作业 1

习题 1.1

3. 极小化步骤省略

c) ① 若 $a \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$，则 $a. \in A$；

② 若$\alpha \in A$ 且 $a \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$，则$\alpha \bullet a \in A$；

若$\alpha \in A$ 且 $a \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$，则 $a \bullet \alpha \in A$ 。

或

① $\{0., 1., 2., 3., 4., 5., 6., 7., 8., 9.\} \subseteq A$；

② 若$\alpha \in A$ 且 $a \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$，则$\alpha \bullet a \in A$；

若$\alpha \in A$ 且 $a \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$，则 $a \bullet \alpha \in A$ 。

f) ① $\{0\} \subseteq A$ 或 $0 \in A$；

② 若$\alpha \in A$，则$(\sqrt{\alpha}+1)^2 \in A$ 。

10.

若 $A \neq B$，不妨设 $x \in A$ 且 $x \notin B$，则有$\{x\} \in P(A)$且$\{x\} \notin P(B)$，即 $P(A) \neq P(B)$。因此，若 $P(A) = P(B)$，则 $A=B$。

习题 1.2

5. e) 结论成立。分两种情况证明。

(1) 如果 $A \oplus B = \emptyset$ (空集)，则 $A \oplus B = (A-B) \cup (B-A) = \emptyset$，得 $A-B = \emptyset$且 $B-A = \emptyset$，从而 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$，即 $A=B$。

又由 $A \oplus B = A \oplus C = \emptyset$，得 $A=C$。

因此 $B=C$。

(2) 如果 $A\oplus B \neq \emptyset$，则 $A\oplus C\neq \emptyset$。用反证法证明。

假设 $B\neq C$，则 $B\not\subseteq C$ 或者 $C\not\subseteq B$。不妨假设 $B\not\subseteq C$，$C\not\subseteq B$ 时同理证明。

由于 $B\not\subseteq C$，则一定存在 $x\in B$, 但 $x\notin C$.

考虑两种情况：

(a) 若 $x\in A$，则 $x\in A\cap B$，得 $x\notin A\oplus B=A\cup B-A\cap B$；

又由 $x\notin C$ 得 $x\in A-C$，因此 $x\in A\oplus C$

以上与 $A\oplus B = A\oplus C$ 矛盾。

(b) 若 $x\notin A$，则 $x\in B-A$，得 $x\in A\oplus B$，则 $x\in A\oplus C$，与 $x\notin C$，$x\notin A$ 矛盾。

因此假设不成立，即 $B\subseteq C$。

同理可证明 $C\not\subseteq B$ 不成立，因此 $B=C$。

6.

a) 由于 $(A-B)\cup(A-C) = (A\cap\sim B) \cup(A\cap\sim C)=A\cap(\sim B\cup\sim C) =A$

因此$(A-B)\cup(A-C)=A$ 当且仅当 $A\subseteq \sim B\cup\sim C$ 当且仅当$\sim(B\cap C)\subseteq A$。

c) 由于 $(A-B)\cap(A-C) = (A\cap\sim B)\cap(A\cap\sim C) =A\cap(\sim B\cap\sim C)=A$

因此 $(A-B)\cap(A-C) =A$ 当且仅当 $A\subseteq \sim B\cap\sim C$ 当且仅当 $B\cup C\subseteq \sim A$。

e) $(A-B)\oplus(A-C) = (A\cap\sim B)\oplus(A\cap\sim C) =$

$((A\cap\sim B)\cup(A\cap\sim C))-((A\cap\sim B)\cap(A\cap\sim C)) =$

$((A\cap\sim B)\cup(A\cap\sim C))\cap\sim((A\cap\sim B)\cap(A\cap\sim C)) =$

$((A\cap\sim B)\cup(A\cap\sim C))\cap(\sim(A\cap\sim B)\cup\sim(A\cap\sim C)) =$

$((A\cap\sim B)\cup(A\cap\sim C))\cap((\sim A\cup B)\cup(\sim A\cup C)) =$

$(A \cap (\sim B \cup \sim C)) \cap (\sim A \cup (B \cup C)) =$

$(A \cap (\sim B \cup \sim C)) \cap (B \cup C) =$

$A \cap ((B \cup C) \cap \sim (B \cap C)) =$

$A \cap (B \oplus C) = A$

因此，$(A - B) \oplus (A - C) = A$ 当且仅当 $A \subseteq (B \oplus C)$。

作业 2

习题 1.2

9. 证明：

i) 若 $x \in R_0$，则 $x \in R$ 且 $x \le 1$。所以对于任意 $i\in I_+$均有 $x < 1+1/i$。

即对于任意 $i\in I_+$均有 $x \in R_i$。所以，$x\in\bigcap_{i=1}^{\infty}R_i$。

ii) 若 $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty}R_i$，则对于任意 $i\in I_+$均有 $x \in R_i$。所以对于任意 $i\in I_+$均有 $x < 1+1/i$。所以，$x \le 1$，故 $x\in R_0$。

习题 1.4

2.

c) ×

反例 1：A={1, 2}, B={1}, C={3,4}, D={3}，则左边={<2, 4>}，右边={<1, 4>, <2, 3>, <2, 4>};

反例 2：A=C=D=N，B=∅，则左边=∅，而右边=N×N

d) ×

反例：A=C={1, 2}，B={1}，D={2}，则左边={<2, 1>}，而右边={<1, 1>, <2, 1>, <2, 2>}）

7. 证明：题目等价于证明：若<a, b> = <c, d>，则 a = c 且 b = d。

设<a, b> = <c, d>，则{{a, A}, {b, B}} = {{c, A}, {d, B}}

考虑以下情况：

(1)若 $n(\{\{a, A\}, \{b, B\}\})=1$，则$\{a, A\}=\{b, B\}=\{c, A\}=\{d, B\}$ 。因为 $A\neq B$，此时必有 $a=c, b=d$。

(2)若 $n(\{\{a, A\}, \{b, B\}\})=2$，考虑以下情况：

① 若$\{a, A\} = \{c, A\}$，则必有 $\{b, B\} = \{d, B\}$。

所以，$a = c$ 且 $b = d$。

② $\{a, A\} = \{d, B\}$，则必有$\{b, B\} = \{c, A\}$。

因为 $A\neq B$，所以 $a = B, d = A, b = A$ 且 $c = B$。

所以，$a = c$ 且 $b = d$。

故总有：$a = c$ 且 $b = d$。

作业 3

习题 2.1

4.

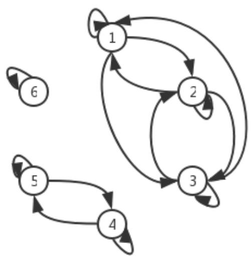
L={<1,2>,<1,3>,<1,6>,<2,3>,<2,6>,<3,6>}

D={<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,6>,<2,2>,<2,6>,<3,3>,<3,6>,<6,6>}

L∩D={<1,2>,<1,3>,<1,6>,<2,6>,<3,6>}

习题 2.2

1. R 是自反的、对称的、传递的。



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & & & \\ 1 & 1 & 1 & & & \\ 1 & 1 & 1 & & & \\ & & & 1 & 1 & \\ & & & 1 & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

4.

d) 设 R 是 A 上的反对称关系，则对任意的 x,y∈A, x≠y, 当<x, y> ∈R 时，一定有<y, x> ∉ R，即<x, y>与<y, x>在 R 中要么都不出现，要么只出现一个。此时有三种情况：

(a) <x, y> ∈R 且 <y, x> ∉ R,

(b) <y, x> ∈R 且<x, y> ∉ R, 或

(c) <x, y> ∉ R 且<y, x> ∉ R。

成对考虑序偶对<x, y>, <y, x>, x≠y, 一共有 n(n-1)/2 对。

另外，对任意的 x ∈A, 有<x, x> ∈R 或者<x, x> ∉ R，这样的序偶<x, x>一共有 n 个。

因此， A 上的不相同的反自反关系的个数为 $3^{n(n-1)/2}\cdot 2^{n}$。

作业 4

习题 2.3

3. **证明：**

因为$\forall x \in A, < x, x > \in I_A \subseteq I_A \cup R \cup R^{-1}$,所以$I_A \cup R \cup R^{-1}$是自反的；

若$< x, y > \in I_A \cup R \cup R^{-1}$，因为$< x, y > \notin I_A$，所以$< x, y > \in R \cup R^{-1}$; 则若$< x, y > \in R$, 那么$< y, x > \in R^{-1} \subseteq I_A \cup R \cup R^{-1}$；若$< x, y > \in R^{-1}$, 那么$< y, x > \in R \subseteq I_A \cup R \cup R^{-1}$, 所以$I_A \cup R \cup R^{-1}$是对称的。

4.i) **证明：** 假设 R 是集合 A 到 B 的二元关系。

对于$\forall x \in \text{dom}\, R^{-1}$, 存在$y \in B$, 使得$< x, y > \in R^{-1}$. 则$< y, x > \in R$, 得 $x \in \text{ranR}$, 所以 $\text{dom}R^{-1} \subseteq ranR$;

对于$\forall x \in \text{ranR}$, 存在$y \in A$, 有$< y, x > \in R$. 则$< x, y > \in R^{-1}$, 得 $x \in domR^{-1}$, 所以 $\text{ranR} \subseteq domR^{-1}$;

因此，$\text{dom}R^{-1} = ranR$

(反证法亦可，证明类似)

习题 2.4

1. $R_2 \circ R_1 = \{< \mathrm{c}, \mathrm{d} >\}$

   $R_1 \circ R_2 = \{< \mathrm{a}, \mathrm{d} >, < \mathrm{a}, \mathrm{c} >\}$

   $R_1^2 = \{< \mathrm{a}, \mathrm{a} >, < \mathrm{a}, \mathrm{b} >, < \mathrm{a}, \mathrm{d} >\}$

   $R_2^2 = \{< \mathrm{b}, \mathrm{b} >, < \mathrm{c}, \mathrm{c} >, < c, d >\}$

4. 设R_1, R_2, R_3, R_4是$A = \{1,2,3\}$上的二元关系

   令:

   $R_1 = \{< 1,2 >, < 1,3 >\}$

   $R_2 = \{< 2,2 >\}$

   $R_3 = \{< 2,3 >, < 3,2 >\}$

   $R_4 = \{< 2,1 >, < 3,1 >\}$

   则:

   $R_1 \circ (R_2 \cap R_3) = \emptyset$

   $(R_1 \circ R_2) \cap (R_1 \circ R_3) = \{< 1,2 >\}$

   $(R_2 \cap R_3) \circ R_4 = \emptyset$

   $(R_2 \circ R_4) \cap (R_3 \circ R_4) = \{< 2,1 >\}$

   满足条件

   （此题答案不唯一，若有其它解法，满足条件即可）

作业 5

习题 2.4

5.(b)错误，反例：

令$\mathrm{A}=\{1,2\}, R_1=\{<1,2>\}, R_2=\{<2,1>\}$，$R_1$和$R_2$都是反自反的。

则$R_1 \circ R_2=\{<1,1>\}$，不是反自反的

(d)错误，反例：

令$\mathrm{A}=\{1,2,3\}, R_1=\{<1,3>\},<2,1>\}, R_2=\{<3,2>,<1,1>\}, R_1$和$R_2$都是反对称的

则$R_1 \circ R_2=\{<1,2>,<2,1>\}$，不是反对称的

（反例正确即可）

10. 证明：

对于任意 $<\mathrm{x}, \mathrm{y}>\in R^2$, 存在$z \in A$, 使得$<\mathrm{x}, \mathrm{z}>\in \mathrm{R},<\mathrm{z}, \mathrm{y}>\in \mathrm{R}$, 由 R 的传递性可知,$<\mathrm{x}, y>\in \mathrm{R}$, 所以$R^2 \subseteq R$。

对于$\forall<\mathrm{x}, \mathrm{y}>\in \mathrm{R}$,由 R 的自反性可知,$<\mathrm{x}, \mathrm{x}>$ (或 $<\mathrm{y}, y>) \in \mathrm{R}$, 因此$<\mathrm{x}, \mathrm{y}>\in R^2$,所以$\mathrm{R} \subseteq R^2$。

综上所述，得 $R^2=R$

习题 2.5

4.证明:

(a) $r(R_1 \cap R_2) = (R_1 \cap R_2) \cup I_A$

$= (R_1 \cup I_A) \cap (R_2 \cup I_A) = r(R_1) \cap r(R_2)$

(b) 由于 $R_1 \cap R_2 \subseteq R_1$，所以$s(R_1 \cap R_2) \subseteq s(R_1))$ 。

同理，由$R_1 \cap R_2 \subseteq R_2$，得$s(R_1 \cap R_2) \subseteq s(R_2))$。

故 $s(R_1 \cap R_2) \subseteq s(R_1) \cap s(R_2)$

(c) 由于$R_1 \cap R_2 \subseteq R_1$，所以 $t(R_1 \cap R_2) \subseteq t(R_1)$。

同理，由 $R_1 \cap R_2 \subseteq R_2$，得 $t(R_1 \cap R_2) \subseteq t(R_2)$。

故 $t(R_1 \cap R_2) \subseteq t(R_1) \cap t(R_2)$

反例:

令$\mathrm{A} = \{1,2\}, R_1 = \{<1,2>\}, R_2 = \{<2,1>\}$,则 $\mathrm{s}(R_1) \cap s(R_2) = \{<1,2>,<2,1>\}, s(R_1 \cap R_2) = \emptyset$。

令$\mathrm{A} = \{1,2,3\}, R_1 = \{<1,2>,<2,1>\}, R_2 = \{<1,3>,<3,1>\}$,

则 $\mathrm{t}(R_1) \cap t(R_2) = \{<1,1>\}, t(R_1 \cap R_2) = \emptyset$。

6. 令$\mathrm{A} = \{1,2\}, \mathrm{R} = \{<1,2>\}$

则$\mathrm{st(R)} = \{<1,2>,<2,1>\}$

$\mathrm{ts(R)} = \{<1,2>,<2,1>,<1,1>,<2,2>\}$

此时$\mathrm{st(R)} \neq ts(\mathrm{R})$

(以上两题反例合理即可)

作业 6

习题 2.8

3．解:

（a）断言为真。

对于$\forall \mathrm{x} \in \mathrm{S}$，由于 R 是半序的，故 R 自反，所以$< x,x >\in R|_s$，所以$R|_s$自反；

对于$\forall < x,y >\in R|_s$，由于 R 的反对称性，$< y,x >\notin R$，得$< y,x >\notin R|_s$，所以$R|_s$反对称；

对于$\forall < x,y >, < y,z >\in R|_s$，由于 R 的传递性得$< x,z >\in R$。由于 x,z∈S，得$< x,z >\in R|_s$，所以$R|_s$传递；

综上所述得，$R|_s$为 S 上的半序。

（b）断言为真

对于$\forall \mathrm{x} \in \mathrm{S}$，由于 R 是拟序的，故 R 反自反，即$< x,x >\notin R$。所以$< x,x >\notin R|_s$，因此，$R|_s$反自反；

对于$\forall < x,y >, < y,z >\in R|_s$，由于 R 的传递性，R 的传递性得$< x,z >\in R$。又由 x,z∈S，得 $< x,z >\in R|_s$，所以$R|_s$传递；

所以$R|_s$为 S 上的拟序

（c）断言为真。

由（a）可知，$R|_s$为半序;

对于$\forall \mathrm{x,y} \in \mathrm{S}$，由于 R 是全序的，所以$< x,y >$ 或者 $< \mathrm{y,x} >\in R$，所以 $< x,y >$ 或者 $< \mathrm{y,x} >\in R|_s$，所以$R|_s$是全序的。

（d）断言为真

由（a）可知，$R|_s$为半序；

对于$\forall X \subseteq S$且$X \neq \emptyset$，则 $X \subseteq R$，由于 R 良序，所以X存在最小元，所以$R|_S$也为良序

6．解：

（a）断言为真的是x_4Rx_1，x_1Rx_1

（b）最大元为x_1，没有最小元。极大元为x_1，极小元为x_4，x_5

（c）$\{x_2, x_3, x_4,\}$的上界为x_1，上确界x_1；下界为x_4，下确界为x_4 。

$\{x_3, x_4, x_5\}$的上界为x_1和x_3。上确界为x_3；没有下界和下确界。

$\{x_1, x_2, x_3\}$的上界为x_1，上确界x_1。下界为x_4，下确界为x_4。

8．证明：：(反证法)设 S 为 A 的任意一个非空有限子集，且 S 没有极小元。

则对任意的 $a_0 \in S$，存在 $a_1 \in S$，使得 $a_1 \leq a_0$。

可以证明，对任意的 $n \in I+$，若存在 $a_0, a_1, \ldots, a_n \in S$，满足 $a_n \leq a_{n-1} \leq \ldots \leq a_1 \leq a_0$，由于 S 没有极小元，则一定存在 a_{n+1}，使得 $a_{n+1} \leq a_n$。

由归纳法知，S 中一定存在一个无限递减序列 $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$，与 S 是有限集合矛盾。因此 S 一定有一个极小元。

同理可证 S 一定有一个极大元。