leftrightarrow$ 的命题逻辑等值式中的 $\vee$ 换为 $\cup$，$\wedge$ 换为 $\cap$，$\neg$ 换为 ~，0 换为 $\varnothing$，1 换为 U，$\Leftrightarrow$ 换为 =，就得到集合恒等式。

定理7：设 A 和 B是全集U的子集，则下列命题等价：

(1)$A \subseteq B$；(2)$A \cup B = B$; (3) $A \cap B = A$; (4) $A - B = \varnothing$

证: (1)⇒(2)：对于任意 x，由“∪”定义可知

如果$x \in B$，则$x \in A \cup B$，因此 $B \subseteq A \cup B$

对于任意 $y \in A \cup B$，则 $y \in A \vee y \in B$。

由于 $A \subseteq B$，得 $y \in B$，因此$A \cup B \subseteq B$。

故 $A \cup B = B$

常用于证明两个集合的包含关系

(2) ⇒(3) : $A \cap B = A \cap (A \cup B) = A$ （吸收律）

(3) ⇒(4) : $A - B = (A \cap B) - B = A \cap B \cap {\sim}B = \varnothing$

(4) ⇒(1)：(反证法) 假设 $A \subseteq B$不成立，则存在x，

$x \in A$但 $x \notin B$，因此 $x \in A - B$，即$A - B \neq \varnothing$，与已知条件（4）矛盾。故必有$A \subseteq B$。

定理7：设 A 和 B是全集U的子集，则下列命题等价：

(1)$A \subseteq B$；(2)$A \cup B = B$; (3) $A \cap B = A$; (4) $A - B = \varnothing$

例：设A，B，C是任意集合，试证：

若$A \subseteq B$且 $C \subseteq D$，则 $A \cup C \subseteq B \cup D$

证明：因为 $A \subseteq B$且$C \subseteq D$，则

由定理7得，$A \cup B = B$ 且 $C \cup D = D$

因此，$(A \cup B) \cup (C \cup D) = B \cup D$

即（$A \cup C$）$\cup$（$B \cup D$）$= B \cup D$

同样由定理7得，$A \cup C \subseteq B \cup D$

证明两个集合相等常用以下两种方法：

（1）集合相等定义（元素分析法）

（2）集合运算的基本定律（等式推理）

例：试证：$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$。

证明: (方法一)对任意 x,

$$x\in A-(B\cup C)\Leftrightarrow x\in A \wedge x\notin B\cup C$$

$$\Leftrightarrow x\in A \wedge \neg(x\in B\cup C)$$

$$\Leftrightarrow x\in A \wedge \neg(x\in B \vee x\in C)$$

$$\Leftrightarrow x\in A \wedge (x\notin B \wedge x\notin C)$$

$$\Leftrightarrow (x\in A \wedge x\notin B) \wedge (x\in A \wedge x\notin C)$$

$$\Leftrightarrow x\in A-B \wedge x\in A-C$$

$$\Leftrightarrow x\in (A-B)\cap(A-C)$$

所以，$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$。

例：　试证：$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$。

证明：(方法二)

$A-(B\cup C)$

$=A\cap\sim(B\cup C)$

$=A\cap(\sim B\cap\sim C)$　　德·摩尔根律

$=(A\cap A)\cap(\sim B\cap\sim C)$　幂等律

$=(A\cap\sim B)\cap(A\cap\sim C)$　结合律，交换律

$=(A-B)\cap(A-C)$

例：设A, B, C是任意集合, 试证以下命题成立

(1) $A \cap (B-A) = \varnothing$

(2) $A-(A-B) = A \cap B$

(3) $(A-B) \oplus B = (A-B) \cup B$

证明: (1) $A \cap (B-A) = A \cap (B \cap \sim A)$

$= A \cap (\sim A \cap B)$ (交换律)

$= (A \cap \sim A) \cap B$ (结合律)

$= \varnothing \cap B$ (否定律)

$= \varnothing$ (零律)

例：设A, B, C是任意集合, 试证以下命题成立

(1) $A \cap (B-A) = \varnothing$

(2) $A-(A-B) = A \cap B$

(3) $(A-B) \oplus B = (A-B) \cup B$

证明: (2) $A-(A-B) = A \cap \sim(A-B)$

$= A \cap \sim(A \cap \sim B)$

$= A \cap (\sim A \cup B)$ (德·摩尔根律)

$= (A \cap \sim A) \cup (A \cap B)$ (分配律)

$= \varnothing \cup (A \cap B)$ (否定律)

$= A \cap B$ (零律)

例： 设A, B, C是任意集合, 试证以下命题成立

(1) $A \cap (B-A) = \varnothing$

(2) $A-(A-B) = A \cap B$

(3) $(A-B) \oplus B = (A-B) \cup B$

证明: (3)

$(A-B) \oplus B$

$= ((A-B)-B) \cup (B-(A-B))$ (⊕ 的定义)

$= (A \cap \sim B \cap \sim B) \cup (B \cap \sim(A \cap \sim B))$

$= (A \cap \sim B) \cup (B \cap (B \cup \sim A))$ (幂等律、德·摩尔根律)

$= (A-B) \cup B$ (-的定义、吸收律)

例：判断一下结论是否成立，如果成立，就给予证明，如果不成立，就用文氏图加以说明。

(1) 若$A \cup B = A \cup C$, 则$B=C$;

(2) 若$A \cap B = A \cap C$, 则$B=C$;

(3) 若$A \subseteq B \cup C$, 则$A \subseteq B$或$A \subseteq C$;

(4) 若$B \cap C \subseteq A$, 则$B \subseteq A$或$C \subseteq A$;

(5) 若$A \cap C \subseteq B \cap C$且$A \cap \sim C \subseteq B \cap \sim C$, 则$A \subseteq B$;

(6) 若$A \cap B = A \cap C$且$\sim A \cap B = \sim A \cap C$, 则$B=C$。

反例:

(1) $A=\{1, 2\}$, $B=\{1\}$, $C=\{1, 2\}$。

(2) $A=\{1\}$, $B=\{1\}$, $C=\{1, 2\}$。

(3) $A=\{1, 2\}$, $B=\{1\}$, $C=\{2\}$。

(4) $A=\{1\}$, $B=\{1, 2\}$, $C=\{1, 3\}$。

例：判断一下结论是否成立，如果成立，就给予证明，如果不成立，就用文氏图加以说明。

(5) 若$A \cap C \subseteq B \cap C$且$A \cap \sim C \subseteq B \cap \sim C$, 则$A \subseteq B$;

(6) 若$A \cap B = A \cap C$且$\sim A \cap B = \sim A \cap C$, 则$B = C$。

证: (5) 对任意$x \in A$，考虑两种情况：$x \in C$或$x \notin C$:

(a) 当$x \in C$时，有$x \in A \cap C$，则$x \in B \cap C$，得$x \in B$。

因此，$A \subseteq B$。

(b) 当$x \notin C$时，有$x \in \sim C$, 因此$x \in A \cap \sim C$。

所以$x \in B \cap \sim C$，得$x \in B$。因此$A \subseteq B$。

例：给出下列各式成立的充分必要条件，并加以证明

(1) $(A-B)\cup(A-C)=\varnothing$;

(2) $A-B=B$;

(3) $(A-B)\oplus(A-C)=\varnothing$。

解: **(1) $(A-B)\cup(A-C)=\varnothing$**

iff $A-B=\varnothing$ 且 $A-C=\varnothing$

iff $A\subseteq B$ 且 $A\subseteq C$ iff $A\subseteq B\cap C$

(2) A-B=B iff A= B= ∅

(必要性) 反证法。如果A ≠∅, B= ∅ 或B≠∅, A= ∅, 显然A-B≠B。

假设A ≠∅且B ≠∅:

(a) 如果A=B, 显然A-B≠B;

(b) 如果A≠B。假设存在c ∈A，但c ∉B，则c ∈A-B，矛盾。假设存在c ∉ A，但c ∈ B，则c ∉ A-B，矛盾。

因此若A-B=B，则 A= B= ∅。

(充分性) 若A= B= ∅，则A-B=B= ∅

(3) $(A-B) \oplus (A-C) = \varnothing$

$$(A - B) \oplus (A - C) = (A \cap \sim B) \oplus (A \cap \sim C)$$

$$= ((A \cap \sim B) \cup (A \cap \sim C)) - ((A \cap \sim B) \cap (A \cap \sim C))$$

$$= ((A \cap \sim B) \cup (A \cap \sim C)) \cap \sim ((A \cap \sim B) \cap (A \cap \sim C))$$

$$= ((A \cap \sim B) \cup (A \cap \sim C)) \cap (\sim (A \cap \sim B) \cup \sim (A \cap \sim C))$$

$$= ((A \cap \sim B) \cup (A \cap \sim C)) \cap ((\sim A \cup B) \cup (\sim A \cup C))$$

$$= (A \cap (\sim B \cup \sim C)) \cap (\sim A \cup (B \cup C))$$

$$= (A \cap (\sim B \cup \sim C)) \cap (B \cup C)$$

$$= A \cap ((B \cup C) \cap \sim (B \cap C))$$

$$= A \cap (B \oplus C)$$

得 $(A-B) \oplus (A-C) = \varnothing$ 的充分必要条件为$A \cap (B \oplus C) = \varnothing$ 。

(3) $(A-B) \oplus (A-C) = \varnothing$

$(A-B) \oplus (A-C) = ((A-B) -(A-C)) \cup ((A-C) -(A-B)) =$
$\varnothing$ iff $(A-B) -(A-C)) = \varnothing$ 且 $(A-C) -(A-B)) = \varnothing$

iff $A-B \subseteq A-C$ 且 $A-C \subseteq A-B$

iff $A-B = A-C$

iff $A \cap B = A \cap C$

得 $(A–B) \oplus (A–C) = \varnothing$ 的充分必要条件为 $A \cap B = A \cap C$ 。

可证： $A \cap (B \oplus C) = \varnothing$ iff $A \cap B = A \cap C$