第7章 图论

7-3 路径、回路和连通性

北航计算机学院：李建欣

Tel：82339274（G506）

E-mail：lijx@buaa.edu.cn

http://act.buaa.edu.cn/lijx

主要内容

1. 图论的基本概念
2. 子图和图的运算
3. 路径、回路和连通图
4. 欧拉图和哈密顿图
5. 图的矩阵表示
6. 树、有向树和有序树

§7.3 路径、回路和连通性

路径、回路和连通性

目的：了解与路径、回路、连通性、分支、非循环图相关的基本概念；掌握求加权路径的算法、判一个图是否有回路、有有向回路、有半回路的过程；

重点：路径、回路、连通、分支等重要概念；求加权路径的算法；判回路、有向回路、半回路、循环图；

难点：几种判定方法及其原理。

路径的应用

应用：无向图的结点和边分别表示城市和连接城市的双轨铁路。

从城市 v_0 到城市 v_n 的 路径 由一个结点和边组成的序列来表示：

$v_0e_1v_1e_2v_2 \ldots v_{n-1}e_nv_n$

e_i $(1 \le i \le n)$ 表示连接城市的铁路；

v_1，v_2，$\ldots$，v_{n-1} 表示途经的城市。

术语：路径

设 $n \in N$，

$v_0, v_1 \ldots, v_n$ 是图 G 的结点，e_1，e_2，…，e_n是图G的边，并且v_{i-1} 和v_i 分别是 e_i 的起点和终点（i=1，2，…，n），则称序列 $v_0e_1v_1e_2 \ldots v_{n-1}e_nv_n$ 为图 G 中从 v_0 至 v_n 的路径，n 称为该路径的长度。

- 如果 $v_0 = v_n$，则称该路径为闭的，否则称为开的。
- 如果 e_1，e_2，…，e_n 互不相同，则称该路径为简单的。
- 如果v_0，v_1，…，v_n互不相同，则称该路径为基本的。

基本路径 必为 简单路径

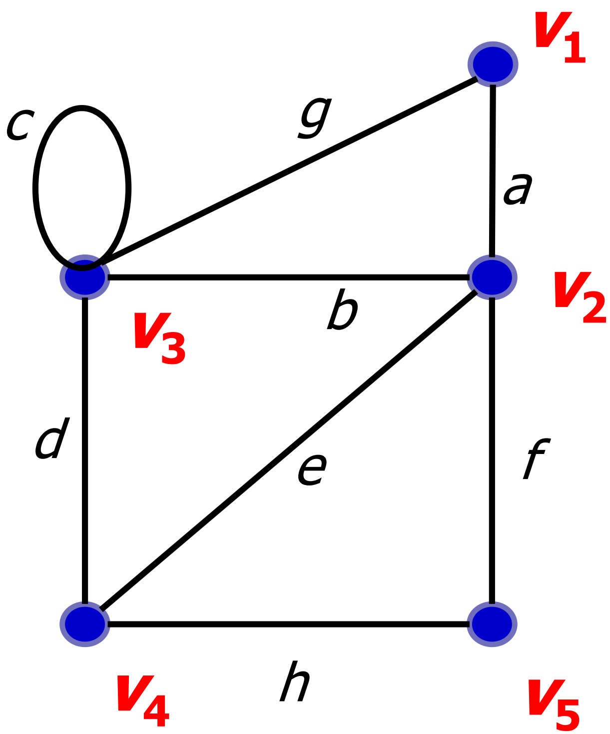
路径（另一组术语）

1、链（chain or walk）：顶点和边交错出现的序列称为链，在序列中边的前后两 个顶点正好是边的端点，序列的第一个顶点和最后一个顶点为链的端点，其余的 点为内点。

2、迹（trail）：边互不相同的链称为迹。即迹中无重边。

3、路（path）：内部点互不相同的链称为路。即路中无重点。

例：无向图G



(1) $v_2\ b\ v_3\ d\ v_4\ e\ v_2\ b\ v_3$

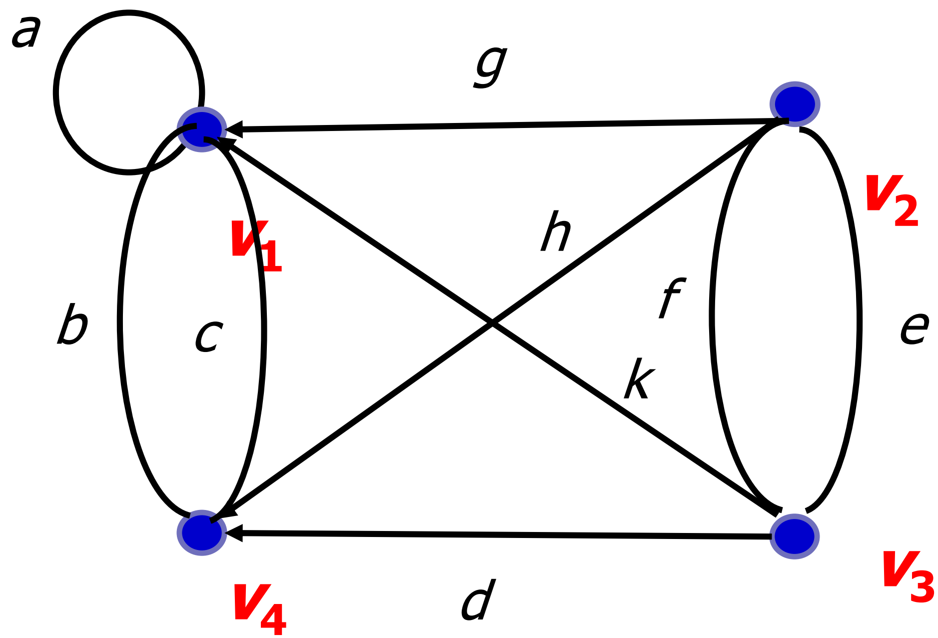
(2) $v_2\ b\ v_3\ c\ v_3\ d\ v_4$

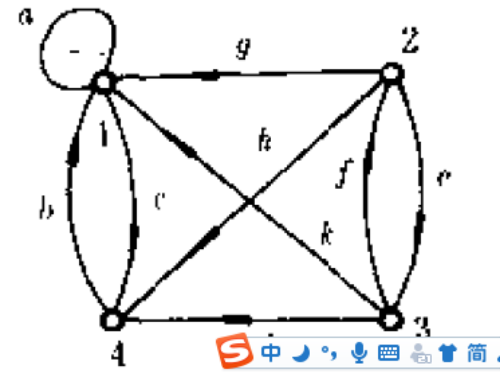
(3) $v_3\ c\ v_3\ c\ v_3$

(4) $v_1\ g\ v_3\ c\ v_3$变为一个基本路径？

直观结论：从路径中去掉闭路径，能够得到基础路径。

例：有向*G*





(1) *1c4b1c4*

(2) *1a1c4*

(3) *1c4*

路径：一些基本性质

- 当 $n = 0$，路径 v_0 的长度为 0，基本路径。任何结点到自身总存在路径。

- v到 v' 存在路径 $\Rightarrow$ v' 到 v 存在路径？

  （无向图√　　　有向图╳）

定理7.3.1

设图 G ＝〈V， E，Ψ〉，v, v′∈V。如果存在从 v 至 v′的路径，则存在从 v 至 v′的基本路径。

证明：（第二归纳法）

假设当存在从 v 至 v′的长度小于 l 的路径时，必存在从 v 至 v′的基本路径。

如果从 v 至 v′的路径 $v_0e_1v_1…v_{l-1}e_lv_l$ 不是基本路径，其中 $v_0 = v$, $v_l = v'$，则必有 i 和 j 使 $0≤i <j ≤l$ 且$v_i = v_j$，故 $v_0e_1v_1…v_ie_{j+1}v_{j+1}…v_{l-1}e_lv_l$ 是从 v 至 v′的长度为 $l – (j – i) < l$ 的路径。根据归纳假设，必存在从 v 至 v′的基本路径。

定理7.3.2

n 阶图中的基本路径的长度小于 n。

（ 因为基本路径中的结点互不相同，即最多仅含 n 个结点， 所以所经过的边数必定小于 n。）

可达

设图 $G=\langle V, E, \Psi\rangle$，$v_1$，$v_2 \in V$。

若存在从 v_1 至 v_2 的路径，则称在G中从v_1可达v_2，否则称在G 中从 v_1 不可达 v_2。

对于图 G 的结点 v，用 ***R* (*v*)** 表示从 v 可达的全体结点的集合。

可达集（reachable set）的概念用于安全性证明。

- 无向图：若从 v_1 可达 v_2，则从 v_2 必可达 v_1。
- 有向图：从 v_1 可达 v_2 不能保证从 v_2 必可达 v_1。

定理7.3.3

设图 $G = \langle V, E, \Psi \rangle$， v_1，$v_2 \in V$。

从 v_1 可达 v_2 iff 存在从 v_1 至 v_2 的基本路径。

距离

设图 $G = \langle V, E, \Psi \rangle$，$v_1$，$v_2 \in V$。

i) 若从 v_1 可达 v_2，

从 v_1 至 v_2 的 **测地线**：从 v_1 至 v_2 的路径中长度最短者；

从 v_1 至 v_2 的**距离**：从 v_1 至 v_2 的测地线长度，记作 $d(v_1, v_2)$。

ii) 若从 v_1 不可达 v_2，$d(v_1, v_2) = \infty$，并且规定:

$\infty + \infty = \infty$；$\forall n \in N$，$\infty > n$，$n + \infty = \infty + n = \infty$。

直径

图 G =〈V, E ,Ψ〉的直径定义为 $\max_{v,v'\in V} d(v,v')$。

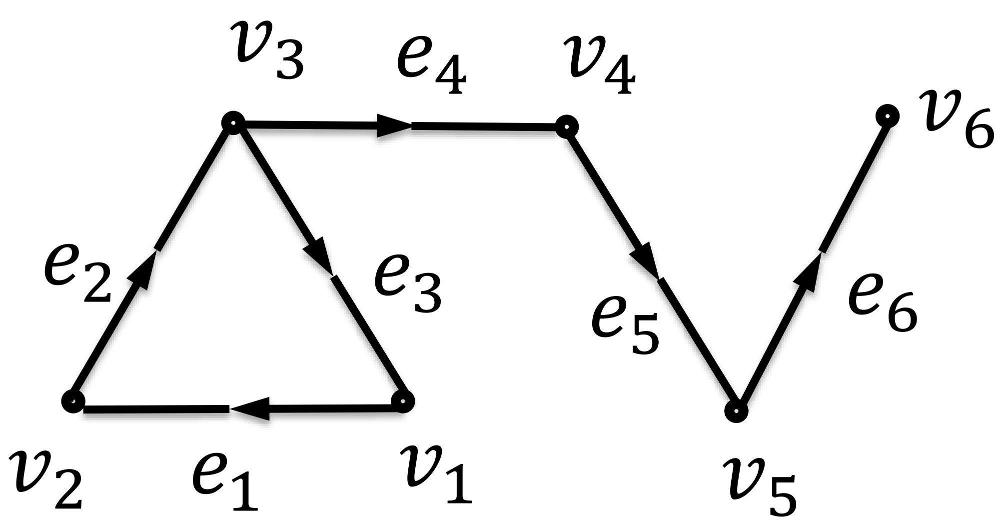


图 7.3-3 图中节点的可达性

$R(v_1)$
$R(v_2)$
$R(v_3)$
$R(v_4)$
$R(v_5)$
$R(v_6)$
$d(v_1, v_2)$
$d(v_2, v_1)$
$d(v_5, v_6)$

加权图

- 设图 G ＝〈V, E, Ψ 〉且W：E → R^+（R^+是正实数集），则称〈G，W〉为加权图；
  - ∀ e∈ E ，称 W (e) 为边 e 的加权长度，路径中所有边的加权长度之和称为该路径的加权长度。
  - 从结点v至结点 v′的路径中，加权长度最小的称为从 v 至 v′的 最短路径。
  - 若从v可达v′，则称从v 至 v′的最短路径的加权长度为从v至v′的加权距离；

若从 v 不可达 v′，则称从 v 至 v′的加权距离为 ∞。

戴克斯特拉（Dijkstra）

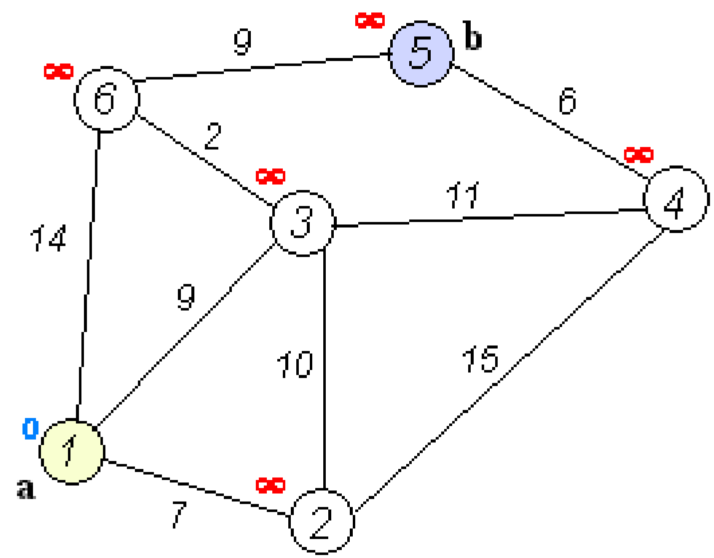
- 艾兹格·W·迪科斯彻 （Edsger Wybe Dijkstra，1930年5月11日~2002年8月6日）
- 荷兰人。 计算机科学家，毕业就职于荷兰Leiden大学，早年钻研物理及数学，而后转为计算学。
- 1972年获得图灵奖

戴克斯特拉（Dijkstra）

- 1 提出“goto有害论”；
- 2 提出信号量和pv原语;
- 3 解决了“哲学家聚餐”问题;
- 4 Dijkstra最短路径算法和银行家算法的创造者;
- 5 第一个Algol 60编译器的设计者和实现者;
- 6 THE操作系统的设计者和开发者;
- 与D. E. Knuth并称为我们这个时代最伟大的计算机科学家的人。
- 与癌症抗争多年，于2002年8月6日在荷兰Nuenen自己的家中去世，享年72岁

戴克斯特拉（Dijkstra）算法

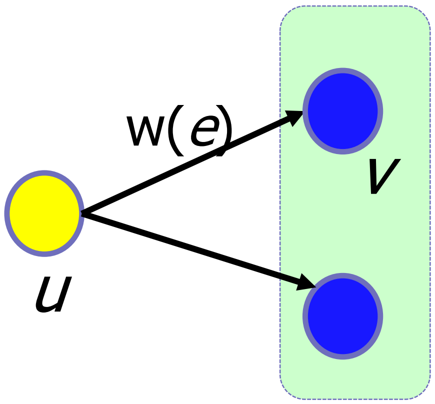
- 1959年,最短路径算法
- 应用产假
  - 单源路径计算（Single-source shortest paths problem）
  - （连通）有权（有向）图
  - 边的权值非负数
- 贪心算法(Greedy Algorithm)



戴克斯特拉（Dijkstra）算法

- 初始化
  - 设置两个集合
    - T---已设置权值集
    - V-T---未设置权值节点集
  - 初始化
    - $\lambda(s) \leftarrow 0$，其余为$\forall\ v \in V - \{ s \}$ ，$\lambda(v) \leftarrow \infty$
- 算法流程
  - 循环：n次
    - 选择T中最小权值点u
    - 对所有V-T中e=(u, v)，

      更新$\lambda(v)= \min \{\lambda(v), \lambda(u)+w(e)\}$



戴克斯特拉（Dijkstra）算法

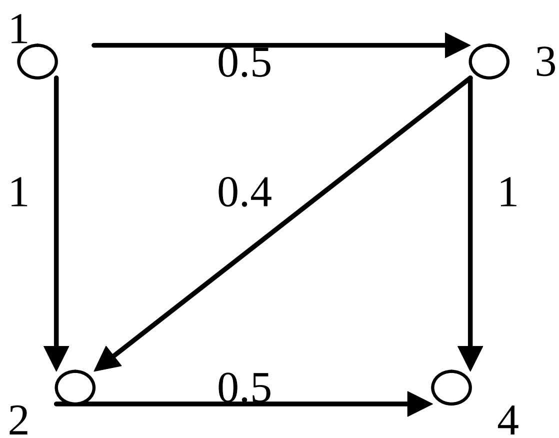
算法（求从结点 s 至 t 的加权距离）Single-source shortest paths problem

距离数组$\lambda(v)$

1) $\lambda(s) \leftarrow 0$，且 $\forall\, v \in V - \{ s \}$ ，$\lambda(v) \leftarrow \infty$
2) $T \leftarrow V$；
3) 任取 $u \in \{\ u' \mid$ 若 $v' \in T$，则 $\lambda(u') \le \lambda(v')\ \}$ ；
4) 如果 $u = t$，则 算法结束。
5) 对于以 u 为起点的每条边 e，如果 e 的终点 $v \in T$ 并且 $\lambda(v) > \lambda(u) + W(e)$，则$\lambda(v) \leftarrow \lambda(u) + W(e)$；
6) $T \leftarrow T - \{ u \}$ ，且 转向 3)。

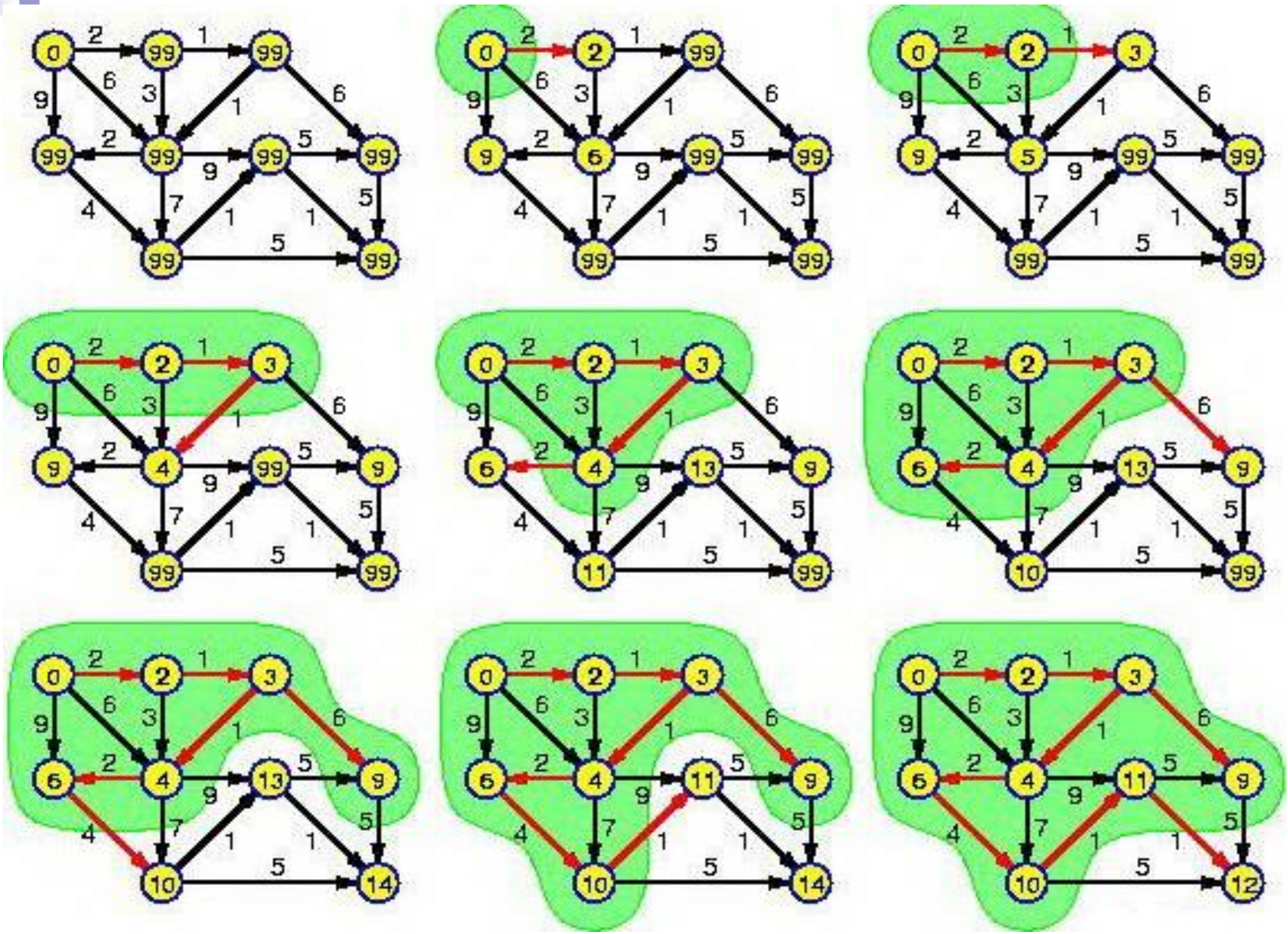
当算法结束时，$\lambda(t)$ 即为从 s 至 t 的加权距离。

例子（加权距离）



当前点 \ λ \ 结点	1	2	3	4
	0	∞	∞	∞
1	/	1	0.5	∞
3	/	0.9	/	1.5
2	/	/	/	1.4
4				

从 1 到 4 的加权距离为 1.4。



思考题

- 如何修改算法，以便输出最短路径？
  - 更新λ时，同时记录$\min\{\lambda(v)\}$，是通过那个$\lambda(u)+w(u, v)$得到的
- 如何记录最短路条数？
  - 如果$\lambda(v)= \lambda(u)+w(e)$，则 num(v)+=num(u);
  - 如果$\lambda(v)> \lambda(u)+w(e)$, 则$\lambda(v)=\lambda(u)+w(e)$, 且 num(v)=num(u)

戴克斯特拉（Dijkstra）算法

算法（求从结点 s 至 t 的加权距离）

1) $\lambda(s) \leftarrow 0$，且 $\forall\, v \in V - \{s\}$，$\lambda(v) \leftarrow \infty$； $\{\ p \leftarrow \#\ \}$
2) $T \leftarrow V$；
3) 任取 $u \in \{\ u' \mid$ 若 $v' \in T$，则 $\lambda(u') \le \lambda(v')\ \}$ ；
4) 如果 $u = t$，则 $\{\ p \leftarrow p\,t\,\#\ \}$，算法结束。
5) 对于以 u 为起点的每条边 e，如果 e 的终点 $v \in T$ 并且 $\lambda(v) > \lambda(u) + W(e)$，则 $\lambda(v) \leftarrow \lambda(u) + W(e)$；
6) $T \leftarrow T - \{u\}$， $\{\ p \leftarrow p\,u \Rightarrow\ \}$ ， 且 转向 3)。

当算法结束时，$\lambda(t)$ 即为从 s 至 t 的加权距离。

p 即为从 s 至 t 的最短路径。

最短路径算法扩展

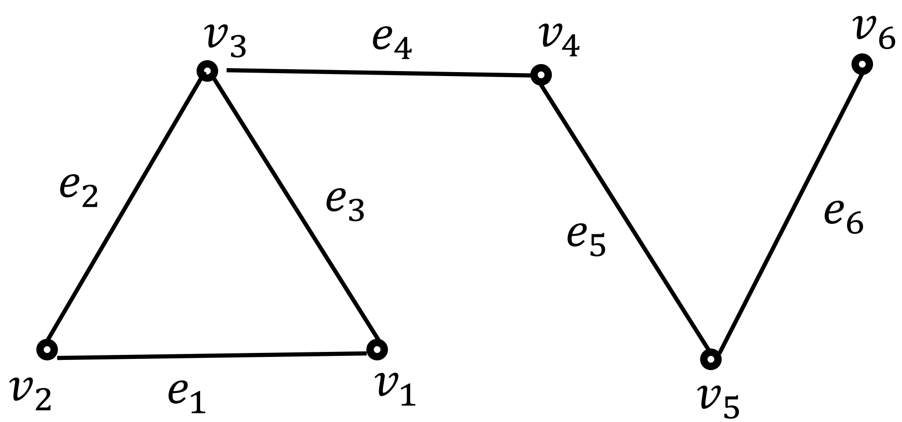
- 放松最短路条件
  - 任意值，即可能存在负数，可能有圈
  - 任意两点之间的最短路？
- 其他算法
  - 任意权值、单源：Bellman-Ford
  - 任意权值、任意两点：Folyd-Warshall

无向图的连通

如果无向图 G 的任意两个结点都互相可达，则称G是连通的；否则称G是 非连通的。

无向图 G ＝〈V， E，Ψ〉是连通的， iff

∀ v∈V，皆有 R (v) ＝ V



有向图的基础图

设有向图 $G = <V, E, \Psi>$，定义

$\Psi' : E \rightarrow \{\{v_1, v_2\} \mid v_1 \in V \wedge v_2 \in V\}$ 如下：

对任意 $e \in E$ 和 $v_1, v_2 \in V$，若 $\Psi(e) = \langle v_1, v_2 \rangle$，

则 $\Psi'(e) = \{v_1, v_2\}$

这时，称无向图 $G' = <V, E, \Psi'>$ 为有向图 G 的基础图。

$$\text{有向图} \xrightarrow{\text{所有有向边改为无向边}} \text{有向图的基础图}$$

有向图的连通

设 G 是有向图。

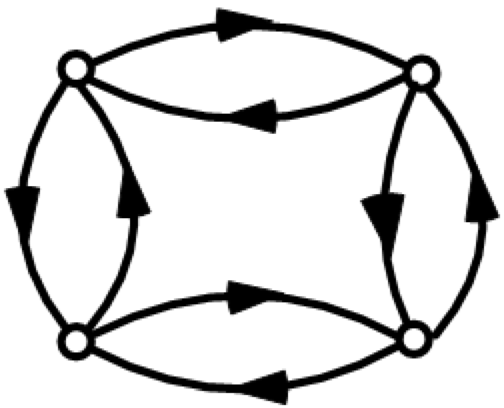
i) 如果 G 中任意两结点都互相可达，则称 G 是强连通的；

ii) 如果对于 G 的任意两结点，必有一个结点可达另一结点，则称 G 是单向连通的；

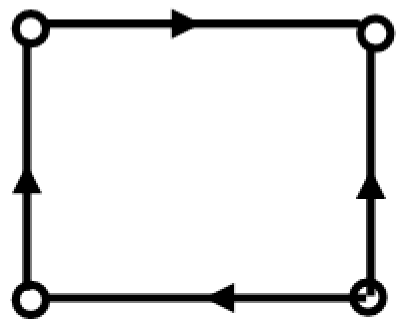
iii) 如果 G 的基础图是连通的，则称 G 是弱连通的。

实例

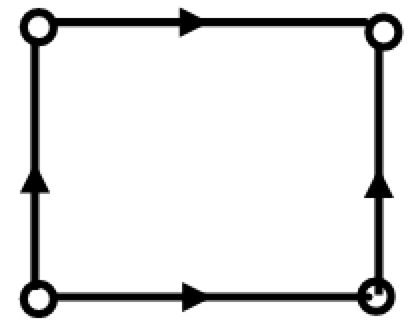
例　判断下列图的连通性。



(a)



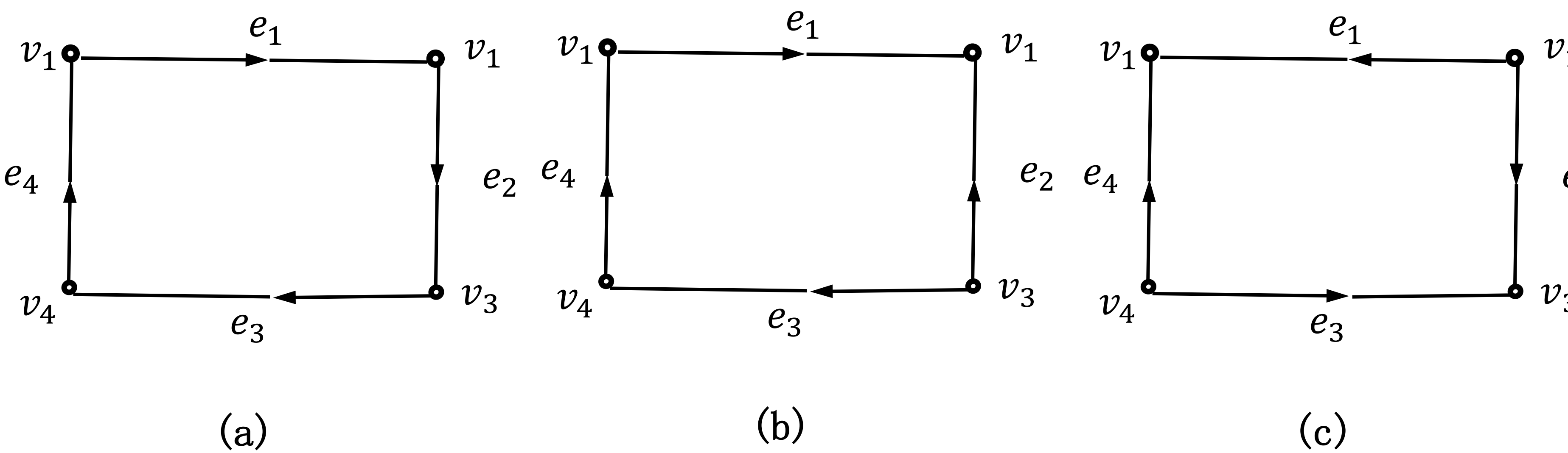
(b)



(c)

强连通的　　**单向连通的**　　**弱连通的**

实例



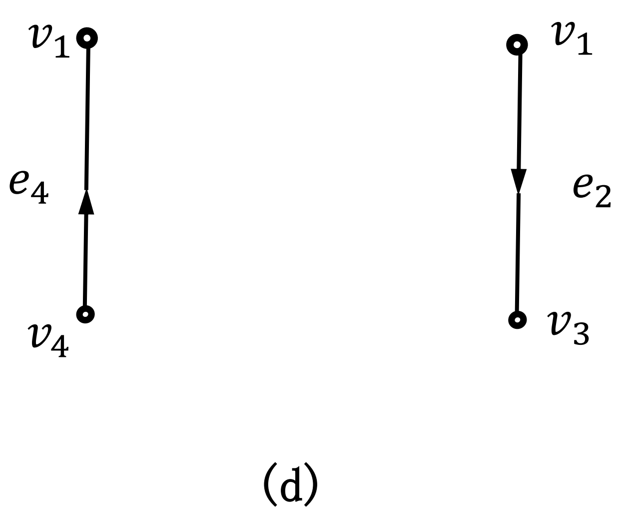


图 7.3.4 有向图的连通性

极大子图

设 G'是图 G 的具有某性质 P 的子图，并且对于 G 的具有 该性质的任意子图 G''，只要 $G' \subseteq G''$就有 $G' = G''$，则称 G'相对于该性质 是 G 的极大子图。

分支

无向图 G 的极大连通子图称为 G 的分支。

有向图的分支

设 G 是有向图。

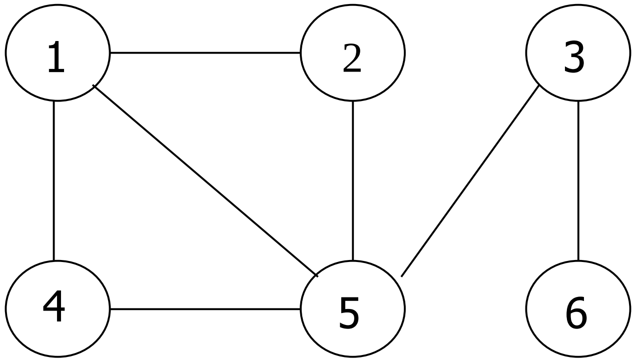
i) G 的极大强连通子图称为 G 的强分支。

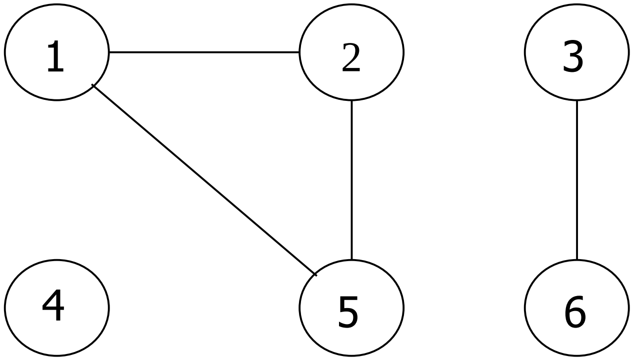
ii) G 的极大单向连通子图称为 G 的单向分支。

iii) G 的极大弱连通子图称为 G 的弱分支。

定理7.3.4

- 连通无向图恰有一个分支。
- 非连通无向图有一个以上分支。





定理 7.3.5

强连通 (单向连通，弱连通) 有向图恰有一个强分支 (单向分支，弱分支)。非强连通 (非单向连通，非弱连通) 有向图有一个以上强分支 (单向分支，弱分支)。

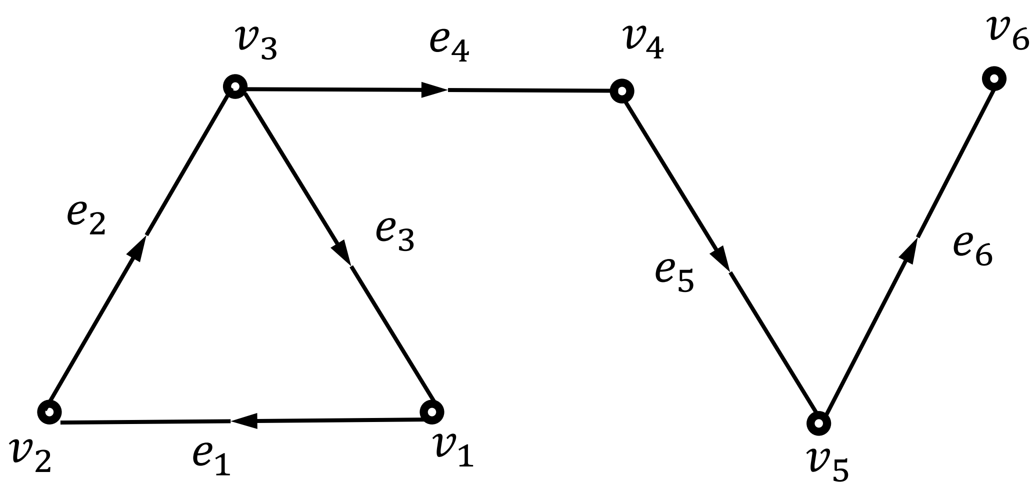


图 7.3-3 图中节点的可达性

半路径

设 G′是有向图 G＝〈V， E，Ψ〉的基础图，G′中的路径称为 G 中的半路径。

正向边　　反向边

有向图 G 中的路径一定是 G 中的半路径，但 G 中的半路径未必是 G 中的路径。

连通关系，连通分支

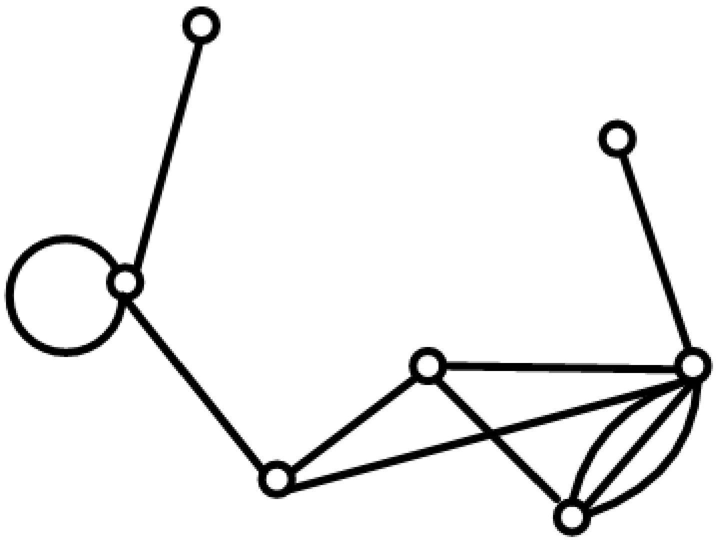
1.连通关系 $R=\{<u,v>|\ u,v\in V且u\sim v\}$是$V$上的等价关系。

2.连通分支: V关于R的等价类的导出子图。

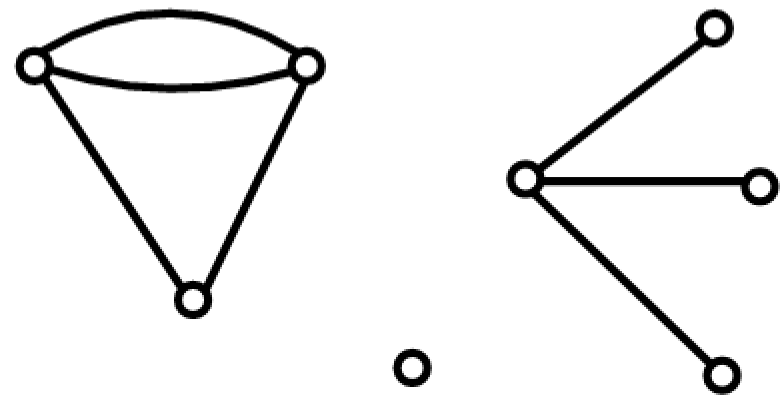
称$V/R=\{V_1,V_2,\ldots,V_k\}$, $G[V_1]$, $G[V_2]$, …, $G[V_k]$为G的连通分支，连通分支数记作$W(G)=m$。

连通图实例

例：下列图哪些是连通图？连通分支数是多少？



(a)



(b)

连通图，*W*=1

非连通图，*W*=3

回路、半回路、有向回路

回 路：连通 2 度正则图；

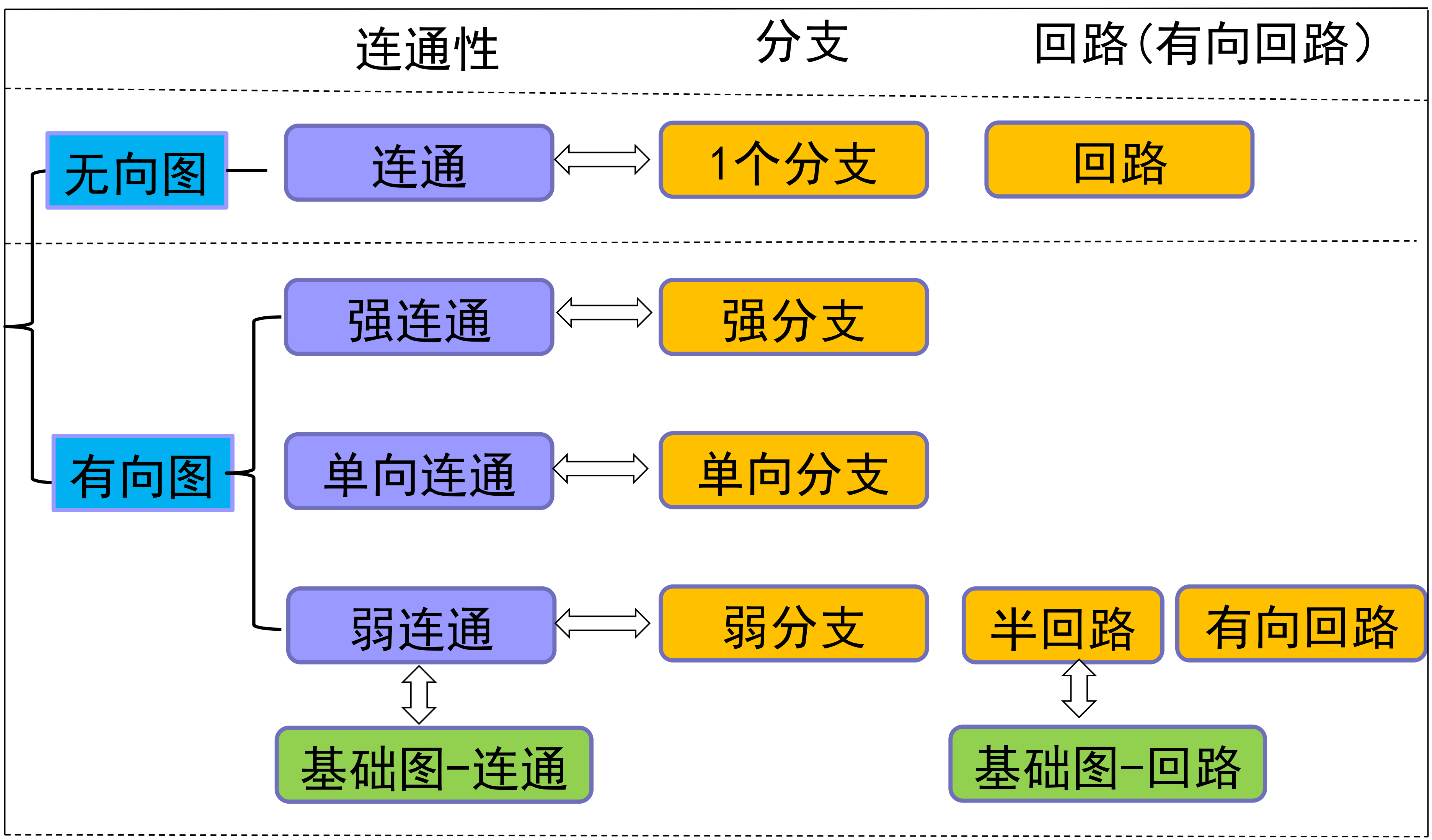
半 回 路：基础图是回路的有向图；

有向回路：每个结点的出度和入度均为 1 的弱连通有向图；

回路 (半回路，有向回路) 的长度：

回路 (半回路，有向回路) 中边的数目。

部分概念关系图



连通性
分支
回路(有向回路)
无向图
连通
1个分支
回路
有向图
强连通
强分支
单向连通
单向分支
弱连通
弱分支
半回路
有向回路
基础图-连通
基础图-回路

定理7.3.6

设图 G ＝〈V ， E ，Ψ〉 ，v ∈V。

G 是回路或有向回路 当且仅当

G 的阶与边数相等，

并且在 G 中存在这样一条从v到v的闭路径，使得除了v在该闭路径中出现两次外，其余结点和每条边都在该闭路径中恰出现一次。

证明：充分性显然，**必要性：**

i) 证明 G 的阶与边数相等。

$\because$ G是回路或有向回路 $\therefore \sum_{v \in V} d_G(v) = 2|V|$

$\because \sum_{v \in V} d_G(v) = 2|E|$ $\therefore |V| = |E|$

ii) 对G的阶用第一归纳法。

当G是1阶有向回路，则G只有一个自圈e, *vev*是一个闭路径。

当n阶回路必要性成立，设G为n+1阶有向回路

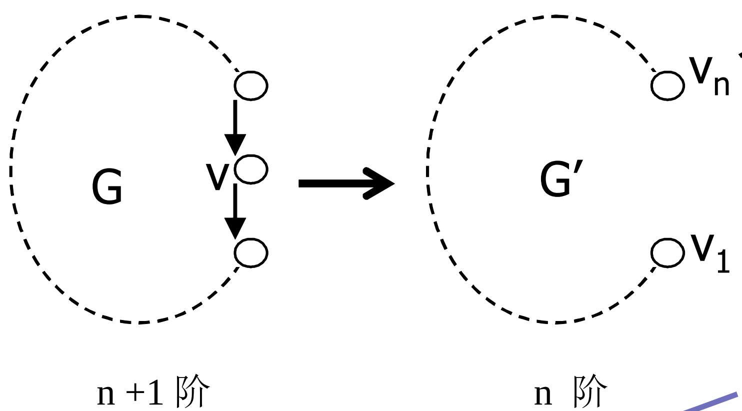
由于$d_G^+(v)= d_G^-(v)=1$

存在$\Psi(e_1) = <v,v_1>$

$\Psi(e_{n+1}) = <v_n,v>$

存在闭路径

$ve_1v_1e_2v_2 \ldots v_{n-1}e_nv_ne_{n+1}v$



令$\Psi' =\{<e,<v_n,v_1>>\}$

令$G' =G-\{v\}+\{e\}_{\Psi'}$

存在基本路径

$v_1e_2v_2 \ldots v_{n-1}e_nv_n$

有回路、非循环图

- 如果回路 (有向回路，半回路) C 是图 G 的子图，则称 G 有回路 (有向回路，半回路) C。
- 没有回路的无向图和没有半回路的有向图称为非循环图。

判断一个图是否有回路、有有向回路、有半回路？

判断一个图是否为非循环图？

定理7.3.7

如果有向图 G 有子图 G′满足：对于 G′的任意结点 v ，$d_{G'}^{+}(v) > 0$，则 G 有有向回路。

定理7.3.8

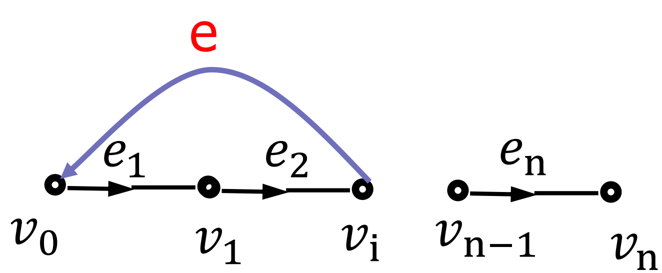
如果有向图 G 有子图 G′满足：对于 G′中的任意结点 v， $d_{G'}^{-}(v) > 0$，则 G 有有向回路。

证明：设 $G' = \langle V', E', \Psi' \rangle$，$v_0e_1v_1 \ldots v_{n-1}e_nv_n$ 是 G′中最长的基本路径。

由于 $d^{-}_{G'}(v_0) > 0$，必可找到 $e \in E'$ 和 $v \in V'$，使 $vev_0e_1v_1 \ldots v_{n-1}e_nv_n$ 是G′中的简单路径，且 $v = v_i$（$0 \le i \le n$）。

G的以 $\{v_0, \ldots, v_i\}$ 为结点集合，以 $\{e, e_1, \ldots, e_i\}$ 为边集合的子图是有向回路。

$v_0e_1v_1 \ldots v_{n-1}e_nv_n$ 是最长的基本路径



$v = vi$

W–过程

判断一个有向图是否有有向回路的方法：**W—过程**

从G中去掉 v 和与之关联的边得到有向图 G-{v}的过程（其中 v 是有向图结点，$d_{G'}^{-}(v)=0$ 或 $d_{G'}^{+}(v)=0$）。

- G 有有向回路　当且仅当　G – {v} 有有向回路；
- 若 n 阶有向图 G 没有有向回路，则经过 n–1 次W—过程得到 平凡图。

定理7.3.9

图 G不是 非循环图 iff

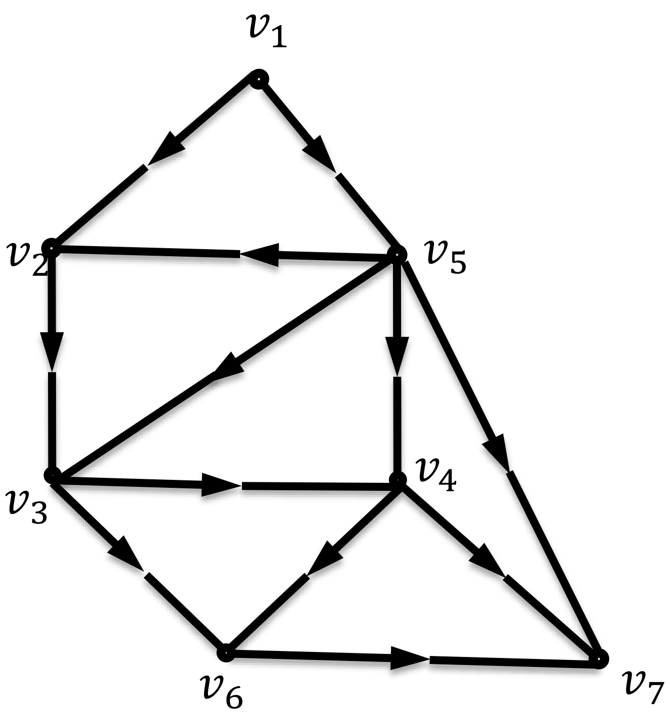
G 有子图 G′满足：对于G′的任意结点v，$d_{G'}(v) > 1$。

（证明方法与定理7.3.8类似）

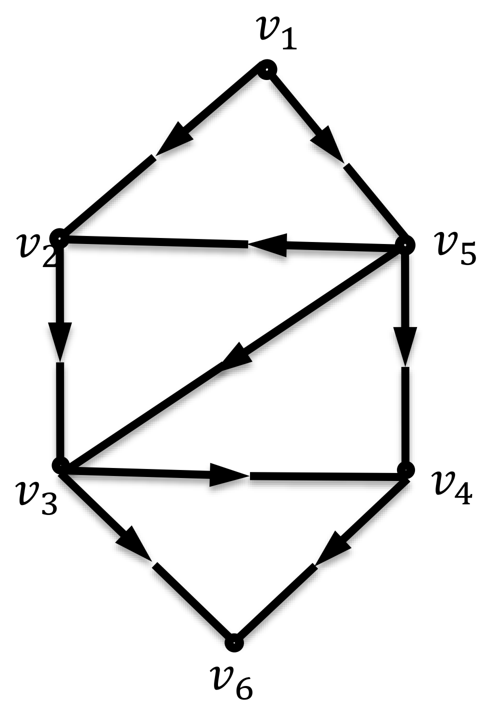
类似方法：G_0，G_1，…，G_m，其中$0 \le m \le n-1$，

$G_0=G$， $G_{i+1}= G_i-\{v_i\}$（其中 $d_{G_i}(v_i) \le 1$）。

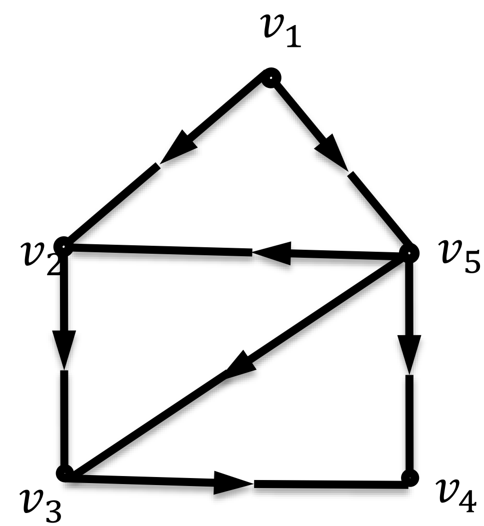
若G_m是平凡图，则 G 是非循环图，否则不然。



(a)

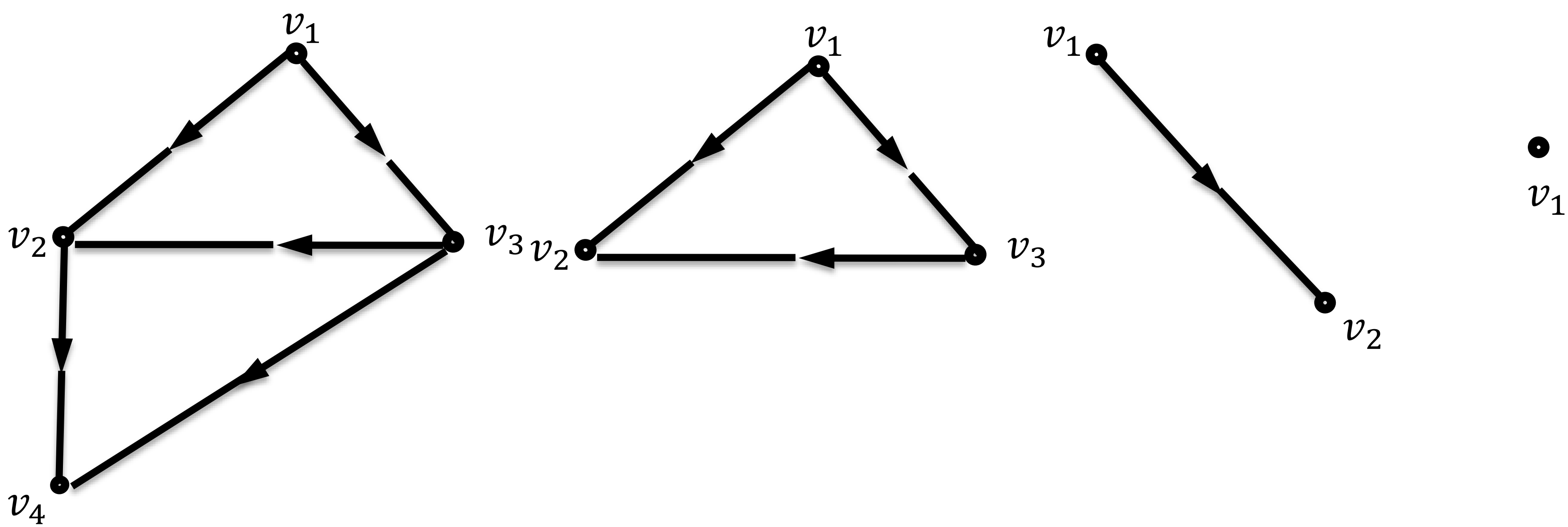


(b)



(c)

P135



(d) (e) (f) (g)

思考题

设 G 为 n 阶简单无向图

1) 若 G 的任意两个结点的度数之和大于等于 n – 1 ，则 G 是连通的。

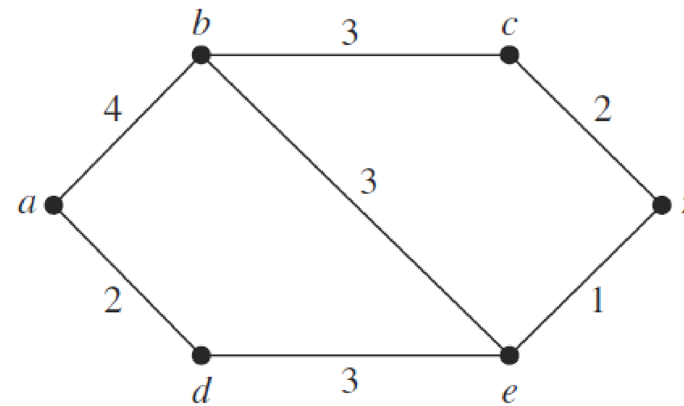
2) 若 对G 的任意结点 v ，
皆有$d_G(v) \geq (n-1)/2$ ，则 G 是连通的。

思考题

设 G为 n 阶简单无向图，且G有k个分支，m条边 ，

则 $m \leq \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$

练习：最短路径



- $V=\{a,b,c,d,e,z\}$
- E={<a,b,4>,<a,d,2>,<b,c,3>,<b,e,3>,<c,z,2>,<d,e,3>,<e,z,1>}

- 若$d_o(u)==0$ 并且$(u,v,d)\in E$，则$h'(v)=\min\{h(v),h(u)+d\}$
- $d'_o(v)=d'_o(v)-1$

	$d_o(u)$	a	b	c	d	e	z
0	a	0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
1	b,d		4	$+\infty$	2	$+\infty$	$+\infty$
2	c,e			7	2	7/5	$+\infty$
3	z					5	9/6
4							9
h(x)		0	4	7	2	5	6

作业

习题7.3

3、5、6、10、11、12、13、15

如何定义连通度

- **问题**：如何定量地比较无向图的连通性的强与弱？
- **点连通度**：为了破坏连通性，至少需要删除多少个顶点？
- **边连通度：**为了破坏连通性，至少需要删除多少条边？
- “**破坏连通性**”是指“变得更加不连通”。

点割集的定义

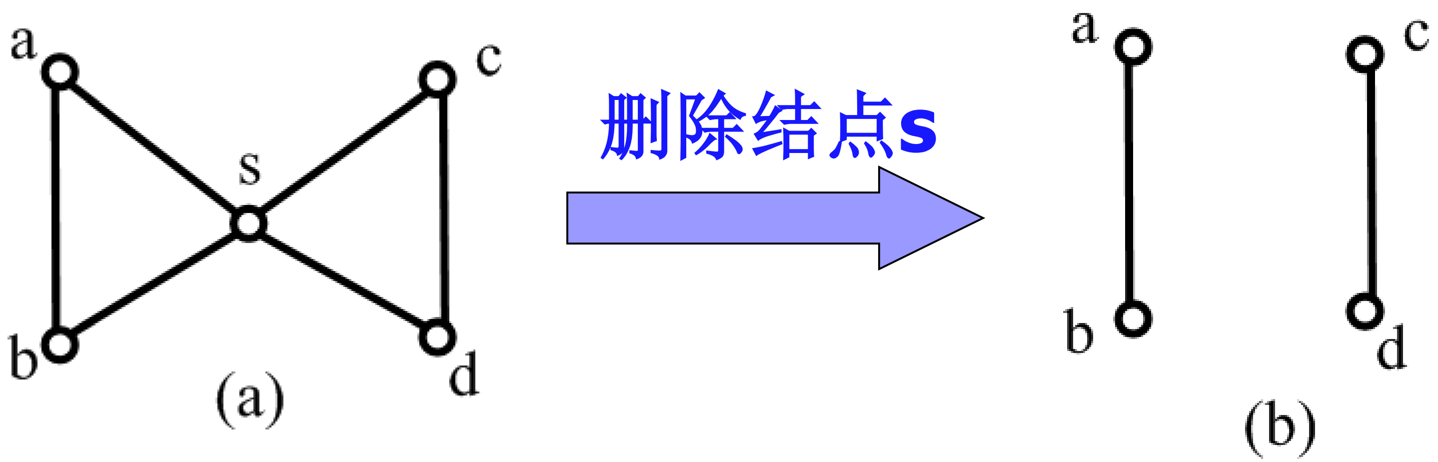
定义 设无向图$G=<V,E>$为连通图，若有点集$V_1 \subset V$，使图G删除了V_1的所有结点后，所得的子图是不连通图，而删除了V_1的任意真子集后，所得到的子图仍是连通图，则称V_1是G的一个点割集。若某一个结点构成一个点割集，则称该结点为割点。

形式化为：

若$W(G-V_1)>W(G)$且$\forall V' \subset V_1$，$W(G-V')=W(G)$，则称V_1为G的点割集. 若$\{v\}$为点割集, 则称v为割点.

实例1

- 例1求下图的割点



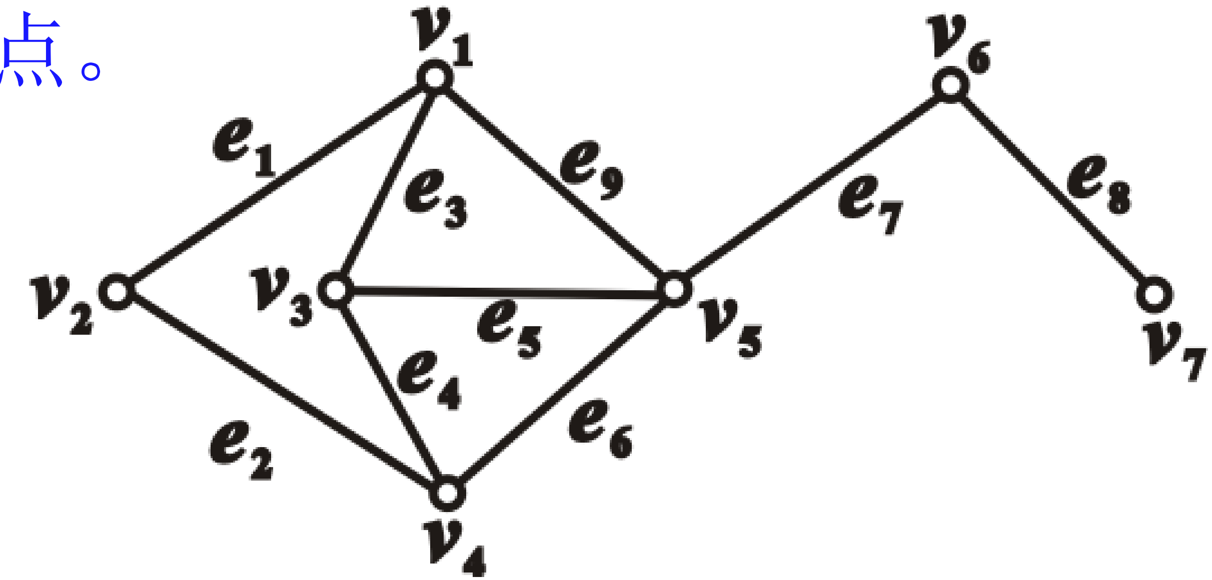
连通图，W=1

非连通图，W=2

因此s是割点。

实例2

例2 在下图所示的图中，找出点割集和割点。



点割集：$\{v_1,v_4\}$, $\{v_6\}$，$\{v_5\}$，

割点：v_6，v_5

v_2、v_3与v_7不在任何点割集中。

无向图的点连通度

定义 设G是无向图，$k(G)=min\{|V_1|\mid V_1$是G的点割集$\}$是G的**点连通度**，也称作连通度。

几点说明：

1.连通度$k(G)$表示为了产生一个不连通图所需要删除的点的最少数目。

2. 非连通图的连通度等于0，存在割点的连通图的连通度为1，n阶完全图的连通度为n-1。

3.连通度$k(G)$表示图G的连通程度，$k(G)$大表示连通性强，即需要删除更多的点才能使图从连通变为非连通。

边割集

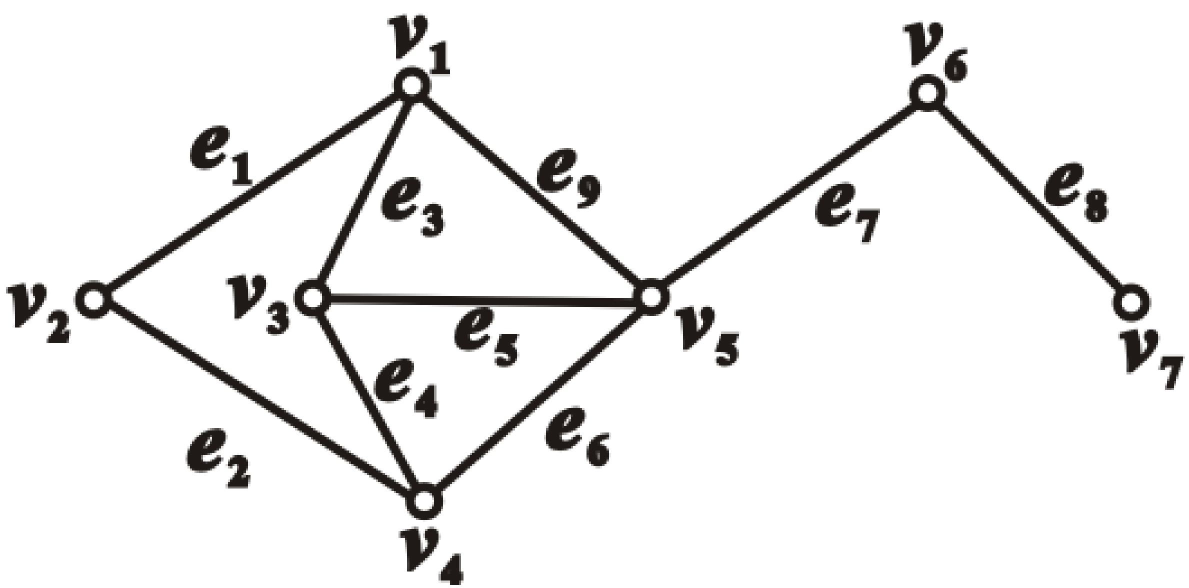
定义设无向图$G=<V,E>$为连通图, 若有边集 $E_1 \subset E$, 使图G删除了E_1的所有结点后，所得的子图是不连通图，而删除了E_1的任意真子集后，所得到的子图仍是连通图，则称E_1是G的一个**边割集**。若某一个结点构成一个点割集，则称该结点为**割边（或桥）。**

更一般定义为：

若$W(G-E_1)>W(G)$且$\forall E' \subset E_1$, $W(G-E')=W(G)$, 则称E_1为G的边割集. 若{e}为点割集, 则称e为割边.

实例3

例3 在下图所示的图中，举出边割集和桥的例子。



边割集： $\{e_1,e_2\}$, $\{e_3,e_4,e_5\}$, $\{e_1,e_3,e_5,e_6\}$, $\{e_7\}$，$\{e_8\}$等

割边： e_7，e_8

边连通度

定义 设G是无向图，$\lambda(G)=min\{|E_1| \mid E_1$是G的边割集$\}$是G的边连通度。

几点说明：

1.边连通度$\lambda(G)$是为了产生一个不连通图所需要删除的边的最少数目。

2. 非连通图的边连通度等于0，存在桥的连通图的边连通度为1，平凡图的边连通度为0。

3.边连通度$\lambda(G)$表示图G的边连通程度，$\lambda(G)$大表示边连通性强，即需要删除更多的边才能使图从连通变为非连通。

点连通度与边连通度的比较

定理对于任何一个图G，有

$$k(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$$

证明 若G不连通，则$k(G) = \lambda(G) = 0$，故上式成立。

若G连通，

证明$\lambda(G) \leq \delta(G)$

如果G是平凡图，则$\lambda(G)=0 \leq \delta(G)$

若G是非平凡图，因为每个结点的所有关联边必含一个边割集，所以$\lambda(G) \leq \delta(G)$。