目 录

第一章　集　　合

集合是现代数学中最重要的基本概念之一。

众所周知，在任何一种数学理论中，不可能对其中每个概念都严格定义。比如说，它的第一个概念就无法定义，因为已没有能用于定义这个概念的更原始的概念了。我们称这种不能严格定义的概念为该数学理论的原始概念，而称其余的概念为原始概念的派生概念。如在欧氏几何学中，“点”和“线”是原始概念，而“三角形”和“圆”则为派生概念。在这里，我们把“集合”就作为不能严格定义的原始概念。

本章主要介绍集合及其表示、集合的运算、自然数和归纳法。

§1.1　集合及其表示

因为集合是不能严格定义的原始概念，所以对它就只能给予直观描述。所谓集合，是由某些可以互相区分的任意对象、如数、变量、函数、符号、字母、数字、图、语句、程序或事件等等，汇集在一起所组成的一个整体。所涉及的各个对象，统称为元素。组成一个集合的各个对象，称为这个集合的元素或成员。

例 1　以下是一些集合的例子：

1)　中国人的集合；

2)　中国的山与河的集合；

3)　1000 以内的素数的集合；

4)　方程 $x^2+x+1=0$ 的实根的集合；

5)　自然数(即非负整数)的集合；

6)　直线 $y=2x-5$ 上的点的集合。

在组成集合的对象中，也允许有集合，即允许把集合作为其它集合的元素。

例 2　在以下集合的元素中，有的就是集合：

1)　例 1 中列举的集合的集合；

2)　由 a,b 和自然数的集合一起所组成的集合。

对例 2 的 1)，集合的每个元素都是集合；对例 2 的 2)，集合的一些元素是集合，另一些元素不是集合。

通常，我们用大写拉丁字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，用小写拉丁字母 $a,b,c,\cdots$ 表示元素。用以下字母表示固定集合：

$\boldsymbol{Q}$——有理数的集合；

$\boldsymbol{N}$——自然数的集合；

$\boldsymbol{I}$——整数的集合；

$\boldsymbol{R}$——实数的集合；

$\boldsymbol{C}$——复数的集合；

$\boldsymbol{E}_v$——偶自然数的集合；

$\boldsymbol{O}_d$——奇自然数的集合；

$\boldsymbol{N}_m$——小于 m 的自然数的集合；

$\boldsymbol{I}_+$——正整数的集合；

$\boldsymbol{I}_-$——负整数的集合；

$\boldsymbol{R}_+$——正实数的集合；

$\boldsymbol{R}_-$——负实数的集合。

设 a 为任意一个对象，A 为任意一个集合。在 a 和 A 之间有且仅有以下两种情况之一出现：

(1) a 为 A 的元素，记为"$a\in A$"或"$A\ni a$"，并称为"a 属于 A"或"A 含有 a"；

(2) a 不为 A 的元素，记为"$a\notin A$"或"$A\not\ni a$"，有时也记为"$a\overline{\in}A$"或"$A\overline{\ni}a$"，并称"a 不属于 A"或"A 不含有 a".

当 $a_1\in A,a_2\in A,\cdots,a_n\in A$ 时，常简写作 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in A$.

定义 1.1.1 设 A 为任意一个集合，$n(A)$表示 A 含有的元素的个数。

i) 若 $n(A)=0$，则称 A 为空集；

ii) 若 $n(A)$为自然数，则称 A 为有限集；

iii) 若 $n(A)$为无穷大，则称 A 为无限集；

iv) 若 $n(A)\neq 0$，则称 A 为非空集。

显然，空集是不含有任何元素的有限集，常用符号$\varnothing$表示。

在例 1 所列举的集合中，1)、2)和 3)都是非空有限集(即不是空集的有限集)，4)为空集，而 5)和 6)都是无限集。

在上面列举的常用的重要集合中，只有 $\boldsymbol{N}_m$ 为有限集，其余的都是无限集。

定义 1.1.2 设 A,B 为任意两个集合。

i) 若对每个 $a\in A$ 皆有 $a\in B$，则称 A 为 B 的子集或 B 包含 A，也称 B 为 A 的母集，记为 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$.

ii) 若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则称 A 和 B 相等，记为 $A=B$；否则，称 A 和 B 不相等，并记为 $A\neq B$.

iii) 若 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$，则称 A 为 B 的真子集或 B 真包含 A，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

由此可知，两个集合相等，仅指它们所含有的元素完全相同。所以，我们要想确定一个集合，只需要确定：哪些元素属于这个集合，哪些元素不属于这个集合。至于这些元素用什么方法描述或指定，并无关紧要。因此，我们可以用种种不同的方法描述一个集合。常用的方法有以下四种：

1) 列举法

依照任意一种次序，不重复地列举出集合的全部元素，并用一对花括号括起来。例如 10 以内的素数的集合$=\{2,3,5,7\}$.

列举法仅适用于所含有的元素个数不太多的有限集。

2） 部分列举法

依照任意一种次序，不重复地列举出集合的一部分元素。这部分元素要能充分体现出该集合的元素在上述次序下的构造规律，从而能够很容易地获得该集合中的任何一个未列举出的元素。未列举出的元素用"…"代替。然后，用一对花括号把已列举出的元素和"…"一起括起来。例如

$$\boldsymbol{N} = \{0,1,2,\cdots\}$$
$$\boldsymbol{E}_v = \{0,2,4,\cdots\}$$
$$\boldsymbol{O}_d = \{1,3,5,\cdots\}$$

部分列举法仅适用于元素的构造规律比较明显、简单的集合。它们可以是无限集，也可以是元素个数较多的有限集。

3） 命题法

用这种方法定义一个集合 A 时，要给出一个与 x 有关的命题 $P(x)$，使得

$$x \in A \text{ 当且仅当 } P(x) \text{ 为真}$$

并称 A 为"使 $P(x)$ 为真的 x 的集合"，记为

$$A = \{x | P(x)\} \text{ 或 } A = \{x : P(x)\}$$

例如，

$$\boldsymbol{N}_m = \{n | n \in \boldsymbol{N} \text{ 且 } 0 \leq n < m\}, m \in \boldsymbol{N}$$

$$\{1,2\} = \{x | x \in \boldsymbol{R} \text{ 且 } x^2 - 3x + 2 = 0\}$$

4） 归纳定义法

用这种方法定义一个非空集合 A 时，一般包括以下三步：

i) 基本项

已知某些元素（常用 S_0 表示由这些元素组成的非空集合）属于 A（即 $S_0 \subseteq A$）. 这是构造 A 的基础，并保证 A 不空。

ii) 归纳项

给出一组规则，从 A 中元素出发，依据这些规则所获得的元素，仍然都是 A 中的元素。这是构造 A 的关键步骤。

iii) 极小化

如果集合 $S \subseteq A$ 也满足 i) 和 ii)，则 $S = A$. 这说明，A 中每个元素都可以通过有限次使用 i) 和 ii) 来获得，它保证所构造出的集合 A 是唯一的。

用归纳定义法定义自然数集合 $\boldsymbol{N}$，乃是数学归纳法的理论基础，在 §1.3 中还要详述。由于步骤 iii) 在每次使用时都一样，所以常常省略不写。但是这并不是说没有这一步。

例 3 设 $k \in \boldsymbol{I}_+$. 若 A_k 表示能够被 k 整除的自然数的集合，则 A_k 可以用归纳定义法定义如下：

i) $0 \in A_k$;

ii) 若 $n \in A_k$，则 $(n+k) \in A_k$.

例 4 设 Σ 为任意一个符号表，即一个由符号组成的非空有限集。我们称由 Σ 中的有

限多个符号并置在一起所组成的符号串为 Σ 上的字，不含任何符号的空符号串称为空字，用 ϵ 表示。若用 Σ^* 表示 Σ 上的字的集合，则 Σ^* 可以用归纳定义法定义如下：

i) $\epsilon \in \Sigma^*$；

ii) 若 $\alpha \in \Sigma^*$ 且 $a \in \Sigma$，则 $a\alpha \in \Sigma^*$.

若用 Σ^+ 表示 Σ 上的非空字的集合，则 Σ^+ 可以用归纳定义法定义如下：

i) $\Sigma \subseteq \Sigma^+$；

ii) 若 $\alpha, \beta \in \Sigma^+$，则 $\alpha\beta \in \Sigma^+$.

定理 1.1.1 若 A,B 和 C 为任意三个集合，则有

i) $\varnothing \subseteq A$；

ii) $A \subseteq A$；

iii) 若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq C$，则 $A \subseteq C$；

iv) 若 $A \subset B$ 且 $B \subset C$，则 $A \subset C$.

证明 我们只证 i)，其余的留作练习。

用反证法。假定 $\varnothing \subseteq A$ 不成立，则必存在某个 $a \in \varnothing$ 使 $a \notin A$，但 $a \in \varnothing$ 与 $\varnothing$ 为空集（即 $\varnothing$ 不含有任何元素）矛盾。

定理 1.1.2 空集是唯一的。

证明 设 $\varnothing_1$ 和 $\varnothing_2$ 为任意两个空集。根据定理 1.1.1 知，$\varnothing_1 \subseteq \varnothing_2$ 且 $\varnothing_2 \subseteq \varnothing_1$. 所以 $\varnothing_1 = \varnothing_2$.

定义 1.1.3 设 A 为任意集合。若令

$$\mathscr{P}(A) = \{x \mid x \subseteq A\},$$

则称 $\mathscr{P}(A)$ 为 A 的幂集（A 的幂集有时也记为 2^A，即 $2^A = \mathscr{P}(A)$）.

例 5 我们不难验证有

1) $\mathscr{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$；

2) $\mathscr{P}(\{a\}) = \{\varnothing, \{a\}\}$；

3) $\mathscr{P}(\{a,b\}) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$.

定理 1.1.3 若 A,B 为任意两个集合，则有

i) $\varnothing \in \mathscr{P}(A)$；

ii) $A \in \mathscr{P}(A)$；

iii) 若 $A \subseteq B$，则 $\mathscr{P}(A) \subseteq \mathscr{P}(B)$；

iv) 若 $A \subset B$，则 $\mathscr{P}(A) \subset \mathscr{P}(B)$.

证明

i)和 ii)可由定理 1.1.1 和定义 1.1.3 直接推出。

iii)若 $x \in \mathscr{P}(A)$，则 $x \subseteq A$. 因为 $A \subseteq B$，所以 $x \subseteq B$. 因此 $x \in \mathscr{P}(B)$. 从而知道 $\mathscr{P}(A) \subseteq \mathscr{P}(B)$ 成立。

iv) 因为 $A \subset B$，所以 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$. 从而知道 $B \in \mathscr{P}(B)$ 且 $B \notin \mathscr{P}(A)$. 因此，根据刚证明的 iii)即知，$\mathscr{P}(A) \subset \mathscr{P}(B)$.

定理 1.1.4 若 A 为有限集，则

$$n(\mathscr{P}(A)) = 2^{n(A)}.$$

证明 设 $n(A)=m$. 因为对每个不大于 m 的自然数 i, A 的恰有 i 个元素的子集个数，为从 m 个不同的元素中每次取出 i 个元素的不同组合数，即 C_m^i. 所以 A 的不同子集之总数 $n(\mathscr{P}(A))$ 为

$$\begin{aligned} n(\mathscr{P}(A)) &= C_m^0 + C_m^1 + \cdots + C_m^m \\ &= (1+1)^m \\ &= 2^m \\ &= 2^{n(A)} \end{aligned}$$

最后，我们指出，前面给予集合的直观描述不能当做集合的严格定义，因为它不能避免逻辑上的矛盾。这可由下面著名的罗素(B. Russell)悖论来说明。

例 6(罗素悖论) 若设

$$\mathscr{S} = \{S \mid S \text{ 是集合且 } S \notin S\},$$

则 $\mathscr{S}$ 不是集合。

证明 用反证法。

假定 $\mathscr{S}$ 是集合，则有且仅有以下的两种情况之一出现：

i) $\mathscr{S} \in \mathscr{S}$. 这时由 $\mathscr{S}$ 的定义知 $\mathscr{S} \notin \mathscr{S}$;

ii) $\mathscr{S} \notin \mathscr{S}$. 这时由 $\mathscr{S}$ 的定义知 $\mathscr{S} \in \mathscr{S}$.

总之，恒有

$$\mathscr{S} \in \mathscr{S} \text{ 当且仅当 } \mathscr{S} \notin \mathscr{S}$$

这是一个矛盾。所以 $\mathscr{S}$ 不可能是集合。

为了解决集合论中的悖论问题，人们从 20 世纪初就开始了公理化集合论的研究，并提出了集合论的种种公理系统。这超出了本书的范围，有兴趣的读者请参看有关著作。

由于例 6 中的 $\mathscr{S}$ 符合我们给予集合的直观描述，但又不是集合，这不免会引起人们的怀疑：我们给予集合的直观描述还有没有意义？尽管集合论中的悖论产生的原因比较复杂，但在本书和计算机科学中所涉及的集合，都不会引出悖论，所以我们给予集合的直观描述还是有意义的。这也正是我们以朴素集合论为满足的原因。

习 题 1.1

1. 用列举法给出下列集合：

a) 小于 5 的非负整数的集合；

b) 10 到 20 之间的素数的集合；

c) 不超过 65 的 12 之正整数倍数的集合。

2. 用命题法给出下列集合：

a) 不超过 100 的自然数的集合；

b) $\boldsymbol{E}_v$ 和 $\boldsymbol{O}_d$;

c) 10 的整倍数的集合。

3. 用归纳定义法给出下列集合：

a) 允许有前 0 的十进制无符号整数的集合；

b) 不允许有前 0 的十进制无符号整数的集合；

c) 允许有前 0 和后 0 的有有限小数部分的十进制无符号实数的集合；

d) 不允许有前 0 的二进制无符号偶数的集合；

e) $\boldsymbol{E}_v$ 和 $\boldsymbol{O}_d$；

f) 集合$\{0,1,4,9,16,25,\cdots\}$.

4. 确定下列集合中哪些是相等的：

$A=\{x \mid x$ 为偶数且 x^2 为奇数$\}$

$B=\{x \mid$有 $y\in \boldsymbol{I}$ 使 $x=2y\}$

$C=\{1,2,3\}$

$D=\{0,2,-2,5,-3,4,-4\}$

$E=\{2x \mid x\in \boldsymbol{I}\}$

$F=\{3,3,2,1,2\}$

$G=\{x \mid x\in \boldsymbol{I}$ 且 $x^3-6x^2-7x-6=0\}$

5. 确定下列关系中哪些是正确的，并简单说明理由。

a) $\varnothing\subseteq\varnothing$

b) $\varnothing\in\varnothing$

c) $\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$

d) $\varnothing\in\{\varnothing\}$

e) $\{a,b\}\subseteq\{a,b,c,\{a,b,c\}\}$

f) $\{a,b\}\in\{a,b,c,\{a,b,c\}\}$

g) $\{a,b\}\subseteq\{a,b,\{\{a,b\}\}\}$

h) $\{a,b\}\in\{a,b,\{\{a,b\}\}\}$

6. 设 A、B 和 C 为集合。证明或用反例推翻以下的各个命题：

a) 若 $A\notin B$ 且 $B\notin \boldsymbol{C}$，则 $A\notin \boldsymbol{C}$.

b) 若 $A\in B$ 且 $B\notin \boldsymbol{C}$，则 $A\notin \boldsymbol{C}$.

c) 若 $A\subseteq B$ 且 $B\notin \boldsymbol{C}$，则 $A\notin \boldsymbol{C}$.

d) 若 $A\in B$ 且 $B\in \boldsymbol{C}$，则 $A\in \boldsymbol{C}$.

7. 若 A,B 为集合，则 $A\subseteq B$ 与 $A\in B$ 能同时成立吗？请证明你的结论。

8. 列举出下列集合中每个集合的所有子集：

a) $\{1,2,3\}$

b) $\{1,\{2,3\}\}$

c) $\{\{1,\{2,3\}\}\}$

d) $\{\varnothing\}$

e) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$

f) $\{\{1,2\},\{2,1,1\},\{2,1,1,2\}\}$

g) $\{\{\varnothing,2\},\{2\}\}$

9. 给出下列集合的幂集：

a) $\{a,\{b\}\}$

b) $\{1,\varnothing\}$

c) $\{x,y,z\}$

d) $\{\varnothing,a,\{a\}\}$

e) $\mathscr{P}(\{\varnothing\})$

10. 设$\mathscr{P}(A)=\mathscr{P}(B)$. 证明$A=B$.

§1.2 集合的运算

通常，在我们讨论某类问题时，往往有一个固定的集合，它含有我们所涉及的全部元素。我们称这个固定集合为全集或空间，并常用U表示。这时，其余的集合就都是全集U的子集。有时，我们并不具体指明全集是什么，但总是假定所涉及的每个集合都是全集的一个子集。

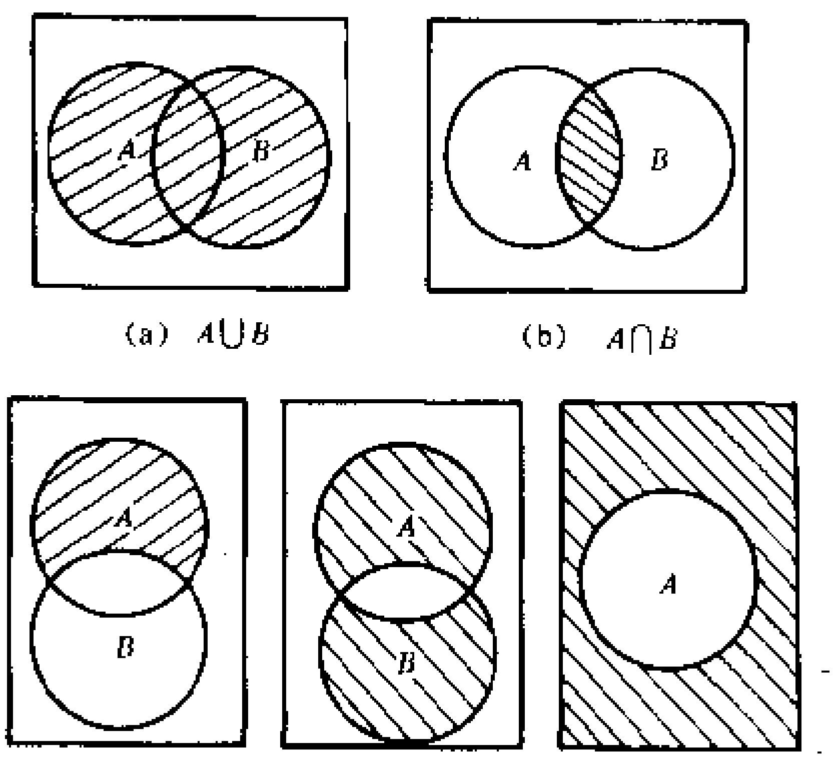
定义 1.2.1 设A,B为任意两个集合。令

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$
$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$$
$$A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

我们分别称$A\cup B$,$A\cap B$,$A-B$和$A\oplus B$为A与B的并、交、差和对称差。我们还把$U-A$称为A的补集，并用$\sim A$表示。

如果$A\cap B=\varnothing$，则称A与B不相交。

对集合的运算，我们可以用文氏图(见图1.2.1)直观地表示。图中阴影区表示运算的结果。



(a) $A\cup B$ (b) $A\cap B$

(c) $A-B$ (d) $A\oplus B$ (e) $\sim A$

图 1.2.1 集合运算的文氏图

例 1 若取$U=\{0,1,2,3,4,5\}$，$A=\{1,2,5\}$及$B=\{2,4\}$时，则有

$$A \cup B = \{1,2,4,5\},$$

$$A \cap B = \{2\},$$
$$A - B = \{1,5\},$$
$$A \ominus B = \{1,4,5\},$$
$$\sim A = \{0,3,4\},$$
$$\sim B = \{0,1,3,5\}.$$

定理 1.2.1 设 A、B 和 C 为任意三个集合。

i) $A \subseteq A \cup B$ 且 $B \subseteq A \cup B$;

ii) $A \cap B \subseteq A$ 且 $A \cap B \subseteq B$;

iii) $A - B \subseteq A$;

iv) $A - B = A \cap \sim B$;

v) 若 $A \subseteq B$,则 $\sim B \subseteq \sim A$;

vi) 若 $A \subseteq C$ 且 $B \subseteq C$,则 $A \cup B \subseteq C$,

vii) 若 $A \subseteq B$ 且 $A \subseteq C$,则 $A \subseteq B \cap C$;

这个定理的证明很容易,留作练习。

定理 1.2.2 若 A、B 为任意两个集合,则以下条件互相等价:

i) $A \subseteq B$;

ii) $A \cup B = B$;

iii) $A = A \cap B$.

证明

i)⇒ii) 任取 $x \in A \cup B$,则 $x \in A$ 或 $x \in B$. 但因 $A \subseteq B$,所以总有 $x \in B$. 这表明 $A \cup B \subseteq B$. 再根据定理 1.2.1 的 i)即得到 $A \cup B = B$.

ii)⇒iii) 任取 $x \in A$,则 $x \in A \cup B$. 但因 $A \cup B = B$,所以 $x \in B$. 因此 $x \in A \cap B$. 这表明 $A \subseteq A \cap B$. 再根据定理 1.2.1 的 ii)即得到 $A = A \cap B$.

iii)⇒i) 任取 $x \in A$,则 $x \in A \cap B$,所以 $x \in B$. 这表明 $A \subseteq B$.

关于集合运算的一些基本定律,我们列举如下:

1) 幂等律

$A \cup A = A$

$A \cap A = A$

2) 结合律

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

3) 交换律

$A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

4) 分配律

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

5) 同一律

$A\cup\varnothing=A$

$A\cap U=A$

6） 零律

$A\cup U=U$

$A\cap\varnothing=\varnothing$

7） 互补律

$A\cup\sim A=U$

$A\cap\sim A=\varnothing$

8） 吸收律

$A\cup(A\cap B)=A$

$A\cap(A\cup B)=A$

9） 德·摩尔根(De Morgan)律

$\sim(A\cup B)=\sim A\cap\sim B$

$\sim(A\cap B)=\sim A\cup\sim B$

10） 对合律

$\sim(\sim A)=A$

11） $\sim U=\varnothing$

$\sim\varnothing=U$

这些定律的证明并不难。下面我们仅以对合律、分配律和德·摩尔根律为例来说明一般的证明方法。

先证对合律。

对任意的 $x\in U$，因为 $x\in A$ 当且仅当 $x\notin\sim A$，$x\notin\sim A$ 当且仅当 $x\in\sim(\sim A)$，所以，$x\in A$ 当且仅当 $x\in\sim(\sim A)$. 这表明 $\sim(\sim A)=A$.

再证德·摩尔根律。

对任意的 $x\in U$，因为 $x\in\sim(A\cup B)$ 当且仅当 $x\notin A\cup B$，$x\notin A\cup B$ 当且仅当 $x\notin A$ 且 $x\notin B$，即 $x\in\sim A$ 且 $x\in\sim B$，所以 $x\in\sim(A\cup B)$ 当且仅当 $x\in\sim A\cap\sim B$. 这表明 $\sim(A\cup B)=\sim A\cap\sim B$.

当用 $\sim A$ 和 $\sim B$ 分别代替刚证明的 $\sim(A\cup B)=\sim A\cap\sim B$ 中之 A 和 B 时，就得到

$$\sim(\sim A\cup\sim B)=\sim(\sim A)\cap\sim(\sim B)$$

但由对合律知道 $A\cap B=\sim(\sim A)\cap\sim(\sim B)$，所以

$$\sim(A\cap B)=\sim(\sim(\sim A\cup\sim B))=\sim A\cup\sim B$$

最后，我们来证分配律。

因为 $A\subseteq A\cup B$ 且 $A\subseteq A\cup C$，所以 $A\subseteq(A\cup B)\cap(A\cup C)$. 因为 $B\cap C\subseteq B\subseteq A\cup B$ 且 $B\cap C\subseteq C\subseteq A\cup C$，所以 $B\cap C\subseteq(A\cup B)\cap(A\cup C)$. 因此得到

$$A\cup(B\cap C)\subseteq(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

另一方面，任取 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$，则 $x\in A\cup B$ 且 $x\in A\cup C$. 如果 $x\notin A$，则由 $x\in A\cup B$ 知 $x\in B$，由 $x\in A\cup C$ 知 $x\in C$，所以 $x\in B\cap C$. 从而知道，总有 $x\in A$ 或 $x\in B\cap C$，即 $x\in A\cup(B\cap C)$. 这表明 $(A\cup B)\cap(A\cup C)\subseteq A\cup(B\cap C)$.

总结以上的结果，就得到

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

若用$\sim A$，$\sim B$ 和$\sim C$ 分别代替上式中的 A，B 和 C 即可得到

$$\sim A \cup (\sim B \cap \sim C) = (\sim A \cup \sim B) \cap (\sim A \cup \sim C)$$

根据德・摩尔根律和对合律，可以得到

$$\begin{aligned}&\sim (\sim A \cup (\sim B \cap \sim C))\\ &= \sim (\sim A) \cap \sim (\sim B \cap \sim C)\\ &= A \cap (\sim (\sim B) \cup \sim (\sim C))\\ &= A \cap (B \cup C)\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}&\sim ((\sim A \cup \sim B) \cap (\sim A \cup \sim C))\\ &= \sim (\sim A \cup \sim B) \cup \sim (\sim A \cup \sim C)\\ &= (A \cap B) \cup (A \cap C)\end{aligned}$$

所以

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

我们下面来推广求两个集合的并和交的运算。为此，我们称完全以集合为元素的集合为集类，并常用字母 $\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$，$\mathscr{C}$ 等表示。

定义 1.2.2 设 $\mathscr{B}$ 为任意集类。

i) 称集合$\{x \mid 有\ B \in \mathscr{B}\ 使\ x \in B\}$为 $\mathscr{B}$ 的广义并，并记为$\bigcup \mathscr{B}$；

ii) 若 $\mathscr{B} \neq \varnothing$，则称集合$\{x \mid 若\ B \in \mathscr{B}，则\ x \in B\}$为 $\mathscr{B}$ 的广义交，并记为$\bigcap \mathscr{B}$.

在公理化的集合论中已经证明，定义 1.2.2 给出的$\bigcup \mathscr{B}$ 和$\bigcap \mathscr{B}$ 都是集合，而且所附加的条件也都是必不可少的。对此，我们就不再深入讨论了。

下面我们再引进一些关于广义并和广义交的常用记号：

1) 若 $\mathscr{B} = \{B_0, B_1, \cdots, B_m\}$，则记

$$\bigcup \mathscr{B} = B_0 \cup B_1 \cup \cdots \cup B_m = \bigcup_{i=0}^{m} B_i$$

$$\bigcap \mathscr{B} = B_0 \cap B_1 \cap \cdots \cap B_m = \bigcap_{i=0}^{m} B_i$$

2) 若 $\mathscr{B} = \{B_i \mid i \in N\}$，则记

$$\bigcup \mathscr{B} = \bigcup_{i=0}^{\infty} B_i$$

$$\bigcap \mathscr{B} = \bigcap_{i=0}^{\infty} B_i$$

3) 若有集合 Λ 使 $\mathscr{B} = \{B_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$，则记

$$\bigcup \mathscr{B} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$$

$$\bigcap \mathscr{B} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$$

例 2 我们不难验证：

i) $\bigcup \varnothing = \bigcup \{\varnothing\} = \bigcap \{\varnothing\} = \varnothing$；

ii) $\bigcup \{\{a\}, \{a,b\}, \{\{a,b\}\}\} = \{a, b, \{a,b\}\}$；

iii) $\bigcap\{\{a\},\{a,b\},\{\{a,b\}\}\}=\varnothing$;

iv) $\bigcap\{\{1,2,8\},\{2,8\},\{4,8\}\}=\{8\}$.

定理 1.2.3 若 A 为任意集合，$\mathscr{B}$ 为任意集类，则有：

i) 若 $\mathscr{B}\neq\varnothing$，则 $A\cup(\bigcup\mathscr{B})=\bigcup\{A\cup B\mid B\in\mathscr{B}\}$；

ii) 若 $\mathscr{B}\neq\varnothing$，则 $A\cap(\bigcap\mathscr{B})=\bigcap\{A\cap B\mid B\in\mathscr{B}\}$；

iii) 若 $\mathscr{B}\neq\varnothing$，则 $A\cup(\bigcap\mathscr{B})=\bigcap\{A\cup B\mid B\in\mathscr{B}\}$；

iv) $A\cap(\bigcup\mathscr{B})=\bigcup\{A\cap B\mid B\in\mathscr{B}\}$；

v) 若 $\mathscr{B}\neq\varnothing$，则 $\sim(\bigcap\mathscr{B})=\bigcup\{\sim B\mid B\in\mathscr{B}\}$；

vi) 若 $\mathscr{B}\neq\varnothing$，则 $\sim(\bigcup\mathscr{B})=\bigcap\{\sim B\mid B\in\mathscr{B}\}$.

其中的 iii)和 iv)称为广义分配律；v)和 vi)称为广义德·摩尔根律。

证明 只证 iv)和 v)，其余的留作练习。

iv) 任取 $x\in A\cap(\bigcup\mathscr{B})$，则 $x\in A$ 且 $x\in\bigcup\mathscr{B}$. 由 $x\in\bigcup\mathscr{B}$ 知有 $B\in\mathscr{B}$ 使 $x\in B$. 所以 $x\in A\cap B$，即 $x\in\bigcup\{A\cap B\mid B\in\mathscr{B}\}$. 这表明 $A\cap(\bigcup\mathscr{B})\subseteq\bigcup\{A\cap B\mid B\in\mathscr{B}\}$.

另一方面，任取 $x\in\bigcup\{A\cap B\mid B\in\mathscr{B}\}$，则有 $B\in\mathscr{B}$ 使 $x\in A\cap B$，即 $x\in A$ 且 $x\in B$. 因此 $x\in A$ 且 $x\in\bigcup\mathscr{B}$，即 $x\in A\cap\bigcup\mathscr{B})$. 这表明 $\bigcup\{A\cap B\mid B\in\mathscr{B}\}\subseteq A\cap(\bigcup\mathscr{B})$.

总结以上的结果，就得到

$$A\cap(\bigcup\mathscr{B})=\bigcup\{A\cap B\mid B\in\mathscr{B}\}$$

v) 任取 $x\in\sim(\bigcap\mathscr{B})$，则 $x\notin\bigcap\mathscr{B}$. 因此，必有 $B\in\mathscr{B}$ 使 $x\notin B$，即 $x\in\sim B$. 从而得到 $x\in\bigcup\{\sim B\mid B\in\mathscr{B}\}$. 这表明 $\sim(\bigcap\mathscr{B})\subseteq\bigcup\{\sim B\mid B\in\mathscr{B}\}$.

另一方面，任取 $x\in\bigcup\{\sim B\mid B\in\mathscr{B}\}$，则有 $B\in\mathscr{B}$ 使 $x\in\sim B$，即 $x\notin B$. 所以 $x\notin\bigcap\mathscr{B}$，即 $x\in\sim(\bigcap\mathscr{B})$. 这表明 $\bigcup\{\sim B\mid B\in\mathscr{B}\}\subseteq\sim(\bigcap\mathscr{B})$.

总结以上的结果，就得到

$$\sim(\bigcap\mathscr{B})=\bigcup\{\sim B\mid B\in\mathscr{B}\}.$$

定理 1.2.4 设 A 为任意集合，$\mathscr{B}$ 为任意集类。

i) 若 $B\in\mathscr{B}$，则 $\bigcap\mathscr{B}\subseteq B$ 且 $B\subseteq\bigcup\mathscr{B}$；

ii) 若对每个 $B\in\mathscr{B}$ 皆有 $A\subseteq B$，则 $A\subseteq\bigcap\mathscr{B}(\mathscr{B}\neq\varnothing)$；

iii) 若对每个 $B\in\mathscr{B}$ 皆有 $B\subset A$，则 $\bigcup\mathscr{B}\subseteq A$.

此定理的证明较容易，留作练习。

定理 1.2.5 若 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 为任意两个集类，则有

$$\bigcup(\mathscr{A}\cup\mathscr{B})=\bigcup\{A\cup B\mid A\in\mathscr{A}\text{ 且 }B\in\mathscr{B}\}=(\bigcup\mathscr{A})\cup(\bigcup\mathscr{B}).$$

这个定理的证明与定理 1.2.3 的证明类似，也请读者自己补出。

在讨论下面的例 3 之前，先引进几个常见的重要符号。

设 $a,b\in\boldsymbol{I}$ 且 $a\neq0$. 我们令

"$a|b$"表示"a 整除 b"；

"$a\nmid b$"表示"a 不能整除 b".

例 3 对每个 $n\in N$，设 $A_n=\{a\mid a\in N,\ 2^n|a\text{ 且 }2^{n+1}\nmid a\}$，求 $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}A_n$.

解 因为对每个 $n\in N$ 皆有 $2^n|0$ 且 $2^{n+1}|0$，所以 $0\notin A_n$. 因此 $0\notin\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}A_n$. 从而得 $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}A_n$

$\subseteq \boldsymbol{I}_+$. 另一方面，任取 $a\in \boldsymbol{I}_+$，必有 $n\in N$ 及奇数 b 使 $a=2^n b$. 因此，$2^n | a$ 且 $2^{n+1}\nmid a$. 所以 $a\in A_n$. 这表明 $a\in \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n$. 因此 $I_+\subseteq \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n$. 综上所述，可知 $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n=\boldsymbol{I}_+$.

习　题　1.2

1. 设 $U=\{1,2,3,4,5\}$，$A=\{1,4\}$，$B=\{1,2,5\}$，$C=\{2,4\}$. 试求下列集合：

a) $A\cap \sim B$;

b) $(A\cap B)\cup \sim C$;

c) $\sim(A\cap B)$;

d) $\sim A\cup \sim B$;

e) $(A-B)-C$;

f) $A-(B-C)$;

g) $(A\oplus B)\oplus C$;

h) $(A\oplus B)\oplus(B\oplus C)$.

2. 设 $A=\{n|n\in \boldsymbol{I}_+$ 且 $n<12\}$，$B=\{n|n\in \boldsymbol{I}_+$ 且 $n\leqslant 8\}$，$C=\{2n|n\in \boldsymbol{I}_+\}$，$D=\{3n|n\in \boldsymbol{I}_+\}$ 且 $E=\{2n-1|n\in \boldsymbol{I}_+\}$. 试用 A, B, C, D 和 E 表达下列集合：

a) $\{2,4,6,8\}$;

b) $\{3,6,9\}$;

c) $\{10\}$;

d) $\{n|n$ 为偶数且 $n>10\}$;

e) $\{n|n$ 为正偶数且 $n\leqslant 10$，或 n 为奇数且 $n\geqslant 9\}$.

3. 证明：

a) 如果 $A\subseteq B$ 且 $C\subseteq D$，则 $A\cup C\subseteq B\cup D$ 且 $A\cap C\subseteq B\cap D$;

b) $A\cap(B-A)=\varnothing$;

c) $A\cup(B-A)=A\cup B$;

d) $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$;

e) $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$;

f) $A-(A-B)=A\cap B$;

g) $A-(B-C)=(A-B)\cup(A\cap C)$.

4. 证明：

a) $A=B$ 当且仅当 $A\oplus B=\varnothing$;

b) $A\oplus B=B\oplus A$;

c) $(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$;

d) $A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$;

e) $(B\oplus C)\cap A=(B\cap A)\oplus(C\cap A)$.

5. 判断以下结论是否成立。如果成立，就给予证明；如果不成立，就用文氏图加以说明。

a) 若 $A\cap C\subseteq B\cap C$ 且 $A\cap \sim C\subseteq B\cap \sim C$，则 $A\subseteq B$;

b) 若 $A\cap B=A\cap C$ 且 $\sim A\cap B=\sim A\cap C$，则 $B=C$；

c) 若 $A\cup B=A\cup C$，则 $B=C$；

d) 若 $A\cap B=A\cap C$，则 $B=C$；

e) 若 $A\oplus B=A\oplus C$，则 $B=C$；

f) 若 $A\subseteq B\cup C$，则 $A\subseteq B$ 或 $A\subseteq C$；

g) 若 $B\cap C\subseteq A$，则 $B\subseteq A$ 或 $C\subseteq A$.

6. 给出下列各式成立的充分必要条件，并加以证明。

a) $(A-B)\cup(A-C)=A$；

b) $(A-B)\cup(A-C)=\varnothing$；

c) $(A-B)\cap(A-C)=A$；

d) $(A-B)\cap(A-C)=A$；

e) $(A-B)\oplus(A-C)=A$；

f) $(A-B)\oplus(A-C)=\varnothing$；

g) $A\cap B=A\cup B$；

h) $A-B=B$；

i) $A-B=B-A$；

j) $A\oplus B=A$；

k) $\mathscr{P}(A)\cup\mathscr{P}(B)=\mathscr{P}(A\cup B)$.

7. 设 A,B 为任意两个集合，证明：

a) $\mathscr{P}(A)\cup\mathscr{P}(B)\subseteq\mathscr{P}(A\cup B)$；

b) $\mathscr{P}(A)\cap\mathscr{P}(B)=\mathscr{P}(A\cap B)$.

8. 试求出 $\bigcup\mathscr{B}$ 和 $\bigcap\mathscr{B}$，其中 $\mathscr{B}$ 为：

a) $\{\{\varnothing\}\}$；

b) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$；

c) $\{\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$.

9. 设

$$R_0=\{a\mid a\in\boldsymbol{R}\text{ 且 }a\leqslant 1\}$$

$$R_i=\left\{a\mid a\in\boldsymbol{R}\text{ 且 }a<1+\frac{1}{i}\right\},i\in\boldsymbol{I}_+$$

证明 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}R_i=R_0$.

10. 设

$$A_n=\{x\mid x\in\boldsymbol{R}\text{ 且 }x>n\},\quad n\in\boldsymbol{N}$$

试求 $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}A_n$ 和 $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty}A_n$.

11. 设

$$A_x=\{y\mid y\in\boldsymbol{R}\text{ 且 }0\leqslant y\leqslant x\},\quad x\in\boldsymbol{R}$$

试求 $\bigcup\limits_{\substack{x\in\boldsymbol{R}\\x>1}}A_x$ 和 $\bigcap\limits_{\substack{x\in\boldsymbol{R}\\x>1}}A_x$.

12. 设

$$\overline{A}=\bigcap_{m=0}^{\infty}\bigcup_{i=m}^{\infty}A_i \qquad \underline{A}=\bigcup_{m=0}^{\infty}\bigcap_{i=m}^{\infty}A_i$$

我们称 $\overline{A}$ 和 $\underline{A}$ 分别为集合序列 $A_0,A_1,A_2,\cdots$ 的上极限和下极限，证明：

a） $\overline{A}$ 为由一切属于无限多个 A_i 的元素组成的集合；

b） $\underline{A}$ 为由一切属于“几乎所有”的 A_i 的元素组成的集合。

§1.3 自然数和归纳法

我们知道，最古老而又最基本的数学系统是自然数系统。引进自然数的方法，有公理化方法和构造性方法两种。用公理化方法引进自然数时，是把“自然数”当做不能定义的原始概念，并提供一张说明“自然数”这一原始概念的公理表。最著名的自然数公理是由意大利数学家皮亚诺(G. Peano，1858－1932)提出的，通常称为皮亚诺公理。自然数的各种性质，包括自然数的运算、大小次序及有关的基本定律，都可以从皮亚诺公理一一推导出来。欲知这方面的详细情况者，可参看朗道(E. Landau)著的“Foundation of Analysis”一书。在这里，我们不想采用上述的方法，而是借助于集合论，把“自然数”一个一个地构造出来。然后证明，我们构造出来的“自然数”满足皮亚诺公理，因此具有普通自然数的一切性质。

为了构造自然数，先引进集合的后继这一概念。

定义 1.3.1 若 A 为集合，则称 $A\cup\{A\}$ 为 A 的后继，并记为 A^+.

由这个定义可知，每个集合都有唯一的一个后继。

定理 1.3.1 设 A 为任意集合，则

i) $\varnothing^+=\{\varnothing\}$；

ii) $\{\varnothing\}^+=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$；

iii) $A\in A^+$；

iv) $A\subseteq A^+$；

v) $A^+\neq\varnothing$.

这可由定义 1.3.1 直接推出。

注意，当 $A\subset B$ 时，不一定 $A^+\subseteq B^+$. 例如取 $A=\varnothing$ 及 $B=\{1\}$ 时，显然 $A\subseteq B$. 但 $A^+=\{\varnothing\}$ 不是 $B^+=\{1,\{1\}\}$ 的子集。

构造自然数的方法很多，策墨罗(E. Zermelo)于 1908 年建议采用

$$\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\{\{\varnothing\}\}\},\cdots$$

构造自然数。后来，冯・诺依曼(von Neumann)又建议了一个方案，就是我们至今仍然采用的方案：

$$\begin{aligned}0&=\varnothing\\1&=0^+=\{\varnothing\}\\2&=1^+=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\\3&=2^+=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}\\&\cdots\cdots\end{aligned}$$

定义 1.3.2 自然数的集合 N 可用归纳定义法定义如下：

i) $0\in \boldsymbol{N}$，这里 $0=\varnothing$；

ii) 若 $n\in \boldsymbol{N}$，则 $n^+\in \boldsymbol{N}$；

iii)若 $S\subseteq \boldsymbol{N}$ 满足

1) $0\in S$ 及

2) 如果 $n\in S$，则 $n^+\in S$ 则 $S=\boldsymbol{N}$.

由定义 1.3.2 可知，对每个自然数 $n\in \boldsymbol{N}$，皆有 $n\in n^+$ 及 $n\subseteq n^+$. 不要小看这两个性质，我们正是根据它们在 N 上引进大小次序关系的。

定义 1.3.3 若 $m,n\in \boldsymbol{N}$ 使 $m\in n$，则称 m 小于 n(或 n 大于 m)，记为 $m<n$(或 $n>m$)

我们还可以用归纳定义法在 N 上定义加法运算"+"与乘法运算"·"如下：

定义 1.3.4 对任意的 $n,m\in \boldsymbol{N}$，令

i) $m+0=m, m\cdot 0=0$；

ii) $m+n^+=(m+n)^+, m\cdot n^+=m\cdot n+m$.

为了证明这样得到的自然数系统$<N,+,\cdot>$确实满足皮亚诺公理，我们还需要以下的结果。

定理 1.3.2 若 $n\in \boldsymbol{N}$，则$\bigcup n^+=n$.

证明 令

$$S=\{n|n\in \boldsymbol{N} \text{ 且 } \bigcup n^+=n\}$$

显然 $S\subseteq \boldsymbol{N}$. 为了证明 $S=\boldsymbol{N}$，我们来验证 S 满足定义 1.3.2 的 iii)之条件 1)和 2).

1) 因为$\bigcup 0^+=\bigcup\varnothing^+=\varnothing=0$，所以 $0\in S$.

2) 如果 $n\in S$，则 $n\in \boldsymbol{N}$ 且 $\bigcup n^+=n$. 由 $\boldsymbol{N}$ 的定义知 $n^+\in \boldsymbol{N}$，此外

$$\begin{aligned}\bigcup (n^+)^+ &= \bigcup (n^+\cup \{n^+\})\\ &=(\bigcup n^+)\cup(\bigcup \{n^+\})\\ &=n\cup n^+\\ &=n^+\end{aligned}$$

所以 $n^+\in S$.

根据定义 1.3.2 的 iii)，由 1)和 2)即知 $S=\boldsymbol{N}$.

定理 1.3.3 自然数系统$<N,+,\cdot>$满足以下的皮亚诺公理：

$\boldsymbol{P}_1$ $0\in \boldsymbol{N}$；

$\boldsymbol{P}_2$ 若 $n\in \boldsymbol{N}$，则 n 有唯一的后继 $n^+\in \boldsymbol{N}$；

$\boldsymbol{P}_3$ 若 $n\in \boldsymbol{N}$，则 $n^+\neq 0$；

$\boldsymbol{P}_4$ 若 $n,m\in \boldsymbol{N}$ 且 $n^+=m^+$，则 $n=m$；

$\boldsymbol{P}_5$ 若 $S\subseteq \boldsymbol{N}$ 满足

i) $0\in S$

ii) 如果 $n\in S$，则 $n^+\in S$

则 $S=\boldsymbol{N}$.

证明 $\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{P}_2$ 和 $\boldsymbol{P}_5$ 分别为定义 1.3.2 的 i)，ii)和 iii)。$\boldsymbol{P}_3$ 可以从定理 1.3.1 的 v)直接推出来。如果 $n,m\in \boldsymbol{N}$ 且 $n^+=m^+$，则由定理 1.3.2 得

$$n=\bigcup n^+=\bigcup m^+=m$$

这就是 P_4.

因为自然数的一切基本性质都可以从皮亚诺公理推导出来，所以我们的自然数系统 $(N,+,\cdot)$ 也都完全具有。由于这些性质早已为大家所熟知，这里就不再一一列举了。

我们通常称皮亚诺公理中的 P_5 为归纳原理，因为它是归纳法的基础。归纳法，又称数学归纳法，是数学中常用的重要证明方法之一。它有两种基本形式。下面就来讨论这两种基本形式及其具体使用方法。

对任意的 $n\in N$，为方便起见，令

$$\overline{N}_n = N - N_n = \{n, n+1, n+2, \cdots\}$$

定理 1.3.4(第一归纳法) 设 $n_0\in N$. 若对每个 $n\in\overline{N}_{n_0}$ 皆有一个命题 $P(n)$ 满足：

i) $P(n_0)$ 真；

ii) 对任意的 $n\in\overline{N}_{n_0}$，若 $P(n)$ 真，则 $P(n^+)$ 也真。

则对任意的 $n\in\overline{N}_{n_0}$，$P(n)$ 皆真。

证明 为了利用归纳原理，我们令

$$S = \{n \mid n \in N \text{ 且 } P(n_0 + n) \text{ 为真}\}。$$

这时显然有 $S\subseteq N$. 此外，还有

1) 因为 $0\in N$，$n_0=n_0+0$ 且 $P(n_0)$ 真，所以 $0\in S$.

2) 若 $n\in S$，则 $n\in N$ 且 $P(n_0+n)$ 真。因为

$$n_0 + n^+ = (n_0 + n)^+ \in N \text{ 且 } n_0 + n \geqslant n_0$$

所以由题设 ii) 知 $P(n_0+n^+)$ 真。这表明 $n^+\in S$.

根据归纳原理，由 1) 和 2) 得 $S=N$

根据定理 1.3.4，应用第一归纳法进行证明时，一般分为以下两步：

1) 直接验证当 $n=n_0$ 时命题为真；

2) 对任意的自然数 $k\geqslant n_0$，假定当 $n=k$ 时命题为真，证明当 $n=k+1$ 时命题也真。

下面我们来看一些例子。

例 1 证明：若 $n\in N$，则 $4^{n+1}-3n-4$ 是 9 的倍数。

解 用第一归纳法来证明。

1) 当 $n=0$ 时命题为真，因为 $4^{0+1}-3\times0-4=0$ 是 9 的倍数。

2) 对任意的 $k\in N$，假定当 $n=k$ 时命题为真，即 $4^{k+1}-3k-4$ 是 9 的倍数。因为

$$\begin{aligned}&4^{(k+1)+1} - 3(k+1) - 4\\&= 4\times 4^{k+1} - 3k - 3 - 4\\&= 4(4^{k+1} - 3k - 4) + 9(k+1)\end{aligned}$$

所以 $4^{(k+1)+1}-3(k+1)-4$ 也是 9 的倍数，即当 $n=k+1$ 时命题也真。

例 2 证明：若 $n\in N$，则 $2^{n+1}>n(n+1)$.

解 用第一归纳法来证明。

1) 因为

$$2^{0+1} = 2 > 0 = 0(0+1),$$
$$2^{1+1} = 4 > 2 = 1\times(1+1),$$

$$2^{2+1} = 8 > 6 = 2 \times (2+1).$$

所以当 $n=0,1$ 或 2 时命题皆真。

2） 对任意的自然数 $k \geqslant 2$，假定当 $n=k$ 时命题为真，即 $2^{k+1} > k(k+1)$. 又因为 $k \geqslant 2$，所以有

$$2^{(k+1)+1} = 2 \times 2^{k+1} > 2k(k+1) \geqslant (k+2)(k+1)$$

这表明当 $n=k+1$ 时命题也真。

注意：这里的归纳推理，实际上是从 $n_0=2$ 开始的。

例 3 证明：8 元以上的整元数款项都可以用 3 元的和 5 元的两种钞票支付。

解 我们仍然用第一归纳法来证明。

1） 因为 8 元的款项可以用一张 3 元的钞票和一张 5 元的钞票支付，所以当 $n=8$ 时命题为真。

2） 对任意的自然数 $k \geqslant 8$，假定当 $n=k$ 时命题为真，即 k 元的款项可以用 3 元的和 5 元的两种钞票支付。以下我们分两种情况来讨论。

(1) 若在 k 元款项的支付中，有至少一张 5 元的钞票，则用两张 3 元的钞票换掉这一张 5 元的钞票时，就构成了 $(k+1)$ 元款项的支付。

(2) 若在 k 元款项的支付中，没有 5 元的钞票，则 $k>8$. 因此其中至少有三张 3 元的钞票。只要用两张 5 元的钞票换掉这三张 3 元的钞票，就构成了 $(k+1)$ 元款项的支付。

这就证明了当 $n=k+1$ 时命题也真。

定理 1.3.5（第二归纳法） 设 $n_0 \in N$. 若对每个 $n \in \overline{N}_{n_0}$ 皆有一个命题 $P(n)$ 满足：

i) $P(n_0)$ 真；

ii) 对任意自然数 $n > n_0$，若当 $k \in N$ 且 $n_0 \leqslant k < n$ 时 $P(k)$ 皆真，则 $P(n)$ 也真。

则对任意的 $n \in \overline{N}_{n_0}$，$P(n)$ 皆真。

证明 为了利用第一归纳法，对每个 $n \in \overline{N}_{n_0}$，我们用 $Q(n)$ 代表如下的命题：

如果 $k \in N$ 且 $n_0 \leqslant k \leqslant n$，则 $P(k)$ 皆真

下面我们验证 $Q(n)$ 满足第一归纳法的条件。

1） 因为 $Q(n_0)$ 就是 $P(n_0)$，所以由题设 i) 知道，$Q(n_0)$ 真。

2） 对任意的 $n \in \overline{N}_{n_0}$，假定 $Q(n)$ 真。根据 $Q(n)$ 的定义，当 $k \in N$ 且 $n_0 \leqslant k \leqslant n$ 时 $P(k)$ 皆真。因为没有 $m \in N$ 能使 $n < m < n^+$，因此当 $n_0 \leqslant k < n^+$ 时，$P(k)$ 也皆真。从而由题设 ii) 知，$P(n^+)$ 为真。这表明 $Q(n^+)$ 为真。

根据第一归纳法，由 1) 和 2) 可知，对任意的 $n \in \overline{N}_{n_0}$，$Q(n)$ 皆真。从而由 $Q(n)$ 的定义可知，对任意的 $n \in N_{n_0}$，$P(n)$ 皆真。

根据定理 1.3.5，应用第二归纳法进行证明时，一般分为以下两步：

1） 直接验证当 $n=n_0$ 时命题为真；

2） 对任意的自然数 $m > n_0$，假定对任意的自然数 $k (n_0 \leqslant k < m)$，当 $n=k$ 时命题皆真，证明当 $n=m$ 时命题也真。

下面我们再来看几个例子。

例 4 设有两个口袋，一个里面装有 m 个球，另一个里面装有 n 个球，并且 $m>n$. 今有二人进行取球比赛，其比赛规则如下：

1） 二人轮流从口袋里取球，每次只准一个人取；

2） 每人每次只能从一个口袋里取，每次至少得取出一个球，多取不限；

3） 最后取完口袋里的球者为获胜者。

试证明：先取者总能获胜。

解 用第二归纳法来证明。

1） 当 $n=0$ 时，仅一个口袋里有球，先取者全部取出即胜，所以这时命题为真。

2） 对任意的自然数 $\bar{n}>0$，假定对任意的自然数 $k<\bar{n}$，当 $n=k$ 时命题都真。因为 $m>\bar{n}$，所以先取者可以从装有 m 个球的口袋里取出 $(m-\bar{n})$ 个球。因为两个口袋都剩有 $\bar{n}$ 个球，且后取者还必从一个口袋里取出至少一个球。所以先取者再取时，一个口袋里有 $\bar{n}$ 个球，另一个口袋里不足 $\bar{n}$ 个球。根据归纳假定，先取者总能获胜。这表明当 $n=\bar{n}$ 时命题也真。

例 5 若 $n\in \boldsymbol{I}_+$ 且 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都是正数，则 $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant(a_1+a_2+\cdots+a_n)/n$ 且仅在 $n=1$ 或 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时等号成立。

解 用第二归纳法来证明。

1） 当 $n=1$ 或 2 时，命题显然真。

2） 对任意的自然数 $m>2$，假定对任意的自然数 $k(2\leqslant k<m)$，当 $n=k$ 时命题皆真，即 $\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}\leqslant(a_1+a_2+\cdots a_k)/k$ 且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_k$ 时等号成立。因为

$$\begin{aligned}\sqrt[2k]{a_1a_2\cdots a_{2k}} &= \left(\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}\cdot\sqrt[k]{a_{k+1}a_{k+2}\cdots a_{2k}}\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leqslant\frac{1}{2}\left(\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}+\sqrt[k]{a_{k+1}a_{k+2}\cdots a_{2k}}\right)\\ &\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{h}a_i+\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{h}a_{k+i}\right)\\ &=(a_1+a_2+\cdots+a_{2k})/2k\end{aligned}$$

且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_{2k}$ 时等号成立。所以当 $n=2k$ 时命题也皆真。

因为 $m>2$，所以有唯一的 $k'\in \boldsymbol{I}_+$ 及唯一的 $r\in \boldsymbol{N}$ 使

$$m-1=2k'+r,\quad 0\leqslant r<2$$

当记 $k_0=k'+1$ 时，显然 $2\leqslant k_0<m$. 因此，当 $n=2k_0$ 时命题为真。因为 r 只能取值 0 或 1，所以只有以下两种可能：

(1) $r=1$

因为 $m=2k'+2=2k_0$，所以当 $n=m$ 时命题为真。

(2) $r=0$

因为 $m+1=2k'+2=2k_0$. 所以当 $n=m+1$ 时命题为真。我们令 $\lambda=(a_1+a_2+\cdots+a_m)/m$，则有

$$\begin{aligned}\sqrt[m+1]{a_1a_2\cdots a_m\lambda} &\leqslant(a_1+a_2+\cdots+a_m+\lambda)/(m+1)\\ &=(a_1+a_2+\cdots a_m)/m\end{aligned}$$

且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_m$ 时等号成立。从而得到

$$\sqrt[m]{a_1a_2\cdots a_m} \leqslant (a_1 + a_2 + \cdots + a_m)/m$$

且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_m$ 时等号成立。这表明当 $n=m$ 时命题为真。

总结以上结果，当 $n=m$ 时命题为真。

最后，我们再给出两个例子。奇怪的是，结论明明是错误的，但却能用"归纳法"证出来。

例 6 证明：若 n 为自然数，则 $n+1=n$.

证明

对任意的 $k\in N$，假定当 $n=k$ 时命题为真，即 $k+1=k$. 从而得到 $(k+1)+1=k+1$，即当 $n=k+1$ 时命题也真。因此由第一归纳法得知，若 n 为自然数，则 $n+1=n$.

例 7 证明世界上所有的人都同岁。

证明

i) 当 $n=1$ 时，因为只有一个人，他和他自己当然同岁，所以这时命题为真。

ii) 因为 $n=1$ 的情况已经证明过了，所以我们假定对任意的自然数 $k>1$，当 $n=k$ 时命题为真，即任意 k 个人都同岁。现在任取 $(k+1)$ 个人，比如说为

$$a_1, a_2, \cdots, a_k, a_{k+1}$$

根据假定，$a_1, a_2, \cdots, a_k$ 同岁，而且 $a_2, a_3, \cdots, a_{k+1}$ 也同岁。所以 $a_1, a_2, \cdots, a_k, a_{k+1}$ 都与 a_2 同岁。因此，他们必同岁。这表明当 $n=k+1$ 时命题也真。

请大家想一想，为什么会得到例 6 和例 7 的结论呢？

习 题 1.3

1. 用归纳法证明：

a) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}=n/(n+1)$;

b) $2+2^2+2^3+\cdots+2^n=2^{n+1}-2$;

c) $2^n\geqslant 2n$;

d) $3\mid n^3+2n$;

e) $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\cdots+n(n+1)(n+2)=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$;

f) 任意三个相邻整数的立方和能被 9 整除；

g) $11^{n+2}+12^{2n+1}$ 是 133 的倍数；

h) 若 $n\in I_+$ 则

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\geqslant\sqrt{n}.$$

2. 设 $a_0, a_1, a_2, \cdots$ 为由自然数组成的严格单调递增序列。证明：若 $n\in N$，则 $n\leqslant a_n$.

3. 斐波那契(Fibonacci)数列定义为

$F_0=0$

$F_1=1$

$F_{n+1}=F_n+F_{n-1},\quad n\in I_1$

证明：若 $n\in I_+$，则 $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\leqslant F_n\leqslant\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$.

4. 设 $n,m\in I_+$ 且 $n>m$. 假定有 n 个直立的大头针，甲、乙两人轮流把这些直立的大头针扳倒。规定每人每次可扳倒 1 至 m 根，且扳倒最后一根直立的大头针者为获胜者。试证明：如果甲先扳且 $(m+1)\nmid n$，则甲总能获胜。

5. 证明以下的二重归纳原理的正确性：

设 $i_0,j_0\in N$. 假定对任意自然数 $i\geqslant i_0$ 及 $j\geqslant j_0$，皆有一个命题 $P(i,j)$ 满足：

i) $P(i_0,j_0)$ 真；

ii) 对任意自然数 $k\geqslant i_0$ 及 $l\geqslant j_0$，若 $P(k,l)$ 真，则 $P(k+1,l)$ 和 $P(k,l+1)$ 皆真。

则对任意自然数 $i\geqslant i_0$ 及 $j\geqslant j_0$，$P(i,j)$ 皆真。

6. 证明：若 $n\in N$，则 $n\notin n$.

7. 证明：若 $n,m\in N$，则 $n\subset m$ 当且仅当 $n\in m$.

8. 证明：若 $n,m\in N$，则 $n\in m$ 当且仅当 $n^+\in m^+$.

9. 证明：若 $n,m\in N$，则 $n<m$ 当且仅当有 $x\in N$ 使 $m=n+x^+$.

10. 证明：若 $n\in N$，则不可能有 $m\in N$ 使 $n<m<n^+$.

11. 称一个集合 A 为传递的，如果 A 的元素的元素都仍然是 A 的元素。证明每个 $n\in N$ 都是传递的。

12. 证明 N 为传递的。

§1.4 笛卡儿乘积

我们称由任意两个元素 x 和 y 组成的集合 $\{x,y\}$ 为偶集。因为 $\{x,y\}=\{y,x\}$，所以这种偶集只能叫无序偶集，简称无序偶。实际上，用得最多的却是另外一种偶集，它不仅与含有的元素 x,y 有关，还与 x,y 出现的次序有关。这样的偶集称为有序偶，并记为 $\langle x,y\rangle$. 例如，若用 $\langle x,y\rangle$ 表示平面直角坐标系下的横坐标为 x 且纵坐标为 y 的点时，则 $\langle x,y\rangle$ 和 $\langle y,x\rangle$ 在 $x\neq y$ 时就代表不同的点，因而就不相同。

怎样用集合来描述有序偶 $\langle x,y\rangle$ 呢？维纳(N. Wiener)于 1914 年给出的第一个成功定义为

$$\langle x,y\rangle=\{\{\{x\},\varnothing\},\{\{y\}\}\}.$$

我们现在实际采用的是库拉托夫斯基(K. Kuratovski)于 1921 年给出的较为简单的定义。

定义 1.4.1 若 x,y 为任意两个元素，令

$$\langle x,y\rangle=\{\{x\},\{x,y\}\}$$

称 $\langle x,y\rangle$ 为由 x,y 组成的二元序偶，简称有序偶或序偶。

定理 1.4.1 若 x,y,u,v 为任意四个元素，则 $\langle x,y\rangle=\langle u,v\rangle$ 当且仅当 $x=u$ 且 $y=v$.

证明 充分性是显然的，下面来证必要性。

若 $\langle x,y\rangle=\langle u,v\rangle$，则 $\{\{x\},\{x,y\}\}=\{\{u\},\{u,v\}\}$，因此必有 $\{x\}=\{u\}$ 或 $\{x\}=\{u,v\}$.

1) 若 $\{x\}=\{u\}$，则 $x=u$ 且 $\{x,y\}=\{u,v\}$. 因此必有 $y=v$.

2)若$\{x\}=\{u,v\}$，则$u=x=v$且$\{x,y\}=\{u\}$. 因此必有$x=y=u=v$.
总之，皆有$x=u$且$y=v$.

定义 1.4.2 设$n\in \boldsymbol{I}_+$且$x_1,x_2,\cdots,x_n$为n个任意的元素。

i)若$n=1$，则令

$$\langle x_1\rangle = x_1$$

ii)若$n=2$，则令

$$\langle x_1,x_2\rangle = \{\{x_1\},\{x_1,x_2\}\}$$

iii)若$n>2$，则令

$$\langle x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle = \langle\langle x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}\rangle,x_n\rangle$$

我们称$\langle x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle$为由$x_1,x_2,\cdots,x_n$组成的$n$元序偶，并称每个$x_i(1\leqslant i\leqslant n)$为它的第$i$个分量。

显然，定义1.4.1是定义1.4.2的特例。

我们不难用第一归纳法证明以下定理。

定理 1.4.2 设$n\in \boldsymbol{I}_+$且$x_1,x_2,\cdots,x_n$和$y_1,y_2,\cdots,y_n$为任意元素，则$\langle x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle=\langle y_1,y_2,\cdots,y_n\rangle$当且仅当$x_i=y_i$对于$i=1,2,\cdots,n$皆成立。

定义 1.4.3 设$n\in \boldsymbol{I}_+$且$A_1,A_2,\cdots,A_n$为n个任意集合。若令

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{\langle x_1,x_2,\cdots x_n\rangle \mid 若\ 1\leqslant i\leqslant n,则\ x_i\in A_i\}$$

则称$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$为$A_1,A_2,\cdots,A_n$的笛卡儿乘积，简记为$\prod\limits_{i=1}^{n}A_i$或$\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n}A_i$，并称$n$为$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$的维数。当$A_1=A_2=\cdots=A_n=A$时，更把$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$简记为$A^n$.

我们可以用平面上的图形来表示两个集合的笛卡儿乘积。如在图1.4.1中，$A=A_1\cup A_2$，$B=B_1\cup B_2\cup B_3$，用x轴上的两条线段分别代表A_1和A_2，用y轴上的三条线段分别代表B_1,B_2和B_3，平面上的阴影区域就代表$A\times B$.

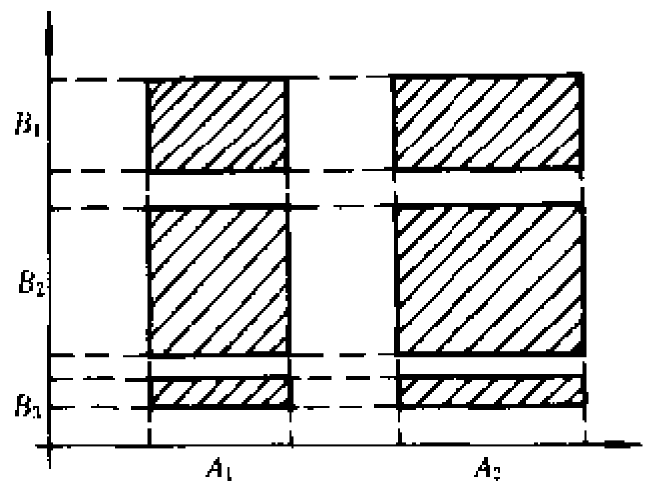


图1.4.1 笛卡儿乘积$A\times B$

例 1 若取$A=\{a,b\}$及$B=\{1,2\}$时，则有

$$A^2=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,b\rangle\}$$
$$A\times B=\{\langle a,1\rangle,\langle a,2\rangle,\langle b,1\rangle,\langle b,2\rangle\}$$
$$B\times A=\{\langle 1,a\rangle,\langle 1,b\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 2,b\rangle\}$$

显然

$$A\times B\neq B\times A$$

例 2 n维欧氏空间乃是实数轴$\boldsymbol{R}$的n维笛卡儿乘积R^n，即

$$\boldsymbol{R}^n=\{\langle x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle \mid x_i\in \boldsymbol{R},1\leqslant i\leqslant n\}$$

定理 1.4.3 若A,B为任意两个集合，则

$A\times B=\varnothing$当且仅当$A=\varnothing$或$B=\varnothing$.

证明 用反证法。

i) 设$A\times B\neq\varnothing$,则有$\langle x,y\rangle\in A\times B$. 从而得知$x\in A$且$y\in B$,所以$A\neq\varnothing$且$B\neq\varnothing$.

ii) 设$A\neq\varnothing$且$B\neq\varnothing$,则有$x\in A$及$y\in B$,从而得知$\langle x,y\rangle\in A\times B$,所以$A\times B\neq\varnothing$.

定理 1.4.4 若A,B,C和D为任意四个非空集合,则

i) $A\times B\subseteq C\times D$当且仅当$A\subseteq C$且$B\subseteq D$;

ii) $A\times B=C\times D$当且仅当$A=C$且$B=D$;

证明 ii)显然可以从i)直接推出,下面只证i).

如果$A\times B\subseteq C\times D$,则对任意的$x\in A$及$y\in B$,可由$\langle x,y\rangle\in A\times B$得到$\langle x,y\rangle\in C\times D$. 因此,$x\in C$且$y\in D$,这表明$A\subseteq C$且$B\subseteq D$.

另一方面,如果$A\subseteq C$且$B\subseteq D$,则对任意的$\langle x,y\rangle\in A\times B$,由$x\in A$及$y\in B$得到$\langle x,y\rangle\in C\times D$. 因此,$A\times B\subseteq C\times D$.

定理 1.4.5 若A,B和C为任意三个集合,则

i) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$;

ii) $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$;

iii) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$;

iv) $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$;

v) $A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$;

vi) $(A-B)\times C=(A\times C)-(B\times C)$.

证明 我们只证i)和v),其余的都留作练习。

i) 首先,由定理1.4.4得到

$$A\times B\subseteq A\times(B\cup C)\text{ 且 }A\times C\subseteq A\times(B\cup C)$$

因此

$$(A\times B)\cup(A\times C)\subseteq A\times(B\cup C)$$

另一方面,任取$\langle x,y\rangle\in A\times(B\cup C)$,则$x\in A$且$y\in B\cup C$,从而得到

a) $x\in A$且$y\in B$ 或 *b*) $x\in A$且$y\in C$

由*a*)知$\langle x,y\rangle\in A\times B$,由*b*)知$\langle x,y\rangle\in A\times C$. 总之皆有$\langle x,y\rangle\in(A\times B)\cup(A\times C)$. 这表明

$$A\times(B\cup C)\subseteq(A\times B)\cup(A\times C)$$

v) 任取$\langle x,y\rangle\in A\times(B-C)$,则$x\in A$且$y\in B-C$. 所以$x\in A,y\in B$且$y\notin C$. 因此

$$\langle x,y\rangle\in A\times B\quad\text{且}\langle x,y\rangle\notin A\times C$$

亦即

$$\langle x,y\rangle\in(A\times B)-(A\times C)$$

另一方面,任取$\langle x,y\rangle\in(A\times B)-(A\times C)$,则有$\langle x,y\rangle\in A\times B$且$\langle x,y\rangle\notin A\times C$. 因此有

$$x\in A,\qquad y\in B\qquad\text{且}\qquad y\notin C$$

所以$x\in A$且$y\in B-C$. 这表明$\langle x,y\rangle\in A\times(B-C)$.

定理 1.4.6 若 A,B 为任意两个有限集，则

$$n(A\times B)=n(A)\cdot n(B)$$

证明 若 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_m\}$，则 $n(A)=n,n(B)=m$. 因为

$$A\times B=\{\langle a_i,b_j\rangle \mid 1\leqslant i\leqslant n \text{ 且 } 1\leqslant j\leqslant m\}$$

所以 $n(A\times B)=nm=n(A)\cdot n(B)$.

注意：定理 1.4.3～定理 1.4.6 都不难推广到 n 维笛卡儿乘积的情况。请读者作为练习，写出相应的定理，并证明之。

习 题 1.4

1. 设 $A=\{0,1\}$，$B=\{1,2\}$. 试确定下列集合：

a) $A\times\{1\}\times B$

b) $A^2\times B$

c) $(B\times A)^2$

2. 证明或用反例推翻下列命题：

a) $(A\cup B)\times(C\cup D)=(A\times C)\cup(B\times D)$

b) $(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$

c) $(A-B)\times(C-D)=(A\times C)-(B\times D)$

d) $(A\oplus B)\times(C\oplus D)=(A\times C)\oplus(B\times D)$

3. 如果 $B\cup C\subseteq A$，则 $(A\times A)-(B\times C)=(A-B)\times(A-C)$. 这个命题对吗？如果对，则给予证明；如果不对，则举出反例。

4. 证明：若 $x\in C$ 且 $y\in C$，则 $\langle x,y\rangle\in\mathscr{P}(\mathscr{P}(C))$.

5. 证明：$a\in\bigcup\langle a,b\rangle$ 且 $b\in\bigcup\langle a,b\rangle$.

6. 把三元序偶 $\langle a,b\ c\rangle$ 定义为 $\{\{a\},\{a,b\},\{a,b,c\}\}$ 合适吗？说明理由。

7. 为了给出序偶的另一定义，选取两个不同集合 A 和 B（例如取 $A=\varnothing$，$B=\{\varnothing\}$），并定义

$$\langle a,b\rangle=\{\{a,A\},\{b,B\}\}$$

证明这个定义的合理性。

8. 证明：若 $A\cap B\neq\varnothing$，则

a) $(A\cup B)\times(A\cap B)\subseteq(A\times A)\cup(B\times B)$；

b) $(A\cap B)\times(A\cup B)\subseteq(A\times A)\cup(B\times B)$.

第二章　二元关系

关系反映对象即元素之间的联系和性质，不仅是重要的数学概念，而且在计算机科学中也有重要的实际意义。

上一章讨论了集合，现在我们研究能够用集合表达的元素之间的关系，讨论关系的基本表达形式、关系的运算，以及几类常用的重要关系。

§2.1　关　　系

我们的目标是找一个适当的集合来描述关系。为此，我们先分析一个具体的例子。

例 1　让我们考虑集合 $A=\{2,3,5,9\}$ 上的普通的小于关系"$<$"。显然，"$<$"建立了每个 $i\in A$ 与每个比 i 大的 $j\in A$ 之间的一种关系"$i<j$"．为了形象起见，可以用一条从 i 到 j 的有向线段来表示关系"$i<j$"．这样，图 2.1.1 就完整地描述了 A 上的这个关系"$<$"．但是，图 2.1.1 并不是一个集合。那么，足以表达 A 上的关系"$<$"的集合又是什么呢？如果用序偶 $\langle i,j\rangle$ 来表示"$i<j$"，即从 i 到 j 的有向线段，并令

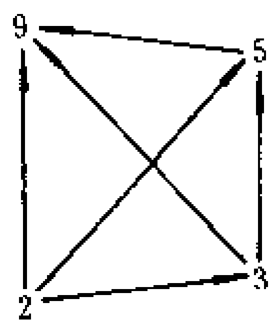


图 2.1.1　集合{2,3,5,9}上的关系"$<$"

$$R=\{\langle 2,3\rangle,\langle 2,5\rangle,\langle 2,9\rangle,\langle 3,5\rangle,\langle 3,9\rangle,\langle 5,9\rangle\}$$

则集合 R 就足以概括图 2.1.1 中的全部有用信息。所以，我们可以把 A 上的关系"$<$"定义为集合 R.

定义 2.1.1　设 $n\in I_+$ 且 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个任意的集合，$R\subseteq\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n}A_i$.

i) 称 R 为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 间的 n 元关系；

ii) 若 $n=2$，则称 R 为从 A_1 到 A_2 的二元关系；

iii) 若 $R=\varnothing$，则称 R 为空关系；若 $R=\mathop{\times}\limits_{i=1}^{n}A_i$，则称 R 为全关系。

iv) 若 $A_1=A_2=\cdots=A_n=A$，则称 R 为 A 上的 n 元关系。

例 2　令

$$R_1=\{\langle 2n\rangle\mid n\in N\}$$
$$R_2=\{\langle n,n^+\rangle\mid n\in N\}$$
$$R_3=\{\langle n,m,k\rangle\mid n,m,k\in N \text{ 且 } n^2+m^2=k^2\}$$

则 R_1 为 N 上的一元关系，R_2 为 N 上的二元关系，而 R_3 为 N 上的三元关系。

定义 2.1.2　设 R_1 为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 间的 n 元关系，R_2 为 $B_1,B_2,\cdots,B_m$ 间的 m 元关系。如果

i) $n=m$;

ii) 若 $1 \leqslant i \leqslant n$，则 $A_i=B_i$；

iii) 把 R_1 和 R_2 作为集合看，$R_1=R_2$.

则称 n 元关系 R_1 和 m 元关系 R_2 相等，仍然记为 $R_1=R_2$.

例 3 设 R_1 是从 N 到 I_+ 的二元关系，R_2 和 R_3 都是 I 上的二元关系，并且

$$R_1=\{\langle n,m\rangle \mid n \in \boldsymbol{N},\ m \in \boldsymbol{I}_+ \text{且 } m=n+1\}$$

$$R_2=\{\langle n,n+1\rangle \mid n \in \boldsymbol{I} \text{ 且 } n \geqslant 0\}$$

$$R_3=\{\langle |n|,|n|+1\rangle \mid n \in \boldsymbol{I}\}$$

尽管作为集合看有

$$R_1=R_2=R_3$$

但作为二元关系看，却是

$$R_1 \neq R_2 \quad \text{和} \quad R_2=R_3$$

如果 R_1 和 R_2 都是从集合 A 到集合 B 的二元关系，则集合 $R_1 \cap R_2$，$R_1 \cup R_2$，R_1-R_2 和 $R_1 \oplus R_2$ 仍然是从 A 到 B 的二元关系，我们分别称它们为二元关系 R_1 与 R_2 的交、并、差和对称差，并仍用相应的集合运算符号表示。

定义 2.1.3 设 R 为从集合 A 到集合 B 的二元关系，令

$$\mathrm{domR}=\{x \mid x \in A \text{ 且有 } y \in B \text{ 使} \langle x,y\rangle \in R\}$$

$$\mathrm{ranR}=\{y \mid y \in B \text{ 且有 } x \in A \text{ 使} \langle x,y\rangle \in R\}$$

称 $\mathrm{dom}R$ 为 R 的定义域，$\mathrm{ran}R$ 为 R 的值域。

如果 $\langle x,y\rangle \in R$，则称 x 和 y 有关系 R，记为 xRy；反之，如果 $\langle x,y\rangle \notin R$，则称 x 和 y 无关系 R，记为 $x \not R y$.

例 4 对例 1 中的二元关系 R，显然有

$$\mathrm{dom}R=\{2,3,5\}$$

$$\mathrm{ran}R=\{3,5,9\}$$

及

$$2R3,\ 3R5,\ 5R9,\ \cdots$$

$$3 \not R 2,\ 5 \not R 5, 9 \not R 2, \cdots$$

我们可以把二元关系 R 看作坐标平面上的一个点集。这时 R 在横坐标轴上的投影为 $\mathrm{dom}R$，在纵坐标轴上的投影为 $\mathrm{ran}R$（见图 2.1.2）。

定义 2.1.4 设 R 为集合 A 上的二元关系。

i)若对每个 $a \in A$ 皆有 $\langle a,a\rangle \in R$，则称 R 为自反的。

ii)若对每个 $a \in A$ 皆有 $\langle a,a\rangle \notin R$，则称 R 为反自反的。

iii)对任意的 $a,b \in A$，若当 $\langle a,b\rangle \in R$ 时皆有 $\langle b,a\rangle \in R$，则称 R 为对称的。

iv)对任意的 $a,b \in A$，若当 $\langle a,b\rangle \in R$ 且 $\langle b,a\rangle \in R$ 时皆有 $a=b$，则称 R 为反对称的。

v)对任意的 $a,b,c \in A$，若当 $\langle a,b\rangle \in R$ 且 $\langle b,c\rangle \in R$ 时皆有 $\langle a,c\rangle \in R$，则称 R 为传递的。

例 5 考虑 N 上的普通的相等关系“$=$”、大于关系“$>$”和大于等于关系“$\geqslant$”，则显然有：

1) “$=$”是自反的，对称的，反对称的和传递的；

2) “$>$”是反自反的，反对称的和传递的；

3) “$\geqslant$”是自反的，反对称的和传递的。

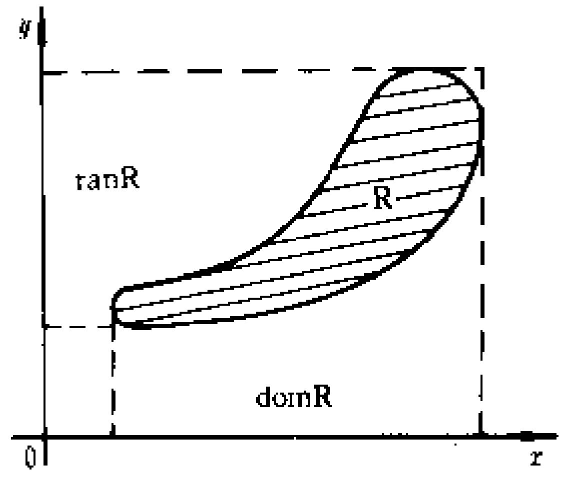


图 2.1.2 作为平面的子集的二元关系 R

例 6 任取 $m\in I_+$，我们在 I 上定义二元关系“$\equiv_m$”如下：

$$i\equiv_m j \quad 当且仅当 \quad m\mid(i-j)$$

并称“$\equiv_m$”为 I 上的模 m 的同余关系。显然，$\equiv_m$ 是自反的，对称的和传递的。$\equiv_m$ 不是反对称的。

例 7 空集$\varnothing$上的二元空关系$\varnothing$显然是自反的，反自反的，对称的，反对称的和传递的。

例 8 非空集 A 上的二元空关系$\varnothing$是反自反的，对称的，反对称的和传递的，但不是自反的。

定义 2.1.5 设 R 为集合 A 上的二元关系且 $S\subseteq A$，我们称 S 上的二元关系 $R\cap(S\times S)$为 R 在 S 上的压缩，记为 $R|_S$，并称 R 为 $R|_S$ 在 A 上的延拓。

定理 2.1.1 设 R 为集合 A 上的二元关系且 $S\subseteq A$.

i) 若 R 是自反的，则 $R|_S$ 也是自反的；

ii) 若 R 是反自反的，则 $R|_S$ 也是反自反的；

iii) 若 R 是对称的，则 $R|_S$ 也是对称的；

iv) 若 R 是反对称的，则 $R|_S$ 也是反对称的；

v) 若 R 是传递的，则 $R|_S$ 也是传递的。

证明留作练习。

以后我们仅讨论二元关系。为方便起见，常常把“二元关系”简称为“关系”，请不要误会。

习 题 2.1

1. 列出从 A 到 B 的关系 R 中的所有序偶。

a) $A=\{0,1,2\}$，$B=\{0,2,4\}$，$R=\{\langle x,y\rangle\mid x,y\in A\cap B\}$

b) $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{1,2,3\}$，$R=\{\langle x,y\rangle\mid x\in A,y\in B$ 且 $x=y^2\}$

2. 设 R_1 和 R_2 都是从$\{1,2,3,4\}$到$\{2,3,4\}$的二元关系，并且

$$R_1=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,3\rangle\}$$

$$R_2=\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 4,2\rangle\}$$

求 $R_1\cup R_2$，$R_1\cap R_2$，$\mathrm{dom}R_1$，$\mathrm{dom}R_2$，$\mathrm{ran}R_1$，$\mathrm{ran}R_2$，$\mathrm{dom}(R_1\cup R_2)$和 $\mathrm{ran}(R_1\cap R_2)$.

3. 设 R_1 和 R_2 都是从集合 A 到集合 B 的二元关系。证明

$$\mathrm{dom}(R_1\cup R_2)=\mathrm{dom}R_1\cup\mathrm{dom}R_2$$

$$\mathrm{ran}(R_1\cap R_2)\subseteq\mathrm{ran}R_1\cap ranR_2$$

4. 用 L 和 D 分别表示集合$\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$上的普通的小于关系和整除关系，试列出 L，D 和 $L\cap D$ 中的所有序偶。

5. 给出满足下列要求的二元关系的实例：

a) 既是自反的，又是反自反的；

b) 既不是自反的，又不是反自反的；

c) 既是对称的，又是反对称的；

d) 既不是对称的，又不是反对称的。

6. 试判断下面的论断正确与否。若正确，请加以证明；若不正确，请给出反例。

设 R 和 S 都是集合 A 上的二元关系。若 R 和 S 都是自反的(反自反的，对称的，反对称的，或传递的)，则 $R\cap S, R\cup S, R-S, R\oplus S$ 也是自反的(反自反的，对称的，反对称的，或传递的)。

7. 描述 $\boldsymbol{R}$ 上的下列二元关系 S 的性质：

a) $S=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in \boldsymbol{R}$ 且 $x\cdot y>0\}$；

b) $S=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in \boldsymbol{R}$，4 整除 $|x-y|$ 且 $|x-y|<10\}$；

c) $S=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in \boldsymbol{R}$，$x^2=1$ 且 $y>0\}$；

d) $S=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in \boldsymbol{R}$，$4|x|\leqslant 1$ 且 $|y|\geqslant 1\}$.

8. 设 $n,m\in \boldsymbol{I}_+$. 若集合 A 恰有 n 个元素，则在 A 上能有多少个不同的 m 元关系？证明你的结论。

9. 设 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 都是由从集合 A 到集合 B 的二元关系构成的集类，并且 $\mathscr{B}\neq\varnothing$. 证明

a) $\mathrm{dom}(\bigcup\mathscr{A})=\bigcup\{\mathrm{dom}R \mid R\in\mathscr{A}\}$；

b) $\mathrm{ran}(\bigcup\mathscr{A})=\bigcup\{\mathrm{ran}R \mid R\in\mathscr{A}\}$；

c) $\mathrm{dom}(\bigcap\mathscr{B})\subseteq\bigcap\{\mathrm{dom}R \mid R\in\mathscr{B}\}$；

d) $\mathrm{ran}(\bigcap\mathscr{B})\subseteq\bigcap\{\mathrm{ran}R \mid R\in\mathscr{B}\}$。

10. 设 R 为集合 A 上的一个二元关系。如果 R 是反自反的和传递的，则 R 一定是反对称的。

11. 设 R 为集合 A 上的一个二元关系，若令

$$\mathrm{fld}R=\mathrm{dom}R\cup\mathrm{ran}R$$

则

$$\mathrm{fld}R=\bigcup(\bigcup R)$$

12. 若 R 为集合 A 上的二元关系，则 R 也是 $\bigcup(\bigcup R)$ 上的二元关系。

§2.2 关系矩阵与关系图

本节只讨论从有限集到有限集的二元关系。

在前节的例 1 中，我们曾经用图表示过二元关系，感到它直观而形象，很有好处。现在，我们就来讨论用图表示二元关系的问题。为此，先简单介绍一下“图”的概念。

所谓一个图 G，就是一个结点的有限集，并且在某些结点之间有连线。我们称这种连线为图 G 的“边”。如果每条边都是有向线段，就称 G 为有向图。如果每条边都是无向线段，就称 G 为无向图。既有有向边又有无向边的图，称为混合图。连接同一个结点的边称

为“自圈”。关于图的更详细的讨论见第七章。

定义 2.2.1 设 A 和 B 为任意的非空有限集，R 为任意一个从 A 到 B 的二元关系。以 $A\cup B$ 中的每个元素为一个结点，对每个 $\langle x,y\rangle\in R$，皆画一条从 x 到 y 的有向边，就得到一个有向图 G_R，称为 R 的关系图。

例 1 设 $A=\{2,3,4,5,6\}$，$B=\{6,7,8,12\}$，从 A 到 B 的二元关系 R 为

$$iRj \quad \text{当且仅当} \quad i\in A,\ j\in B \quad \text{且} \quad i\mid j$$

显然

$$R=\{\langle 2,6\rangle,\langle 2,8\rangle,\langle 2,12\rangle,\langle 3,6\rangle,\langle 3,12\rangle,\\ \langle 4,8\rangle,\langle 4,12\rangle,\langle 6,6\rangle,\langle 6,12\rangle\}$$

二元关系 R 的关系图如图 2.2.1 所示。

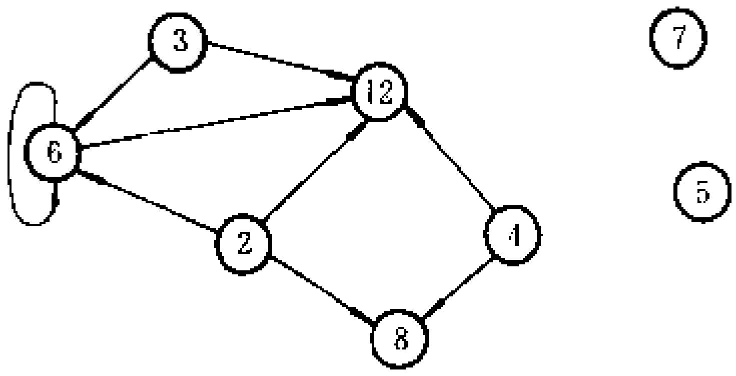


图 2.2.1 二元关系 R 的关系图 G_R

二元关系还可以用矩阵表示，而且这种表示特别适合于用计算机来处理二元关系。

定义 2.2.2 设 $n,m\in I_+$，$A=\{x_1,x_2,\cdots x_n\}$，$B=\{y_1,y_2,\cdots y_m\}$。对任意的从 A 到 B 的二元关系 R，令

$$M_R=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

其中

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & \text{若 } x_iRy_j \\ 0 & \text{否则}\end{cases},\quad 1\leqslant i\leqslant n \quad \text{且} \quad 1\leqslant j\leqslant m$$

称 M_R 为 R 的关系矩阵。

对例 1 中的二元关系 R 有

$$M_R=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

定理 2.2.1 若 A,B 为非空有限集，R_1 和 R_2 为从 A 到 B 的二元关系，则下列条件等价：

i) $R_1=R_2$；

ii) $M_{R_1}=M_{R_2}$；

iii) $G_{R_1}=G_{R_2}$。

所谓两个图相等，指的是结点、边及其连接关系都完全相同。

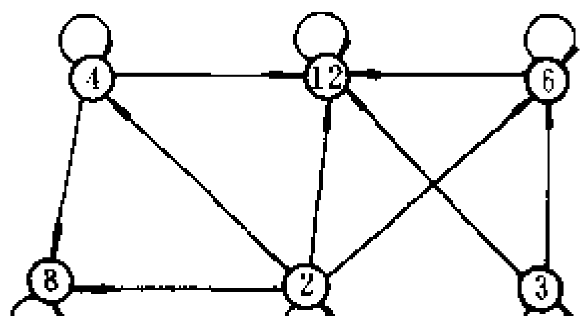


图 2.2.2 关系 R 之关系图 G_R

定理 2.2.1 的证明并不困难，留作练习。

例 2 设 $A=\{2,3,4,6,8,12\}$ 上的二元关系 R 之关系图 G_R 如图 2.2.2 所示。显然 R

为 A 上的整除关系：

$$iRj \quad 当且仅当 \quad i|j$$

亦即

$$\begin{aligned} R = \{&\langle 2,2\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 2,6\rangle,\langle 2,8\rangle,\\ &\langle 2,12\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 3,6\rangle,\langle 3,12\rangle,\\ &\langle 4,4\rangle,\langle 4,8\rangle,\langle 4,12\rangle,\langle 6,6\rangle,\\ &\langle 6,12\rangle,\langle 8,8\rangle,\langle 12,12\rangle\} \end{aligned}$$

从而知道，R 的关系矩阵 M_R 为

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

定理 2.2.2 设 $n\in I_+$，R 为 $A=\{x_1,x_2,\cdots x_n\}$ 上的二元关系，$a_{ij}(1\leqslant i,j\leqslant n)$ 为 R 的关系矩阵 M_R 中第 i 行第 j 列的元素。

i) 以下条件等价：

1) R 是自反的；

2) M_R 的对角线元素全为 1；

3) G_R 中每个结点 $x_i\in A$ 处都有自圈。

ii) 以下条件等价：

1) R 是反自反的；

2) M_R 的对角线元素全为 0；

3) G_R 中每个结点 $x_i\in A$ 处都无自圈。

iii) 以下条件等价：

1) R 是对称的：

2) M_R 是对称矩阵；

3) G_R 中任意两个结点间都不会只有单向的有向边。

iv) 以下条件等价：

1) R 是反对称的；2) 在 M_R 中，若 $1\leqslant i,j\leqslant n$ 且 $i\neq j$，则 $a_{ij}\cdot a_{ji}=0$.

3) G_R 中任意两个结点间都无成对出现的反向的有向边。

v) 以下条件等价：

1) R 是传递的：

2) 若有正整数 $k\leqslant n$ 使 $a_{ik}\cdot a_{kj}=1$，则 $a_{ij}=1$；

3) 对 G_R 中任意两个结点 x_i 和 x_j，若有从 x_i 到 x_j 的有向通路，则必有一条从 x_i 到 x_j 的有向边。这可简称为 G_R 中处处有捷径。（注意：x_i 和 x_j 可以是同一个结点。）

这个定理的叙述尽管很长，证明却很简单，所以留作练习。

习 题 2.2

1. 设集合 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ 上的二元关系 R 为

$$R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 5,5\rangle,\langle 6,6\rangle,\langle 1,2\rangle,$$
$$\langle 2,1\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,5\rangle,\langle 5,4\rangle\}$$

试画出 R 的关系图 G_R，求出 R 的关系矩阵 M_R，并指出 R 所具有的性质。

2. 对图 2.2.3 给出的集合 $A=\{1,2,3\}$ 上的十二个二元关系的关系图，写出相应的关系矩阵，并指出各个关系所具有的性质。

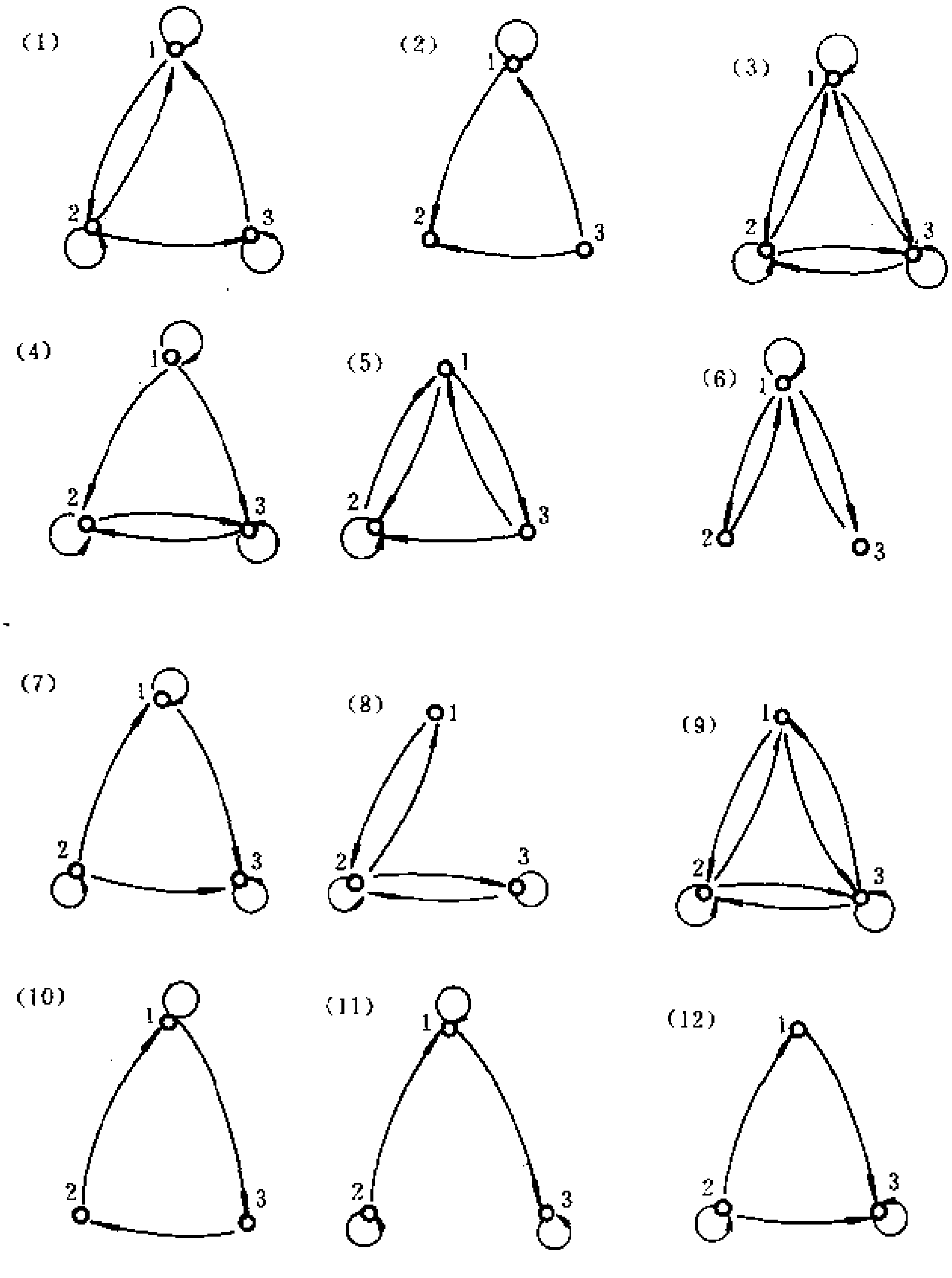


图 2.2.3 集合 $A=\{1,2,3\}$ 上的十二个二元关系之关系图

3. 对习题 2.1 中第 4 题所给的二元关系 L，D 和 $L\cap D$，画出它们的关系图，并写出它们的关系矩阵。

4. 设 A 为恰有 n 个元素的有限集。

a） 共有多少个 A 上的不相同的自反关系?

b） 共有多少个 A 上的不相同的反自反关系?

c） 共有多少个 A 上的不相同的对称关系?

d） 共有多少个 A 上的不相同的反对称关系?

e） 共有多少个 A 上的不相同的既是对称又反对称的关系?

§2.3 逆 关 系

§2.1 定义了两个关系的交、并、差和对称差。我们知道，集合还有求补运算。我们现在定义二元关系的补关系。

定义 2.3.1 设 R 为从集合 A 到集合 B 的二元关系。如果从 A 到 B 的二元关系 R' 满足

$$\langle x,y\rangle \in R' \quad 当且仅当 \quad \langle x,y\rangle \notin R$$

就称 R' 为 R 的补关系，并记为 $\sim R$。

此外，对二元关系来说，还有逆关系、关系的合成和关系的闭包等三种重要运算。本节先讨论逆关系。

定义 2.3.2 设 R 为从集合 A 到集合 B 的二元关系。如果从 B 到 A 的二元关系 R' 满足

$$\langle y,x\rangle \in R' \quad 当且仅当 \quad \langle x,y\rangle \in R$$

就称 R' 为 R 的逆关系，并记为 R^{-1}.

由这个定义直接推得以下的定理。

定理 2.3.1 设 A,B 为非空有限集，R 为从 A 到 B 的二元关系。

i) $M_{R^{-1}}=M_R^T$（M_R^T 为 M_R 的转置）；

ii) 把 G_R 的每个有向边反向后，就得到 R^{-1} 的关系图 $G_{R^{-1}}$.

例 1 设集合 $A=\{a,b,c\}$ 上的二元关系 R 为

$$R = \{\langle a,a\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,a\rangle,\langle c,b\rangle\}$$

1） R 的关系矩阵 M_R 为

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

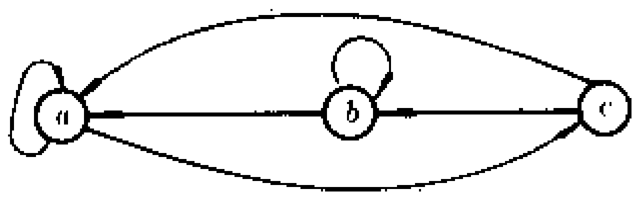


图 2.3.1 关系 R 的关系图 G_R

2） R 的关系图 G_R 如图 2.3.1 所示。

3） 关系 R 的逆关系 R^{-1} 为

$$R^{-1} = \{\langle a,a\rangle,\langle c,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,c\rangle\}$$

4） 逆关系 R^{-1} 的关系矩阵 $M_{R^{-1}}$ 为

$$M_{R^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5） 逆关系 R^{-1} 的关系图 $G_{R^{-1}}$ 如图 2.3.2 所示。

定理 2.3.2 若 R 和 $R_i(i=0,1,2,\cdots)$ 都是从集合 A 到集合 B 的二元关系，K 为 N 的非空子集，则有

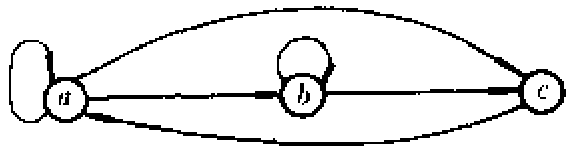


图 2.3.2 逆关系 R^{-1}的关系图 $G_{R^{-1}}$

i) $(R^{-1})^{-1}=R$；

ii) $(\sim R)^{-1}=\sim R^{-1}$；

iii) 如果 $R_1\subseteq R_2$，则 $R_1^{-1}\subseteq R_2^{-1}$；

iv) 如果 $R_1=R_2$，则 $R_1^{-1}=R_2^{-1}$；

v) $(\bigcup\limits_{n\in K} R_n)^{-1}=\bigcup\limits_{n\in K} R_n^{-1}$；

vi) $(\bigcap\limits_{n\in K} R_n)^{-1}=\bigcap\limits_{n\in K} R_n^{-1}$；

vii) $(R_1-R_2)^{-1}=R_1^{-1}-R_2^{-1}$；

viii) $(R_1\oplus R_2)^{-1}=R_1^{-1}\oplus R_2^{-1}$；

证明 只证 v)，其余的留作练习。

任取 $\langle x,y\rangle\in(\bigcup\limits_{n\in K} R_n)^{-1}$，则 $\langle y,x\rangle\in\bigcup\limits_{n\in K} R_n$. 所以有 $n_0\in K$ 使 $\langle y,x\rangle\in R_{n_0}$. 从而得 $\langle x,y\rangle\in R_{n_0}^{-1}$. 因此有

$$(\bigcup_{n\in K} R_n)^{-1}\subseteq\bigcup_{n\in K} R_n^{-1}$$

另一方面，任取 $\langle x,y\rangle\in\bigcup\limits_{n\in K} R_n^{-1}$，则有 $n_0\in K$ 使 $\langle x,y\rangle\in R_{n_0}^{-1}$. 所以 $\langle y,x\rangle\in R_{n_0}$. 从而得 $\langle y,x\rangle\in\bigcup\limits_{n\in K} R_n$，即 $\langle x,y\rangle\in(\bigcup\limits_{n\in K} R_n)^{-1}$. 因此有

$$\bigcup_{n\in K} R_n^{-1}\subseteq(\bigcup_{n\in K} R_n)^{-1}$$

定理 2.3.3 设 R 为集合 A 上的二元关系。

i) R 是自反的当且仅当 R^{-1}是自反的；

ii) R 是反自反的当且仅当 R^{-1}是反自反的；

iii) R 是对称的当且仅当 R^{-1}是对称的；

iv) R 是反对称的当且仅当 R^{-1}是反对称的；

v) R 是传递的当且仅当 R^{-1}是传递的。

这个定理很容易证明，留作练习。

定理 2.3.4 集合 A 上的二元关系 R 是对称的，当且仅当 $R=R^{-1}$.

证明留作练习。

习 题 2.3

1. 设 R 为非空有限集 A 上的二元关系。如果 R 是反对称的，则 $R\cap R^{-1}$的关系矩阵 $M_{R\cap R^{-1}}$中最多能有多少个元素为 1？

2. 若 R 为集合 A 上的二元关系，则 $R\cup R^{-1}$为 A 上包含 R 的最小对称关系，$R\cap R^{-1}$为 A 上的包含在 R 中的最大对称关系。

3. 若 $\boldsymbol{I}_A$ 为集合 A 上的恒等关系，即

$$\boldsymbol{I}_A=\{\langle x,x\rangle\mid x\in A\}$$

则对 A 上的任意二元关系 R，A 上的二元关系 $\boldsymbol{I}_A\cup R\cup R^{-1}$必是自反的和对称的。

4. 设 R 为任意二元关系。证明

i) $\mathrm{dom}R^{-1}=\mathrm{ran}R$;

ii) $\mathrm{ran}R^{-1}=\mathrm{dom}R$.

§2.4 关系的合成

定义 2.4.1 设 R_1 为从集合 A 到集合 B 的二元关系，R_2 为从集合 B 到集合 C 的二元关系。称从 A 到 C 的二元关系

$$\{\langle x,z\rangle \mid \text{有 } y\in B \text{ 使} \langle x,y\rangle\in R_1 \text{ 且} \langle y,z\rangle\in R_2\}$$

为 R_1 与 R_2 的合成，记为 $R_1\circ R_2$.

合成关系 $R_1\circ R_2$ 同原来的 R_1 和 R_2 之间的关系，我们可以简单地用图 2.4.1 表示。

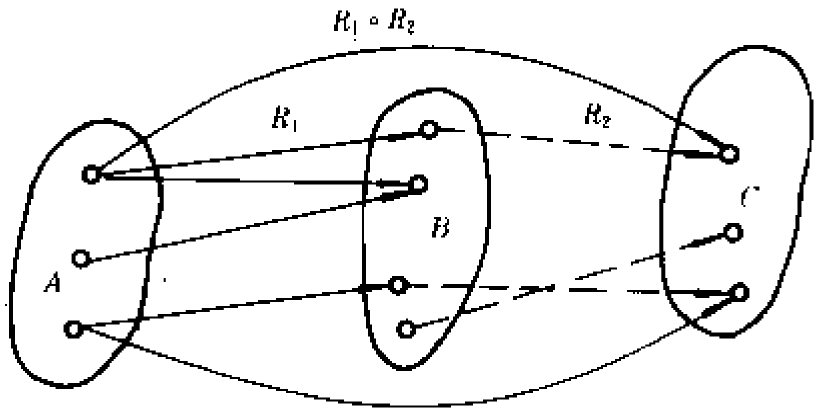


图 2.4.1 合成关系 $R_1\circ R_2$

例 1 若集合 $\{1,2,3,4\}$ 上的二元关系 R_1 和 R_2 为

$$R_1=\{\langle 2,4\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 4,4\rangle\}$$

$$R_2=\{\langle 2,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,3\rangle\}$$

则

$$R_1\circ R_2=\{\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 4,3\rangle\}$$

$$R_2\circ R_1=\{\langle 3,4\rangle,\langle 4,3\rangle\}$$

所以

$$R_1\circ R_2\neq R_2\circ R_1$$

这个例子说明，关系的合成一般是不可以交换的。

定理 2.4.1 设 A,B,C 和 D 为任意四个集合，R_1 为从 A 到 B 的二元关系，R_2 和 R_3 都是从 B 到 C 的二元关系，R_4 为从 C 到 D 的二元关系。

i) 若 $R_2\subseteq R_3$，则 $R_1\circ R_2\subseteq R_1\circ R_3$ 且 $R_2\circ R_4\subseteq R_3\circ R_4$;

ii) $R_1\circ(R_2\cup R_3)=(R_1\circ R_2)\cup(R_1\circ R_3)$;

iii) $(R_2\cup R_3)\circ R_4=(R_2\circ R_4)\cup(R_3\circ R_4)$;

iv) $R_1\circ(R_2\cap R_3)\subseteq(R_1\circ R_2)\cap(R_1\circ R_3)$;

v) $(R_2\cap R_3)\circ R_4\subseteq(R_2\circ R_4)\cap(R_3\circ R_4)$;

vi) $(R_1\circ R_2)^{-1}=R_2^{-1}\circ R_1^{-1}$;

vii) $(R_1 \circ R_2) \circ R_4 = R_1 \circ (R_2 \circ R_4)$.

证明 我们只证明 i)和 ii),其余证明与此类似,留作练习。

i) 任取$\langle x,z\rangle \in R_1 \circ R_2$,则有 $y\in B$,使$\langle x,y\rangle \in R_1$ 且$\langle y,z\rangle \in R_2$. 但 $R_2 \subseteq R_3$,所以有$\langle y,z\rangle \in R_3$. 因此,$\langle x,z\rangle \in R_1 \circ R_3$. 这就表明 $R_1 \circ R_2 \subseteq R_1 \circ R_3$.

同理可证 $R_2 \circ R_4 \subseteq R_3 \circ R_4$.

ii)由于 $R_2 \subseteq R_2 \cup R_3$,故由刚证明的 i)得 $R_1 \circ R_2 \subseteq R_1 \circ (R_2 \cup R_3)$. 同理可得 $R_1 \circ R_3 \subseteq R_1 \circ (R_2 \cup R_3)$. 所以$(R_1 \circ R_2) \cup (R_1 \circ R_3) \subseteq R_1 \circ (R_2 \cup R_3)$.

另一方面,任取$\langle x,z\rangle \in R_1 \circ (R_2 \cup R_3)$,则有 $y\in B$ 使$\langle x,y\rangle \in R_1$ 且$\langle y,z\rangle \in R_2 \cup R_3$. 因此有$\langle y,z\rangle \in R_2$ 或$\langle y,z\rangle \in R_3$. 若$\langle y,z\rangle \in R_2$,则$\langle x,z\rangle \in R_1 \circ R_2$;若$\langle y,z\rangle \in R_3$,则$\langle x,z\rangle \in R_1 \circ R_3$. 总之,皆有$\langle x,z\rangle \in (R_1 \circ R_2) \cup (R_1 \circ R_3)$. 所以 $R_1 \circ (R_2 \cup R_3) \subseteq (R_1 \circ R_2) \cup (R_1 \circ R_3)$.

为了研究合成关系的关系矩阵,我们在集合$\{0,1\}$上定义两个运算"$\vee$"和"$\wedge$"如下:

$$0 \vee 0 = 0$$
$$0 \vee 1 = 1 \vee 0 = 1 \vee 1 = 1$$
$$0 \wedge 0 = 1 \wedge 0 = 0 \wedge 1 = 0$$
$$1 \wedge 1 = 1$$

然后再定义 0—1 矩阵(其元素都是 0 或 1 的矩阵)间的一种运算⊛如下:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \circledast \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{np} \end{bmatrix}$$

其中

$$c_{ij} = \bigvee_{k=1}^{m} (a_{ik} \wedge b_{kj}), 1 \leqslant i \leqslant n \text{ 且 } 1 \leqslant j \leqslant p$$

由此可知,$c_{ij}=1$ 当且仅当有 $k(1\leqslant k\leqslant m)$使

$$a_{ik} = b_{kj} = 1$$

从而可以得到以下的定理。

定理 2.4.2 若 A, B 和 C 都是非空有限集,R_1 为从 A 到 B 的二元关系,R_2 为从 B 到 C 的二元关系,则 $M_{R_1 \circ R_2} = M_{R_1} \circledast M_{R_2}$.

定义 2.4.2 设 A 为任意集合,R 为 A 上的任意二元关系。令

i) $R^0 = \boldsymbol{I}_A$;

ii) $R^{n+1} = R \circ R^n, n \in \boldsymbol{N}$.

其中 $\boldsymbol{I}_A = \{\langle x,x\rangle \mid x\in A\}$为 A 上的恒等关系。称 $R^n(n\in \boldsymbol{N})$为 R 的 n 次幂。

定理 2.4.3 若 $n,m\in N$ 且 R 为集合 A 上的二元关系,则

i) $(R^n)^{-1} = (R^{-1})^n$;

ii) $R^n \circ R^m = R^{n+m}$;

iii) $(R^m)^n = R^{mn}$.

证明

i) 是定理 2.4.1 的 vi) 的推广。

对 ii) 和 iii)，我们用关于 n 的归纳法证明。

1） 当 $n=0$ 时，因为

$$R^0 \circ R^m = I_A \circ R^m = R^m = R^{0+m}$$
$$(R^m)^0 = I_A = R^0 = R^{0\times m}$$

所以这时命题为真。

2） 对任意的 $k\in N$，假定当 $n=k$ 时命题为真，即 $R^k \circ R^m = R^{k+m}$ 且 $(R^m)^k = R^{mk}$. 因为

$$\begin{aligned} R^{k+1} \circ R^m &= (R \circ R^k) \circ R^m \\ &= R \circ (R^k \circ R^m) \\ &= R \circ R^{k+m} \\ &= R^{(k+1)+m} \\ (R^m)^{k+1} &= R^m \circ (R^m)^k \\ &= R^m \circ R^{mk} \\ &= R^{m+mk} \\ &= R^{m(k+1)} \end{aligned}$$

所以当 $n=k+1$ 时命题也真。

定理 2.4.4 设有限集 A 恰有 n 个元素。若 R 为 A 上的二元关系，则有 $s,t\in N$ 使 $s<t\leqslant 2^{n^2}$ 且 $R^s=R^t$.

证明 根据定理 1.4.6，A^2 有 n^2 个元素。从而由定理 1.1.4 知道，$\mathscr{P}(A^2)$ 有 2^{n^2} 个元素，即 A 上共有 2^{n^2} 个不同的二元关系。因此，在以下的 $2^{n^2}+1$ 个 A 上的二元关系

$$R^0, R^1, R^2, \cdots, R^{2^{n^2}}$$

之中必有相同者，所以必有 $s,t\in N$ 使 $s<t\leqslant 2^{n^2}$ 且 $R^s=R^t$.

习 题 2.4

1. 设集合 $\{a,b,c,d\}$ 上的二元关系 R_1 和 R_2 为

$$R_1 = \{\langle a,a\rangle, \langle a,b\rangle, \langle b,d\rangle\}$$
$$R_2 = \{\langle a,d\rangle, \langle b,c\rangle, \langle b,d\rangle, \langle c,b\rangle\}$$

试求 $R_2\circ R_1$，$R_1\circ R_2$，R_1^2 及 R_2^2.

2. 设 R 为如图 2.4.2 所示的集合 $\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$ 上的二元关系。试求出满足 $m<n$ 与 $R^m=R^n$ 的最小正整数 m 和 n.

3. 若 R 为任意集合 A 上的空关系或全关系，则 $R^2=R$.

4. 举出使

$$R_1 \circ (R_2 \cap R_3) \subset (R_1 \circ R_2) \cap (R_1 \circ R_3)$$
$$(R_2 \cap R_3) \circ R_4 \subset (R_2 \circ R_4) \cap (R_3 \circ R_4)$$

成立的二元关系 R_1, R_2, R_3 和 R_4 的实例。

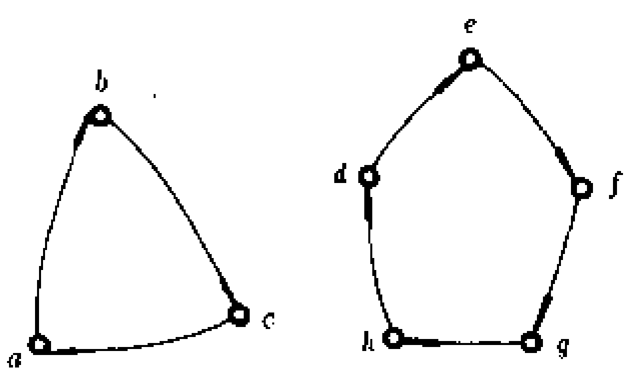


图 2.4.2 关系 R 的关系图 G_R

5. 设 R_1 和 R_2 都是集合 A 上的二元关系。证明或用反例推翻以下的论断：

a) 如果 R_1 和 R_2 都是自反的，则$R_1 \circ R_2$也是自反的；

b) 如果 R_1 和 R_2 都是反自反的，则$R_1 \circ R_2$也是反自反的；

c) 如果 R_1 和 R_2 都是对称的，则$R_1 \circ R_2$也是对称的；

d) 如果 R_1 和 R_2 都是反对称的，则$R_1 \circ R_2$也是反对称的；

e) 如果 R_1 和 R_2 都是传递的，则$R_1 \circ R_2$也是传递的；

6. 设 $A=\{0,1,2,3\}$ 上的二元关系 R_1 和 R_2 为

$$R_1 = \{\langle i,j\rangle \mid j = i + 1 \text{ 或 } j = i/2\}$$
$$R_2 = \{\langle i,j\rangle \mid i = j + 2\}$$

试求 $M_{R_1}, M_{R_2}, M_{R_1 \cdot R_2}, M_{R_1 \circ R_2 \circ R_1}$ 及 $M_{R_1^3}$.

7. 设 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ 上的二元关系 R 的关系图 G_R 如图 2.4.3 所示，试从 M_R 出发求出 M_{R^5} 及 M_{R^8}，并画出 R^5 和 R^8 的关系图加以验证。

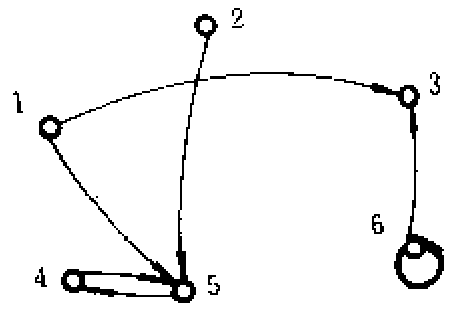


图 2.4.3 关系 R 的关系图 G_R

8. 设 R 为集合 A 上的二元关系，$s,t \in N, s<t$ 且 $R^s=R^t$. 证明

a)若 $k\in N$，则 $R^{s+k}=R^{t+k}$；

b)若 $k,i\in N$，则 $R^{s+kp+i}=R^{s+i}$；

c)若 $k\in N$，则 $R^k\in\{R^0,R^1,\cdots,R^{t-1}\}$. 其中 $p=t-s$.

9. 设 I_A 为集合 A 上的恒等关系，R 为 A 上的任意二元关系。证明

a)R 是自反的，当且仅当 $I_A\subseteq R$；

b)R 是反自反的，当且仅当 $R\cap I_A=\varnothing$；

c)R 是对称的，当且仅当 $R=R^{-1}$；

d)R 是反对称的，当且仅当 $R\cap R^{-1}\subseteq I_A$；

e)R 是传递的，当且仅当 $R\circ R\subseteq R$.

10. 如果集合 A 上的二元关系 R 既是自反的，又是传递的，则 $R^2=R$.

11. 设 R_1 为从集合 A 到集合 B 的二元关系，R_2 为从集合 B 到集合 C 的二元关系。试求 $\mathrm{dom}(R_1\circ R_2)$和 $\mathrm{ran}(R_1\circ R_2)$.

12. 设 R 为从集合 A 到集合 B 的二元关系，且对每个 $X\subseteq A$，皆令

$$R(X) = \{y \in B \mid \text{有 } x \in X \text{ 使 } \langle x,y\rangle \in R\}.$$

若 $X_1\subseteq A$ 且 $X_2\subseteq A$，则有

i)$R(X_1\cup X_2)=R(X_1)\cup R(X_2)$；

ii)$R(X_1\cap X_2)\subseteq R(X_1)\cap R(X_2)$；

iii)$R(X_1\backslash X_2)\supseteq R(X_1)\backslash R(X_2)$.

13. 设 R_1 为从集合 A 到集合 B 的二元关系，R_2 为从 B 到集合 C 的二元关系。若 $X\subseteq A$，则$(R_1\circ R_2)(X)=R_2(R_1(X))$.

§2.5 关系的闭包

定义 2.5.1 设 R 为集合 A 上的二无关系。如果 A 上的二元关系 R'满足：

i) R' 是自反的(对称的或传递的);

ii) $R \subseteq R'$;

iii) 若 A 上的二元关系 R'' 也满足 i) 和 ii),则 $R' \subseteq R''$.

就称 R' 为 R 的自反(对称或传递)闭包,记为 $r(R)$($s(R)$ 或 $t(R)$).

我们还令

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$$

$$R^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} R^n$$

显然,集合 A 上的二元关系 R 的自反闭包 $r(R)$ 对称闭包 $s(R)$ 和传递闭包 $t(R)$ 都是唯一确定的。

下面我们就来讨论闭包的性质,以及它们之间的相互关系。

定理 2.5.1 设 R 为集合 A 上的二元关系。

i) R 是自反的,当且仅当 $r(R)=R$;

ii) R 是对称的,当且仅当 $s(R)=R$;

iii) R 是传递的,当且仅当 $t(R)=R$.

证明 只证 i),ii)和 iii)可同样证明。

若 R 是自反的,则由定义 2.5.1 的 ii)和 iii)知 $R \subseteq r(R)$ 且 $r(R) \subseteq R$,所以 $r(R)=R$.

反之,若 $r(R)=R$,则由定义 2.5.1 的 i)知 R 是自反的。

例 1 设 R 为集合 $A=\{a,b,c,d,e\}$ 上的二元关系,其关系图 G_R 如图 2.5.1 所示。

R 的自反闭包 $r(R)$ 的关系图如图 2.5.2 所示。它是由 G_R 在每个无自圈的结点上都增加一个自圈后得到的。

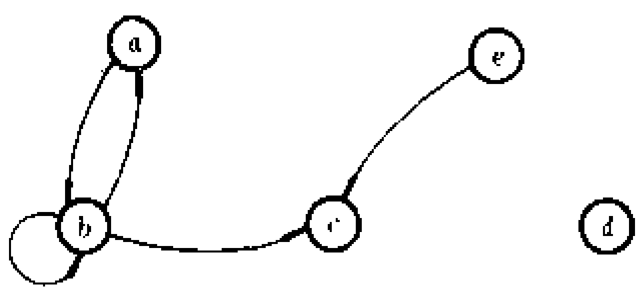


图 2.5.1 关系 R 的关系图 G_R

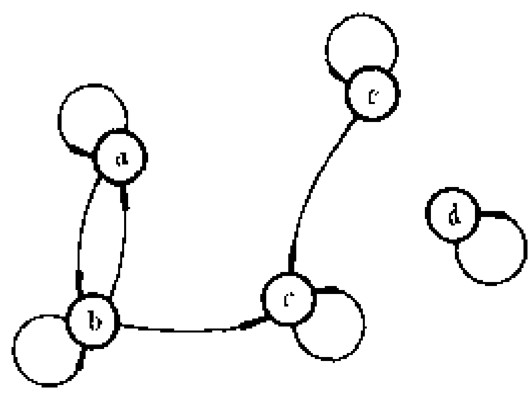


图 2.5.2 自反闭包 $r(R)$ 的关系图 $G_{r(R)}$

R 的对称闭包 $s(R)$ 的关系图如图 2.5.3 所示。它是把 G_R 的每条单向边都变为一对反向的有向边后而得到的。

最后,R 的传递闭包 $t(R)$ 的关系图,如图 2.5.4 所示。它是由 G_R 添加上所有的"捷径"后而得到的。

例 1 说明了怎样利用所给关系 R 的关系图 G_R 求 $r(R)$、$s(R)$ 和 $t(R)$ 的方法(实际上是求 $G_{r(R)}$、$G_{s(R)}$ 和 $G_{t(R)}$ 的方法)。下面我们来研究它们的直接计算方法。

定理 2.5.2 设 R 为集合 A 上的二元关系。

i) $r(R)=R \cup I_A$;

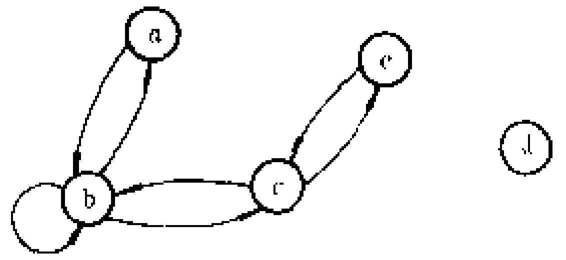


图 2.5.3 对称闭包 $s(R)$ 的关系图 $G_{s(R)}$

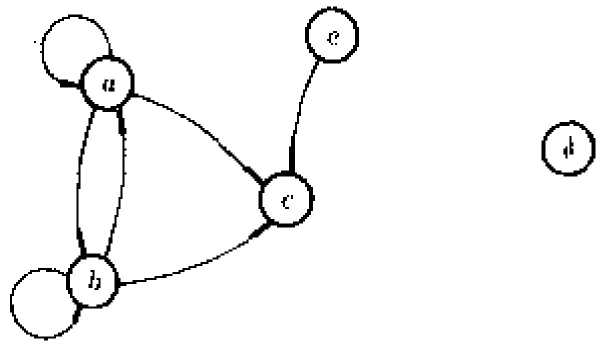


图 2.5.4 传递闭包 $t(R)$ 的关系图 $G_{t(R)}$

ii) $s(R)=R\cup R^{-1}$;

iii) $t(R)=R^{+}$.

证明

i) 因为 $R\cup I_A$ 显然是自反的且 $R\subseteq R\cup I_A$，所以由定义 2.5.1 的 iii)知道 $r(R)\subseteq R\cup I_A$. 另一方面，由定义 2.5.1 的 i)和 ii)知道，$r(R)$ 是自反的且 $R\subseteq r(R)$. 但由习题 2.4 的 9a)知 $I_A\subseteq r(R)$. 因此 $R\cup I_A\subseteq r(R)$.

类似地可以证明 ii).

iii) 首先，若 $\langle x,y\rangle,\langle y,z\rangle\in R^{+}$，则必有 $n,m\in I_+$ 使 $\langle x,y\rangle\in R^n$ 且 $\langle y,z\rangle\in R^m$. 因此，$\langle x,z\rangle\in R^{n+m}$. 所以 $\langle x,z\rangle\in R^{+}$，即 R^{+} 为传递的。从而由定义 2.5.1 的 iii)知道 $t(R)\subseteq R^{+}$.

另一方面，为了证明 $R^{+}\subseteq t(R)$，根据定理 1.2.4 的 iii)，我们只需证明，对每个 $n\in I_+$ 皆有 $R^n\subseteq t(R)$. 这可用归纳法证明如下：

1) 根据定义 2.5.1 的 ii)知，当 $n=1$ 时命题为真。

2) 对任意的 $k\in I_+$，假定当 $n=k$ 时命题为真，即 $R^k\subseteq t(R)$. 我们任取 $\langle x,z\rangle\in R^{k+1}$，因为 $R^{k+1}=R\circ R^k$，所以有 $y\in A$ 使 $\langle x,y\rangle\in R$ 且 $\langle y,z\rangle\in R^k$. 但因 $R\subseteq t(R)$ 且 $R^k\subseteq t(R)$，又 $t(R)$ 是传递的，所以 $\langle x,z\rangle\in t(R)$. 这表明 $R^{k+1}\subseteq t(R)$，即当 $n=k+1$ 时命题也真。

定理 2.5.2 给出的计算公式中，$r(R)$ 和 $s(R)$ 的计算公式很实用，$t(R)$ 的计算公式不够理想，有待改进。这在一般情况下虽然不容易办到，但当 A 为有限集时，还是能够找到比较实用的计算公式的。

定理 2.5.3 设 A 为含有 n 个元素的有限集，R 为 A 上的二元关系，则

$$t(R)=\bigcup_{i=1}^{n}R^i$$

证明 若 $n=0$，则 $t(R)=\varnothing=\bigcup\limits_{i=1}^{0}R^i$.

对于 $n>0$ 的情况，我们只需证明，对于每个 $k\in N$ 皆有 $R^{n+k}\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{n}R^i$ 即可，这可用第二归纳法来证明。

1) 当 $k=0$ 时，$R^{n+k}=R^n\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{n}R^i$;

2) 设 $m\in I_+$，假定当 $k<m$ 时皆有 $R^{n+k}\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{n}R^i$.

任取 $\langle x,y\rangle\in R^{n+m}$，令 $u_0=x,u_{n+m}=y$，则有 $u_1,u_2,\cdots,u_{n+m-1}\in A$ 使

$$\langle u_i,u_{i+1}\rangle\in R\quad(i=0,1,\cdots,n+m-1)$$

因为 $n+m>n$，所以在 $u_1, u_2, \cdots, u_{n+m}$ 这 $n+m$ 个元素中必有两个相同，设 $u_l = u_j (1 \leqslant l < j \leqslant n+m)$，因此有 $\langle u_0, u_1 \rangle, \cdots, \langle u_{l-1}, u_l \rangle, \langle u_l, u_{j+1} \rangle, \cdots, \langle u_{n+m-1}, u_{n+m} \rangle \in R$，即 $\langle x, y \rangle \in R^{n+m-(j-l)}$.

从而由 $R^{n+m-(j-l)} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R^i$，得 $\langle x, y \rangle \in \bigcup_{i=1}^{n} R^i$. 这表明

$$R^{n+m} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} R^i.$$

定理 2.5.4 若 R_1 和 R_2 都是集合 A 上的二元关系且 $R_1 \subseteq R_2$，则

i) $r(R_1) \subseteq r(R_2)$；

ii) $s(R_1) \subseteq s(R_2)$；

iii) $t(R_1) \subseteq t(R_2)$.

证明 只证 i)，其余的留作练习。

根据定义 2.5.1 的 i) 和 ii) 知道，$r(R_2)$ 是自反的且 $R_2 \subseteq r(R_2)$. 因为 $R_1 \subseteq R_2$，所以 $R_1 \subseteq r(R_2)$. 从而由定义 2.5.1 的 iii) 知道 $r(R_1) \subseteq r(R_2)$.

定理 2.5.5 设 R 为集合 A 上的二元关系。

i) 若 R 是自反的，则 $s(R)$ 和 $t(R)$ 也是自反的；

ii) 若 R 是对称的，则 $r(R)$ 和 $t(R)$ 也是对称的；

iii) 若 R 是传递的，则 $r(R)$ 也是传递的。

证明

i) 因为 R 是自反的，所以由习题 2.4 的 9a) 知道 $\boldsymbol{I}_A \subseteq R$. 根据定义 2.5.1 的 ii)，$R \subseteq s(R)$ 且 $R \subseteq t(R)$. 所以再由习题 2.4 的 9a) 就得到，$s(R)$ 和 $t(R)$ 都是自反的。

ii) 因为 R 是对称的，所以由习题 2.4 的 9c) 知道 $R = R^{-1}$. 根据定理 2.5.2 的 ii) 和定理 2.3.2 的 v) 得

$$(r(R))^{-1} = (R \cup \boldsymbol{I}_A)^{-1} = R^{-1} \cup \boldsymbol{I}_A^{-1} = R \cup \boldsymbol{I}_A = r(R)$$

根据定理 2.5.2 的 iii)、定理 2.3.2 的 v) 和定理 2.4.3 的 i) 得

$$(t(R))^{-1} = (\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n)^{-1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (R^n)^{-1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (R^{-1})^n = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = t(R)$$

所以再由习题 2.4 的 9c) 就得到，$r(R)$ 和 $t(R)$ 都是对称的。

iii) 因为 R 是传递的，所以由习题 2.4 的 9e) 知道 $R \circ R \subseteq R$. 根据定理 2.5.2 的 i) 及定理 2.4.1 的 ii) 和 iii) 得

$$\begin{aligned} r(R) \circ r(R) &= (R \cup \boldsymbol{I}_A) \circ (R \cup \boldsymbol{I}_A) \\ &= R \circ R \cup R \cup \boldsymbol{I}_A \\ &\subseteq R \cup \boldsymbol{I}_A = r(R) \end{aligned}$$

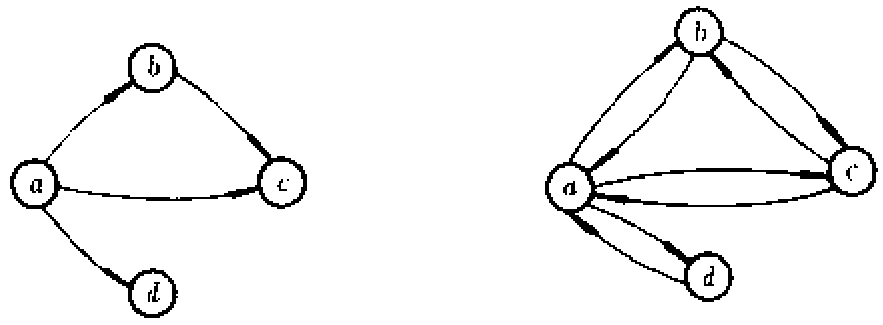
所以再由习题 2.4 的 9e) 就得到，$r(R)$ 是传递的。

例 2 设 $A = \{a, b, c, d\}$，并取

$$R = \{\langle a,b \rangle, \langle a,c \rangle, \langle a,d \rangle, \langle b,c \rangle\}$$

时，R 显然是传递的。因为 R 的关系图 G_R 和 $s(R)$ 的关系图 $G_{s(R)}$ 如图 2.5.5 所示。由 G_R 和 $G_{s(R)}$ 显然可知

$$\langle d,a \rangle, \langle a,b \rangle \in s(R) \quad 且 \quad \langle d,b \rangle \notin s(R)$$



(a) R 的关系图　　(b) $s(R)$ 的关系图

图 2.5.5　关系 R 和 $s(R)$ 的关系图

所以 $s(R)$ 不是传递的。

定理 2.5.6　设 R 为集合 A 上的二元关系.

i) $rs(R)=sr(R)$;

ii) $rt(R)=tr(R)$;

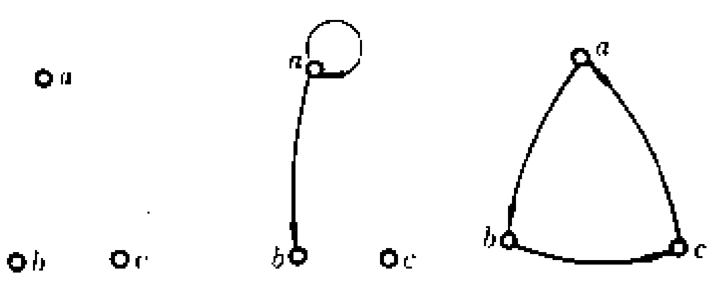
iii) $st(R)\subseteq ts(R)$.

证明　只证 i)，其余的完全类似，留作练习。

根据定义 2.5.1 的 ii)；有 $R\subseteq s(R)$. 从而由定理 2.5.4 的 i) 知道 $r(R)\subseteq rs(R)$. 但由定理 2.5.5 的 ii) 知道 $rs(R)$ 是对称的，所以再由定义 2.5.1 就得到 $sr(R)\subseteq rs(R)$. 类似可证 $rs(R)\subseteq sr(R)$.

习　题 2.5

1. 对图 2.5.6 所示的集合 $A=\{a,b,c\}$ 上的三个关系，求出各自的自反闭包、对称闭包和传递闭包，并画出各闭包的关系图。



(a) R_1　　(b) R_2　　(c) R_3

图 2.5.6　关系 R_1、R_2 和 R_3 的关系图

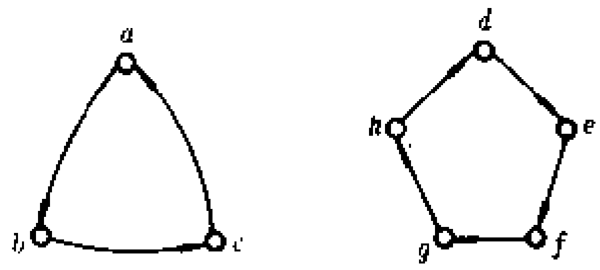


图 2.5.7　关系 R 的关系图 G_R

2. 设 R_1 和 R_2 都是集合 A 上的二元关系，试证明：

a)　$r(R_1\cup R_2)=r(R_1)\cup r(R_2)$;

b)　$s(R_1\cup R_2)=s(R_1)\cup s(R_2)$;

c)　$t(R_1\cup R_2)\supseteq t(R_1)\cup t(R_2)$.

并给出使 $t(R_1)\cup t(R_2)\subseteq t(R_1\cup R_2)$ 不成立的 R_1 和 R_2 的具体实例。

3. 完成定理 2.5.6 的证明。

4. 设 R_1 和 R_2 都是集合 A 上的二元关系，试证明：

a) $r(R_1\cap R_2)=r(R_1)\cap r(R_2)$；

b) $s(R_1\cap R_2)\subseteq s(R_1)\cap s(R_2)$；

c) $t(R_1\cap R_2)\subseteq t(R_1)\cap t(R_2)$.

并分别给出使 $s(R_1)\cap s(R_2)\subset s(R_1\cap R_2)$ 和 $t(R_1)\cap t(R_2)\subseteq t(R_1\cap R_2)$ 不成立的 R_1 和 R_2 的具体实例。

5. 设 $A=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$，R 为 A 上的二元关系，其关系图 G_R 如图 2.5.7 所示。试画出 $t(R)$ 和 $ts(R)$ 的关系图。

6. 给出一个二元关系 R 使

$$st(R)\neq ts(R).$$

7. 设 R 为集合 A 上的二元关系，试证明

a) $R\circ R^*=R^+=R^*\circ R$;

b) $(R^+)^+=R^+$；

c) $(R^*)^*=R^*$.

§2.6 相容关系

从本节开始，我们将要研究几种重要的二元关系，它们是相容关系、等价关系和序关系。本节先研究相容关系。

定义 2.6.1 如果集合 A 上的二元关系 R 是自反的和对称的，则称 R 为 A 上的相容关系。若 xRy，则称 x 和 y 相容；否则称 x 和 y 不相容。

例 1 设 $A=\{6,14,19,105,145,203\}$，并取

$$R=\{\langle x,y\rangle\mid x,y\in A \text{ 且 } (x,y)>1\}$$

其中 (x,y) 表示 x 和 y 的最大公因子。我们不难验证，R 确是 A 上的相容关系。

定理 2.6.1 若 R 为集合 A 上的二元关系，则 R 为 A 上的相容关系，当且仅当 $r(R)=s(R)=R$.

实际上，这个定理可以由定理 2.5.1 直接推出。

设 R 为非空有限集 $A=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 上的相容关系。因为 R 是自反的和对称的，所以 R 的关系矩阵 M_R 和关系图 G_R 可以做如下的简化：

首先考虑对 M_R 的简化。因为 M_R 是对称的且对角线元素全为 1，所以只需要知道 M_R 的对角线以下的元素即可。如果 $n>1$，且以 a_{ij} 表示 M_R 的第 i 行第 j 列的元素时，则 M_R 就可以用如下的三角阵代替：

$$
\begin{array}{c|cccc}
x_2 & a_{21} & & & \\
x_3 & a_{31} & a_{32} & & \\
\vdots & & \cdots\cdots & & \\
x_n & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} \\
\hline
 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1}
\end{array}
$$

并称为 R 的简化关系矩阵，仍用 M_R 表示。

其次考虑对 G_R 的简化。因为 G_R 中每个结点处都有一个自圈，而且任意两个结点之间都不会仅有单向边，所以我们可以把 G_R 中的所有自圈都去掉，并把每对反向的有向边都改为一条无向边。称这样得到的无向图为 R 的简化关系图，仍用 G_R 表示。

对例 1 中的相容关系 R，其简化关系矩阵为

$$
\begin{array}{c|ccccc}
14 & 1 & & & & \\
19 & 0 & 0 & & & \\
105 & 1 & 1 & 0 & & \\
145 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\
203 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
 & 6 & 14 & 19 & 105 & 145
\end{array}
$$

其简化关系图如图 2.6.1 所示。

定义 2.6.2 设 R 为集合 A 上的相容关系。

i) 如果 S 为 A 的非空子集且当 $x,y\in S$ 时皆有 xRy，则称 S 为 R 的一个相容类。

ii) 设 S 为 R 的相容类。若当 $y\notin S$ 时皆有 $x\in S$ 使 $x \not R y$，则称 S 为 R 的一个极大相容类。

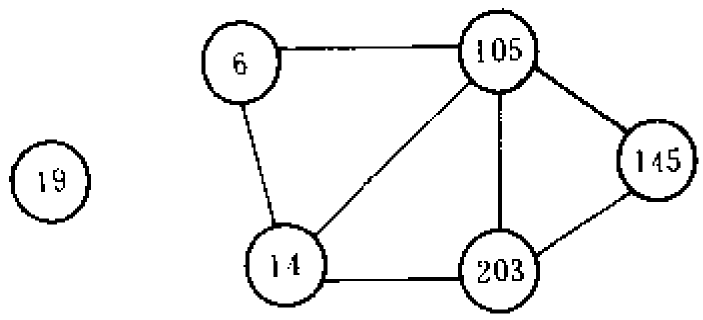


图 2.6.1 相容关系 R 的简化关系图

对例 1 中的相容关系 R 而言，它共有以下四个极大相容类：

$$
\begin{gathered}
\{19\}, \\
\{6,14,105\}, \\
\{14,105,203\}, \\
\{105,145,203\}.
\end{gathered}
$$

设 R 为非空有限集 A 上的相容关系。我们在实际中常遇到的问题之一，就是求 R 的所有极大相容类。下面我们给出两种具体求法。

1)关系图法

先画出 R 的简化关系图，则其中每个“极大完全多边形”的顶点的集合，就是 R 的一

个极大相容类。所谓"完全多边形",乃指,其中任意两个结点之间都有一条无向边。所谓"极大"是指,只要再给它增添简化关系图中另外一个结点,它就不再是完全多边形了。

例 2 如果集合 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ 上的相容关系 R 的简化关系图如图 2.6.2 所示,则 R 的所有极大相容类为

$$\{1,2,3,4\},\{2,5\},\{3,6\},\{5,6\}$$

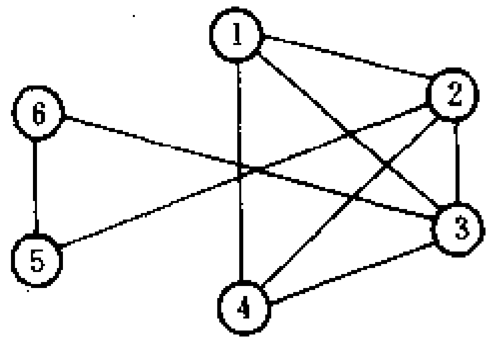


图 2.6.2 关系 R 的简化关系图

这种求法直观简单,很实用。但若用计算机处理却不方便,不如下面的关系矩阵法。

2) 关系矩阵法

这种方法的具体做法如下:

(1) 列出 R 的简化关系矩阵;

(2) R 的所有第 n 级相容类为 $\{x_1\},\{x_2\},\cdots,\{x_n\}$;

(3) 若 $n=1$,则终止。

(4) 若 $n>1$,则 $i\leftarrow n-1$;

(5) $A\leftarrow\{x_j | a_{ji}=1$ 且 $i<j\leqslant n\}$;

(6) 对每个 $i+1$ 级相容类 S,若 $S\cap A\neq\varnothing$,则添加一个新相容类 $\{x_i\}\cup(S\cap A)$;

(7) 对已得到的任意二相容类 S 和 S',若 $S'\subseteq S$,则删去 S';称这样合并后的相容类为第 i 级相容类。

(8) 若 $i>1$,则 $i\leftarrow i-1$,并转到(5);

(9) 若 $i=1$,则终止。

最后所得到的相容类,即为 R 的所有极大相容类。

下面,我们就用上述方法来确定例 2 中的相容关系 R 的所有极大相容类。

首先,我们列出 R 的简化关系矩阵如下:

$$\begin{array}{c|ccccc}
2 & 1 & & & & \\
3 & 1 & 1 & & & \\
4 & 1 & 1 & 1 & & \\
5 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\
6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5
\end{array}$$

因为 $n=6$,所以第 6 级的所有相容类为

$$\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\}$$

从第 5 列扫描起,因为 $a_{65}=1$,所以 $A=\{6\}$. 因此要添加上相容类 $\{5,6\}$,并删去相容类 $\{5\}$ 和 $\{6\}$. 这时相容类有

$$\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5,6\}$$

它们就是第 5 级的所有相容类。

对第 4 列，因为 $a_{54}=a_{64}=0$，所以相容类不改变，即第 4 级的所有相容类就是原来第 5 级的所有相容类。

对第 3 列，因为 $a_{43}=a_{63}=1$ 且 $a_{53}=0$，所以 $A=\{4,6\}$. 因此要添加上相容类 $\{3,4\}$ 及 $\{3,6\}$，并删去相容类 $\{3\}$ 和 $\{4\}$. 这时相容类有

$$\{1\},\{2\},\{3,4\},\{3,6\},\{5,6\}$$

它们就是第 3 级的所有相容类。

对第 2 列，因为 $a_{32}=a_{42}=a_{52}=1$ 且 $a_{62}=0$，所以 $A=\{3,4,5\}$. 因此要添加上相容类 $\{2,3,4\}$、$\{2,3\}$ 和 $\{2,5\}$，并删去相容类 $\{2\}$、$\{2,3\}$ 和 $\{3,4\}$. 这时相容类就变为

$$\{1\},\{2,3,4\},\{2,5\},\{3,6\},\{5,6\}$$

它们就是第 2 级的所有相容类。

对第 1 列，因为 $a_{21}=a_{31}=a_{41}=1$ 且 $a_{51}=a_{61}=0$，所以 $A=\{2,3,4\}$. 因此要添加上相容类 $\{1,2,3,4\}$、$\{1,2\}$ 和 $\{1,3\}$，并删去相容类 $\{1\}$、$\{1,2\}$、$\{1,3\}$ 和 $\{2,3,4\}$. 这时的相容类变为

$$\{1,2,3,4\},\{2,5\},\{3,6\},\{5,6\}$$

它们就是第 1 级的所有相容类，即 R 的所有极大相容类。

习 题 2.6

1. 设 R_1 和 R_2 都是集合 A 上的相容关系。证明或用反例推翻下列命题：

a) $R_1 \cap R_2$ 是 A 上的相容关系；

b) $R_1 \cup R_2$ 是 A 上的相容关系；

c) $R_1 - R_2$ 是 A 上的相容关系；

d) $R_1 \oplus R_2$ 是 A 上的相容关系；

e) $R_1 \circ R_2$ 是 A 上的相容关系；

f) R_1^2 是 A 上的相容关系。

2. 设 $A=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$，$R$ 为 A 上的相容关系，其简化关系矩阵如下：

x_2	1				
x_3	1	1			
x_4	0	0	1		
x_5	0	0	1	1	
x_6	1	0	1	0	1
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5

请用两种方法求出 R 的所有极大相容类。

3. 如果 A 为恰含 n 个元素的有限集，则 A 上有多少个不同的相容关系？

§2.7 等 价 关 系

给定集合 A(见图 2.7.1(a))，我们有时需要把 A 分成一些互不相交的子集(见图

2.7.1(b))。例如,把自然数集合 N 分为以下六部分:

$\{0,6,12,\cdots\}$

$\{1,7,13,\cdots\}$

……

$\{5,11,17,\cdots\}$

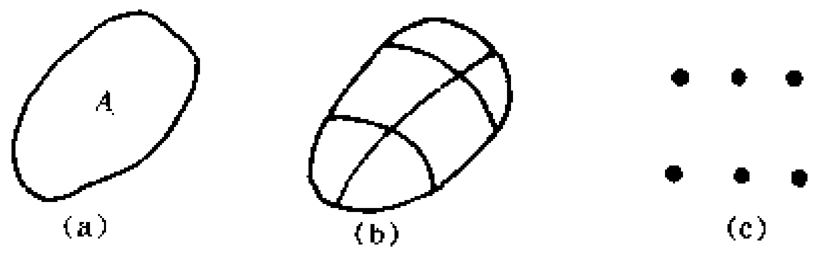


图 2.7.1 把集合 A 分为六部分

现在,我们不再把每一部分看做是一堆元素,而是看做一个新元素。这样就得到一个新的集合 B(见图 2.7.1(c)).这个新集合 B 可能与原来的集合 A 相差很远。比如对上面所举的例子,A(即 N)为无限集,而 B 却为仅含六个元素的有限集。

像上面这种把一个集合变为另一个新集合的处理过程,具有普遍意义,值得深入研究。这一节就来讨论处理这类问题的抽象方法。

定义 2.7.1 如果集合 A 上的二元关系 R 是自反的、对称的和传递的,则称 R 为 A 上的等价关系。

如果 $x,y\in A$ 使 xRy,则称 x 与 y 等价,记为 $x\approx_R y$. 在不强调 R 时,常简记为 $x\approx y$.

例 1 下面列举的都是等价关系:

i) 实数集 $\boldsymbol{R}$ 上的普通的相等关系;

ii) 集合 A 的幂集 $\mathscr{P}(A)$ 上的集合相等关系;

iii) 整数集 $\boldsymbol{I}$ 上的模 $m(m\in \boldsymbol{I}_+)$ 的同余关系 $\equiv_m$(见 §2.1 的例 6);

iv) 平面上的三角形的集合上的三角形全等关系和三角形相似关系;

v) 平面上的直线的集合上的直线间的平行关系;

vi) 中国城市居民中,人们同住在一个城市内的关系。

定理 2.7.1 如果 R 为集合 A 上的二元关系,则 R 为 A 上的等价关系之充要条件为

$$r(R)=s(R)=t(R)=R$$

实际上,这可由定理 2.5.1 直接推出。

定理 2.7.2 如果 R 为集合 A 上的二元关系,则 $tsr(R)$、$trs(R)$ 和 $rts(R)$ 都是 A 上的等价关系。

实际上,这可由定理 2.5.5 直接推出。

例 2 设 $A=\{1,2,3,4\}$. 当取

$$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle\}$$

时,则有

$$\begin{aligned}str(R)=srt(R)=rst(R)\\ =\{&\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle,\\ &\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\\ &\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 4,1\rangle\}\end{aligned}$$

所以 $str(R)$、$srt(R)$ 和 $rst(R)$ 都不是 A 上的等价关系。

设 R 为非空有限集 A 上的等价关系。因为等价关系都是相容关系,所以我们也可以用简化关系矩阵或简化关系图来表示 R.

为了讨论等价关系的简化关系图，我们再简单地介绍无向图的几个概念。

(1) 子图

如果图 G_1 的每个结点和每条边都分别为图 G_2 的结点和边，就称 G_1 为 G_2 的子图。

(2) 连通图

若对图 G 的任意两个不同的结点 a 和 b，皆有 G 的有限个结点，譬如说为 $u_0,u_1,\cdots,u_n$，使得对每个 $i\in N_n$，皆有一条连接 u_i 与 u_{i-1} 的边(其中 $u_0=a$ 且 $u_n=b$)，就称 G 为连通的。

(3) 分支

图 G 的最大连通子图称为 G 的分支。

(4) 完全图

若对图 G 的任意两个不同的结点，都有一条连接它们的边，就称 G 为完全图。

定理 2.7.3 若 R 为非空有限集 A 上的二元关系，则 R 为 A 上的等价关系之充要条件为：R 有简化关系图，且其每个分支都是完全图。

证明 设 R 是 A 上的等价关系。因为 R 是自反的和对称的，所以 R 有简化关系图，设为 G_R. 其次，在 G_R 的任意一个分支中任取两个不同的结点 a 与 b. 因为 a 和 b 在 G_R 的同一个分支中，所以有有限个不同的结点 $a=u_0,u_1,\cdots,u_{n-1},u_n=b$，使得对每个 $i\in N_n$ 皆有一条连接 u_i 与 u_{i+1} 的边。因此 $\langle u_i,u_{i+1}\rangle\in R$. 从而由 R 的传递性即得 $\langle u_0,u_n\rangle\in R$ 即 $\langle a,b\rangle\in R$. 所以有一条连接 a 与 b 的边。这表明 a 和 b 所在的分支是完全图。

另一方面，设 R 有简化关系图且其每个分支都是完全图。首先由 R 有简化关系图知道，R 是自反的和对称的。其次，若 $\langle x,y\rangle$、$\langle y,z\rangle\in R$，则有连接 x 与 y 及 y 与 z 的边。所以 x 与 z 属于同一个分支。但每个分支都是完全图，所以有一条连接 x 与 z 的边，即 $\langle x,z\rangle\in R$. 这表明 R 是传递的。因此，R 是 A 上的等价关系。

定理 2.7.4 若 R 为非空有限集 A 上的二元关系，则 R 为 A 上的等价关系之充要条件为：

i) M_R 的对角线上的元素全为 1；

ii) M_R 是对称矩阵；

iii) M_R 可以经过有限次地把行与行及相应的列与列对调，化为主对角型分块矩阵，且对角线上每个子块都是全 1 方阵。

证明

首先，R 是自反的当且仅当 M_R 的对角线上的元素全为 1，R 是对称的当且仅当 M_R 是对称矩阵。

其次，图 G 为完全图当且仅当它所代表的二元关系之关系矩阵为全 1 方阵。因为把 M_R 的第 i 行与第 j 行对调，并把第 i 列与第 j 列对调，仅相当于把 A 中第 i 个元素与第 j 个元素的序号对调，R 本身并无变化。所以，当我们对 A 中元素按 G_R 的分支逐个进行编号时，M_R 为主对角型分块矩阵且主对角线上每个子块都是全 1 方阵的充要条件为：G_R 的每个分支都是完全图。从而再由定理 2.7.3 即知，本定理是正确的。

例 3 若 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ 上的二元关系 R 为

$$R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 5,5\rangle,$$

$$\langle 6,6\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 1,5\rangle,\langle 5,1\rangle,$$
$$\langle 2,4\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 3,5\rangle,\langle 5,3\rangle\}$$

则

$$M_R=\begin{bmatrix}1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

只要把 M_R 的第 2 行与第 5 行对调，并把第 2 列与第 5 列对调，就得到如下的矩阵：

$$\begin{bmatrix}1&1&1&0&0&0\\1&1&1&0&0&0\\1&1&1&0&0&0\\0&0&0&1&1&0\\0&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

它是一个主对角型分块矩阵，其对角线上的三个子块分别为

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix},\ (1)$$

都是全 1 方阵，所以 R 是 A 上的等价关系。

R 的简化关系图如图 2.7.2 所示。

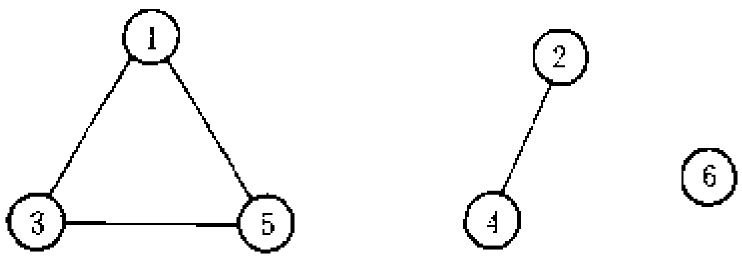


图 2.7.2 关系 R 的简化关系图

定义 2.7.2 设 A 为任意集合且 $\Pi\subseteq\mathscr{P}(A)$。如果 Π 满足：

i) 若 $S\in\Pi$，则 $S\neq\varnothing$；

ii) $\bigcup\Pi=A$；

iii) 若 $S_1,S_2\in\Pi$ 且 $S_1\cap S_2\neq\varnothing$，则 $S_1=S_2$。

就称 Π 为 A 的划分。

就本节开头所举的例子而言，显然集合

$$\Pi=\{\{0,6,12,\cdots\},\{1,7,13,\cdots\}\cdots,\{5,11,17,\cdots\}\}$$

就是集合 N 的一个划分。

定义 2.7.3 设 R 为集合 A 上的等价关系。对每个 $x\in A$，令

$$[x]_R=\{y\mid y\in A\text{ 且 }xRy\}$$

并称 $[x]_R$ 为 x 关于 R 的等价类。当不强调 R 时，就把 $[x]_R$ 简记为 $[x]$，并称为 x 的等价类。

因为 R 是自反的，所以对每个 $x\in A$，皆有 $x\in[x]_R$。

例 4 对任意正整数 $m>1$，整数的相等关系"$=$"和模 m 的同余关系"$\equiv_m$"，都是 I 上

的等价关系。对每个 $i\in \boldsymbol{I}$，显然有

$$[i]_{=} = \{i\}$$

$$[i]_{\equiv_m} = \{j \mid j \in \boldsymbol{I} \text{ 且 } m \mid (j-i)\}$$

定理 2.7.5 若 R 为集合 A 上的等价关系，则 $\Pi_R=\{[x]_R \mid x\in A\}$ 为 A 的划分。

证明 任取 $S\in\Pi_R$，则有 $x\in A$ 使 $S=[x]_R$. 因此 $S\subseteq A$ 且 $x\in S$，即 S 为 A 的非空子集。

其次，对每个 $x\in A$ 皆有 $x\in[x]_R\subseteq A$，所以 $\bigcup\Pi_R\subseteq A\subseteq\bigcup\Pi_R$，即 $\bigcup\Pi_R=A$.

最后，如果 $S_1,S_2\in\Pi_R$ 且 $S_1\cap S_2\neq\varnothing$，则必有 $a,b,c\in A$ 使 $S_1=[a]_R$，$S_2=[b]_R$ 且 $c\in S_1\cap S_2$（见图 2.7.3）。因此 aRc 且 bRc. 因为 R 是对称的和传递的，所以 bRa. 任取 $x\in[b]_R$，则 bRx. 从而再由 R 的对称性和传递性得 aRx，即 $x\in[a]_R$. 这表明 $[b]_R\subseteq[a]_R$，即 $S_2\subseteq S_1$. 同理可证 $[a]_R\subseteq[b]_R$，即 $S_1\subseteq S_2$，所以 $S_1=S_2$.

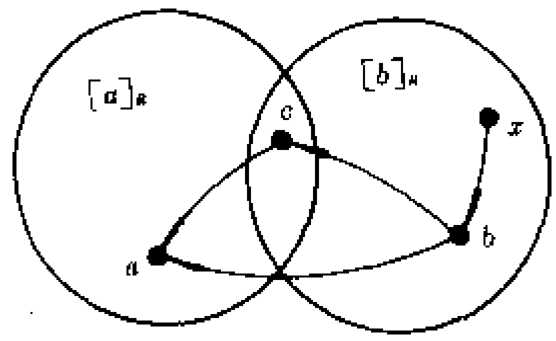


图 2.7.3

综上所述，Π_R 确是 A 的一个划分。

定义 2.7.4 设 R 为集合 A 上的等价关系。称集合 $\{[x]_R \mid x\in A\}$ 为 A 关于 R 的商集，并记为 A/R.

根据定理 2.7.5，A/R 是 A 的划分。这就是本节开头所讲的，把 A 分为若干互不相交的部分，再把每一部分都作为一个新元素而构成一个新集合的处理方法的一般化。对例 4 中的等价关系 $\equiv_m$，我们显然有

$$\boldsymbol{N}/_{\equiv_m} = \{[0]_{\equiv_m},[1]_{\equiv_m},\cdots,[m-1]_{\equiv_m}\}$$

定理 2.7.6 设 Π 为集合 A 的划分。若令

$$R_\Pi = \{\langle x,y\rangle \mid \text{有 } S\in\Pi \text{ 使 } x,y\in S\}$$

则 R_Π 为 A 上的等价关系且 $A/R_\Pi=\Pi$.

证明 任取 $\langle x,y\rangle\in R_\Pi$，则有 $S\in\Pi$ 使 $x,y\in S$. 因为 $S\subseteq A$，所以 $x,y\in A$. 因此 R_Π 是 A 上的二元关系。

任取 $x\in A$，因为 Π 为 A 的划分，故有 $S\in\Pi$ 使 $x\in S$. 所以 $\langle x,x\rangle\in R_\Pi$. 这表明 R_Π 是自反的。此外，R_Π 显然还是对称的。下面我们证明 R_Π 还是传递的。为此，任取 $\langle x,y\rangle$，$\langle y,z\rangle\in R_\Pi$，按 R_Π 的定义，必有 $S_1,S_2\in\Pi$ 使 $x,y\in S_1$ 且 $y,z\in S_2$. 从而知道 $y\in S_1\cap S_2$，即 $S_1\cap S_2\neq\varnothing$. 因为 Π 是 A 的划分，所以 $S_1=S_2$. 因此，$\langle x,z\rangle\in R_\Pi$，这表明 R_Π 确实是传递的。

综上所述，R_Π 确实是 A 上的等价关系。

下面我们证明 $A/R_\Pi=\Pi$.

任取 $S\in\Pi$ 及 $x\in S$. 若 $y\in S$，则由 R_Π 的定义可知 $xR_\Pi y$，所以 $y\in[x]_{R_\Pi}$. 因此 $S\subseteq[x]_{R_\Pi}$. 另一方面，若 $y\in[x]_{R_\Pi}$，则 $xR_\Pi y$. 从而由 R_Π 的定义知道，必有 $S'\in\Pi$ 使 $x,y\in S'$. 因为 $x\in S$ 且 $x\in S'$，所以 $S\cap S'\neq\varnothing$. 但 Π 为 A 的划分，$S,S'\in\Pi$，所以 $S=S'$，即 $y\in S$. 这表明 $[x]_{R_\Pi}\subseteq S$. 从而得到 $S=[x]_{R_\Pi}$，即 $S\in A/R_\Pi$，所以 $\Pi\subseteq A/R_\Pi$.

另一方面，任取 $[x]_{R_\Pi}\in A/R_\Pi$. 因为 Π 为 A 的划分，所以必有 $S\in\Pi$ 使 $x\in S$. 通过与前

面相类似的论证可知有 $S=[x]_{R_\Pi}$，故而 $[x]_{R_\Pi}\in\Pi$. 从而又得 $A/R_\Pi\subseteq\Pi$.

综上所述，必有 $A/R_\Pi=\Pi$.

定理 2.7.5 表明，集合 A 上的每个等价关系 R，都可以唯一地确定 A 的一个划分 A/R. 另一方面，定理 2.7.6 还告诉我们，对集合 A 的每个划分 Π，当把 Π 的每个元素都作为一个等价类时，就可以给出 A 上的一个等价关系 R_Π，并且 Π 即为由 R_Π 所确定的 A 的划分 A/R_Π.

习 题 2.7

1. 试判断下列 $\boldsymbol{I}$ 上的二元关系是不是 $\boldsymbol{I}$ 上的等价关系，并说明理由。

a) $\{\langle i,j\rangle \mid i,j\in \boldsymbol{I}$ 且 $i\cdot j>0\}$；

b) $\{\langle i,j\rangle \mid i,j\in \boldsymbol{I}, i\cdot j\geqslant 0$ 且 i 与 j 不同时为 $0\}$；

c) $\{\langle i,j\rangle \mid i,j\in \boldsymbol{I}$ 且 $i\leqslant 0\}$；

d) $\{\langle i,j\rangle \mid i,j\in \boldsymbol{I}$ 且 $i\cdot j\geqslant 0\}$；

e) $\{\langle i,j\rangle \mid i,j\in \boldsymbol{I}$ 且 $i\mid j\}$；

f) $\{\langle i,j\rangle \mid i,j\in \boldsymbol{I}$ 且有 $x\in \boldsymbol{I}$ 使 $10x\leqslant i\leqslant j\leqslant 10(x+1)\}$；

g) $\{\langle i,j\rangle \mid i,j\in \boldsymbol{I}$ 且 $|i-j|\leqslant 10\}$；

h) $\{\langle i,j\rangle \mid i,j\in \boldsymbol{I}$ 且有 $x,y\in \boldsymbol{I}$ 使 $10x\leqslant i\leqslant 10(x+1)$ 及 $10y\leqslant j\leqslant 10(y+1)\}$；

i) $\{\langle i,j\rangle \mid i,j\in \boldsymbol{I}$ 且有 $x\in \boldsymbol{I}$ 使 $10x<i<10(x+1)\}$.

2. 有人说："如果集合 A 上的二元关系 R 是对称的和传递的，则 R 必是自反的"。并给出了如下的证明：如果 $\langle x,y\rangle\in R$，则由 R 是对称的可知 $\langle y,x\rangle\in R$，从而由 R 是传递的得到 $\langle x,x\rangle\in R$ 和 $\langle y,y\rangle\in R$. 因此 R 是自反的。请你想一想，他的看法和证明对吗？为什么？

3. 设集合 A 上的二元关系 R 是自反的。证明 R 为等价关系的充要条件是：若 $\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle\in R$，则 $\langle b,c\rangle\in R$.

4. 如果集合 A 上的二元关系 R 满足：若 $\langle x,y\rangle,\langle y,z\rangle\in R$，则 $\langle z,x\rangle\in R$. 就称 R 为循环的。试证明集合 A 上的二元关系 R 为 A 上的等价关系，当且仅当 R 是自反的和循环的。

5. 设 R_1 和 R_2 都是集合 A 上的等价关系。试判断下列 A 上的二元关系是不是 A 上的等价关系，为什么？

a) A^2-R_1；

b) R_1-R_2；

c) R_1^2；

d) $r(R_1-R_2)$；

e) $R_2\circ R_1$；

f) $R_1\cup R_2$；

g) $t(R_1\cup R_2)$；

h) $t(R_1\cap R_2)$.

6. 设 Π_1 和 Π_2 都是集合 A 的划分。试判断下列集类是不是 A 的划分，为什么？

a) $\Pi_1 \cup \Pi_2$;

b) $\Pi_1 \cap \Pi_2$;

c) $\Pi_1 - \Pi_2$;

d) $(\Pi_1 \cap (\Pi_2 - \Pi_1)) \cup \Pi_1$.

7. 如果 R_1 和 R_2 都是集合 A 上的等价关系，则 $R_1 = R_2$ 当且仅当 $A/R_1 = A/R_2$.

8. 设 Π_1 和 Π_2 都是集合 A 的划分，若对每个 $S_1 \in \Pi_1$，皆有 $S_2 \in \Pi_2$ 使 $S_1 \subseteq S_2$，就称 Π_1 为 Π_2 的加细，记为 $\Pi_1 \leqslant \Pi_2$. 如果 $\Pi_1 \leqslant \Pi_2$ 且 $\Pi_1 \neq \Pi_2$，就称 Π_1 为 Π_2 的真加细，并记为 $\Pi_1 < \Pi_2$.

设 R_1 和 R_2 是集合 A 上的等价关系，证明：

a) $R_1 \subseteq R_2$ 当且仅当 $A/R_1 \leqslant A/R_2$；

b) $R_1 \subset R_2$ 当且仅当 $A/R_1 < A/R_2$.

9. 设 A 和 B 都是非空集，$\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ 为 A 的划分。试证明 $\{A_1 \cap B, A_2 \cap B, \cdots, A_n \cap B\}$ 并不总是集合 $A \cap B$ 的划分。

10. 若 R 为集合 A 上的等价关系，则称 $n(A/R)$ 为 R 的秩。如果 $i, j \in \boldsymbol{I}_+$ 且集合 A 上的等价关系 R_1 与 R_2 的秩分别为 i 和 j，则 $R_1 \cap R_2$ 也是 A 上的等价关系且 $\max\{i, j\} \leqslant n(A/(R_1 \cap R_2)) \leqslant i \cdot j$.

11. 设 A 为恰含 n 个元素的非空有限集，则有多少个不同的 A 上的等价关系？其中秩为 2 的又有多少？

12. 如果 $n, m \in \boldsymbol{I}_+$，则 $\boldsymbol{I}/_{\equiv_n}$ 为 $\boldsymbol{I}/_{\equiv_m}$ 的加细当且仅当 $m \mid n$.

§2.8 序 关 系

我们已经讨论了相容关系和等价关系。现在讨论另一种常见的重要关系——序关系。

定义 2.8.1 设 R 为集合 A 上的二元关系。

i) 如果 R 是反自反的和传递的，则称 R 为 A 上的拟序关系，简称拟序，并称 $\langle A, R\rangle$ 为拟序结构。

ii) 如果 R 是自反的、反对称的和传递的，则称 R 为 A 上的半序关系，简称半序，并称 $\langle A, R\rangle$ 为半序结构。

注意，也有人把半序称为偏序或部分序。

例 1 普通的小于等于关系"$\leqslant$"和小于关系"$<$"分别为实数集 $\boldsymbol{R}$ 上的半序和拟序。

例 2 设 A 为任意集合。集合的包含关系 $\subseteq$ 和真包含关系 $\subset$ 分别为幂集 $\mathscr{P}(A)$ 上的半序和拟序。

从上面两个例子可以看出，拟序"$<$"和"$\subset$"都是反对称的。这一情况决非偶然。

定理 2.8.1 拟序都是反对称的。

证明 用反证法。

设 R 为集合 A 上的拟序且 R 不是反对称的。因此，必有 $x, y \in A$ 使 $x \neq y$, xRy 且 yRx. 从而由 R 的传递性得知 xRx. 这与 R 的反自反性矛盾。

由此定理可知，拟序实质上是反自反的、反对称的和传递的。这表明，在半序和拟序之

间，必有较紧密的联系。

定理 2.8.2 设 R 为集合 A 上的二元关系。

i) 若 R 是 A 上的拟序，则 $r(R)$ 是 A 上的半序。

ii) 若 R 是 A 上的半序，则 $R-I_A$ 是 A 上的拟序。

证明很容易，留作练习。

我们常常用符号"≤"表示半序，用符号"<"表示拟序。当然，这时它们就失去了原来的含义，不再表示通常的数的大小次序关系了。我们在此约定，若"≤"和"<"分别表示同一个集合上的半序和拟序时，就意味着"≤"是"<"的自反闭包 $r(<)$，即 $\leqslant = r(<)$.

定义 2.8.2 设 R 为集合 A 上的半序且 $a\in A$. 如果 $b\in A$ 满足

i) $b\neq a$ 且 aRb；

ii) 若 $x\in A$ 使 aRx 且 xRb，则必有 $x=a$ 或 $x=b$.

就称 b 为 a 关于 R 的覆盖。在不特别强调关系时，也往往简称"b 为 a 的覆盖"。

对半序结构 $\langle \mathbf{R},\leqslant\rangle$ 而言，任何实数都没有覆盖，因为在任意两个不同的实数之间，都还存在有另外的实数，比如说它们的平均值。

对半序结构 $\langle N,\leqslant\rangle$ 而言，每个自然数都有唯一的覆盖，即它的后继。

在后面的例 3 中将会看到，一个元素还可能有多个不同的覆盖。

非空有限集上的二元关系可以用关系图描述。如果二元关系是相容关系或等价关系，则可以把它的关系图加以改进，用所谓的简化关系图描述。如果二元关系是半序，我们能否也把它的关系图加以改进呢？答案是肯定的，这就是我们下面要介绍的哈斯(Hasse)图。

设 R 为非空有限集 A 上的半序。如果无向图 H_R 满足

i) H_R 仅以 A 的所有元素为结点；

ii) 若 $b\in A$ 为 $a\in A$ 关于 R 的覆盖，则结点 a 在 H_R 中就处于结点 b 的下一级，且有一条连接 a 与 b 的无向边。

就称 H_R 为 R 的哈斯图。

例 3 设 $A=\{i|i\in N \text{ 且 } 1\leqslant i\leqslant 12\}$. 在 A 上定义二元关系 R 如下：

$$iRj \text{ 当且仅当 } i|j$$

容易验证，R 是 A 上的半序。此外，显然有

2，3，5，7 和 11 都是 1 覆盖；

10 是 2 和 5 的覆盖；

4 是 2 的覆盖；

6 是 2 和 3 的覆盖；

8 是 4 的覆盖；

9 是 3 的覆盖；

12 是 4 和 6 的覆盖。

而 7，8，9，10，11 和 12 都没有覆盖。所以 R 的哈斯图 H_R 就如图 2.8.1(a)所示，显然比它的关系图 G_R(见图 2.8.1(b))简单多了。

例 4 设 $A=\{a,b,c,\}$. $\mathscr{P}(A)$ 上的半序 $\subseteq$(集合的包含关系)的哈斯图 $H_{\subseteq}$ 如图 2.8.2 所示。

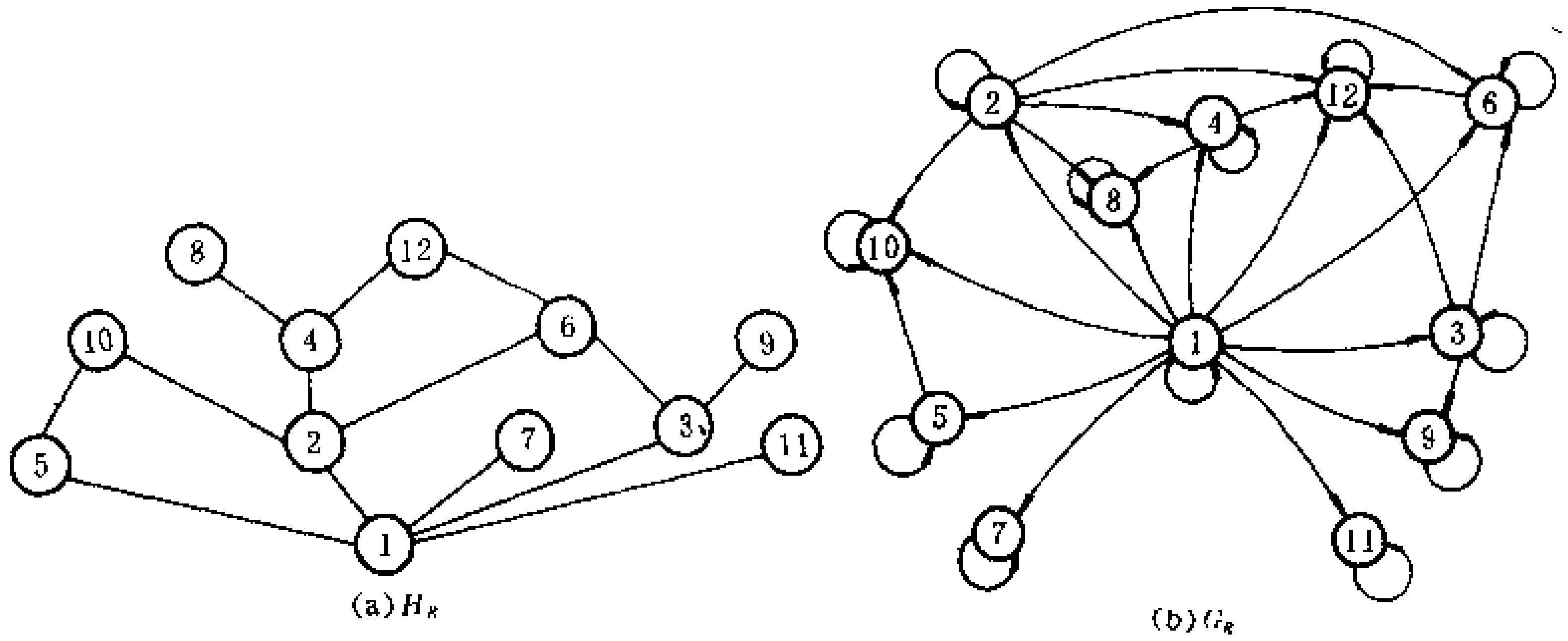


图 2.8.1 半序关系 R 的关系图 G_R 和哈斯图 H_R

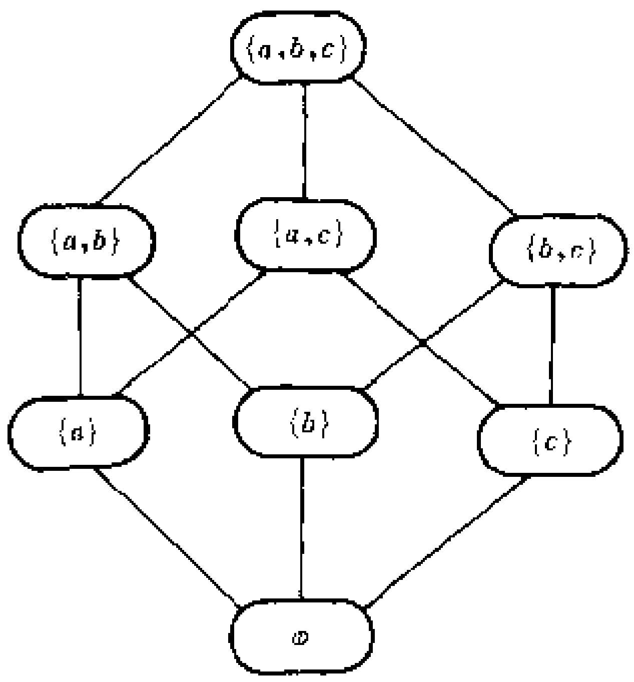


图 2.8.2 半序$\subseteq$的哈斯图 $H_\subseteq$

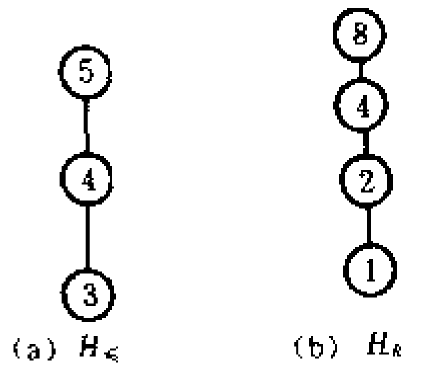


图 2.8.3 全序$\leqslant$和 R 的哈斯图

从例 3 和例 4 可以看出，在半序结构$\langle A,R\rangle$中，并不是 A 中任意两个元素都有关系 R 的。如在例 4 中，$\{a,b\}\subseteq\{a,c\}$和$\{a,c\}\subseteq\{a,b\}$就都不成立。但是，对某些半序结构来说，情况并不是这样的。如对半序结构$\langle N,\leqslant\rangle$，只要 $n,m\in N$，则 $n\leqslant m$ 和 $m\leqslant n$ 就至少有一个成立，即 n 和 m 总有关系$\leqslant$，我们把这种特殊类型的半序称为全序。

定义 2.8.3 如果集合 A 上的半序 R 满足：若 $x,y\in A$，则有 xRy 或 yRx，就称 R 为 A 上的全序关系，简称全序，并称$\langle A,R\rangle$为链或全序结构。

也有人把全序称为线性序，并把链$\langle A,R\rangle$称为线性有序集。

例 5 若以"$\leqslant$"表示数的小于等于关系，R 表示整除关系，即 iRj 表示 $i\mid j$，则$\langle\{3,4,5\},\leqslant\rangle$和$\langle\{1,2,4,8\},R\rangle$都是链。从$\leqslant$和 R 的哈斯图 $H_\leqslant$及 H_R（见图 2.8.3）可以看到一些把全序结构称为链和把全序称为线性序的原因。

定义 2.8.4 设$\leqslant$为非空集 A 上的半序且 S 为 A 的非空子集。

i) 若有 $a\in A$，使得对每个 $x\in S$ 皆有 $x\leqslant a$（或 $a\leqslant x$），就称 S 有上（或下）界，而称 a 为 S 的一个上（或下）界。

ii) 若有 S 的上(或下)界 a,使得对 S 的每个上(或下)界 y 皆有 $a\leqslant y$(或 $y\leqslant a$),就称 S 有上(或下)确界,并称 a 为 S 的一个上(或下)确界,记为 $a=\sup S$(或 $a=\inf S$).

iii) 若有 $a\in S$,使得当 $x\in S$ 且 $a\leqslant x$(或 $x\leqslant a$)时皆有 $x=a$,就称 S 有极大(或极小)元,并称 a 为 S 的一个极大(或极小)元。

iv) 若有 $a\in S$,使得对每个 $x\in S$ 皆有 $x\leqslant a$(或 $a\leqslant x$),就称 S 有最大(或最小)元,并称 a 为 S 的一个最大(或最小)元。

用通俗的话来说,S 的上(或下)界是 A 中的大(或小)于 S 中每个元素的元素,S 的上(或下)确界乃是 S 的上(或下)界中的最小(或大)者,S 的极大(或极小)元是 S 中的不小(或大)于 S 中其它元素的元素,S 的最大(或最小)元是 S 中的大(或小)于 S 中其它每个元素的元素。

例 6 若 $S=\{x|x\in \boldsymbol{R}$ 且 $1<x<2\}$,则对于半序结构 $\langle \boldsymbol{R},\leqslant\rangle$ 来说,S 既无极大元和最大元、也无极小元和最小元。但是,S 却有上确界和下确界。实际上,$\sup S=2$ 且 $\inf S=1$.

例 7 设 $A=\{x|x\in \boldsymbol{N}$ 且 $2\leqslant x\leqslant 12\}$,$R$ 为 A 上的整除关系。若取 $S=\{2,4,7\}$,则对半序结构 $\langle A,R\rangle$ 来说,S 既无上界,也无下界。因此,S 就更不会有上确界和下确界了。但是,S 有极大元 4 和 7,还有极小元 2 和 7。不过,却没有最大元和最小元。

定理 2.8.3 设 $\leqslant$ 是非空集 A 上的半序,S 是 A 的非空子集。

i) 若 S 的上(或下)确界存在,则它必是唯一的。

ii) 若 S 的最大(或最小)元存在,则它必是唯一的。

证明 i)和 ii)的证明类似,我们只证 i).

若 a 和 b 都是 S 的上(或下)确界。由 a 是 S 的上(或下)确界知 $a\leqslant b$(或 $b\leqslant a$),由 b 是 S 的上(或下)确界又知 $b\leqslant a$(或 $a\leqslant b$). 但因 $\leqslant$ 是反对称的,所以 $a=b$.

定义 2.8.5 设 R 为集合 A 上的半序。如果 A 的每个非空子集都有最小元,就称 R 为 A 上的良序关系,简称良序,并称 $\langle A,R\rangle$ 为良序结构。

显然,例 5 中给出的两个链 $\langle\{3,4,5\},\leqslant\rangle$ 和 $\langle\{1,2,4,8\},R\rangle$ 都是良序结构,而例 6 和例 7 给出的两个半序结构 $\langle \boldsymbol{R},\leqslant\rangle$ 和 $\langle A,R\rangle$ 都不是良序结构。

下面的定理给出了一个重要的良序结构。

定理 2.8.4 $\langle \boldsymbol{N},\leqslant\rangle$ 是良序结构。

证明 任取 $\boldsymbol{N}$ 的非空子集 A 及 $m\in A$,令

$$S=\{i|i\in A \text{ 且 } i\leqslant m\}$$

则 $S\subseteq \boldsymbol{N}$ 且 $m\in S$,因此 $S\neq\varnothing$ 且 $n(S)\leqslant m^{+}$. 这表明 S 为 $\boldsymbol{N}$ 的非空有限子集。此外,若 S 有最小元 a,则 a 也必为 A 的最小元。所以只需证明 S 有最小元。对此,可用关于 $n(S)$ 的归纳法来完成。

1) 当 $n(S)=1$ 时,S 恰含一个元素,这个元素就是 S 的最小元,所以此时命题真。

2) 对任意的 $k\in \boldsymbol{I}_{+}$,假定当 $n(S)=k$ 时命题为真,即 $\boldsymbol{N}$ 的每个恰含 k 个元素的子集均有最小元。如果 S 为 $\boldsymbol{N}$ 的恰含 $k+1$ 个元素的子集。我们任取 $i\in S$,因为 $n(S)=k+1\geqslant 2$,所以 $S-\{i\}\neq\varnothing$ 且 $n(S-\{i\})=k$. 从而知道,$S-\{i\}$ 必有最小元,设为 a,则 $\min\{a,i\}$ 显然为 S 的最小元。这表明当 $n(S)=k+1$ 时命题也真。

例 8 $\langle \boldsymbol{I},\leqslant\rangle$ 不是良序集,因为 $\boldsymbol{I}$ 无最小元。

定理 2.8.5 若$\leqslant$为集合 A 上的半序，则$\leqslant$为 A 上的良序之充要条件为

i) $\leqslant$为 A 上的全序；

ii) A 的每个非空子集都有极小元。

证明

先证必要性。设$\leqslant$为 A 上的良序，任取 $x,y\in A$，则$\{x,y\}$有最小元。若 $\min\{x,y\}=x$，则 $x\leqslant y$；若 $\min\{x,y\}=y$，则 $y\leqslant x$. 这表明$\leqslant$为 A 上的全序。若 S 为 A 的任意非空子集，则 S 有最小元，这个最小元显然为 S 的极小元。

再证充分性。设$\leqslant$满足条件 i) 和 ii). 如果 S 为 A 的任意非空子集，则由 ii) 知 S 有极小元 a. 任取 $x\in S$，因为$\leqslant$为 A 上的全序，所以必有 $a\leqslant x$ 或 $x\leqslant a$. 若为 $x\leqslant a$，则由 a 为 S 的极小元得 $x=a$，所以总有 $a\leqslant x$，这表明 a 为 S 的最小元。从而知道，$\leqslant$为 A 上的良序。

对于半序结构，我们已经定义了上(下)界、上(下)确界、极大(小)元和最大(小)元等概念。我们也可以把这些概念搬到拟序结构中来。根据前面的约定，我们有$\leqslant=r(<)$. 设 S 是集合 A 的非空子集，对于$\langle A,\leqslant\rangle$来说，如果 a 是 S 的最小元，那么对于$\langle A,<\rangle$来说，也称 a 是 S 的最小元。当$\langle A,\leqslant\rangle$为全(或良)序结构时，也称$\langle A,<\rangle$为全(或良)序结构。

定理 2.8.6 若$\langle A,<\rangle$为全序结构，则$\langle A,<\rangle$是良序结构的充要条件是不存在 A 中元素的无穷序列 $a_0,a_1,a_2,\cdots$，使得对每个 $i\in N$ 皆有 $a_{i+1}<a_i$.

证明 用反证法。

先证必要性。假定存在 A 中元素的无穷序列 $a_0,a_1,a_2,\cdots$，使得对每个 $i\in N$ 皆有 $a_{i+1}<a_i$. 我们令 $S=\{a_i|i\in N\}$，则 S 为 A 的非空子集，且 S 显然没有最小元。从而知道$\langle A,<\rangle$不是良序结构。

再证充分性。假定$\langle A,<\rangle$不是良序结构，则必有 A 的一个非空子集 S 无最小元。任取 $a_0\in S$，因为 a_0 不是 S 的最小元且$<$为 A 上的全序，所以必有 $a_1\in S$ 使 $a_1<a_0$. 一般说来，若对任意的 $n\in N$，已有 $a_0,a_1,\cdots,a_n\in S$ 使

$$a_n < a_{n-1} < \cdots < a_1 < a_0$$

因为 a_n 不是 S 的最小元且$<$为 A 上的全序，所以必有 $a_{n+1}\in S$ 使 $a_{n+1}<a_n$. 这样一来，根据归纳法，我们就得到了一个 A 中元素的无穷序列

$$a_0,a_1,a_2,\cdots$$

使得对每个 $i\in N$ 皆有 $a_{i+1}<a_i$.

定理 2.8.6 向我们揭示了良序结构的一个重要性质。有人也用它作为良序结构的定义。这个定理是验证程序终止性的理论基础。

习 题 2.8

1. 对图 2.8.4 中所示的各关系图，指出哪些表示拟序关系？哪些表示半序关系？哪些表示全序关系？哪些表示良序关系？

2. 画出下列集合上的整除关系的哈斯图。

a) $\{1,2,3,4,6,8,12,24\}$；

b) $\{i|i\in N$ 且 $1\leqslant i\leqslant 14\}$；

c) $\{i|i\in N$ 且 $5\leqslant i\leqslant 20\}$；

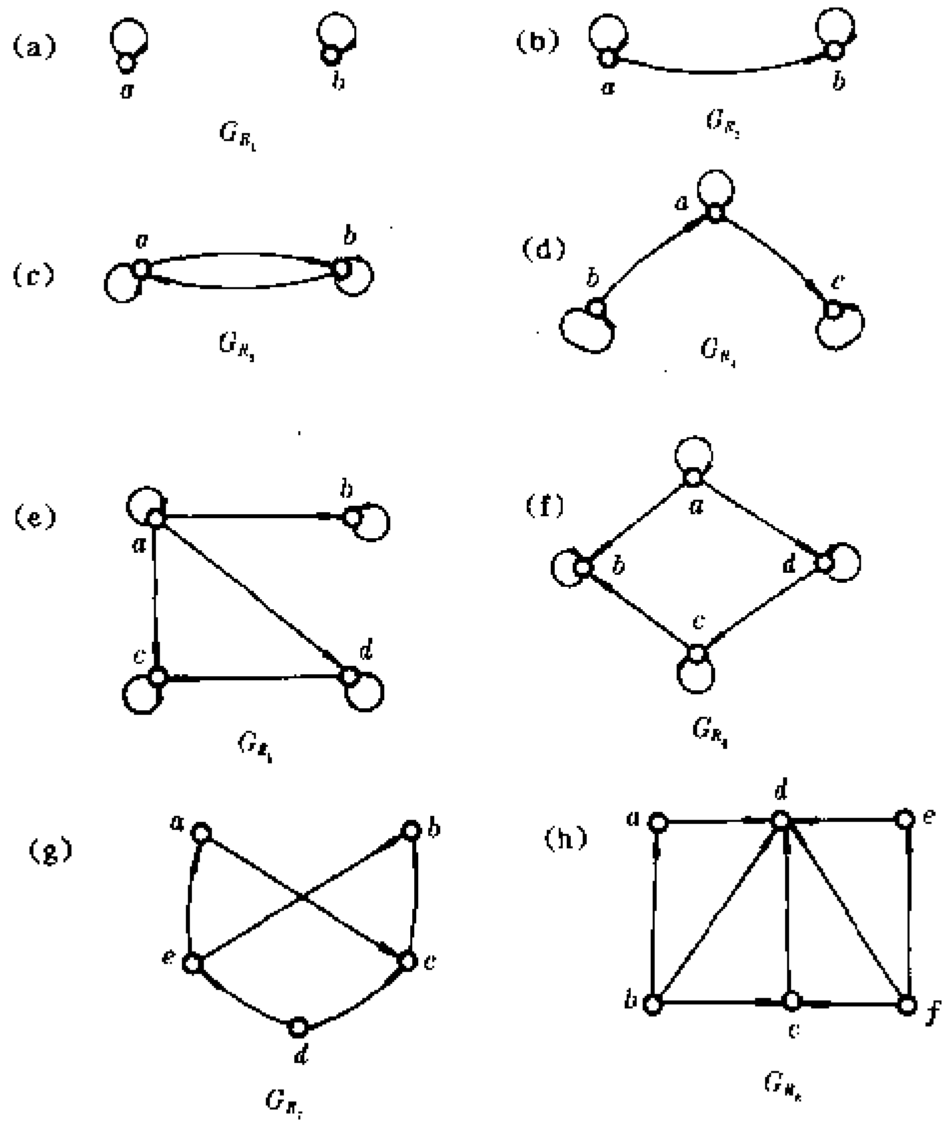


图 2.8.4 关系 R_1～R_8 的关系图

3. 设 R 为集合 A 上的二元关系且 $S\subseteq A$. 证明或用反例推翻下述断言：

a) 若 R 是 A 上的半序，则 $R|_S$ 是 S 上的半序；

b) 若 R 是 A 上的拟序，则 $R|_S$ 是 S 上的拟序；

c) 若 R 是 A 上的全序，则 $R|_S$ 是 S 上的全序；

d) 若 R 是 A 上的良序，则 $R|_S$ 是 S 上的良序。

4. 设 R 是集合 A 上的二元关系。证明：

a) R 是 A 上的半序，当且仅当 $R\cap R^{-1}=I_A$ 且 $R=R^*$；

b) R 是 A 上的拟序，当且仅当 $R\cap R^{-1}=\varnothing$ 且 $R=R^+$.

5. 证明：

a) 半序关系的逆关系仍然是半序关系；

b) 全序关系的逆关系仍然是全序关系；

c) 良序关系的逆关系未必是良序关系。

6. 设集合 $P=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$ 上的半序 R 的哈斯图 H_R 如图 2.8.5 所示。

a) 下列断言中哪些为真？

$$x_1Rx_2,x_4Rx_1,x_3Rx_5,x_2Rx_5,x_1Rx_1,x_2Rx_3,x_4Rx_5.$$

b) 求 P 的最小元、最大元、极小元和极大元(如果存在的话)。

c) 求 $\{x_2,x_3,x_4\}$、$\{x_3,x_4,x_5\}$ 和 $\{x_1,x_2,x_3\}$ 的上界、下界、上确界和下确界(如果存在的话)。

7. 举出满足下列条件的半序结构$\langle A,\leqslant\rangle$的实例。

a) $\langle A,\leqslant\rangle$为全序结构，且$A$的某些非空子集无最小元。

b) $\langle A,\leqslant\rangle$不是全序结构，且$A$的某些非空子集无最大元。

c) A的某些非空子集有下确界，但无最小元。

d) A的某些非空子集有上界，但无上确界。

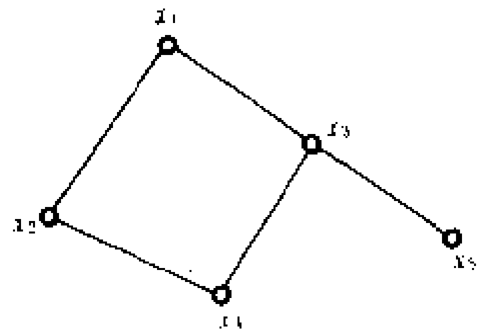


图 2.8.5 集合P上的半序R的哈斯图H_R

8. 设$\langle A,\leqslant\rangle$为半序结构。证明$A$的每个非空有限子集都至少有一个极小元和极大元。

9. 设$\langle A,\leqslant\rangle$为全序结构。证明$A$的每个非空有限子集都有最大元和最小元。

10. 试判断下列定义在二维欧氏空间$\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$上的二元关系$T$是不是$\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$上的拟序，半序，全序和良序？$\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$的每个有下界的非空子集（关于拟序或半序$T$）是否有下确界？并给出证明。

a) 若$x_1,x_2,y_1,y_2\in\boldsymbol{R}$，则$\langle x_1,y_1\rangle T\langle x_2,y_2\rangle$当且仅当$x_1\leqslant x_2$且$y_1\leqslant y_2$；

b) 若$x_1,x_2,y_1,y_2\in\boldsymbol{R}$，则$\langle x_1,y_1\rangle T\langle x_2,y_2\rangle$当且仅当$x_1\leqslant x_2$；

c) 若$x_1,x_2,y_1,y_2\in\boldsymbol{R}$，则$\langle x_1,y_1\rangle T\langle x_2,y_2\rangle$当且仅当$x_1<x_2$，或者$x_1=x_2$且$y_1\leqslant y_2$；

d) 若$x_1,x_2,y_1,y_2\in\boldsymbol{R}$，则$\langle x_1,y_1\rangle T\langle x_2,y_2\rangle$当且仅当$x_1<x_2$.

11. 设R为集合S上的全序关系。证明R和R^{-1}同时为S上的良序，当且仅当S为有限集。

12. 在$\boldsymbol{I}_+$上定义二元关系R如下：

$$nRm \quad \text{当且仅当} \quad f(n)<f(m)\text{，或 } f(n)=f(m) \quad \text{且} \quad n\leqslant m$$

其中$f(n)$表示n的不同素因子的个数。

证明$\langle \boldsymbol{I}_+,R\rangle$为良序结构。

13. 设S为集合且$\mathscr{C}\subseteq\mathscr{P}(S)$. 证明在半序结构$\langle\mathscr{P}(S),\subseteq\rangle$中有

$$\sup\mathscr{C}=\bigcup\mathscr{C};\quad \inf\mathscr{C}=\bigcap\mathscr{C}.$$

14. 设π为集合A的所有划分组成的集合，并在π上定义二元关系R如下：对任意的$\Pi_1,\Pi_2\in\pi$，则$\Pi_1R\Pi_2$当且仅当Π_1为Π_2的加细（则习题2.7的第8题）。证明R是π上的半序。

第三章 函 数

函数是数学中一个很重要的基本概念。本章我们把它看做关系的一种特例——"单值"的二元关系，并讨论它的性质和运算，介绍几类常见的重要函数。最后，还要简单地介绍一下集合的基数和抽屉原理。

§ 3.1 部分函数

我们首先考虑，怎样用一个适当的集合去描述一个函数呢？

在高等数学中，曾经把函数描述为这样一种规则：对一个集合（它的定义域）中的每一个元素，按照这个规则，都对应于另外一个集合（它的值域）中唯一的一个元素。例如，考虑熟知的二次函数

$$f(x) = x^2, \quad x \in \boldsymbol{R}$$

若用符号"$i \vdash j$"表示"对实数 i 赋予实数值 j"，f 在某些实数上的作用就可以描述为

$$3 \vdash 9, \quad \frac{1}{2} \vdash \frac{1}{4}, \quad 0 \vdash 0, \quad -2 \vdash 4, \quad \cdots$$

而上述的赋值，又能用序偶描述为

$$\langle 3,9 \rangle, \quad \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \rangle, \quad \langle 0,0 \rangle, \quad \langle -2,4 \rangle, \cdots$$

因此，所有这样的序偶的集合

$$G_f = \{\langle x, x^2 \rangle \mid x \in \boldsymbol{R}\}$$

就足以描述这个二次函数 f. G_f 为坐标平面 $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ 上的一个子集。有人称 G_f 为 f 的图。但是，更直接的方法还是就取 G_f 作为函数 f，这种思想就形成了如下的定义。

定义 3.1.1 如果从集合 X 到集合 Y 的二元关系 f 是"单值"的，即 f 满足以下条件：

$$\text{若} \langle x, y_1 \rangle \in f \text{ 且} \langle x, y_2 \rangle \in f, \text{则 } y_1 = y_2.$$

就称 f 为从 X 到 Y 的部分函数．

当 $\langle x, y \rangle \in f$ 时，称 y 为 f 在 x 处的值，记为

$$y = f(x)$$

由这个定义知道，从 X 到 Y 的部分函数 f 只不过是从 X 到 Y 的单值二元关系。所以前章中讨论过的关于二元关系的概念和结果，在此仍然适用。例如：

i) 函数 f 的定义域 $\mathrm{dom} f$ 为

$$\mathrm{dom} f = \{x \mid x \in X \text{ 且有 } y \in Y \text{ 使 } y = f(x)\}$$

若 $x\in \mathrm{dom}f$，就称 f 在 x 处有定义，记为"$f(x)\downarrow$"；否则称 f 在 x 处无定义，记为"$f(x)\uparrow$"。显然 $\mathrm{dom}f\subseteq X$.

ii）函数 f 的值域 $\mathrm{ran}f$ 为

$$\mathrm{ran}f=\{y\mid y\in Y \text{ 且有 } x\in X \text{ 使 } f(x)=y\}$$

显然 $\mathrm{ran}f\subseteq Y$.

例 1 考察下面列举的从 $\boldsymbol{R}$ 到 $\boldsymbol{R}$ 的二元关系：

i) $\ln=\{\langle x,\ln x\rangle\mid x\in\boldsymbol{R} \text{ 且 } x>0\}$

ii) $\sqrt{\ }=\{\langle x,\sqrt{x}\rangle\mid x\in R \text{ 且 } x\geqslant 0\}$

iii) $\exp=\{\langle x,e^{x}\rangle\mid x\in\boldsymbol{R}\}$

iv) $\arcsin=\{\langle x,y\rangle\mid x,y\in\boldsymbol{R} \text{ 且 } \sin y=x\}$

不难知道，ln、$\sqrt{\ }$ 和 exp 都是从 $\boldsymbol{R}$ 到 $\boldsymbol{R}$ 的部分函数，而 arcsin 却不是。这可能和我们已有的概念不一致，因为在高等数学中，我们一直把"反正弦 arcsin"作为函数。

定义 3.1.2 设 f 为从集合 X 到集合 Y 的部分函数。

i) 若 $\mathrm{dom}f=X$，则称 f 为从 X 到 Y 的全函数，简称从 X 到 Y 的函数，记为 $X\xrightarrow{f}Y$ 或 $f:X\to Y$.

ii) 若 $\mathrm{dom}f\subset X$，则称 f 为从 X 到 Y 的严格部分函数。

iii) 若 $\mathrm{ran}f=Y$，则称 f 为从 X 到 Y 上的部分函数。

iv) 若 $\mathrm{ran}f\subset Y$，则称 f 为从 X 到 Y 内的部分函数。

v) 若对任意的 $x_1,x_2\in\mathrm{dom}f$，当 $x_1\neq x_2$ 时皆有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 f 为从 X 到 Y 的 1-1 部分函数。

在例 1 中，ln 和 $\sqrt{\ }$ 都是从 $\boldsymbol{R}$ 到 $\boldsymbol{R}$ 的严格部分函数，exp 是从 $\boldsymbol{R}$ 到 $\boldsymbol{R}$ 内的 1-1 函数。

例 2 我们定义从 $\boldsymbol{R}$ 到 $\boldsymbol{R}$ 的部分函数 $f_i(i=1,2,3,4)$ 如下：

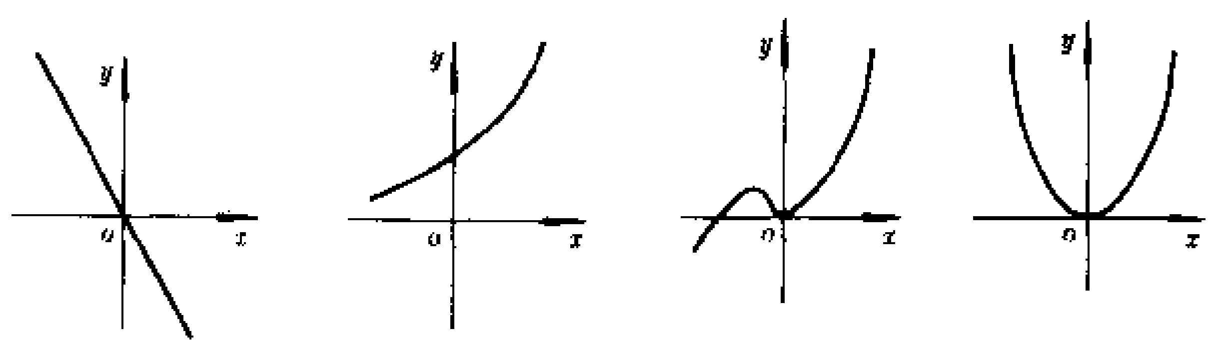
i) $f_1=\{\langle x,-2x\rangle\mid x\in\boldsymbol{R}\}$

ii) $f_2=\{\langle x,2^{x}\rangle\mid x\in\boldsymbol{R}\}$

iii) $f_3=\{\langle x,x^3+2x^2\rangle\mid x\in\boldsymbol{R}\}$

iv) $f_4=\{\langle x,x^2\rangle\mid x\in\boldsymbol{R}\}$

它们分别如图 3.1.1 所示。



(a) f_1　(b) f_2　(c) f_3　(d) f_4

图 3.1.1 函数的图示

显然，f_1 是从 $\boldsymbol{R}$ 到 $\boldsymbol{R}$ 上的 1-1 函数，f_2 是从 $\boldsymbol{R}$ 到 $\boldsymbol{R}$ 内的 1-1 函数，f_3 是从 $\boldsymbol{R}$ 到 $\boldsymbol{R}$ 上的函数，f_4 是从 $\boldsymbol{R}$ 到 $\boldsymbol{R}$ 内的函数。

定义 3.1.3 设 f 为从集合 X 到集合 Y 的部分函数，$A\subseteq X$ 且 $B\subseteq Y$. 令

$$f[A]=\{y\mid 有\ x\in A\ 使\ y=f(x)\}$$
$$f^{-1}[B]=\{x\mid 有\ y\in B\ 使\ f(x)=y\}$$

称 $f[A]$为 A 在 f 下的像，$f^{-1}[B]$为 B 在 f 下的原像。

定义 3.1.4 设 f 为从集合 X 到集合 Y 的部分函数且 $A\subseteq X$. 定义 f 在 A 上的限制 $f\upharpoonright_A$为从 A 到 Y 的部分函数，并且

$$f\upharpoonright_A=f\cap(A\times Y)$$

也称 f 为 $f\upharpoonright_A$ 到 X 上的延拓。

例 3 我们取

$$X_1=\{0,1\},\ X_2=\{0,1,2\},Y=\{a,b,c,d\}$$

定义从 X_1^2 到 Y 的函数 f 为

$$f=\{\langle 0,0,a\rangle,\langle 0,1,b\rangle,\langle 1,0,c\rangle,\langle 1,1,b\rangle\}$$

定义从 X_2^2 到 Y 的部分函数 g 为

$$g=f\cup\{\langle 0,2,a\rangle,\langle 2,2,d\rangle\}$$

则 $f=g\upharpoonright_{X_1^2}$，所以 f 是 g 在 X_1^2 上的限制，g 是 f 到 X_2^2 上的延拓。

定理 3.1.1 设 f 为从集合 X 到集合 Y 的部分函数。

i) 若 $A_1\subseteq A_2\subseteq X$，则 $f[A_1]\subseteq f[A_2]$.

ii) 若 $B_1\subseteq B_2\subseteq Y$，则 $f^{-1}[B_1]\subseteq f^{-1}[B_2]$.

iii) 若 $A\subseteq \mathrm{dom}f$，则 $A\subseteq f^{-1}[f[A]]$.

iv) 若 $B\subseteq \mathrm{ran}f$，则 $B=f[f^{-1}[B]]$.

证明 i)和 ii)显然，只证 iii)和 iv).

iii) 若 $x\in A$，则 $f(x)\in f[A]$，所以 $x\in f^{-1}[f[A]]$.

iv) 若 $y\in B$，则 $y\in \mathrm{ran}f$，因此，有 $x\in X$ 使 $y=f(x)$. 从而得 $x\in f^{-1}[B]$，这表明 $y\in f[f^{-1}[B]]$. 另一方面，若 $y\in f[f^{-1}[B]]$，则有 $x\in f^{-1}[B]$使 $f(x)=y$，所以 $y\in B$.

定理 3.1.2 设 f 为从集合 X 到集合 Y 的部分函数，$\mathscr{A}\subseteq\mathscr{P}(X)$且 $\mathscr{B}\subseteq\mathscr{P}(Y)$.

i) $f[\bigcup\mathscr{A}]=\bigcup\{f[A]\mid A\in\mathscr{A}\}$.

ii) 若 $\mathscr{A}\neq\varnothing$，则 $f[\bigcap\mathscr{A}]\subseteq\bigcap\{f[A]\mid A\in\mathscr{A}\}$.

iii) $f^{-1}[\bigcup\mathscr{B}]=\bigcup\{f^{-1}[B]\mid B\in\mathscr{B}\}$.

iv) 若 $\mathscr{B}\neq\varnothing$，则 $f^{-1}[\bigcap\mathscr{B}]=\bigcap\{f^{-1}[B]\mid B\in\mathscr{B}\}$.

证明 只证 iv)，其它的证明与此类似，留作练习。

若 $B\in\mathscr{B}$，则由$\bigcap\mathscr{B}\subseteq B$ 得 $f^{-1}[\bigcap\mathscr{B}]\subseteq f^{-1}[B]$. 从而得 $f^{-1}[\bigcap\mathscr{B}]\subseteq\bigcap\{f^{-1}[B]\mid B\in\mathscr{B}\}$. 另一方面，任取 $x\in\bigcap\{f^{-1}[B]\mid B\in\mathscr{B}\}$，若 $B\in\mathscr{B}$，则 $x\in f^{-1}[B]$即$f(x)\in B$. 因此，$f(x)\in\bigcap\mathscr{B}$ 即 $x\in f^{-1}[\bigcap\mathscr{B}]$. 所以又有$\bigcap\{f^{-1}[B]\mid B\in\mathscr{B}\}\subseteq f^{-1}[\bigcap\mathscr{B}]$.

定理 3.1.3 若 f 为从集合 X 到集合 Y 的部分函数且 $A\subseteq X$，则

$$\mathrm{dom}(f\upharpoonright_A)=A\cap\mathrm{dom}f,$$
$$\mathrm{ran}(f\upharpoonright_A)=f[A].$$

若 $A \subseteq \mathrm{dom}f$，则 $f \upharpoonright_A$ 是全函数。

证明 这可由定义 3.1.3 和定义 3.1.4 直接推出。

定义 3.1.5 设 A 和 B 为任意二集合，记

$$B^A = \{f \mid f: A \to B\}.$$

例 4 设 A 为任意集合，B 为任意非空集合。

i) 因为存在唯一的一个从$\varnothing$到 A 的函数$\varnothing$，所以 $A^{\varnothing}=\{\varnothing\}$.

ii) 因为不存在从 B 到$\varnothing$的函数，所以$\varnothing^B=\varnothing$.

定理 3.1.4 若 A 和 B 都是有限集，则

$$n(B^A) = (n(B))^{n(A)}$$

证明 设 $n(A)=m$ 且 $n(B)=n$. 对 m 用归纳法。

当 $m=0$ 时，$A=\varnothing$，$B^{\varnothing}=\{\varnothing\}$，$n(B^{\varnothing})=1=n^0$.

设 $m=k(k\geqslant 0)$时定理成立。

若 $m=k+1$，则 $A\neq\varnothing$，所以有 $a\in A$. 任取 $f\in B^A$，令 $f'=f\upharpoonright_{(A-\{a\})}$，则 f' 是从 $A-\{a\}$到 B 的函数，$f=f'\cup\{\langle a,f(a)\rangle\}$. 按照归纳假设，$n(B^{A-\{a\}})=n^k$. 因此，$f'$ 可有 n^k 种选择，$f(a)$可取 B 中的任意元素，所以可有 n 种选择，故 f 可有 $n^k\cdot n=n^{k+1}$种选择，即 $n(B^A)=n^{k+1}$.

例 5 设 $A=\{a,b\}$，$B=\{0,1,2\}$. 因为 $n(A)=2$，$n(B)=3$，所以 $n(B^A)=3^2=9$. 实际上，从 A 到 B 的 9 个函数具体如下：

$$f_1 = \{\langle a,0\rangle,\langle b,0\rangle\}$$
$$f_2 = \{\langle a,0\rangle,\langle b,1\rangle\}$$
$$f_3 = \{\langle a,0\rangle,\langle b,2\rangle\}$$
$$f_4 = \{\langle a,1\rangle,\langle b,0\rangle\}$$
$$f_5 = \{\langle a,1\rangle,\langle b,1\rangle\}$$
$$f_6 = \{\langle a,1\rangle,\langle b,2\rangle\}$$
$$f_7 = \{\langle a,2\rangle,\langle b,0\rangle\}$$
$$f_8 = \{\langle a,2\rangle,\langle b,1\rangle\}$$
$$f_9 = \{\langle a,2\rangle,\langle b,2\rangle\}$$

亦即

$$B^A = \{f_1,f_2,\cdots,f_9\}.$$

习 题 3.1

1. 下列关系中哪些是部分函数？对于不是部分函数的关系，说明不能构成部分函数的原因。

a) $\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in\mathbf{N}$ 且 $x+y<10\}$；

b) $\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in\mathbf{R}$ 且 $y=x^2\}$；

c) $\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in\mathbf{R}$ 且 $y^2=x\}$.

2. 下列集合能定义部分函数吗？如果能，试求出它们的定义域和值域。

a) $\{\langle 1,\langle 2,3\rangle\rangle,\langle 2,\langle 3,4\rangle\rangle,\langle 3,\langle 1,4\rangle\rangle,\langle 4,\langle 1,4\rangle\rangle\}$;

b) $\{\langle 1,\langle 2,3\rangle\rangle,\langle 2,\langle 3,4\rangle\rangle,\langle 3,\langle 3,2\rangle\rangle\}$;

c) $\{\langle 1,\langle 2,3\rangle\rangle,\langle 2,\langle 3,4\rangle\rangle,\langle 1,\langle 2,4\rangle\rangle\}$;

d) $\{\langle 1,\langle 2,3\rangle\rangle,\langle 2,\langle 2,3\rangle\rangle,\langle 3,\langle 2,3\rangle\rangle\}$.

3. 设 A 为集合。若对任意 $s_1,s_2\in\mathscr{P}(A)$皆令 $f(s_1,s_2)=s_1\cap s_2$，则 f 是从 $\mathscr{P}(A)\times\mathscr{P}(A)$到$\mathscr{P}(A)$上的二元函数。

4. 证明定理 3.1.2 的 i)，ii)和 iii)，并举例说明不能用“$=$”代替 ii)中的“$\subseteq$”.

5. 设 f 为从 X 到 Y 的部分函数，试证明：

a) 若 $A,B\in\mathscr{P}(X)$，则 $f[A-B]\supseteq f[A]-f[B]$，并举例说明不能用“$=$”代替其中的“$\supseteq$”；

b) 若 $C,D\in\mathscr{P}(Y)$，则 $f^{-1}[C-D]=f^{-1}[C]-f^{-1}[D]$.

6. 设 $A=\{-1,0,1\}$，并定义函数 $f:A^2\to\mathbf{I}$ 如下：

$$f(\langle x,y\rangle)=\begin{cases}0, & 若\cdot y>0\\ x-y, & 若\ x\cdot y\leqslant 0\end{cases}$$

a) 写出 f 的全部序偶。

b) 求出 $\mathrm{ran}f$.

c) 写出 $f\restriction_{\{0,1\}^2}$中的全部序偶。

d) 有多少个和 f 具有相同的定义域和值域的函数 $g:A^2\to\mathbf{I}$?

7. 设 A 和 B 为有限集，$n(A)=m$ 且 $n(B)=n$.

a) 有多少个从 A 到 B 的 1-1 函数?

b) 有多少个从 A 到 B 上的函数?

8. “91”函数 $f:N\to N$ 定义如下：

$$f(x)=\begin{cases}x-10, & 若\ x>100\\ f(f(x+11)), & 若\ x\leqslant 100\end{cases}$$

试证明

a) $f(99)=91$;

b) $f(x)=91$，其中 $0\leqslant x\leqslant 100$.

§ 3.2 函数的合成

前面已讲过，函数是特殊的关系，所以关系合成的概念自然也适用于函数。

定理 3.2.1 若 f 为从 X 到 Y 的部分函数，g 为从 Y 到 Z 的部分函数，则合成关系 $f\circ g$为从 X 到 Z 的部分函数。

证明 若$\langle x,z_2\rangle,\langle x,z_1\rangle\in f\circ g$，则有 $y_1,y_2\in Y$ 使$\langle x,y_1\rangle,\langle x,y_2\rangle\in f$ 且$\langle y_1,z_1\rangle,\langle y_2,z_2\rangle\in g$. 因为 f 是部分函数，所以 $y_1=y_2$. 但 g 也是部分函数，所以又有 $z_1=z_2$，这表明 $f\circ g$是一个从 X 到 Z 的部分函数。

定义 3.2.1 若 f 为从 X 到 Y 的部分函数，g 为从 Y 到 Z 的部分函数，则称合成关

系 $f\circ g$ 为 f 与 g 的合成函数，并用 $g\circ f$ 表示。

注意，合成函数 $g\circ f$ 与合成关系 $f\circ g$ 实际上表示同一个集合。这种表示方法上的差异，既是历史形成的，也有其方便之处：

i) 对合成函数 $g\circ f$，当 $z=(g\circ f)(x)$ 时，必有

$$z = g(f(x))$$

$g\circ f$ 与 $g(f(x))$ 的这种次序关系是很理想的；

ii) 对合成关系 $f\circ g$，当 $\langle x,z\rangle\in f\circ g$ 时，必有 $y\in Y$ 使 $\langle x,y\rangle\in f$ 且 $\langle y,z\rangle\in g$. f 和 g 的这种次序关系也符合人们的愿望。

定理 3.2.2 设 f 为从 X 到 Y 的部分函数，g 为从 Y 到 Z 的部分函数。

i) $\mathrm{dom}(g\circ f)=f^{-1}[\mathrm{dom}g]$ 且 $\mathrm{ran}(g\circ f)=g[\mathrm{ran}f]$.

ii) 若 f 和 g 都是全函数，则 $g\circ f$ 也是全函数。

证明 i) 若 $x\in dom(g\circ f)$，则有 $z\in Z$ 使 $\langle x,z\rangle\in g\circ f$，因此，必有 $y\in Y$ 使 $\langle x,y\rangle\in f$ 且 $\langle y,z\rangle\in g$. 但由 $\langle y,z\rangle\in g$ 知 $y\in\mathrm{dom}g$，再由 $\langle x,y\rangle\in f$ 即得 $x\in f^{-1}[\mathrm{dom}g]$. 另一方面，若 $x\in f^{-1}[\mathrm{dom}g]$，则有 $y\in\mathrm{dom}g$ 使 $\langle x,y\rangle\in f$. 但由 $y\in\mathrm{dom}g$ 知道，有 $z\in Z$ 使 $\langle y,z\rangle\in g$. 所以，$\langle x,z\rangle\in g\circ f$. 这表明 $x\in\mathrm{dom}(g\circ f)$.

可以类似地证明 $\mathrm{ran}(g\circ f)=g[\mathrm{ran}f]$.

ii) 若 f 和 g 都是全函数，则 $f^{-1}[Y]=X$ 且 $\mathrm{dom}g=Y$，因此 $\mathrm{dom}(g\circ f)=f^{-1}[\mathrm{dom}g]=f^{-1}[Y]=X$. 这表明 $g\circ f$ 也是全函数。

定理 3.2.3 若 f 是从 X 到 Y 的部分函数，g 是 Y 到 Z 的部分函数，h 是 Z 到 W 的部分函数，则 $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$.

这是定理 2.4.1 中 vii)的特例。

定义 3.2.2 称 $\boldsymbol{I}_A=\{\langle x,x\rangle\mid x\in A\}$ 为集合 A 上的恒等函数。

定理 3.2.4 设 f 是从 X 到 Y 的部分函数，则 $f\circ\boldsymbol{I}_X=f=\boldsymbol{I}_Y\circ f$.

定义 3.2.3 设 $f:X\to Y$.

i) 若 $\mathrm{ran}f=Y$，则称 f 为满射；

ii) 若 f 是 1-1 的，则称 f 为内射；

iii) 若 f 既是满射，又是内射，则称 f 为双射。

例 1 若 R 为集合 A 上的等价关系，则

$$\varphi=\{\langle x,[x]_R\rangle\mid x\in A\}$$

是从 A 到 A/R 的满射，并称 φ 为自然映射或正则映射。

定理 3.2.5 设 $f:X\to Y$ 和 $g:Y\to Z$.

i) 若 f 和 g 都是满射，则 $g\circ f$ 也是满射；

ii) 若 f 和 g 都是内射，则 $g\circ f$ 也是内射；

iii) 若 f 和 g 都是双射，则 $g\circ f$ 也是双射。

证明

i) 因为 f 是满射，故 $\mathrm{ran}f=Y$. 又因 g 是满射，故 $g[Y]=\mathrm{ran}g=Z$. 所以，$\mathrm{ran}(g\circ f)=g[\mathrm{ran}f]=g[Y]=Z$. 这表明 $g\circ f$ 是满射。

ii) 若 $x_1,x_2\in X$ 且 $x_1\neq x_2$，则由 f 是内射得 $f(x_1)\neq f(x_2)$，再由 g 为内射又得

$g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$. 所以$(g\circ f)(x_1) \neq (g\circ f)(x_2)$，即 $g\circ f$ 是内射。

iii) 可由 i) 和 ii) 推出。

定理 3.2.6 设 $f:X\to Y$ 和 $g:Y\to Z$.

i) 若 $g\circ f$ 是满射，则 g 是满射；

ii) 若 $g\circ f$ 是内射，则 f 是内射；

iii) 若 $g\circ f$ 是双射，则 g 是满射且 f 是内射。

证明

i) 显然 $g[\mathrm{ran}f] \subseteq \mathrm{ran}g$，又因为 $g\circ f$ 是满射，$g[\mathrm{ran}f] = \mathrm{ran}(g\circ f) = Z$，所以有 $Z \subseteq \mathrm{ran}g$，从而得到 $\mathrm{ran}g = Z$.

ii) 若 f 不是内射，则有 $x_1, x_2 \in X$ 使 $x_1 \neq x_2$ 且 $f(x_1) = f(x_2)$. 因此，$(g\circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (g\circ f)(x_2)$，这与 $g\circ f$ 是内射矛盾。所以，f 必为内射。

iii) 可由 i)和 ii)直接得到。

习 题 3.2

1. 设 f, g, h 是从 $\boldsymbol{R}$ 到 $\boldsymbol{R}$ 的函数，对每个 $x\in\boldsymbol{R}$ 皆有 $f(x)=x+3$, $g(x)=2x+1$, $h(x)=x/2$. 试求 $g\circ f, f\circ g, f\circ f, g\circ g, f\circ h, h\circ g, h\circ f, g\circ h$ 和 $f\circ h\circ g$.

2. 设 f, g, h 都是从 $\boldsymbol{R}$ 到 $\boldsymbol{R}$ 的部分函数，对于 $x\neq 0$, $f(x)=1/x$. 对于 $x\in\boldsymbol{R}$, $g(x)=x^2$. 对于 $x\geqslant 0$, $h(x)=\sqrt{x}$. 试求 $f\circ f$, $h\circ g$, $g\circ h$ 及它们的定义域和值域。

3. 对于下面的函数 f，确定

i) f 是否为内射、满射和双射；

ii) f 的值域；

iii) $f^{-1}[s]$.

a) $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$

$f(x)=2^x$

$s=\{1\}$

b) $f:\boldsymbol{N}\to\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}$

$f(n)=\langle n, n+1\rangle$

$s=\{\langle 2,2\rangle\}$

c) $f:\boldsymbol{N}\to\boldsymbol{N}$

$f(n)=2n+1$

$s=\{2,3\}$

d) $f:\boldsymbol{I}\to\boldsymbol{N}$

$f(x)=|x|$

$s=\{1,0\}$

e) $f:[0,1]\to[0,1]$

$f(x)=x/2+1/4$

$s=[0,1/2]$

f) $f:[0,\infty)\to\boldsymbol{R}$

$f(x)=1/(1+x)$

$s=\{0,1/2\}$

g) $f:\{a,b\}^*\to\{a,b\}^*$

$f(x)=xa$

$s=\{\varepsilon,b,ba\}$

h) $f:(0,1]\to(0,\infty)$

$f(x)=1/x$

$s=(0,1)$

4. 设 $n\in \boldsymbol{I}_+$，$f: A\to A$. 证明：如果 f 是内射（满射、双射），则 f^n 也是内射（满射、双射）。

5. 设 f 是从 A 到 A 的满射且 $f\circ f=f$，证明 $f=\boldsymbol{I}_A$.

6. 设 f 是从 X 到 Y 的部分函数，g 是从 Y 到 Z 的部分函数，$\mathrm{ran}f\subseteq \mathrm{dom}g$. 证明 $\mathrm{dom}\,(g\circ f)=\mathrm{dom}f$.

7. 设 $A=\{1,2,3\}$. 有多少个从 A 到 A 的满射 f 使 $f(1)=3$?

8. 设 $A=\{1,2,\cdots,n\}$. 有多少满足以下条件的从 A 到 A 的函数 f：

a) $f\circ f=f$

b) $f\circ f=\boldsymbol{I}_A$

c) $f\circ f\circ f=\boldsymbol{I}_A$

9. 设 $f:X\to Y$ 且 $g:Y\to Z$.

a) 若 $g\circ f$ 为满射，g 为内射，则 f 为满射；

b) 若 $g\circ f$ 为内射，f 为满射，则 g 为内射。

§3.3 逆函数

上节我们用关系的合成直接定义了函数的合成。现在自然要问，能否也用关系的逆关系直接定义函数的逆函数呢?

例 1 考虑如下定义的函数 $f:\boldsymbol{I}\to\boldsymbol{I}$；

$$f=\{\langle i,i^2\rangle\mid i\in \boldsymbol{I}\}$$

则

$$f^{-1}=\{\langle i^2,i\rangle\mid i\in \boldsymbol{I}\}$$

显然，f^{-1}不仅不是从 $\boldsymbol{I}$ 到 $\boldsymbol{I}$ 的函数，也不是从 $\boldsymbol{I}$ 到 $\boldsymbol{I}$ 的部分函数。

这个例子说明，我们不能把逆函数直接定义为逆关系。

定义 3.3.1 设 X 和 Y 为二集合且 $f:X\to Y$.

i) 若有 $g:Y\to X$ 使 $g\circ f=\boldsymbol{I}_X$，则称 f 为左可逆的，并称 g 为 f 的一个左逆函数，简称左逆。

ii) 若有 $g:Y\to X$ 使 $f\circ g=\boldsymbol{I}_Y$，则称 f 为右可逆的，并称 g 为 f 的一个右逆函数，简称右逆。

iii) 若有 $g:Y\to X$ 使 $g\circ f=\boldsymbol{I}_X$，且 $f\circ g=\boldsymbol{I}_Y$，则称 f 为可逆的，并称 g 为 f 的一个逆

函数，简称逆。

例 2 若在 N 上定义四个函数如下：

$$f_1 = \{\langle 0,0\rangle,\langle 1,0\rangle\} \cup \{\langle n+2,n\rangle | n \in N\}$$
$$f_2 = \{\langle 0,1\rangle,\langle 1,1\rangle\} \cup \{\langle n+2,n\rangle | n \in N\}$$
$$g_1 = \{\langle n+2,n\rangle | n \in N\}$$
$$g_2 = \{\langle 0,0\rangle\} \cup \{\langle n+1,n+3\rangle n \in N\}$$

则显然有

$$f_1 \circ g_1 = f_2 \circ g_1 = f_1 \circ g_2 = I_N$$

这表明 f_1 和 f_2 都是 g_1 的左逆，g_1 和 g_2 又都是 f_1 的右逆。

例 1 和例 2 说明，一个函数的左逆、右逆和逆并不一定存在；就是存在，右逆和左逆也不一定是唯一的。

定理 3.3.1 设 X 和 Y 为二集合且 $X\neq\varnothing$. 若 $f:X\to Y$，则下列条件等价：

i) f 为内射；

ii) f 左可逆；

iii) f 可左消去，即对任意集合 Z 及任意的 $g:Z\to X$ 和 $h:Z\to X$，当 $f\cdot g=f\cdot h$ 时，皆有 $g=h$.

证明

i) $\Rightarrow$ii) 因为 f 为内射，所以 f 的逆关系 f^{-1} 为从 Y 到 X 的一个部分函数。但 $X\neq\varnothing$，故有 $a\in X$. 因此，可定义一个函数 $g:Y\to X$ 如下：

$$g = f^{-1} \cup (Y\backslash \mathrm{ran} f) \times \{a\}$$

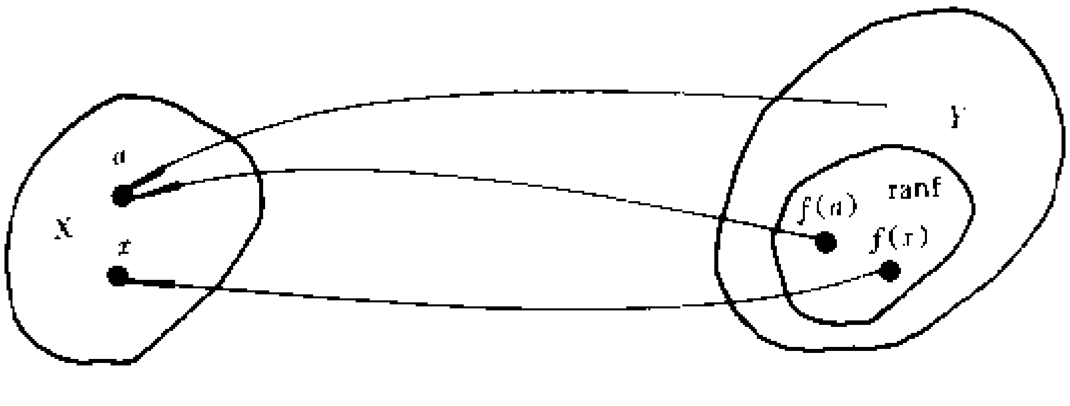


图 3.3.1 f 的左逆 g

这时显然有 $g\cdot f=I_X$，这表明 g 为 f 的一个左逆(见图 3.3.1)，即 f 左可逆。

ii) $\Rightarrow$iii) 因为 f 左可逆，所以有 $f':Y\to X$ 使 $f'\cdot f=I_X$，从而再由 $f\cdot g=f\cdot h$ 即得

$$g = (f'\cdot f)\cdot g = f'\cdot(f\cdot g) = f'\cdot(f\cdot h) = (f'\cdot f)\cdot h = h$$

iii) $\Rightarrow$i) 假定 f 不是内射，则必有 $a_1,a_2\in X$ 使 $a_1\neq a_2$ 且 $f(a_1)=f(a_2)$. 这时若令

$$h(x) = \begin{cases} x, 若\ x \in X\ 且\ x \neq a_1 \\ a_2, 若\ x = a_1 \end{cases}$$

则显然有 $h:X\to X$，$h\neq I_X$ 且 $f\cdot I_X=f=f\cdot h$，这与 iii) 矛盾. 因此 f 必有内射。

定理 3.3.2 设 X 和 Y 为二集合。若 $f:X\to Y$，则下列条件等价：

i) f 为满射；

ii) f 右可逆；

iii) f 可右消去，即对任意集合 Z 及任意的 $g:Y\to Z$ 和 $h:Y\to Z$，当 $g\cdot f=h\cdot f$ 时，皆有 $g=h$.

证明

i) $\Rightarrow$ii) 对每个 $b\in Y$，由 f 为满射可知，必有 $a\in X$ 使 $f(a)=b$、即 $f^{-1}[\{b\}]\neq\varnothing$，故可任意取定一个 $x_b\in f^{-1}[\{b\}]$. 这时若令

$$f'(b)=x_b,\quad b\in Y$$

则 f' 显然为一个从 Y 到 X 的函数，而且有

$$(f\cdot f')(b)=f(f'(b))=f(x_b)=b,\quad b\in Y$$

从而得 $f\cdot f'=\boldsymbol{I}_Y$，这表明 f' 为 f 的一个右逆，即 f 右可逆。

ii) $\Rightarrow$iii) 因为 f 右可逆，所以有 $f':Y\to X$ 使 $f\cdot f'=\boldsymbol{I}_Y$，从而再由 $g\cdot f=h\cdot f$ 即得

$$g=g\cdot(f\cdot f')=(g\cdot f)\cdot f'=(h\cdot f)\cdot f'=h\cdot(f\cdot f')=h$$

iii) $\Rightarrow$i) 假定 f 不是满射，则必有 $b'\in Y$ 使 $b'\notin f[X]$

(1) 若 $X=\varnothing$，则由 $f:X\to Y$ 可知 $f=\varnothing$. 因此对 $Z=\{1,2\}$，当令

$$\begin{array}{l} g(y)=1 \\ h(y)=2 \end{array}\quad y\in Y$$

时，必有 $g\neq h$ 且 $g\cdot f=\varnothing=h\cdot f$，这与 iii) 矛盾。

(2) 若 $X\neq\varnothing$，则 $f[X]\neq\varnothing$. 故有 $b''\in f[X]$. 这时显然有 $b'\neq b''$，因此若令

$$h(y)=\begin{cases} y & \text{若 } y\in Y \text{ 且 } y\neq b' \\ b'' & \text{若 } y=b' \end{cases}$$

则有 $h:Y\to Y$，$h\neq\boldsymbol{I}_Y$ 且 $\boldsymbol{I}_Y\cdot f=f=h\cdot f$，这与 iii) 矛盾。

综合上述的(1)和(2)即知，f 必为满射。

定理 3.3.3 设 X 和 Y 为二集合. 若 $f:X\to Y$ 既是左可逆的，又是右可逆的，则 f 是可逆的，f 必有唯一的逆且与 f 的左逆和右逆都相等。

证明 设 $g_1:Y\to X$ 为 f 的任意一个左逆，$g_2:Y\to X$ 为 f 的任意一个右逆，则 $g_1\circ f=\boldsymbol{I}_X$ 且 $f\circ g_2=\boldsymbol{I}_Y$. 所以

$$g_1=g_1\circ\boldsymbol{I}_Y=g_1\circ(f\circ g_2)=(g_1\circ f)\circ g_2=\boldsymbol{I}_X\circ g_2=g_2$$

这表明 f 是可逆的且 g_1 是 f 的一个逆。

设 g 为 f 的任意一个逆，则 $g\circ f=\boldsymbol{I}_X$ 且 $f\circ g=\boldsymbol{I}_Y$. 所以 g 既是 f 的左逆又是 f 的右逆。因此，$g=g_1$ 即 f 的逆是唯一的。

定义 3.3.2 设 X 和 Y 为二集合。若 $f:X\to Y$ 为可逆的，则 f 的逆函数用 f^{-1}表示。

定理 3.3.4 若 X 和 Y 为二集合且 $f:X\to Y$，则下列条件等价：

i) f 是双射；

ii) f 既是左可逆的，又是右可逆的；

iii) f 是可逆的；

iv) f 的逆关系 f^{-1}即为 f 的逆函数。

证明

i)$\Rightarrow$ii) 因为 f 为双射，故它既是内射，又是满射，根据定理 3.3.1 和定理 3.3.2，f 既

是左可逆的，又是右可逆的。

ii)⇒iii) 由定理 3.3.3 直接推得。

iii)⇒iv) 因 f 是可逆的，故存在唯一的逆 f^{-1} 使 $f^{-1}\circ f=I_X$ 且 $f\circ f^{-1}=I_Y$，因此 f 为双射函数，它的逆关系也是函数，即为 f 的逆函数。

iv)⇒i) 因 f^{-1} 是 f 的逆函数，故 f^{-1} 既是 f 的左逆，又是 f 的右逆。根据定理 3.3.1 和定理 3.3.2，f 既是内射，又是满射，所以 f 为双射。

定理 3.3.5 设 X,Y 和 Z 为三集合。如果 $f:X\to Y$ 和 $g:Y\to Z$ 都是可逆的，则 $g\circ f$ 也是可逆的，且 $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$.

证明 因为 f 和 g 都是可逆的，所以 f 和 g 都是双射，因此，$g\circ f$ 也是双射，从而由定理 3.3.4 知道 $g\circ f$ 也是可逆的。因为 $(g\circ f)\circ(f^{-1}\circ g^{-1})=g\circ(f\circ f^{-1})\circ g^{-1}=I_Z$ 且 $(f^{-1}\circ g^{-1})\circ(g\circ f)=f^{-1}\circ(g^{-1}\circ g)\circ f=I_X$，所以 $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$.

习 题 3.3

1. 对于习题 3.2 的第 3 题中的每个内射(满射、双射)，求出其一个左逆(右逆、逆)。
2. 设 f 是从 X 到 Y 的双射，证明 $(f^{-1})^{-1}=f$.
3. 设 f,g,h 都是从 N 到 N 的函数，其中 $f(x)=3x,g(x)=3x+1,h(x)=3x+2$.

a) 找出它们的一个共同左逆。

b) 找出 f 和 g 的一个共同左逆，使其不是 h 的左逆。

4. 设 $f: A\to B$ 和 $g: B\to C$. 如果 $g\circ f$ 是左可逆的，能否保证 f 和 g 也一定都是左可逆的？
5. 设 $f: A\to B$ 且 $n(A)\geqslant 2$. 证明 f 是可逆的当且仅当 f 有唯一的左(右)逆。
6. 设 A 和 B 是有限集且 $1\leqslant n(A)\leqslant n(B)$. 问共有多少个从 A 到 B 的内射？

§3.4 特 征 函 数

我们能用一种很简单的函数来确定集合及集合间的关系，这种函数就是特征函数。

首先引进几个记号。

定义 3.4.1 设 X 为任意集合，f 和 g 都是从 X 到 $\boldsymbol{R}$ 的函数。

i) $f\leqslant g$ 表示，对每个 $x\in X$ 皆有 $f(x)\leqslant g(x)$.

ii) $f+g: X\to\boldsymbol{R}$，对每个 $x\in X$ 皆有 $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$，称 $f+g$ 为 f 和 g 的和。

iii) $f-g: X\to\boldsymbol{R}$，对每个 $x\in X$ 皆有 $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$，称 $f-g$ 为 f 和 g 的差。

iv) $f*g: X\to\boldsymbol{R}$，对每个 $x\in X$ 皆有 $(f*g)(x)=f(x)*g(x)$，称 $f*g$ 为 f 和 g 的积。

定义 3.4.2 设 U 为全集，$A\subseteq U$，χ_A 为如下定义的从 U 到 $\boldsymbol{R}$ 的函数：

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1 & x\in A\\ 0 & x\notin A\end{cases}$$

称 χ_A 为集合 A 的特征函数。

下面我们列举特征函数的一些重要性质，其中 0 表示从 U 到 $\boldsymbol{R}$ 的函数 $\{\langle x,0\rangle \mid x\in U\}$，1 表示从 U 到 $\boldsymbol{R}$ 的函数 $\{\langle x,1\rangle \mid x\in U\}$.

1) $0\leqslant\chi_A\leqslant 1$；

2) $\chi_A=0$ 当且仅当 $A=\varnothing$；

3) $\chi_A=1$ 当且仅当 $A=U$；

4) $\chi_A\leqslant\chi_B$ 当且仅当 $A\subseteq B$；

5) $\chi_A=\chi_B$ 当且仅当 $A=B$；

6) $\chi_{\sim A}=1-\chi_A$；

7) $\chi_{A\cap B}=\chi_A*\chi_B$；

8) $\chi_{A\cup B}=\chi_A+\chi_B-\chi_A*\chi_B$；

9) $\chi_{A-B}=\chi_A-\chi_A*\chi_B$；

10) $\chi_A*\chi_B=\chi_A$ 当且仅当 $A\subseteq B$；

11) $\chi_A*\chi_A=\chi_A$.

以上性质并不难验证，我们留作练习。下面，我们举例说明特征函数的用途。

例 1 用特征函数证明

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

证明 通过直接计算可得

$$\begin{aligned}\chi_{A\cup(B\cap C)}&=x_A+\chi_{B\cap C}-\chi_A*\chi_{B\cap C}\\&=\chi_A+\chi_B*\chi_C-\chi_A*\chi_B*\chi_C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\chi_{(A\cup B)\cap(A\cup C)}&=\chi_{A\cup B}*\chi_{A\cup C}\\&=(\chi_A+\chi_B-\chi_A*\chi_B)*(\chi_A+\chi_C-\chi_A*\chi_C)\\&=\chi_A*\chi_A+\chi_A*\chi_C-\chi_A*X_A*\chi_C+X_B*\chi_A\\&\quad+\chi_B*\chi_C-\chi_B*\chi_A*\chi_C-\chi_A*\chi_B*\chi_A\\&\quad-\chi_A*\chi_B*\chi_C+\chi_A*\chi_B*\chi_A*\chi_C\\&=\chi_A+\chi_B*\chi_C-\chi_A*\chi_B*\chi_C\end{aligned}$$

所以 $\chi_{A\cup(B\cap C)}=\chi_{(A\cup B)\cap(A\cup C)}$. 从而得到

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

习 题 3.4

1. 证明特征函数所具有的性质 2)到 11)。

2. 用特征函数求下列各式成立的充分必要条件。

a) $(A-B)\cup(A-C)=A$；

b) $A\oplus B=\varnothing$；

c) $A\oplus B=A$；

d) $A\cap B=A\cup B$.

§3.5 基 数

对任意二集合 A 和 B,如何知道 A 和 B 中哪个含有更多的元素呢?可有以下两种办法。

方法 1 计数法

数出 A 和 B 中的元素个数,再加以比较即可。

方法 2 愚人比宝法

古时有两个不识数的愚人,各带一袋珠宝相遇,他俩都说自己袋里的珠宝多,争执不下。一个聪明人路过这里,对他们说:"你们同时分别从自己袋里逐个取出珠宝,谁最后取完,就是谁的袋里珠宝多。"

表面看来,似乎方法 2 太笨了。其实不然。当 A 和 B 都是无限集时,无法数出 A 和 B 中元素的具体个数。这时方法 1 就失效了,而方法 2 依然有效。实际上,当集合 A 有限时,我们在数集合 A 中元素的个数时,只不过是在 A 与某个自然数之间建立一个双射。

定义 3.5.1 设 A 和 B 为二集合。若存在从 A 到 B 的双射,则称 A 和 B 对等,或称 A 和 B 等势,记为 $A\sim B$.

为方便起见,我们引进一些下面要用到的记号。对任意 $a,b\in\boldsymbol{R}$,我们令

$$(a,b)=\{x\mid x\in\boldsymbol{R}\text{ 且 }a<x<b\}$$
$$(a,b]=\{x\mid x\in\boldsymbol{R}\text{ 且 }a<x\leqslant b\}$$
$$[a,b)=\{x\mid x\in\boldsymbol{R}\text{ 且 }a\leqslant x<b\}$$
$$[a,b]=\{x\mid x\in\boldsymbol{R}\text{ 且 }a\leqslant x\leqslant b\}$$

对于有限集和无限集,我们可严格定义如下:

定义 3.5.2 设 A 是集合。如果存在 $n\in N$ 使 $A\sim n$,则称 A 为有限集,否则称 A 为无限集。

大家知道,如果存在有限集 A 和 B 之间的双射,则 A 和 B 的元素个数必相等。因此,有以下的重要定理。

定理 3.5.1 任何有限集都不能与它的真子集对等。

这个定理也叫抽屉原则,可通俗表述为:如果把 $n+1$ 本书放进 n 个抽屉里,至少在一个抽屉里有两本或两本以上的书。抽屉原则也称鸽笼原则,抽屉原则虽然极简单,极明白,但用它可以解决组合数学中的许多问题。

例 1 某象棋大师准备参加象棋锦标赛,他决定在赛前的 11 周里每天至少下一局,为了避免过度疲劳,他规定每周下棋不超过 12 局。证明在接连的某些天内他恰好下了 21 局。

证明 用 a_i 表示在前 i 天内他下棋的局数。因为每天至少下一局,所以 $a_1,a_2,\cdots,a_{77}$ 是严格递增序列。因为每周下棋不超过 12 局,所以 $a_{77}\leqslant 132$. 显然,$a_1+21,a_2+21,a_{77}+21$ 也是严格递增序列,并且 $a_{77}+21\leqslant 153$,这样,就有了 154 个小于 154 的正整数 $a_1,a_2,\cdots,a_{77},a_1+21,a_2+21,\cdots,a_{77}+21$. 根据抽屉原则,其中至少有两个是相等的,设 $a_i=a_j+21$,则 $a_i-a_j=21$,即从第 $j+1$ 天到第 i 天恰好下了 21 局棋。

抽屉原则对于无限集并不成立。

例 2 如果 $a,b\in \boldsymbol{R}$ 且 $a<b$，则 $(a,b)\sim \boldsymbol{R}$.

证明 定义 $f:(a,b)\to \boldsymbol{R}$ 如下：

对任意 $x\in(a,b)$，令 $f(x)=\mathrm{tg}[\pi(x-(a+b)/2)/(b-a)]$，显然 f 是双射，所以 $(a,b)\sim \boldsymbol{R}$.

(a,b) 是 R 的真子集，但 $(a,b)\sim R$，这表明抽屉原则对于无限集 R 不成立。我们后面将证明，任何无限集都如此。这正是无限集与有限集之间的本质区别，也可以把它作为无限集的定义。

我们现在拓广集合中含有的元素个数这一概念，引进集合的基数的概念。集合 A 的基数用 $\#(A)$ 表示，也可以表示为 $\ddot{A}$，$\mathrm{card}(A)$ 或 $|A|$. 显然，每个有限集都与唯一的自然数对等。若 $n\in N$ 使得 $A\sim n$，则令 $\#(A)=n$. 对于无限集的基数，我们规定特殊的记号，例如，令 $\#(N)=\aleph_0$. $\aleph$ 是希伯来语的第一个字母，念作阿列夫。下面我们规定基数的相等和大小顺序。

定义 3.5.3 设 A 和 B 为二集合。

i）如果 $A\sim B$，就称 A 和 B 的基数相等，记为 $\#(A)=\#(B)$.

ii）如果存在从 A 到 B 的内射，就称 A 的基数小于等于 B 的基数，记为 $\#(A)\leqslant\#(B)$，或称 B 的基数大于等于 A 的基数，记为 $\#(B)\geqslant\#(A)$.

iii）如果 $\#(A)\leqslant\#(B)$ 且 $\#(A)\neq\#(B)$，就称 A 的基数小于 B 的基数，记为 $\#(A)<\#(B)$，或称 B 的基数大于 A 的基数，记为 $\#(B)>\#(A)$.

任何两个基数都可以比较大小。

定理 3.5.2 若 A 和 B 为任意两个集合，则

$$\#(A)\leqslant\#(B) \text{ 和 } \#(B)\leqslant\#(A)$$

二者之中至少有一个成立。

这个定理的证明要用到选择公理，超出了本书的范围，我们就不讨论了。

定理 3.5.3 设 A，B 和 C 为集合。

i）$\#(A)=\#(A)$；

ii）若 $\#(A)=\#(B)$，则 $\#(B)=\#(A)$；

iii）若 $\#(A)=\#(B)$ 且 $\#(B)=\#(C)$，则 $\#(A)=\#(C)$.

证明留作练习。

定理 3.5.4 设 A、B 和 C 为集合。

i）$\#(A)\leqslant\#(A)$；

ii）若 $\#(A)\leqslant\#(B)$ 且 $\#(B)\leqslant\#(A)$，则 $\#(A)=\#(B)$；

iii）若 $\#(A)\leqslant\#(B)$ 且 $\#(B)\leqslant\#(C)$，则 $\#(A)\leqslant\#(C)$.

其中 ii）为著名的伯恩斯坦(F. Bernstein)定理。

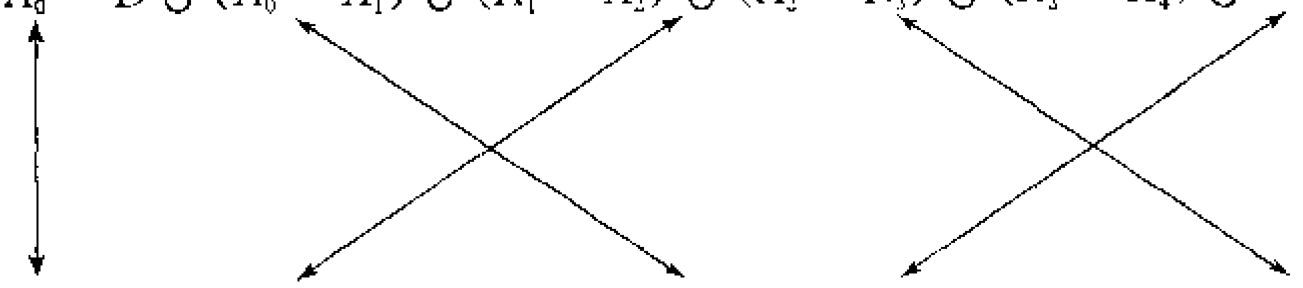
证明 只证 ii)，i)和 iii)留作练习。

因为 $\#(A)\leqslant\#(B)$ 且 $\#(B)\leqslant\#(A)$，所以存在内射 $f:A\to B$ 和内射 $g:B\to A$. 令 $A_0=A$，$A_1=g[B]$，$A_{i+2}=g[f[A_i]](i=0,1,2,\cdots)$，显然，$A_1\subseteq A_0$. 因为 $f[A]\subseteq B$，所以 $A_2\subseteq A_1$. 设当 $n\geqslant 2$ 时，对一切满足 $0\leqslant i<n$ 的 i 有 $A_{i+1}\subseteq A_i$ 成立，则由 $A_{n-1}\subseteq A_{n-2}$ 可知，$A_{n+1}=$

$g[f[A_{n-1}]]\subseteq g[f[A_{n-2}]]=A_n$. 这表明 $A_{i+1}\subseteq A_i$ 对于一切 $i\in N$ 皆成立。

设 $D=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$，就有

$$A_0 = D\cup(A_0-A_1)\cup(A_1-A_2)\cup(A_2-A_3)\cup(A_3-A_4)\cup\cdots$$



$$A_1 = D\cup(A_1-A_2)\cup(A_2-A_3)\cup(A_3-A_4)\cup(A_4-A_5)\cup\cdots$$

定义 $\varphi:A_0\to A_1$ 如下：

$$\varphi(x)=\begin{cases} x, & x\in D\cup\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(A_{2i-1}-A_{2i}) \\ g(f(x)), & x\in\bigcup\limits_{i=0}^{\infty}(A_{2i}-A_{2i+1}) \end{cases}$$

我们证明 φ 是一个双射。任取 $y\in A_1$，若 $y\in D\cup\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(A_{2i-1}-A_{2i})$，则 $y\in A_0$ 且 $\varphi(y)=y$；若 $y\in\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(A_{2i}-A_{2i+1})$，则有 $n\geqslant1$ 使 $y\in A_{2n}-A_{2n+1}$，即 $y\in g[f[A_{2n-2}]]-g[f[A_{2n-1}]]$. 因此，存在 $x\in A_{2n-2}-A_{2n-1}$ 使 $g(f(x))=y$. 从而得知 $x\in A_0$ 且 $\varphi(x)=y$. 这表明 φ 是满射。设 $x,y\in A_0$ 且 $x\neq y$. 若 $x,y\in D\cup\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(A_{2i-1}-A_{2i})$，则 $\varphi(x)\neq\varphi(y)$；若 $x,y\in\bigcup\limits_{i=0}^{\infty}(A_{2i}-A_{2i+1})$，则由 $g\circ f$ 是内射可知 $\varphi(x)\neq\varphi(y)$. 若 $x\in D\cup\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(A_{2i-1}-A_{2i})$ 且 $y\in\bigcup\limits_{i=0}^{\infty}(A_{2i}-A_{2i+1})$，则 $\varphi(x)=x\in D\cup\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(A_{2i-1}-A_{2i})$，且有 $n\in N$ 使 $y\in A_{2n}-A_{2n+1}$，所以 $\varphi(y)=g(f(y))\in A_{2n+2}-A_{2n+3}$，故而 $\varphi(x)\neq\varphi(y)$. 这就证明了 φ 是双射。因为 g 可以看成是从 B 到 A_1 的双射，所以 $\varphi^{-1}\circ g$ 是从 B 到 A 的双射。因此 $\#(A)=\#(B)$.

定义 3.5.4 与 N 对等的集合称为可列集或可数集。

定理 3.5.5 以下三个条件等价：

i) A 为无限集；

ii) A 有可列子集；

iii) A 有与它对等的真子集。

证明

i)⇒ii) 设 A 为无限集。取 $a_0\in A$，对每个 $n\in N$，若 $\{a_0,a_1,\cdots,a_n\}\subseteq A$，则必有 $a_{n+1}\in A$ 且 $a_{n+1}\notin\{a_0,a_1,\cdots,a_n\}$. 因此，$B=\{a_i|i\in N\}$ 即为 A 的可列子集。

ii)⇒iii) 设 B 是 A 的可列子集。因为 $B\sim N$，故有双射 $f:N\to B$. 取 $C=A-\{f(0)\}$，并令

$$g(x)=\begin{cases} f((f^{-1}(x))^{+}), & 若\ x\in B \\ x, & 若\ x\in A-B \end{cases}$$

显然 $g:A\to C$ 是双射，所以 A 与它的真子集 C 对等。

iii)⇒i) 可由抽屉原则直接推出。

定理 3.5.6 若 A 和 B 为二集合，则 $\#(B)\leqslant\#(A)$ 当且仅当存在从 A 到 B 的满射。

证明 设 $f:A\to B$ 为满射，则 f 有右逆 $g:B\to A$. 由 $f\circ g=\boldsymbol{I}_B$ 及 $\boldsymbol{I}_B$ 是内射知道，g 是内射，所以 $\#(B)\leqslant\#(A)$. 反之，若 $\#(B)\leqslant\#(A)$，则有内射 $g:B\to A$. 根据定理 3.3.1，g 有左逆 $f:A\to B$，从而由 $f\circ g=\boldsymbol{I}_B$ 及 $\boldsymbol{I}_B$ 是满射知道，f 是满射。

基数的个数也是无限的，且无最大者。

定理 3.5.7 对每个集合 A，皆有 $\#(A)<\#\mathscr{P}(A)$.

证明 定义 $g:A\to\mathscr{P}(A)$ 为 $g(a)=\{a\}$，显然，g 是内射，所以 $\#(A)\leqslant\#(\mathscr{P}(A))$. 我们用反证法证明 $\#(A)\neq\#(\mathscr{P}(A))$.

假定 $\#(A)=\#(\mathscr{P}(A))$，则有双射 $f:A\to\mathscr{P}(A)$. 令 $B=\{a\mid a\in A$ 且 $a\notin f(a)\}$，则 $B\in\mathscr{P}(A)$，所以有 $t\in A$ 使 $f(t)=B$.

若 $t\in B$，按 B 的定义，$t\notin f(t)$，即 $t\notin B$.

若 $t\notin B$，即 $t\notin f(t)$，按 B 的定义，$t\in B$.

总之，$t\in B$ 当且仅当 $t\notin B$. 这是一个矛盾，所以只能是 $\#(A)\neq\#(\mathscr{P}(A))$.

我们把 $\#(\mathscr{P}(\boldsymbol{N}))$ 记为 $\aleph$.

例 3 证明 $\#(\boldsymbol{R})=\aleph$.

定义 $f:\mathscr{P}(\boldsymbol{N})\to[0,1]$ 为

$$f(A)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\chi_A(i)}{2^{i+1}},\qquad A\subseteq N$$

显然 f 是满射，所以 $\#([0,1])\leqslant\aleph$.

另一方面，定义 $g:\mathscr{P}(\boldsymbol{N})\to[0,1]$ 为

$$g(A)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\chi_A(i)}{3^{i+1}},\qquad A\subseteq N$$

若 $A,B\subseteq N$ 且 $A\neq B$，则 $A\oplus B\neq\varnothing$. 设 i_0 是 $A\ominus B$ 的最小元素，则 $|g(A)-g(B)|\geqslant\frac{1}{3^{i_0+1}}-\sum_{j\geqslant 2}^{\infty}\frac{1}{3^{i_0+j}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^{i_0+1}}>0$，所以 $g(A)\neq g(B)$，即 g 是内射。因此 $\aleph\leqslant\#([0,1])$. 所以 $\#([0,1])=\aleph$，但 $\#([0,1])=\#((\mathbf{R})$，故 $\#(\boldsymbol{R})=\aleph$.

例 4 $\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}$ 是可列集。

证明 把 N 中的元素排列如下：

$$\begin{array}{lllll}
0 & 1 & 3 & 6 & \cdots\\
2 & 4 & 7 & \cdots & \\
5 & 8 & \cdots & & \\
9 & \cdots & & & \\
\cdots & & & &
\end{array}$$

称最上面的行为第 0 行，最左边的列为第 0 列，这样，每个自然数与它所在行号和列号之间就可建立一一对应，这是 $\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}$ 到 $\boldsymbol{N}$ 的双射。

定义 $\pi:\boldsymbol{N}^2\to\boldsymbol{N}$ 为

$$\pi(n,m)=\frac{(n+m)(n+m+1)}{2}+n$$

设 $\pi(n,m)=\pi(n',m')$. 若 $n+m=n'+m'$, 则 $n-n'=\pi(n,m)-\pi(n',m')=0$, 故 $n=n'$, $m=m'$. 若 $n+m\neq n'+m'$, 不妨设 $n+m>n'+m'$, 令 $n+m=n'+m'+l$, 其中 $l\geqslant 1$. $\pi(n,m)-\pi(n',m')=\frac{(n'+m'+l)(n'+m'+1+l)}{2}+n-\left(\frac{(n'+m')(n'+m'+1)}{2}+n'\right)=\frac{(2n'+2m'+1)l+l^2}{2}+n-n'\geqslant\frac{l}{2}>0$, 这与 $\pi(n,m)=\pi(n',m')$ 矛盾, 故必有 $n+m=n'+m'$. 这表明 π 是内射。

用第二归纳法证明 $\mathrm{ran}\pi=\boldsymbol{N}$.

因为 $\pi(0,0)=0$, 所以 $0\in\mathrm{ran}\pi$.

设 $k>0$ 且对于一切 $l<k$ 皆有 $l\in\mathrm{ran}\pi$, 则由 $k-1\in\mathrm{ran}\pi$ 可知, 有 $i,j\in N$ 使 $\pi(i,j)=k-1$. 若 $j>0$, 则 $\pi(i+1,j-1)=\frac{(i+j)(i+j+1)}{2}+i+1=k-1+1=k$; 若 $j=0$, 则 $\pi(0,i+1)=\frac{(i+1)(i+2)}{2}=\frac{i(i+1)}{2}+i+1=\pi(i,0)+1=k-1+1=k$. 总之, 皆有 $k\in\mathrm{ran}\pi$.

综上所述, π 是双射, 因此 $N\times N$ 是可列集。

例 5 $\#(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R})=\aleph$.

证明 对任意 $x\in[0,1)$, 可把它表示为十进制小数, 即 $x=0.x_1x_2x_3\cdots$, 其中 $x_i\in\{0,1,\cdots,9\}$, 如果我们不用从某位后全是"9"的十进小数表示, 则这种表示法就是唯一的。

现在我们定义 $f:[0,1)^2\to[0,1)$ 如下: 任取 $x,y\in[0,1)$, 若 $x=0.x_1x_2x_3\cdots$, $y=0.y_1y_2y_3\cdots$, 则令 $f(x,y)=0.x_1y_1x_2y_2x_3y_3\cdots$. 显然 f 是内射, 故 $\#([0,1)^2)\leqslant([0,1))$. 另外, 显然, 还有 $\#([0,1))\leqslant\#([0,1)^2)$. 所以 $\#(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R})=\#([0,1)^2)=\#([0,1))=\aleph$.

习 题 3.5

1. 构造从集合 A 到集合 B 的双射。

a) $A=\boldsymbol{R}$, $B=(0,\infty)$;

b) $A=(0,1)$, $B=[0,1)$;

c) $A=[0,1)$, $B=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$;

d) $A=[0,1]$, $B=(0,1)$.

2. 设 $n>0$ 且 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 n 个任意整数, 证明存在 k 和 i 使 $1\leqslant i\leqslant k\leqslant n$ 且 $x_i+x_{i+1}+\cdots+x_k$ 能被 n 整除。

3. 从小于 201 的正整数中任意选取 101 个, 证明其中必有一个数能整除另一个数。

4. 证明在 $n+1$ 个小于等于 $2n$ 的正整数中必有两数互素, 其中 $n\geqslant 1$.

5. 设 $n\in\boldsymbol{I}_+$, 证明在能被 n 整除的正整数中必存在只由数字 7 和 0 组成的数。

6. 任给 52 个整数, 证明其中必有两数之和能被 100 整除或两数之差能被 100 整除。

7. 某工人在夜校学习, 他打算用 37 天准备考试, 并决定复习 60 小时, 每天至少用 1 小时, 证明他必定在接连的一些天内恰好共复习了 13 小时。

8. 求下列集合的基数, 并加以证明。

a) Σ^*, 其中 $\Sigma=\{a\}$;

b) 有理数集合 Q；

c) $\{x \mid x \in Q$ 且 $0 \leqslant x \leqslant 1\}$.

9. 证明全体从 N 到 N 的严格单调递增函数组成的集合的基数大于 $\aleph_0$.

10. 证明 N 的全体有限子集组成的集合是可列的。

§3.6 基数算术

本节定义基数的运算，并给出有关的定律，但不加证明。这些定理的证明，有些留作练习，有些要用到选择公理，超出了本书的范围。

定义 3.6.1 无限集的基数称为无穷基数，有限集的基数称为有穷基数。

定义 3.6.2 设 A 和 B 为二集合，$\#(A)=\alpha$ 且 $\#(B)=\beta$.

i) 若 $A \cap B=\varnothing$，则 $\alpha+\beta \triangleq \#(A \cup B)$；

ii) $\alpha \cdot \beta \triangleq \#(A \times B)$；

iii) $\beta^{\alpha} \triangleq \#(B^{A})$.

定理 3.6.1 设 α,β,γ 为任意基数。

i) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$ 且 $\alpha \cdot \beta=\beta \cdot \alpha$；

ii) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$ 且 $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma=\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$；

iii) $\alpha \cdot (\beta+\gamma)=\alpha \cdot \beta+\alpha \cdot \gamma$；

iv) $(\beta^{\alpha})^{\gamma}=\beta^{\alpha \cdot \gamma}$；

v) $(\alpha \cdot \beta)^{\gamma}=\alpha^{\gamma} \cdot \beta^{\gamma}$；

vi) $\beta^{\alpha+\gamma}=\beta^{\alpha} \cdot \beta^{\gamma}$.

定理 3.6.2 设 α 为任意基数。

i) $0 \cdot \alpha=0, 0+\alpha=\alpha$ 且 $\alpha^{0}=1$；

ii) $1 \cdot \alpha=\alpha, \alpha^{1}=\alpha$ 且 $1^{\alpha}=1$.

定理 3.6.3 设 α 为无穷基数，β 为基数。

i) $\alpha+\beta=\max(\alpha,\beta)$；

ii) 若 $\beta \neq 0$，则 $\alpha \cdot \beta=\max(\alpha,\beta)$.

习 题 3.6

1. 证明定理 3.6.1.

2. 证明定理 3.6.2.

3. 设 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 为基数，$0<\alpha \leqslant \beta$ 且 $\gamma \leqslant \delta$，证明 $\alpha+\gamma \leqslant \beta+\delta, \alpha \cdot \gamma \leqslant \beta \cdot \delta$ 且 $\alpha^{\gamma} \leqslant \beta^{\delta}$.

4. 设 A 为集合，$\#(A)=\alpha$，证明 $\#(\mathscr{P}(A))=2^{\alpha}$.

5. 设 $B=\{f \mid f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ 且 f 是连续的$\}$，证明 $\#(B)=\aleph$.

6. 证明 $\aleph^{\aleph}=2^{\aleph}$.

第四章　命题逻辑

一切科学，不论是社会科学，还是自然科学，都离不开推理。正确的推理形式应当是，从正确的前提出发，必然得出正确的结论。形式逻辑用自然语言研究推理形式。自然语言（如汉语）是丰富而生动的，一个词可以表达多种不同的意思，并且一个意思也可以用几个不同的词表达，这为精确研究推理形式造成了困难。为了精确地表达思想并便于推演，数理逻辑使用了特制的表意符号。因此，数理逻辑又称符号逻辑，是一门用数学方法研究推理形式的科学。在数理逻辑中引入了一种形式语言，组成了一个形式系统，把对形式逻辑的研究归结为对形式系统的研究。这种研究方法具有表达准确而简洁，推理严格而方便、概括程度高、易于分析研究等特点。

数理逻辑是现代数学的重要基础，也是计算机科学的重要基础之一。

§4.1　命题和联结词

在推理过程中，每步都离不开判断，每步也都要做出判断。判断的语言表述就是命题，它一般是陈述句。

定义 4.1.1　具有确定真假意义的陈述句称为命题，而称表示命题的形式符号为命题词。如果命题的意义为真，就称它为真命题，也称它的真值为真，并用 $\boldsymbol{T}$（或 1）表示这个真值。如果命题的意义为假，就称它为假命题，也称它的真值为假，并用 $\boldsymbol{F}$（或 0）表示这个真值。$\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{F}$（或 1 和 0）通称为命题的真值。

让我们考察下面的语句：

1）　雪是白的。

2）　2 是奇数。

3）　快跑!

4）　多美的校园啊!

5）　你是谁?

6）　$x+y>5$.

7）　我正在说谎。

8）　对面的小店关门了。

9）　你明年就会死去。

10）　如果他病了，那么他就需要休息。

语句 1）是真命题。语句 2）是假命题。语句 3）是祈使句，它表达了一种要求或命令；语句 4）是感叹句，它表达对校园的赞美；语句 5）是疑问句，它表达了一种怀疑和

询问；语句 6) 没有确定的真假意义；语句 7) 虽是陈述句，但它的语义自相矛盾，称为说谎者悖论。所以语句 3)，4)，5)，6) 和 7) 都不是命题。尽管语句 8) 中的"关门"有歧义，语句 9) 的真假意义现在尚无法确定，它们都仍是命题。语句 10) 也是命题，它是由"他病了"和"他需要休息"这两个命题通过联结词"如果……，那么……"而构成的。

我们称由简单陈述句表述的判断为简单命题，称由复合陈述句表述的判断为复合命题。由此可见，用适当的联结词，可以由命题构成新的更复杂的复合命题，并称原来的命题为此复合命题的支命题。在汉语中，这样的联结词有很多，如"非"、"和"、"或"和"如果……，则……"等等。下面将讨论怎样把它们移植到数理逻辑中的问题。

通常，命题词用大写拉丁字母表示。一般，我们并不规定一个命题词表示真命题还是表示假命题。例如 P，它可以表示真命题，也可以表示假命题。因此，命题词又称为命题变元或命题变项。但是，有时我们又需要规定命题词表示真命题，或者表示假命题。为此，我们把命题的真值 $\mathbf{T}$ 和 $\mathbf{F}$ 作为两个特定的命题词：$\mathbf{T}$ 永远表示真命题，$\mathbf{F}$ 永远表示假命题。这时 $\mathbf{T}$ 和 $\mathbf{F}$ 又常称为命题常量或命题常项。

注意，我们已赋予了符号 $\mathbf{T}$ 和 $\mathbf{F}$ 两种含意：命题的真值和命题常量。

定义 4.1.2 逻辑联结词 $\neg$ 定义为：$\neg P$ 的真值为 $\mathbf{T}$ 当且仅当 P 的真值为 $\mathbf{F}$，称 $\neg P$ 为 P 的否定，读做"非 P".

$\neg$ 的真值表如表 4.1.1 所示。

定义 4.1.3 逻辑联结词 $\wedge$ 定义为：$P \wedge Q$ 的真值为 $\mathbf{T}$ 当且仅当 P 和 Q 的真值都为 $\mathbf{T}$，称 $P \wedge Q$ 为 P 和 Q 的合取，读做"P 和 Q".

$\wedge$ 的真值表如表 4.1.2 所示。

定义 4.1.4 逻辑联结词 $\vee$ 定义为：$P \vee Q$ 的真值为 $\mathbf{F}$ 当且仅当 P 和 Q 的真值均为 $\mathbf{F}$，称 $P \vee Q$ 为 P 和 Q 的析取，读做"P 或 Q".

$\vee$ 的真值表如表 4.1.3 所示。

表 4.1.1 $\neg$ 的真值表

P	$\neg P$
$\mathbf{F}$	$\mathbf{T}$
$\mathbf{T}$	$\mathbf{F}$

表 4.1.2 $\wedge$ 的真值表

P	Q	$P \wedge Q$
$\mathbf{F}$	$\mathbf{F}$	$\mathbf{F}$
$\mathbf{F}$	$\mathbf{T}$	$\mathbf{F}$
$\mathbf{T}$	$\mathbf{F}$	$\mathbf{F}$
$\mathbf{T}$	$\mathbf{T}$	$\mathbf{T}$

表 4.1.3 $\vee$ 的真值表

P	Q	$P \vee Q$
$\mathbf{F}$	$\mathbf{F}$	$\mathbf{F}$
$\mathbf{F}$	$\mathbf{T}$	$\mathbf{T}$
$\mathbf{T}$	$\mathbf{F}$	$\mathbf{T}$
$\mathbf{T}$	$\mathbf{T}$	$\mathbf{T}$

从 $\vee$ 的真值表可以看出，当 P 和 Q 的真值均为 $\mathbf{T}$ 时，$P \vee Q$ 的真值也为 $\mathbf{T}$，这表明 $\vee$ 是相容的析取。P 和 Q 的不相容析取应为

$$(P \vee Q) \wedge (\neg (P \wedge Q))$$

定义 4.1.5 逻辑联结词 $\rightarrow$ 定义为：$P \rightarrow Q$ 的真值为 $\mathbf{F}$ 当且仅当 P 的真值为 $\mathbf{T}$ 且 Q 的真值为 $\mathbf{F}$，称 $P \rightarrow Q$ 为由前件 P 和后件 Q 构成的条件命题，读做"如果 P，则 Q".

$\rightarrow$ 的真值表如表 4.1.4 所示。

由 $\rightarrow$ 的真值表可以看出，后两行与日常用语中的条件命题一致，前两行有时一致，有

时不一致。$P \to Q$ 的真值为 T 的含意是：前件 P 的真值为 T 是后件 Q 的真值为 T 的充分条件，当 P 的真值为 T 时 Q 的真值必为 T；当 P 的真值为 F 时，Q 的真值可为 T 也可为 F，即前件为假时，后件可以胡说八道。

表 4.1.4　→的真值表

P	Q	$P \to Q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

表 4.1.5　⇌的真值表

P	Q	$P \rightleftharpoons Q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

定义 4.1.6　逻辑联结词⇌定义为：$P \rightleftharpoons Q$ 的真值为 T 当且仅当 P 和 Q 的真值同时为 T 或同时为 F，称 $P \rightleftharpoons Q$ 为由 P 和 Q 构成的双条件命题，读做"P 当且仅当 Q".

⇌的真值表如表 4.1.5 所示。

⇌的含意与日常用语中的"当且仅当"相同。

至此，我们定义了五个常用的逻辑联结词，其中 ¬ 是一元逻辑联结词，∧、∨、→和⇌是二元逻辑联结词，用它们可以构造更复杂的复合命题。

对于给定的命题，首先用命题词表示它所包含的简单命题，然后用这些命题词和上面定义的逻辑联结词把给定的命题表示出来，称为对给定命题的符号化。

习　题　4.1

1.　判断下列语句是否为命题，并讨论命题的真值。

a)　$2x-3=0$.

b)　$\sqrt{2}$ 小于 $\pi/3$.

c)　如果 $2\times2=5$，则雪是白的。

d)　如果太阳从西方升起，你就可以长生不老。

e)　如果太阳从东方升起，你就可以长生不老。

f)　请勿吸烟。

g)　你喜欢鲁迅的作品吗？

2.　给定下列命题：

P：天在下雪，

Q：我进城，

R：我有时间，

使用逻辑联结词将下列复合命题符号化。

a)　如果天不下雪且我有时间，我就进城。

b)　我进城的必要条件是我有时间。

c)　天不在下雪。

d)　我进城当且仅当我有时间且天不下雪。

3.　二元逻辑联结词↑和↓分别称为"与非"和"或非"，它们的真值表定义如下：

P	Q	$P\uparrow Q$	$P\downarrow Q$
F	F	T	T
F	T	T	F
T	F	T	F
T	T	F	F

a） 用$\uparrow$表示$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\rightleftharpoons$；

b） 用$\downarrow$表示$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\rightleftharpoons$；

c） 用$\neg$和$\vee$表示$\wedge$，$\rightarrow$，$\rightleftharpoons$；

d） 用$\neg$和$\wedge$表示$\vee$，$\rightarrow$，$\rightleftharpoons$；

e） 用$\neg$和$\rightarrow$表示$\vee$，$\wedge$，$\rightleftharpoons$；

f） 证明用$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\rightleftharpoons$不能表示$\neg$.

§4.2 合式公式

上节讨论了命题和逻辑联结词。现在讨论合式公式，它是命题逻辑中另一个十分重要的基本概念。

定义 4.2.1 称命题词为原子，记为 atf.

注意，当我们说原子 T 或 F 时，我们是把它们作为命题常量看待的；当我们说 P 的真值为 T 或 F 时，我们是把它们作为命题的真值看待的。

定义 4.2.2 合式公式用 wff 表示，是按以下形成规则构成的有穷符号串：

i） 若 P 为原子，则 P 为 wff；

ii） 若 A 为 wff，则 $(\neg A)$ 为 wff；

iii） 若 A 和 B 都是 wff，则 $(A\wedge B)$，$(A\vee B)$，$(A\rightarrow B)$ 和 $(A\rightleftharpoons B)$ 都是 wff.

此外，我们把每次应用规则 i）、ii）或 iii）所得到的 wff，称为最后所构成的那个 wff 的分子合式公式。

由这个定义显然可知，下面的符号串都是 wff：

1） $(\neg(P\vee Q))$；

2） $(P\rightarrow(\neg(P\wedge Q)))$；

3） $(((P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow R))\rightarrow(P\rightarrow R))$；

4） $((\neg((P\wedge(\neg Q))\vee R))\rightarrow((R\vee P)\rightleftharpoons Q))$.

然而，下面的符号串却都不是 wff：

1） (P)；

2） $((P\vee Q)\rightarrow PQ)$；

3） $(P\rightarrow Q$；

4） $P\vee Q$.

由上面的例子可见，在一个合式公式中，有时会有很多括号。一方面，这些括号使该合式公式的结构清晰，不会有二义性；另一方面，括号太多又给合式公式的阅读和书

写带来很大的不便。为了减少一个合式公式中含有的括号，而又不会给它带来二义性，我们特作如下的约定：

1） 合式公式最外层的那对括号可以省略；

2） 规定各逻辑联结词的运算优先级次序为 $\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\rightleftharpoons$. 前面的比后面的优先级高，而优先级高的就先运算。凡符合此次序者，中间的括号就可以省略；

3） 对 wff 中同一个逻辑联结词的多次连续出现，按从左到右的次序运算。凡符合此次序者，它们中间的括号就可以省略。

例 1 对合式公式 $((\neg((P\wedge(\neg Q))\vee R))\rightarrow((R\vee P)\vee Q))$，由约定 1) 得 $(\neg((P\wedge(\neg Q))\vee R))\rightarrow((R\vee P)\vee Q)$，再由约定 2) 得 $\neg((P\wedge\neg Q)\vee R)\rightarrow(R\vee P)\vee Q$，最后由约定 3) 即得到 $\neg((P\wedge\neg Q)\vee R)\rightarrow R\vee P\vee Q$.

如果合式公式 G 中仅含有命题变元 P_1、P_2，…，P_n，则常用符号 $G(P_1, P_2, \cdots, P_n)$ 来表示它。

定义 4.2.3 设 G 是一个合式公式，P_1，P_2，…，P_n 为出现在 G 中的所有命题变元。对诸命题变元的一组真值赋值 $\widetilde{P}_1$，$\widetilde{P}_2$，…，$\widetilde{P}_n$ 称为对 G 的一个解释，记作 $\boldsymbol{I}=(\widetilde{P}_1, \widetilde{P}_2, \cdots, \widetilde{P}_n)$，其中

$$\widetilde{P}_i=\begin{cases}\boldsymbol{T}, \text{对 } P_i \text{ 赋予真值 } \boldsymbol{T}\\ \boldsymbol{F}, \text{对 } P_i \text{ 赋予真值 } \boldsymbol{F}\end{cases}\qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

并称 $G(\widetilde{P}_1, \widetilde{P}_2, \cdots, \widetilde{P}_n)$ 的真值为 $G(P_1, P_2, \cdots, P_n)$ 在 $\boldsymbol{I}$ 下的真值。

例 2 对合式公式 $P\vee \boldsymbol{F}\rightarrow Q\wedge \boldsymbol{T}$，其命题变元只有 P 和 Q. 因此它的解释只有以下四种：

$(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{F})$，$(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{T})$，$(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{F})$，$(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{T})$.

注意，对该合式公式中的原子 $\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{F}$ 是不需要特别解释的，因为它们是命题常量，分别表示真命题和假命题，其真值仍分别是 $\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{F}$.

例 3 合式公式 $P\vee Q\rightarrow R$ 共有 P，Q，R 三个命题变元。显然合式公式 $P\vee Q\rightarrow R$ 在解释 $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{T}, \boldsymbol{T})$ 下的真值为 $\boldsymbol{T}$，在解释 $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{T}, \boldsymbol{F})$ 下的真值为 $\boldsymbol{F}$.

如果合式公式 G 在解释 $\boldsymbol{I}$ 下的真值为 $\boldsymbol{T}$（或 $\boldsymbol{F}$），就称 G 在 $\boldsymbol{I}$ 下为真（或假）。

可以用真值表法确定合式公式在给定解释下的真值。要构造一个合式公式 $G(P_1, \cdots, P_n)$ 的真值表，必须考虑到诸命题变元 P_1，…，P_n 的真值赋值的各种可能的组合。因为每个 P_i（$1\leqslant i\leqslant n$）都有两种不同的真值赋值，所以共有 2^n 种不同的真值组合。因此，$G(P_1, \cdots, P_n)$ 的真值表就有 2^n 行。

下面，我们通过例子说明构成合式公式真值表的基本方法。

例 4 构造合式公式 $\neg(P\wedge Q)\rightleftharpoons\neg P\vee\neg Q$ 的真值表，

方法一 按分子公式列表

P	Q	$P\wedge Q$	$\neg(P\wedge Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P\vee\neg Q$	$\neg(P\wedge Q)\rightleftharpoons\neg P\vee\neg Q$
$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$
$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$
$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$
$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{T}$

方法二 按逻辑联结词列表

P	Q	$\neg$	$(P$	$\wedge$	$Q)$	$\rightleftarrows$	$\neg$	P	$\vee$	$\neg$	Q
F	**F**	**T**	**F**	**F**	**F**	**T**	**T**	**F**	**T**	**T**	**F**
F	**T**	**T**	**F**	**F**	**T**	**T**	**T**	**F**	**T**	**F**	**T**
T	**F**	**T**	**T**	**F**	**F**	**T**	**F**	**T**	**T**	**T**	**F**
T	**T**	**F**	**T**	**T**	**T**	**T**	**F**	**T**	**F**	**F**	**T**
		3	1	2	1	4	2	1	3	2	1

下面所注数字为运算次序。

一般地，在按分子公式列出的合式公式真值表的最右一列上，既有 T，也有 F. 也就是说，该合式公式在某些解释下为真，而在另一些解释下为假。但是，也有一些特殊结构的合式公式，在任何解释下总为真或总为假，例 4 中的合式公式就是如此，这是两类极端重要的合式公式。

定义 4.2.4 设 G 是合式公式。

i）如果 G 在任何解释下均为真，就称 G 为永真式或重言式；

ii）如果 G 在任何解释下均为假，就称 G 为永假式或矛盾式；

iii）如果 G 至少在一个解释下为真，就称 G 为可满足的。

由逻辑联结词的真值表知，$\neg P$、$P\wedge Q$、$P\vee Q$、$P\rightarrow Q$，$P\rightleftarrows Q$ 均为可满足的合式公式，但不是永真式。容易看出，$P\wedge\neg P$ 是永假式，而 $P\vee\neg P$ 是永真式。

显然，永真式的否定是永假式，永假式的否定是永真式，任何两个永真式的合取仍是永真式，任何两个永假式的析取仍是永假式。

用真值表法可以断定一个给定的合式公式是否为永真式。但当合式公式中命题变元的数目较多或公式本身较复杂时，使用真值表法就很麻烦。下面提供另外一种方法。

定义 4.2.5 设 G 是包含 n 个命题变元 P_1，P_2，…，P_n 的合式公式，P_{i_1}，P_{i_2}，…，P_{i_r}（$1\leqslant r\leqslant n$）是其中 r 个不同的命题变元，用合式公式 A_1，A_2，…、A_r 分别同时取代 G 中的 P_{i_1}，P_{i_2}，…，P_{i_r} 所得到的新合式公式称为 G 的一个代换实例。

例 5 设 G 为 $P\wedge\neg P\rightarrow Q$，用 $R\rightarrow S$ 取代 G 中的 P 得到 G 的代换实例 $(R\rightarrow S)\wedge\neg(R\rightarrow S)\rightarrow Q$. 但 $(R\rightarrow S)\wedge\neg P\rightarrow Q$ 不是 G 的代换实例，因为没有用 $R\rightarrow S$ 取代 G 中的全部 P. 用 $R\rightarrow S$ 和 $S\rightarrow P$ 分别同时取代 G 中的 P 和 Q 得到 G 的代换实例是 $(R\rightarrow S)\wedge\neg(R\rightarrow S)\rightarrow(S\rightarrow P)$，但 $(R\rightarrow S)\rightarrow(S\rightarrow P)$ 不是 G 的代换实例，因为用 $R\rightarrow S$ 取代了分子公式 $P\wedge\neg P$.

对合式公式中命题变元的取代必须同时进行才能保证得出之代换实例的唯一性。如用 $P\rightarrow Q$ 和 $Q\rightarrow P$ 同时分别取代 $P\wedge\neg P\rightarrow Q$ 中的 P 和 Q 得到代换实例 $(P\rightarrow Q)\wedge\neg(P\rightarrow Q)\rightarrow(Q\rightarrow P)$. 但先用 $P\rightarrow Q$ 取代 $P\wedge\neg P\rightarrow Q$ 中的 P 得 $(P\rightarrow Q)\wedge\neg(P\rightarrow Q)\rightarrow Q$，再用 $Q\rightarrow P$ 取代所得公式中的 Q 得 $(P\rightarrow(Q\rightarrow P))\wedge\neg(P\rightarrow(Q\rightarrow P))\rightarrow(Q\rightarrow P)$. 若先用 $Q\rightarrow P$ 取代 $P\wedge\neg P\rightarrow Q$ 中的 Q 得 $P\wedge\neg P\rightarrow(Q\rightarrow P)$，再用 $P\rightarrow Q$ 取代所得公式中的 P 得 $(P\rightarrow Q)\wedge\neg(P\rightarrow Q)\rightarrow(Q\rightarrow(P\rightarrow Q))$. 所得到的结果显然是

不同的。

定理 4.2.1（**代入定理**）

i）永真式的任何代换实例必为永真式；

ii）永假式的任何代换实例必为永假式；

iii）既非永真又非永假的合式公式之代换实例，可永真，可永假，也可既非永真又非永假。

证明 只证 i）和 iii），ii）的证明与 i）类似。

i) 设 G 是包含命题变元 P_1，P_2，…，P_n 的永真式。为叙述方便起见，不妨假设 G 的每个代换实例 G' 都是用某 n 个合式公式 A_1，A_2，…，A_n 同时分别取代 G 中的 P_1，P_2，…P_n 而得到的。因为若对 P_i 没有进行取代，我们不妨认为是用 P_i 取代了 P_i. 任取 G' 的一个解释 $\boldsymbol{I}$，设 A_1，A_2，…，A_n 在该解释下的真值分别为 $\widetilde{A}_1$，$\widetilde{A}_2$，…，$\widetilde{A}_n$，则 G' 在解释 $\boldsymbol{I}$ 下的真值即为 G 在解释（$\widetilde{A}_1$，$\widetilde{A}_2$，…，$\widetilde{A}_n$）下的真值。由 G 是永真式可知，G' 也是永真式。

iii） 设 G 是合式公式，但既不是永真式，也不是永假式，P_1、P_2，…，P_n 是 G 中包含的命题变元。因为 G 不是永真式，所以必有一个解释 $\boldsymbol{I}=$（$\widetilde{P}_1$、$\widetilde{P}_2$、…、$\widetilde{P}_n$）使 G 在 $\boldsymbol{I}$ 下的真值为 $\boldsymbol{F}$. 令

$$A_i=\begin{cases}P_i \vee \neg P_i,\text{若 }\widetilde{P}_i=\boldsymbol{T}\\ P_i \wedge \neg P_i,\text{若 }\widetilde{P}_i=\boldsymbol{F}\end{cases}\qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

则用 A_1，A_2，…，A_n 同时分别取代 G 中的 P_1，P_2、…，P_n 得到的代换实例即为永假式。因为 G 不是永假式，所以必有 G 的一个解释 $\bar{\boldsymbol{I}}=$（$\widetilde{P}'_1$，$\widetilde{P}'_2$，…，$\widetilde{P}'_n$）使 G 在 $\bar{\boldsymbol{I}}$ 下的真值为真。令

$$A'_i=\begin{cases}P_i \vee \neg P_i,\text{若 }\widetilde{P}'_i=\boldsymbol{T}\\ P_i \wedge \neg P_i,\text{若 }\widetilde{P}'_i=\boldsymbol{F}\end{cases}\qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

则用 A'_1，A'_2，…，A'_n 同时分别取代 G 中的 P_1，P_2、…、P_n 得到的代换实例即为永真式。G 本身即是它自己的既非永真又非永假的代换实例。

我们可以用代入定理判定某些合式公式是永真式或永假式。若能断定一给定公式是永真式（永假式）的代换实例，就可以断定该公式也是永真式（永假式）。同时，可以写出一个永真式（永假式）的大量代换实例，它们肯定都是永真式（永假式）。

例 6 因为合式公式 $(P\vee S)\vee\neg(R\vee S)$ 和 $(P\to S\wedge R)\vee\neg(P\to S\wedge R)$ 都是永真式 $P\vee\neg P$ 的代换实例，所以它们都是永真式。因为合式公式 $(R\vee S)\wedge\neg(R\vee S)\to(P\vee Q\to R)$ 是永真式 $P\wedge\neg P\to Q$ 的代换实例，所以它也是永真式。因为合式公式 $(R\vee S)\vee\neg(R\vee S)\to(P\to Q)\wedge\neg(P\to Q)$ 是永假式 $P\vee\neg P\to Q\wedge\neg Q$ 的代换实例，所以它是永假式。

习 题 4.2

1. 给 P 和 Q 指派真值 $\boldsymbol{T}$，给 R 和 S 指派真值 $\boldsymbol{F}$，求下列合式公式的真值：

a) $P\vee(Q\wedge R)$；

b) $(P\wedge Q\wedge R)\vee\neg((P\vee Q)\wedge(R\vee S))$；

c) $\neg(P \wedge Q) \vee \neg R \vee (((\neg P \wedge Q) \vee \neg R) \wedge S)$;

d) $(Q \rightleftharpoons \neg P) \to R \vee \neg S$;

e) $(P \rightleftharpoons R) \wedge (\neg Q \to S)$;

f) $P \vee (Q \to R \wedge \neg P) \rightleftharpoons Q \vee \neg S$.

2. 构造下列合式公式的真值表：

a) $Q \wedge (P \to Q) \to P$;

b) $\neg(P \vee (Q \wedge R)) \rightleftharpoons (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$;

c) $(P \vee Q \to Q \wedge R) \to P \wedge \neg R$;

d) $(((\neg P \to P \wedge \neg Q) \to R) \wedge Q) \vee \neg R$;

e) $P \wedge \neg Q \to \neg P \vee \neg Q$.

3. 找出使下列合式公式为真的解释：

a) $(P \wedge Q) \vee (\neg P \vee R)$;

b) $P \vee (Q \wedge \neg R \wedge (P \vee Q))$;

c) $((P \vee Q) \wedge \neg(P \vee Q)) \vee R$;

d) $P \vee R \to \neg(P \vee R) \wedge (Q \vee R)$;

e) $(R \vee Q) \wedge \neg(R \vee Q) \wedge \neg P$.

4. 确定下列合式公式哪些是永真的，永假的和可满足的：

a) $P \wedge (P \to Q) \to Q$;

b) $(P \to Q) \rightleftharpoons \neg P \vee Q$;

c) $(P \to Q) \wedge (Q \to R) \to (P \to R)$;

d) $(P \to Q) \wedge (Q \to P)$;

e) $P \vee \neg P \to Q$;

f) $(P \wedge Q \rightleftharpoons P) \rightleftharpoons (P \rightleftharpoons Q)$;

g) $P \wedge (Q \vee R) \to (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$;

h) $P \to P \vee Q$;

i) $(P \vee Q) \wedge \neg(P \vee Q) \wedge R$;

j) $\neg P \wedge \neg(P \to Q)$.

5. 产生下列代换实例：

a) 用 $P \to Q$ 和 $(P \to Q) \to R$ 同时分别代替 $((P \to Q) \to P) \to P$ 中的 P 和 Q;

b) 用 Q 和 $P \wedge \neg P$ 同时分别代换 $(P \to Q) \to (Q \to P)$ 中的 P 和 Q.

6. 指出下列合式公式中哪个合式公式是另一个合式公式的代换实例：

a) $P \to (Q \to P)$;

b) $(P \to Q) \wedge (R \to S) \wedge (P \vee R) \to Q \vee S$;

c) $Q \to ((P \to P) \to Q)$;

d) $P \to ((P \to (Q \to P)) \to P)$;

e) $(R \to S) \wedge (Q \to P) \wedge (R \vee Q) \to S \vee P$.

§4.3 等价和蕴含

定义 4.3.1 设 A 和 B 是合式公式。如果 $A \rightleftharpoons B$ 是永真式，就称 A 等价于 B，记为 $A \Leftrightarrow B$.

显然，下面的定理成立。

定理 4.3.1 若 A 和 B 是合式公式，则 $A \Leftrightarrow B$ 当且仅当在对 $A \rightleftharpoons B$ 的任何解释下，A 和 B 有相同的真值。

定理 4.3.2 若 A，B，C 是合式公式，则有

i) $A \Leftrightarrow A$;

ii) 若 $A \Leftrightarrow B$，则 $B \Leftrightarrow A$;

iii) 若 $A \Leftrightarrow B$ 且 $B \Leftrightarrow C$，则 $A \Leftrightarrow C$.

设 P，Q，R 是任意命题变元，用真值表法容易证明以下等价式。

E_1	$\neg\neg P \Leftrightarrow P$	双重否定律
E_2	$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$	交换律
E_3	$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$	
E_4	$(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$	结合律
E_5	$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$	
E_6	$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	分配律
E_7	$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	
E_8	$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$	德·摩尔根律
E_9	$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$	
E_{10}	$P \vee P \Leftrightarrow P$	幂等律
E_{11}	$P \wedge P \Leftrightarrow P$	
E_{12}	$R \vee \boldsymbol{F} \Leftrightarrow R$	同一律
E_{13}	$R \wedge \boldsymbol{T} \Leftrightarrow R$	
E_{14}	$R \vee \boldsymbol{T} \Leftrightarrow \boldsymbol{T}$	零　律
E_{15}	$R \wedge \boldsymbol{F} \Leftrightarrow \boldsymbol{F}$	
E_{16}	$P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$	
E_{17}	$\neg(P \to Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$	
E_{18}	$P \to Q \Leftrightarrow \neg Q \to \neg P$	
E_{19}	$P \to (Q \to R) \Leftrightarrow P \wedge Q \to R$	
E_{20}	$\neg(P \rightleftharpoons Q) \Leftrightarrow P \rightleftharpoons \neg Q$	
E_{21}	$P \rightleftharpoons Q \Leftrightarrow (P \to Q) \wedge (Q \to P)$	
E_{22}	$P \rightleftharpoons Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$	
E_{23}	$P \vee \neg P \Leftrightarrow \boldsymbol{T}$	
E_{24}	$P \wedge \neg P \Leftrightarrow \boldsymbol{F}$	

由代入定理知，用任意合式公式取代上述公式中的命题变元所得到的等价式仍成立。

显然，若合式公式 A 等价于一个永真式（永假式），则 A 本身也是永真式（永假式）。因此，我们可以对合式公式进行等价变换，使每步变换所得到的合式公式都与原合式公式等价，以证明一些较复杂的合式公式是永真式，或者推出新的等价式。

定理 4.3.3（置换定理） 设 A 为合式公式 G 的分子公式，B 为与 A 等价的合式公式。若 R 为用 B 取代 G 中 A 之若干出现所得之合式公式，则 $G \Leftrightarrow R$.

需要注意的是，代入和置换是有区别的：首先，代入是对命题变元进行取代，而置换是对分子公式进行取代；其次，代入时必须取代该命题变元的所有出现，置换时不一定要取代该分子公式的所有出现；第三，可用任意合式公式代入命题变元，而只能用与分子公式等价的合式公式置换该分子公式；第四，置换后得到的新公式必与原公式等价，而代入后得到的新公式不一定与原公式等价，只有当原公式是永真式或永假式时，才能保证新公式与原公式等价。

置换定理的证明比较复杂，我们在此就不证了。

例 1 试证明 $P \to (Q \to R) \Leftrightarrow P \to \neg Q \vee R \Leftrightarrow P \wedge Q \to R$.

解 $P \to \neg Q \vee R$

$\Leftrightarrow P \to (Q \to R)$ $\quad E_{16}$

$\Leftrightarrow P \wedge Q \to R$ $\quad E_{19}$

例 2 试证 $((P \vee Q) \wedge \neg(\neg P \wedge (\neg Q \vee \neg R))) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg R)$ 是永真式。

解

$((P \vee Q) \wedge \neg(\neg P \wedge (\neg Q \vee \neg R))) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg R)$

$\Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee (Q \wedge R))) \vee \neg(P \vee Q) \vee \neg(P \vee R)$ $\quad E_1, E_8, E_9$

$\Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))) \vee \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$ $\quad E_7, E_5, E_8$

$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R) \vee \neg((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$ $\quad E_4, E_{11}$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{T}$ $\quad E_{23}$

定义 4.3.2 设合式公式 A 只包含逻辑联结词 $\neg$，$\wedge$ 和 $\vee$. 在 A 中，用 $\vee$ 代替 $\wedge$，用 $\wedge$ 代替 $\vee$，用 $\boldsymbol{T}$ 代替 $\boldsymbol{F}$，用 $\boldsymbol{F}$ 代替 $\boldsymbol{T}$，所得到的合式公式称为 A 的对偶式，记为 A^*.

例如，$(P \vee Q) \wedge R$ 与 $(P \wedge Q) \vee R$ 互为对偶式。

定理 4.3.4 设 A 是仅包含命题变元 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 的合式公式，并且在 A 中只有联结词 $\neg$，$\wedge$ 和 $\vee$，则

$$\neg A(P_1,P_2,\cdots,P_n) \Leftrightarrow A^*(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n)$$

$$A(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n) \Leftrightarrow \neg A^*(P_1,P_2,\cdots,P_n)$$

证明 对公式 $\neg A(P_1, P_2, \cdots, P_n)$ 反复使用德·摩尔根律，直到把每个 $\neg$ 都移到命题变元或命题变元的否定式之前为止。在此过程中，$\wedge$ 变成 $\vee$，$\vee$ 变成 $\wedge$，$\boldsymbol{T}$ 变成 $\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{F}$ 变成 $\boldsymbol{T}$，P_i 变成 $\neg P_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，最后得到 $A^*(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n)$.

第二个等价式可由 $(A^*)^* = A$ 得出。

定理 4.3.5（对偶原理） 设 A 和 B 都是只包含逻辑联结词 $\neg$、$\wedge$ 和 $\vee$ 的合式公式。如果 $A \Leftrightarrow B$，则 $A^* \Leftrightarrow B^*$.

证明 设 P_1，P_2，…，P_n 为出现在 A 或 B 中的所有命题变元。因为 $A \Leftrightarrow B$，故

$$A(P_1,P_2,\cdots,P_n) \rightleftharpoons B(P_1,P_2,\cdots,P_n)$$

是永真式，由代入定理知

$$A(\neg P_1,\neg P_2,\cdots,\neg P_n) \rightleftharpoons B(\neg P_1,\neg P_2,\cdots,\neg P_n)$$

也是永真式，即

$$A(\neg P_1,\neg P_2,\cdots,\neg P_n) \Leftrightarrow B(\neg P_1,\neg P_2,\cdots,\neg P_n)$$

由定理 4.3.4 知

$$A(\neg P_1,\neg P_2,\cdots,\neg P_n) \Leftrightarrow \neg A^*(P_1,P_2,\cdots,P_n)$$

$$B(\neg P_1,\neg P_2,\cdots,\neg P_n) \Leftrightarrow \neg B^*(P_1,P_2,\cdots,P_n)$$

从而由定理 4.3.2 得

$$\neg A^*(P_1,P_2,\cdots,P_n) \Leftrightarrow \neg B^*(P_1,P_2,\cdots,P_n)$$

所以 $A^* \Leftrightarrow B^*$.

例 3 证明

a) $\neg(P \wedge Q) \rightarrow (\neg P \vee (\neg P \vee Q)) \Leftrightarrow \neg P \vee Q$

b) $(P \vee Q) \wedge (\neg P \wedge (\neg P \wedge Q)) \Leftrightarrow \neg P \wedge Q$

解 $\neg(P \wedge Q) \rightarrow (\neg P \vee (\neg P \vee Q))$

$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \vee (\neg P \vee Q))$

$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee \neg P \vee Q$

$\Leftrightarrow (P \vee \neg P \vee Q) \wedge (Q \vee \neg P \vee Q)$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{T} \wedge (\neg P \vee Q)$

$\Leftrightarrow \neg P \vee Q$

因为 $(P \wedge Q) \vee (\neg P \vee (\neg P \vee Q)) \Leftrightarrow \neg P \vee Q$，所以再由对偶原理得

$$(P \vee Q) \wedge (\neg P \wedge (\neg P \wedge Q)) \Leftrightarrow \neg P \wedge Q.$$

定义 4.3.3 设 A 和 B 是合式公式。若 $A \rightarrow B$ 是永真式；则称 A 蕴含 B，记作 $A \Rightarrow B$.

蕴含 $\Rightarrow$ 和等价 $\Leftrightarrow$ 都不是逻辑联结词，$A \Rightarrow B$ 和 $A \Leftrightarrow B$ 也都不是合式公式。$A \Rightarrow B$ 表明 $A \rightarrow B$ 是永真式；$A \Leftrightarrow B$ 表明 $A \rightleftharpoons B$ 是永真式。

定理 4.3.6 设 A 和 B 是合式公式，$A \Leftrightarrow B$ 当且仅当 $A \Rightarrow B$ 且 $B \Rightarrow A$.

这可由等价式 E_{21} 直接推出。

定理 4.3.7 设 A，B，C 是合式公式。如果 $A \Rightarrow B$ 且 $B \Rightarrow C$，则 $A \Rightarrow C$.

证明 设 $\boldsymbol{I}$ 是对 A，B，C 的任意公共解释。如果 A 在解释 $\boldsymbol{I}$ 下取真值 $\boldsymbol{T}$，则由 $A \Rightarrow B$ 知 B 在解释 $\boldsymbol{I}$ 下也取真值 $\boldsymbol{T}$，再由 $B \Rightarrow C$ 知 C 在解释 $\boldsymbol{I}$ 下仍取真值 $\boldsymbol{T}$。这表明 $A \Rightarrow C$.

我们可以用真值表方法判断蕴含式是否成立，列出 $A \rightarrow B$ 的真值表，如果 $A \rightarrow B$ 在一切解释下均为真，就说明 $A \Rightarrow B$.

也可以不列出整个真值表，对于 $A \rightarrow B$ 的任意解释，只要在该解释下 A 取真值 $\boldsymbol{T}$，可

证明 B 在同一解释下也必然取真值 $\boldsymbol{T}$；或者只要 B 在该解释下取真值 $\boldsymbol{F}$，可证明 A 在同一解释下也必然取真值 $\boldsymbol{F}$．这也表明 $A \Rightarrow B$.

例 4 证明 $\neg Q \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg P$

解 若 $\neg Q \wedge (P \rightarrow Q)$ 为 $\boldsymbol{T}$，则 $\neg Q$ 与 $P \rightarrow Q$ 均为 $\boldsymbol{T}$，因此 Q 和 P 均为 $\boldsymbol{F}$，所以 $\neg P$ 为 $\boldsymbol{T}$.

设 P，Q，R 为任意命题变元，利用上述方法容易验证以下的蕴含式。

I_1	$P \wedge Q \Rightarrow P$	化简式
I_2	$P \wedge Q \Rightarrow Q$	
I_3	$P \Rightarrow P \vee Q$	附加式
I_4	$Q \Rightarrow P \vee Q$	
I_5	$\neg P \Rightarrow P \rightarrow Q$	
I_6	$Q \Rightarrow P \rightarrow Q$	
I_7	$\neg (P \rightarrow Q) \Rightarrow P$	
I_8	$\neg (P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg Q$	
I_9	$P \rightarrow Q \Rightarrow P \wedge R \rightarrow Q \wedge R$	
I_{10}	$\neg P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow Q$	析取三段论
I_{11}	$P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$	假言推论
I_{12}	$\neg Q \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg P$	拒取式
I_{13}	$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow P \rightarrow R$	假言三段论
I_{14}	$(P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow R$	二难推论

由代入定理知道，用任意合式公式取代上述蕴含式中的命题变元，所得到的蕴含式仍成立。

不难证明，如果永真式蕴含一个合式公式，则该合式公式必为永真式；如果一个合式公式蕴含永假式，则该合式公式必为永假式。

定 理4.3.8 设 $H_1, H_2, \cdots, H_m, P$ 和 Q 都是合式公式。如果 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m \wedge P \Rightarrow Q$，则

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m \Rightarrow P \rightarrow Q.$$

证明 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m \wedge P \Rightarrow Q$ 意味着

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m \wedge P \rightarrow Q$$

是永真式，但由 E_{19} 得

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m \wedge P \rightarrow Q \Leftrightarrow H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m \rightarrow (P \rightarrow Q)$$

故

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m \rightarrow (P \rightarrow Q)$$

也是永真式，亦即

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m \Rightarrow P \rightarrow Q$$

习 题 4.3

1. 利用真值表证明下述等价式：

a) $P \rightarrow (Q \rightarrow P) \Leftrightarrow \neg P \rightarrow (P \rightarrow Q)$

b) $(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow Q) \Leftrightarrow P \vee R \rightarrow Q$

c) $\neg (P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge \neg (P \wedge Q) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$

d) $\neg (P \rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$

2. 使用基本等价式证明下述等价式，并由对偶原理得出新的等价式。

a) $\neg (\neg P \vee \neg Q) \vee \neg (\neg P \vee Q) \Leftrightarrow P$

b) $(P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q) \Leftrightarrow \neg (\neg P \vee Q)$

c) $Q \vee \neg ((\neg P \vee Q) \wedge P) \Leftrightarrow \boldsymbol{T}$

3. 证明下述合式公式是永真式：

a) $(P \wedge Q \rightarrow P) \Leftrightarrow \boldsymbol{T}$

b) $\neg (\neg (P \vee Q) \rightarrow \neg P) \Leftrightarrow \boldsymbol{F}$

c) $(Q \rightarrow P) \wedge (\neg P \rightarrow Q) \Leftrightarrow P$

d) $(P \rightarrow \neg P) \wedge (\neg P \rightarrow P) \Leftrightarrow \boldsymbol{F}$

4. 证明下列蕴含式：

a) $P \wedge Q \Rightarrow P \rightarrow Q$

b) $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \Rightarrow (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$

c) $P \rightarrow Q \Rightarrow P \rightarrow P \wedge Q$

d) $(P \rightarrow Q) \rightarrow Q \Rightarrow P \vee Q$

e) $(P \vee \neg P \rightarrow Q) \rightarrow (P \vee \neg P \rightarrow R) \Rightarrow Q \rightarrow R$

f) $(Q \rightarrow P \wedge \neg P) \rightarrow (R \rightarrow P \wedge \neg P) \Rightarrow R \rightarrow Q$

5. 对于下列合式公式，找出与它们等价的只包含联结词 $\wedge$ 和 $\neg$ 的尽可能简单的合式公式。

a) $P \vee Q \vee \neg R$

b) $P \vee (\neg Q \wedge R \rightarrow P)$

c) $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$

6. 对于下列合式公式，找出与它们等价的只包含联结词 $\vee$ 和 $\neg$ 的尽可能简单的合式公式。

a) $P \wedge Q \wedge \neg P$

b) $(P \rightarrow Q \vee \neg R) \wedge \neg P \wedge Q$

c) $\neg P \wedge \neg Q \wedge (\neg R \rightarrow P)$

§4.4 范式和判定问题

通过有限步骤确定给定的合式公式是永真的、永假的或可满足的，这类问题称为命题演算的判定问题。

通常，经过有限步骤就能构成一个合式公式的真值表，因而命题演算的判定问题总是可解的。当命题变元的数目较大时，用真值表法相当麻烦，所以必须通过另外的途径来解决判定问题，即把合式公式化为某种标准型（范式）。

定义 4.4.1 设 P_1，P_2，…，P_n 为互不相同的命题变元，分别称 $\tilde{P}_1 \vee \tilde{P}_2 \vee \cdots \vee \tilde{P}_n$ 及 $\tilde{P}_1 \wedge \tilde{P}_2 \wedge \cdots \wedge \tilde{P}_n$ 为关于 P_1，P_2，…，P_n 的极大项和极小项，其中 $\tilde{P}_i$ 为 P_i 或 $\neg P_i$（$i=1$，2，…，n）.

由此定义可知，在极大项和极小项中，每个命题变元与其否定这二者之中，恰有一个出现且仅出现一次，并且它们出现的次序与命题变元的次序相同。

在极大项 $\tilde{P}_1 \vee \tilde{P}_2 \vee \cdots \vee \tilde{P}_n$ 中，每个 $\tilde{P}_i$ 都恰有两种不同的选择，因此关于 P_1，P_2，…，P_n 的不同极大项共有 2^n 个。对于极大项 $\tilde{P}_1 \vee \tilde{P}_2 \vee \cdots \vee \tilde{P}_n$，只有一种解释 $\boldsymbol{I}=(\tilde{\tilde{P}}_1, \tilde{\tilde{P}}_2, \cdots, \tilde{\tilde{P}}_n)$ 使其为假，其中

$$\tilde{\tilde{P}}_i = \begin{cases} \boldsymbol{T}, & \text{若 } \tilde{P}_i = \neg P_i \\ \boldsymbol{F}, & \text{若 } \tilde{P}_i = P_i \end{cases} \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

故任何两个极大项都不等价，故所有 2^n 个极大项的合取必为永假式。同样，关于 P_1，P_2，…，P_n 的不同极小项共有 2^n 个，任何两个极小项都不等价，故所有 2^n 个极小项的析取必为永真式。

定义 4.4.2 设 A 为包含命题变元 P_1，P_2，…，P_n 的合式公式。如果合式公式 B 与 A 等价，并且 B 是若干个不同的关于 P_1，P_2，…，P_n 的极大（小）项的合（析）取，则称 B 为 A 的主合（析）取范式。主合取范式和主析取范式统称为主范式。

定理 4.4.1 设 A 为任意合式公式。

i） 如果 A 不是永真式，则 A 必有主合取范式；

ii） 如果 A 不是永假式，则 A 必有主析取范式。

证明 ii）的证明与 i）类似，只证 i）.

因为 A 不是永真式，则必有解释使其为假。对于每一个使 A 为假的解释 $\boldsymbol{I}$，都存在唯一的极大项，使其在解释 $\boldsymbol{I}$ 下取真值 $\boldsymbol{F}$，这些极大项的合取即为 A 的主合取范式。

由定理的证明可以看出，如果不考虑极大项的排列顺序，给定合式公式的主合取范式若存在必唯一。同样，如果不考虑极小项的排列顺序，给定合式公式的主析取范式若存在必唯一。我们为极大项和极小项的排列规定一个顺序。对于每个极大项 $\tilde{P}_1 \vee \tilde{P}_2 \vee \cdots \vee \tilde{P}_n$，使其对应一个二进制整数 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$，其中

$$\alpha_i = \begin{cases} 0, & \text{若 } \tilde{P}_i \text{ 为 } P_i \\ 1, & \text{若 } \tilde{P}_i \text{ 为 } \neg P_i \end{cases}$$

并且规定，对应的二进制数小的极大项排在前面。如 $P_1 \vee P_2 \vee \neg P_3$ 和 $\neg P_1 \vee P_2 \vee P_3$ 分别对应于二进制数 001 和 100. 因为 001<100，所以就把 $P_1 \vee P_2 \vee \neg P_3$ 排在 $\neg P_1 \vee P_2 \vee P_3$ 的前面。对于每个极小项 $\tilde{P}_1 \wedge \tilde{P}_2 \wedge \cdots \wedge \tilde{P}_n$，使其对应一个二进制整数 $\beta_1\beta_2\cdots\beta_n$，其中

$$\beta_i = \begin{cases} 0, & \text{若 } \tilde{P}_i \text{ 为 } \neg P_i \\ 1, & \text{若 } \tilde{P}_i \text{ 为 } P_i \end{cases}$$

P	Q	R	A
F	F	F	T
F	F	T	F
F	T	F	T
F	T	T	T
T	F	F	F
T	F	T	T
T	T	F	F
T	T	T	F

也同样规定，对应二进制数小的极小项排在前面。如 $P_1 \wedge P_2 \wedge \neg P_3$ 和 $\neg P_1 \wedge P_2 \wedge P_3$ 分别对应于二进制数 110 和 011，因为 011<110，所以就把 $P_1 \wedge P_2 \wedge \neg P_3$ 排在 $\neg P_1 \wedge P_2 \wedge P_3$ 的后面。为了使每个合式公式都有主合取范式和主析取范式，我们不妨规定永真式的主合取范式为 T，永假式的主析取范式为 F. 有了上述规定，每个合式公式都有唯一的主合取范式和主析取范式。

例 1 左表给出了合式公式 A 的真值表，试求 A 的主合取范式和主析取范式。

解 对于 A 列上的每个 F，选取相应的极大项，便得到 A 的主合取范式

$$(P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee \neg R$$

对于 A 列上的每个 T，选取相应的极小项，便得到 A 的主析取范式

$$(\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R$$

我们也可以不构造合式公式 A 的真值表而求出 A 的主范式，下面是求主合取范式的做法：

1） 利用 E_{16} 和 E_{22} 删去 $\rightarrow$ 和 $\rightleftharpoons$ 在 A 中的所有出现而得 A_1；

2） 利用德·摩尔根律将 A_1 中的 $\neg$ 内移到原子之前，并用 E_1 使每个原子之前至多仅有一个 $\neg$；

3） 再用分配律将 2）的结果化为若干个析取式的合取，其中每个析取式的因子皆为原子或原子的否定；

4） 对于 3）的结果中的每个析取式 B，若命题变元 P 在 B 中不出现，利用

$$(B \vee P) \wedge (B \vee \neg P)$$

取代 B，直到每个 B 都变为极大项为止。

给定合式公式的主析取范式也可以用类似的方法求得，这里就不叙述了，留作练习。

例 2 求合式公式 $P \rightarrow (P \rightarrow Q) \wedge \neg(\neg Q \vee \neg P)$ 的主范式。

解 先求主合取范式，

$$\begin{aligned}
& P \rightarrow (P \rightarrow Q) \wedge \neg(\neg Q \vee \neg P) \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \vee ((\neg P \vee Q) \wedge \neg(\neg Q \vee \neg P)) \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \vee ((\neg P \vee Q) \wedge (Q \wedge P)) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \vee \neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee P) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \vee Q)
\end{aligned}$$

再求主析取范式，

$$\begin{aligned}
& P \rightarrow (P \rightarrow Q) \wedge \neg(\neg Q \vee \neg P) \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \vee Q \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \wedge (Q \vee \neg Q)) \vee ((P \vee \neg P) \wedge Q) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q)
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow(\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge Q)$$

在例2中，给定的合式公式包含2个命题变元，它的主合取范式有1个极大项，而主析取范式有3个极小项，在主范式中共有2^2个极大项和极小项，并且在主合取范式和主析取范式之间存在某种联系。如果已知合式公式B的主合（析）取范式，因为在B的主合（析）取范式中没有出现的极大（小）项必出现在$\neg B$的主合（析）取范式中，因而可求得$\neg B$的主合（析）取范式。根据定理4.3.4，在$\neg B$的主合（析）取范式的对偶式中，用命题变元代替命题变元的否定，用命题变元的否定代替命题变元，就得到B的主析（合）取范式。

例3 设$S=(\neg P \rightarrow R) \wedge (Q \rightleftarrows P)$，试求$S$的主范式。

解 $S \Leftrightarrow (\neg\neg P \vee R) \wedge (Q \rightarrow P) \wedge (P \rightarrow Q)$

$\Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (\neg Q \vee P) \wedge (\neg P \vee Q)$

$\Leftrightarrow (P \vee R \vee Q) \wedge (P \vee R \vee \neg Q) \wedge (\neg Q \vee P \vee R) \wedge (\neg Q \vee P \vee \neg R)$
$\wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R)$

$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R)$
$\wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R)$

最后得到的即是S的主合取范式。$\neg S$的主合取范式为

$$(P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee \neg R)$$

S的主析取范式为

$$(\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$$

可以利用主范式确定两合式公式是否等价。

例4 用主范式证明$(P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow P \vee Q \rightarrow R$

因为 $(P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R)$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee R \vee Q) \wedge (\neg P \vee R \vee \neg Q) \wedge (\neg Q \vee R \vee P)$
$\wedge (\neg Q \vee R \vee \neg P)$

$\Leftrightarrow (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$

且

$P \vee Q \rightarrow R \Leftrightarrow \neg(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q) \vee R$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R)$

$\Leftrightarrow (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$

所以

$$(P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow P \vee Q \rightarrow R.$$

习 题 4.4

1. 求下列合式公式的主范式：

a) $\neg P \wedge Q \rightarrow R$

b) $P \to (Q \land R \to S)$

c) $\neg(P \lor \neg Q) \land (S \to T)$

d) $(P \to Q) \to R$

e) $\neg P \lor \neg Q \to (P \rightleftarrows \neg Q)$

f) $P \lor (\neg P \to Q \lor (\neg Q \to R))$

g) $(P \to Q \land R) \land (\neg P \to \neg Q \land \neg R)$

h) $(P \land \neg Q \land S) \lor (\neg P \land Q \land R)$

2. 用主范式证明下列等价式：

a) $(P \to Q) \land (P \to R) \Leftrightarrow P \to Q \land R$

b) $(P \to Q) \to P \land Q \Leftrightarrow (\neg P \to P) \land (Q \to P)$

c) $P \land Q \land (\neg P \lor \neg Q) \Leftrightarrow \neg P \land \neg Q \land (P \lor Q)$

d) $P \lor (P \to P \land Q) \Leftrightarrow \neg P \lor \neg Q \lor (P \land Q)$

3. 是否有这样的合式公式，它既是主合取范式，又是主析取范式？如果有，举出一例。

4. 给出求合式公式主析取范式的方法。

第五章　谓词逻辑

在命题逻辑中，我们通过把命题分解为简单命题的方法，揭示出了一些有效的推理过程。但因在命题逻辑中，总是把简单命题作为基本单位，即一个不能再分割的整体，所以使许多常见的推理过程不能包括在命题逻辑中。例如：

所有的人都是要死的，　(1)

因为苏格拉底是人，　(2)

所以苏格拉底是要死的。　(3)

这是著名的苏格拉底三段论。因为它的两个前提(1)和(2)及结论(3)都没有联结词，所以都是简单命题。如果用命题逻辑的工具来处理，只好令

P：所有的人都是要死的。

Q：苏格拉底是人。

R：苏格拉底是要死的。

则苏格拉底三段论的推理形式是

$$P \wedge Q \Rightarrow R$$

这显然不是命题逻辑中的有效推理。但是，苏格拉底三段论是正确的，推理是有效的。这就说明，苏格拉底三段论的正确性在命题逻辑中没有得到反映，因为它的正确性决定于它所含有的谓词和量词的特征。由此可见，如果不对简单命题再作更进一步的分析，从而揭示出前提和结论在形式结构方面的联系，就无法认识这种推理的有效性。

对简单命题再加以分析，分离出它的主词和谓词，并考虑到一般和个别，全称和存在，总结出它的形式结构，然后研究这些形式结构的逻辑性质，以及形式结构间的逻辑联系，从而导出有关它们的逻辑形式和规律。这部分逻辑形式和规律，就构成了所谓的谓词逻辑。

这章只是谓词逻辑的一个简短的引论，内容包括谓词逻辑的基本概念、合式公式和永真式等。

§5.1　变元、谓词和量词

在这节里，我们介绍谓词逻辑的基本概念和符号。关于命题、命题的真值、命题词、命题变元和命题常量，以及逻辑联结词 $\neg$，$\vee$，$\wedge$，$\rightarrow$ 和 $\rightleftharpoons$ 等，其含意和在命题逻辑中的基本相同，这里就不重述了。下面只介绍谓词逻辑中新出现的基本概念和符号，其中最主要的是变元、函词、谓词和量词。

例 1　考察下面的命题：

1) 张华是学生。

2) 李明是学生。

命题1)和2)的思维对象分别是“张华”和“李明”,谓语是“是学生”,而且是表示思维对象的性质的,若令

a:张　华

b:李　明

$H(x)$:x 是学生

则命题1)可表示为 $H(a)$,命题2)可表示为 $H(b)$。这种表示充分显示出了命题1)和命题2)具有相同的谓语这一特征。

通常,我们总是在一定的范围之内讨论问题的,而且任何理论也都有一个它所涉及的全部对象之非空集合,称为论域,并常用符号 D 表示。论域 D 中的元素称为个体,表示任意个体的形式符号称为个体变元,表示某一个个体的形式符号称为个体常元或个体常量。

一般,我们使用较前面的小写拉丁字母如 a,b 和 c 等表示个体常元,而用较后面的小写拉丁字母如 x,y 和 z 等表示个体变元。

在例 1 中,论域 D 可取为包括“张华”和“李明”的任何集合,“张华”和“李明”都是其中的个体,而 a 和 b 都是个体常元(它们可能不在论域 D 中)。

例 2　考察下面的命题:

张华的妹妹爱李明。

此命题的思维对象是“张华的妹妹”(不是“张华”!)和“李明”,谓语是“爱”,而且是表示思维对象之间的关系的。若令

a : 张　华

b : 李　明

$f(x)$: x 的妹妹

$L(x,y)$: x 爱 y

则该命题可表示为 $L(f(a),b)$.

在这个例子中,论域 D 可取为包括“张华”、“李明”和“张华的妹妹”的任何集合,“张华”、“李明”和“张华的妹妹”都是其中的个体,而 a 和 b 都是个体常元。$f(a)$ 虽然表示了“张华的妹妹”这个个体,但却不是个体常元,当然更不是个体变元,我们称之为“项”。

注意,符号 f 和 L 不同,和例 1 中的 H 也不同,它表示论域 D 上一个一元函数。

若 D 为论域且 $n \in I_+$,则称从 D^n 到 D 的函数为 D 上的 n 元个体函数,表示 n 元个体函数的形式符号称为 n 元函词。在不会引起混淆时,可省去“n 元”二字。函词常用小写拉丁字母 f,g 和 h 等表示,而 n 元函词则用 $f^{(n)}$,$g^{(n)}$ 和 $h^{(n)}$ 等表示。

例 2 中的 f 就是一元函词。

在逻辑学中,把表示个体即思维对象的属性及其关系的形式符号称为谓词。一元谓词多表示个体的性质,n 元谓词多表示个体间的 n 元关系。在不会引起混淆时,常省去“n 元”二字。谓词常用大写拉丁字母 P,Q 和 R 等表示,而 n 元谓词则常用 $P^{(n)}$,$Q^{(n)}$ 和 $R^{(n)}$ 等表示。

例 1 中的 H 为一元谓词,例 2 中的 L 为二元谓词。

实际上，许多命题都还涉及到个体的数量关系，如“所有的人都是要死的”中之“所有的”、“有些人爱吃甜食”中的“有些”。在逻辑学中，称表示个体数量的形式符号为量词。最常用的量词有两个，即全称量词$\forall$ 和存在量词$\exists$.

若x为个体变元，则称$(\forall x)$为关于x的全称量词，读作“任何x”、“凡x”或“所有x”；称$(\exists x)$为关于x的存在量词，读作“有x”或“存在x”

若 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 都是个体变元，则常把 $(\forall x_1)(\forall x_2)\cdots(\forall x_n)$ 和 $(\exists x_1)(\exists x_2)\cdots(\exists x_n)$ 分别简写为$(\forall x_1\cdots x_n)$ 和$(\exists x_1\cdots x_n)$.

例 3 考察下面的命题：

有子则有父，

注意，这个命题的本意是：如果有儿子，则有父亲，因此，当令

$S(x)$ ：x 是儿子

$f(x)$ ：x 是父亲

则所给命题可表示为

$$(\exists x)S(x)\to(\exists x)F(x)$$

由此例子可知，要想把一个命题正确地表示出来，必须认真仔细地分析其含义。

对一个给定的命题，用上面介绍的形式符号(个体常元、个体变元、函词、谓词和量词)及逻辑联结词($\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\to$ 和 $\rightleftharpoons$) 正确地表示出来，称为对它的符号化。

例 4 把下列命题符号化：

1） 所有自然数都等于 1；

2） 有实数小于 0；

3） 任何实数的平方都不小于 0。

我们如果在实数范围内来考虑问题，则可令

$N(x)$ ：x 是自然数

$E(x,y)$ ：x 等于 y

$P(x,y)$ ：x 小于 y

$f(x)$ ：x 的平方

这时有

1） $(\forall x)(N(x)\to E(x,1))$.

2） $(\exists x)P(x,0)$.

3） $(\forall x)\neg P(f(x),0)$.

假如我们改在复数范围内来考虑，上面对命题 2) 和 3) 的符号化就不对了，还要引入一个一元谓词R：

$R(x)$ ：x 是实数

这时命题 2) 和 3) 就分别符号化为

2'） $(\exists x)(R(x)\wedge P(x,0))$.

3'） $(\forall x)(R(x)\to\neg P(f(x),0))$.

只要我们考虑的个体包括实数，上面的符号化都正确，因而是比较理想的。

从例 4 可以看出，当论域D含有给定命题未允许的个体时，必须引进一个如同谓词R

那样的特性谓词，它限定该个体为给定命题允许的个体。同时，在全称量词约束下要用逻辑联结词"→"，在存在量词约束下要用逻辑联结词"∧"。复杂命题往往由多个支命题组成，而各支命题所允许的个体又不尽不致，通常是取全域作为论域，且必须引进特性谓词。

对命题进行符号化，其关键是词性翻译。只要对自然语言加以深入分析，就可以获得一些大致的准则：

1） 名词：专有名词多译为个体常元，如例 1 中的"张华"和"李明"；普通名词一般译为谓词，如例 1 中的"学生"和例 4 中的"自然数"。当被名词所有格或物主代词修饰时，多译为函词，如"张华的妹妹"中的"妹妹"和"我的书"中的"书"等。

2） 代词：无论是人称代词，如"你"，"我"和"他（她）"等，还是指示代词，如"这个"和"那个"等多译为个体常元。

3） 形容词：多译为谓词，极少数译为函词。如"大"、"小"和"漂亮"等。

4） 动词：多译为谓词。如例 2 中的"爱"。

5） 数量词：表示全体概念的数量词，如"每个"、"任何"、"所有"和"全部"等，译为全称量词，表示部分概念的数量词，如"有"、"存在"、"若干"和"某些"等，译为存在量词。

6） 副词和前置词与其它词类合并，不再单独进行分析。

7） 连词一般译为逻辑联结词：

i) $\neg$：不、非、无、否、不是、并非、……

ii) $\vee$：或、或者、……

iii) $\wedge$：和、与、且、……

iv) $\to$：若 …… 则 ……、如果 …… 那么 ……、……

v) $\rightleftharpoons$：当且仅当、充分必要、充要、即、……

说明：

1） 以上所讲的词性，系指在具体语句中的实际作用而言；

2） 以上所列准则，只是在符号化时大体上应遵循的原则，不可绝对化；

3） 符号化时一般达到逐词翻译即可。

例 5 把下列命题符号化：

1） 并非所有的书大家都喜欢；

2） 这家店供应一切简易用具；

3） $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

解 1）命题的词性关系如下：

并非	所有的	书	大家都	喜欢
连词	数量词	名词	数量词	动词

注意，"大家"实际上是表示"人人"或"每个人"的意思。若令

$Book(x)$：x 是书

$Man(x)$：x 是人

$Love(x,y)$：x 喜欢 y

则命题 1）可符号化为

$$\neg(\forall x)(Book(x) \rightarrow (\forall y)(Man(y) \rightarrow love(y,x)))$$

其中“$Book$”和“Man”都是特性谓词。

2) 命题的词性关系如下：

这家	店	供应	一切	简易	用具
指示代词	名词	动词	数量词	形容词	名词

因此，若令

a：这家

$Shop(x)$：x 是店

$Simple(x)$：x 是简单的

$Tool(x)$：x 是用具

$Supply(x,y)$：x 供应 y

则命题 2) 可符号化为

$$Shop(a) \wedge (\forall x)(Simple(x) \wedge Tool(x) \rightarrow Supply(a,x)).$$

3) 命题 3) 是如下的数学命题：

“对任意正数 $\varepsilon > 0$，皆有正数 $\delta > 0$，当 $0 < |x-a| < \delta$ 时，都有 $|f(x)-b| < \varepsilon$.”

若令

$Real(x)$：x 是实数

$Bigger(x,y)$：x 大于 y 即 $x > y$

$Minus(x,y)$：x 减 y 的差即 $x - y$

$ABS(x)$：x 的绝对值即 $|x|$

则命题 3) 可符号化为

$$\begin{aligned}&(\forall \varepsilon)(Real(\varepsilon) \wedge Bigger(\varepsilon,0)\\ &\quad \rightarrow (\exists \delta)(Real(\delta) \wedge Bigger(\delta,0)\\ &\qquad \wedge (\forall x)(Real(x) \wedge Bigger(ABS(Minus(x,a)),0)\\ &\qquad \wedge Bigger(\delta,ABS(Minus(x,a)))\\ &\quad \rightarrow Bigger(\varepsilon,ABS(Minus(f(x),b)))))).\end{aligned}$$

对数学命题符号化时要注意概念的数学定义。

例 6 把下例命题符号化：

他和她讨论问题。

解 注意，这里的“和”并不能简单地译为逻辑联结词“$\wedge$”，因为该命题并不是指“他讨论问题，并且她讨论问题”。而且，命题中的“问题”也是指“某个（或某些）问题”。于是，可令

a：他

b：她

$Problem(x)$：x 是问题

$Discuss(x,y,z)$：x 和 y 讨论 z

则命题可符号化为 $(\exists x)(Problem(x) \wedge Discuss(a,b,x))$.

例 7 把下列命题符号化：

1） 我去电影院，仅当电影院上映大片；

2） 他在办公室或家里。

解 1） 命题 1）实际上是指"如果我去电影院，则电影院正上映大片"。若令

a：我

$Cinema(x)$：x 是电影院

$Good(x)$：x 是大片

$Go(x,y)$：x 去 y

$Play(x,y)$：x 正上映 y

则命题 1）可符号化为

$$(\forall x)(Cinema(x) \land Go(a,x) \to (\exists y)(Good(y) \land Play(x,y))).$$

2） 该命题中的"或"实际上是不相容"或"，因为他不可能同时在办公室和家里。而且，"办公室"是指"他的办公室"，"家"是指"他的家"。若令

a：他

$Office(x)$：x 的办公室

$Home(x)$：x 的家

$At(x,y)$：x 在 y

则命题 2）可符号化为

$$(At(a,Office(a)) \lor At(a,Home(a))) \land \neg(At(a,Office(a)) \land At(a,Home(a))).$$

习　题　5.1

1. 把以下命题符号化：

a） 这只小花猫逮住了那只大老鼠；

b） 张小明和张亮是堂兄弟；

c） 如果人都爱美，则漂亮衣服有销路；

d） 每个自然数都有唯一的后继；

e） 没有以 0 为后继的自然数；

f） 他碰见了一个作家或学者；

g） 他或她必有一个可以做这件事。

2. 至少使用一个量词将下列命题符号化：

a） 存在唯一的偶素数；

b） 没有既是奇数又是偶数的数；

c） 所有的汽车都比某些汽车快；

d） 某些汽车比所有的火车都慢，但至少有一列火车比所有的汽车都快；

e） 如果明天下雨，则某些人将被淋湿。

3. 设个体域是所有算术命题的集合。

$P(x)$：x 是可证明的

$T(x)$：x 是真的

$$D(x,y,z):z=x\vee y$$

将下列命题用汉语表述出来：

$a)$ $(\forall x)(P(x)\to T(x))$；

$b)$ $(\exists x)(T(x)\wedge \neg P(x))$；

$c)$ $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(D(x,y,z)\wedge P(z)\to P(x)\vee P(y))$；

$d)$ $(\forall x)(T(x)\to(\forall y)(\forall z)(D(x,y,z)\to T(z)))$.

4．　将下列数学命题符号化：

$a)$　对任意整数 x,y 和 z，$x<z$ 是 $x<y$ 且 $y<z$ 的必要条件；

$b)$　对任意整数 x，若 $x=2$，则 $3\cdot x=6$；反之亦然；

$c)$　自然数集 N 的皮亚诺公理；

$d)$　P 是集合 A 上的全序关系；

$e)$　Π 是集合 A 的划分；

$f)$　f 是从集合 A 到集合 B 的内射(满射，双射)。

§5.2　合式公式

在第四章，我们已讨论了命题逻辑的合式公式。现在，我们要把它推广到谓词逻辑中来，并仍用 wff 表示。

对命题变元，我们用小写的拉丁字母 p,q 和 r 等表示。而对个体词、函词、谓词及命题常量等，仍沿用以前约定的形式符号。

定义 5.2.1　项为按以下形成规则构成的有穷符号串：

i) 每个个体常元是一个项；

ii) 每个个体变元是一个项；

iii) 如果 f 是一个 n 元($n\geqslant 1$) 函词且 $t_1,\cdots,t_n$ 都是项，则 $f(t_1,\cdots,t_n)$ 也是一个项。

定义 5.2.2　原子为按以下形成规则构成的有穷符号串：

i) 每个命题词是一个原子；

ii) 若 P 为 n 元($n\geqslant 1$) 谓词且 $t_1,\cdots,t_n$ 都是项，则 $P(t_1,\cdots,t_n)$ 是一个原子。

原子用符号 atf 表示。

定义 5.2.3　合式公式为按以下形成规则构成的有穷符号串：

i) 每个原子是一个 wff；

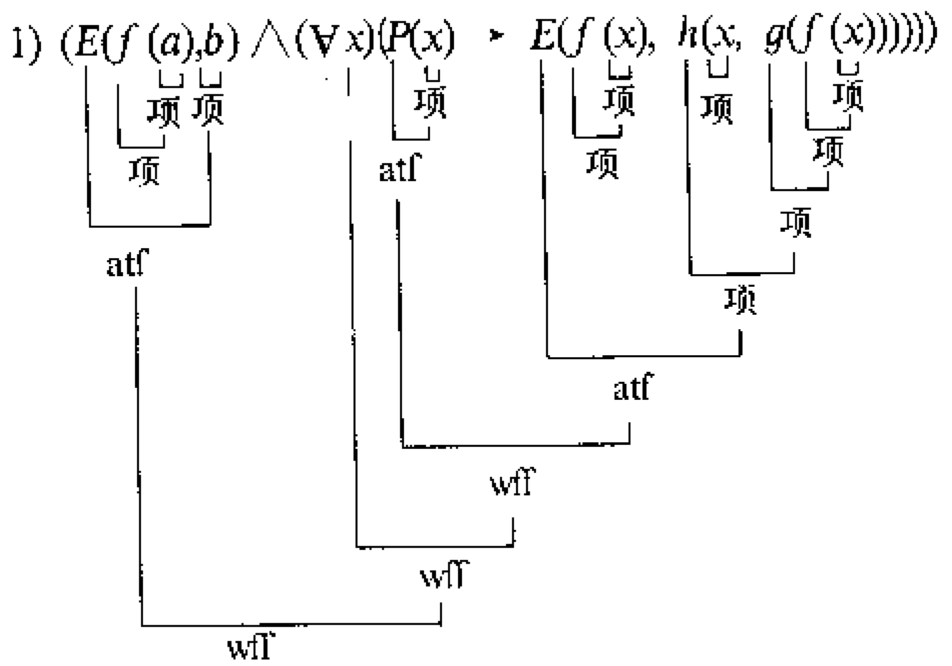
ii) 如果 A 是 wff，则$(\neg A)$ 是 wff；

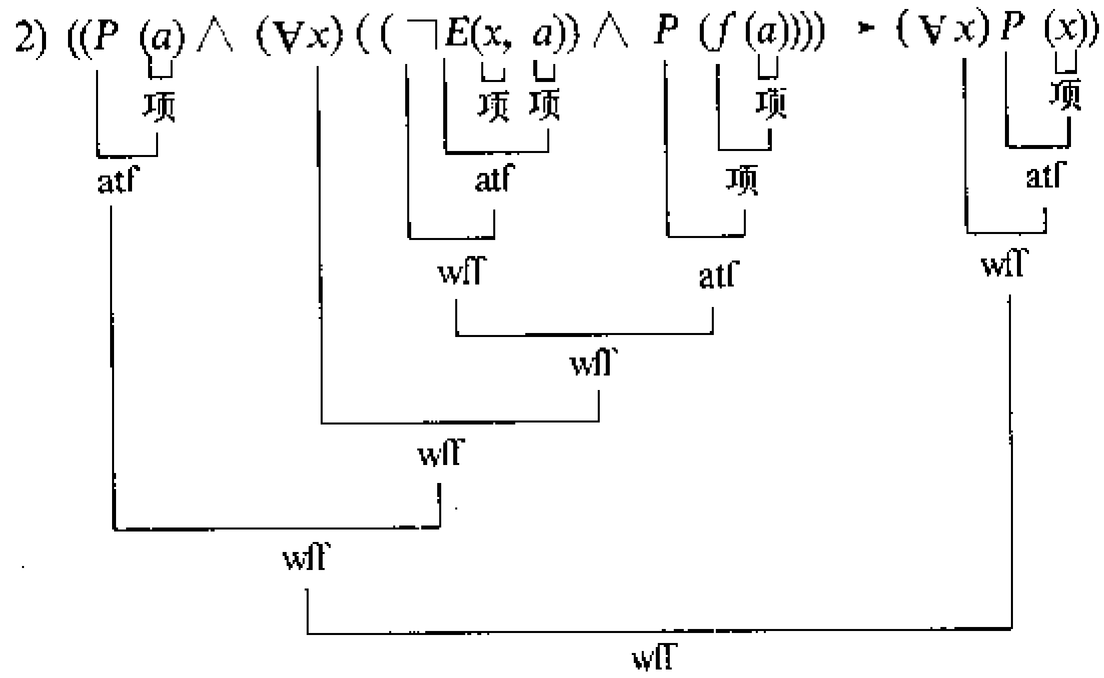
iii) 如果 A 和 B 都是 wff，则$(A\vee B)$，$(A\wedge B)$，$(A\to B)$ 和$(A\rightleftharpoons B)$ 都是 wff.

iv) 如果 A 是 wff，x 为个体变元，则$(\forall x)A$ 和$(\exists x)A$ 都是 wff.

此外，我们把每次使用规则 i)、ii)、iii)、和 iv)所得到的 wff，称为最后所构成的那个 wff 的分子合式公式或简称为子合式公式或分子公式。

例 1　下面的符号串 1)和 2)均为 wff.





由于我们只关心合式公式，所以以后就用术语“公式”代替“合式公式”。对命题逻辑的合式公式，曾规定了某些减少括号的约定。对谓词逻辑的合式公式，我们仍遵守同样的约定。

我们称变元x在合式公式$(\exists x)A$和$(\forall x)A$中的出现为约束出现，并称A为$(\exists x)$和$(\forall x)$的辖域。如果变元x在公式A中的某次出现是在A的分子公式中的约束出现，则称x的该次出现是约束出现。如果变元x在公式A中的某次出现不是约束出现，就称该出现为自由出现。在公式A中有自由出现的变元称为自由变元，在公式A中有约束出现的变元称为约束变元。

关于量词的辖域有一点要说明的是，量词的辖域乃是紧接其后的公式，如果辖域不是原子公式，就应在辖域两侧插入一对括号。

例 2 考察下列公式：

1) $(\forall x)(P(x) \to (\exists y)R(x,y))$

2) $(\exists x)P(x) \wedge Q(x)$

在公式 1) 中，$(\forall x)$ 的辖域是$P(x) \to (\exists y)R(x,y)$，$(\exists y)$ 的辖域是$R(x,y)$. x 的三次出现都是约束出现，y 的两次出现都是约束出现。x 和 y 都是约束变元。

在公式 2) 中，$(\exists x)$ 的辖域是 $P(x)$，x 的头两次出现是约束出现，x 的第三次出现是自由出现。所以 x 既是约束变元，又是自由变元。

在一个公式中，我们允许一个变元既有自由出现，又有约束出现。约束变元可以换名，其具体做法如下：如果要把某合式公式中的量词$(\forall x)$换成$(\forall y)$，则y必须是在该$(\forall x)$的辖域内不出现的变元，并且把该$(\forall x)$的辖域内一切自由出现的x都换为y.

例 3 在公式$(\forall x)(P(x) \wedge (\exists x)Q(x)) \vee ((\forall x)P(x) \rightarrow Q(x))$中，$x$既是自由变元，又是约束变元。可对约束变元进行换名。在第一个$(\forall x)$的辖域$P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$内没有出现变元$y$，可把第一个$(\forall x)$换为$(\forall y)$，原公式中第二次出现的$x$是$P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$中的自由出现，因此将其换为$y$，而原公式中第三、四次出现的$x$是$P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$中的约束出现，因此不用换名。这样，换名后的公式成为

$(\forall y)(P(y) \wedge (\exists x)Q(x)) \vee ((\forall x)P(x) \rightarrow Q(x))$。

再一次换名得到

$(\forall y)(P(y) \wedge (\exists z)Q(z)) \vee ((\forall x)P(x) \rightarrow Q(x))$。

在命题逻辑中，所谓对合式公式G的解释，就是指对G中出现的所有命题变元的一组真值赋值。在谓词逻辑中，由于出现了谓词、函词和个体词，情况就复杂多了。

定义 5.2.4 对合式公式G的一个解释$\boldsymbol{I}$由以下五项组成：

i) 指定一个非空集合D，称为$\boldsymbol{I}$的论域，并称$\boldsymbol{I}$为D上的解释；

ii) 对G中出现的每个个体常元和自由变元，都指定D中一个元素；

iii) 对G中出现的每个n元函词，都指定D上一个n元函数（仍用原函词符号表示）；

iv) 对G中出现的每个命题词，都指定一个真值$\boldsymbol{T}$或$\boldsymbol{F}$；

v) 对G中出现的每个n元谓词，都指定一个从D^n到$\{\boldsymbol{T},\boldsymbol{F}\}$的函数（仍用原谓词符号表示），并称为$D$上的$n$元谓词。

这样，就可以从G导出一个D上的命题G_I.

例 4 对合式公式$P(h(a,x))$，取解释$\boldsymbol{I}$如下：

i) $D=\{1,2\}$

ii) 令

x	a
2	1

$h(1,1)$	$h(1,2)$	$h(2,1)$	$h(2,2)$
1	2	2	1

iii) 定义D上的一元谓词P为

$P(1)$	$P(2)$
$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{T}$

显然，这时$(P(h(a,x)))_I$的真值为$\boldsymbol{T}$.

例 5 对合式公式$(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(f(x),a))$，取解释$\boldsymbol{I}$如下：

i) $D=\{1,2\}$

ii) 令

a
1

$f(1)$	$f(2)$
2	1

iii) 定义D上的谓词P和Q为

$P(1)$	$P(2)$
$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{T}$

$Q(1,1)$	$Q(1,2)$	$Q(2,1)$	$Q(2,2)$
$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$

显然,这时尚无法求得$((\forall x)(P(x)\to Q(f(x),a)))_I$的真值。

给定合式公式G的一个解释I以后,为了求得命题G_I的真值,我们还得做如下的规定。

定义 5.2.5 若I为对合式公式G的一个解释,其论域为D,则G_I的真值可归纳定义如下:

i) 若G为原子,则G_I的真值已规定好;

ii) 若G为$\neg A$,则G_I的真值为T当且仅当A_I的真值为F;

iii) 若G为$A\vee B$,则G_I的真值为T当且仅当A_I或B_I的真值为T;

iv) 若G为$A\wedge B$,则G_I的真值为T当且仅当A_I和B_I的真值均为T;

v) 若G为$A\to B$,则G_I的真值为F当且仅当B_I的真值为T且B_I的真值为F;

vi) 若G为$A\rightleftharpoons B$,则G_I的真值为T当且仅当A_I和B_I的真值相同;

vii) 若G为$(\forall x)A$,则G_I的真值为T当且仅当对每个$d\in D$,$(S_d^xA)_I$的真值均为T;

viii) 若G为$(\exists xA)$,则G_I的真值为T当且仅当有$d\in D$使$(S_d^xA)_I$的真值为T.

其中S_d^xA表示用d替换A中x的每个自由出现后所得之结果。

如果G_I的真值为T,则称G在解释I下为真,记为$\models_I G$;否则称G在解释I下为假,记为$\not\models_I G$.

例 6 对例5所给合式公式及其解释I,显然有

$$\frac{P(1)\to Q(f(1),1)}{T}\qquad\frac{P(2)\to Q(f(2),1)}{T}$$

因此

$$\frac{(\forall x)(P(x)\to Q(f(x),1))}{T}$$

这表明$((\forall x)(P(x)\to Q(f(x),a)))_I$的真值为$T$,即$(\forall x)(P(x)\to Q(f(x),a))$在解释$I$下为真.

例 7 对合式公式$(\forall x)(\exists y)R(x,y)$,取解释$I$如下:

i) $D=\{a,b\}$

ii) 定义D上的二元谓词R为

$R(a,a)$	$R(a,b)$	$R(b,a)$	$R(b,b)$
T	F	F	T

这时显然有

$$\frac{(\exists y)P(a,y)}{T}\qquad\frac{(\exists y)P(b,y)}{T}$$

从而得

$$\frac{(\forall x)(\exists y)P(x,y)}{T}$$

即$(\forall x)(\exists y)P(x,y)$在解释$I$下为真。

习 题 5.2

1. 指出下列合式公式中变元的约束出现和自由出现,并指出量词的辖域。

a) $(\forall x)(P(x) \land R(x)) \rightarrow (\forall x)P(x) \land Q(x)$

b) $(\forall x)(P(x) \land (\exists x)Q(x)) \lor ((\forall x)P(x) \rightarrow Q(x))$

c) $(\forall x)(P(x) \rightleftharpoons Q(x) \land (\exists x)R(x)) \land S(x)$

2. 给定解释 $\boldsymbol{I}$ 如下：

$D = \{a,b\}$

c	$P(a,a)$	$P(a,b)$	$P(b,a)$	$P(b,b)$
a	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{T}$

确定下列合式公式在解释 $\boldsymbol{I}$ 下的真值。

a) $(\forall x)(\exists y)P(x,y)$

b) $(\forall x)(\forall y)P(x,y)$

c) $(\exists x)(\forall y)P(x,y)$

d) $(\exists y)(\neg P(c,y))$

e) $(\forall x)(\forall y)(P(x,y) \rightarrow P(y,x))$

f) $(\forall x)P(x,x)$

3. 给定解释 $\boldsymbol{I}$ 如下：

$D = \{1,2\}$

a	b	$f(1)$	$f(2)$
1	2	2	1

$P(1,1)$	$P(1,2)$	$P(2,1)$	$P(2,2)$
$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{T}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$

确定下列合式公式在解释 $\boldsymbol{I}$ 下的真值。

a) $P(a,f(a)) \land P(b,f(b))$

b) $(\forall x)(\exists y)P(y,x)$

c) $(\forall x)(\forall y)(P(x,y) \rightarrow P(f(x),f(y)))$

4. 确定下列合式公式在相应解释下的真值。

a) $(\forall x)(P(x) \lor Q(x))$

$D = \{1,2\}$

$P(x): x = 1 \qquad Q(x): x = 2$

b) $(\forall x)(P \rightarrow Q(x)) \lor R(a)$

$D = \{-2,3,6\}$

$a: 3 \qquad P: 2 > 1 \qquad Q(x): x \leqslant 3 \qquad R(x): x > 5$

c) $(\exists x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \land \boldsymbol{T}$

$D = \{1\}$

$P(x): x > 2 \qquad Q(x): x = 0$

§5.3 永 真 式

在谓词逻辑中，合式公式的永真、永假、可满足、等价和蕴含的定义，在形式上与命题逻辑的完全一样，这里就不重复了。

本节研究谓词逻辑中的一些永真式。首先把命题逻辑中的一些永真式推广到谓词逻辑中来，然后再讨论另外一些带有量词的永真式。

定理 5.3.1（代入定理） 若G是命题逻辑中的永真合式公式，则用谓词逻辑中的合式公式代替某些命题变元在G中的所有出现所得到的代换实例也是永真式；如果G是永假式，则上述代换实例也是永假式。

对于 §4.3 中列举的命题逻辑的等价式和蕴含式，用谓词逻辑中的合式公式代替其中的命题变元就得到谓词逻辑中的等价式和蕴含式。即 §4.3 中给出的那些等价式和蕴含式都可以用在谓词逻辑中，只不过其中的P,Q,R变成了谓词逻辑中的合式公式。例如，由$P \wedge \neg P \Leftrightarrow F$得到$(\forall x)P(x) \wedge \neg(\forall x)P(x) \Leftrightarrow F$，由$P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$得到$(\exists x)P(x) \wedge ((\exists x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x)) \Rightarrow (\forall x)Q(x)$.

命题逻辑中的真值表方法，在这里是不适用的，因为我们讨论的永真式要对任意论域上的任意解释都真，这样的真值表是列不出来的。但可以用真值表举反例。用于证明永真式的其它方法，在这里都仍然适用。

例 1 证明以下蕴含式：

1) $(\exists x)(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow (\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x)$

2) $(\forall x)A(x) \vee (\forall x)B(x) \Rightarrow (\forall x)(A(x) \vee B(x))$

证明

1) 给定$(\exists x)(A(x) \wedge B(x)) \rightarrow (\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x)$在论域$D$上的解释$\boldsymbol{I}$。如果$(\exists x)(A(x) \wedge B(x))$在$\boldsymbol{I}$下为真，则存在$c \in D$使$A(c) \wedge B(c)$为真，即$A(c)$和$B(c)$都为真。由$A(c)$为真，知$(\exists x)A(x)$为真。由$B(c)$为真，知$(\exists x)B(x)$为真，故$(\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x)$至$\boldsymbol{I}$下为真。因此蕴含式 1) 成立。

2) 给定$(\forall x)A(x) \vee (\forall x)B(x) \rightarrow (\forall x)(A(x) \vee B(x))$在论域$D$上的解释$\boldsymbol{I}$。如果$(\forall x)(A(x) \vee B(x))$在$\boldsymbol{I}$下为假，则存在$a \in D$使$A(a) \vee B(a)$为假。此时$A(a)$和$B(a)$在$\boldsymbol{I}$下均为假，故$(\forall x)A(x)$和$(\forall x)B(x)$在$\boldsymbol{I}$下也均为假，即$(\forall x)A(x) \vee (\forall x)B(x)$在$\boldsymbol{I}$下为假。因此，蕴含式 2) 成立。

例 2 判定以下合式公式是不是永真式：

1) $(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x) \rightarrow (\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$

2) $(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$

解 取合式公式 1) 的解释$\boldsymbol{I}$如下：

论域为$\boldsymbol{I}_+$

$P(x)$：x是奇数，

$Q(x)$：x是偶数。

则$(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$在$\boldsymbol{I}$下为真，而$(\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$在$\boldsymbol{I}$下为假，故 1) 不是永真式。

把上面给出的解释作为合式公式 2) 的解释，在该解释下，$(\forall x)(P(x) \vee Q(x))$为真，而$(\forall x)P(x)$和$(\forall x)Q(x)$均为假，所以合式公式 2) 不是永真式。

定理 5.3.2（置换定理） 若A为合式公式G的分子公式，B为与A等价的合式公式，R为用B取代G中A之若干出现后所得之合式公式，则$G \Leftrightarrow R$.

这个定理的严格证明比较复杂，我们就不在此证明了。

例 3 证明以下等价式：

1) $\neg(\forall x)A(x)\Leftrightarrow(\exists x)(\neg A(x))$

2) $\neg(\exists x)A(x)\Leftrightarrow(\forall x)(\neg A(x))$

证明

1) 给定 $\neg(\forall x)A(x)\rightleftharpoons(\exists x)(\neg A(x))$ 在论域 D 上的解释 I. 若 $\neg(\forall x)A(x)$ 在 I 下为真，即 $(\forall x)A(x)$ 为假，则存在 $a\in D$ 使 $A(a)$ 为假，即 $\neg A(a)$ 为真。所以 $(\exists x)(\neg A(x))$ 为真。另一方面，若 $(\exists x)(\neg A(x))$ 在 I 下为真，则存在 $a\in D$ 使 $\neg A(a)$ 为真，即 $A(a)$ 为假。所以 $(\forall x)A(x)$ 在 I 下为假，即 $\neg(\forall x)A(x)$ 在 I 下为真。

2) 在等价式 1) 中，用 $\neg A(x)$ 代替 $A(x)$ 得

$$\neg(\forall x)(\neg A(x))\Leftrightarrow(\exists x)(\neg\neg A(x))\Leftrightarrow(\exists x)A(x)$$

所以

$$\neg(\exists x)A(x)\Leftrightarrow\neg\neg(\forall x)(\neg A(x))\Leftrightarrow(\forall x)(\neg A(x))$$

例 4 证明下列等价式：

1) $(\exists x)(A(x)\vee B(x))\Leftrightarrow(\exists x)A(x)\vee(\exists x)B(x)$

2) $(\forall x)(A(x)\wedge B(x))\Leftrightarrow(\forall x)A(x)\wedge(\forall x)B(x)$

证明

1) 给定 $(\exists x)(A(x)\vee B(x))\rightleftharpoons(\exists x)A(x)\vee(\exists x)B(x)$ 在论域 D 上的解释 I. 若 $(\exists x)(A(x)\vee B(x))$ 在 I 下为真，则存在 $a\in D$ 使 $A(a)\vee B(a)$ 为真，即 $A(a)$ 为真或 $B(a)$ 为真。故 $(\exists x)A(x)$ 在 I 下为真或 $(\exists x)B(x)$ 在 I 下为真，所以 $(\exists x)A(x)\vee(\exists x)B(x)$ 在 I 下为真。另一方面，若 $(\exists x)A(x)\vee(\exists x)B(x)$ 在 I 下为真，则 $(\exists x)A(x)$ 在 I 下为真或 $(\exists x)B(x)$ 在 I 下为真。若 $(\exists x)A(x)$ 在 I 下为真，则存在 $a\in D$ 使 $A(a)$ 为真，从而得 $A(a)\vee B(a)$ 为真，所以 $(\exists x)(A(x)\vee B(x))$ 在 I 下为真。若 $(\exists x)B(x)$ 在 I 下为真，同样可推出 $(\exists x)(A(x)\vee B(x))$ 在 I 下为真。

2) 由例 3 和等价式 1) 可得出

$$\begin{aligned}
&(\forall x)(A(x)\wedge B(x))\\
&\Leftrightarrow\neg\neg(\forall x)(A(x)\wedge B(x))\\
&\Leftrightarrow\neg(\exists x)(\neg(A(x)\wedge B(x)))\\
&\Leftrightarrow\neg(\exists x)(\neg A(x)\vee\neg B(x))\\
&\Leftrightarrow\neg((\exists x)(\neg A(x))\vee(\exists x)(\neg B(x)))\\
&\Leftrightarrow\neg(\exists x)(\neg A(x))\wedge\neg(\exists x)(\neg B(x))\\
&\Leftrightarrow(\forall x)(\neg\neg A(x))\wedge(\forall x)(\neg\neg B(x))\\
&\Leftrightarrow(\forall x)A(x)\wedge(\forall x)B(x)
\end{aligned}$$

例 5 若 x 不是 B 的自由变元，则 $(\forall x)A(x)\rightarrow B\Leftrightarrow(\exists x)(A(x)\rightarrow B)$

证明 因为 x 不是 B 的自由变元，所以不难知道有 $(\exists x)B\Leftrightarrow B$. 从而得到

$$\begin{aligned}
(\forall x)A(x)\rightarrow B&\Leftrightarrow\neg(\forall x)A(x)\vee B\\
&\Leftrightarrow(\exists x)(\neg A(x))\vee(\exists x)B\\
&\Leftrightarrow(\exists x)(\neg A(x)\vee B)
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (\exists x)(A(x) \to B)$$

为了引用方便起见，我们把一些重要的等价式和蕴含式加以编号，并列举如下：

E_{25}　$(\exists x)(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow (\exists x)A(x) \vee (\exists x)B(x)$

E_{26}　$(\forall x)(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow (\forall x)A(x) \wedge (\forall x)B(x)$

E_{27}　$\neg (\exists x)A(x) \Leftrightarrow (\forall x)(\neg A(x))$

E_{28}　$\neg (\forall x)A(x) \Leftrightarrow (\exists x)(\neg A(x))$

E_{29}　$(\forall x)(A(x) \vee P) \Leftrightarrow (\forall x)A(x) \vee P$

E_{30}　$(\forall x)(A(x) \wedge P) \Leftrightarrow (\forall x)A(x) \wedge P$

E_{31}　$(\exists x)(A(x) \vee P) \Leftrightarrow (\exists x)A(x) \vee P$

E_{32}　$(\exists x)(A(x) \wedge P) \Leftrightarrow (\exists x)A(x) \wedge P$

E_{33}　$(\exists x)(A(x) \to P) \Leftrightarrow (\forall x)A(x) \to P$

E_{34}　$(\forall x)(A(x) \to P) \Leftrightarrow (\exists x)A(x) \to P$

E_{35}　$(\forall x)(P \to B(x)) \Leftrightarrow P \to (\forall x)B(x)$

E_{36}　$(\exists x)(P \to B(x)) \Leftrightarrow P \to (\exists x)B(x)$

E_{37}　$(\exists x)(A(x) \to B(x)) \Leftrightarrow (\forall x)A(x) \to (\exists x)B(x)$

I_{15}　$(\forall x)A(x) \vee (\forall x)B(x) \Rightarrow (\forall x)(A(x) \vee B(x))$

I_{16}　$(\exists x)(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow (\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x)$

I_{17}　$(\exists x)A(x) \to (\forall x)B(x) \Rightarrow (\forall x)(A(x) \to B(x))$

I_{18}　$(\forall x)A(x) \Rightarrow (\exists x)A(x)$

从量词的定义出发，可以给出一组含有两个量词的等价式和蕴含式

B_1　$(\forall x)(\forall y)D(x,y) \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)D(x,y)$

B_2　$(\forall x)(\forall y)D(x,y) \Rightarrow (\exists y)(\forall x)D(x,y)$

B_3　$(\forall y)(\forall x)D(x,y) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)D(x,y)$

B_4　$(\exists y)(\forall x)D(x,y) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)D(x,y)$

B_5　$(\exists x)(\forall y)D(x,y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)D(x,y)$

B_6　$(\forall x)(\exists y)D(x,y) \Rightarrow (\exists y)(\exists x)D(x,y)$

B_7　$(\forall y)(\exists x)D(x,y) \Rightarrow (\exists x)(\exists y)D(x,y)$

B_8　$(\exists x)(\exists y)D(x,y) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)D(x,y)$

其中 A,B,P 和 D 为合式公式，且 x 不是 P 的自由变元。在图 5.3.1 中，给出了 B_1 至 B_8 的图解表示。

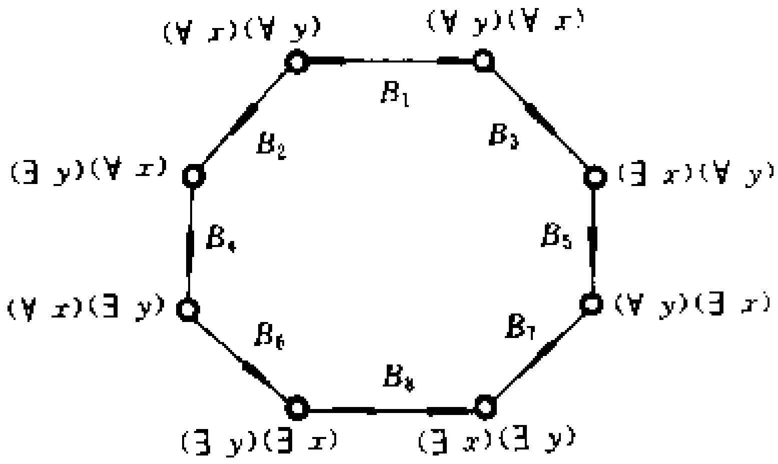


图 5.3.1　含有两个量词的公式之间的关系

习　题　5.3

1. 判断下列合式公式是不是永真式，并加以证明。

a) $(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))\rightarrow((\forall x)P(x)\rightarrow(\forall x)Q(x))$

b) $((\forall x)P(x)\rightarrow(\forall x)Q(x))\rightarrow(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))$

c) $((\exists x)P(x)\rightarrow(\forall x)Q(x))\rightarrow(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))$

d) $(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))\rightarrow((\exists x)P(x)\rightarrow(\forall x)Q(x))$

2. 证明下列蕴含式和等价式：

a) $(\forall x)(\exists y)(P(x)\vee Q(y))\Leftrightarrow(\forall x)P(x)\vee(\forall y)Q(y)$

b) $(\exists x)(\exists y)(P(x)\wedge Q(y))\Rightarrow(\exists x)P(x)$

c) $(\forall x)(\forall y)(P(x)\wedge Q(y))\Leftrightarrow(\forall x)P(x)\wedge(\forall y)Q(y)$

d) $(\exists x)(\exists y)(P(x)\rightarrow Q(y))\Leftrightarrow(\forall x)P(x)\rightarrow(\exists y)Q(y)$

e) $(\forall x)(\forall y)(P(x)\rightarrow Q(y))\Leftrightarrow(\exists x)P(x)\rightarrow(\forall y)Q(y)$

3. 给出$(\forall x)(P(x)\vee Q(x))\Rightarrow(\forall x)P(x)\vee(\forall x)Q(x)$的证明如下：

$(\forall x)(P(x)\vee Q(x))$

$\Leftrightarrow\neg(\exists x)(\neg(P(x)\vee Q(x)))$

$\Leftrightarrow\neg(\exists x)(\neg P(x)\wedge\neg Q(x))$

$\Rightarrow\neg((\exists x)(\neg P(x))\wedge(\exists x)(\neg Q(x)))$

$\Leftrightarrow\neg(\exists x)(\neg P(x))\vee\neg(\exists x)(\neg Q(x))$

$\Leftrightarrow(\forall x)P(x)\vee(\forall x)Q(x)$

找出其中的错误，并说明理由。

§5.4　永真式的判定

对于命题逻辑的合式公式，我们有办法判定它是不是永真式。例如可用真值表方法。对于谓词逻辑的任意给定合式公式，我们也有办法判定它是不是永真式吗？可以证明，谓词逻辑的永真性问题是不可判定的，即不可能找到一个算法，以谓词逻辑的任意合式公式作为输入，该算法都能给出表明这个合式公式是不是永真式的输出。但是，谓词逻辑的永真性问题是半可判定的，即能编出一个程序，以谓词逻辑的任意合式公式作为输入，如果该合式公式的确是永真式，则程序的执行一定终止并输出“是”；否则，该程序的执行可能终止并输出“否”，也可能永不终止。

我们知道，如果合式公式A中仅含自由变元$x_1,x_2,\cdots,x_n$，则A是永真式当且仅当$(\forall x_1)(\forall x_2)\cdots(\forall x_n)A$是永真式。因此，本节仅考虑不含自由变元的合式公式，并将其简称为公式。另外，合式公式A是永真式当且仅当$\neg A$是永假式。因此，我们可以用讨论永假性问题来代替对永真性的讨论。

定义 5.4.1　设$Q_1,\cdots,Q_n\in\{\forall,\exists\}(n\in N)$，$A$和$B$均为合式公式且$B$中不含量词。

i) 称合式公式$(Q_1x_1)\cdots(Q_nx_n)B$为前束范式，$(Q_1x_1)\cdots(Q_nx_n)$为其前束词，B为其母

式。

ii) 若 $A \Leftrightarrow (Q_1x_1)\cdots(Q_nx_n)B$，则称 $(Q_1x_1)\cdots(Q_nx_n)B$ 为 A 的前束范式。

容易看出，利用 §5.2 给出的等价式可以把任意公式化为它的前束范式。

例 1 把 $\neg((\forall x)(\exists y)F(a,x,y)\rightarrow(\exists x)(\neg(\forall y)G(y,b)\rightarrow H(x)))$ 化为它的前束范式。

解
$$\neg((\forall x)(\exists y)F(a,x,y)\rightarrow(\exists x)(\neg(\forall y)G(y,b)\rightarrow H(x)))$$
$$\Leftrightarrow \neg(\neg(\forall x)(\exists y)F(a,x,y)\vee(\exists x)(\neg\neg(\forall y)G(y,b)\vee H(x)))$$
$$\Leftrightarrow(\forall x)(\exists y)F(a,x,y)\wedge\neg(\exists x)((\forall y)G(y,b)\vee H(x))$$
$$\Leftrightarrow(\forall x)(\exists y)F(a,x,y)\wedge(\forall x)((\exists y)(\neg G(y,b))\wedge\neg H(x))$$
$$\Leftrightarrow(\forall x)(\exists y)F(a,x,y)\wedge(\forall z)((\exists u)(\neg G(u,b))\wedge\neg H(z))$$
$$\Leftrightarrow(\forall x)(\exists y)(\forall z)(\exists u)(F(a,x,y)\wedge\neg G(u,b)\wedge\neg H(z))$$

我们用以下的方法来消去前束范式中的存在量词：在含有存在量词的前束范式 A 中，划去最左方的存在量词 $\exists y$，并且当 $\exists y$ 的左方没有全称量词时，任取一个不在 A 中出现也没有在这个过程中出现过的个体常量 a，并在 A 的母式中以 a 代入 y 的所有自由出现；当 $\exists y$ 的左方依次有全称量词 $\forall x_1,\forall x_2,\cdots,\forall x_n$ 出现时，任取一个不在 A 中出现并且在这个过程中没有出现过的 n 元函词 f，并在 A 的母式中以 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 代入 y 的所有自由出现。这样消去了前束范式中的所有存在量词之后，所得到的公式称为原公式的无 $\exists$ 前束范式。

例 2 求例 1 中公式的无 $\exists$ 前束范式。

解 例 1 中已求出该公式的前束范式为
$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(\exists u)(F(a,x,y)\wedge\neg G(u,b)\wedge\neg H(z))$$
令 f 为一元函词，g 为二元函词，原公式的无 $\exists$ 前束范式为
$$(\forall x)(\forall z)(F(a,x,f(x))\wedge\neg G(g(x,z),b)\wedge\neg H(z))$$

定理 5.4.1 公式 A 是永假式当且仅当 A 的无 $\exists$ 前束范式是永假式。

证明 考虑如下的公式
$$(\forall x_1)(\forall x_2)\cdots(\forall x_n)(\exists y)B(x_1,x_2,\cdots,x_n,y)$$
消去存在量词 $\exists y$ 后得
$$(\forall x_1)(\forall x_2)\cdots(\forall x_n)B(x_1,x_2,\cdots,x_n,f(x_1,x_2,\cdots,x_n))$$
记前者为 C，后者为 C'。我们证明 C 是可满足的，当且仅当 C' 是可满足的。

设论域 D 上的解释 I 使 C 在 I 下为真。定义 D 上的 n 元函数 f' 如下：对于任意的 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in D$，由 C 在 I 下为真知，存在某些 $a\in D$ 使 $B(a_1,a_2,\cdots,a_n,a)$ 在 I 下为真，任取其中一个作为 $f'(a_1,a_2,\cdots,a_n)$。指定 f 对应于 f'，把 I 扩充为 C' 的解释 I'，则 C' 在 I' 下为真。

设论域 D 上的解释 I 使 C' 在 I 下为真，则 I 也是 C 的解释，并且 C 在 I 下也为真。

公式 A 的无 $\exists$ 前束范式可由 A 的前束范式经过有限次应用上述过程得到。故 A 是永假式当且仅当 A 的无 $\exists$ 前束范式是永假式。

根据永假式的定义，为了证明无 $\exists$ 前束范式 A 是永假式，需要考虑 A 的所有解释，这是很不方便的。幸好有一个特定的论域，并且在这个论域上有一类特殊的解释，使得 A 是

永假式，当且仅当 A 在这类解释下总为假。这个特定的论域称为艾尔布朗(Herbrand) 域，这类特定的解释称为艾尔布朗解释。

定义 5.4.2 若 A 为无∃ 前束范式，c 为任意个体常元，则令

$$H_0 = \begin{cases} \{c\}, & \text{若 } A \text{ 中不含个体常元} \\ \{a \mid \text{若 } a \text{ 为 } A \text{ 中的个体常元}\}, & \text{否则} \end{cases}$$

$$H_{i+1} = H_i \cup \{f(t_1,\cdots,t_n) \mid f \text{ 为 } A \text{ 中的 } n \text{ 元函词且 } t_1,\cdots,t_n \in H_i\} \qquad i \in N$$

并称 $H_A = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} H_i$ 为 A 的艾尔布朗域，简记为 H.

注："若 A 中不含个体常元，则 $H_0 = \{c\}$." 其中的"c" 为任取的一个个体常元。

例 3 对合式公式 $(\forall x)(F(a) \wedge F(b) \wedge F(f(x)))$ 显然有

$H_0 = \{a,b\}$

$H_1 = \{a,b,f(a),f(b)\}$

$H_2 = \{a,b,f(a),f(b),f(f(a)),f(f(b))\}$ 等等。

例 4 设合式公式 A 为 $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(F(x) \vee G(y,z))$.

因为 A 中没有个体常量和函词。所以 $H_A = \{a\}$，其中 a 为任意一个个体常元。

定义 5.4.3 任给无∃ 前束范式 A. 若 A 的解释 I 满足以下条件：

i) I 的论域是 A 的艾尔布朗域 H；

ii) 对于 A 中的每个个体常元 a，指定 H 中的元素 a；

iii) 对于 A 中的每个 n 元函词 f，指定 H 上的 n 元函数 f_I，使得对于任意 $t_1,t_2,\cdots,t_n \in H$ 皆有 $f_I(t_1,t_2,\cdots,t_n) = f(t_1,t_2,\cdots,t_n)$；

则称 I 为 A 的艾尔布朗解释。

一般说来，无∃ 前束范式 A 的艾尔布朗解释不是唯一的，因为对于 A 中出现的 n 元谓词可以指定 H 上的任意 n 元谓词。

定理 5.4.2 无∃ 前束范式 A 是永假式，当且仅当 A 在任何艾尔布朗解释下均为假。

定理 5.4.3(艾尔布朗定理) 无∃ 前束范式 $(\forall x_1)(\forall x_2)\cdots(\forall x_n)B(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是永假式，当且仅当存在其艾尔布朗域中的元素 $t_{11},t_{12},\cdots,t_{1n},t_{21},t_{22},\cdots,t_{2n},\cdots,t_{m1},t_{m2},\cdots,t_{mn}$ 使 $B(t_{11},t_{12},\cdots,t_{1n}) \wedge B(t_{21},t_{22},\cdots,t_{2n}) \wedge \cdots \wedge B(t_{m1},t_{m2}\cdots,t_{mn})$ 为永假式。

这两个定理我们就不证了。

艾尔布朗定理为我们判断一个公式是不是永假式提供了办法。设 A 的无∃ 前束范式为 $(\forall x_1)(\forall x_2)\cdots(\forall x_n)B(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，把形式为 $B(t_1,t_2,\cdots,t_n)$ 的公式称为 $B(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的例式，其中 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 是 $(\forall x_1)(\forall x_2)\cdots(\forall x_n)B(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的艾尔布朗域中的元素。根据艾尔布朗定理，A 是永假式当且仅当，存在 $B(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的有限个例式 $B_1,B_2,\cdots,B_m$ 使 $B_1 \wedge B_2 \wedge \cdots \wedge B_m$ 为永假式。首先考虑由 H_0 中元素生成的例式，看它们的合取是不是永假式，若是永假式，则 A 为永假式。否则顺次考虑由 $H_1,H_2,\cdots$ 中元素生成的例式。若 A 的确是永假式，则总会找到自然数 i 使得 H_i 中元素生成的 $B(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的例式的合取是永假式。若 A 不是永假式，这个过程永远不会完结。

习　题　5.4

1.　求下列各公式的无∃ 前束范式：

a)　$(\exists y)(\forall z)(P(z,y) \rightleftharpoons \neg(\exists x)(P(z,x) \wedge P(x,z)))$

b)　$\neg(\exists x)(\exists y)(\forall z)((P(x,y) \rightarrow P(y,z) \wedge P(z,z)) \wedge (P(x,y) \wedge Q(x,y) \rightarrow Q(x,z) \wedge Q(z,z)))$

2.　用艾尔布朗定理证明

$$(\forall x)(\forall y)(P(x,y) \rightarrow P(y,x)) \wedge (\forall x)(\forall y)(\forall z)(P(x,y) \wedge P(y,z) \rightarrow P(x,z)) \wedge (\forall x)(\exists y)P(x,y) \rightarrow (\forall x)P(x,x)$$

是永真式。

第六章　自然推理系统

第四章和第五章讨论了命题逻辑和谓词逻辑的永真式、合式公式的等价和真值蕴含。在那里，讨论都是借助于对合式公式解释的分析进行的。本章介绍另外一种方法，即形式推理的方法，来证明从某些前提可以推出某结论。这种方法更接近于数学中的证明，它不仅对数学，而且对其他科学也有重要意义，对计算机科学中的程序验证、定理的机械证明和人工智能尤其重要。

§6.1　自然推理系统

定义 6.1.1　设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是合式公式的有限非空序列，A 是合式公式。若 $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \Rightarrow A$，则称 A 为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的逻辑结果或有效结论。称空公式序列的逻辑结果为永真式。

判断公式 A 是不是公式序列 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的逻辑结果，实际上也就是判断 $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \rightarrow A$ 是不是永真式。判断一个公式是不是永真式的方法已经讲过多种，这些方法都离不开对公式的解释。本章给出另一种方法，即形式推理的方法，一旦推理规则确定之后，就不必考虑公式的解释，只要严格按照推理规则行事，能够由 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 形式地推出 A，则 A 必为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的逻辑结果。这种方法在数学中被广泛采用。

形式推理关系是合式公式的有限序列与合式公式之间的一种关系。如果合式公式的有限序列 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 与合式公式 A 之间存在形式推理关系，则记为

$$A_1, A_2, \cdots, A_n \vdash A$$

这时，我们说结论 A 可由前提 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 形式地推出。为了使形式推理关系正确地反映数学中的推理，显然前提中各公式的排列次序是无关紧要的，作为前提的合式公式序列实际上是合式公式的有限集。

如果 $n = 0$，记 $A_1, A_2, \cdots, A_n \vdash A$ 为 $\vdash A$，表明 A 不需任何前提就可形式地推出，这时 A 应为永真式。本节我们用 Γ 表示合式公式的有限序列（可以是空序列），用 Δ 表示合式公式的有限非空序列。若 $\Gamma \vdash A_1, \Gamma \vdash A_2, \cdots, \Gamma \vdash A_n$，简记为 $\Gamma \vdash A_1, A_2, \cdots, A_n$。

下面给出一个具体的形式推理系统，因为它与数学中常用的推理方法十分接近，故称为自然推理系统。我们希望形式推理关系能正确地反映数学中的推理，即若 $A_1, A_2, \cdots, A_n \vdash A$，则 A 是 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的逻辑结果。读者可自行验证，下面给出的推理规则确实满足这一要求。自然推理系统的规则如下：

1.　肯定前提规则（$\in$）

　$\Gamma, A \vdash A$.

2. 前提引入规则($\in_+$)

若 $\Gamma \vdash B$,则 $\Gamma, A \vdash B$.

3. 前提消去规则($\in_-$)

若 $\Gamma, A \vdash B$ 且 $\Gamma, \neg A \vdash B$,则 $\Gamma \vdash B$.

4. T 规则

$\Gamma \vdash T$

5. F 规则

$\Gamma \vdash \neg F$

6. $\vee$ 引入规则($\vee_+$)

若 $\Gamma \vdash A$,则 $\Gamma \vdash A \vee B, B \vee A$.

7. $\vee$ 消去规则($\vee_-$)

若 $\Gamma, A \vdash C$ 且 $\Gamma, B \vdash C$,则 $\Gamma, A \vee B \vdash C$.

8. $\wedge$ 引入规则($\wedge_+$)

若 $\Gamma \vdash A, B$,则 $\Gamma \vdash A \wedge B$.

9. $\wedge$ 消去规则($\wedge_-$)

若 $\Gamma \vdash A \wedge B$,则 $\Gamma \vdash A, B$.

10. $\rightarrow$ 引入规则($\rightarrow_+$)

若 $\Gamma, A \vdash B$,则 $\Gamma \vdash A \rightarrow B$.

11. $\rightarrow$ 消去规则($\rightarrow_-$)

若 $\Gamma \vdash A, A \rightarrow B$,则 $\Gamma \vdash B$.

12. $\neg$ 引入规则($\neg_+$)

若 $\Gamma, A \vdash B, \neg B$,则 $\Gamma \vdash \neg A$.

13. $\neg$ 消去规则($\neg_-$)

若 $\Gamma \vdash A, \neg A$,则 $\Gamma \vdash B$.

14. $\neg\neg$ 引入规则($\neg\neg_+$)

若 $\Gamma \vdash A$,则 $\Gamma \vdash \neg\neg A$.

15. $\neg\neg$ 消去规则($\neg\neg_-$)

若 $\Gamma \vdash \neg\neg A$,则 $\Gamma \vdash A$.

16. $\rightleftharpoons$ 引入规则($\rightleftharpoons_+$)

若 $\Gamma, A \vdash B$ 且 $\Gamma, B \vdash A$,则 $\Gamma \vdash A \rightleftharpoons B$.

17. $\rightleftharpoons$ 消去规则($\rightleftharpoons_-$)

若 $\Gamma \vdash A \rightleftharpoons B$,则 $\Gamma \vdash A \rightarrow B, B \rightarrow A$.

18. $\forall$ 引入规则($\forall_+$)

若 $\Gamma \vdash A(x)$,则 $\Gamma \vdash (\forall x)A(x)$,其中 x 不是 Γ 中任何公式的自由变元。

19. $\forall$ 消去规则($\forall_-$)

若 $\Gamma \vdash (\forall x)A(x)$,则 $\Gamma \vdash A(t)$,其中项 t 对于 $A(x)$ 中的 x 是可代入的。

20. $\exists$ 引入规则($\exists_+$)

若 $\Gamma \vdash A(t)$,则 $\Gamma \vdash (\exists x)A(x)$,其中项 t 对于 $A(x)$ 中的 x 是可代入的。

21. ∃ 消去规则($\exists_-$)

若$\Gamma \vdash (\exists x)A(x)$且$\Gamma, A(b) \vdash C$,则$\Gamma \vdash C$,其中$b$是在$(\exists x)A(x)$,$C$和$\Gamma$的每个公式中都不出现的个体常量。

上面所说的"项t对于$A(x)$中的x是可代入的"是指项t中的个体变元在代入后都不会变成约束变元。为了说明这一规定的合理性,请看下面的例子。设$A(x)$为$(\exists y)(x = 2 \cdot y)$,它的意义为,断定$x$是偶数。$A(t)$表示用$t$代替$A(x)$中$x$的一切自由出现而得到的公式。但若取$t$为$y+1$,则$A(t)$成为$(\exists y)(y+1 = 2 \cdot y)$。它的意义是,断定有一个自然数是1,这不符合我们的原意。为什么会出现这种情况呢?原因在于t中的变元y在$A(t)$中变成约束的了。为了避免这种情况的发生,我们规定项t对$A(x)$中的x必须是可代入的,即项t中的任何变元在代入后都不会变成约束的。

下面说明($\forall_+$)和($\exists_-$)这两条规则的合理性。

规则($\forall_+$)说,如果对任意的x都能够推出$A(x)$成立,那么就可推出:对每个x,$A(x)$成立。这是数学中常用的推理方法。这时,"x不是Γ中任何公式的自由变元"这个条件是必不可少的。如果违犯了这一条件,就会得出不合理的形式推理关系。例如,$A(x) \vdash A(x)$是合理的,但$A(x) \vdash (\forall x)A(x)$是不合理的。这条规则的合理性可论证如下:若$\Gamma \vdash A(x)$是合理的形式推理关系,则$A(x)$是$\Gamma$的逻辑结果。任取$\Gamma$和$(\forall x)A(x)$的解释$I$,使得$\Gamma$中的每个公式在解释$I$下均为真。因为$x$既不是$\Gamma$中公式的自由变元,也不是$(\forall x)A(x)$的自由变元,故解释$I$没有赋予$x$以任何意义。任取$I$的论域中的一个元素$a$,为$x$指定个体$a$,即把$I$扩充为解释$I'$。$A(x)$在解释$I'$下为真,故$A(a)$在解释$I$下为真,这表明$(\forall x)A(x)$在解释$I$下为真。所以$(\forall x)A(x)$是$\Gamma$的逻辑结果。

规则($\exists_-$)说,如果由前提Γ可推出存在x使$A(x)$成立,令b为使$A(b)$成立的个体,可推出与b无关的结论C成立,则由Γ可推出C。这也是数学中常用的推理方法。在这里,"b是在$(\exists x)A(x)$,C和Γ的每个公式中都不出现的个体常量"这个条件是必不可少的,否则会得出不合理的形式推理关系。例如,$(\exists x)A(x) \vdash (\exists x)A(x)$和$(\exists x)A(x), A(b) \vdash A(b)$都是合理的,但$(\exists x)A(x) \vdash A(b)$是不合理的。这条规则的合理性可论证如下:若$(\exists x)A(x)$是$\Gamma$的逻辑结果,$C$是$\Gamma, A(b)$的逻辑结果,任取$\Gamma$,$C$的解释$I$,设$I$的论域为$D$,并且$\Gamma$中的每个公式在解释$I$下均为真,把$I$扩充为$(\exists x)A(x)$的解释$I'$,其中$I'$的论域也是$D$,则$(\exists x)A(x)$在解释$I'$下为真,有$D$中元素$a$使$A(a)$在解释$I'$下为真,为个体常量$b$指定个体$a$,把$I'$扩充为$A(b)$的解释$I''$,则$C$在解释$I''$下为真,而$C$在解释$I$下的真值与在解释$I''$下的真值相同,故$C$在解释$I$下为真。所以,$C$是$\Gamma$的逻辑结果。

定义 6.1.2 设$\Gamma_1 \vdash A, \Gamma_2 \vdash A_2, \cdots, \Gamma_n \vdash A_n$是形式推理关系的有限非空序列。如果其中每个$\Gamma_k \vdash A_k (1 \leqslant k \leqslant n)$,或者它本身是一条规则,或者可由$\Gamma_{i_1} \vdash A_{i_1}, \Gamma_{i_2} \vdash A_{i_2}, \cdots, \Gamma_{i_m} \vdash A_{i_m} (1 \leqslant i_1, i_2, \cdots, i_m < k)$按照某规则推出,则称$\Gamma_1 \vdash A_1, \Gamma_2 \vdash A_2, \cdots, \Gamma_n \vdash A_n$为$\Gamma_n \vdash A_n$的一个证明。有证明的形式推理关系称为自然推理系统的定理。

我们约定,要求证明$\Gamma \vdash A$,就是要求给出它的一个证明。

例 1 证明$\vdash A \vee \neg A$

1. $A \vdash A$ ($\in$)
2. $A \vdash A \vee \neg A$ ($\vee_+$)(1)

3. $\neg A \vdash \neg A$ $(\in)$

4. $\neg A \vdash A \vee \neg A$ $(\vee_{+})(3)$

5. $\vdash A \vee \neg A$ 前提消去(2,4)

在例1给出的证明中，每个形式推理关系后面都注上了它是按照哪条规则由哪些形式推理关系得出的。例如，$\vdash A \vee \neg A$ 后面的"前提消去(2,4)"表明，$\vdash A \vee \neg A$ 是按照前提消去规则，由第2行的 $A \vdash A \vee \neg A$ 和第4行的 $\neg A \vdash A \vee \neg A$ 得出的。

例 2 证明 $\vdash (A \wedge B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

1. $A \wedge B \to C, A \to B, A \vdash A$ $(\in)$
2. $A \wedge B \to C, A \to B, A \vdash A \to B$ $(\in)$
3. $A \wedge B \to C, A \to B, A \vdash B$ $(\to_{-})(1,2)$
4. $A \wedge B \to C, A \to B, A \vdash A \wedge B$ $(\wedge_{+})(1,3)$
5. $A \wedge B \to, A \to B, A \vdash A \wedge B \to C$ $(\in)$
6. $A \wedge B \to C, A \to B, A \vdash C$ $(\to_{-})(4,5)$
7. $A \wedge B \to C, A \to B \vdash A \to C$ $(\to_{+})(6)$
8. $A \wedge B \to C \vdash (A \to B) \to (A \to C)$ $(\to_{+})(7)$
9. $\vdash (A \wedge B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ $(\to_{+})(8)$

例 3 证明 $\vdash \neg(\exists x)A(x) \rightleftharpoons (\forall x)(\neg A(x))$

1. $\neg(\exists x)A(x), A(x) \vdash A(x)$ $(\in)$
2. $\neg(\exists x)A(x), A(x) \vdash (\exists x)A(x)$ $(\exists_{+})(1)$
3. $\neg(\exists x)A(x), A(x) \vdash \neg(\exists x)A(x)$ $(\in)$
4. $\neg(\exists x)A(x) \vdash \neg A(x)$ $(\neg_{+})(2,3)$
5. $\neg(\exists x)A(x) \vdash (\forall x)(\neg A(x))$ $(\forall_{+})(4)$
6. $(\forall x)(\neg A(x)), (\exists x)A(x), A(b) \vdash A(b)$ $(\in)$
7. $(\forall x)(\neg A(x)), (\exists x)A(x), A(b) \vdash (\forall x)(\neg A(x)$ $(\in)$
8. $(\forall x)(\neg A(x)), (\exists x)A(x), A(b) \vdash \neg A(b)$ $(\forall_{-})(7)$
9. $(\forall x)(\neg A(x)), (\exists x)A(x), A(b) \vdash F$ $(\neg_{-})(6,8)$
10. $(\forall x)(\neg A(x)), (\exists x)A(x) \vdash (\exists x)A(x)$ $(\in)$
11. $(\forall x)(\neg A(x)), (\exists x)A(x) \vdash F$ $(\exists_{-})(9,10)$
12. $(\forall x)(\neg A(x)), (\exists x)A(x) \vdash \neg F$ F 规则
13. $(\forall x)(\neg A(x)) \vdash \neg(\exists x)A(x)$ $(\neg_{+})(11,12)$
14. $\vdash \neg(\exists x)A(x) \rightleftharpoons (\forall x)(\neg A(x))$ $(\rightleftharpoons_{+})(5,13)$

可以看出，一个形式推理关系的证明往往很长，一步步严格地写出它们是一件十分麻烦的事情。为此我们引进一些导出规则。当然，这些导出规则的正确性是需要证明的，但是一旦给出了它们的证明，以后就可以直接使用这些规则，而不必每次照抄它们的证明。在以下导出规则中，我们用 $A \dashv\vdash B$ 表示：$A \vdash B$ 且 $B \vdash A$。

导出规则如下：

1) 结合律

$(A \vee B) \vee C \dashv\vdash A \vee (B \vee C)$

$(A \wedge B) \wedge C \vdash\dashv A \wedge (B \wedge C)$

2） 交换律

$A \vee B \vdash\dashv B \vee A$

$A \wedge B \vdash\dashv B \wedge A$

3） 分配律

$A \vee (B \wedge C) \vdash\dashv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

$A \wedge (B \vee C) \vdash\dashv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

4） 德·摩尔根律

$\neg (A \vee B) \vdash\dashv (\neg A) \wedge (\neg B)$

$\neg (A \wedge B) \vdash\dashv (\neg A) \vee (\neg B)$

5） 析取三段论

$\neg A, A \vee B \vdash B$

6） 拒取式

$\neg B, A \to B \vdash \neg A$

7） 假言三段论

$A \to B, B \to C \vdash A \to C$

8） 二难推论

$A \vee B, A \to C, B \to C \vdash C$

9） 左$\forall$ 引入规则(左$\forall_+$)

若$\Gamma, A(x) \vdash B(x)$，则$\Gamma, (\forall x)A(x) \vdash B(x)$

10） $\forall\forall$ 引入规则($\forall\forall_+$)

若$\Gamma, A(x) \vdash B(x)$，则$\Gamma, (\forall x)A(x) \vdash (\forall x)B(x)$

其中x不是Γ中任何公式的自由变元。

11） 左$\exists$ 引入规则(左$\exists_+$)

若$\Gamma, A(x) \vdash B$，则$\Gamma, (\exists x)A(x) \vdash B$

其中x不是B和Γ中任何公式的自由变元。

12） $\exists\exists$ 引入规则($\exists\exists_+$)

若$\Gamma, A(x) \vdash B(x)$，则$\Gamma, (\exists x)A(x) \vdash (\exists x)B(x)$

其中x不是Γ中任何公式的自由变元。

我们只证德·摩尔根律中的第一个，以及($\forall\forall_+$)，其余由读者自己给出证明。

首先证明 $\neg (A \vee B) \vdash \neg A \wedge \neg B$.

1.	$\neg (A \vee B), A \vdash A$	$(\in)$
2.	$\neg (A \vee B), A \vdash A \vee B$	$(\vee_+)(1)$
3.	$\neg (A \vee B), A \vdash \neg (A \vee B)$	$(\in)$
4.	$\neg (A \vee B) \vdash \neg A$	$(\neg_+)(2,3)$
5.	$\neg (A \vee B), B \vdash B$	$(\in)$
6.	$\neg (A \vee B), B \vdash A \vee B$	$(\vee_+)(5)$
7.	$\neg (A \vee B), B \vdash \neg (A \vee B)$	$(\in)$

8. $\neg(A \vee B) \vdash \neg B$ $(\neg_{+})(6,7)$

9. $\neg(A \vee B) \vdash \neg A \wedge \neg B$ $(\wedge_{+})(4,8)$

再证 $\neg A \wedge \neg B \vdash \neg(A \vee B)$

1. $\neg A \wedge \neg B, A \vdash A$ $(\in)$
2. $\neg A \wedge \neg B, A \vdash \neg A \wedge \neg B$ $(\in)$
3. $\neg A \wedge \neg B, A \vdash \neg A$ $(\wedge_{-})(2)$
4. $\neg A \wedge \neg B, A \vdash \boldsymbol{F}$ $(\neg_{-})(1,3)$
5. $\neg A \wedge \neg B, B \vdash B$ $(\in)$
6. $\neg A \wedge \neg B, B \vdash \neg A \wedge \neg B$ $(\in)$
7. $\neg A \wedge \neg B, B \vdash \neg B$ $(\wedge_{-})(6)$
8. $\neg A \wedge \neg B, B \vdash \boldsymbol{F}$ $(\neg_{-})(5,7)$
9. $\neg A \wedge \neg B, A \vee B \vdash \boldsymbol{F}$ $(\vee_{-})(4,8)$
10. $\neg A \wedge \neg B, A \vee B \vdash \neg \boldsymbol{F}$ $\boldsymbol{F}$ 规则
11. $\neg A \wedge \neg B \vdash \neg(A \vee B)$ $(\neg_{+})(9,10)$

证明 $\forall\forall$ 引入规则。

1. $\Gamma, (\forall x)A(x) \vdash (\forall x)A(x)$ $(\in)$
2. $\Gamma, (\forall x)A(x) \vdash A(x)$ $(\forall_{-})(1)$
3. $\Gamma, A(x) \vdash B(x)$ 已知
4. $\Gamma \vdash A(x) \rightarrow B(x)$ $(\rightarrow_{+})(3)$
5. $\Gamma, (\forall x)A(x) \vdash A(x) \rightarrow B(x)$ $(\in_{+})(4)$
6. $\Gamma, (\forall x)A(x) \vdash B(x)$ $(\rightarrow_{-})(2,5)$
7. $\Gamma, (\forall x)A(x) \vdash (\forall x)B(x)$ $(\forall_{+})(6)$

定理 6.1.1(有效性定理) 设 A 是合式公式,Γ 是合式公式的有限序列。如果 $\Gamma \vdash A$ 是自然推理系统的定理,则 A 是 Γ 的逻辑结果。

证明 设 $\Gamma \vdash A$ 的一个证明为

$$\begin{array}{l} \Gamma_1 \vdash A_1 \\ \Gamma_2 \vdash A_2 \\ \quad\vdots \\ \Gamma_n \vdash A_n \end{array}$$

其中 $\Gamma_n \vdash A_n$ 即为 $\Gamma \vdash A$. 我们用第二归纳法证明:对每个 $k(1 \leqslant k \leqslant n)$,$A_k$ 是 Γ_k 的逻辑结果。

i) $\Gamma_1 \vdash A_1$ 只能是 $\in$ 规则、T 规则或 F 规则,显然 A_1 是 Γ_1 的逻辑结果。

ii) 假定对任意正整数 $m(1 < m < n)$,当 $k < m$ 时 A_k 都是 Γ_k 的逻辑结果。若 $\Gamma_m \vdash A_m$ 由 $\Gamma_{i_1} \vdash A_{i_1}, \Gamma_{i_2} \vdash A_{i_2}, \cdots, \Gamma_{i_j} \vdash A_{i_j}$ 经使用一次推理规则得到,由推理规则的合理性知,A_m 是 Γ_m 的逻辑结果。

有效性定理表明,每个有证明的形式推理关系都是合理的,即正确地反映了数学中的推理。

定理 6.1.2(完全性定理) 设 A 是合式公式,Γ 是合式公式的有限序列。如果 A 是 Γ

的逻辑结果，则 $\Gamma \vdash A$ 是自然推理系统的定理。

这个定理的证明比较复杂，我们就不证了。

完全性定理表明，自然推理系统的定理包括了所有正确的推理关系。

习　题　6.1

1. 不用导出规则证明

a) $\vdash (A \to (B \to C)) \rightleftharpoons (B \to (A \to C))$

b) $(A \vee B) \vee C \vdash\dashv A \vee (B \vee C)$

c) $\vdash (A \to B) \rightleftharpoons (\neg B \to \neg A)$

d) $A \wedge \neg A \vdash\dashv \boldsymbol{F}$

e) $A \to (B \to C) \vdash\dashv A \wedge B \to C$

2. 证明

a) $(\forall x)A(x) \vdash (\exists x)A(x)$

b) $(\exists x)(\forall y)A(x,y) \vdash (\forall y)(\exists x)A(x,y)$

c) $(\forall x)A(x) \vee (\forall x)B(x) \vdash (\forall x)(A(x) \vee B(x))$

d) $(\forall x)(A \to B(x)) \vdash\dashv A \to (\forall x)B(x)$，其中 x 不是 A 的自由变元。

e) $(\exists x)(A(x) \vee B(x)) \vdash\dashv (\exists x)A(x) \vee (\exists x)(B(x)$

f) $(\forall x)(A(x) \wedge B(x)) \vdash\dashv (\forall x)A(x) \wedge (\forall x)B(x)$

g) $(\exists x)A(x) \to (\forall x)B(x) \vdash (\forall x)(A(x) \to B(x))$

h) $(\forall x)(A(x) \to B(x)) \vdash (\forall x)A(x) \to (\forall x)B(x)$

3. 用自然推理系统证明，定义域是全域的对称的且传递的二元关系是自反的。

4. 设 A 是命题逻辑的合式公式，Γ 是命题逻辑的合式公式的有限序列，A 是 Γ 的逻辑结果，证明 $\Gamma \vdash A$ 是自然推理系统的定理。

§6.2　形式证明方法

本节主要介绍形式证明过程中常用的一些方法和技巧。

在某些情况下，只要选用适当的规则就可以一步一步推出结果。

例 1　证明 $(A \to B) \wedge (B \to C) \wedge A \vdash C$

①	$(A \to B) \wedge (B \to C) \wedge A \vdash (A \to B) \wedge (B \to C) \wedge A$	$(\in)$
②	$(A \to B) \wedge (B \to C) \wedge A \vdash A$	① 及 $(\wedge_-)$
③	$(A \to B) \wedge (B \to C) \wedge A \vdash A \to B$	① 及 $(\wedge_-)$
④	$(A \to B) \wedge (B \to C) \wedge A \vdash B$	②，③ 及 $(\to_-)$
⑤	$(A \to B) \wedge (B \to C) \wedge A \vdash B \to C$	① 及 $(\wedge_-)$
⑥	$(A \to B) \wedge (B \to C) \wedge A \vdash C$	④，⑤ 及 $(\to_-)$

例 2　证明 $(\forall x)(A(x) \wedge B(x)) \vdash\dashv (\forall x)A(x) \wedge (\forall x)B(x)$

①	$(\forall x)(A(x) \wedge B(x)) \vdash (\forall x)(A(x) \wedge B(x))$	$(\in)$
②	$(\forall x)(A(x) \wedge B(x)) \vdash A(x) \wedge B(x)$	① 及 $(\forall_-)$

③ $(\forall x)(A(x) \wedge B(x)) \vdash A(x)$ ② 及($\wedge_-$)

④ $(\forall x)(A(x) \wedge B(x)) \vdash (\forall x)A(x)$(∵ x 在$(\forall x)(A(x) \wedge B(x))$ 中无自由出现) ③ 及($\forall_+$)

⑤ $(\forall x)(A(x) \wedge B(x)) \vdash B(x)$ ② 及($\wedge_-$)

⑥ $(\forall x)(A(x) \wedge B(x)) \vdash (\forall x)B(x)$(∵ x 在$(\forall x)(A(x) \wedge B(x))$ 中无自由出现) ⑤ 及($\forall_+$)

⑦ $(\forall x)(A(x) \wedge B(x)) \vdash (\forall x)(A(x) \wedge (\forall x)B(x)$ ④,⑥ 及($\wedge_+$)

⑧ $(\forall x)A(x) \wedge (\forall x)B(x) \vdash (\forall x)(A(x) \wedge B(x))$ (类似可证)

但在大多数情况下并非如此。而是要引入一些附加前提,其目的是以便分解开已有的某些前提,好利用其中的有用"信息"。引入附加前提的基本原则是根据结果的结构形式及所需的推理规则,或者根据某前提的结构形式及有关的推理规则。下面通过例子来介绍引入附加前提的基本方法。

i) 若要证$\Gamma \vdash A \to B$,一般可把A作为附加前提引入,以推出B(再用$\to_+$可得$A \to B$).如达不到目的,可再把B的否定作为附加前提引入,以推出矛盾结果(再利用关于$\neg$的规则即可得B)。

例 3 证明$A \to (B \to C) \vdash A \wedge B \to C$.

这里引入附加前提$A \wedge B$.

① $A \to (B \to C), A \wedge B \vdash A \wedge B$ ($\in$)

② $A \to (B \to C), A \wedge B \vdash A$ ① 及($\wedge_-$)

③ $A \to (B \to C), A \wedge B \vdash B$ ① 及($\wedge_-$)

④ $A \to (B \to C), A \wedge B \vdash A \to (B \to C)$ ($\in$)

⑤ $A \to (B \to C), A \wedge B \vdash B \to C$ ②,④ 及($\to_-$)

⑥ $A \to (B \to C), A \wedge B \vdash C$ ③,⑤ 及($\to_-$)

⑦ $A \to (B \to C), A \wedge B \vdash A \wedge B \to C$ ⑥ 及($\to_+$)

例 4 证明$A \to \neg B \vdash B \to \neg A$.

这里引入的附加前提是B及$\neg A$的否定A.

① $A \to \neg B, B, A \vdash A$ ($\in$)

② $A \to \neg B, B, A \vdash A \to \neg B$ ($\in$)

③ $A \to \neg B, B, A \vdash \neg B$ ①,② 及($\to_-$)

④ $A \to \neg B, B, A \vdash B$ ($\in$)

⑤ $A \to \neg B, B \vdash \neg A$ ③,④ 及($\neg_+$)

⑥ $A \to \neg B \vdash B \to \neg A$ ⑤ 及($\to_+$)

ii) 若要证$\Gamma, A \vee B \vdash C$,则可分别把$A$与$B$作为附加前提引入,即先证$\Gamma, A \vdash C$与$\Gamma, B \vdash C$,再由$\vee_-$规则得到$\Gamma, A \vee B \vdash C$.

例 5 证明二难推论:$A \vee B, A \to C, B \to C \vdash C$.

因为前提中有$A \vee B$,故分别把A与B作为附加前提引入。

① $A, A \to C, B \to C \vdash A$ ($\in$)

② $A, A \to C, B \to C \vdash A \to C$ ($\in$)

③ $A, A \to C, B \to C \vdash C$ ①,② 及($\to_-$)

④ $B, A \to C, B \to C \vdash B$ ($\in$)

⑤ $B, A \to C, B \to C \vdash B \to C$ ($\in$)

⑥ $A, A \to C, B \to C \vdash C$ ④,⑤ 及($\to_-$)

⑦ $A \vee B, A \to C, B \to C \vdash C$ ③,⑥ 及($\vee_-$)

例 6 证明$(A \to B) \vee (A \to C) \vdash A \to (B \vee C)$.

① $A \to B, A \vdash A$ ($\in$)

② $A \to B, A \vdash A \to B$ ($\in$)

③ $A \to B, A \vdash B$ ①,② 及($\to_-$)

④ $A \to B, A \vdash B \vee C$ ③ 及($\vee_+$)

⑤ $A \to B \vdash A \to (B \vee C)$ ④ 及($\to_+$)

⑥ $A \to C \vdash A \to (B \vee C)$ 同理可证

⑦ $(A \to B) \vee (A \to C) \vdash A \to (B \vee C)$ ⑤,⑥ 及($\vee_-$)

iii) 若要证$\Gamma \vdash A$,可把结论A的否定作为附加前提引入,以推出矛盾(再用关于 $\neg$ 的规则得到 A).

例 7 **证明** $A \wedge \neg B \vdash \neg(A \to B)$

这里把 $\neg(A \to B)$ 的否定 $A \to B$ 作为附加前提引入。

① $A \wedge \neg B, A \to B \vdash A \wedge \neg B$ ($\in$)

② $A \wedge \neg B, A \to B \vdash A$ ① 及($\wedge_-$)

③ $A \wedge \neg B, A \to B \vdash A \to B$ ($\in$)

④ $A \wedge \neg B, A \to B \vdash B$ ②,③ 及($\to_-$)

⑤ $A \wedge \neg B, A \to B \vdash \neg B$ ① 及($\wedge_-$)

⑥ $A \wedge \neg B \vdash \neg(A \to B)$ ④,⑤ 及($\neg_+$)

例 8 证明 $\neg(A \to B) \vdash A \wedge \neg B$.

要证 $\neg(A \to B) \vdash A \wedge \neg B$,可先证 $\neg(A \to B) \vdash A$ 与 $\neg(A \to B) \vdash \neg B$.

1) 对 $\neg(A \to B) \vdash \neg B$,可将 B 作为附加前提引入,以便推出矛盾(该矛盾应与已有前提相关),此时最理想的是证出 $\neg(A \to B), B \vdash A \to B$. 因此,$A$ 也应作为附加前提引入。

① $\neg(A \to B), B, A \vdash B$ ($\in$)

② $\neg(A \to B), B \vdash A \to B$ ① 及($\to_+$)

③ $\neg(A \to B), B \vdash \neg(A \to B)$ ($\in$)

④ $\neg(A \to B) \vdash \neg B$ ②,③ 及($\neg_+$)

2) 对 $\neg(A \to B) \vdash A$,可将 $\neg A$ 作为附加前提引入,以推出矛盾。类似地,我们也希望证出 $\neg(A \to B), \neg A \vdash A \to B$. 因此,$A$ 也应作为附加前提引入。

⑤ $\neg(A \to B), \neg A, A \vdash A$ ($\in$)

⑥ $\neg(A \to B), \neg A, A \vdash \neg A$ ($\in$)

⑦ $\neg(A \to B), \neg A, A \vdash B$ ⑤,⑥ 及($\neg_-$)

⑧ $\neg(A \to B), \neg A \vdash A \to B$ ⑦ 及($\to_+$)

⑨ $\neg(A\to B),\neg A\vdash\neg(A\to B)$ $(\in)$

⑩ $\neg(A\to B)\vdash\neg\neg A$ ⑧,⑨ 及$(\neg_+)$

⑪ $\neg(A\to B)\vdash A$ ⑩ 及$(\neg\neg_-)$

⑫ $\neg(A\to B)\vdash A\wedge\neg B$ ④,⑪ 及$(\wedge_+)$

iv) 若要证$\Gamma\vdash B$,在已证出$\Gamma\vdash(\exists x)A(x)$时,可以引入附加前提$A(b)$(其中个体常量$b$不在$\Gamma$,$A(x)$和$B$中出现),以便证出$B$(再由$\exists_-$规则即可得出$\Gamma\vdash B$).

例 9 证明:若$\Gamma,A(x)\vdash B(x)$,则$\Gamma,(\exists x)A(x)\vdash(\exists x)B(x)$,其中$x$不是$\Gamma$中任何公式的自由变元。

① $\Gamma,A(x)\vdash B(x)$ 已知

② $\Gamma,A(x)\vdash(\exists x)B(x)$ ① 及$(\exists_+)$

③ $\Gamma\vdash A(x)\to(\exists x)B(x)$ ② 及$(\to_+)$

④ $\Gamma\vdash(\forall x)(A(x)\to(\exists x)B(x))$(∵$x$在$\Gamma$中不自由) ③ 及$(\forall_+)$

⑤ $\Gamma\vdash A(b)\to(\exists x)B(x)$(个体常元$b$不在$\Gamma$,$A(x)$和$B(x)$中出现)
④ 及$(\forall_-)$

⑥ $\Gamma,A(b)\vdash A(b)\to(\exists x)B(x)$ ⑤ 及$(\in_+)$

⑦ $\Gamma,A(b)\vdash A(b)$ $(\in)$

⑧ $\Gamma,A(b)\vdash(\exists x)B(x)$ ⑥,⑦ 及$(\to_-)$

⑨ $\Gamma,(\exists x)A(x),A(b)\vdash(\exists x)B(x)$ ⑧ 及$(\in_+)$

⑩ $\Gamma,(\exists x)A(x)\vdash(\exists x)A(x)$ $(\in)$

⑪ $\Gamma,(\exists x)A(x)\vdash(\exists x)B(x)$(∵ 个体常元$b$不在$\Gamma$,$A(x)$和$B(x)$中出现)
⑨,⑩ 及$(\exists_-)$

v) 关于其它量词规则的使用,要注意满足规则要求的条件。

例 10 证明$\vdash(\forall x)(A(x)\to B)\rightleftharpoons((\exists x)A(x)\to B)$,其中$B$中不含$x$的自由出现。

根据结果$(\forall x)(A(x)\to B)\rightleftharpoons((\exists x)A(x)\to B)$的结构,可先证$(\forall x)(A(x)\to B)\vdash(\exists x)A(x)\to B$与$(\exists x)A(x)\to B\vdash(\forall x)(A(x)\to B)$,再由$\rightleftharpoons_+$规则得到欲证结果。

① $(\forall x)(A(x)\to B),A(x)\vdash A(x)$ $(\in)$

② $(\forall x)(A(x)\to B),A(x)\vdash(\forall x)(A(x)\to B)$ $(\in)$

③ $(\forall x)(A(x)\to B),A(x)\vdash A(x)\to B$ ② 及$(\forall_-)$

④ $(\forall x)(A(x)\to B),A(x)\vdash B$ ①,③ 及$(\to_-)$

⑤ $(\forall x)(A(x)\to B),(\exists x)A(x)\vdash B$(∵ x不是B和$(\forall x)(A(x)\to B)$中的自由变元) ④ 及(左$\exists_+$)

⑥ $(\forall x)(A(x)\to B)\vdash(\exists x)A(x)\to B$ ⑤ 及$(\to_+)$

⑦ $(\exists x)A(x)\to B,A(x)\vdash A(x)$ $(\in)$

⑧ $(\exists x)A(x)\to B,A(x)\vdash(\exists x)A(x)$(∵$x$对$A(x)$中的$x$是可代入的)
⑦ 及$(\exists_-)$

⑨ $(\exists x)A(x)\to B,A(x)\vdash(\exists x)A(x)\to B$ $(\in)$

⑩ $(\exists x)A(x)\to B,A(x)\vdash B$ ⑧,⑨ 及$(\to_-)$

⑪ $(\exists x)A(x) \to B \vdash A(x) \to B$ ⑩ 及$(\to_+)$

⑫ $(\exists x)A(x) \to B \vdash (\forall x)(A(x) \to B)$(∵ x 不是$(\exists x)A(x) \to B$ 中的自由变元) ⑪ 及$(\forall_+)$

⑬ $\vdash (\forall x)(A(x) \to B) \rightleftharpoons ((\exists x)A(x) \to B)$ ⑥,⑫ 及$(\rightleftharpoons_+)$

例 11 证明$(\exists x)(A(x) \wedge B) \vdash\!\dashv (\exists x)A(x) \wedge B$,其中 B 中不含 x 的自由出现。

① $A(x) \wedge B \vdash A(x) \wedge B$ $(\in)$

② $A(x) \wedge B \vdash A(x), B$ ① 及$(\wedge_-)$

③ $(\exists x)(A(x) \wedge B) \vdash (\exists x)A(x)$ ② 及$(\exists\exists_+)$

④ $(\exists x)(A(x) \wedge B) \vdash B$(∵ x 不是 B 中的自由变元) ② 及(左$\exists_+$)

⑤ $(\exists x)(A(x) \wedge B) \vdash (\exists x)A(x) \wedge B$ ③,④ 及$(\wedge_+)$

⑥ $(\exists x)A(x) \wedge B \vdash (\exists x)A(x) \wedge B$ $(\in)$

⑦ $(\exists x)A(x) \wedge B \vdash (\exists x)A(x)$ ⑥ 及$(\wedge_-)$

⑧ $(\exists x)A(x) \wedge B, A(b) \vdash A(b)$(个体常元 b 不在 $A(x)$ 和 B 中出现) $(\in)$

⑨ $(\exists x)A(x) \wedge B \vdash B$ ⑥ 及$(\wedge_-)$

⑩ $(\exists x)A(x) \wedge B, A(b) \vdash B$ ⑩ 及$(\in_+)$

⑪ $(\exists x)A(x) \wedge B, A(b) \vdash A(b) \wedge B$ ⑧,⑩ 及$(\wedge_+)$

⑫ $(\exists x)A(x) \wedge B, A(b) \vdash (\exists x)(A(x) \wedge B)$(∵ b 对 $A(x) \wedge B$ 中的 x 是可代入的) ⑩ 及$(\exists_+)$

⑬ $(\exists x)A(x) \wedge B \vdash (\exists x)(A(x) \wedge B)$(∵ b 不在 $A(x)$ 和 B 中出现) ⑦,⑫ 及$(\exists_-)$

例 12 设 $P(x,y)$ 为二元谓词,证明$(\exists y)(\forall x)P(x,y) \vdash (\forall x)(\exists y)P(x,y)$.

① $P(x,y) \vdash P(x,y)$ $(\in)$

② $P(x,y) \vdash (\exists y)P(x,y)$(∵ y 对 $P(x,y)$ 中的 y 是可代入的) ① 及$(\exists_+)$

③ $(\forall x)P(x,y) \vdash (\exists y)P(x,y)$ ② 及(左$\forall_+$)

④ $(\forall x)P(x,y) \vdash (\forall x)(\exists y)P(x,y)$(∵ x 不是$(\forall x)P(x,y)$ 中的自由变元) ③ 及$(\forall_+)$

⑤ $(\exists y)(\forall x)P(x,y) \vdash (\forall x)(\exists y)P(x,y)$(∵ y 不是$(\forall x)(\exists y)P(x,y)$ 中的自由变元) ④ 及(左$\exists_+$)

习 题 6.2

1. 证明

a) $\vdash \neg(A\wedge B)\rightleftharpoons \neg A\vee \neg B$

b) $\vdash A\wedge(B\vee C)\rightleftharpoons(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$

c) $\vdash A\vee(B\wedge C)\rightleftharpoons(A\vee B)\wedge(A\vee C)$

d) $\vdash A\vee F\rightleftharpoons A$

e) $\vdash A\wedge T\rightleftharpoons A$

f) $\vdash (A\to B)\rightleftharpoons(\neg A\vee B)$

g) $\neg(A\to B)\vdash A$

h) $\neg(A\to B)\vdash \neg B$

2. 设 $A(x)$,$B(x)$和 C 为合式公式且 x 不是 C 的自由变元。证明:

a) $\vdash (\exists x)(C\to A(x))\rightleftharpoons(C\to(\exists x)A(x))$

b) $(\exists x)(A(x)\to C)\vdash\dashv(\forall x)A(x)\to C$

c) $(\exists x)(A(x)\vee C)\vdash\dashv(\exists x)A(x)\vee C$

d) $(\forall x)(A(x)\wedge C)\vdash\dashv(\forall x)A(x)\wedge C$

e) $\neg(\forall x)A(x)\vdash\dashv(\exists x)\neg A(x)$

f) $(\exists x)(A(x)\wedge B(x))\vdash(\exists x)A(x)\wedge(\exists x)B(x)$

3. 证明导出规则(左$\forall_+$),(左$\exists_+$).

4. 证明 τ 规则:若 $\Gamma\vdash\Delta$ 且 $\Delta\vdash A$,则 $\Gamma\vdash A$. 其中 Δ 为有穷合式公式集合。

第七章　图　　论

在第二章中曾经讨论了二元关系的关系图，涉及到了图论中的一些基本概念。在那里，图是表达二元关系的一个手段。本章我们将把图的概念推广，并作为一个抽象数学系统来研究。

图论已有二百多年的历史，近三四十年来发展十分迅速，成为一个新兴的数学分支。图论在自然科学和社会科学的许多领域有着广泛的应用，计算机科学的许多领域都离不开图论。图论是一个十分活跃的新兴学科，各种新概念不断涌现，名词术语极不统一，请读者注意。

§7.1　图的基本概念

在第二章中，我们曾经用有向图表示二元关系，在相容关系的简化关系图中用一条无向边代替一对反向的有向边而得到无向图。对于既有有向边又有无向边的混合图，可以用两条方向相反的有向边代替无向边，而得到一个有向图。本章只讨论无向图和有向图，而不涉及混合图。在二元关系的关系图中，没有两条边有相同的起点和终点，我们下面定义的图允许多条边有相同的起点和终点。我们把图定义为一个抽象数学系统。

定义 7.1.1　设 V 和 E 是有限集合，且 $V \neq \varnothing$.

i) 如果 $\Psi: E \to \{\{v_1, v_2\} \mid v_1 \in V$ 且 $v_2 \in V\}$，则称 $G = \langle V, E, \Psi\rangle$ 为无向图。

ii) 如果 $\Psi: E \to V \times V$，则称 $G = \langle V, E, \Psi\rangle$ 为有向图。

无向图和有向图统称为图，其中 V（称为 G 的结点集）的元素称为图 G 的结点，E（称为 G 的边集）的元素称为图 G 的边，图 G 的结点数目称为它的阶。

我们可以用几何图形表示上面定义的图。用小圆圈表示结点。在无向图中，若 $\Psi(e) = \{v_1, v_2\}$，就用一条连接结点 v_1 和 v_2 的无向线段表示边 e. 在有向图中，若 $\Psi(e) = \langle v_1, v_2\rangle$，就用一条由 v_1 指向 v_2 的有向线段表示边 e.

定义 7.1.2　设无向图 $G = \langle V, E, \Psi\rangle$，$e, e_1, e_2 \in E$ 且 $v_1, v_2 \in V$.

i) 如果 $\Psi(e) = \{v_1, v_2\}$，则称 e 与 v_1（或 v_2）互相关联，e 连接 v_1 和 v_2，v_1 和 v_2 既是 e 的起点，也是 e 的终点，也称 v_1 和 v_2 邻接。

ii) 如果两条不同边 e_1 和 e_2 与同一个结点关联，则称 e_1 和 e_2 邻接。

定义 7.1.3　设有向图 $G = \langle V, E, \Psi\rangle$，$e \in E$ 且 $v_1, v_2 \in V$. 如果 $\Psi(e) = \langle v_1, v_2\rangle$，则称 e 连接 v_1 和 v_2，e 与 v_1（或 v_2）互相关联，分别称 v_1 和 v_2 是 e 的起点和终点，也称 v_1 和 v_2 邻接。

例 1　无向图 $\langle\{1,2,3\}, \{a,b\}, \{\langle a, \{1,2\}\rangle, \langle b, \{2,3\}\rangle\}\rangle$ 和有向图 $\langle\{A,B,C,D\},$

$\{p,q\},\{\langle p,\langle A,B\rangle\rangle,\langle q,\langle C,B\rangle\rangle\}\rangle$ 分别图示为图 7.1.1 和图 7.1.2. 在图 7.1.1 中,a 连接 1 和 2,1 和 2 邻接,a 和 b 邻接。在图 7.1.2 中,A 和 B 分别是 p 的起点和终点,A 与 B 邻接,C 与 B 邻接。

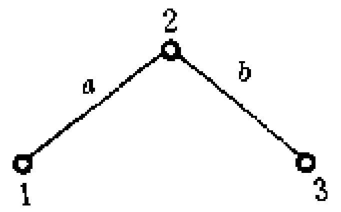


图 7.1.1　无向图

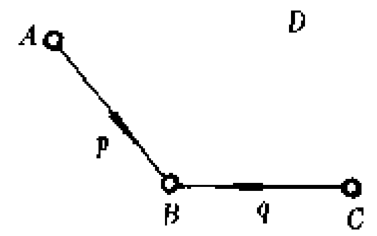


图 7.1.2　有向图

定义 7.1.4　设图 $G=\langle V,E,\Psi\rangle$,$e_1$ 和 e_2 是 G 的两条不同的边。

i) 如果与 e_1 关联的两个结点相同,则称 e_1 为自圈;

ii) 如果 $\Psi(e_1)=\Psi(e_2)$,则称 e_1 与 e_2 平行;

iii) 如果图 G 没有自圈,也没有平行边,则称 G 为简单图。

需要注意,在有向图中,如果两条边连接的结点相同,若方向相反,则它们也不平行。简单图是一类非常重要的图。在某些图论著作中,把我们定义的简单图称为图,把允许有平行边的图称为多重图,把我们这里定义的图称为伪图。

我们常常需要关心有多少条边与某一个结点相关联,这就引出了极端重要的结点的度的概念。

定义 7.1.5　设 v 是图 G 的结点。

i) 如果 G 是无向图,G 中与 v 关联的边的数目之和称为 v 的度,记为 $d_G(v)$;

ii) 如果 G 是有向图,G 中以 v 为起点的边的数目称为 v 的出度,记为 $d_G^+(v)$;G 中以 v 为终点的边的数目称为 v 的入度,记为 $d_G^-(v)$;v 的出度与入度之和称为 v 的度,记为 $d_G(v)$。

需要注意,在计算无向图中结点的度时,一个自圈要计算两次。

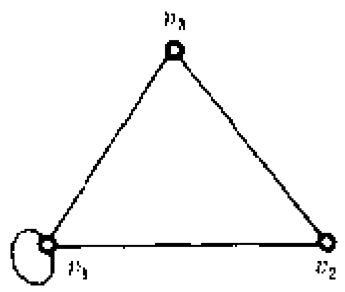


图 7.1.3　无向图

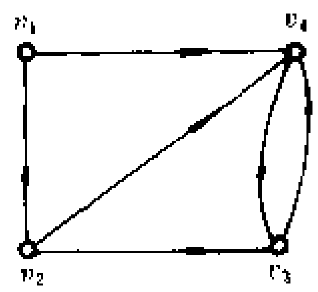


图 7.1.4　有向图

例 2　在图 7.1.3 所示的无向图 G 中,$d_G(v_1)=4$,$d_G(v_2)=d_G(v_3)=2$. 在图 7.1.4 所示的有向图 D 中,$d_D^+(v_1)=d_D^+(v_2)=d_D^-(v_3)=2$,$d_D^-(v_1)=0$,$d_D^-(v_4)=3$,$d_D^-(v_2)=d_D^+(v_3)=d_D^+(v_4)=1$,$d_D(v_1)=2$,$d_D(v_2)=d_D(v_3)=3$,$d_D(v_4)=4$.

显然,每增加一条边,都使图中所有结点的度数之和增加 2.

定理 7.1.1　设无向图 $G=\langle V,E,\Psi\rangle$ 有 m 条边,则 $\sum\limits_{v\in V}d_G(v)=2m$.

定理 7.1.2　设有向图 $G=\langle V,E,\Psi\rangle$ 有 m 条边,则 $\sum\limits_{v\in V}d_G^+(v)-\sum\limits_{v\in V}d_G^-(v)=m$,且

$\sum\limits_{v\in V} d_G(v) = 2m.$

这两个定理的证明很简单，留作练习。

定义 7.1.6 度为奇数的结点称为奇结点，度为偶数的结点称为偶结点。

由前面两个定理可直接得出以下定理。

定理 7.1.3 任何图都有偶数个奇结点。

定义 7.1.7 度为 0 的结点称为孤立点，度为 1 的结点称为端点。

定义 7.1.8 定义以下特殊图：

i) 结点都是孤立点的图称为零图；

ii) 一阶零图称为平凡图；

iii) 所有结点的度均为自然数 d 的无向图称为 d 度正则图；

iv) 设 $n \in I_+$，如果 n 阶简单无向图 G 是 $n-1$ 度正则图，则称 G 为完全无向图，记为 K_n；

v) 设 $n \in I_+$，每个结点的出度和入度均为 $n-1$ 的 n 阶简单有向图称为完全有向图。

显然，完全无向图的任意两个不同的结点都邻接，完全有向图的任意两个不同的结点之间都有一对方向相反的边相连接。图 7.1.5 画出了一至五阶完全无向图，图 7.1.6 画出了一至三阶完全有向图。

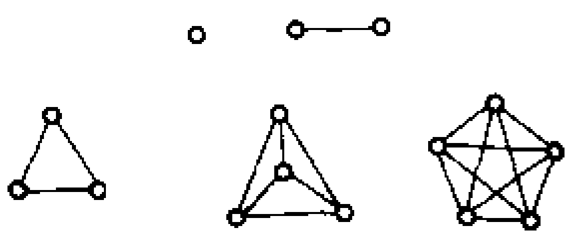


图 7.1.5 一至五阶完全无向图

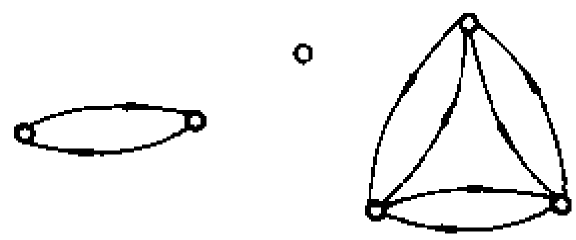


图 7.1.6 一至三阶完全有向图

从图的定义可以看出，图最本质的是结点和边的关联关系。两个表面上看起来不同的图可能表达相同的结点和边的关联关系。如图 7.1.7 的两个图不仅结点和边的数目相同，而且结点和边的关联关系也相同。为了说明这种现象，我们引进两个图同构的概念。

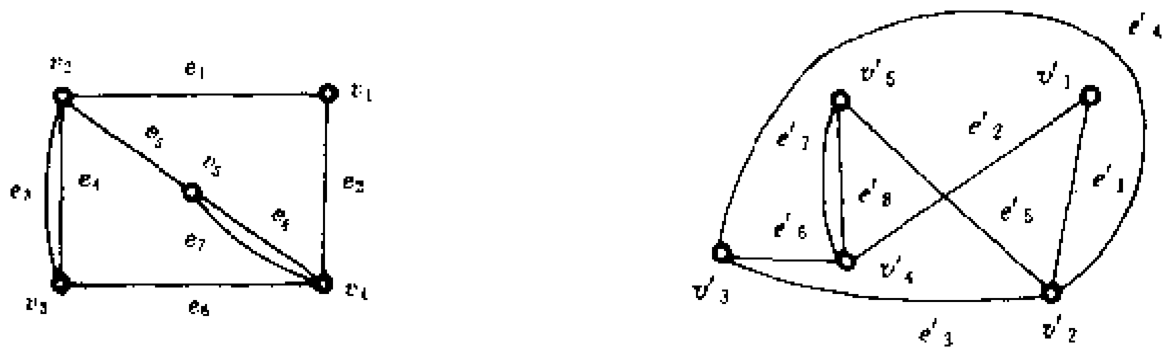


图 7.1.7 同构的图

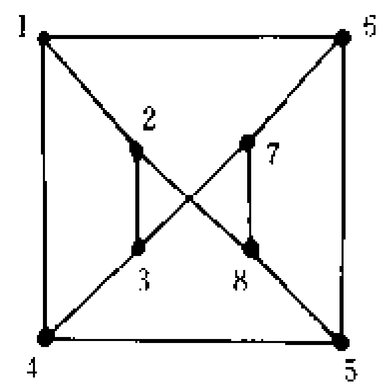
定义 7.1.9 设图 $G=\langle V,E,\Psi\rangle$ 和 $G'=\langle V',E',\Psi'\rangle$。如果存在双射 $f:V\to V'$ 和双射 $g:E\to E'$，使得对于任意 $e\in E$ 及 $v_1,v_2\in V$ 都有

$$\Psi'(g(e))=\begin{cases}\{f(v_1),f(v_2)\} & 若\ \Psi(e)=\{v_1,v_2\}\\ \langle f(v_1),f(v_2)\rangle & 若\ \Psi(e)=\langle v_1,v_2\rangle\end{cases}$$

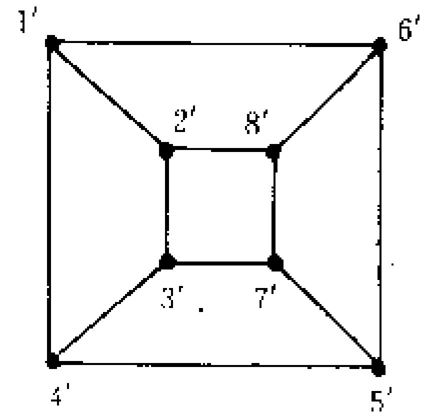
则称 G 与 G' 同构，记做 $G\cong G'$，并称 f 和 g 为 G 与 G' 之间的同构映射，简称同构。

两个同构的图有同样多的结点和边，并且映射 f 保持结点间的邻接关系，映射 g 保持边之间的邻接关系。要找出一个判断图同构的简单充要条件是很困难的，这是图论中一个仍未解决的难题。但我们可以给出一些两个图同构的必要条件，如同构图的对应结点之度相等。由此可知，若两图的 d 度结点的个数不同，则必不同构。

例 3 判断下面两个图是否同构？



<G>



<G'>

解 设 f 和 g 为 G 与 G' 之间的同构映射。考虑与 1 邻接的点 2,4,6，若 $f(1) = 1'$，则必有 $f(2) = 2'$，$f(4) = 4'$，$f(6) = 6'$。再考虑与 2 邻接的点 3、8，$f(8)$ 只能映到 $3'$ 或 $8'$，不妨设 $f(8) = 8'$（$f(8) = 3'$ 类似可证），则 $f(3) = 3'$。再考虑与 8 邻接的点 5、7，只能映到 G' 中与 $8'$ 邻接的两个点 $7'$、$6'$。而 $6'$ 已被映上。故 f 不可能是双射。矛盾。因此，G 和 G' 不同构。

习 题 7.1

1. 画出图 $G = \langle V, E, \Psi \rangle$ 的图示，指出其中哪些图是简单图。

a) $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$

$\Psi = \{\langle e_1, \{v_2\}\rangle, \langle e_2, \{v_2, v_4\}\rangle, \langle e_3, \{v_1, v_2\}\rangle, \langle e_4, \{v_1, v_3\}\rangle, \langle e_5, \{v_1, v_3\}\rangle, \langle e_6, \{v_3, v_4\}\rangle, \langle e_7, \{v_4, v_5\}\rangle\}$

b) $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$

$\Psi = \{\langle e_1, \langle v_1, v_3\rangle\rangle, \langle e_2, \langle v_1, v_4\rangle\rangle, \langle e_3, \langle v_4, v_1\rangle\rangle, \langle e_4, \langle v_1, v_2\rangle\rangle, \langle e_5, \langle v_2, v_2\rangle\rangle, \langle e_6, \langle v_3, v_4\rangle\rangle, \langle e_7, \langle v_5, v_4\rangle\rangle, \langle e_8, \langle v_5, v_3\rangle\rangle, \langle e_9, \langle v_5, v_3\rangle\rangle, \langle e_{10}, \langle v_5, v_3\rangle\rangle\}$

c) $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$

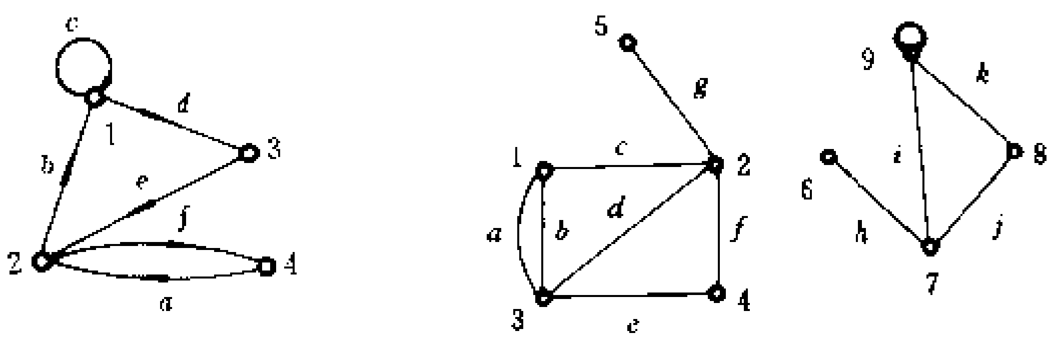
$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}\}$

$\Psi = \{\langle e_1, \langle v_2, v_1\rangle\rangle, \langle e_2, \langle v_1, v_2\rangle\rangle, \langle e_3, \langle v_1, v_3\rangle\rangle, \langle e_4, \langle v_2, v_4\rangle\rangle, \langle e_5, \langle v_3, v_4\rangle\rangle, \langle e_6, \langle v_4, v_5\rangle\rangle, \langle e_7, \langle v_5, v_3\rangle\rangle, \langle e_8, \langle v_3, v_5\rangle\rangle, \langle e_9, \langle v_6, v_7\rangle\rangle, \langle e_{10}, \langle v_7, v_8\rangle\rangle, \langle e_{11}, \langle v_8, v_6\rangle\rangle\}$

2. 写出图 7.1.8 中图(a) 和图(b) 的抽象数学定义。

3. 证明在 n 阶简单有向图中，完全有向图的边数最多，其边数为 $n(n-1)$。

4. 证明 3 度正则图必有偶数个结点。



(a) (b)

图 7.1.8

5. 在一次集会中，相互认识的人会彼此握手。试证明与奇数个人握手的人数是偶数。

6. 证明图 7.1.9 的两个图同构。

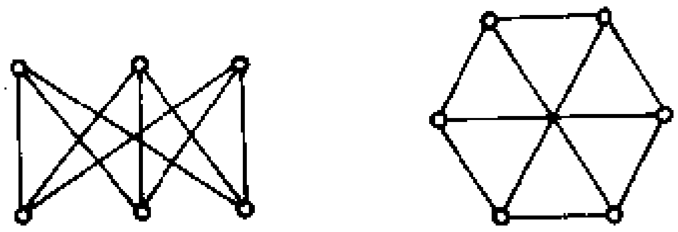

(a) (b)

图 7.1.9

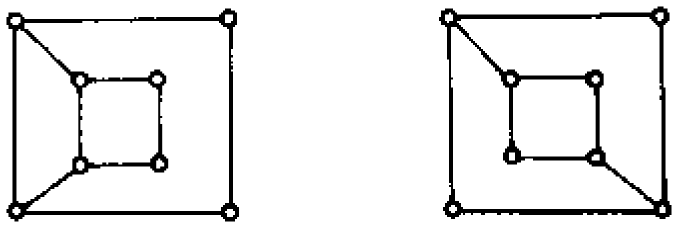

(a) (b)

图 7.1.10

7. 证明：在任意六个人中，若没有三个人彼此都认识，则必有三个人彼此都不认识。

8. 证明图7.1.10的两个图不同构。

9. 图 7.1.11 的两个图是否同构？说明理由。

10. 证明任何阶大于 1 的简单无向图必有两个结点的度相等。

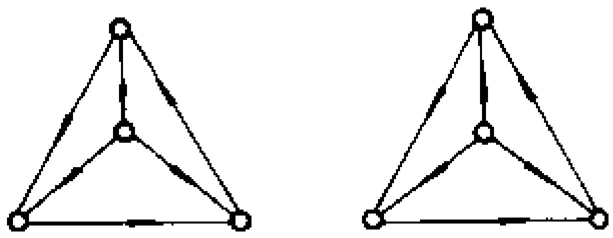

(a) (b)

图 7.1.11

11. 设n阶无向图G有m条边，其中n_k个结点的度为k，其余结点的度为$k+1$，证明$n_k=(k+1)n-2m$.

§7.2 子图和图的运算

在研究和描述图的性质时，子图的概念占有重要地位。我们首先引进子图的概念，然后讨论图的运算。

定义 7.2.1 设$G=\langle V,E,\Psi\rangle$和$G'=\langle V',E',\Psi'\rangle$为图。

i) 如果$V'\subseteq V, E'\subseteq E, \Psi'\subseteq\Psi$，则称$G'$是$G$的子图，记做$G'\subseteq G$，并称$G$是$G'$的母图。

ii) 如果$V'\subseteq V, E'\subset E$且$\Psi'\subset\Psi$，则称$G'$是$G$的真子图，记做$G'\subset G$.

iii) 如果$V'=V, E'\subseteq E$且$\Psi'\subseteq\Psi$，则称G'是G的生成子图。

定义 7.2.2 设图$G=\langle V,E,\Psi\rangle, V'\subseteq V$且$V'\neq\varnothing$. 以$V'$为结点集合，以所有起点和终点均在$V'$中的边为边集合的$G$的子图称为由$V'$导出的$G$的子图，记为$G[V']$。若

$V' \subset V$，导出子图 $G[V - V']$ 记为 $G - V'$。

$G - V'$ 是从 G 中去掉 V' 中的结点以及与这些结点关联的边而得到的 G 的子图。

定义 7.2.3 设图 $G = \langle V,E,\Psi \rangle$，$E' \subseteq E$ 且 $E' \neq \varnothing$，$V' = \{v \mid v \in V$ 且有 $e \in E'$ 使 v 与 e 关联$\}$。以 V' 为结点集合 E' 为边集合的 G 的子图称为由 E' 导出的子图，记为 $G[E']$。

显然，从图示看，图 G 的子图是 G 的一部分，G 的真子图的边比 G 的边少，G 的生成子图与 G 有相同的结点，G 的导出子图 $G[V']$ 是 G 的以 V' 为结点集合的最大子图。

例 1 在图7.2.1中，(b) 是(a) 的子图、真子图、生成子图，(c) 是(a) 的由$\{1,2,3,4\}$导出的子图。

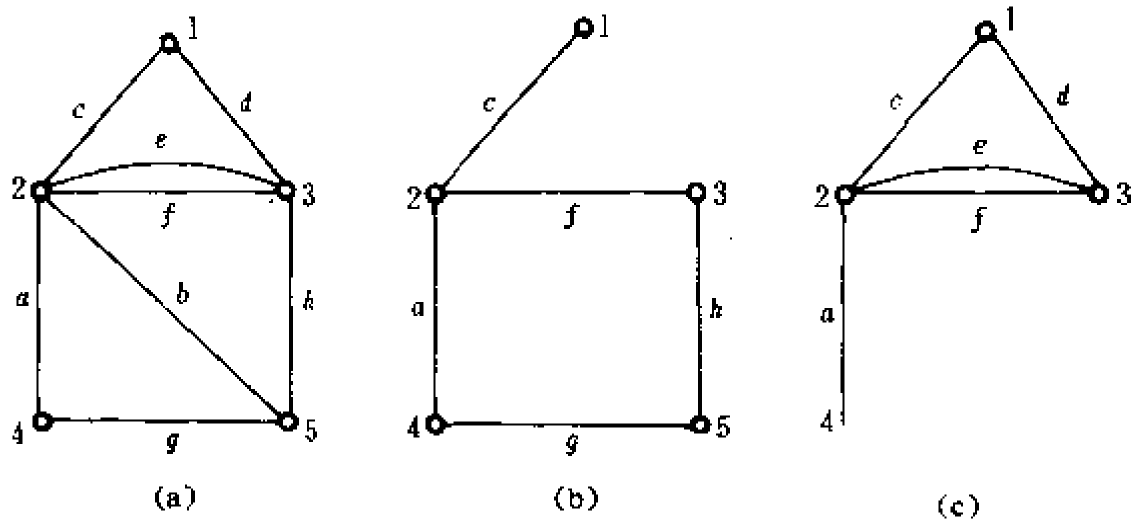


图 7.2.1 图和子图

定义 7.2.4 设图 $G = \langle V,E,\Psi \rangle$ 和 $G' = \langle V',E',\Psi' \rangle$ 同为无向图或同为有向图。

i) 若当 $e \in E \cap E'$ 时均有 $\Psi(e) = \Psi'(e)$，则称 G 与 G' 可运算。

ii) 如果 $V \cap V' = E \cap E' = \varnothing$，则称 G 与 G' 不相交。

iii) 如果 $E \cap E' = \varnothing$，则称 G 与 G' 边不相交。

定义 7.2.5 设图 $G_1 = \langle V_1,E_1,\Psi_1 \rangle$ 与 $G_2 = \langle V_2,E_2,\Psi_2 \rangle$ 可运算。

i) 称以 $V_1 \cap V_2$ 为结点集合，以 $E_1 \cap E_2$ 为边集合的 G_1 与 G_2 的公共子图为 G_1 与 G_2 的交，记为 $G_1 \cap G_2$。

ii) 称以 $V_1 \cup V_2$ 为结点集合，以 $E_1 \cup E_2$ 为边集合的 G_1 与 G_2 的公共母图为 G_1 与 G_2 的并，记为 $G_1 \cup G_2$。

iii) 称以 $V_1 \cup V_2$ 为结点集合，以 $E_1 \oplus E_2$ 为边集合的 $G_1 \cup G_2$ 的生成子图为 G_1 与 G_2 的环和，记为 $G_1 \oplus G_2$。

显然，并不是任何两个图都有交、并和环和的。例如图7.2.2的(a) 和(b) 没有交和并，因为边 e_1 在(a) 中连接 v_1 和 v_2，而在(b) 中连接 v_2 和 v_3。

定理 7.2.1 设图 $G_1 = \langle V_1,E_1,\Psi_1 \rangle$ 与 $G_2 = \langle V_2,E_2,\Psi_2 \rangle$ 可运算。

i) 如果 $V_1 \cap V_2 \neq \varnothing$，则存在唯一的 $G_1 \cap G_2$。

ii) 存在唯一的 $G_1 \cup G_2$ 和 $G_1 \oplus G_2$。

证明 不妨设 G_1 和 G_2 同为有向图，若同为无向图也可同样证明。

i) 定义 $\Psi: E_1 \cap E_2 \to (V_1 \cap V_2) \times (V_1 \cap V_2)$ 为：若 $e \in E_1 \cap E_2$，则令 $\Psi(e) = \Psi_1(e)$。

显然，$\langle V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2, \Psi \rangle = G_1 \cap G_2$. 设图 $G = \langle V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2, \Psi \rangle$ 和 $G' = \langle V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2, \Psi' \rangle$ 均为 G_1 与 G_2 的交。因为 $G \subseteq G_1$，所以对任意 $e \in E_1 \cap E_2$ 皆有 $\Psi(e) = \Psi_1(e)$. 因为 $G' \subseteq G_1$，所以对任意 $e \in E_1 \cap E_2$ 皆有 $\Psi'(e) = \Psi_1(e)$. 这表明 $\Psi = \Psi'$. 因此，$G = G'$.

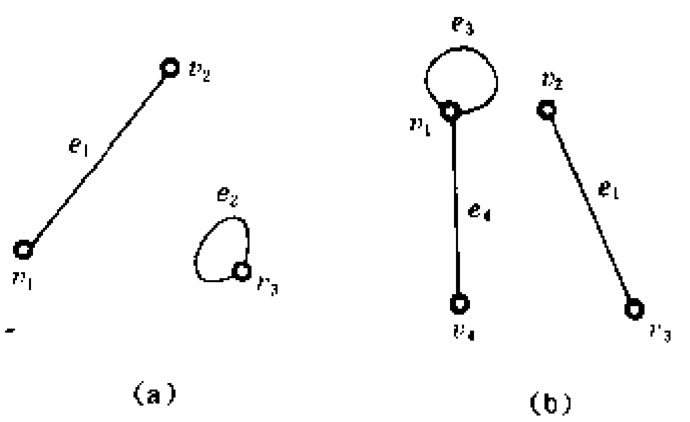


图 7.2.2　不可运算的图

ii) 定义 $\Psi: E_1 \cup E_2 \to (V_1 \cup V_2) \times (V_1 \cup V_2)$ 如下：

$$\Psi(e) = \begin{cases} \Psi_1(e), & e \in E_1 \\ \Psi_2(e), & e \in E_2 - E_1 \end{cases}$$

显然，$\langle V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2, \Psi \rangle = G_1 \cup G_2$. 设 $G = \langle V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2, \Psi >$ 和 $G' = \langle V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2, \Psi' \rangle$ 均为 G_1 与 G_2 的并。因为 $G_1 \subseteq G$ 且 $G_1 \subseteq G'$，所以对任意 $e \in E_1$ 皆有 $\Psi(e) = \Psi_1(e) = \Psi'(e)$. 因为 $G_2 \subseteq G$ 且 $G_2 \subseteq G'$，所以对任意 $e \in E_2 - E_1$ 皆有 $\Psi(e) = \Psi_2(e) = \Psi'(e)$，这表明 $\Psi = \Psi'$. 因此 $G = G'$.

对于存在唯一的 $G_1 \oplus G_2$，可同样证明。

定义 7.2.6　设图 $G = \langle V, E, \Psi \rangle$。若 $E' \subseteq E$，则记 $\langle V, E - E', \Psi \upharpoonright_{(E-E')} \rangle$ 为 $G - E'$；若 $e \in E$，则记 $G - \{e\}$ 为 $G - e$.

$G - E'$ 是从 G 中去掉 E' 中的边所得到的 G 的子图。

定义 7.2.7　设图 $G = \langle V, E, \Psi \rangle$ 和 $G' = \langle V, E', \Psi' \rangle$ 同为无向图或同为有向图，若 G 和 G' 边不相交，则记 $G \cup G'$ 为 $G + E'_{\Psi'}$.

$G + E'_{\Psi'}$ 是由 G 增加 E' 中的边所得到的图，其中 Ψ' 指出 E' 中的边与结点的关联关系。

例 2　设图 7.2.3 中的(a)和(b)分别为 G_1 和 G_2，则(c)，(d)，(e)，(f)，(g)，(h)分别是 $G_1 \cup G_2, G_1 \cap G_2, G_1 \oplus G_2, (G_1 \cup G_2) - \{v_5, v_6\}, (G_1 \cup G_2) - \{g, h\}, G_2 + E'_{\Psi'}$，其中 $E' = \{g\}, \Psi' = \{\langle g, \{v_1, v_3\} \rangle\}$.

定义 7.2.8　设 n 阶无向图 $G = \langle V, E, \Psi \rangle$ 是 n 阶完全无向图 K_n 的生成子图，则称 $K_n - E$ 为 G 的补图，记为 $\bar{G}$.

显然，简单无向图都有补图，并且一个简单无向图的所有补图都是同构的。对于任何两个简单无向图 G_1 和 G_2，如果 G_2 是 G_1 的补图，那么 G_1 也是 G_2 的补图。例如，在图 7.2.4 中，a) 和 b) 互为补图。

定理 7.2.2　设 f 和 g 为图 $G = < V, E, \Psi >$ 与 $G = < V', E', \Psi' >$ 之间的同构。

i) 若 $v \in V$ 且 $v' = f(v)$，则 $d_G(v) = d_{G'}(v')$；

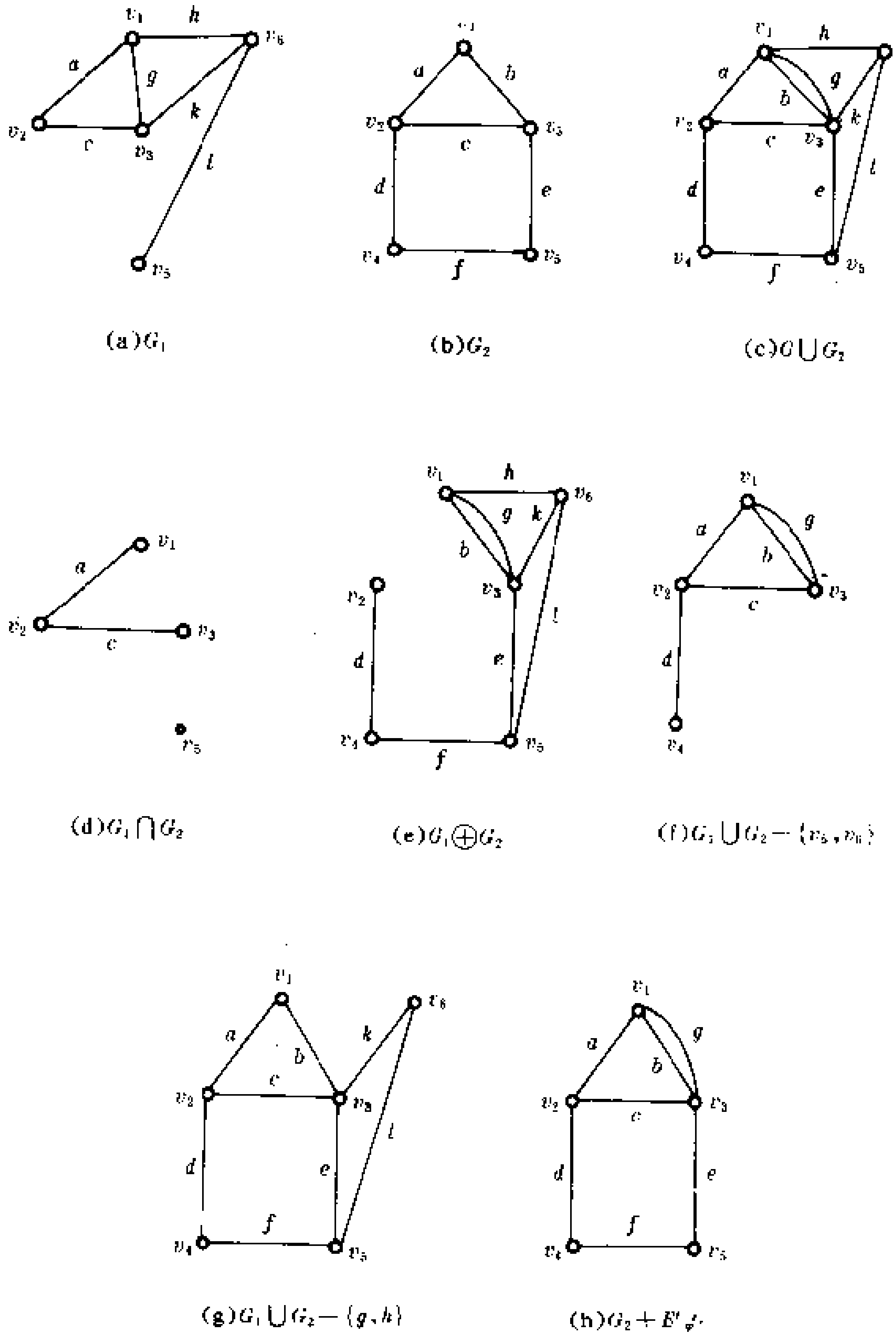
ii) 若 $S \subseteq V$ 且 $S' = f[S]$，则 $G[S] \cong G'[S']$ 且 $G - S \cong G' - S'$；

iii) 若 $K \subseteq E$ 且 $K' = g[K]$，则 $G[K] \cong G'[K']$ 且 $G - K \cong G' - K'$；

iv) $\bar{G} \cong \bar{G'}$，即 G 的补图与 G' 的补图仍同构。

证明是显然的，留作练习。

利用定理 7.2.2 容易验证许多图之间的不同构性。

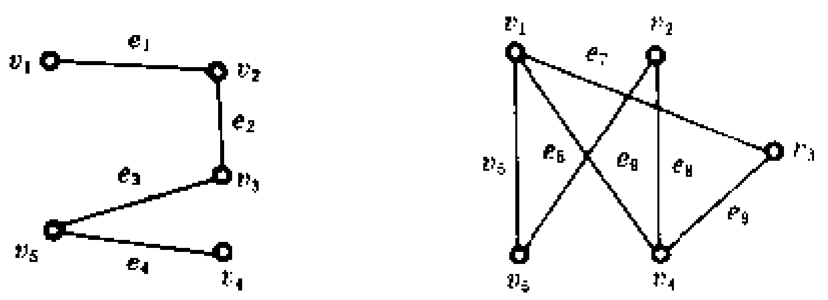


(a)G_1　(b)G_2　(c)$G_1\cup G_2$

(d)$G_1\cap G_2$　(e)$G_1\oplus G_2$　(f)$G_1\cup G_2-\{v_5,v_6\}$

(g)$G_1\cup G_2-\{g,h\}$　(h)$G_2+E'_{g}$

图 7.2.3　图的运算



(a)　(b)

图 7.2.4　互补的图

习　题　7.2

1. 画出 K_4 的所有不同构的子图，说明其中哪些是生成子图，并找出互为补图的生成子图。

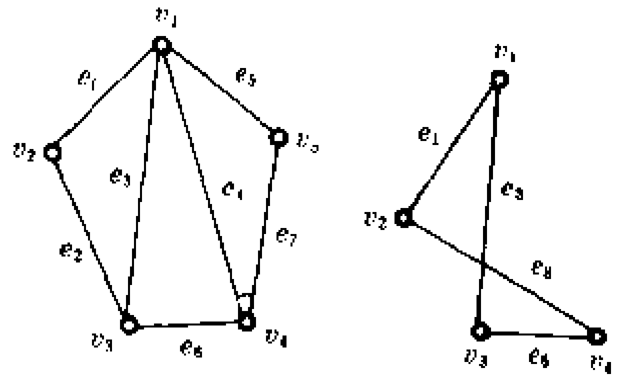
2. 设 $G=\langle V,E,\Psi\rangle$ 是完全有向图。证明：对于 V 的任意非空子集 V'，$G[V']$ 是完全有向图。

3. 画出图 7.2.5 的两个图的交、并和环和。

4. 设 G 是任意 6 阶简单无向图。证明 G 或 $\bar{G}$ 必有一个子图是 3 阶完全无向图。

5. 我们称与其补图同构的简单无向图为自补图。证明每个自补图的阶能被 4 整除或被 4 除余数为 1.

6. 证明没有子图是 3 阶完全无向图的 n 阶简单无向图最多有 $[n^2/4]$ 条边。

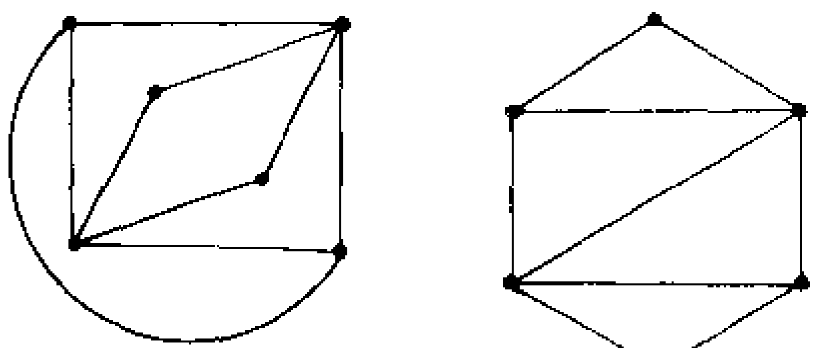


(a)　　(b)

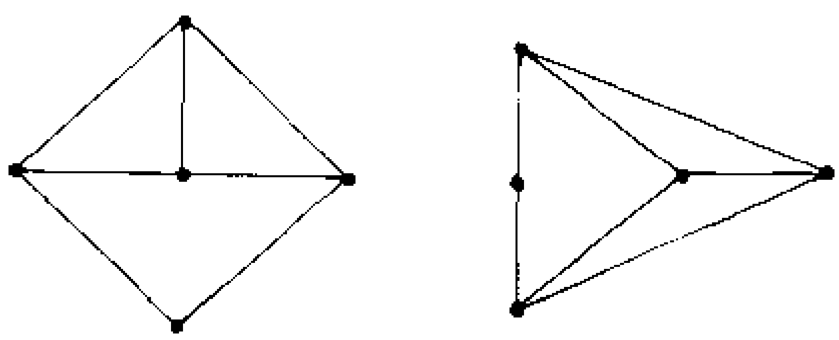
图 7.2.5

7. 试判断下列各对无向图中，哪些对是同构的？哪些对不是同构的？

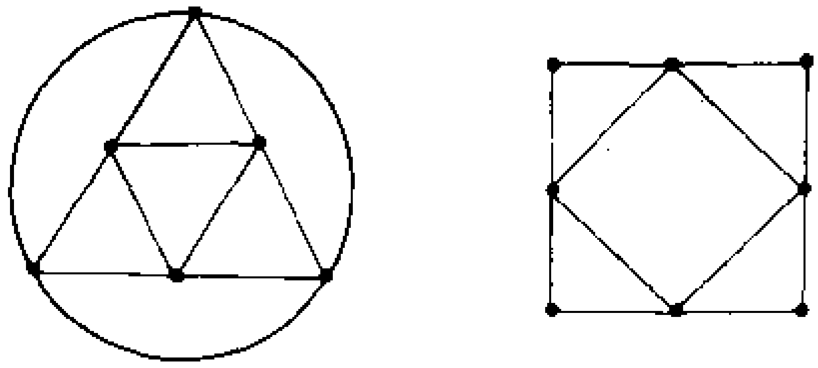
1)



2)



3)



§7.3 路径、回路和连通性

在图论的应用中，经常遇到路径的概念。如用无向图中的结点和边分别表示城市和连接城市的双轨铁路，找一条从一个城市 v_0 到另一个城市 v_n 的旅行路线，就相当于找出一个结点和边交替出现的序列 $v_0e_1v_1e_2\cdots\cdots v_{n-1}e_nv_n$，其中 $v_1,v_2,\cdots,v_{n-1}$ 表示途经的城市，$e_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 表示连接城市 v_{i-1} 和 v_i 的铁路。这个序列就是一条从 v_0 到 v_n 的路线。

定义 7.3.1 设 n 为自然数，$v_0,v_1,\cdots,v_n$ 是图 G 的结点，$e_1,e_2,\cdots,e_n$ 是图 G 的边，并且 v_{i-1} 和 v_i 分别是 e_i 的起点和终点 $(i=1,2,\cdots,n)$，则称序列 $v_0e_1v_1e_2\cdots v_{n-1}e_nv_n$ 为图 G 中从 v_0 至 v_n 的路径，n 称为该路径的长度。如果 $v_0=v_n$，则称该路径为闭的，否则称为开的。如果 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 互不相同，则称该路径为简单的。如果 $v_0,v_1,\cdots,v_n$ 互不相同，则称该路径为基本的。

例 1 在图 7.3.1 所示的无向图中，$v_2bv_3dv_4ev_2bv_3$ 是路径，但不是简单路径；$v_2bv_3cv_3dv_4$ 是简单路径，但不是基本路径。$v_3cv_3cv_3$ 是闭路径，但不是简单闭路径。如果从路径 $v_1gv_3cv_3$ 中去掉闭路径 v_3cv_3，则可得到基本路径 v_1gv_3.

例 2 在图 7.3.2 所示的有向图中，$1c4b1c4$ 是路径，但不是简单路径，$1a1c4$ 是简单路径，但不是基本路径，从 $1a1c4$ 中去掉闭路径 $1a1$ 就得到基本路径 $1c4$. 从 2 至 1 存在多条路径，但从 1 至 2 没有路径。

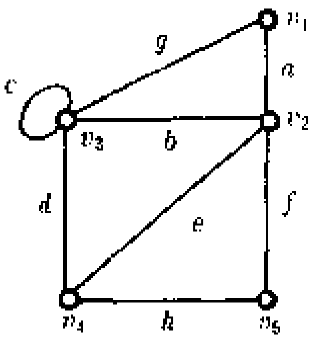


图 7.3.1 无向图

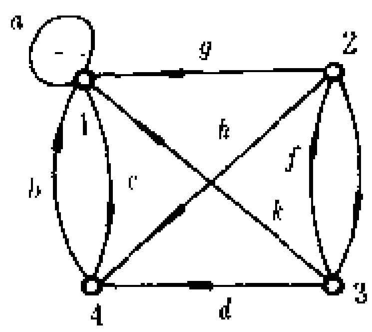


图 7.3.2 有向图

由路径的定义知道，单独一个结点 v 也是路径，它是长度为 0 的基本路径。因此，任何结点到其自身总存在路径。在无向图中，若从结点 v 至结点 v' 存在路径，则从 v' 到 v 也必存在路径。在有向图中，从结点 v 至结点 v' 存在路径，而从 v' 至 v 却不一定存在路径。为说话方便起见，我们引进一个记法：设路径 $P_1=v_0e_1v_1\cdots v_{n-1}e_nv_n$ 且 $P_2=v_ne'_1v'_1\cdots v'_{m-1}e'_mv'_m$，用 P_1P_2 记路径 $v_0e_1v_1\cdots v_{n-1}e_nv_ne'_1v'_1\cdots v'_{m-1}e'_mv'_m$. 从上面的两个例子可以看出，从路径中去掉适当的闭路径就可得到基本路径，这可导致如下的定理。

定理 7.3.1 设 v 和 v' 是图 G 的结点。如果存在从 v 至 v' 的路径，则必存在从 v 至 v' 的基本路径。

证明 设当从 v 至 v' 存在长度小于 l 的路径时，从 v 至 v' 必存在基本路径。

如果存在长度为 l 的路径 $v_0e_1v_1\cdots v_{l-1}e_lv_l$，其中 $v_0=v,v_l=v'$，并且该路径不是基本路径，则必有 i 和 j 满足 $0\leqslant i<j\leqslant l$ 且 $v_i=v_j$。那么 $v_0e_1v_1\cdots v_ie_{j+1}v_{j+1}\cdots v_{l-1}e_lv_l$ 是从 v 至 v' 的长度为 $l-j+i$ 的路径。根据归纳假设，存在从 v 至 v' 的基本路径。

由于基本路径中的结点互不相同，显然有以下定理成立。

定理 7.3.2 n 阶图中的基本路径的长度小于 n.

定义 7.3.2 设 v_1 和 v_2 是图 G 的结点。如果在 G 中存在从 v_1 至 v_2 的路径，则称在 G 中从 v_1 可达 v_2 或从 v_1 到 v_2 可达，否则称在 G 中从 v_1 不可达 v_2 或从 v_1 到 v_2 不可达．对于图 G 的结点 v，我们用 $R(v)$ 表示从 v 可达的全体结点的集合。

在无向图中，若从 v_1 可达 v_2，则从 v_2 必可达 v_1．而在有向图中，从 v_1 可达 v_2 不能保证从 v_2 必可达 v_1.

定理 7.3.3 设 v_1 和 v_2 是图 G 的结点，从 v_1 可达 v_2 当且仅当存在从 v_1 至 v_2 的基本路径。

在图 G 中，从结点 v_1 可达结点 v_2 保证了存在从 v_1 至 v_2 的路径，这样的路径可能不止一条，必可从中找出长度最短的。当然，长度最短的路径也可能有多条。

定义 7.3.3 设 v_1 和 v_2 是图 G 的结点。如果从 v_1 可达 v_2，则称从 v_1 至 v_2 的路径中长度最短者为从 v_1 至 v_2 的测地线，并称该测地线的长度为从 v_1 至 v_2 的距离，记做 $d(v_1, v_2)$．如果从 v_1 不可达 v_2，则称从 v_1 至 v_2 的距离 $d(v_1,v_2)$ 为 ∞．并且规定，$\infty + \infty = \infty$，对于任意自然数 n，$\infty > n$，$n + \infty = \infty + n = \infty$.

定义 7.3.4 图 $G = \langle V,E,\Psi\rangle$ 的直径定义为 $\max\limits_{v,v' \in V} d(v,v')$.

例 3 在图 7.3.3 中，$R(v_1) = R(v_2) = R(v_3) = \{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$，$R(v_4) = \{v_4,v_5\}$ $R(v_5) = \{v_5\}$，$R(v_6) = \{v_5,v_6\}$，$d(v_1,v_2) = 1$，$d(v_2,v_1) = 2$，$d(v_5,v_6) = \infty$．该图的直径为 ∞.

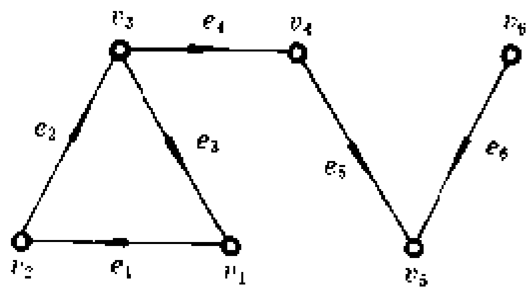


图 7.3.3 图中结点的可达性

定义 7.3.5 设图 $G = \langle V,E,\Psi\rangle$。若 $W: E \to \mathbf{R}_+$，则称 $\langle G,W\rangle$ 为加权图。若 $e \in E$，称 $W(e)$ 为边 e 的加权长度。路径中所有边的加权长度之和称为该路径的加权长度。从结点 v 至结点 v' 的路径中加权长度最小者称为从 v 至 v' 的最短路径。若从 v 可达 v'，则称从 v 至 v' 的最短路径的加权长度为从 v 至 v' 的加权距离；若从 v 不可达 v'，则称从 v 至 v' 的加权距离为 ∞.

在图论的实际应用中，常常要求从一结点至另一结点的加权距离。设加权图为 $\langle V,E,\Psi,W\rangle$。戴克斯特拉(Dijkstra) 给出了求从结点 s 至结点 t 的加权距离的如下算法：

1) 若 $v \neq s$，则 $\lambda(v) \leftarrow +\infty$，否则 $\lambda(v) = 0$.

2) $T \leftarrow V$.

3) 任取 $u \in \{\bar{u} \in T \mid 若\ \bar{v} \in T，则\ \lambda(\bar{u}) \leqslant \lambda(\bar{v})\}$.

4) 如果 $u = t$，则算法结束。

5) 对于每条路径 uev，$v \in T$。若 $\lambda(v) > \lambda(u) + W(e)$，则 $\lambda(v) \leftarrow \lambda(u) + W(e)$.

6) $T \leftarrow T - \{u\}$ 且转向 3).

当算法结束时，$\lambda(t)$ 即为从 s 至 t 的加权距离。

下面我们讨论图的重要性质 —— 连通性，无向图的连通性比较简单。

定义 7.3.6 如果无向图 G 的任意两个结点都互相可达，则称 G 是连通的；否则称 G 是非连通的。

例 4　设 $G=<V,E,\Psi>$，证明：G 为连通图当且仅当对 V 的每个划分 $\{V_1,V_2\}$，必存在一条边，它的两个端点分别属于 V_1 和 V_2。

证　必要性：用关于路径长度之归纳法。

设 $v_1\in V_1,v_2\in V_2$，由连通性可知：从 v_1 至 v_2 存在一条简单路径 P 且长度为 n.

i) 当 $n=1$ 时，显然成立。

ii) 设 $n=k$ 时结论成立。当 $n=k+1$ 时，考虑路径 P 上与 v_1 邻接的点 v'. 若 $v'\in V_2$，则边 $\{v_1,v'\}$ 的端点即合乎要求。若 $v'\notin V_2$，则从 P 中删去 v_1 可得 v' 至 v_2 的简单路径且长度为 k，由归纳假设知：结论成立。

充分性：用反证法。若 G 不连通，则 G 至少有两个分支 G_1 和 G_2，令 V_1 是 G_1 的结点集，V_2 是其余分支的结点集，显然 $\{V_1,V_2\}$ 是 V 的一个划分。且在 V_1 和 V_2 之间不可能有 $u\in V_1$ 和 $v\in V_2$ 使 $\{u,v\}$ 是 G 中的一条边。矛盾。

显然，无向图 $G=\langle V,E,\Psi\rangle$ 是连通的，当且仅当对于任意 $v\in V$ 皆有 $R(v)=V$. 由于可达性的非对称性，有向图的连通概念要复杂得多，这里需要用到基础图的概念。

定义 7.3.7　设有向图 $G=\langle V,E,\Psi\rangle$，定义 $\Psi':E\to\{\{v_1,v_2\}\mid v_1\in V \text{ 且 } v_2\in V\}$ 如下：对任意 $e\in E$ 和 $v_1,v_2\in V$，若 $\Psi(e)=\langle v_1,v_2\rangle$，则 $\Psi'(e)=\{v_1,v_2\}$. 这时称无向图 $G'=\langle V,E,\Psi'\rangle$ 为有向图 G 的基础图。

有向图的基础图即是把每条有向边改为无向边而得到的无向图。

定义 7.3.8　设 G 是有向图。

i) 如果 G 中任意两结点都互相可达，则称 G 是强连通的。

ii) 如果对于 G 的任意两结点，必有一个结点可达另一结点，则称 G 是单向连通的。

iii) 如果 G 的基础图是连通的，则称 G 是弱连通的。

例 4　图 7.3.4 给出了三个有向图，其中(a) 是强连通的，(b) 是单向连通的，(c) 是弱连通的。

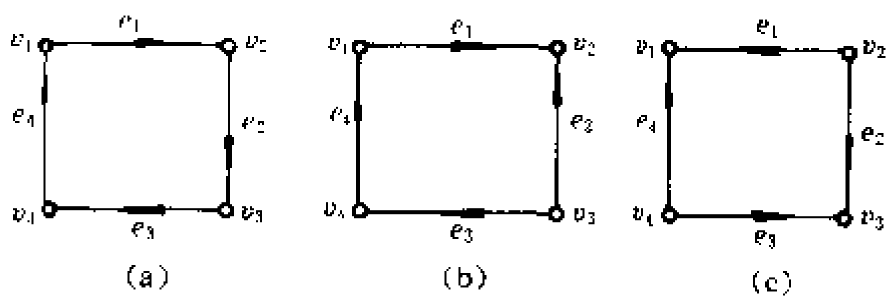


图 7.3.4　有向图的连通性

定义 7.3.9　设 G' 是图 G 的具有某性质的子图，并且对于 G 的具有该性质的任意子图 G''，只要 $G'\subseteq G''$ 就有 $G'=G''$，则称 G' 相对于该性质是 G 的极大子图。

定义 7.3.10　无向图 G 的极大连通子图称为 G 的分支。

定义 7.3.11　设 G 是有向图。

i) G 的极大强连通子图称为 G 的强分支。

ii) G 的极大单向连通子图称为 G 的单向分支。

iii) G 的极大弱连通子图称为 G 的弱分支。

由定义直接得出以下定理。

定理 7.3.4 连通无向图恰有一个分支。非连通无向图的分支多于一个。

定理 7.3.5 强连通(单向连通,弱连通)有向图恰有一个强分支(单向分支,弱分支)。非强连通(非单向连通,非弱连通)有向图的强分支(单向分支,弱分支)多于一个。

例 5 图 7.3.3 给出的有向图 G 有 4 个强分支,即 $\langle\{v_1,v_2,v_3\},\{e_1,e_2,e_3\},\{\langle e_1,\langle v_1,v_2\rangle\rangle,\langle e_2,\langle v_2,v_3\rangle\rangle,\langle e_3,\langle v_3,v_1\rangle\rangle\}\rangle$,$\langle\{v_4\},\varnothing,\varnothing\rangle$,$\langle\{v_5\},\varnothing,\varnothing\rangle$、$\langle\{v_6\},\varnothing,\varnothing\rangle$. 可以看出,每个结点恰处于一个强分支中,而边 e_4,e_5,e_6 不在任何强分支中。G 有两个单向分支,即 $G-\{v_6\}$ 和 $G[\{v_5,v_6\}]$. 显然,v_5 处于两个单向分支中。G 只有一个弱分支,即其本身。

定义 7.3.12 设 G' 是有向图 $G=\langle V,E,\Psi\rangle$ 的基础图,G' 中的路径称为 G 中的半路径。设 $v_0e_1v_1\cdots v_{m-1}e_mv_m$ 是 G 中的半路径。对每个 $i(1\leqslant i\leqslant m)$,若 $\Psi(e_i)=\langle v_{i-1},v_i\rangle$,则称 e_i 是该半路径中的正向边;如果 $\Psi(e_i)=\langle v_i,v_{i-1}\rangle$,则称 e_i 是该半路径中的反向边。

有向图 G 中的路径一定是 G 中的半路径,但 G 中的半路径未必是 G 中的路径。容易证明,有向图中的半路径是路径,当且仅当该半路径中的边都是正向边。

定义 7.3.13 连通 2 度正则图称为回路。基础图是回路的有向图称为半回路。每个结点的出度和入度均为 1 的弱连通有向图称为有向回路。回路(半回路,有向回路)中边的数目称为回路(半回路,有向回路)的长度。

例 6 在图 7.3.4 中,(a) 是有向回路,(b) 和(c) 是半回路。

定理 7.3.6 设 v 是图 G 的任意结点,G 是回路(或有向回路),当且仅当 G 的阶与边数相等,并且在 G 中存在这样一条从 v 到 v 的闭路径,使得除了 v 在该闭路径中出现两次外,其余结点和每条边都在该闭路径中恰出现一次。

证明 充分性是显然的,我们只证必要性。

设 $G=\langle V,E,\Psi\rangle$ 是有向回路,由有向回路的定义和定理 7.1.2 立即得出,G 的阶与边数相等。下面对 G 的阶用第一归纳法。

若 G 是 1 阶有向回路,则 G 只有一个自圈,设为 e,则 vev 即为满足要求之闭路径。

设当 G 是 n 阶有向回路时必要性成立,其中 $n\geqslant 1$.

若 G 是 $n+1$ 阶有向回路。设 $v\in V$. 由 $d_G^+(v)=d_G^-(v)=1$ 知,存在 $v_1,v_n\in V$ 和 $e_1,e_{n+1}\in E$ 使 $\Psi(e_1)=\langle v,v_1\rangle$ 且 $\Psi(e_{n+1})=\langle v_n,v\rangle$. 设 $e\notin E$ 且 $\Psi'=\{\langle e,\langle v_n,v_1\rangle\rangle\}$,若令 $G'=(G-\{v\})+\{e\}_{\Psi'}$,则 G' 是 n 阶有向回路。根据归纳假设,在 G' 中存在路径 $v_1e_2v_2\cdots v_{n-1}e_nv_nev_1$,其中 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 互不相同。因为 $V=\{v,v_1,\cdots,v_n\}$ 且 $E=\{e_1,e_2,\cdots,e_n,e_{n+1}\}$. 所以 $ve_1v_1e_2v_2\cdots v_{n-1}e_nv_ne_{n+1}v$ 即为 G 中满足要求之闭路径。

对于 G 是回路的情况也可同样证明。

定义 7.3.14 如果回路(有向回路,半回路)C 是图 G 的子图,则称 G 有回路(有向回路,半回路)C. 没有回路的无向图和没有半回路的有向图称为非循环图。

非循环图是一类非常重要的图,我们以后要讨论的树和有向树都是非循环图。判断一个图是不是非循环图是很重要的。下面我们就来讨论这个问题。先讨论判断有向图是否有有向回路的问题。

定理 7.3.7 如果有向图 G 有子图 G',使得对 G' 的任意结点 v 皆有 $d_{G'}^+(v)>0$,则 G 有有向回路。

证明 设$G'=\langle V',E',\Psi'\rangle$，$v_0e_1v_1\cdots v_{n-1}e_nv_n$是$G'$中最长的基本路径。由于$d_{G'}^{+}(v_n)>0$，必可找到$e_{n+1}\in E'$和$v_{n+1}\in V'$，使$v_0e_1v_1\cdots v_{n-1}e_nv_ne_{n+1}v_{n+1}$是$G'$中的简单路径，且$v_{n+1}=v_i(0\leqslant i\leqslant n)$。$G$的以$\{v_i,v_{i+1},\cdots,v_n\}$为结点集合且以$\{e_{i+1},e_{i+2},\cdots,e_{n+1}\}$为边集合的子图就是$G$的有向回路。

定理 7.3.8 如果有向图G有子图G'，使得对G'中的任意结点v皆有$d_{G'}^{-}(v)>0$，则G有有向回路。

证明过程与定理 7.3.7 相同。

设v是有向图G的结点且$d_G^{+}(v)=0$，从G中去掉v和与之关联的边得到有向图$G-\{v\}$的过程称为W过程。G有有向回路当且仅当$G-\{v\}$有有向回路。若n阶有向图G没有有向回路，则经过$n-1$次W过程必得到平凡图，否则至多经过有限次W过程必得到一个使其每个结点的出度均大于 0 的有向图。这样，我们就找出了判断一个有向图有没有有向回路的有效办法。当然，也可以把W过程定义为去掉入度为 0 的结点。

定理 7.3.9 图G不是非循环图当且仅当G有子图G'，使得对G'的任意结点v皆有$d_{G'}(v)>1$。

证明方法与定理 7.3.7 类似。

我们有类似的办法确定n阶图G是不是非循环图。令$G_0=G$，对于小于$n-1$的自然数i，若G_i的一切结点的度均大于1，则停止延长图序列的过程；若G_i有结点v_i满足$d_{G_i}(v_i)\leqslant 1$，则令$G_{i+1}=G_i-\{v_i\}$。这样得到一个图序列$G_0,G_1,\cdots,G_m$，其中$0\leqslant m\leqslant n-1$。如果$G_m$是平凡图，则$G$是非循环图，否则$G$就不是非循环图。

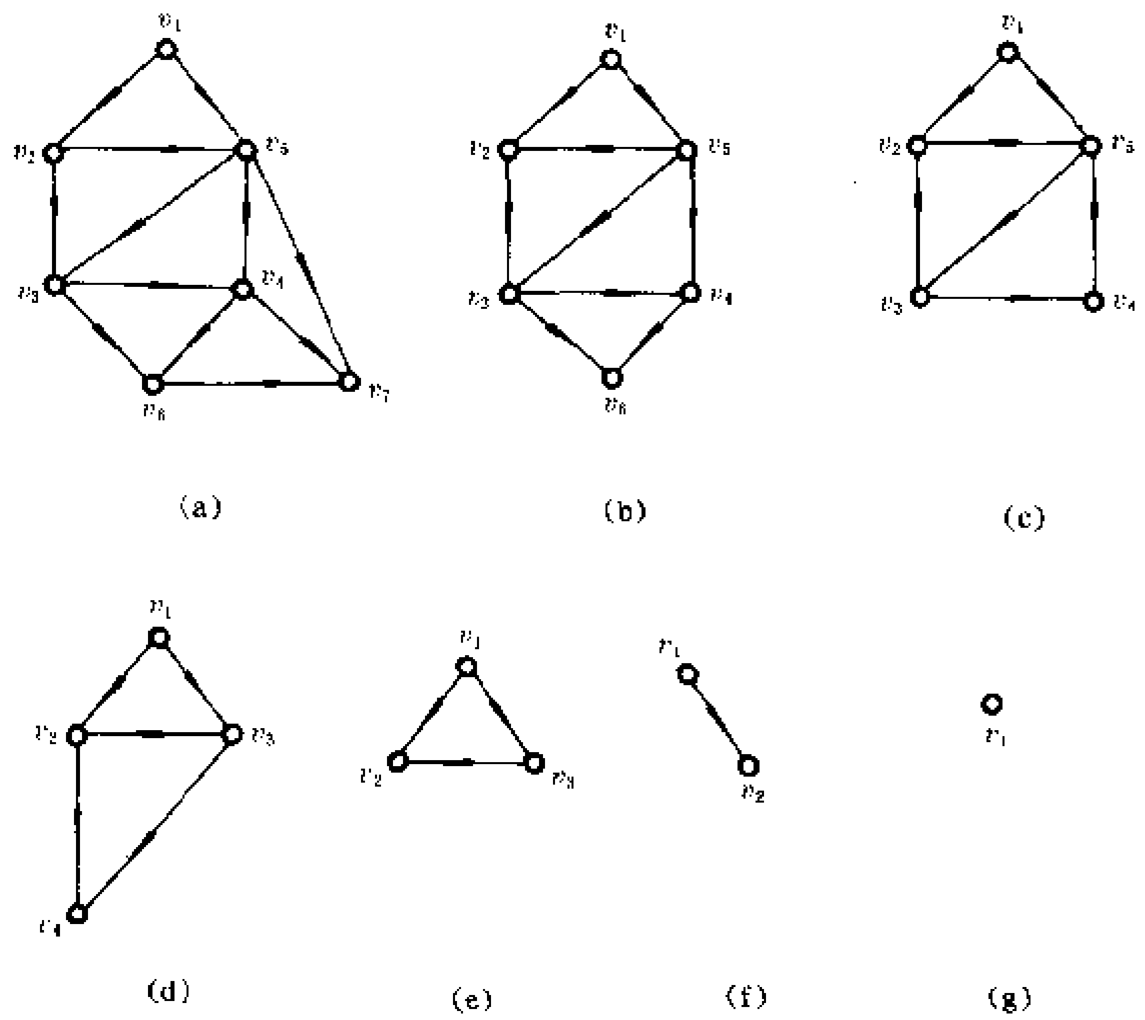


图 7.3.5 判断有向图是否有有向回路的W过程

例 7 为了判断图 7.3.5 的(a) 有没有有向回路，我们依次得到图 7.3.5 的(b)，(c)， (d)、(e)、(f)、(g)．由(g)是平凡图知(a)没有有向回路。(a)不是非循环图，因为它有半回路。

习 题 7.3

1． 考虑图 7.3.6.

a) 从 A 至 F 的路径有多少条?找出所有长度小于 6 的从 A 至 F 的路径。

b) 找出从 A 至 F 的所有简单路径。

c) 找出从 A 至 F 的所有基本路径。

d) 求出从 A 至 F 的距离。

e) 求出该图的直径。

f) 找出该图的所有回路。

2． 证明图中的基本路径必为简单路径。

3． 考虑图 7.3.7.

a) 对于每个结点 v，求 $R(v)$.

b) 找出所有强分支、单向分支、弱分支。

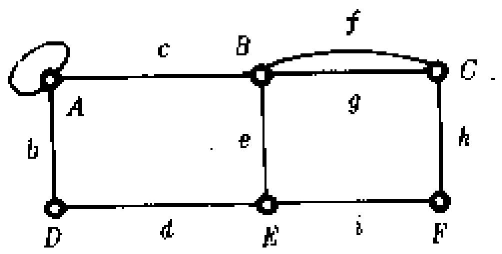


图 7.3.6

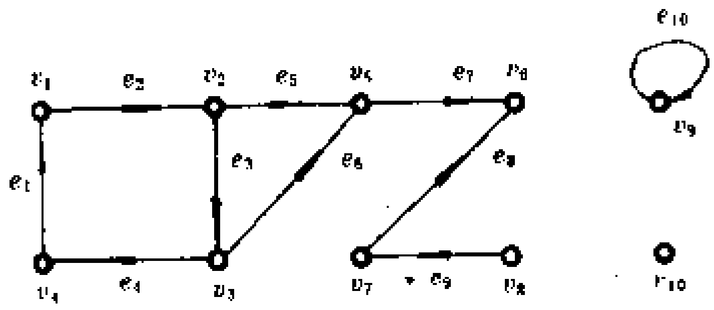


图 7.3.7

4． 设 v_1,v_2,v_3 是任意无向图(有向图)G 的三个任意结点，以下三公式是否成立?如果成立给出证明，如果不成立举出反例。

a) $d(v_1,v_2) \geqslant 0$，并且等号成立当且仅当 $v_1 = v_2$.

b) $d(v_1,v_2) = d(v_2,v_1)$.

c) $d(v_1,v_2) + d(v_2,v_3) \geqslant d(_1,v_3)$

5． 证明有向图的每个结点和每条边恰处于一个弱分支中。

6． 有向图的每个结点(每条边)是否恰处于一个强分支中?是否恰处于一个单向分支中?

7． 证明无向图是连通的当且仅当 G 的直径是自然数。

8． 证明同阶的回路必同构。

9． 设图 $G = \langle V,E,\Psi\rangle$，其中 $V = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，$E = \{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,p\}$，$\Psi = \{\langle a,\langle 1,6\rangle\rangle,\langle b,\langle 1,8\rangle\rangle,\langle c,\langle 1,7\rangle\rangle,\langle d,\langle 7,6\rangle\rangle,\langle e,\langle 8,7\rangle\rangle,\langle f,\langle 6,4\rangle\rangle,\langle g,\langle 7,5\rangle\rangle,\langle h,\langle 8,3\rangle\rangle,\langle i,\langle 5,8\rangle\rangle,\langle j,\langle 4,5\rangle\rangle,\langle k,\langle 5,3\rangle\rangle,\langle l,\langle 4,3\rangle\rangle,\langle m,\langle 4,2\rangle\rangle,\langle n,\langle 5,2\rangle\rangle,\langle p,\langle 3,2\rangle\rangle\}$．判断 G 是否有有向回路。

10． 设 G 是弱连通有向图。如果对于 G 的任意结点 v 皆有 $d_G^+(v) = 1$，则 G 恰有一条有向回路。试证明之。

11. 证明有 k 个弱分支的 n 阶简单有向图至多有 $(n-k)(n-k+1)$ 条边。

12. 证明非连通简单无向图的补图必连通。

13. 设 G 为 n 阶简单无向图，若 G 的任意结点 v 皆有 $d_G(v) \geqslant (n-1)/2$，则 G 是连通的。

14. 证明：对于小于或等于 n 的任意正整数 k，n 阶连通无向图有 k 阶连通子图。

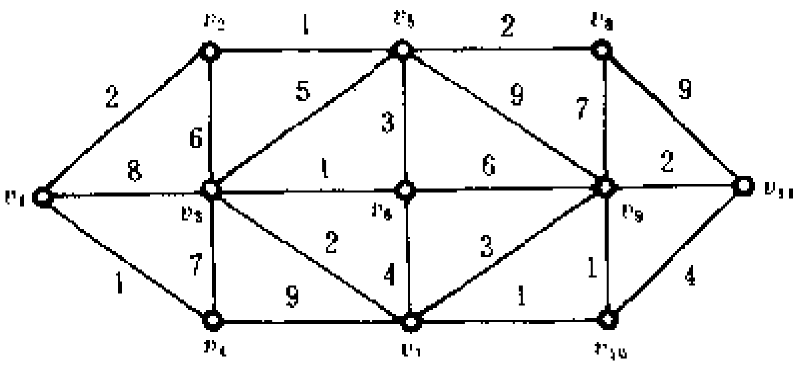


图 7.3.8

15. 图 7.3.8 给出了一个加权图，旁边的数字是该边的加权长度，求出从 v_1 到 v_{11} 的加权距离。

§ 7.4 欧拉图和哈密顿图

在历史上，图论的创立是从对路径的研究开始的，这就是对著名的哥尼斯堡桥问题的研究。哥尼斯堡是 18 世纪时欧洲一个城市的名字，位于普雷格尔河畔，河当中有两个岛，城市的各部分由七座桥连接（见图 7.4.1）。当时城中的居民热衷于讨论这样一个问题：从四块陆地的任何一块出发，怎样通过每座桥恰巧一次，最终回到出发地点？瑞士数学家欧拉（Euler）于 1736 年解决了这个问题，证明这是不可能的，从而奠定了图论的基础。

不难看出，可把哥尼斯堡桥问题与图 7.4.2 联系起来，其中结点表示陆地区域，边表示桥。显然，哥尼斯堡桥问题就是要找出图 7.4.2 中包含它的所有边的简单闭路径。

定义 7.4.1 图 G 中包含其所有边的简单开路径称为 G 的欧拉路径。图 G 中包含其所有边的简单闭路径称为 G 的欧拉闭路。

定义 7.4.2 每个结点都是偶结点的无向图称为欧拉图。每个结点的出度和入度都相等的有向图称为欧拉有向图。

欧拉找到了连通无向图是欧拉图的充分必要条件，这就是以下的欧拉定理。

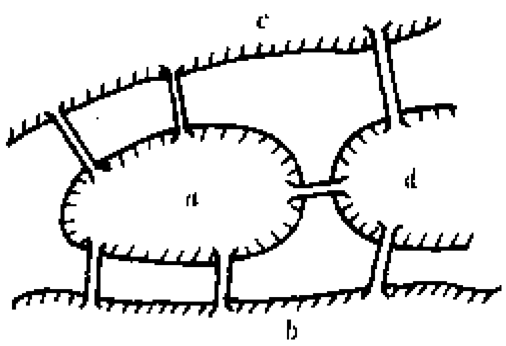


图 7.4.1 哥尼斯堡七桥

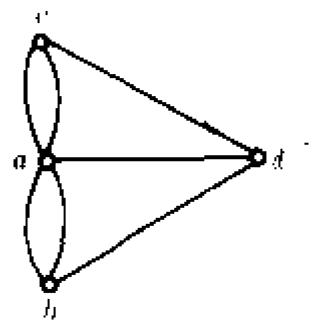


图 7.4.2 哥尼斯堡桥问题的图

定理 7.4.1 设 G 是连通无向图，G 是欧拉图当且仅当 G 有欧拉闭路。

证明 充分性是显然的，只证必要性。

对 G 的边的数目用第二归纳法。

若 G 没有边，即 G 是平凡图，必要性显然成立。

令 $n \in I_+$，设任意边数少于 n 的连通欧拉图有欧拉闭路。若 G 有 n 条边，由 G 是连通欧拉图知，它的任意结点的度大于 1，根据定理 7.3.9，G 有回路，设 G 有长度为 m 的回路 C. 根据定理 7.3.6，在 C 中存在闭路径 $v_0e_1v_1\cdots v_{m-1}e_mv_0$，其中 $v_0, v_1, \cdots, v_{m-1}$ 互不相同，并且 $\{v_0, v_1, \cdots, v_{m-1}\}$ 和 $\{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$ 分别是 C 的结点集合和边集合。令 $G' = G - \{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$，设 G' 有 k 个分支 $G_1, \cdots, G_k$. 由于 G 是连通的，G' 的每个分支与 C 都有公共结点。设 $G_i(1 \leqslant i \leqslant k)$ 与 C 的一个公共结点为 v_{n_i}，我们还可以假定 $0 \leqslant n_1 < n_2 < \cdots < n_k \leqslant m-1$. 显然，$G_i$ 为边数少于 n 的连通欧拉图。根据归纳假设，G_i 有一条从 v_{n_i} 至 v_{n_i} 的欧拉闭路径 P_i. 因此，以下的闭路径

$$v_0e_1v_1\cdots e_{n_1}P_1e_{n_1+1}v_{n_1+1}\cdots e_{n_k}P_ke_{n_k+1}\cdots v_{m-1}e_mv_0$$

就是 G 的一条欧拉闭路。

定理 7.4.2 设 $G = \langle V, E, \Psi \rangle$ 为连通无向图且 $v_1, v_2 \in V$. 则 G 有一条从 v_1 至 v_2 的欧拉路径当且仅当 G 恰有两个奇结点 v_1 和 v_2.

证明 任取 $e \notin E$，并令 $\Psi' = \{\langle e, \{v_1, v_2\} \rangle\}$，则 G 有一条从 v_1 至 v_2 的欧拉路径当且仅当 $G' = G + \{e\}_{\Psi'}$ 有一条欧拉闭路，因此 G 恰有两个奇结点 v_1 和 v_2 当且仅当 G' 的结点都是偶结点，从而由定理 7.4.1 即可知道，本定理成立。

由定理 7.4.1 和 7.4.2 即可获得以下“一笔画”问题的答案：一张连通图能由一笔画出来的充要条件是，每个交点处的线条数都是偶数或恰有两个交点处的线条数是奇数。

对有向图，也有类似的结果。

定理 7.4.3 设 G 为弱连通的有向图。G 是欧拉有向图当且仅当 G 有欧拉闭路。

证明过程与定理 7.4.1 类似。

定理 7.4.4 设 G 为弱连通的有向图。v_1 和 v_2 为 G 的两个不同结点。G 有一条从 v_1 至 v_2 的欧拉路径当且仅当 $d_G^+(v_1) = d_G^-(v_1) + 1$，$d_G^+(v_2) = d_G^-(v_2) - 1$ 且对 G 的其它结点 v 有 $d_G^+(v) = d_G^-(v)$.

证明过程与定理 7.4.2 类似。

根据哥尼斯堡桥问题画出的图 7.4.2 不是欧拉图，因此不存在欧拉闭路，即哥尼斯堡桥问题没有解。

定理 7.4.5 如果 G_1 和 G_2 是可运算的欧拉图，则 $G_1 \oplus G_2$ 是欧拉图。

证明 设 v 是 $G_1 \oplus G_2$ 的任意结点，可能出现三种情况：v 是 G_1 的结点但不是 G_2 的结点，v 是 G_2 的结点但不是 G_1 的结点，v 是 G_1 和 G_2 的公共结点。显然，若属于前两种情况，v 是 $G_1 \oplus G_2$ 的偶结点。设 v 是 G_1 和 G_2 的公共结点，G_1 和 G_2 有 k 条公共边和 l 个公共自圈与 v 关联，则 $d_{G_1 \oplus G_2}(v) = d_{G_1}(v) + d_{G_2}(v) - 2(k + l)$，故 v 是 $G_1 \oplus G_2$ 的偶结点。因此，$G_1 \oplus G_2$ 是欧拉图。

19 世纪爱尔兰数学家哈密顿(Hamilton) 发明了一种叫做周游世界的数学游戏。它的玩法是：给你一个正十二面体，它有二十个顶点，把每个顶点看做一个城市，把正十二面体的三十条棱看成连接这些城市的路。请你找一条从某城市出发，经过每个城市恰好一次，最后再回到出发点的路线。我们把正十二面体投影到平面上，在图 7.4.3 中标出了一种走法，即从城市 1 出发，经过 2，3，…，20，最后回到 1.

哈密顿周游世界游戏显然是一个图论问题。实际上，它是要在图 7.4.3 中找出一条包

含所有结点的闭路，并且，除始点和终点重合外，这条闭路所含结点是互不相同的。根据定理 7.3.6，这条闭路的所有结点和边组成了一个回路。因此，有以下的定义。

定义 7.4.3 如果回路（有向回路）C 是图 G 的生成子图，则称 C 为 G 的哈密顿回路（哈密顿有向回路）。图 G 中包含它的所有结点的基本路径称为 G 的哈密顿路径。有哈密顿回路（哈密顿有向回路）的图称为哈密顿图（哈密顿有向图）。

显然，哈密顿图必定连通，图 7.4.4 是哈密顿图，不难看出其中的哈密顿回路。哥尼斯堡桥问题的图 7.4.2 也是哈密顿图。然而，并不是所有连通图都是哈密顿图。例如，图 7.4.5 就不是哈密顿图。给出一个图是哈密顿图的充分必要条件是一个仍未解决的问题，只能给出一些充分条件，或者必要条件，这些我们就不讲了。

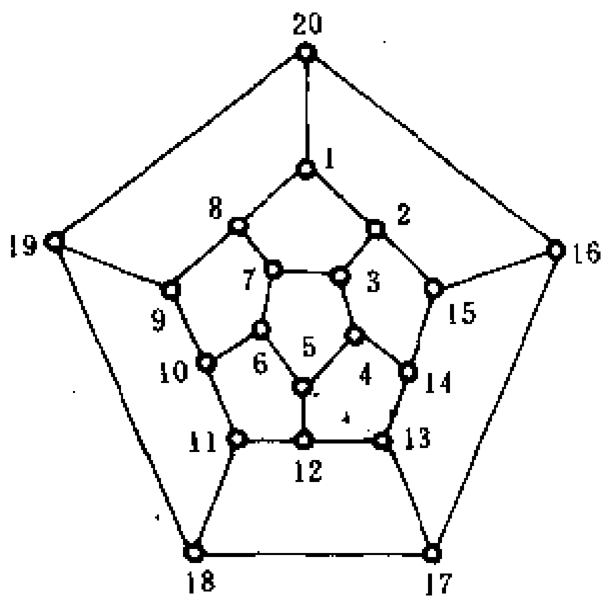


图 7.4.3　周游世界游戏

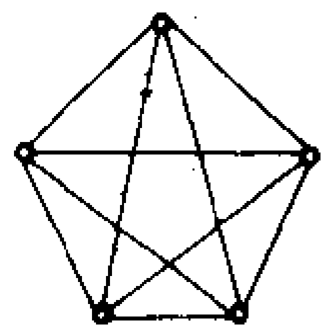


图 7.4.4　哈密顿图

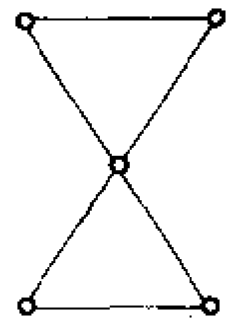
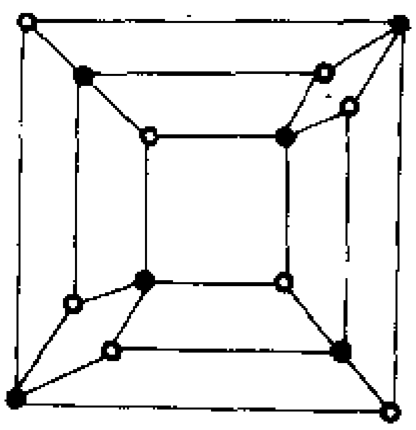


图 7.4.5　非哈密顿图

下面通过例子，来介绍一些简单实用的必要条件。

例 1 判断下图是否有 Hamilton 回路和 Hamilton 路径？



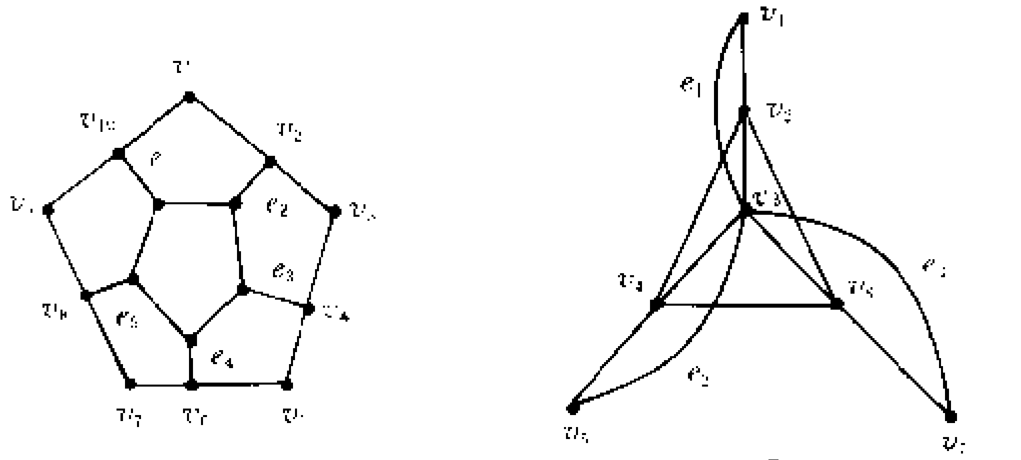
解 用黑白两种颜色给图中的点着色，使相邻点的色不同（图中实心结点表示着黑色，空心结点表示着白色）。

对图中任何回路 C，任取 C 中一白点，在 C 中必存在 v 到 v 的闭路径 P（除 v 之外 C 中其余结点在 P 中恰好出现一次）。P 所经过（设从 v 出发）的结点颜色必定是：白，黑，白，黑，…… 白，黑，白。由于起、终两白点为同一点（v），故 C 中两色结点个数一定相等。

对图中任何基本路径 P，假设 P 从白点出发，则 P 所经过的结点颜色必定是：白，黑，白，黑，……，最后一点可能是任一种颜色，故 P 中两色结点个数相等或差 1。

由于原图中黑点为 6 个，白点为 8 个，故图中既无 Hamilton 回路，也无 Hamilton 路径。

例 2　用"去边法"来判断下面两图 G_1、G_2 是否哈密顿图。



$\langle G_1 \rangle$　　　　$\langle G_2 \rangle$

解　考虑哈密顿回路 C，图中每个结点都恰有两条和它关联的边在 C 上。因此，可以通过对每个结点去掉"多余的边"得到 C。

i) 对 G_1，v_2 是 3 度点，必须去掉与它关联的一条边。去哪条呢？考虑到 v_1 和 v_3 均为 2 度点，故只能去掉 e_2，同理 e_1，e_3，e_4，e_5 也将被去掉。此时得到的生成子图已经不连通，不可能有回路。因此，G_1 不是哈密顿图。

ii) 对 G_2，由于 v_1，v_5，v_7 均为 2 度点，故 e_1，e_2，e_3 均不能去掉。因此，e_3 的度若减至小于 3 的话，v_1，v_5，v_7 中至少有一个端点，无法得到 Hamilton 回路。故 G_2 也不是哈密顿图。

习　题　7.4

1.　确定图 7.4.6 的六个图中哪个是欧拉图、欧拉有向图、哈密顿图、哈密顿有向图？并找出其中的一条欧拉闭路，哈密顿回路和哈密顿有向回路（如果存在的话）。

2.　如果 G_1 和 G_2 是可运算的欧拉有向图，则 $G_1 \oplus G_2$ 仍是欧拉有向图。这句话对吗？如果对，给出证明，如果不对，举出反例。

3.　设 n 是大于 2 的奇数，证明 n 阶完全无向图有 $(n-1)/2$ 个边不相交的哈密顿回路。

4.　设 $n \geqslant 3$，对于 n 阶简单无向图 G 的任意两个不同结点 v 和 v'，只要它们不邻接就有 $d_G(v) + d_G(v') \geqslant n$. 试证 G 是哈密顿图。

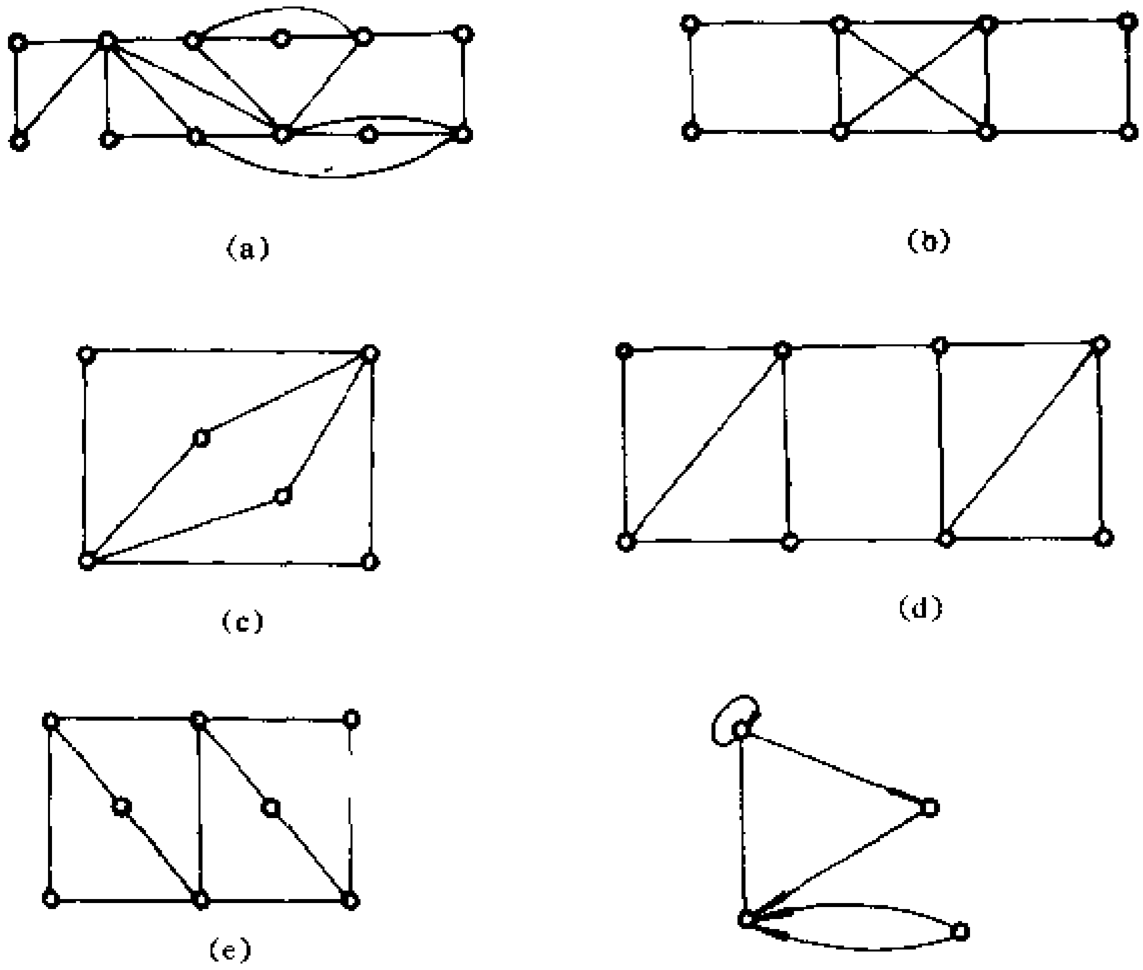
5.　基础图是完全无向图的有向图有哈密顿路径，试证明之。

6.　设 G 是非平凡的连通无向图，证明 G 是欧拉图当且仅当 G 是若干个边不相交的回路之并。

7.　设 G 是非平凡的弱连通有向图，证明 G 是欧拉有向图，当且仅当 G 是若干个边不相交的有向回路之并。

§7.5　图的矩阵表示

前面讨论了图的两种表示法，即把图表示为抽象数学系统和图的图解。这两种表示法各有优缺点。把图表示为抽象数学系统适合于对图进行理论分析，缺点是不直观。图的图解表示法比较直观，便于启发人们思考，去发现图的新性质，但不适用于进行严格的论证。



(a) (b) (c) (d) (e) (f)

图 7.4.6

这两种表示法都有局限性。对于结点和边的数目很多的图来说，这两种表示法都是不方便的。这两种表示法还有一个更突出的缺点，不适合于使用计算机对图进行研究和处理。图的另一种表示法是矩阵表示法，其优点很多，其中最突出的是它特别便利于用计算机存储和处理图，并且可以利用矩阵代数的运算求图的路径、回路以及确定图的其他重要性质。

为了用矩阵表示图，首先需要对图的结点和边分别编号，即为它们规定某种顺序。在本节中约定，事先已为图的结点和边规定好了某种顺序。

图的矩阵表示中最常用的是邻接矩阵和关联矩阵。首先介绍邻接矩阵。

定义 7.5.1 设 n 阶图 G 的结点集为 $\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，定义 G 的邻接矩阵 $X(G)$ 为 $n\times n$ 矩阵 (x_{ij})，其中 x_{ij} 为分别以 v_i 和 v_j 为起点与终点的边的数目。

显然，图 G 的邻接矩阵依赖于 G 的结点的排列顺序，对于结点的不同排列顺序，可以得到同一个图的不同邻接矩阵。还可以看出，如果 G_1 和 G_2 是两个同构的图，则首先交换 $X(G_1)$ 的一些行，然后交换相应的列，就可由 $X(G_1)$ 得到 $X(G_2)$。因此，如果我们对于同构的图不加区别，则由于结点顺序不同而引起的图的邻接矩阵的任意性就是可以接受的，并选取图 G 的任何一个邻接矩阵作为它的邻接矩阵。

容易证明，n 阶图 G 和 $X(G)$ 有以下联系：

1. 无向图 G 的邻接矩阵 $X(G)$ 是对称的。
2. 图 G 没有平行边当且仅当 $X(G)$ 的元素都是 0 和 1.
3. 图 G 有自圈当且仅当 $X(G)$ 的对角线有非 0 元素。
4. 图 G 是简单图当且仅当 $X(G)$ 的元素都是 0 和 1，并且对角线元素都为 0.
5. 图 G 是零图当且仅当 $X(G)$ 是零矩阵（即所有元素都是 0 的矩阵）。

6. 若图 G 是无向图，则 $d_G(v_i)=x_{ii}+\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\quad(i=1,2,\cdots,n)$.

7. 若图 G 是有向图，则 $d_G^+(v_i)=\sum_{j=1}^{n}x_{ij}, d_G^-(v_i)=\sum_{j=1}^{n}x_{ji}, d_G(v_i)=\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}+x_{ji})(i=1,2,\cdots,n)$。

8. 无向图(有向图)G 有 k 个分支(弱分支)$G_1,G_2,\cdots,G_k$，当且仅当顺序排列 $G_1,G_2,\cdots,G_k$ 的结点可使

$$X(G)=\begin{bmatrix} X(G_1) & & & \\ & X(G_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & X(G_k)\end{bmatrix}$$

对于以自然数为元素的任意方阵 Q，存在唯一的有向图(同构的图认为是一个图)以 Q 为邻接矩阵。对于以自然数为元素的任意对称矩阵 Q，存在唯一的无向图(同构的图认为是一个图)以 Q 为邻接矩阵。

下面考察邻接矩阵的幂。对于任意方阵 X 和任意自然数 m，我们用 $x_{ij}^{(m)}$ 表示 X^m 的第 i 行第 j 列元素。设 X 是图 G 的邻接矩阵，若 $x_{ij}=r$，则说明从 v_i 至 v_j 存在 r 条长度为 1 的路径。可以把这个结果推广到 X 的任意正整数次幂。

定理 7.5.1 设 $m\in I_+$，n 阶图 G 的全部结点为 $v_1,v_2,\cdots,v_n$. 若 X 是 G 的邻接矩阵且 $1\leqslant i,j\leqslant n$，则 $x_{ij}^{(m)}$ 等于 G 中从 v_i 至 v_j 的长度为 m 的路径数。

证明 对 m 用第一归纳法，

当 $m=1$ 时，定理显然成立。

设当 $m=k(k\geqslant 1)$ 时定理成立。

当 $m=k+1$ 时，根据归纳假设，若 $1\leqslant l\leqslant n$，则 $x_{il}^{(k)}$ 等于 G 中从 v_i 至 v_l 长度为 k 的路径数，x_{lj} 等于从 v_l 至 v_j 长度为 1 的路径数，因此 $x_{il}^{(k)}x_{lj}$ 等于从 v_i 至 v_j 长度为 $k+1$ 且倒数第二个结点为 v_l 的路径数。所以 $x_{ij}^{(k+1)}=\sum_{l=1}^{n}x_{il}^{(k)}x_{lj}$ 即为 G 中从 v_i 至 v_j 长度为 $k+1$ 的路径数。

例 1 图 7.5.1 的邻接矩阵为

$$X=\begin{bmatrix}0&1&0&0&1&0\\1&0&1&1&1&0\\0&1&0&0&0&0\\0&1&0&0&1&2\\1&1&0&1&1&0\\0&0&0&2&0&0\end{bmatrix}$$

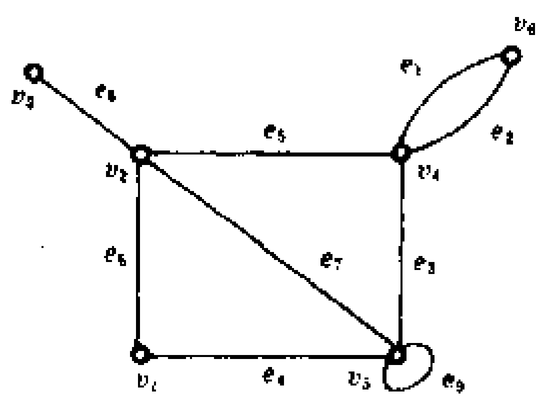


图 7.5.1 无向图

因此有

$$X^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad X^3 = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 1 & 3 & 7 & 4 \\ 7 & 5 & 4 & 11 & 9 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 11 & 1 & 3 & 11 & 12 \\ 7 & 9 & 3 & 11 & 11 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 12 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

因为 $x_{25}^{(2)} = 3$，所以有三条从 v_2 至 v_5 长度为 2 的路径，它们是 $v_2e_7v_5e_9v_5$　$v_2e_5v_4e_3v_5$ 和 $v_2e_6v_1e_4v_5$. 因为 $x_{25}^{(3)} = 9$，所以有 9 条从 v_2 至 v_5 长度为 3 的路径，它们是

$$\begin{aligned} & v_2e_7v_5e_9v_5e_9v_5, \quad v_2e_8v_3e_8v_2e_7v_5, \\ & v_2e_7v_5e_3v_4e_3v_5, \quad v_2e_7v_5e_4v_1e_4v_5, \\ & v_2e_7v_5e_7v_2e_7v_5, \quad v_2e_5v_4e_3v_5e_9v_5, \\ & v_2e_5v_4e_5v_2e_7v_5, \quad v_2e_6v_1e_6v_2e_7v_5, \\ & v_2e_6v_1e_4v_5e_9v_5. \end{aligned}$$

定义 7.5.2　设 n 阶图 G 的全部结点为 $v_1, v_2, \cdots, v_n$. 定义图 G 的路径矩阵为 $n \times n$ 矩阵 $P(G) = (p_{ij})$，其中

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{从 } v_i \text{ 可达 } v_j \\ 0, & \text{从 } v_i \text{ 不可达 } v_j \end{cases}$$

路径矩阵也称为可达性矩阵。

由图 G 的邻接矩阵可以求得它的路径矩阵。对于 n 阶图 G，根据定理 7.3.2 和定理 7.3.3，只需考虑在 G 中是否存在从 v_i 至 v_j 长度小于 n 的路径即可确定 p_{ij}. 另外，去掉自圈和平行边不会改变结点间的可达性。因此，我们不妨只考虑简单图。而简单图的邻接矩阵的元素都是 0 和 1，所以需要引进一些新的运算。

在 §2.4 曾经定义了集合 $\{0,1\}$ 上的运算 $\vee$ 和 $\wedge$，以及 0—1 矩阵间的运算 $\circledast$，我们再引进 0—1 矩阵间的另一运算 $\oplus$ 如下：

设 $A = (a_{ij})$ 和 $B = (b_{ij})$ 是 $n \times m$ 矩阵，且都是 0—1 矩阵。定义 $A \oplus B = (c_{ij})$ 仍然是 $n \times m$ 矩阵，其中 $c_{ij} = a_{ij} \vee b_{ij}$.

为书写方便起见，引进求和号 $\sum$ 如下：

$$\sum_{i=0}^{0} A^i = A^0, \qquad \sum_{i=0}^{k+1} A^i = A^{k+1} \oplus \sum_{i=0}^{k} A^i \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots,)$$

定理 7.5.2　设 X 和 P 分别是 n 阶简单图 G 的邻接矩阵和路径矩阵，记 $X^{(0)} = I_n$（I_n 是 n 阶单位矩阵）。$X^{(k+1)} = X^{(k)} \circledast X$ $(k = 0, 1, 2, \cdots, n)$，则

$$P = \sum_{k=0}^{n-1} X^{(k)}.$$

证明留作练习。

定义 7.5.3　设 n 阶图 G 的全部结点为 $v_1, v_2, \cdots, v_n$. 称 $n \times n$ 矩阵 $D(G) = (d_{ij})$ 为 G 的距离矩阵，其中 d_{ij} 为从 v_i 至 v_j 的距离。

由图的邻接矩阵可以求得它的距离矩阵。

定理 7.5.3　设 $D = (d_{ij})$ 和 $X = (x_{ij})$ 分别是 n 阶图 G 的距离矩阵和邻接矩阵，则

$$d_{ij}=\begin{cases}\infty, & (\forall m)(m\in N\wedge m<n\rightarrow x_{ij}^{(m)}=0)\\ \min\{k\mid 0\leqslant k<n\wedge x_{ij}^{(k)}>0\}, & 否则\end{cases}$$

证明留作练习。

显然，图的路径矩阵和距离矩阵不能给出图的全部信息。而图的邻接矩阵可以给出图的全部信息。下面定义的无自圈图的关联矩阵可以给出无自圈图的全部信息。

定义 7.5.4 设无向图 G 无自圈，其结点集合和边集合分别为 $\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 和 $\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$，定义 G 的关联矩阵 $A(G)$ 为 $n\times m$ 矩阵 (a_{ij})，其中

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & e_j 与 v_i 关联\\ 0, & e_j 与 v_i 不关联\end{cases}$$

定义 7.5.5 设有向图 G 无自圈，其结点集合和边集合分别为 $\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 和 $\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$，定义 G 的关联矩阵 $A(G)$ 为 $n\times m$ 矩阵 (a_{ij})，其中

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & v_i 是 e_j 的起点\\ -1, & v_i 是 e_j 的终点\\ 0, & e_j 与 v_i 不关联\end{cases}$$

容易证明，若 n 阶图无自圈且有 m 条边，则 G 和 $A(G)$ 有以下联系：

1. G 是零图当且仅当 $A(G)$ 是空矩阵（即没有任何元素的矩阵）。

2. 无向图 G 的关联矩阵 $A(G)$ 的每列元素之和为 2.

3. 有向图 G 的关联矩阵 $A(G)$ 的每列元素之和为 0.

4. e_i 和 e_j 是 G 的平行边当且仅当 $A(G)$ 的第 i 列与第 j 列相同。

5. 若 G 是无向图，则 $d_G(v_i)=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\quad(i=1,2,\cdots,n)$。

6. 若 G 是有向图，则 $d_G^+(v_i)$ 为 $A(G)$ 的第 i 行中值为 1 的元素个数，$d_G^-(v_i)$ 为 $A(G)$ 的第 i 行中值为 -1 的元素个数，$d_G(v_i)$ 为 $A(G)$ 的第 i 行中非零元素个数 $(i=1,2,\cdots,n)$。

7. v_i 是孤立点当且仅当 $A(G)$ 的第 i 行全为 0.

8. 无向图（有向图）G 有 k 个分支（弱分支）$G_1,G_2,\cdots,G_k$ 当且仅当顺序排列 $G_1,G_2,\cdots G_k$ 的结点和边，可使

$$A(G)=\begin{bmatrix}A(G_1) & & & \\ & A(G_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & A(G_k)\end{bmatrix}$$

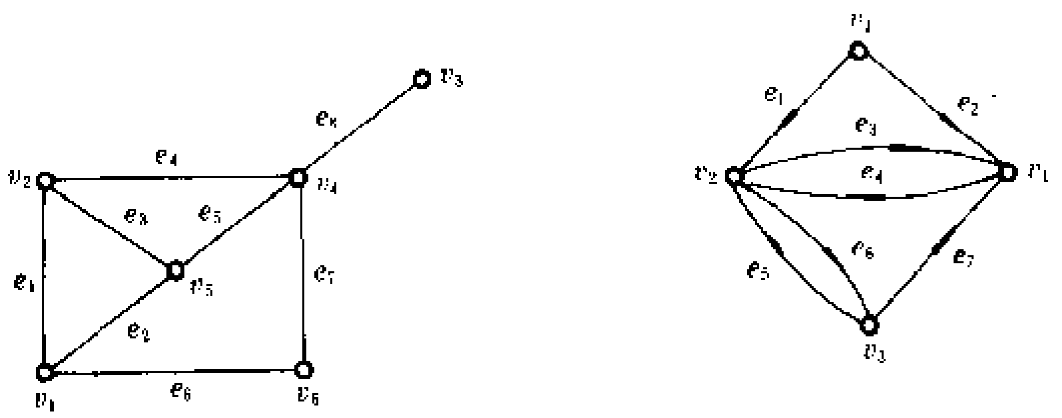
习 题 7.5

1. 写出图 7.5.2 中各图的邻接矩阵和关联矩阵，由邻接矩阵求出路径矩阵和距离矩阵，并确定图的直径。

2. 如何由邻接矩阵判断图的连通性？

3. 如何由邻接矩阵判断图是不是非循环图？

4. 如何由邻接矩阵判断有向图是否有有向回路？



(a) (b)

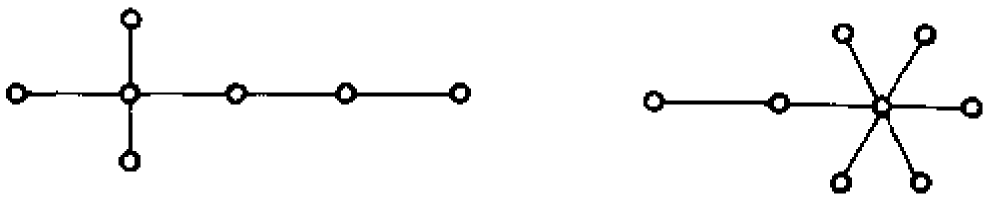
图 7.5.2

§7.6　树、有向树和有序树

树是在计算机科学中应用最广泛的一类图。

定义 7.6.1　非循环的连通无向图称为树。

图 7.6.1 给出了树的两个例子。



(a) (b)

图 7.6.1　树

定理 7.6.1　如果 $G=\langle V,E,\Psi\rangle$ 为 n 阶无向图，则下列条件等价：

i) G 是连通的和非循环的；

ii) G 无自圈，且当 $v,v'\in V$ 时，皆有唯一的一条从 v 到 v' 的基本路径；

iii) G 是连通的，且当 $v,v'\in V,e\notin E,\Psi'=\{\langle e,\{v,v'\}\rangle\}$ 时，$G+\{e\}_{\Psi'}$ 皆有唯一的一个回路；

iv) G 是连通的，且当 $e\in E$ 时，$G-e$ 都是非连通的；

v) G 是连通的且 $n(E)=n-1$；

vi) G 是非循环的且 $n(E)=n-1$.

证明

i)⇒ii)　因为 G 是非循环的，所以 G 无自圈。若 $v,v'\in V$，则由定理 7.3.1 和 G 为连通图知道，必有从 v 到 v' 的基本路径。假如从 v 到 v' 的基本路径不唯一，不妨设 $v_0e_1v_1\cdots v_{p-1}e_pv_p$ 和 $v_0'e_1'v_1'\cdots v_{q-1}'e_q'v_q'$（其中 $v_0=v=v_0'$ 且 $v_p=v'=v_q'$）为两条不同的基本路径。设 G_1 是 G 的以 $\{v_0,\cdots,v_p\}$ 为结点集合且以 $\{e_1,\cdots,e_p\}$ 为边集合的子图，G_2 是 G 的以 $\{v_0',\cdots,v_q'\}$ 为结点集合且以 $\{e_1',\cdots,e_q'\}$ 为边集合的子图。任取 $e\notin E$，当令 $\Psi'=\{\langle e,\{v,v'\}\rangle\}$ 时，$G_1+\{e\}_{\Psi'}$ 和 $G_2+\{e\}_{\Psi'}$ 显然都是回路。因此 $G'=(G_1+\{e\}_{\Psi'})\oplus(G_2+\{e\}_{\Psi'})$ 是欧拉图和 G 的子图，且不是零图，所以 G' 必有非平凡分支 G''. 对 G'' 的每个结点 u 显然皆有 $d_{G''}(u)>1$，根据定理 7.3.9 和 G'' 为 G 的子图知道，G 不是非循环图。这与 G 是非循环

图矛盾。

ii)⇒iii) 若 $v,v' \in V$，则由 ii) 知道，必有从 v 到 v' 的基本路径。因此 G 必为连通的，而且对任意 $e \notin E$，当令 $\Psi' = \{<e,\{v,v'\}>\}$ 时，$G + \{e\}_{\Psi'}$ 中必有回路。假如 $G + \{e\}_{\Psi'}$ 中的回路不唯一，不妨设 C_1 和 C_2 为它的两个不同回路。显然 e 是 C_1 和 C_2 的公共边。从而知道：$C_1 \oplus C_2$ 是 G 的子图且不为零图，根据定理 7.4.5，$C_1 \oplus C_2$ 还是欧拉图。因此 $C_1 \ominus C_2$ 的非平凡分支 G' 必是欧拉闭路，故而对 G' 中每个结点 u 皆有 $d_{G'}(u) > 1$，根据定理 7.3.9，G 必有回路 C. 对 C 中任意两个结点 u 和 u'，必有两条不同的从 u 到 u' 的基本路径，这与条件 ii) 矛盾。

iii)⇒iv) 用反证法。

假定 iv) 不成立，则由 G 为连通的可知，必有 $e \in E$ 使 $G - e$ 仍是连通的。设 $\Psi(e) = \{v,v'\}$，则 G 中必有两条不同的从 v 到 v' 的基本路径，从而由上面的论证可知，G 必有回路。这时任取 $e' \notin E$ 及 $u \in V$，当令 $\Psi' = \{<e',\{u\}>\}$ 时，$G + \{e'\}_{\Psi'}$ 显然有两个不同的回路，这与条件 iii) 矛盾。

iv)⇒v) 显然 G 是连通的简单图。下面用关于 n 的第二归纳法证明 $n(E) = n - 1$.

当 $n = 1$ 时，G 显然没有边，即 $n(E) = 0$.

假定对任意的 $k \geqslant 2$，当 $n < k$ 时皆有 $n(E) = n - 1$. 假定当 $n = k$ 时有 $n(E) = m$. 任取 $e \in E$，由 $G - e$ 是非连通图可知，$G - e$ 恰有两个分支 G_1 与 G_2. 设 $G_i(i = 1,2)$ 有 n_i 个结点和 m_i 条边，根据归纳假设，必有 $m_1 = n_1 - 1$ 且 $m_2 = n_2 - 1$. 从而即得到 $m = m_1 + m_2 + 1 = n_1 + n_2 - 1$，即 $n(E) = m = k - 1$。

v)⇒vi) 只须用关于 n 的归纳法证明 G 是非循环图即可。

当 $n = 1$ 时，G 为平凡图，故为非循环的。

假定对任意的 $k \geqslant 1$，当 $n = k$ 时 G 为非循环的。若 $n = k + 1$，则由 $n(E) = n - 1 = k$ 得 $\sum\limits_{v \in V} d_G(v) = 2n(E) = 2k$. 但由 G 为连通的知道，对每个 $v \in V$ 皆有 $d_G(v) \geqslant 1$，所以必有 $v' \in V$ 使 $d_G(v') = 1$. 这时 $G - v'$ 显然是连通的，阶为 $n - 1 = k$ 且边数为 $n(E) - 1 = k - 1$，根据归纳假设，$G - v'$ 必是非循环的，因此 G 也必是非循环的。

vi)⇒i) 显然只须证明 G 是连通的即可。

假定 G 有 k 个分支 $G_1,\cdots,G_k$. 设 $G_i(1 \leqslant i \leqslant k)$ 有 n_i 个结点和 m_i 条边。因为每个 $G_i(1 \leqslant i \leqslant k)$ 都是非循环的且为连通的，所以由前面的论证知道必有 i)⇒v)，因此 $m_i = n_i - 1(1 \leqslant i \leqslant k)$，从而得到 $n - 1 = \sum\limits_{i=1}^{k} m_i = \sum\limits_{i=1}^{k}(n_i - 1) = n - k$. 即 $k = 1$ 这表明 G 必是连通的。

定理 7.6.1 说明，可以给树以上述六种不同的等价定义，我们选用了其中的第一种。

定理 7.6.2 阶大于 1 的树至少有两个端点。

树是非循环连通无向图，如果去掉对连通性的要求，就得到森林的概念。

定义 7.6.2 每个分支都是树的无向图称为森林。

定理 7.6.3 如果森林 F 有 n 个结点，m 条边和 k 个分支，则 $m=n-k$.

证明留作练习。

定义 7.6.3 如果树 T 是无向图 G 的生成子图，则称 T 为 G 的生成树。如果森林 F

是无向图 G 的生成子图，则称 F 为 G 的生成森林。

显然有以下的定理。

定理 7.6.4 每个无向图都有生成森林。无向图 G 有生成树当且仅当 G 是连通的。

例 1 在图 7.6.2 中，包含边 b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6 和它的所有七个结点的树是它的一棵生成树。显然，生成树不是唯一的，例如把 b_6 换成 c_8 就得出它的另一棵生成树。但它的所有生成树都有 7 个结点和 6 条边。

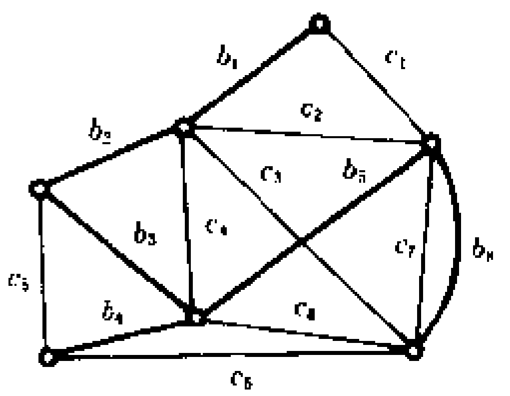


图 7.6.2 连通图和它的生成树

下面用两种方法找 n 阶连通图 G 的生成树。

首先在 G 中找出一条不是自圈的边 e_1，再找出一条不与 $\{e_1\}$ 的任何子集构成回路的边 e_2，然后找出一条不与 $\{e_1,e_2\}$ 的任何子集构成回路的边 $e_3,\cdots$，这个过程进行 $n-1$ 步就不能再继续了。由 G 的所有结点和 $e_1,e_2,\cdots,e_{n-1}$ 就构成了 G 的一棵生成树。我们把这个方法称为“避圈法”。

也可以通过另一条途径求 n 阶连通图 G 的生成树。首先找出 G 的一个回路 C_1，去掉 C_1 的一条边 e_1 形成 $G_1=G-e_1$；再找出 G_1 的一个回路 C_2，去掉 C_2 的一条边 e_2 形成 $G_2=G_1-e_2,\cdots$。这个过程一直继续到找不出回路为止，最后得到的图就是 G 的一棵生成树。我们把这个方法称为“破圈法”。

定义 7.6.4 设 $\langle G,W\rangle$ 是加权图且 $G'\subseteq G$，G' 中所有边的加权长度之和称为 G' 的加权长度。设 G 是连通无向图，$\langle G,W\rangle$ 是加权图，G 的所有生成树中加权长度最小者称为 $\langle G,W\rangle$ 的最小生成树。

我们可以用“避圈法”求最小生成树。设 G 是有 m 条边的 n 阶连通无向图，我们要求加权图 $\langle G,W\rangle$ 的最小生成树。首先，把 G 的 m 条边排成加权长度递增的序列 $e_1,e_2,\cdots,e_m$，然后执行下面的算法：

1. $T\leftarrow\varnothing$.
2. $j\leftarrow 1, i\leftarrow 1$.
3. 若 $j=n$ 则算法结束。
4. 若 $<V,\varnothing,\varnothing>\cup G[T\cup\{e_i\}]$ 无回路，则 $T\leftarrow T\cup\{e_i\}$ 且 $j\leftarrow j+1$.
5. $i\leftarrow i+1$，转向 3.

算法结束时 T 即为所求的最小生成树的边集合。

定义 7.6.5 设 T 是连通无向图 G 的生成树，称 T 的边为枝，G 中不属于 T 的边称为弦。

由定义可以看出，连通图 G 的边 e 是枝还是弦，与给定的生成树密切相关，对于 G 的某个生成树，边 e 是枝，而对于 G 的另一个生成树，e 却可能是弦。但是，对于 G 的任何生成树，枝的数目和弦的数目都是固定的，它们只与 G 的结点数和边数有关。

定理 7.6.5 若 G 是有 m 条边的 n 阶连通无向图，则 G 的任何生成树都有 $n-1$ 个枝和 $m-n+1$ 个弦。

定义 7.6.6 若 n 阶无向图 G 有 m 条边和 k 个分支，则 G 的余圈秩 $r=n-k$，圈秩 $\mu=m-n+k$.

显然，如果 G 是连通图，G 的余圈秩 r 是枝的数目，圈秩 μ 是弦的数目。由定理 7.6.1 知，如果在生成树中增加一条弦，则恰产生一个回路。

定义 7.6.7 设 T 是连通无向图 G 的生成树，G 的只包含一条弦的回路称为基本回路。

显然，基本回路的概念与生成树相关联，某回路对这个生成树是基本回路，而对另一个生成树却未必是基本回路。其次，对于给定连通图的任何生成树，基本回路的数目都是相同的。

定理 7.6.6 设 T 是连通无向图 G 的任意生成树。

i)基本回路的数目等于 G 的圈秩 μ.

ii)对于 G 的任意回路 C，总可以找到若干个基本回路 $C_1,C_2,\cdots,C_k$，使 C 与 $C_1\oplus C_2\oplus\cdots\oplus C_k$ 的差别仅在于孤立点。

证明

i)是显然的。

ii)设 C 是 G 的任意回路且 C 包含 k 条弦。显然 $k>0$，设这 k 条弦是 $e_1,e_2,\cdots,e_k$，C_i 是包含 e_i 的基本回路($i=1,2,\cdots,k$)。令 $C'=C_1\oplus C_2\oplus\cdots\oplus C_k$，则 C' 包含的弦也是 $e_1,e_2,\cdots,e_k$. 因此，$C\oplus C'$ 中的边都是枝，故 $C\oplus C'$ 是非循环的。若 $C\oplus C'$ 不是零图，必有一分支是阶大于 1 的树，根据定理 7.6.2，$C\oplus C'$ 有端点。另一方面，因为 C 和 C' 都是欧拉图，所以 $C\oplus C'$ 是欧拉图。这与 $C\oplus C'$ 有端点矛盾。故 $C\oplus C'$ 必为零图，即 C 与 C' 的差别仅在于孤立点。

定义 7.6.8 一个结点的入度为 0，其余结点的入度均为 1 的弱连通有向图称为有向树。其中，入度为 0 的结点称为根，出度为 0 的结点称为叶，出度大于 0 的结点称为分支结点。从根至任意结点的距离称为该结点的级，所有结点的级的最大值称为有向树的高度。

例 2 图 7.6.3 画出了一个有向树，v_0 是根，v_1,v_3,v_4,v_6 是叶，v_0,v_2,v_5 是分支结点，v_0 的级是 0，v_1 和 v_2 的级是 1，v_3,v_4,v_5 的级是 2，v_6 的级是 3，该有向树的高度是 3.

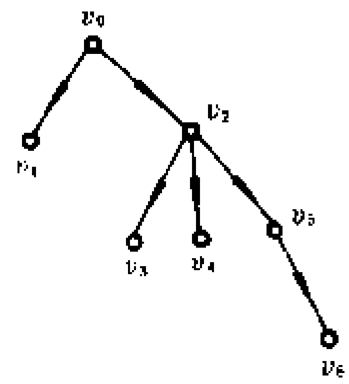


图 7.6.3 有向树

定理 7.6.7 设 v_0 是有向图 D 的结点。D 是以 v_0 为根的有向树当且仅当从 v_0 至 D 的任意结点恰有一条路径。

证明 先证必要性。设 $D=\langle V,E,\Psi\rangle$ 是有向树，v_0 是 D 的根。因为 D 是弱连通的，取 $v'\in V$，从 v_0 至 v' 存在半路径，设为 $v_0e_1v_1\cdots v_{p-1}e_pv_p$，其中 $v_p=v'$. 因为 $d_D^-(v_0)=0$，所以 e_1 是正向边，因为 $d_D^-(v_1)=1$，所以 e_2 是正向边。可归纳证明 e_p 是正向边。若从 v_0 至 v' 有两条路径 P_1 和 P_2，则 P_1 和 P_2 至少有一个公共点的入度大于 1，与 D 是有向树矛盾。

再证充分性。显然，D 是弱连通的。若 $d_D^-(v_0)>0$，则存在边 e 以 v_0 为终点，设 v_1 是 e 的起点，P 是从 v_0 至 v_1 的路径，则在 D 中存在两条从 v_0 至 v_0 的路径 Pv_1ev_0 和 v_0，与已知条件矛盾，所以 $d_D^-(v_0)=0$. 若 $d_D^-(v)>1$，其中 v 是 D 的结点，则存在两条边 e_1 和 e_2 以 v 为终点。设 e_1 和 e_2 的起点分别是 v_1 和 v_2，从 v_0 至 v_1 和从 v_0 至 v_2 的路径分别是 P_1 和 P_2，则 P_1e_1v 和 P_2e_2v 是两条不同的从 v_0 至 v 的路径，与已知条件矛盾。这就证明了 D 是有向树，且 v_0 是 D 的根。

也可用归纳法定义有向树。

定义 7.6.9 有向树可归纳定义如下：

i) 平凡图是有向树，其结点称为该有向树的根。

ii) 设 $m\in I_+$，$D_1,D_2,\cdots,D_m$ 分别是以 $r_1,r_2,\cdots,r_m$ 为根的有向树，并且两两不相交，r_0 不是 $\bigcup\limits_{i=1}^{m}D_i$ 的结点，$e_1,e_2,\cdots,e_m$ 不是 $\bigcup\limits_{i=1}^{m}D_i$ 的边，并且 $\Psi:\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}\to\{r_0,r_1,\cdots,r_m\}^2$ 定义为 $\Psi(e_i)=\langle r_0,r_i\rangle(i=1,2,\cdots,m)$. 若 $G=\langle\{r_0,r_1,\cdots,r_m\},\{e_1,e_2,\cdots,e_m\},\Psi\rangle$，则 $D=G\cup\bigcup\limits_{i=1}^{m}D_i$ 是有向树，r_0 是 D 的根，并且称 $D_1,D_2,\cdots,D_m$ 是 D 的子树。

定义 7.6.8 和定义 7.6.9 是等价的。

定义 7.6.10 每个弱分支都是有向树的有向图称为有向森林。

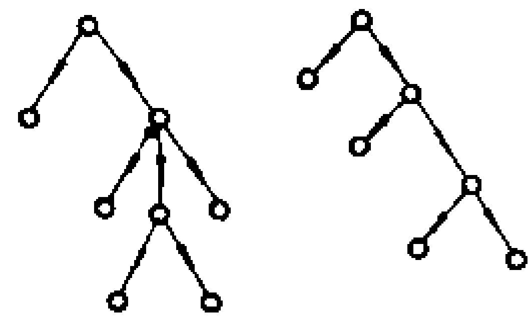
定义 7.6.11 设 $m\in N$，D 为有向树。

i) 如果 D 的所有结点出度的最大值为 m，则称 D 为 m 元有向树。

ii) 如果对于 m 元有向树 D 的每个结点 v 皆有 $d_D^+(v)=m$ 或 $d_D^+(v)=0$，则称 D 为完全 m 元有向树。

例 3 图 7.6.4(a) 是三元有向树，与每个分支结点相联的子树最多有三个。图 7.6.4(b) 是完全二元有向树，与每个分支结点相连的子树都是两个。

完全二元有向树也称二叉树，在计算机科学中特别有用。例如可用来研究算法的效率。在系统程序中，常常需要用二进制编码表示字母和其它符号，以便于输入、输出和存贮，这就需要识别程序。并且，各个字母或符号出现的频繁程度往往是不同的，可以用叶加权二叉树研究识别算法。



(a) (b)

图 7.6.4 有向树

定义 7.6.12 若 V 是二叉树 D 的叶的集合，且 $W:V\to R_+$，则称 $\langle D,W\rangle$ 为叶加权二叉树。对于 D 的任意叶 v，称 $W(v)$ 为 v 的权，称 $\sum\limits_{v\in V}(W(v)\cdot L(v))$ 为 $\langle D,W\rangle$ 的叶加权路径长度，其中 $L(v)$ 为 v 的级。

我们用叶表示字母或符号，用分支结点表示判断，用权表示字母或符号出现的概率，则叶加权路径长度就表示算法的平均执行时间。

例 4 图 7.6.5 的 (a) 和 (b) 表示了识别 A,B,C,D 的两个算法，A,B,C,D 出现的概率分别是 0.5，0.3，0.05，0.15. 图 7.6.5(a) 的叶加权路径长度是 2，图 7.6.5(b) 的叶加权路径长度是 1.7. 因此，图 7.6.5(b) 表示的算法优于图 7.6.5(a) 表示的算法。

定义 7.6.13 设 $\langle D,W\rangle$ 是叶加权二叉树。如果对任一叶加权二叉树 $\langle D',W'\rangle$，只要对于任意正实数 r，D 和 D' 中权等于 r 的叶的数目相同，就有 $\langle D,W\rangle$ 的叶加权路径长度不大于 $\langle D',W'\rangle$ 的叶加权路径长度，则称 $\langle D,W\rangle$ 为最优的。

这样，我们把求某问题的最佳算法归结为求最优二叉树。

假定我们要找有 m 个叶，并且它们的权分别是 $w_1,w_2,\cdots,w_m$ 的最优二叉树。不妨假设 $w_1,w_2,\cdots,w_m$ 是按递增顺序排列的，即 $w_1\leqslant w_2\leqslant\cdots\leqslant w_m$. 设 $\langle D,W\rangle$ 是满足要求的最优二叉树，D 中以 $w_1,w_2,\cdots,w_m$ 为权的叶分别为 $v_1,v_2,\cdots,v_m$. 显然，在所有叶中，v_1 和 v_2

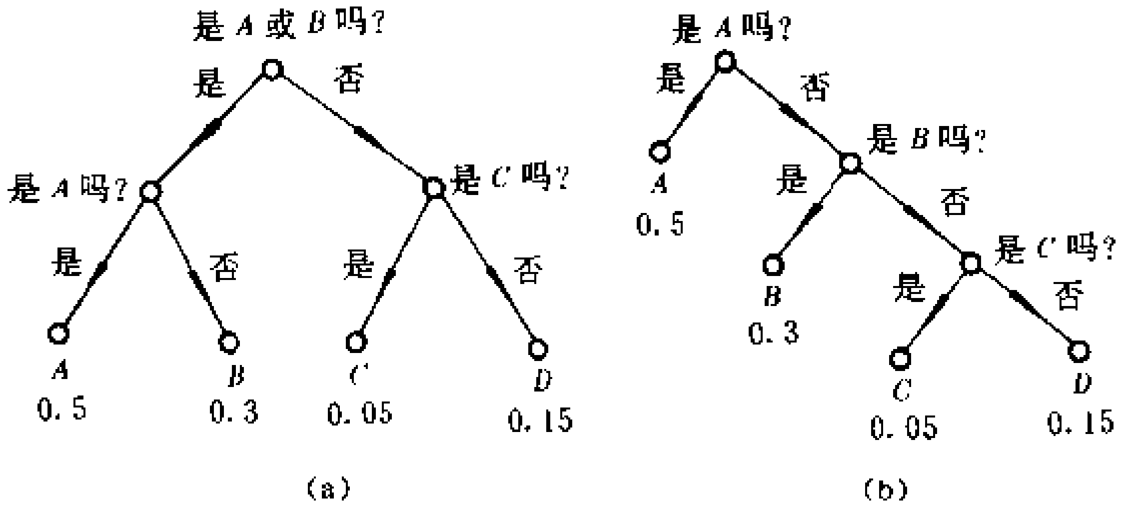


图 7.6.5 用叶加权二叉树研究算法

的级最大，不妨设 v_1 和 v_2 与同一个分支结点 v' 邻接。令 $D'=D-\{v_1,v_2\}$，$W':\{v',v_3,v_4,\cdots,v_m\}\to \boldsymbol{R}_+$，并且 $W'(v')=w_1+w_2$，$W'(v_i)=w_i(i=3,4,\cdots,m)$. 容易证明 $\langle D,W\rangle$ 是最优的当且仅当 $\langle D',W'\rangle$ 是最优的。这样，就把求 m 个叶的最优二叉树归结为求 $m-1$ 个叶的最优二叉树。我们可以继续这个过程，直到归结为求 2 个叶的最优二叉树，问题就解决了。

例 5 求叶的权分别为 2,3,9,18,23,29 的最优二叉树。

计算综述如下：

$\underline{2}$	$\underline{3}$	9	18	23	29
	$\underline{5}$	$\underline{9}$	18	23	29
		$\underline{14}$	$\underline{18}$	23	29
			32	$\underline{23}$	$\underline{29}$
			$\underline{32}$		$\underline{52}$
					84

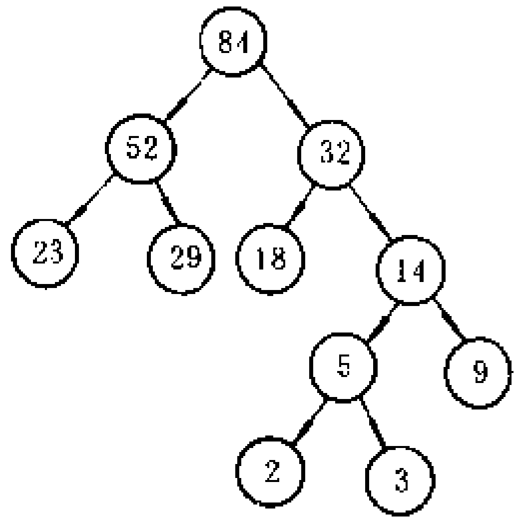
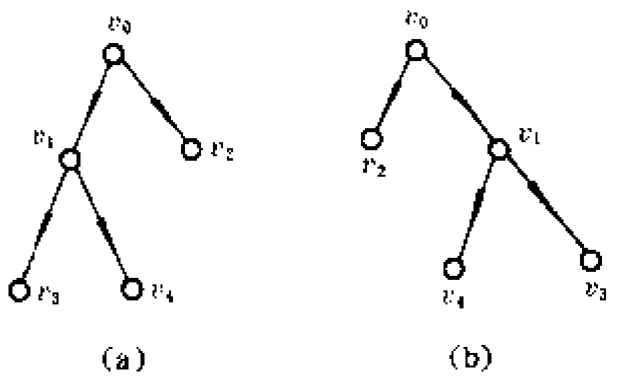


图 7.6.6 最优二叉树图



7.6.7 有序树

所得出的最优二叉树画在图 7.6.6 中，叶中的数表示权，所有分支结点中的数之和就是叶加权路径长度。

在前面讨论的有向树中，没有考虑同一级上结点的次序。例如在图 7.6.7 中，(a)和(b)是相同的有向树，但同一级上结点的次序不同。在(a)中，v_1 在 v_2 的左面，v_3 在 v_4 的左面；而在(b)中，v_1 在 v_2 的右面，v_3 在 v_4 的右面。在许多具体问题中，常常需要考虑同一级

上结点的次序。

定义 7.6.14 为每一级上的结点规定了次序的有向树称为有序树。如果有向森林 F 的每个弱分支都是有序树，并且也为 F 的每个弱分支规定了次序，则称 F 为有序森林。

我们约定，在画有序树时，总是把根画在上部，并规定同一级上结点的次序是从左至右。在画有序森林时，弱分支的次序也是从左至右。

例 7.6 我们可以用有序树表示算术表达式，其中叶表示参加运算的数或变量，分支结点表示运算符。如代数式 $v_1*v_2+v_3*(v_4+v_5/v_6)$ 可表示为图 7.6.8 的有序树。

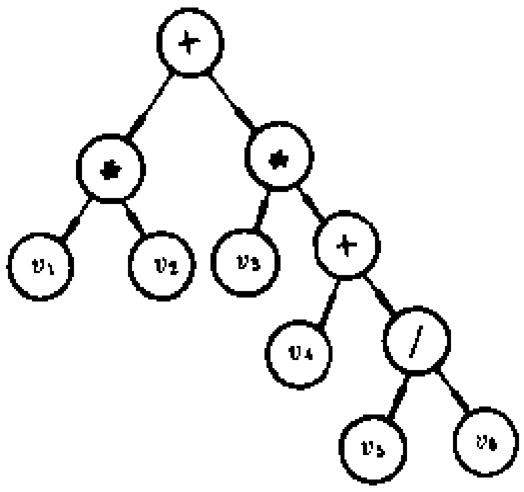


图 7.6.8 用有序树表示算术表达式

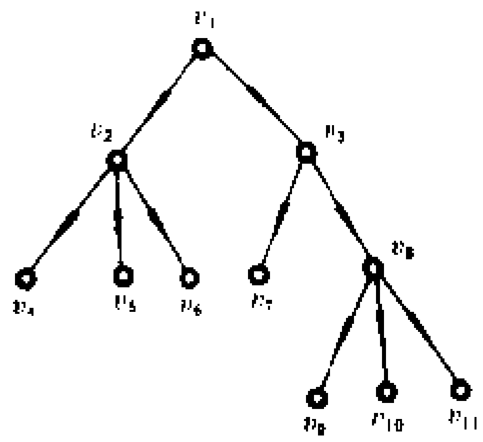
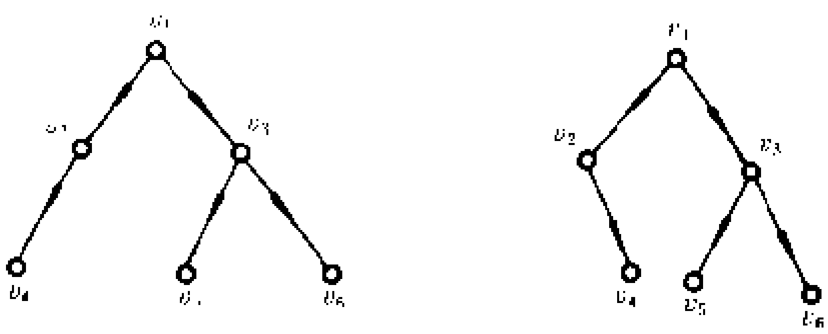


图 7.6.9 家族树

为方便起见，我们可以借用家族树的名称来称呼有序树的结点。如在图 7.6.9 中，称 v_1 是 v_2 和 v_3 的父亲，v_2 是 v_1 的长子，v_2 是 v_3 的哥哥，v_6 是 v_5 的弟弟，v_2 是 v_6 的伯父，v_5 是 v_6 的堂兄，等等。

在图 7.6.10 中(a)和(b)是相同的有序树，因为同一级上结点的次序相同。但是，如果考虑结点之间的相对位置，它们就不同了。在(a)中，v_4 位于 v_2 的左下方；而在(b)中，v_4 位于 v_2 的右下方，它们是不同的定位有序树。



(a) (b)

图 7.6.10 定位有序树

定义 7.6.15 为每个分支结点的儿子规定了位置的有序树称为定位有序树。

在定位二元有序树中，可用字符表{0,1}上的字符串唯一地表示每个结点。用空字符串 ε 表示根。设用 β 表示某分支结点，则用 $\beta 0$ 表示它的左儿子，用 $\beta 1$ 表示它的右儿子。这样，每个结点都有了唯一的编码表示，并且不同结点的编码表示不同。如在图 7.6.10(a) 中，v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6 的编码表示分别为 ε,0,1,00,10,11. 定位二元有序树全体叶的编码表示的集合称为它的前缀编码。如图 7.6.10 (a)的前缀编码是{00,10,11}. 不同的定位

二元有序树有不同的前缀编码。这种表示方法便于用计算机存贮定位二元有序树。

在计算机通信中，常用长度为 5 的 0,1 序列表示一个英文字母，在接收端每收到长度为 5 的 0,1 序列就可以确定一个字母。但是，各字母的出现频率是不同的。例如：A，B 通常用得频繁，Q，Z 用得稀少。于是人们希望用较短的序列去表示出现频率高的字母，用较长的序列去表示出现频率低的字母，从而缩短信息串的总长，以达到降低传输和识别耗费的目的。

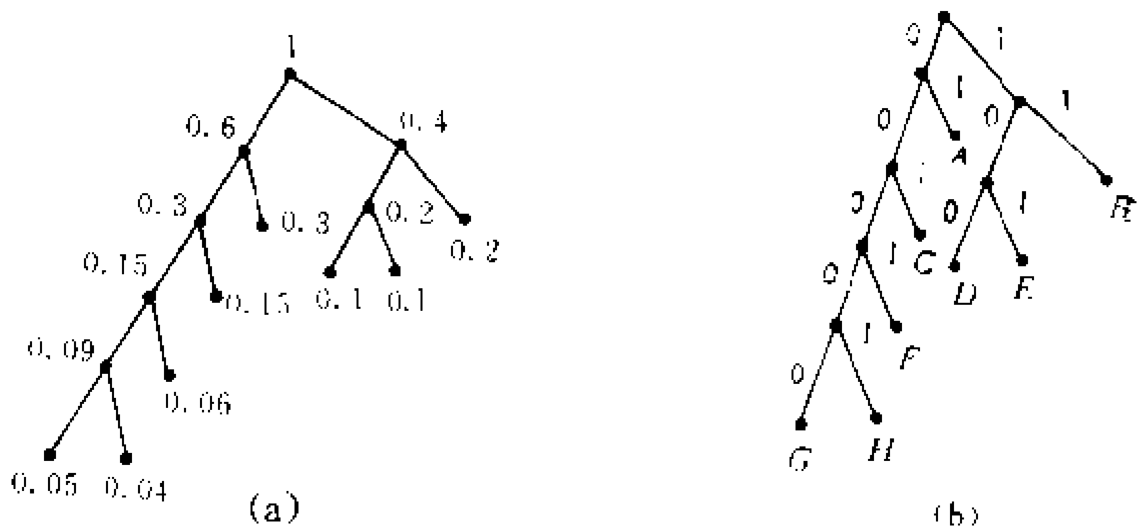
例 7 在计算机通信中要传输 A、B、C、D、E、F、G、H 这八个字母，它们出现的频率为：

A:30%	B:20%
C:15%	D:10%
E:10%	F:6%
G:5%	H:4%

试给出一个最佳编码，使通讯中出现的二进制数字尽可能的少。

解 应该用较短的 0,1 串传输出现频率高的字母。因而可用每个字母出现的频率作为权。求出叶的权分别为 0.04，0.05，0.06，0.1，0.1，0.15，0.2，0.3 的最优二叉树。然后用这样的二叉树产生前缀编码传输上述给定的字母。具体做法如下：

① 所求叶加权最优二叉树如下图(a)：



(a) (b)

② 将(a)作为一棵定位二元有序树(见(b))，并求出它的前缀编码：{01，11，001，100，101，0001，00000，00001}. 用权为 W 的树叶对应的编码来传输出现频率为 W 的字母，即每个字母对应的编码为：

A:01	B:11
C:001	D:100
E:101	F:0001
G:00000	H:00001

类似地，我们可以给出 26 个英文字母的最佳编码。留作练习。

可以在有序森林和定位二元有序树之间建立一一对应关系。在有序森林中，我们称位于左边的有序树之根为位于右边的有序树之根的哥哥。设与有序森林 F 对应的定位二元有序树为 T. 我们规定，它们有相同的结点。在 F 中，若 v_1 是 v_2 的长子，则在 T 中，v_1 是 v_2

的左儿子。在 F 中，若 v_1 是 v_2 的大弟，则在 T 中，v_1 是 v_2 的右儿子。这种对应关系称为有序森林和定位二元有序树之间的自然对应关系。例如，图 7.6.11(a)是有序森林，图 7.6.11(b)是对应的定位二元有序树。

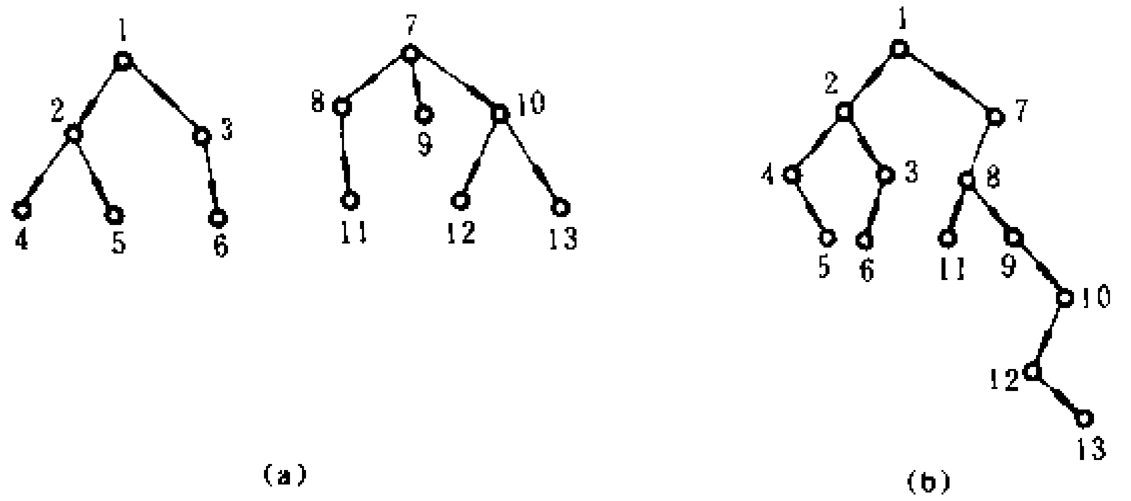


图 7.6.11 有序森林和对应的定位二元有序树

习 题 7.6

1. 画出所有不同构的一、二、三、四、五、六阶树。

2. 如何由无向图 G 的邻接矩阵确定 G 是不是树。

3. 设 v 和 v' 是树 T 的两个不同结点，从 v 至 v' 的基本路径是 T 中最长的基本路径。证明 $d_T(v)=d_T(v')=1$.

4. 找出图 7.6.12 的连通无向图的一个生成树，并求出它的圈秩和余圈秩。

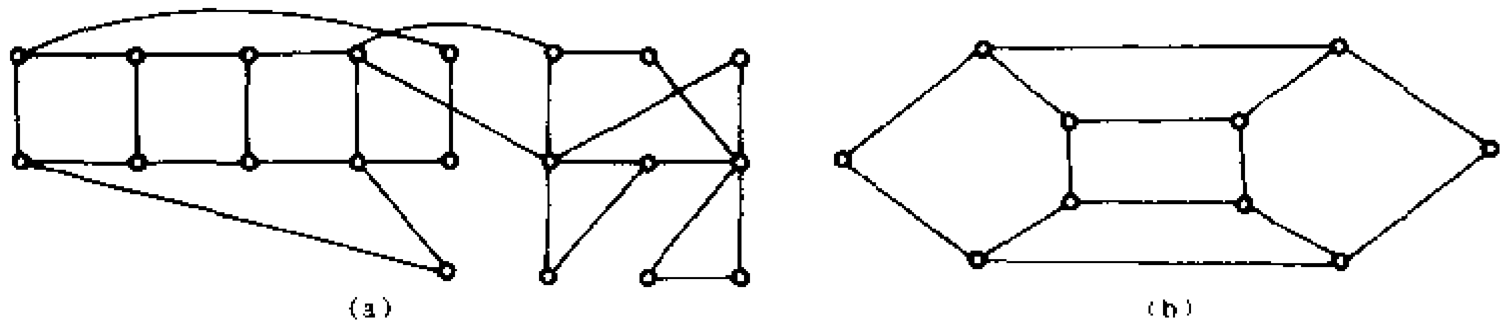


图 7.6.12

5. 证明或以反例反驳以下命题：任意连通无向图的任何一条边都是它的某个生成树的枝，并且也是另一个生成树的弦。

6. 求图 7.6.13 的最小生成树。

7. 设计一个用“破圈法”求最小生成树的算法。

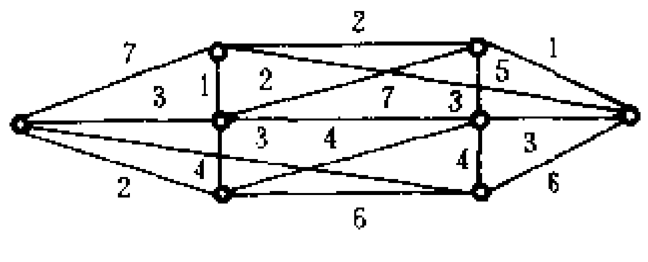


图 7.6.13

8. 证明任何二叉树有奇数个结点。

9. 证明 n 阶二叉树有 $\frac{n+1}{2}$ 个叶，其高度 h 满足 $\log_2(n+1)-1\leqslant h\leqslant\frac{n-1}{2}$.

10. 由有向图 G 的邻接矩阵如何确定 G 是不是有向树。

11. 找出叶的权分别为 2，3，5，7，11，13，17，19，23，29，31，37，41 的最优叶

加权二叉树，并求其叶加权路径长度。

12. 找出图 7.6.14 给出的有序森林对应的定位二元有序树，并求其前缀编码。

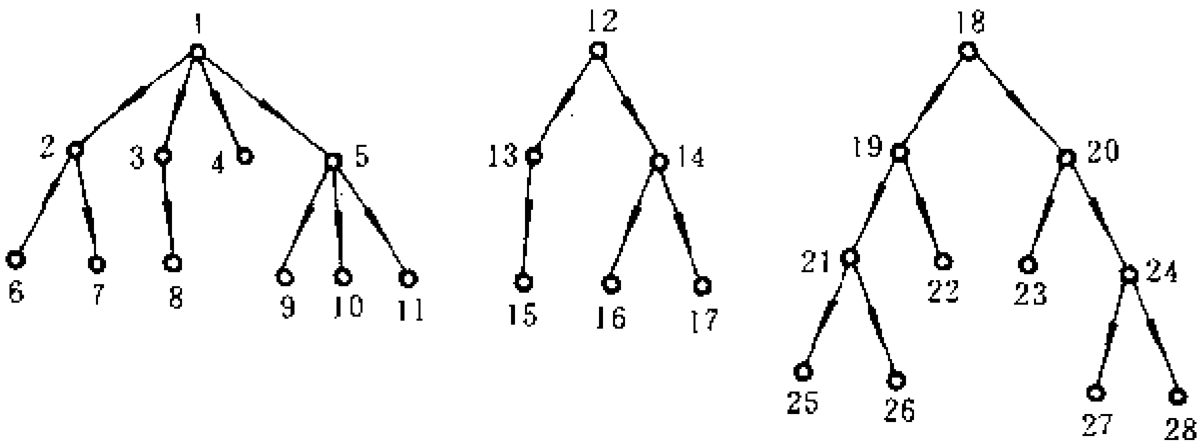


图 7.6.14

§7.7 二 部 图

本节讨论另一类特殊无向图。

定义 7.7.1 设无向图 $G=\langle V,E,\Psi\rangle$. 如果存在 V 的划分 $\{V_1,V_2\}$，使得 V_i 中的任何两个结点都不邻接($i=1,2$)，则称 G 为二部图，V_1 和 V_2 称为 G 的互补结点子集。

显然，二部图没有自圈。与二部图的一条边关联的两个结点一定分属于不同的互补结点子集。一般说来，二部图的互补结点子集的划分不是唯一的。如图 7.7.1 是二部图，$\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ 和 $\{v_5,v_6,v_7\}$ 是它的互补结点子集，$\{v_1,v_6,v_7\}$ 和 $\{v_2,v_3,v_4,v_5\}$ 也是它的互补结点子集。

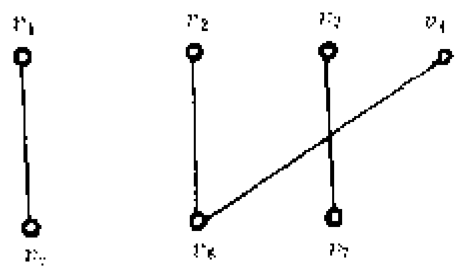


图 7.7.1 二部图

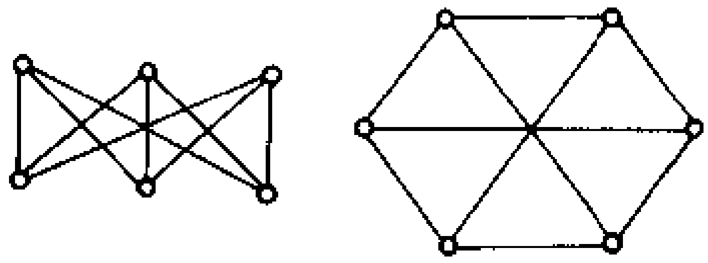
定理 7.7.1 设 G 是阶大于 1 的无向图。G 是二部图当且仅当 G 的所有回路的长度均为偶数。

证明 先证必要性。设 V_1 和 V_2 是二部图 G 的互补结点子集，C 是 G 的长度为 m 的回路。若 v_0 为 C 的某一结点，则在 C 中存在从 v_0 至 v_0 的长度为 m 的路径，设为 $v_0e_1v_1\cdots v_{m-1}e_mv_0$. 不妨设 $v_0\in V_1$，则对于一切 $i<m$，$v_i\in V_2$ 当且仅当 i 为奇数。v_{m-1} 与 v_0 邻接，故 $v_{m-1}\in V_2$，因此 $m-1$ 是奇数，所以 m 为偶数。

再证充分性。设 $G=\langle V,E,\Psi\rangle$ 是连通的。任取 $v_0\in V$，做 $V_1=\{v_i|v_i\in V$ 且 v_i 到 v_0 的距离为偶数$\}$，$V_2=V-V_1$. 显然每个 $e\in E$ 必连接 V_1 中的一个点和 V_2 中的一个点。因为若 $u,v\in V_1$(或 $u,v\in V_2$)且 e 连接 u 和 v，则当 v_0 到 u 的测地线 P_1 和 v_0 到 v 的测地线 P_2 无公共点时，P_1，P_2 和 e 构成长度为奇数的回路，与题设矛盾。当 P_1 和 P_2 有公共点时，设最后一个公共点为 v'，v' 将 P_1 分成 P'_1 和 P''_1，将 P_2 分成 P'_2 和 P''_2，且 P'_1 和 P'_2 均为 v_0 到 v' 的测地线，长度相等。因为 P_1 和 P_2 的长度均为偶数或均为奇数，故 P''_1 和 P''_2 的长度有相同的奇偶性，P''_1，P''_2 和 e 构成长度为奇数的回路，与题设矛盾。若 G 不是连通的，可用以上办法证明 G 的每个分支是二部图，则 G 也是二部图。

推论　阶大于 1 的树是二部图。

定义 7.7.2　设 V_1 和 V_2 是简单二部图 G 的互补结点子集，如果 V_1 中的每个结点与 V_2 中的每个结点邻接，则称 G 为完全二部图。



(a)　　　　(b)

图 7.7.2　$K_{3,3}$的两个图示

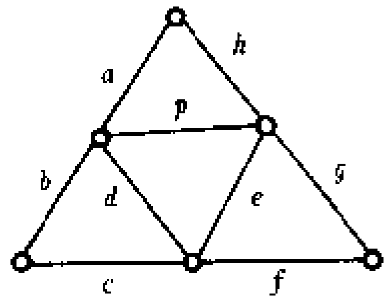


图 7.7.3　无向图中的匹配

我们把互补结点子集分别包含 m 和 n 个结点的完全二部图记为 $K_{m,n}$. 图 7.7.2 画出了 $K_{3,3}$的两个图示。$K_{3,3}$很重要，我们在讨论图的平面性时还要遇到它。

定义 7.7.3　设无向图 $G=\langle V,E,\Psi\rangle$；$E'\subseteq E$.

i)　如果 E' 不包含自圈，并且 E' 中的任何两条边都不邻接，则称 E' 为 G 中的匹配。

ii)　如果 E' 是 G 中的匹配，并且对于 G 中的一切匹配 E''，当 $E'\subseteq E''$ 时皆有 $E'=E''$，则称 E' 为 G 中的极大匹配。

iii) G 中的边数最多的匹配称为 G 中的最大匹配。

iv) G 中的最大匹配所包含的边的数目称为 G 的匹配数。

显然，最大匹配一定是极大匹配，而极大匹配未必是最大匹配。在一个无向图中，可以有多个极大匹配和最大匹配。

例 1　在图 7.7.3 中，$\{a,e\}$，$\{a,c,g\}$，$\{a,f\}$，$\{b,e\}$，$\{b,g\}$，$\{b,f,h\}$，$\{c,h\}$，$\{c,p\}$ $\{d,g\}$，$\{d,h\}$，$\{f,p\}$是极大匹配，其中$\{a,c,g\}$和$\{b,f,h\}$是最大匹配。匹配数是 3.

下面专门讨论二部图的匹配理论。

定义 7.7.4　设 V_1 和 V_2 是二部图 G 的互补结点子集。如果 G 的匹配数等于 $n(V_1)$，则称 G 中的最大匹配为 V_1 到 V_2 的完美匹配。

显然，只有 $n(V_2)\geqslant n(V_1)$ 时才可能存在 V_1 到 V_2 的完美匹配，但这个条件并不充分。如在图 7.7.4 给出的二部图中，$V_1=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$，$V_2=\{p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6\}$，$n(V_2)>n(V_1)$，但并不存在 V_1 到 V_2 的完美匹配。下面的定理给出了存在完美匹配的充分必要条件。

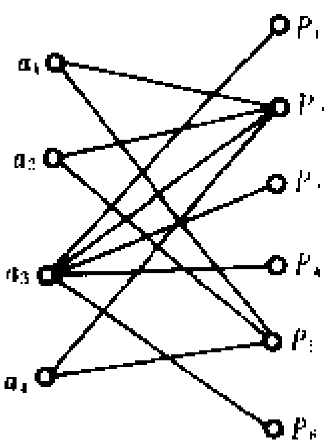


图 7.7.4　不存在完美匹配的二部图

定理 7.7.2　设 V_1 和 V_2 是二部图 G 的互补结点子集。存在 V_1 到 V_2 的完美匹配当且仅当，对每个 $S\subseteq V_1$ 皆有 $n(S)\leqslant n(N_G(S))$，其中

$N_G(S)=\{v\mid v\in V_2\wedge(\exists v')(v'\in S\wedge v$ 与 v' 在 G 中邻接$)\}$.

此定理证明较复杂，在这里就不证了。

例 2　设有 n 个甲班学生和 n 个乙班学生开联欢会，每个甲班学生恰好认识 δ 个乙

班学生，每个乙班学生也恰好认识 δ 个甲班学生。可否适当安排，使每个甲班学生均与他所认识的一个乙班学生在一起交谈？

解 用 $X=\{x_1,x_2,\cdots x_n\}$ 表示甲班学生，用 $Y=\{y_1,\cdots y_n\}$ 表示乙班学生。若 x_i 认识 y_i，就画一条连接 x_i 与 y_i 的边，这样就可得到一个以 X,Y 为互补结点子集的二部图 G。因此，问题转化成：G 中是否有从 X 到 Y 的完美匹配。

假定无从 X 到 Y 的完美匹配，根据定理 7.7.2 必有 $S\subseteq X$ 使 $n(S)=k$ 且 $n(N_G(S))<k$. 已知每个 $x\in S$ 都恰与 δ 条边关联，故共有 $k\delta$ 条边与 S 中结点相关联。但由 $h=n(N_G(S))$ 知道，恰有 Y 中 h 个结点与 S 中结点邻接，但每个 $y\in Y$ 都恰与 δ 条边关联，故至多共有 $h\delta$ 条边与 S 中结点关联。因此必有 $k\delta\leqslant h\delta$，这与 $h<k$ 矛盾。

当二部图的结点数目比较大时，定理 7.7.2 用起来不太方便，下面给出存在完美匹配的一个充分条件。

定理 7.7.3 设 V_1 和 V_2 是二部图 G 的互补结点子集且 t 是正整数。若对 V_1 中的每个结点，在 V_2 中至少有 t 个结点与其邻接，对 V_2 中的每个结点，在 V_1 中至多有 t 个结点与其邻接，则存在 V_1 到 V_2 的完美匹配。

证明 因为去掉平行边不会影响 V_1 到 V_2 的完美匹配的存在性，所以不妨假设 G 是简单图。任取 $S\subseteq V_1$，设 $n(S)=n$，$n(N_G(S))=m$. 如果边 e 与 S 中的某结点关联，则必有 $N_G(S)$ 中的结点与 e 关联，所以 $\sum\limits_{v\in S}d_G(v)\leqslant\sum\limits_{v\in N_G(S)}d_G(v)$. 故 $t\cdot n\leqslant\sum\limits_{v\in S}d_G(v)\leqslant\sum\limits_{v\in N_G(S)}d_G(v)\leqslant t\cdot m$，因此 $n\leqslant m$. 根据定理 7.7.2，存在 V_1 到 V_2 的完美匹配。

二部图的匹配理论可用于解决实际问题。假定，有 q 个委员会 $c_1,c_2,\cdots,c_q$，要从每个委员会的委员中选出该委员会的主任，并限定任何人不得兼任一个以上委员会的主任。问是否可能按照要求选出主任？可把这个问题化为图论问题。令 V_1 是所有委员会的集合，V_2 是参加这些委员会的人的集合，若某人 m 是某委员会 c 的委员，则在 m 和 c 之间连一条边。这样就构成了以 V_1 和 V_2 为互补结点子集的一个二部图，可能按照要求选出主任当且仅当存在 V_1 到 V_2 的完美匹配。这样就可以用我们刚学过的定理解决了。

习 题 7.7

1. 图 7.7.5 是不是二部图？如果是，找出其互补结点子集。

2. 如何由无向图 G 的邻接矩阵判断 G 是不是二部图。

3. 举出一个二部图，它不满足定理 7.7.3 的条件，但存在完美匹配。

4. 证明 n 阶简单二部图的边数不能超过$[n^2/4]$.

5. 有 6 个人 p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6 出席某学术报告会，他们的情况是：

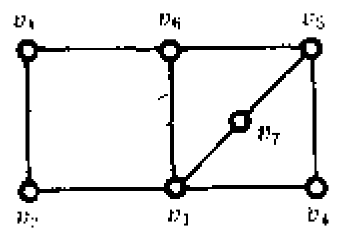


图 7.7.5

p_1 仅会讲汉语、法语和日语，

p_2 仅会讲德语、日语和俄语，

p_3 仅会讲英语和法语，

p_4 仅会讲汉语和西班牙语，

p_5 仅会讲英语和德语，

p_6 仅会讲俄语和西班牙语。

欲将这 6 个人分成两组，可能发生同一组内任何两人都不能相互交谈的情况吗？

6. 有四名教师：张明、王同、李林和赵丽，分配他们去教四门课程：数学、物理、电工和计算机科学。张明懂物理和电工，王同懂数学和计算机科学，李林懂数学、物理和电工，赵丽只懂电工。应如何分配，才能使每个人都教一门课，每门课都有人教，并且不使任何人去教他不懂的课程？

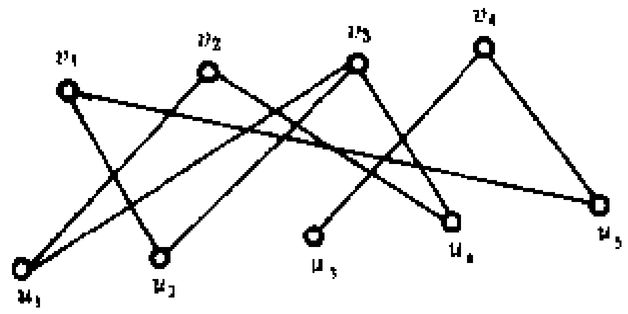


图 7.7.6

7. 图 7.7.6 是否存在 $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ 到 $\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\}$ 的完美匹配？如果存在，求出它的一个完美匹配。

§7.8 平 面 图

本节仅讨论无向图，因此就把无向图简称为图。在一张纸上画图的几何模型时常常会发现，不仅需要允许边在结点处相交，有时还不得不允许边在非结点处相交。对于某些图来说，如果不允许边在非结点处相交，就不可能在一张纸上画出它们的图形。

定义 7.8.1 如果能够在平面上画出图 G 的图形，而使边不在非结点处相交，则称 G 为平面图。否则称 G 为非平面图。

必须注意，在平面上画出了图 G 的一个图形，使得边在非结点处相交，并不能断定图 G 是非平面图，因为可能找到图 G 的另一个平面图形，使得边不在非结点处相交。图 7.8.1 是一个图的两个图形，其中一个的边没有在非结点处相交，因此，该图是平面图。

波兰数学家库拉托夫斯基仔细研究了 K_5 和 $K_{3,3}$，发现它们是最简单的非平面图，并且任何非平面图都与它们存在某种联系。因此，我们把这两个图称为库拉托夫斯基图，其中 K_5 称为库拉托夫斯基第一图，$K_{3,3}$ 称为库拉托夫斯基第二图。

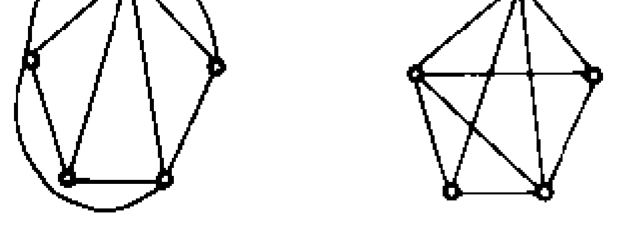


图 7.8.1 一个图的两个图示

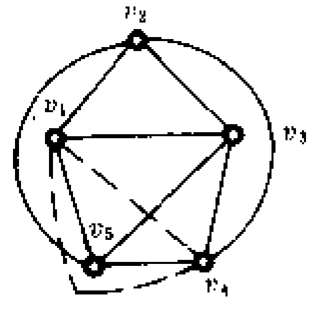


图 7.8.2 K_5 的图示

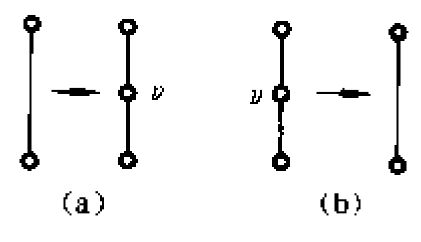


图 7.8.3 图的同胚

定理 7.8.1 K_5 是非平面图。

证明 首先画出以结点 v_1,v_2,v_3,v_4,v_5 为顶点的五边形，它把整个平面分成两个区域：内部和外部。v_1 和 v_3 的连线可画在内部，也可画在外部，不妨将其画在内部。v_2 和 v_4，

v_2 和 v_5 的连线只能画在外部，否则它们就要与 v_1 和 v_3 的连线交于非结点处。v_3 和 v_5 的连线只能画在内部。v_1 和 e_4 的连线，不论画在内部，还是画在外部，均要与已画好的边交于非结点处。因此，K_5 是非平面图。上述步骤如图 7.8.2 所示。

定理 7.8.2 $K_{3,3}$是非平面图。

这个定理可与上定理同样证明。

定义 7.8.2 定义图之间的同胚关系如下：

i) 设图 $G=\langle V,E,\Psi\rangle$，$e\in E$，$\Psi(e)=\{v_1,v_2\}$，$v\notin V$，$e_1\notin E$ 且 $e_2\notin E$ 若图 $G'=\langle\{v,v_1,v_2\},\{e_1,e_2\},\Psi'\rangle$，其中 $\Psi'(e_1)=\{v,v_1\}$，$\Psi'(e_2)=\{v,v_2\}$．则$(G-e)\cup G'$ 同胚于 G.

ii) 同胚关系是等价关系

定义 7.8.2 的 i)说明，去掉图 G 中连接 v_1 和 v_2 的边 e，加上一个新结点 v，并使其与 v_1，v_2 邻接，所得到的图同胚于图 G(见图 7.8.3 (a))。由同胚关系的对称性知，去掉图 G 中度为 2 的结点 v，并把与 v 关联的两条边合为一条边得到的图同胚于图 G(见图 7.8.3 (b))。由同胚关系的自反性和传递性得出，对图 G 有限次应用上述两种变换得到的图同胚于图 G. 例如，在图 7.8.4 中，根据定义 7.8.2 的 i)和同胚关系的对称性，(b)同胚于(a)，根据定义 7.8.2 的 i)，(c)同胚于(b)，(d)同胚于(c)，再由同胚关系的传递性，(d)同胚于(a)。

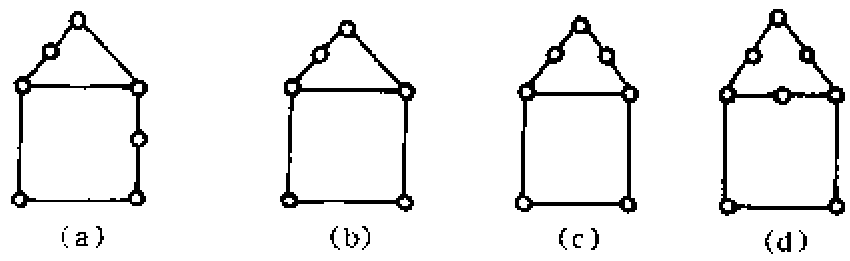
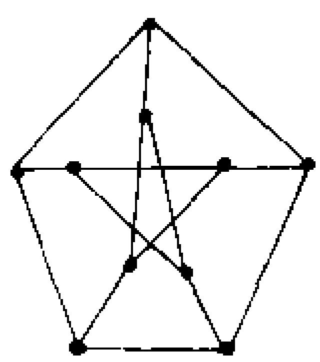


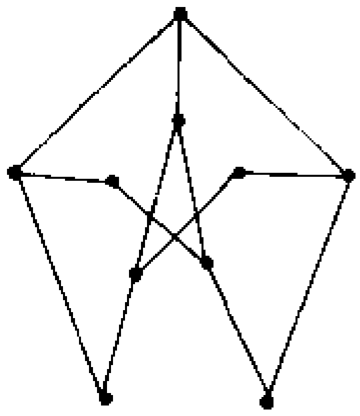
图 7.8.4 图的同胚关系

定理 7.8.3(库拉托夫斯基定理) 图 G 是平面图当且仅当 G 没有同胚于库拉托夫斯基图的子图。

例 1 证明下面给出的彼得森(Petersen)图是非平面图。



解 给出彼得森图的子图如下：



该图同胚于 $K_{3,3}$，由定理 7.8.3，得证。

定理的必要性是显然的。定理的充分性的证明比较复杂，这里就不讨论了，感兴趣的读者可参看《图论》(哈拉里著，李慰萱译，上海科学技术出版社 1980 年出版)第 126～130 页。

定义 7.8.3 在平面上画出的边不在非结点处相交的平面图 G 的图形称为 G 的平面表示。在平面图 G 的一个平面表示中，以 G 的边为边界的连通区域称为 G 的该平面表示的面。

显然，对于每个平面图的任何平面表示，恰有一个面是无界的，其余的面均是有界的。一个平面图可以有多个不同的平面表示，这些平面表示的面是不同的。我们自然要问，它们拥有的面的数目会不会不同？下面的定理告诉我们，一个连通平面图的任何平面表示的面的数目都是一样的，它是图本身固有的性质。

定理 7.8.4(欧拉公式) 若 n 阶连通平面图 G 有 m 条边，它的一个平面表示有 f 个面，则

$$f = m - n + 2$$

证明 对 f 用第一归纳法。

当 $f=1$ 时，G 没有回路，故为树，从而得 $m=n-1$. 因此，

$$m-n+2=(n-1)-n+2=1.$$

假定对任意的 $k\geqslant 1$，当 $f=k$ 时定理成立。

设 G 的一个平面表示有 $k+1$ 个面，由于 $k+1\geqslant 2$，所以 G 至少有一个回路。设 C 是 G 的一个回路，e 是 C 中的边，从 G 的该平面表示中去掉边 e，得到 $G-e$ 的有 k 个面的平面表示。显然 $G-e$ 是有 $m-1$ 条边的 n 阶连通平面图，根据归纳假设，$k=(m-1)-n+2$，故 $k+1=m-n+2$.

可以把欧拉公式推广到一般平面图。

定理 7.8.5 若 n 阶平面图 G 有 m 条边和 k 个分支，它的一个平面表示有 f 个面，则

$$f = m - n + k + 1.$$

证明留作练习。

从定理 7.8.5 知道，对于一个平面图的任何平面表示，面的数目都是一样的。因此，如果平面图 G 的一个平面表示有 f 个面，我们就直接说 G 有 f 个面，而不再区分是指 G 的哪个平面表示。

欧拉公式很有用，从它可以得出判断一个连通图是平面图的一系列必要条件。

定理 7.8.6 若 n 阶简单连通平面图 G 有 m 条边且 $n\geqslant 3$，则 $m\leqslant 3n-6$.

证明 若 G 没有回路，则 G 是树，所以 $m=n-1$. 故 $m=n-1\leqslant(n-1)+(2n-5)=3n-6$.

设 G 有回路。因为 G 是简单图，所以对于 G 的任何平面表示，每个面的边界至少有 3 条边，并且每条边至多是两个面的边界，因此 $2m\geqslant 3(m-n+2)$，即 $m\leqslant 3n-6$.

可用定理 7.8.6 证明 K_5 是非平面图，但不能证明 $K_{3,3}$ 是非平面图。下面的定理可以证明 $K_{3,3}$ 是非平面图。

定理 7.8.7 若 n 阶简单连通平面二部图有 m 条边且 $n\geqslant 3$，则 $m\leqslant 2n-4$.

证明 若 G 没有回路，则 G 是树，所以 $m=n-1$，故由 $n\geqslant 3$ 得 $m=n-1\leqslant 2n-4$.

设 G 有回路。因为 G 是简单二部图，故对 G 的任何平面表示，每个面的边界都至少有 4 条边，且每条边至多是两个面的边界，因此 $2m\geqslant 4(m-n+2)$ 即 $m\leqslant 2n-4$.

定义 7.8.4 给定平面图 G 的一个平面表示，在其每个面内取一点，如果两个面有 m 条公共边，则用 m 条线连接这两个面内取定的点，并使其分别与 m 条公共边相交，由这些点和连线组成的图形，称为 G 的该平面表示之对偶图。

一个平面图可能有多个平面表示，由不同的平面表示得出的对偶图是不是一定同构呢？下面的例子说明，不一定同构。

例 1 图 7.8.5 的(a)和(b)是同一个平面图的两个平面表示，(c)和(d)是分别由它们得出的对偶图的平面表示，其中 e_i^* 是与 e_i 相交的边。显然，(c)和(d)表示的图是不同构的。

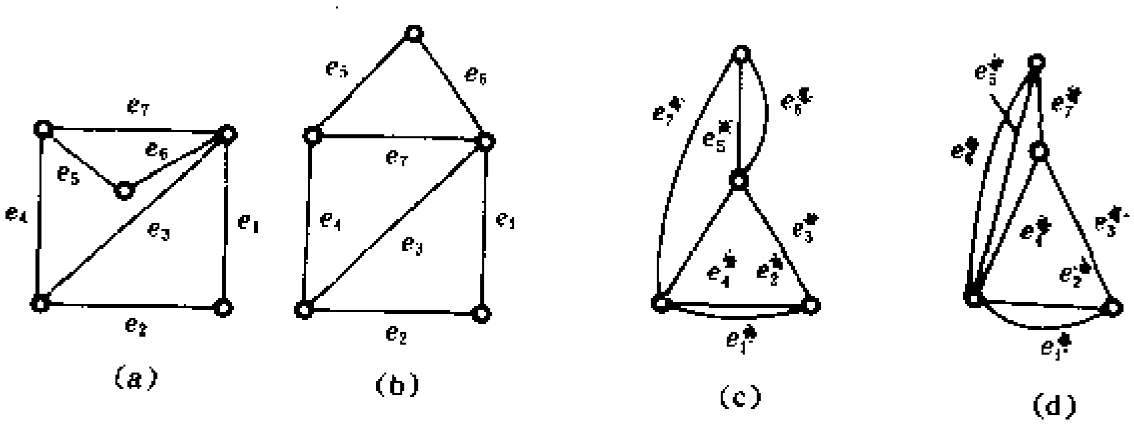


图 7.8.5 平面图和它的对偶图

定义 7.8.5 如果平面图 G 与它的一个对偶图同构，则称 G 为自对偶图。

例 2 图 7.8.6 就是一个自对偶图。

定义 7.8.6 设 G 是简单图，如果可以用 k 种颜色对 G 中结点进行着色，使得相邻的点色不同，则称 G 是 k—可着色的。若 G 是 k—可着色的，但不是 $(k-1)$—可着色的，就称 G 是 k—色图，k 为 G 的色数。

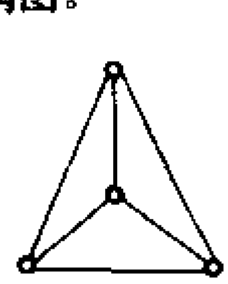


图 7.8.6 自对偶图

这里讲的是点着色，类似地可定义边着色和面着色。

与平面图相关联的一个著名问题是四色问题。早在一百多年前，人们就猜想，可用四种颜色对任何平面图形的区域染色，使得任何两个邻接区域都不会呈相同的颜色。但是，这个猜想一直得不到证明，难住了许多数学家。然而，在探求证明的过程

中，却获得了图论和有关领域的许多重要成果。

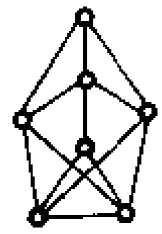


图 7.8.7

习　题　7.8

1. 画出所有不同构的 6 阶非平面图。

2. 用库拉托夫斯基定理证明图 7.8.7 是非平面图。

3. 设 $k\geqslant3$，$n\geqslant(k+2)/2$，n 阶连通平面图 G 有 m 条边，在它的一个平面表示中，每个面的边界至少包含 k 条边，证明 $m\leqslant k(n-2)/(k-2)$.

§7.9　网　络　流

运输问题，电路问题以及信息传输问题等，都可以化为图论的网络流。例如，要将一批货物 w 从 s 城运往 t 城。可用结点表示城市，连接两结点（城市）的边表示它们之间的路，用边的权值表示这段路的最大运输量。那么，这类运输问题的一般模型就可以用加权有向图描述。图 7.9.1 给出了这类运输问题的一个实例。

定义 7.9.1　设 $G=<V,E,\Psi>$ 是弱连通有向图且 $C:E\to R_0$（其中 R_0 为非负实数集合。）如果加权图 $<G,C>$ 满足：

i)　图中恰有一个结点入度为 0，称为源。

ii)　图中恰有一个结点出度为 0，称为汇。

则称 $<G,C>$ 为网络，C 为该网络的容量函数。对 G 的任意边 e，称 $C(e)$ 为 e 的容量。

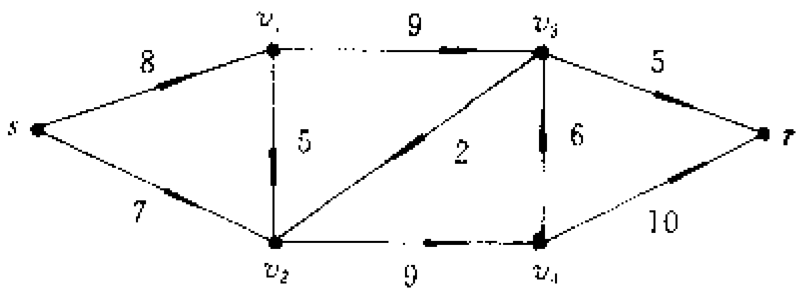


图 7.9.1

可以用网络表示的物理模型是多种多样的。图 7.9.1 便是一例。其中，s 和 t 分别为它的源和汇。每条边 e 处所标数字即是其容量 $C(e)$。进一步，怎样把一批货物 w 从 s 实际运输到 t 呢？运输方案该怎样制定呢？为此，我们引入流的概念。

定义 7.9.2　设网络 $N=<V,E,\Psi,C>$ 的源和汇分别为 s 和 t，对任意 $v\in V$，用 E_v^+ 和 E_v^- 分别表示 N 中以 v 为起点和终点的边集。如果 $f:E\to R_0$ 满足以下条件：

i)　若 $e\in E$，则 $f(e)\leqslant c(e)$；

ii)　若 $v\in V-\{s,t\}$，则 $\sum\limits_{e\in E_v^+}f(e)=\sum\limits_{e\in E_v^-}f(e)$.

则称 f 为 N 的从 s 到 t 的流，s 和 t 也分别称为 f 的源和汇。对任意 $e\in E$，$f(e)$ 称为 e 的流量。若 $f(e)=c(e)$，则称 e 为饱和边，否则称为非饱和边。$\sum\limits_{e\in E_s^+}f(e)$ 称为 f 的值，记为 w.

显然，$\sum_{e\in E_v^+} f(e) = \sum_{e\in E_v^-} f(e) = w$，即流 f 从源流出的总量等于它流入汇的总量，每一个从 s 到 t 的流，实际上就是一个从 s 到 t 的运输方案。

定义 7.9.3 每条边的流量均为 0 的流称为零流。

例 1 在图7.9.2中给出了一个网络及其流，每条边旁的第一个数是该边的容量，第二个数是该边的流量。显然，这个流的值是 8.

如果用结点表示城市，用边表示城市之间的单行公路，用容量表示公路的最大货运量。怎样组织运输才能把尽可能多的物资由 s 市运往 t 市？这就归结为求从 s 至 t 的最大流。

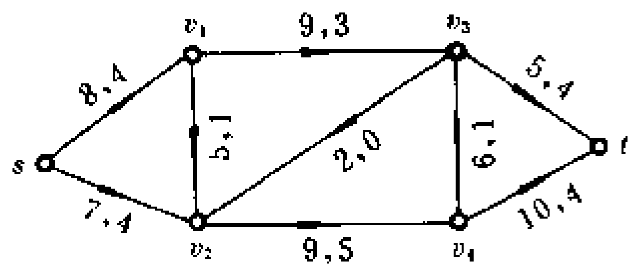


图 7.9.2 网络流

定义 7.9.4 设 f_m 是网络 N 的从 s 至 t 的流。如果对于 N 的从 s 至 t 的任意流 f，f_m 的值总是大于等于 f 的值，则称 f_m 为 N 的从 s 至 t 的最大流。

为了叙述方便起见，我们引进记号 (V_1,V_2) 和 $f(V_1,V_2)$。设有向图 $G=\langle V,E,\Psi\rangle$，$V_1\subseteq V$ 且 $V_2\subseteq V$. 令 $(V_1,V_2)=\{e\in E \mid$ 有 $v_1\in V_1$ 及 $v_2\in V_2$ 使 $\Psi(e)=\langle v_1,v_2\rangle\}$. 设 $\boldsymbol{R}_0$ 是全体非负实数的集合且 $f:E\to \boldsymbol{R}_0$，令

$$f(V_1,V_2)=\begin{cases}0, & \text{若}(V_1,V_2)=\varnothing;\\ \sum\limits_{e\in(V_1,V_2)} f(e), & \text{若}(V_1,V_2)\neq\varnothing.\end{cases}$$

为了解决寻找最大流的问题，我们引进最小割的概念。

定义 7.9.5 设网络 $N=\langle V,E,\Psi,C\rangle$. 若 $V_1\subset V$，$s\in V_1$ 且 $t\in \sim V_1$（以 V 为全集），则称 $(V_1,\sim V_1)$ 为 N 的分离 s 与 t 的割，$C(V_1,\sim V_1)$ 为 $(V_1,\sim V_1)$ 的容量。在 N 的分离 s 与 t 的所有割中，容量最小者称为 N 的分离 s 与 t 的最小割。

定理 7.9.1 设网络 $N=\langle V,E,\Psi,C\rangle$，$f$ 是 N 的从 s 至 t 的流且其值为 w. 若 $(V_1,\sim V_1)$ 是 N 的分离 s 与 t 的割，则 $w\leqslant C(V_1,\sim V_1)$.

证明 由流的定义可知 $f(V_1,V)-f(V,V_1)=w$. 因为 $f(V_1,V)=f(V_1,V_1)+f(V_1,\sim V_1)$，$f(V,V_1)=f(V_1,V_1)+f(\sim V_1,V_1)$，所以 $f(V_1,\sim V_1)-f(\sim V_1,V_1)=w$. 显然 $f(\sim V_1,V_1)\geqslant 0$，因此 $w\leqslant f(V_1,\sim V_1)\leqslant C(V_1,\sim V_1)$.

定理 7.9.2 网络 $N=\langle V,E,\Psi,C\rangle$ 的从 s 至 t 的最大流 f_m 的值 w 等于 N 的分离 s 与 t 的最小割容量。

证明 根据定理 7.9.1，我们只要证明 w 等于 N 的某个分离 s 与 t 的割的容量就够了。下面我们就来定义这样的割。归纳定义 V_1 如下：

i) $s\in V_1$；

ii) 若 $v\in V_1$，$v'\in V$，并存在 $e\in E$ 使 $\Psi(e)=\langle v,v'\rangle$ 且 $f_m(e)<C(e)$，则 $v'\in V_1$；

iii) 若 $v\in V_1$，$v'\in V$，并存在 $e\in E$ 使 $\Psi(e)=\langle v',v\rangle$ 且 $f_m(e)>0$，则 $v'\in V_1$.

现在证明 $(V_1,\sim V_1)$ 是分离 s 与 t 的割。显然 $s\in V_1$. 若 $t\in V_1$，则存在从 s 至 t 的基本半路径 $v_0e_1v_1\cdots v_{k-1}e_kv_k$（其中 $v_0=s$，$v_k=t$）对一切满足 $1\leqslant i\leqslant k$ 的 i，若 e_i 是正向边则 $f_m(e_i)<C(e_i)$；若 e_i 是反向边，则 $f_m(e_i)>0$. 令 E_1 是所有正向边的集合，E_2 是所有反向

边的集合，

$$\delta=\begin{cases}\min\limits_{e\in E_1}\{C(e)-f_m(e)\}, & 若\ E_2=\varnothing;\\ \min\limits_{e\in E_2}\{f_m(e)\}, & 若\ E_1=\varnothing;\\ \min(\min\limits_{e\in E_1}\{C(e)-f_m(e)\},\min\limits_{e\in E_2}\{f_m(e)\}), & 否则;\end{cases}$$

显然 $\delta>0$. 若 $f:E\to \boldsymbol{R}_0$ 定义为

$$f(e)=\begin{cases}f_m(e)+\delta, & e\in E_1;\\ f_m(e)-\delta, & e\in E_2;\\ f_m(e), & e\in E-(E_1\cup E_2),\end{cases}$$

则 f 是 N 的从 s 至 t 的流且其值为 $w+\delta>w$，这与 f_m 是 N 的从 s 至 t 的最大流矛盾。因此，$t\notin V_1$，即 $(V_1,\sim V_1)$ 是分离 s 与 t 的割。

由 V_1 的定义可知，对任意 $e\in(V_1,\sim V_1)$ 皆有 $f_m(e)=C(e)$，对任意 $e\in(\sim V_1,V_1)$ 皆有 $f_m(e)=0$. 因此 $w=f_m(V_1,\sim V_1)-f_m(\sim V_1,V_1)=C(V_1,\sim V_1)$.

在定理 7.9.2 的证明中，采用的是构造性的证明方法。因此，这种证明方法实际上就提供了一种寻找最大流的实用方法，它是通过逐步增大流的方法，由给定流寻求最大流的。为了叙述方便，我们引入可增广路的概念：若 P 是网络 N 中从 s 至 t 的半路径，其正向边均是非饱和的，反向边的流量都大于 0，则称 P 为关于给定流 f 的可增广路。

求网络 $N=\langle G,C\rangle$ 关于初始流 f 的最大流之具体做法如下：

i) 取 $f_0=f$(若初始流 f 没给出，则取 f_0 为零流)。

ii) 对当前流 $f_i(i\geqslant 0)$，若存在关于 f_i 的可增广路，则任取其中之一，用 E_1、E_2 分别表示它的正向边集合和反向边集合。再令调整量 δ 为：

$$\delta=\begin{cases}\min\limits_{e\in E_1}\{c(e)-f_i(e)\}, & 若\ E_2=\varnothing;\\ \min\limits_{e\in E_2}\{f_i(e)\}, & 若\ E_1=\varnothing;\\ \min\{\min\limits_{e\in E_1}\{c(e)-f_i(e)\},\min\limits_{e\in E_2}\{f_i(e)\}\}, & 否则。\end{cases}$$

iii) 把当前流 f_i 扩充为 f_{i+1}：

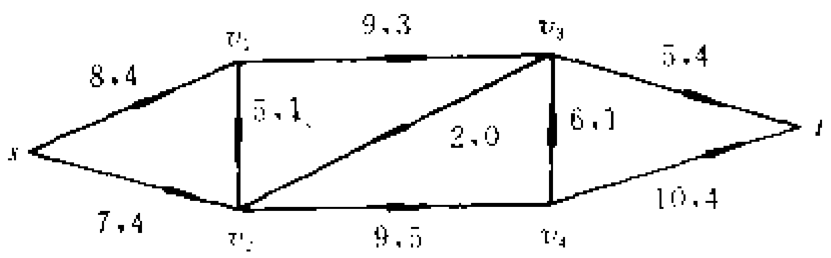
$$f_{i+1}(e)=\begin{cases}f_i(e)+\delta, & 若\ e\in E_1;\\ f_i(e)-\delta, & 若\ e\in E_1;\\ f_i(e), & 若\ e\in E\ 且\ e\notin E_1\cup E_2。\end{cases}$$

iv) 把 f_{i+1} 做为当前流，再重复 ii) 和 iii) 的做法。

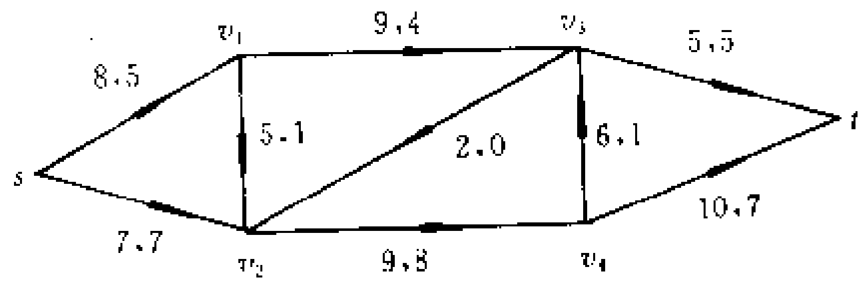
v) 若不存在关于 f_i 的可增广路，则 f_i 即为所求。

例 2 求出图 7.9.2 中从 s 至 t 的最大流和最小割。

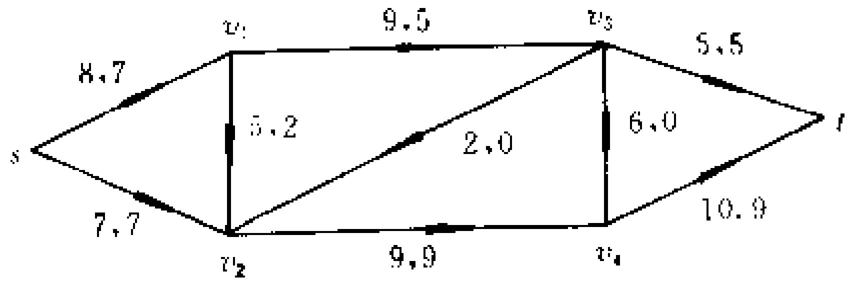
解 i) 初始流为：



ii) 对可增广路：$s\to v_2\to v_4\to t$（其调整量 $\delta=\min\{7-4,9-5,10-4\}=3$）及 $s\to v_1\to v_3\to t$（其调整量 $\delta=\min\{8-4,9-3,5-4\}=1$）。调整流量得到下图：



iii) 对可增广路：$s\to v_1\to v_2\to v_4\to t$（其调整量 $\delta=\min\{8-5,1,9-8,10-7\}=1$）及 $s\to v_1\to v_3\to v_4\to t$（其调整量 $\delta=\min\{8-5,9-4,1,10-7\}=1$）。调整流量得到下图：



因为已不再有可增广路，故所得之为最大流，其值为 14，最小割为：$(\{s,v_1,v_2,v_3\},\{v_4,t\})$.

在日常生活中，我们会遇到许多诸如计算运输网络的最大运输量，电流网络的最大电流以及信息网络所传输的最大信息量等等问题，其实质都是求网络的最大流。此处就不再一一举例。

上面我们讨论了有一个源和一个汇的流。有多个源和汇的流，可以化为有一个源和一个汇的流处理。设有多个源 $s_1,s_2,\cdots,s_m$ 和多个汇 $t_1,t_2,\cdots,t_n$，且假设发和收同一种物资。取两个新的结点 s 和 t 作为新的源和汇，用 m 条从 s 出发的有向边连接 $s_1,s_2,\cdots,s_m$，用 n 条以 t 为终点的有向边连接 $t_1,t_2,\cdots,t_n$，并规定这些边的容量为 ∞. 得到从 s 至 t 的最大流后，令通过 s_i 的物资由 s_i 发送，通过 t_i 的物资均由 t_i 接收。

习　题　7.9

1. 求图 7.9.3 所示图络的分离 s 与 t 的最小割。
2. 求图 7.9.4 两个网络的从 s 至 t 的最大流。

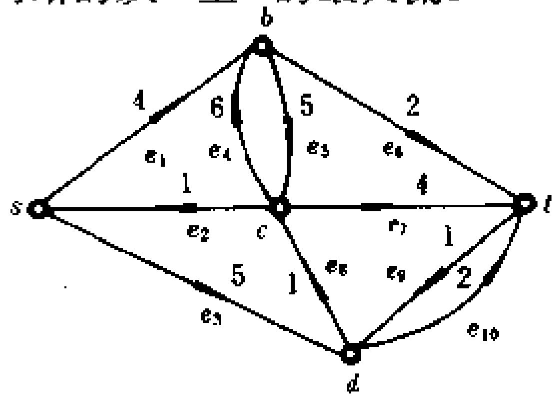
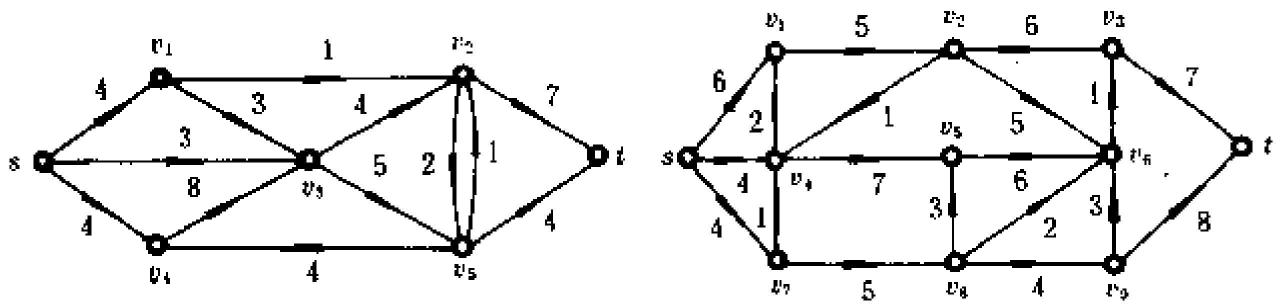


图 7.9.3



s
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
t
4
1
3
4
7
3
8
5
2
1
4
4
4
s
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
v_7
v_8
v_9
t
5
6
6
2
1
1
7
5
4
7
6
4
1
3
2
3
8
5
4

图 7.9.4

参 考 书 目

[1] Stanat D F, Mcallister D F. Discrete Mathematics in Computer Sciences, Prentice-Hall, 1977

[2] Liu C L. Elements of Discrete Mathematics. McGraw-Hill, 1977

[3] Tremblay J P. Manohar R. Discrete Mathematical Structures with Applications to Computer Science. McGraw-Hill, 1975

[4] 王遇科. 离散数学结构导论. 北京:国防工业出版社, 1979

[5] Enderton H B. Elements of Set Theory. Academic Press, 1977

[6] 陆钟万. 数理逻辑与机器证明. 北京:科学出版社, 1983

[7] Deo Narsingh. Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science. Prentice-Hall, 1974

[8] 王朝瑞. 图论. 北京:人民教育出版社, 1981

[9] Manna Z. Mathematical Theory of Computation. McGraw-Hill, 1974

[10] Stone H S. Discrete Mathematical Structures and Their Applications. Science Research Associates, 1973

[11] Finkveiner D T, Lindstorm W D. A Primer of Discrete Mathenatics. W. H. Freeman, 1987

[12] Sahni S. Concepts in Discrete Mathematics. Camlot Pub., 1981

[13] Lipschutz S. 2000 Solved Problems in Discrete Mathematics. Mc Graw-Hill, 1992

[14] [美]Harary F. 图论. 上海:上海科学技术出版社, 1980

[15] 张克民等. 图论及其应用习题解答. 北京:清华大学出版社, 1988

[16] 莫绍揆等. 数理逻辑. 北京:高等教育出版社, 1984

符 号 表

Q	有理数的集合
N	自然数的集合
I	整数的集合
R	实数的集合
C	复数的集合
E_v	偶自然数的集合
O_d	奇自然数的集合
N_m	小于 m 的自然数的集合
I_+	正整数的集合
Σ	字母表
ε	空字
Σ^*	Σ 上的字的集合
Σ^+	Σ 上的非空字的集合
$\mathscr{P}(A)$	A 的幂集
$A \cup B$	A 与 B 的并
$A \cap B$	A 与 B 的交
$A - B$	A 与 B 的差
$A \oplus B$	A 与 B 的对称差
$\sim A$	A 的补集
$\bigcup \mathscr{B}$	$\mathscr{B}$ 的广义并
$\bigcap \mathscr{B}$	$\mathscr{B}$ 的广义交
$a \mid b$	a 整除 b
$a \nmid b$	a 不能整除 b
$a \equiv_m b$	a 和 b 关于 m 同余
χ_A	A 的特征函数
$A \sim B$	A 和 B 对等
$\#(A)$	A 的基数
$\aleph_0$	自然数集合 N 的基数
$\aleph$	集合 $\mathscr{P}(N)$ 的基数
$\boldsymbol{T}$	表示真命题的命题常量
$\boldsymbol{F}$	表示假命题的命题常量
$\neg$	逻辑联结词“否定”
$\wedge$	逻辑联结词“合取”
$\vee$	逻辑联结词“折取”
$\rightarrow$	逻辑联结词“如果 …，则 …”
$\rightleftharpoons$	逻辑联结词“当且仅当”
atf	原子
wff	合式公式
$A \Longleftrightarrow B$	A 等价于 B

I_-	负整数的集合
R_+	正实数的集合
R_-	负实数的集合
$a \in A$	a 是 A 的元素
$a \notin A$	a 不是 A 的元素
$n(A)$	A 中元素的数目
$\varnothing$	空集
$A \subseteq B$	A 是 B 的子集
$A \subset B$	A 是 B 的真子集
R^+	$R^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$
R^*	$R^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} R^i$
$[x]_R$	x 关于 R 的等价类
A/R	A 关于 R 的商集
H_R	R 的哈斯图
$\sup S$	S 的上确界
$\inf S$	S 的下确界
$f: X \to Y$	f 是从 X 到 Y 的函数
$f[A]$	A 在 f 下的像
$f^{-1}[B]$	B 在 f 下的原像
$f\upharpoonright_A$	f 在 A 上的限制
B^A	从 A 到 B 的函数的集合
$g \circ f$	f 与 g 的合成函数
f^{-1}	f 的逆函数
$\langle x_1, x_2, \cdots, x_n \rangle$	分量为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 n 元序偶
A^+	A 的后继
$\bigtimes_{i=1}^{n} A_i$ 或 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$	$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的笛卡儿乘积
$\mathrm{dom} R$	R 的定义域
$\mathrm{ran} R$	R 的值域
xRy	x 和 y 有关系 R
XRy	x 和 y 无关系 R
$R\mid_S$	R 在 S 上的压缩
G_R	R 的关系图
M_R	R 的关系矩阵
$\sim R$	R 的补关系
R^{-1}	R 的逆关系
M_R^T	M_R 的转置

$A \Longrightarrow B$	A 蕴含 B	$R_1 \cdot R_2$	R_1 和 R_2 的合成关系
$\forall$	全称量词	I_A	A 上的恒等关系
$\exists$	存在量词	$r(R)$	R 的自反闭包
$d_G(v)$	图 G 的结点 v 的度	$s(R)$	R 的对称闭包
$d_G^+(v)$	有向图 G 的结点 v 的出度	$t(R)$	R 的传递闭包
$d_G^-(v)$	有向图 G 的点 v 的入度	$G[V']$	由 V' 导出的 G 的子图
$G-V'$	从图 G 中去掉 V' 中的结点所成之子图	$G-E'$	从图 G 中去掉 E' 中的边所成之子图
$R(v)$	从 v 可达的结点集合	$d(v_1,v_2)$	从 v_1 到 v_2 的距离
$X(G)$	图 G 的邻接矩阵	$A(G)$	图 G 的关联矩阵
$A \vdash\dashv B$	$A \vdash B$ 且 $B \vdash A$	$A_1,A_2,\cdots,A_n \vdash A$	$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 可形式地推演出 A
(a,b)	a 和 b 的最大公因数	$[a,b]$	a 和 b 的最小公倍数

索　引

一　画

二　画

三　画

四　画

五　画

六　画

七　画

八 画

九 画

十 画

十一画

十二画

十三画

十四画

十五画