2.4 等价关系与划分

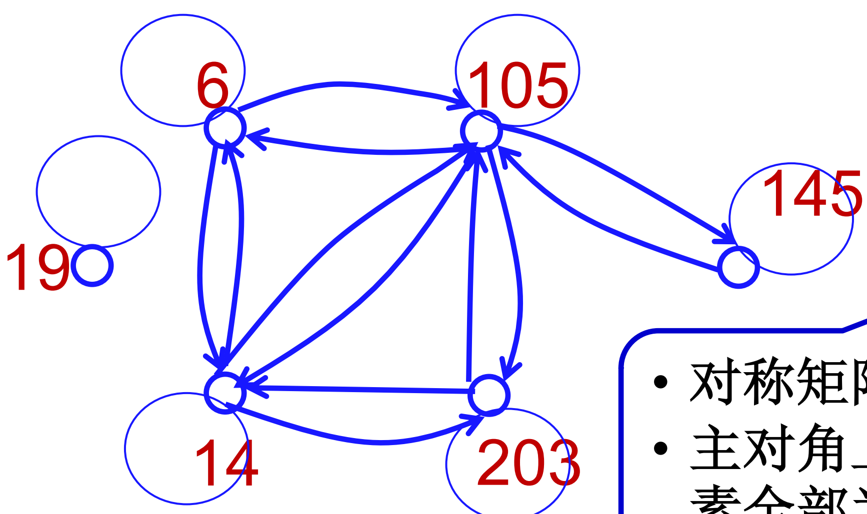
重点：

1. 等价关系、等价类
2. 等价关系与划分的关系

定义 (相容关系) 如果集合A上的关系R是自反和对称的，则称 R 为 A 上的相容关系。若xRy, 则称x和y相容；否则称x和y不相容。

例. 设A={6, 14, 19, 105, 145, 203}，并取 $R=\{ \langle x, y\rangle \mid x, y \in A$ 且 $(x, y)>1 \}$, 其中(x, y) 表示x和y最大公因子。

R是A上的相容关系。



- 对称矩阵
- 主对角上元素全部为1

$$
\begin{array}{c}
\begin{matrix} 6 & 14 & 19 & 105 & 145 & 203 \end{matrix} \\
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

定理. 设R为集合A上的二元关系，则R为A上的相容关系，当且仅当$r(R)=s(R)=R$.

证明：R为A上的相容关系 当且仅当 R是自反的，对称的 当且仅当 $r(R)=s(R)=R$。

相容关系的简化关系矩阵与简化关系图

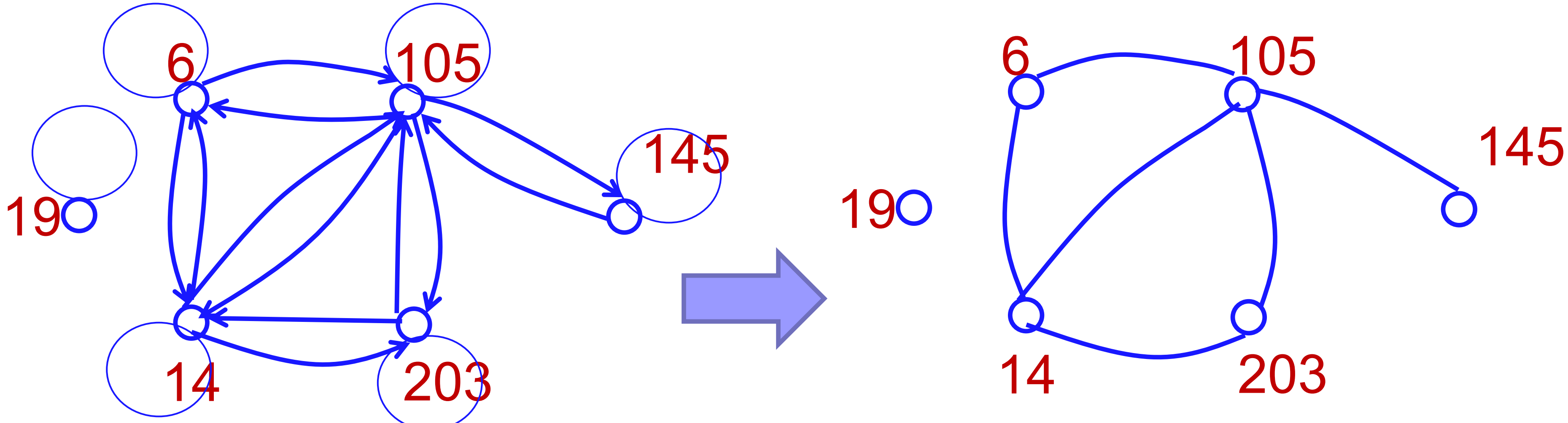
设R为非空有限集A={$x_1,x_2,\ldots,x_n$}上的相容关系。

- 关系矩阵M_R:
  - 主对角线上全为1
  - 对称矩阵
- 简化关系矩阵
  - 只需知道M_R对角线以下 的元素

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

相容关系的简化关系矩阵与简化关系图

- 关系图G_R：
  - 每个结点有自环
  - 任意两个不同结点间不会仅有单向边
- 简化关系图
  - 去掉自环，并把每对反向边改为一条无向边



定义(等价关系) 如果集合A上的关系R是自反、对称、传递的，则称 R 为 A 上的等价关系。

如果x, y ∈ A, 且xRy, 则称x与y等价，记为 $x \approx_R y$, 常简记为 $x \approx y$。

例. 下面列举的都是等价关系：

(1) 实数集R上的普通的相等关系；

(2) 集合A的幂集P(A) 上的集合相等关系；

(3) 平面上的直线的集合上的直线间的平行关系；

(4) 中国城市居民中，人们同住在一个城市内的关系。

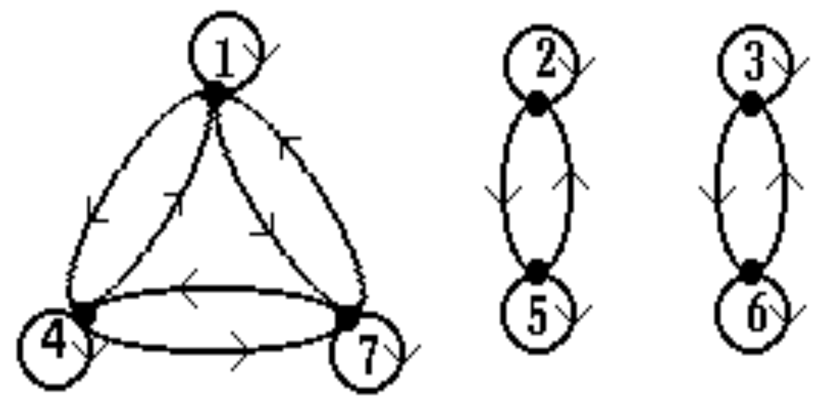
例. 设 R 是集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 上的关系，

$R = \{\langle x, y\rangle \mid x \in A \land y \in A \land 3 \mid (x-y)\}$ (模3同余关系)

证明 R是一个等价关系，并画出其关系图。

其关系图如右图所示：

可见 R的确是 A 上自反、对称、传递的关系，故 R 是 A 上的等价关系。



模3同余关系的关系图

例：设集合 X 是整数集合 I 的任意子集，证明：

X上的 模m 同余关系 是 等价关系。

证明. 自反性: 对于任意$x \in X$， 显然 $x \equiv x \pmod{m}$ 。

对称性: 对于任意 $x, y \in X$, 若 $x \equiv y \pmod{m}$, 则存在 $k \in I$， 使得 $x - y = k*m$， 故 $y - x = (-k)*m$ ， 因此 $y \equiv x \pmod{m}$。

传递性: 对于任意$x, y, z \in X$, 若$x \equiv y \pmod{m}$, $y \equiv z \pmod{m}$, 则存在 $k, n \in I$ 使得 $x - y = k*m$, $y - z = n*m$ ， 于是有 $x - z = (k+n)*m$， 因此 $x \equiv z \pmod{m}$

综上所述，模m同余关系是等价关系。

定理. 如果R为集合A上的二元关系，则R为A上的等价关系之充要条件为r(R)=s(R)=t(R)=R。

- R为A上的等价关系当且仅当R的自反、对称和传递闭包都是R自身。

定理. 如果R为集合A上的二元关系，则tsr(R), trs(R)和rts(R)都是A上的等价关系。

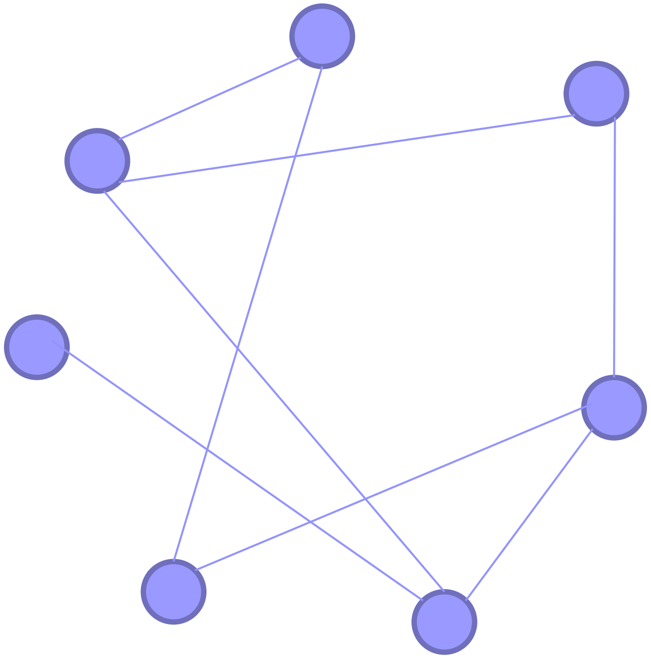
证明. 由以下定理即可证明：

定理：设二元关系 $R \subseteq A^2$，则
(1) 若 R 是自反的，则 s (R) 和 t (R) 也是自反的；
(2) 若 R 是对称的，则 r (R) 和 t (R) 也是对称的；
(3) 若 R 是传递的，则 r (R) 也是传递的

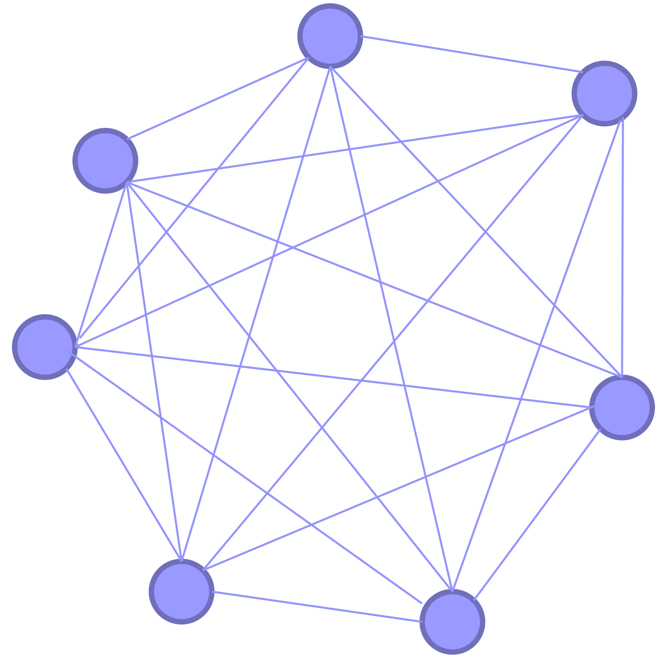
等价关系的简化关系图与简化关系矩阵

无向图的几个概念：

- **子图**：如果图G_1的每个结点和每条边都分别为图G_2的结点和边，称G_1为G_2的子图；
- **连通图**：若对图G的任意两个不同的结点a和b, 皆有G的有限个结点，如$u_0=a, u_1, \ldots, u_{n-1}, u_n=b$, 使得对每个$i \in \{1, \ldots, n\}$, 皆有一条连接$u_i$与$u_{i+1}$的边,就称G为连通的。
- **分支**：图G的最大连通子图称为G的分支。
- **完全图**：若图G的任意两个不同的结点，都有一条连接它们的边，就称G为完全图。

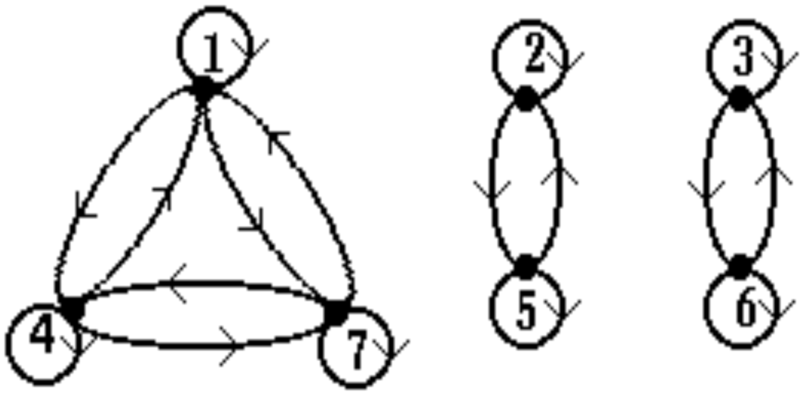


连通图

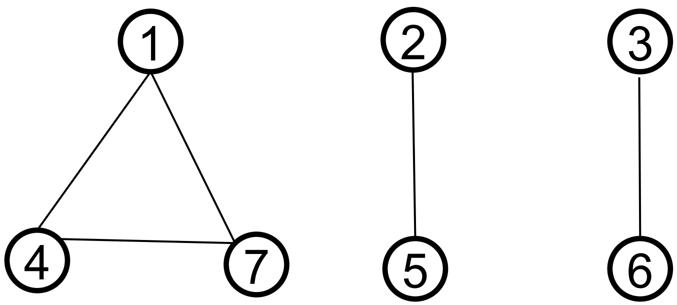


完全图

定理. 若R为非空有限集A上的二元关系，则R 为A上的等价关系之充要条件为R有简化关系图，且其每个分支都是完全图。



模3同余关系的关系图



简化关系图

定理. 若R为非空有限集A上的二元关系，则R 为A上的**等价关系**之充要条件为R有简化关系图，且其每个分支都是完全图。

证明: (必要性) 设R为A上的等价关系，则R 是自反的和对称的，因此R有简化关系图。

设G’是G_R的一个分支，对G’中任意两个结点a, b，则存在有限个不同的结点$a=u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}, u_n=b$，使得对每个i, $1\le i \le n-1$，有一条连接u_i, u_{i+1}的边，即$\langle u_i, u_{i+1}\rangle \in R$。又由R是传递的，可得$\langle a, b\rangle \in R$, 即G’中存在一条 a到b的边，故每个分支都是完全图。

定理. 若R为非空有限集A上的二元关系，则R 为A上的等价关系之充要条件为R有简化关系图，且其每个分支都是完全图。

证明: (充分性) 设R有简化关系图，则R是自反的和对称的，下面证明R是传递的。

对任意<x, y>, <y, z> ∈R, 即G_R中有连接x与y以及连接y与z的边，因此x, y, z位于同一个分支中。

又因为每个分支都是完全图，所以存在x到z的边，即<x, z> ∈R。

因此R是传递的，得R为A上的等价关系。

定理. 若R为非空有限集A上的二元关系，则R 为A上的等价关系之充要条件为

(1) M_R的对角线上的元素全为1； 自反

(2) M_R是对称矩阵；且 对称

(3) M_R可以经过有限次把行与行及相应的列与列对调，化为主对角型分块矩阵，且对角线上每个子块都是全1方阵。

	1	2	3	4	5
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}
3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}
4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}
5	a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{15}

交换第2, 4行

	1	2	3	4	5
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}
3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}
5	a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{15}

交换第2, 4列

	1	4	3	2	5
1	a_{11}	a_{14}	a_{13}	a_{12}	a_{15}
4	a_{41}	a_{44}	a_{43}	a_{42}	a_{45}
3	a_{31}	a_{34}	a_{33}	a_{32}	a_{35}
2	a_{21}	a_{24}	a_{23}	a_{22}	a_{25}
5	a_{51}	a_{54}	a_{53}	a_{52}	a_{15}

- 交换两行和相应的两列，关系R没有发生变化
- 主对角型分块矩阵的每个全为1的子块对应一个分支（最大连通子图）

例. 若A={1, 2, 3, 4, 5, 6}上的二元关系R为:

R={ <1, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <4, 4>, <5, 5>, <6, 6>, <1, 3>, <3, 1>, <1, 5>, <5, 1>, <2, 4>, <4, 2>, <3, 5>, <5, 3>, }.

M_R=

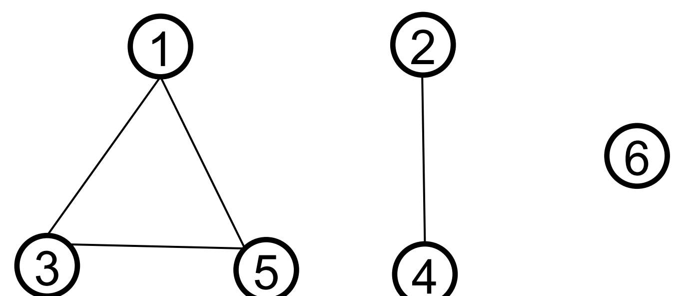
	1	2	3	4	5	6
1	1	0	1	0	1	0
2	0	1	0	1	0	0
3	1	0	1	0	1	0
4	0	1	0	1	0	0
5	1	0	1	0	1	0
6	0	0	0	0	0	1

交换第2,5行
交换第2,5列

	1	5	3	4	2	6
1	1	1	1	0	0	0
5	1	1	1	0	0	0
3	1	1	1	0	0	0
4	0	0	0	1	1	0
2	0	0	0	1	1	0
6	0	0	0	0	0	1

R是A上的等价关系

R的简化关系图是什么样?



定义(等价类) 设 R 是集合A上的等价关系。对于每个 $x \in A$，A中与 x 有关系R的元素的集合称为 x关于R的等价类，简称为 x 的等价类，记作 $[x]_R$，

即：$[x]_R = \{ y \mid y \in A \land x R y \}$，

显然，$[x]_R \subseteq A$

- 因为R是自反的，因此对每个 $x \in A$，有 $x \in [x]_R$
- 因为R是对称的，因此对任意 $x, y \in A$，若 $\langle x, y \rangle \in R$，则 $[x]_R = [y]_R$

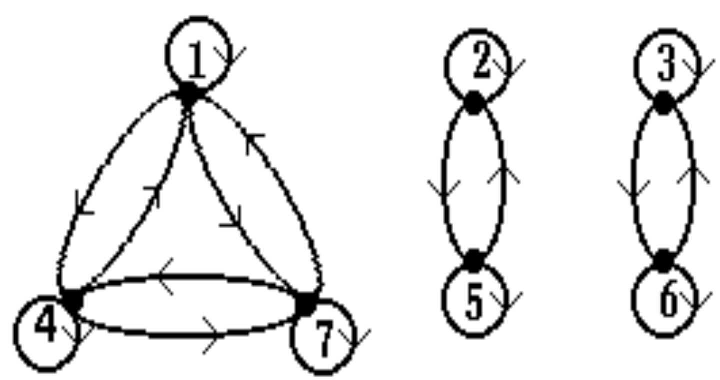
例. 集合A= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

R，A中各元素的等价类如下：

$[1]_R = [4]_R = [7]_R = \{1, 4, 7\}$

$[2]_R = [5]_R = \{2, 5\}$

$[3]_R = [6]_R = \{3, 6\}$



模3同余关系的关系图

定理 设 R 是非空集合A上的等价关系，则有：

(1) 对于每个 $x \in A$，$x \in [x]_R$，即 $[x]_R$ 是A的非空子集。

(2) $[x]_R = [y]_R$ 当且仅当 $x R y$。

(3) 若 $x, y \in A$ 且 $x \bar{R} y$，则 $[x]_R \cap [y]_R = \varnothing$。

(4) $\bigcup_{x \in A} [x]_R = A$。

证明：(1) 因 R自反，任取 $x \in A$ 均有 $x R x$，故 $x \in [x]_R$，因此，$[x]_R \neq \varnothing$。

(2) (必要性) 设 $[x]_R = [y]_R$，因为 $y \in [y]_R$，所以 $y \in [x]_R$，由 $[x]_R$ 的定义，可得 $x R y$。

(充分性) 设 $x R y$, 任取 $z \in [y]_R$, 则有 $y R z$。因 R 传递, 故 $x R z$，因此 $z \in [x]_R$，故 $[y]_R \subseteq [x]_R$。因 R对称，所以有 $y R x$，同理可证：$[x]_R \subseteq [y]_R$。因此，$[x]_R = [y]_R$

定理 设 R 是非空集合A上的等价关系，则有：

(1) 对于每个 x∈A， $x \in [x]_R$ ， 即 $[x]_R$ 是A的非空子集。

(2) $[x]_R = [y]_R$ 当且仅当 x R y 。

(3) 若 x, y∈A 且 $x \bar{R} y$，则 $[x]_R \cap [y]_R = \varnothing$ 。

(4) $\cup_{x \in A}[x]_R = A$。

(3) 假设 $[x]_R \cap [y]_R \neq \varnothing$，则 ∃ z 使 $z \in [x]_R$ 且 $z \in [y]_R$，即 x R z， y R z。

因 R是对称的，故 z R y。又因R是传递的，所以有 x R y，这与 $x \bar{R} y$ 的题设 矛盾！ 因此， $[x]_R \cap [y]_R \neq \varnothing$ 。

(4) 任取 x∈A，则 $[x]_R \subseteq A$。 所以有 $\cup_{x \in A}[x]_R \subseteq A$。

任取 z ∈A，有 $z \in [z]_R$， $[z]_R \subseteq \cup_{x \in A}[x]_R$，故有 $z \in \cup_{x \in A}[x]_R$ 。

因此， $A \subseteq \cup_{x \in A}[x]_R$，所以 $\cup_{x \in A}[x]_R = A$。

定义(划分). 设A为任意集合且 $\Pi \subseteq P(A)$。如果Π满足:

(1) 若$S \in \Pi$，则$S \neq \phi$;

(2) $\bigcup \Pi = A$;

(3) 若$S_1, S_2 \in \Pi$, 且$S_1 \cap S_2 \neq \phi$，则$S_1 = S_2$。

则称Π为A的一个划分。

例：设 A ＝ {a, b, c}，给定下列 A 的子集的集合：

B ＝ { {a}, {b, c} } √

C ＝ { {a, b, c} } √

D ＝ { {a}, {b}, {c} } √

E ＝ { {a, b}, {b, c} }

F ＝ { {a}, {c} }

G ＝ { ∅, {a}, {b}, {c} }

问：这些集合中 哪些是 A 上的划分？

定理. 若R为集合A上的等价关系，则$\Pi_R=\{[x]_R \mid x\in A\}$为A的一个划分。

等价于：

定理　设 R 是非空集合A上的等价关系，则有：

(1) 对于每个 $x\in A$，$x\in[x]_R$，即 $[x]_R$ 是A的非空子集。

(2) $[x]_R=[y]_R$ 当且仅当 $x\,R\,y$。

(3) 若 $x, y\in A$ 且 $x\,\overline{R}\,y$，则 $[x]_R\cap[y]_R=\varnothing$。

(4) $\bigcup_{x\in A}[x]_R = A$。

定义. 设R为集合A上的等价关系。称集合$\{ [x]_R \mid x \in A\}$为A关于R的商集，并记为A/R, 并称n(A/R)为R的秩。

例. 集合A=｛1, 2, 3, 4, 5, 6, 7｝上的关系模3同余关系R，A中各元素的等价类如下：

$[1]_R = [4]_R = [7]_R = \{1, 4, 7\}$

$[2]_R = [5]_R = \{2, 5\}$

$[3]_R = [6]_R = \{3, 6\}$

商集 $A/R = \{\{1, 4, 7\}, \{2, 5\}, \{3, 6\}\} = \{[1]_R, [2]_R, [3]_R\}$，

R的秩为3。

定理. 设Π为集合 A 的一个划分。若令

$$R_\Pi = \{ \langle x, y\rangle \mid \text{存在 } S \in \Pi, \text{ 使 } x, y \in S \},$$

则 R_Π为 A 上的等价关系，且$A/R_\Pi = \Pi$。

- **Π确定的等价关系就是:**

$$R_\Pi = (S_1 \times S_1) \cup (S_2 \times S_2) \cup \ldots \cup (S_n \times S_n)$$

定理. 设Π为集合A的一个划分。若令

$$R_{\Pi}=\{ <x, y> \mid 存在S\in\Pi, 使x, y \in S \},$$

则R_{Π}为A上的等价关系，且$A/R_{\Pi}=\Pi$。

证明. (1) 首先证明： R_{Π}具有自反性、对称性、传递性。

(自反性) 任取 $x\in A$，由划分的定义可知: 存在 $S\in\Pi$使得 $x\in S$, 有 $x R_{\Pi} x$ 。

(对称性) 设 $x R_{\Pi} y$，于是存在 $S\in\Pi$使得 $x, y\in S$,

故有 $y R_{\Pi} x$ 。

(传递性) 设 $x R_{\Pi} y$， $y R_{\Pi} z$，于是存在 $S, T\in\Pi$, 使得 $x, y\in S$ 且 $y, z\in T$。

由于Π是划分，则由 S 与 T 有公共元 y 可知：$S\cap T\neq\varnothing$,

故必有 $S=T$，因此 $z\in S$，所以$x R_{\Pi} z$。

因此， R_{Π}是 A 上的等价关系。

(2) 下面证明： $A/R_{\Pi}=\Pi$。

先证明 $\Pi\subseteq A/R_C$:

任取 $S\in\Pi$, 存在 $x\in S$，则必有 $S=[x]_{R\Pi}$ （why?）

由 $[x]_{R\Pi}\in A/R_{\Pi}$, 因此 $S\in A/R_{\Pi}$。

下面证明 $A/R_{\Pi}\subseteq C$：

任取 $[x]_{R\Pi}\in A/R_{\pi}$，其中 $x\in A$。

因π为A上的一个划分，则必有 $S\in\Pi$，使得 $x\in S$,

故必有 $S=[x]_{R\Pi}$ （why?）

因此， $[x]_{R\Pi}\in\Pi$。

例：U_A, I_A 分别是 A 上的全域关系和恒等关系，则

$$A / U_A = \{ A \}$$

$$A / I_A = \{ \{x\} \mid x \in A \}$$

例：A= {a, b, c, d, e}, 划分C = { {a, b}, {c}, {d,e} },

求划分C确定的 A 上的等价关系 R。

解：$R = \{ \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle d, e\rangle, \langle e, d\rangle \} \cup I_A$

例. 设R_1, R_2都是集合A上的等价关系。试判断下列A上的二元关系是不是A上的等价关系，并给出理由。

(1) $A^2 - R_1$;

(2) $R_1 - R_2$;

(3) R_1^2;

(4) $r(R_1 - R_2)$;

(5) $R_2 \circ R_1$;

(6) $R_1 \cup R_2$;

(7) $t(R_1 \cup R_2)$；

(8) $t(R_1 \cap R_2)$。

解: (2) 不是： $R_1 - R_2$不是自反的。

(4) 不一定： $r(R_1 - R_2)$不一定是传递的：

反例：$A=\{1, 2, 3, 4\}$,

$R1= \{<1, 1>, <2,2>, <3,3>, <4,4>, <1, 2>, <2, 1>, <1, 3>, <3, 1>, <3, 2>, <2, 3>\}$,

$R2= \{<1, 1>, <2,2>, <3,3>, <4,4>, <1, 3>, <3, 1>\}$

$R1-R2=\{<1, 2>, <2, 1>, <3, 2>, <2, 3>\}$

$r(R_1 - R_2)=\{<1, 1>, <2,2>, <3,3>, <4,4>, <1, 2>, <2, 1>, <3, 2>, <2, 3>\}$ 不是传递的。

例. 设R_1, R_2都是集合A上的等价关系。试判断下列A上的二元关系是不是A上的等价关系，并给出理由。

(1) A^2-R_1;

(2) R_1-R_2;

(3) R_1^2;

(4) $r(R_1-R_2)$;

(5) $R_2 o R_1$;

(6) $R_1 \cup R_2$;

(7) $t(R_1 \cup R_2)$;

(8) $t(R_1 \cap R_2)$

解：(6) 不一定： $R_1 \cup R_2$不一定是传递的。

反例：A={1, 2, 3, 4},

R_1= {<1, 1>, <2,2>, <1, 2>, <2, 1},

R_2= {<2, 2>,<3,3>, <2, 3>, <3, 2>}

$R_1 \cup R_2$={<1, 1>, <2,2>, <3,3>, <1, 2>, <2, 1>, <3, 2>, <2, 3>}

因为<1, 3> $\notin R_1 \cup R_2$， $R_1 \cup R_2$不是传递的。

(8) 是。