2.3 次序关系

重点:

- 偏序关系
  - ✓ 满足自反性、反对称性、传递性
- 哈斯图
  - ✓ 偏序关系的图表示
- 偏序集合中的特殊元素
  - ✓ 极大（小）元、最大（小）元、上界、下界、最小上界、最大下界

定义（偏序关系）集合 A上的关系 R 称为 A上的偏序关系（或半序关系），当且仅当 R是自反的、反对称的和传递的。

例：整数集合N上的小于等于关系 ≤ 是N上的偏 序关系

- 用“≤”表示任意偏序关系，并用<A , ≤ >表示偏序结构
- 如果 x , y∈A 且x ≤ y，则称“ x 小于或等于y ”或“ x 在 y 之前 ”
- 对于偏序集合<A, ≤ >， x , y ∈A，如果有x ≤ y 或者 y ≤ x，称 A的元素 x 和 y 是可比的

例：以下哪些是偏序结构

(1) $< \mathbf{N} , \leq >$

(2) $< \mathbf{N} , \geq >$

(3) $< \mathbf{P(A)} , \subseteq >$

(4) $< \mathbf{I}_+ , | >$

定义6.10（全序关系） 设$<A, \leq>$是一个偏序结构，如果对于任意 $x, y \in A$，或者 $x \leq y$，或者 $y \leq x$，即 x与y可比，则称$\leq$为A上的全序或 线序，并称$<A, \leq>$为全序结构 或 链。 即

$$(\forall x)(\forall y)(x \in A \land y \in A \rightarrow x \leq y \lor y \leq x)$$

例：$<N, \leq>$，$<N, \geq>$，$<P(A), \subseteq>$，$<I_+, |>$ 是偏序结构

- $<N, \leq>$, $<N, \geq>$是全序结构，即它们中的任意元素 x 和 y 都是可比的
- $<P(A), \subseteq>$, $<I_+, |>$ 不是全序结构

定义6.11（严格偏序关系，又称 拟序关系）R是集合A上的 严格偏序关系当且仅当 R是反自反的和传递的。

用 “$<$” 表示 严格偏序关系，并称 “ x 小于 y ”，

称$<A, <>$为严格偏序（拟序）结构。

例: $<N, <>$, $<N, >>$, $<P(A), \subset>$ 都是 严格偏序结构。

定理：若 R 是 A上严格偏序关系，则 R 是 反对称的。

证明：假设 R不是反对称的，则存在 x , y∈A 且 x≠y，使得 $<x, y> \in R$ 且 $<y, x> \in R$。

因为R是传递的，所以 $<x, x> \in R$， 这与 R反自反矛盾。

偏序关系与严格偏序关系的区别：

- 偏序：自反的、反对称的和传递的
- 严格偏序：反自反、反对称的和传递的

偏序关系与严格偏序关系的关系：

定理：设R 是集合A上的二元关系。

(1) 若R是A上的严格偏序关系，则 $r(R)=R\cup I_A$ 是A上的偏序；

(2) 若R是A上的偏 序，则 $R-I_A$ 是A上的严格偏序。

符号表示：

- 用"≤"表示偏序
- 用"<"表示严格偏序

"≤"与"<"不再表示通常数的大小次序关系

既是偏序又是严格偏序的关系：空集上的空关系

例. 设R是集合A上的二元关系。证明:

(1) 若R是A上的偏序当且仅当 $R\cap R^{-1}=I_A$ 且 $R=R^*$;

(2) 若R是A上的严格偏序当且仅当 $R\cap R^{-1}=\varnothing$ 且 $R=R^+$;

其中 $R^*=\bigcup_{n=0}^{\infty} R^n$, $R^+=\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。

解: (1) R是A上的偏序当且仅当R是自反的，反对称的和传递的。

由于 R是自反的当且仅当 $I_A \subseteq R \cap R^{-1}$,

R是反对称的当且仅当 $R\cap R^{-1} \subseteq I_A$,

R是传递的当且仅当 $R=t(R)=R^+$。

因此，R是A上的偏序当且仅当 $R\cap R^{-1}=I_A$ 且 $R=R^+\cup I_A=R^*$ 。

例. 设R是集合A上的二元关系。证明：

(1) 若R是A上的偏序当且仅当 $R \cap R^{-1} = I_A$ 且 $R = R^*$；

(2) 若R是A上的严格偏序当且仅当 $R \cap R^{-1} = \varnothing$ 且 $R = R^+$；

其中 $R^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} R^n$, $R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。

解: (2) R是A上的严格偏序当且仅当R是反自反的，反对称的和传递的。

R是反自反的 当且仅当 $I_A \cap R = \varnothing$ 且 $I_A \cap R^{-1} = \varnothing$ 。

R是反对称 当且仅当 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$。

R是传递的当且仅当 $R = t(R) = R^+$

因此，R是严格偏序当且仅当 $R \cap R^{-1} \subseteq R \cap R^{-1} \cap I_A = \varnothing$，

即 $R \cap R^{-1} = \varnothing$，且 $R = R^+$。

定义: (覆盖) 在偏序结构$<A, \le>$中，对于任意两个元素 $x, y \in A$，如果 $x < y$ 且不存在任何其它元素 $z \in A$，使得 $x < z$ 和 $z < y$，则称 y 为 x关于 $\le$ 的覆盖（或遮盖），简称为 y 为 x的覆盖。即

y是x的覆盖 $\Leftrightarrow$ $x < y \wedge \neg \exists z (z \in A \wedge x < z \wedge z < y)$

例: $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $\le$是 A上的小于或等于关系，

则 4 是 3的覆盖，3是 2的覆盖，2 是 1的覆盖。

若 $\le$ 是A上的大于或等于关系，则上述覆盖关系恰好相反

例: 对偏序结构<**R**, $\leq$ >, 其中 $\leq$ 是实数域 **R**上的小于或等于关系。

任何实数都没有覆盖。

(因为在任意两个不同的实数之间，都存在有另外的实数，如平均值。)

例: 对偏序结构<**N**, $\leq$ >, 其中 $\leq$ 是自然数域**N**上的小于或等于关系。

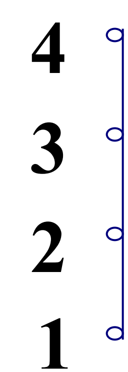
任何自然数都有唯一的覆盖。

- 偏序关系的简化的关系图——偏序结构图 或 哈斯图
- 设R为非空有限集A上的偏序，R的哈斯图是一个无向图H_R:
  - 集合A的每一个元素为H_R中一个点，
  - 对于 $x, y \in A$，
    - ✓ 如果 $x < y$，则点 x 画在点 y 之下，
    - ✓ 如果 y 覆盖 x，则 x 和 y 之间存在一条无向边。

例：画出满足下列条件的哈斯图．

(1) $<A, \leq>$: A＝｛1，2，3，4｝，并设≤是A上的小于或等于关系 。

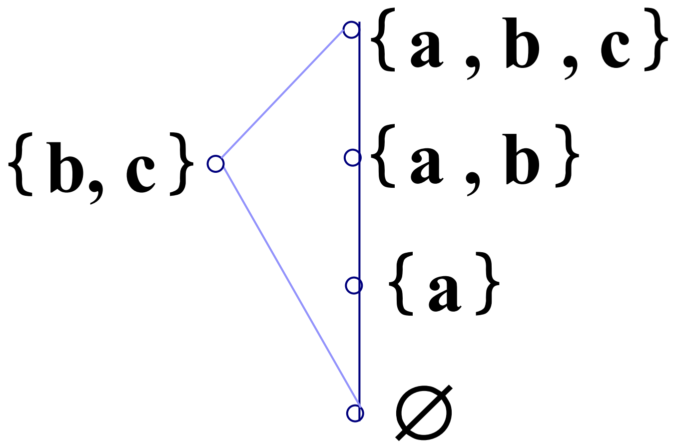
(2) $<A, \leq>$: $A = \{ \varnothing, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\} \}$，且≤是A上的包含关系。



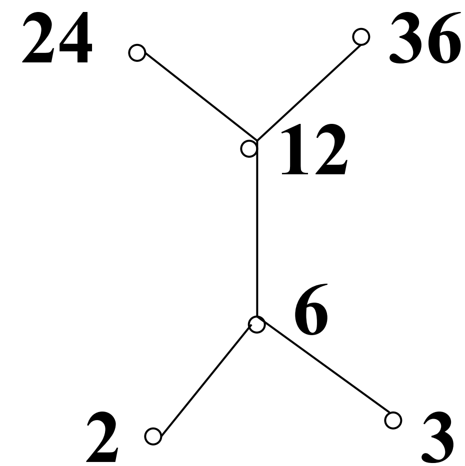
例：画出满足下列条件的哈斯图．

$<A, \leq>$：$A=\{\varnothing, \{a\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$，

且 $\leq$ 是A上的包含关系。



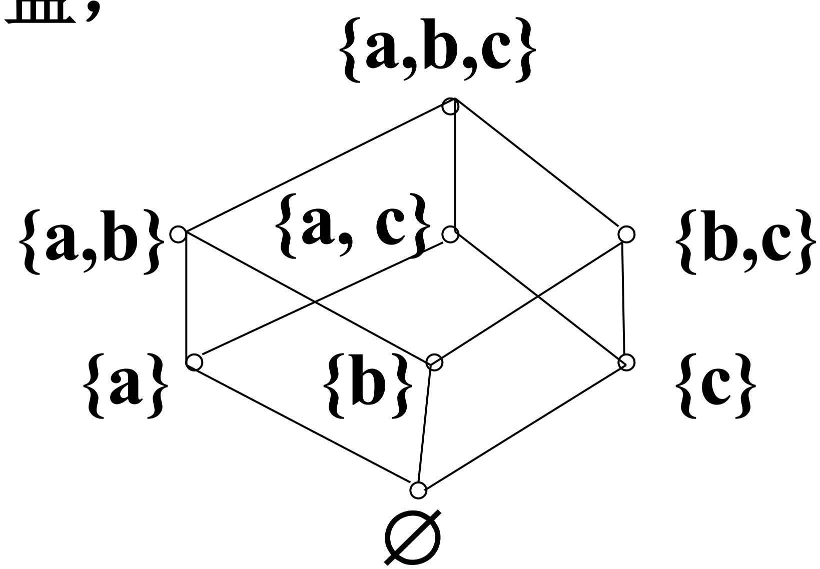
例：设 X = {2，3，6，12，24，36 }，≤为整除关系，如果 x 整除 y，便有 x ≤ y。画出<X ,≤ >的哈斯图 。



分析：

24与36是12的覆盖，12是6的覆盖，6是2和3的覆盖。

例 设 A = {a, b, c} , ≤ 是幂集 P(A) 上的包含关系， 画出 < P(A) , ≤ >的 哈斯图



偏序结构中的特殊元素：

定义　设$<A, \leq>$是偏序结构，并且$S \subseteq A$，$S \neq \phi$, 则

(1) b 是 S 的最大元 $\Leftrightarrow b \in S \wedge \forall x\,(x \in S \rightarrow x \leq b)$

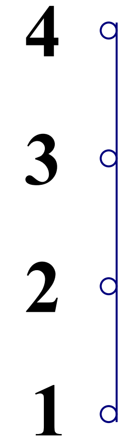
(2) b 是 S 的最小元 $\Leftrightarrow b \in S \wedge \forall x\,(x \in S \rightarrow b \leq x)$

(3) b 是 S 的极大元 $\Leftrightarrow b \in S \wedge \forall x\,(x \in S \wedge b \leq x \rightarrow x = b)$

(4) b 是 S 的极小元 $\Leftrightarrow b \in S \wedge \forall x\,(x \in S \wedge x \leq b \rightarrow x = b)$

- S的最大元、最小元 若存在，则唯一；
- S的极大元、极小元若存在，不一定唯一；
- 若 S是有穷集，则S的极大元、极小元必存在，但 S 的最大元、最小元不一定存在 。

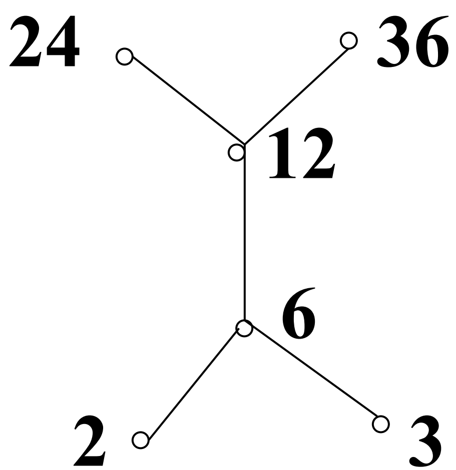
例. (1) (A, ≤): A＝{1，2，3，4}，并设≤是A上的小于或等于关系。



A上的极大元：4; 极小元： 1

A上的最大元：4; 最小元： 1

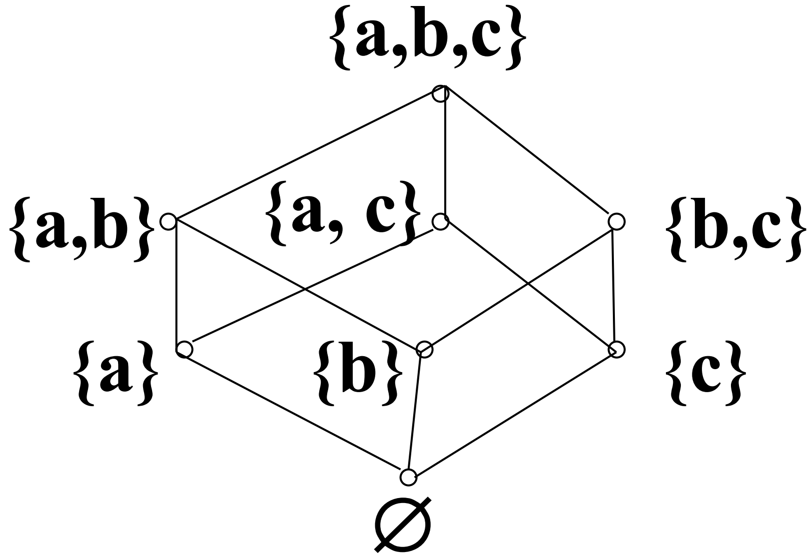
例: (A, ≤): A = {2, 3, 6, 12, 24, 36 }, ≤为整除关系，如果 x 整除 y，便有 x ≤ y .



A上的极大元：24, 36; 极小元： 2, 3

A 无最大元，也无最小元

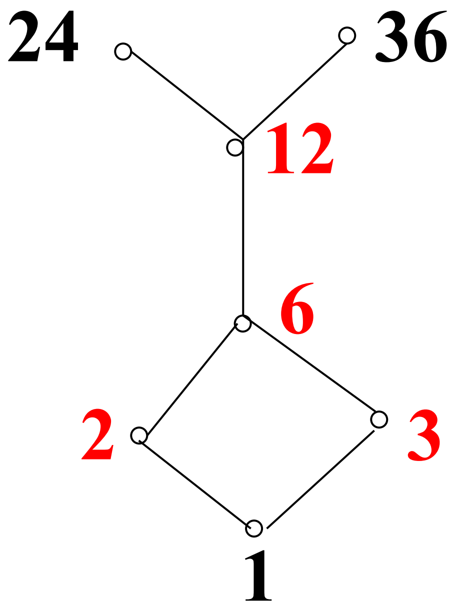
例. $<P(A), \leq>$： $A = \{a, b, c\}$，$\leq$ 是幂集 $P(A)$ 上的包含关系。



A上的极大元： $\{a,b,c\}$； 极小元： $\varnothing$

A上的最大元： $\{a,b,c\}$； 最小元： $\varnothing$

例: $(A, \leq)$: $A = \{1, 2, 3, 6, 12, 24, 36\}$，$\leq$ 为整除关系，如果 x 整除 y，便有 $x \leq y$.



设 S={2, 3, 6, 12}

定义6.13 设$<A, \leq>$是偏序结构，并且$S \subseteq A$，$S \neq \phi$, 则

(1) b 是 S 的**上界** $\Leftrightarrow$ $b \in A \wedge \forall x (x \in S \rightarrow x \leq b)$

(2) b 是 S 的**下界** $\Leftrightarrow$ $b \in A \wedge \forall x (x \in S \rightarrow b \leq x)$

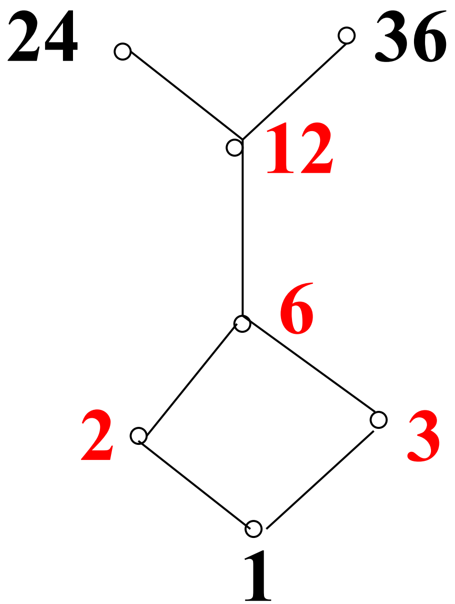
(3) b 是 S 的**最小上界(上确界)** $\Leftrightarrow$ b是S的上界, 且对S的任意上界 x， 都有 $b \leq x$ 。

(4) b 是 S 的**最大下界(下确界)** $\Leftrightarrow$ b是S的下界, 且对S的任意下界 x,都有 $x \leq b$ 。

- S的上界和下界可能不唯一；
- S的最小上界和最大下界若存在，则唯一。

例: (A, ≤): A = {1,2, 3, 6, 12, 24, 36}，≤ 为整除关系，如果 x 整除 y， 便有 x ≤ y .

设 S={2, 3, 6, 12}



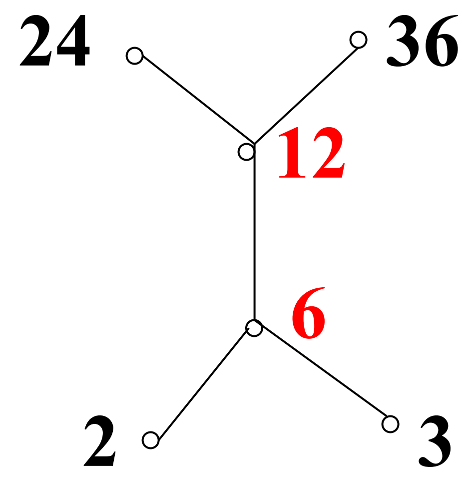
S的极大元：12,　　极小元：2,3

最大元： 12　　最小元：无

上界： 12, 24, 36　　下界： 1

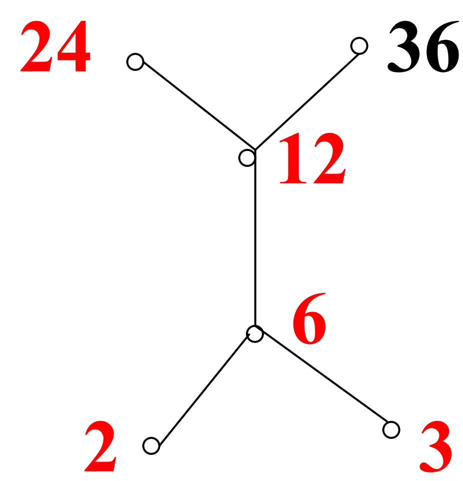
最小上界：12　　最大下界：1

例: (A, ≤): A = {2, 3, 6, 12, 24, 36 }, ≤为整除关系，如果 x 整除 y，便有 x ≤ y。令S={6，12}, 求S的极大元、极小元、最大元、最小元、上界、下界、最小上界、最大下界。



解：S的极大元是 12；极小元是6;
S的最大元是12；最小元是6
S的上界有12, 24, 36;下界有2, 3, 6;
S的最小上界是12；最大下界是 6

S={2, 3, 6, 12, 24} ???



解：S的极大元是 24；极小元是2, 3;
S的最大元是24；无最小元
S的上界和最小上界是24，无下界。

例：若 $S=\{x|\ x\in R$ 且 $1< x< 2\}$， $\le$ 是R上的小于或等于关系，给出S的极大元、极小元、最大元、最小元、最小上界、最大下界 。

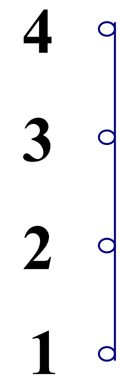
解：S无极大元、极小元、最大元、最小元

S的最小上界为2，最大下界为1

定义（良序结构）：设有偏序结构$<A, \leq>$，如果 A 的每一个非空子集都有一个最小元，则称$\leq$为良序关系，$<A, \leq>$为良序结构。

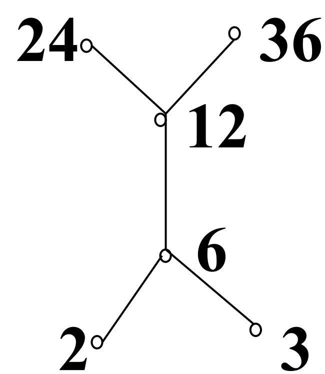
- 良序关系一定是全序关系。（？？？）

例：$<A, \leq>$: A＝｛1，2，3，4｝，并设$\leq$是 A 上的小于或等于关系。



$<A, \leq>$是良序。

例: $<A, \leq>$: $A = \{2, 3, 6, 12, 24, 36\}$，$\leq$为整除关系，如果 x 整除 y，便有$x \leq y$.



$<A, \leq>$不是良序。

定理： $<N, \leq>$ 是良序结构

证明：任取N的非空子集A，证明A一定有最小元。

任取$m \in A$, 构造$S=\{ i \mid i \in A$且$i \leq m\}$，则有$S \subseteq N$, 且$m \in S$.

可证，若S有最小元a，则a必为A的最小元（请补充）。

因此只需证S有最小元。

下面对|S| 进行数学归纳：

当|S|=1时，S={m}，此时m为S的最小元；

假设 对任意的$k \in I_+$, 结论成立， 即|S|=k时如上构造的S有最小元；

当|S|=k+1时，任取$b \in S$, 有S-{b}只有k个元素，因此由归纳假设S-{b}必有最小元，设为c, 则b与c中的最小值 必为S的最小元。即结论对k+1时成立。

因此$<N, \leq>$ 是良序结构 。

例：判断 $<\mathbf{I}, \leq>$ 、$<\mathbf{Q}_+, \leq>$、$<\mathbf{R}_+, \leq>$ 是否为良序结构。

解：(1) $<\mathbf{I}, \leq>$ 不是良序结构：**I** 无最小元

(2) $<\mathbf{Q}_+, \leq>$ 不是良序结构： $\mathbf{Q}_+$ 无最小元

(3) $<\mathbf{R}_+, \leq>$ 不是良序结构： $\mathbf{R}_+$无最小元

定理 若 $\leq$ 为集合A上的偏序关系，则 $\leq$ 为A上良序关系的充分必要条件为

(1) $\leq$ 为A上的全序关系；

(2) A 的每个非空子集都有极小元。

证: (必要性) 设 $\leq$ 为A上良序关系，则对任意的x, y ∈A, {x, y}有极小元。

若极小元为x, 则有x $\leq$y; 若极小元为y, 则y $\leq$x，所以 $\leq$ 为A上的全序关系。

因为 $\leq$ 为A上良序关系，因此A的每个非空子集都有最小元，即有极小元。

定理 若 $\leq$ 为集合A上的偏序关系，则 $\leq$ 为A上良序关系的充分必要条件为

(1) $\leq$ 为A上的全序关系；

(2) A 的每个非空子集都有极小元。

证: (充分性) 设S为A的任意非空子集，且a 为S的极小元。下面证明a为S的最小元。

对任意的x ∈S, 且x≠a, 由于≤ 为A上的全序关系，所以有 a ≤x 或x ≤a。

当x ≤a 时，因为a为 极小元，则有x=a，因此必有a ≤x。

从而a为S的最小元。

因此， ≤ 为A上良序关系。

定理 设<A, < >为全序结构，则<A, < >是良序结构的充分必要条件是: 不存在 A 中元素的无穷序列

$$a_0, a_1, a_2, \ldots,$$

使得对每个 $i \in N$，皆有 $a_{i+1} < a_i$。即不存在 A 中元素的无穷递降序列。

例：$<N, \leq>$是良序结构，但$<I, \leq>$不是良序结构。

证：(必要性) 反证法。

假设存在 A 中元素的无穷递降序列$a_0, a_1, a_2, \ldots$，令S为包含该无穷序列的所有元素的集合，则S为A的非空子集。

显然S无最小元，与A是良序矛盾。

定理 设$<A, <>$为全序结构，则$<A, <>$是良序结构的**充分必要条件**是: 不存在 A 中元素的无穷序列

$$a_0, a_1, a_2, \ldots,$$

使得对每个 $i \in N$，皆有 $a_{i+1} < a_i$。即**不存在 A 中元素的无穷递降序列。**

证：(充分性) 假设$<A, <>$不是良序结构，则存在一个非空子集S无最小元。

任取$a_0 \in S$, 因为a_0不是S的最小元，且$<$为A上的全序关系，因此**必存在$a_1 \in S$, 使得$a_1 < a_0$**。

同理，对任意的$n \in N$，如果有$a_0, a_1, \ldots, a_n \in S$, 满足$a_n < a_{n-1} < \ldots < a_1 < a_0$, 因为$a_n$不是最小元且$<$是全序关系，因此**必存在$a_{n+1} \in S$, 使得$a_{n+1} < a_n$**。

由归纳法可得存在一个无穷递降序列$a_0, a_1, a_2, \ldots$。

例. 设R为集合A上的二元关系且$S \subseteq A$. 证明或用反例推翻下述断言：R是A上的偏序（严格偏序、全序、良序），则$R|_S$是S上的偏序（严格偏序、全序、良序），其中 $R|_S=\{<x, y> \in R \mid x, y \in S\}$。

解: (1) 设R是A上的偏序，则R是自反的、反对称的、传递的。下面证明$R|_S$也是自反、反对称和传递的。

自反性：对任意$x \in S$, 因为R是自反的, 因此 $<x, x> \in R$,得 $<x, x> \in R|_S$。因此$R|_S$是自反的。

反对称性：对任意$<x, y>, <y, x> \in R|_S$, 有$<x, y>, <y, x> \in R$. 由R是反对称的，得$x=y$，因此$R|_S$也是反对称的。

传递性：对任意$<x, y>, <y, z> \in R|_S$, 有$<x, y>, <y, z> \in R$。因为R是传递的，因此$<x, z> \in R$。由$x, z \in S$, 得 $<x, z> \in R|_S$，得$R|_S$是传递的。

故$R|_S$是偏序。

例. 设R为集合A上的二元关系且$S \subseteq A$. 证明或用反例推翻下述断言：R是A上的偏序（严格偏序、全序、良序），则$R|_S$是S上的偏序（严格偏序、全序、良序），其中 $R|_S=\{<x, y> \in R \mid x, y \in S\}$。

解: (2) 设R是A上的严格偏序，则R是反自反的、反对称的、传递的。

由(1) 知$R|_S$也是反对称和传递的。

下面证明$R|_S$是反自反的。

反证法：若存在$x \in S$且$<x, x> \in R|_S$, 则$<x, x> \in R$, 与R为反自反关系矛盾。

因此$<x, x> \notin R|_S$，得$R|_S$是反自反的。

因此$R|_S$是严格偏 序。

例. 证明：

(1) 偏序关系的逆关系仍然是偏序关系；

(2) 全序关系的逆关系仍然是全序关系；

(3) 良序关系的逆关系 未必是良序关系。

证: (1) 设R是集合A上的偏序关系，则R是自反、反对称和传递的，得R^{-1}是自反、反对称和传递的。因此R^{-}仍是偏序关系。

(2)设R是集合A上的全序关系，由(1) 知R是偏序关系。对任意的$x, y \in A$, 因为R是A上的全序，则有 $\langle x, y\rangle \in R$, 得$\langle y, x\rangle \in R^{-1}$。因此$R^{-1}$是全序。

(3) 反例：$\langle N, \leq \rangle$。