6 有序偶和笛卡儿乘积

- 掌握有序偶和笛卡儿乘积的定义和性质
- 熟练掌握求两个集合的笛卡儿乘积

定义15：（有序偶）任给两个对象 x 和 y，将它们按规定的顺序构成的序列，称之为有序偶，记为$< x, y >$。其中，x 称为有序偶的第一元，y 称为第二元。

注意：有序偶 ≠ 二元集

如：$<a, b> \neq <b, a>$

$\{a, b\} = \{b, a\}$

$<a, a> \neq <a>$

$\{a, a\} = \{a\}$

有序偶的集合定义： 1921年, 波兰数学家库拉托夫斯基（Kuratovski）给出了一种有序偶的集合表示：

$< x, y > = \{ \{x\}, \{x, y\} \}$。

库拉托夫斯基，波兰数学家

$<x, x> = \{ \{x\}, \{x, x\} \}=\{ \{x\} \}$

定理9 有序偶的唯一性定理：

$<u, v> = <x, y>$当且仅当 $u = x$ 和 $v = y$。

分析： $<u, v>=<x, y> \Leftrightarrow \{\{u\}, \{u, v\}\} = \{\{x\}, \{x, y\}\}$

$\Leftrightarrow u=x, v=y$???

定理10 有序偶的唯一性定理：

$<u，v>=<x，y>$当且仅当 $u = x$ 和 $v = y$。

证: (充分性) 当 $u = x, v = y$ 时,有

$$\{u\} = \{x\} \text{ 和 } \{u, v\} = \{x,y\},$$

因此有 $\{\{u\}, \{u, v\}\} = \{\{x\}, \{x, y\}\}$,

即$< u, v >=< x, y >$

定理10 有序偶的唯一性定理：

$\langle u, v\rangle = \langle x, y\rangle$ 当且仅当 $u = x$ 和 $v = y$。

证: (必要性)

已知 $\langle u, v\rangle=\langle x, y\rangle \Leftrightarrow \{\{u\},\{u, v\}\} = \{\{x\}, \{x, y\}\}$,

分两种情况来证 $u=x$，$v=y$。

(1) 设 $u = v$。 因为 $\langle u, v\rangle = \{\{u\}, \{u, v\}\}=\{\{u\}\}$,

且 $\langle u, v\rangle = \langle x, y\rangle= \{\{x\}, \{x, y\}\}$,

因此 $\{\{u\}\}=\{\{x\}, \{x, y\}\}$。所以 $u = x = y$。

因此有 $u=x$，$v=y$。

(2) 设 $u \neq v$。 因为 $\{\{u\}, \{u, v\}\} = \{\{x\}, \{x, y\}\}$,

所以 $\{u\} = \{x\}$，$\{u, v\} = \{x, y\}$。

因此有 $u = x$，$v = y$。

定义16（n元序偶） 设 $n \in I_+$ 且 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 为 n 个任意的元素。

i) 若 $n=1$，则令 $\langle x_1 \rangle = x_1$

ii) 若 $n=2$，则令 $\langle x_1, x_2 \rangle = \{\{x_1\}, \{x_1, x_2\}\}$

iii) 若 $n>2$，则令

$$\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle = \langle\langle x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} \rangle, x_n \rangle$$

我们称 $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ 为由 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 组成的 n元序偶，并称每个 x_i（$1 \leqslant i \leqslant n$）为它的第 i 个分量。

定理 11 设 $n \in I_+$ 且 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 和 $y_1, y_2, \ldots, y_n$ 为任意元素，则 $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle = \langle y_1, y_2, \ldots, y_n \rangle$，当且仅当 $(x_1 = y_1) \wedge (x_2 = y_2) \wedge \ldots \wedge (x_n = y_n)$

用关于 n 的数学归纳法证明。

例：把三元序偶$< a, b, c >$定义为$\{ \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\} \}$，合适吗？说明理由。

解：不合适。

反例：$<a, b, a > = \{ \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, a\}\}= \{\{a\}, \{a, b\}\}$

$\neq$

$<a, a, b > =\{ \{a\}, \{a, a\}, \{a, a, b\} \}= \{\{a\}, \{a, b\}\}$

显然 $a \neq b$ 时，若上述定义为三元序偶，则 $<a, b, a > \neq <a, a, b >$，矛盾。

例: (1) 设C是集合， $x \in C, y \in C$, 试证 $\langle x, y\rangle \in P(P(C))$

(2) $a \in \cup\langle a, b\rangle$ 且 $b \in \cup\langle a, b\rangle$

证： (1) 因为 $\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ 且 $x \in C, y \in C$，

所以 $\{x\} \in P(C)$， $\{y\} \in P(C)$。

因此 $\{\{x\}, \{y\}\} \subseteq P(C)$。

得到 $\{\{x\}, \{x, y\}\} \in P(P(C))$ 。

(2) 因为 $\langle a, b\rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ ，

所以 $\cup\langle a, b\rangle = \{a\} \cup \{a, b\} = \{a, b\}$,

得 $a \in \cup\langle a, b\rangle$ 且 $b \in \cup\langle a, b\rangle$

定义17 (笛卡尔乘积) 集合 A 和 B 的笛卡儿乘积 $A \times B$ 定义为： $A \times B = \{<x, y> | x \in A \wedge y \in B\}$

例：$A = \{a, b\}$，$B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{x\}$，$D = \varnothing$ ，则有：

$A \times B = \{<a, 1>, <a, 2>, <a, 3>, <b, 1>, <b, 2>, <b, 3>\}$

$B \times A = \{<1, a>, <2, a>, <3, a>, <1, b>, <2, b>, <3, b>\}$

因此，笛卡尔乘积不满足 交换律。

定理12　设A，B为任意两个集合，则

$$A \times B = \varnothing \quad \text{iff} \quad A = \varnothing \text{ 或 } B = \varnothing 。$$

证明：　只需证明

$$A \times B \neq \varnothing \quad \text{iff} \quad A \neq \varnothing \text{ 且 } B \neq \varnothing$$

例：$A = \{a, b\}$，$B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{ x \}$，$D = \varnothing$，则有：

$$A \times D = \varnothing = D \times A$$

定理 13 若A, B 为任意两个有限集，则$\#(A \times B) = \#A \ \#B$。

定理14 设 A，B，C 和 D 为任意四个非空集合，则

(1) $A\times B \subseteq C\times D$ 当且仅当 $A\subseteq C$ 且 $B\subseteq D$;

(2) $A\times B = C\times D$ 当且仅当 $A = C$ 且 $B = D$。

证：(1)（必要性）如果 $A\times B\subseteq C\times D$，则对任意 $x\in A$, $y\in B$, 有 $<x, y> \in A\times B$，得到 $<x, y> \in C\times D$。

因此， $x \in C$ 且 $y \in D$。从而 $A\subseteq C$ 且 $B\subseteq D$。

（充分性）如果 $A\subseteq C$ 且 $B\subseteq D$，则对任意的 $<x, y> \in A\times B$，由 $x \in A$, $y \in B$ 得 $x \in C$， $y \in D$。

因此 $<x, y> \in C\times D$。

(2) 由(1) 可得。

定理15 设 A，B 和 C 为任意三个集合，则

(1) $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$;

(2) $(A\cup B)\times C = (A\times C)\cup(B\times C)$;

(3) $A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$;

(4) $(A\cap B)\times C = (A\times C)\cap(B\times C)$;

(5) $A\times(B-C) = (A\times B)-(A\times C)$;

(6) $(A-B)\times C = (A\times C)-(B\times C)$。

定理15 设 A，B 和 C 为任意三个集合，则

(1) $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$;

证: (1) 由定理14知

$$A\times B\subseteq A\times(B\cup C),\ A\times C\subseteq A\times(B\cup C),$$

因此，$(A\times B)\cup(A\times C)\subseteq A\times(B\cup C)$ 。

对任意的$\langle x, y\rangle \in A\times(B\cup C)$，则$x \in A$ 且$y \in B\cup C$。

考虑两种情况：$y \in B$或$y \in C$：

(a) 若 $y \in B$，则$\langle x, y\rangle \in A\times B$;

(b) 若 $y \in C$，则$\langle x, y\rangle \in A\times C$;

因此$\langle x, y\rangle \in (A\times B)\cup(A\times C)$,

得$A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$

定理15 设 A，B 和 C 为任意三个集合，则

(5) $A\times(B-C) = (A\times B)-(A\times C)$;

证：对任意$\langle x, y\rangle \in A\times(B-C)$,

有$x \in A$且$y\in B-C$，则 $y\in B$且$y \notin C$。

因此$\langle x, y\rangle \in A\times B$且$\langle x, y\rangle \notin A\times C$。

因此 $\langle x, y\rangle\in (A\times B)-(A\times C)$，得

$$A\times(B-C) \subseteq (A\times B)-(A\times C)。$$

反之，对任意$\langle x, y\rangle \in (A\times B)-(A\times C)$，有

$$\langle x, y\rangle \in (A\times B) 且\langle x, y\rangle \notin (A\times C),$$

因此$x \in A$， $y\in B$且$y \notin C$，即$y \in B-C$。

所以$\langle x, y\rangle\in A\times(B-C)$，因此$A\times(B-C) \subseteq (A\times B)-(A\times C)$。故$A\times(B-C) = (A\times B)-(A\times C)$。

例：以下命题是否成立，给出证明或反例：

(1) $(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$

(2) $(A\cup B)\times(C\cup D)=(A\times C)\cup(B\times D)$

解: (1) 成立。对于任意$<x, y>$,

$<x, y>\in(A\cap B)\times(C\cap D)\Leftrightarrow x\in A\cap B\wedge y\in C\cap D$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in B\wedge y\in C\wedge y\in D$

$\Leftrightarrow(x\in A\wedge y\in C)\wedge(x\in B\wedge y\in D)$

$\Leftrightarrow <x, y>\in(A\times C)\wedge<x, y>\in(B\times D)$

$\Leftrightarrow <x, y>\in(A\times C)\cap(B\times D)$

所以，$(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$

(2) 不成立。

反例：$A=\{1\}, B=\{2\}, C=\{3\}, D=\{4\}$

或 $A=\varnothing, B=\{2\}, C=\{3\}, D=\varnothing$

可把两个集合的笛卡儿乘积推广到多个集合上

定义18： 设 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 是任意 n个集合，它们的笛卡儿乘积 $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ 定义为:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$$

$$= \{ \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle \mid \text{当 } i = 1, \ldots, n \text{时，} x_i \in A_i \}$$

- 特别地， 将 $A \times A \times \ldots\ldots \times A$ 记作 A^n

例：n维欧氏空间是实数轴R的n维笛卡尔乘积R^n, 即

$$R^n = \{ \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \mid x_i \in R, 1 \le i \le n \}$$

- n个集合的笛卡儿乘积有与两个集合的笛卡儿乘积相同的运算性质。

例：设A={0, 1}，B={1, 2}，试确定下列集合

(1) $A\times\{1\}\times B$

(2) $A^2\times B$

(3) $(B\times A)^2$

解: (1) $A\times\{1\}\times B=\{\langle 0, 1, 1\rangle, \langle 0, 1, 2\rangle, \langle 1, 1, 1\rangle, \langle 1, 1, 2\rangle\}$

(2) $A^2\times B= A\times A\times B=\{\langle 0, 0, 1\rangle, \langle 0, 0, 2\rangle, \langle 0, 1, 1\rangle, \langle 0, 1, 2\rangle, \langle 1, 0, 1\rangle, \langle 1, 0, 2\rangle, \langle 1, 1, 1\rangle, \langle 1, 1, 2\rangle\}$

(3) $(B\times A)^2=B\times A\times B\times A=\{\langle 1, 0, 1, 0\rangle, \langle 1, 0, 1, 1\rangle, \langle 1, 0, 2, 0\rangle, \langle 1, 0, 2, 1\rangle, \langle 1, 1, 1, 0\rangle, \langle 1, 1, 1, 1\rangle, \langle 1, 1, 2, 0\rangle, \langle 1, 1, 2, 1\rangle, \langle 2, 0, 1, 0\rangle, \langle 2, 0, 1, 1\rangle, \langle 2, 0, 2, 0\rangle, \langle 2, 0, 2, 1\rangle, \langle 2, 1, 1, 0\rangle, \langle 2, 1, 1, 1\rangle, \langle 2, 1, 2, 0\rangle, \langle 2, 1, 2, 1\rangle\}$

例. 证明: 若$A\cap B\neq\varnothing$，则

$$(A\cup B)\times(A\cap B)\subseteq(A\times A)\cup(B\times B)$$

证：对任意 $\langle x, y\rangle\in(A\cup B)\times(A\cap B)$，则

$x\in A\cup B$，且 $y\in A\cap B$。

考虑$x\in A$和 $x\in B$ 两种情况：

(1)当$x\in A$时，$\langle x, y\rangle\in A\times(A\cap B)\subseteq A\times A$

(2)当$x\in B$时，$\langle x, y\rangle\in B\times(A\cap B)\subseteq B\times B$

因此$\langle x, y\rangle\in(A\times A)\cup(B\times B)$。

故$(A\cup B)\times(A\cap B)\subseteq(A\times A)\cup(B\times B)$。

$(A\cup B)\times(A\cap B)\subseteq(A\times B)\cup(B\times A)$??

总结

1. 集合与元素
2. 集合间的相等和包含关系
3. 幂集
4. 集合的运算
5. 有穷集的计数原理
6. 有序偶和笛卡儿乘积

字符串在计算机科学中有重要作用，下面引入有关术语

- 字母表是字母(或称符号)的非空有限集合, 通常记作∑
- 字母表∑上的字符串是由∑中的字母所组成的有穷序列

例：a, ab, cba, aabbac 是 ∑ = {a，b，c}上的字符串

- 字符串的长度：字符串 x 所含字母的个数，称为字符串x的长度，记作 $|x|$

例：$|ab| = 2$，$|a|=1$，$|a^n| = n$

- 若 $|x| = 0$，则称 x 为空串，记做 ε

- **字符串相等**：设 x 和 y 是任意两个字符串，则 $x = y$ 当且仅当 $|x| = |y|$，并且组成 x 的诸字符与组成 y 的诸字符依次相同。

例：若 $x = ab$，$y = ab$，则 $x = y$；

若 $x = ab$，$y = ba$，则 $x \neq y$。

- **字符串的连接**：设 ∑ 是一字母表，x, y是 ∑上字符串，$x = a_1 a_2 \ldots a_n$，$y = b_1 b_2 \ldots b_n$，x 和 y 的连接记作 x y，

$$x\,y = a_1 a_2 \ldots a_n b_1 b_2 \ldots b_n$$

  - $x\varepsilon = \varepsilon x = x$，
  - n个 x 的连接记作 x^n，$x^0 = \varepsilon$，$x^{n+1} = x^n x$
  - $|x\,y| = |x| + |y|$
  - 字符串的连接运算满足结合律

- 设 x, y, z是任意字符串，则称 x 是字符串 x y 的前缀，y 是字符串 x y 的后缀。

例： ε, a, ab, abc, abcc 等都是字符串 abccba 的前缀

ε, a, ba, cba, ccba 等都是字符串 abccba 的后缀

- 称 x， y， z 分别是字符串 x y z 的子串。
- 若 x 是 y 的子串（前缀，后缀）并且 $x \neq y$，则称 x 是 y 的 真子串（真前缀，真后缀）
- ∑上的 所有字符串构成的集合 记做 Σ^*; ∑上的 所有非空字符串的集合 记做 Σ^+
- ε 是 每个字符串的前缀、后缀、子串

Σ^* 的归纳定义如下：

1） $\varepsilon \cup \Sigma \in \Sigma^*$

2）若 $x \in \Sigma^*$ 和 $a \in \Sigma$，则 $xa \in \Sigma^*$ (或 $ax \in \Sigma^*$)

3）Σ^*中的每一个元素都 可通过有限次应用上述1)、2)规则得到。

Σ^+ 的归纳定义如下

1）$\Sigma \subseteq \Sigma^+$

2）若 $x \in \Sigma^+$ 和 $a \in \Sigma$，则 $xa \in \Sigma^+$ (或 $ax \in \Sigma^+$)

3）Σ^+中的每一个元素都 可通过有限次应用上述1)、2)规则得到。

- Σ上的语言：Σ^*的子集

例如：{a，ab，cba，bba} 是 Σ = {a，b，c}上的语言。

- 语言的运算：
  - 语言的乘积 (连接)：设 A 和 B 是Σ上的语言，A 和 B 的乘积记作 AB，$AB = \{xy \mid x \in A \wedge y \in B\}$

例：A = {ε，a，ab }，B = {a，bb }，则

AB = {a，bb，aa，abb，aba，abbb }

  - 语言的幂运算A^n : (1) $A^0 = \{\varepsilon\}$， (2) $A^{n+1} = A^nA$，$n \in N$
  - 语言的闭包运算A^* ： $A^* = \{\varepsilon\} \cup A \cup A^2 \cup \ldots\ldots$
  - A的正闭包A^+ ： $A^+ = A \cup A^2 \cup \ldots\ldots$

例：令 B = {a，bb}，则 B^2 = {aa，abb，bba，bbbb }

B^* = {ε，a，bb， aa，abb，bba，bbbb， …}

定理：设 A, B, C和D 是Σ上的任意语言，则下列关系成立

(1) $A\varnothing = \varnothing A = \varnothing$

(2) $A\{\varepsilon\} = \{\varepsilon\}A = A$

(3) $(AB)C = A(BC)$

(4) 若 $A \subseteq B$ 和 $C \subseteq D$，则 $AC \subseteq BD$

(5) $A(B\cup C) = AB \cup AC$

(6) $(B\cup C)A = BA \cup CA$

(7) $A(B\cap C) \subseteq AB \cap AC$

(8) $(B\cap C)A \subseteq BA \cap CA$