§7.5　　图的矩阵表示

图的矩阵表示

目的：图的各种矩阵表示及性质、图的各种表示之间的关联性质；

重点：图的各种矩阵表示、各种表示之间的关联性质；

难点：图的各种表示之间的关联性质。

图的表示法：

- 抽象数学系统：适于对图进行理论分析，但不直观
- 图解表示法：直观，但不适用于进行严格的论证
- 矩阵表示法：便于用计算机存储和处理

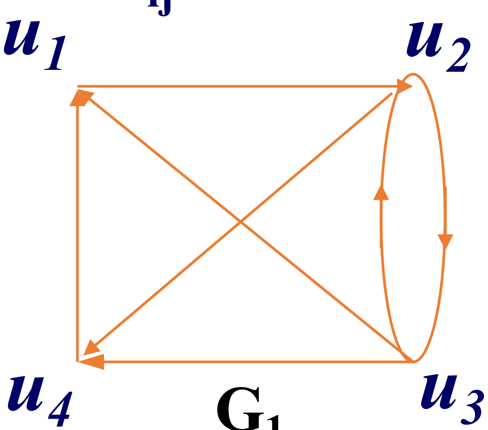
可以利用矩阵代数的运算便于求图的路径、回路以及其它性质

为了用矩阵表示图，首先需要对图的结点和边分别编号，即为它们规定某种顺序。

在本节中 约定，事先已为图的结点和边规定好了某种顺序。

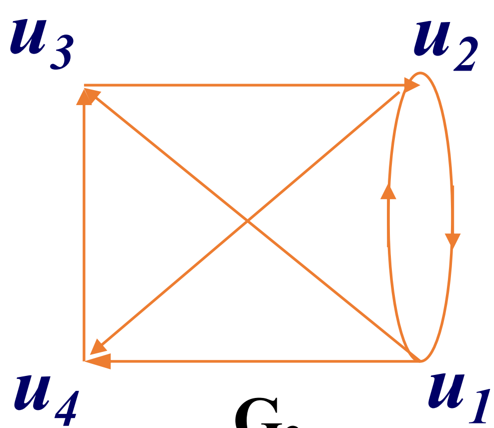
邻接矩阵

定义7.5.1 设 n 阶图 G 的结点集为 $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$，定义 G 的邻接矩阵 X(G) 为 $n\times n$ 矩阵 (x_{ij})，其中，x_{ij} 为分别以 v_i 和 v_j 为起点和终点的边的数目。



G_1

$$\begin{array}{c|cccc} & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ \hline u_1 & & & & \\ u_2 & & & & \\ u_3 & & & & \\ u_4 & & & & \end{array}\quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



G_2

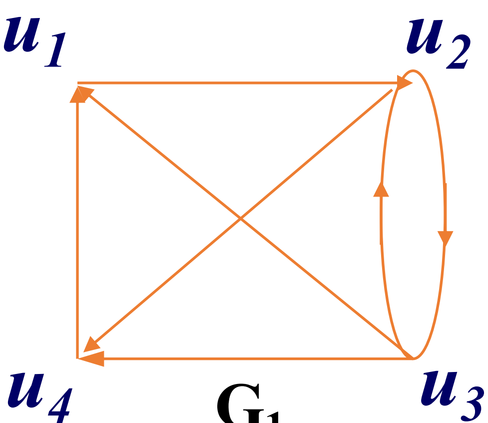
$$\begin{array}{c|cccc} & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ \hline u_1 & & & & \\ u_2 & & & & \\ u_3 & & & & \\ u_4 & & & & \end{array}\quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

G_1与G_2同构

- 图G的邻接矩阵依赖于G的结点的顺序排序

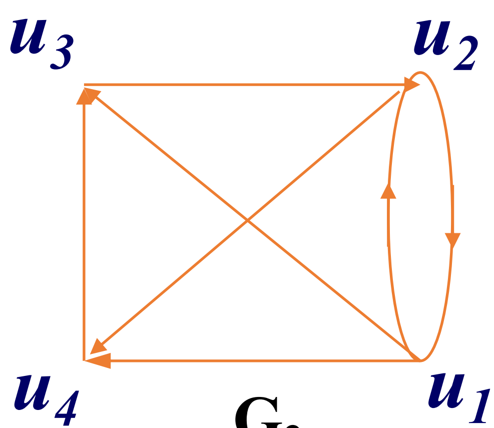
邻接矩阵

- 如果G_2和G_2是两个同构的图，则首先交换$X(G_1)$ 的一些行，然后交换相应的列，就可由$X(G_1)$得到$X(G_2)$；



G_1

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\
\hline
u_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
u_2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
u_3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
u_4 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$



G_2

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\
\hline
u_1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
u_2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
u_3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
u_4 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\xrightarrow{\text{交换第1,3行}}
\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & \mathbf{0} & 1 \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}
\xrightarrow{\text{交换第1,3列}}
\begin{bmatrix} \mathbf{0} & 1 & \mathbf{1} & 1 \\ \mathbf{1} & 0 & \mathbf{0} & 1 \\ 0 & 1 & \mathbf{0} & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{1} & 0 \end{bmatrix}
$$

邻接矩阵

- 如果G_2和G_2是两个同构的图，则首先交换$X(G_1)$ 的一些行，然后交换相应的列，就可由$X(G_1)$得到$X(G_2)$
- 邻接矩阵对于同构的图不加区别。

因此，不关心矩阵中结点和边的顺序是合理的。

并选取图G的任何一个邻接矩阵作为它的邻接矩阵。

n阶图G和X(G)之间的联系

1. 无向图G的邻接矩阵 X(G) 是对称的。

2. 图G没有平行边 iff X(G)的元素都是0和1。

3. 图G有自圈 iff X(G)的对角线有非0元素。

4. 图G是简单图 iff X(G)的元素都是0和1，并且对角线元素都为 0。

5. 图G是零图 iff X(G)是零矩阵 (即所有元素都是0的矩阵)。

6. 若图G是无向图，$d_G(v_i) = x_{ii} + \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$ （i = 1, 2, …， n）。

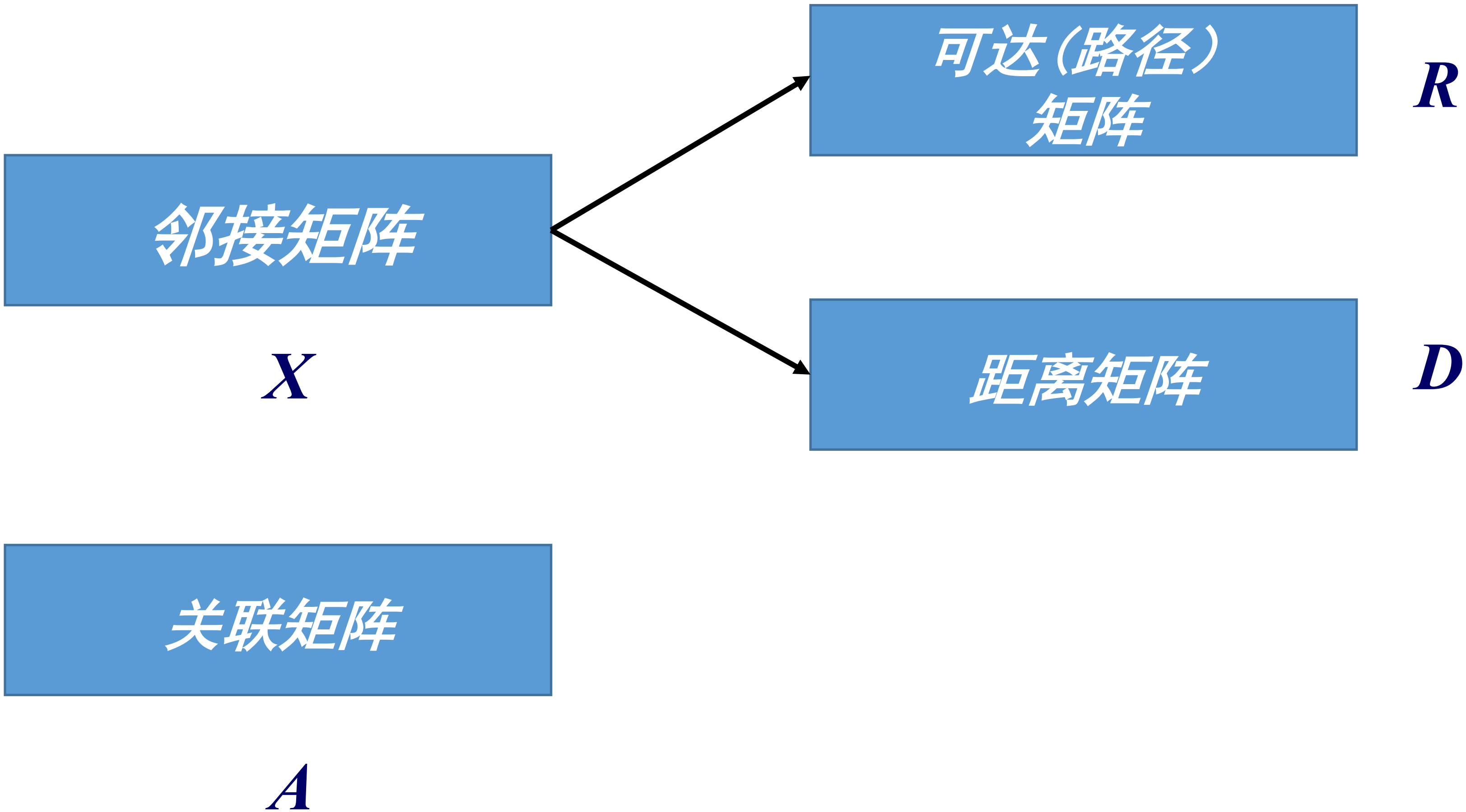
7. 若图G是有向图，$d_G^+(v_i) = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$ ， $d_G^-(v_i) = \sum_{j=1}^{n} x_{ji}$ ，

$d_G(v_i) = \sum_{j=1}^{n} (x_{ij} + x_{ji})$ （i = 1, 2, …， n）。

8. 无向图(有向图) G 有 k 个分支 (弱分支) G_1， G_2， …， G_k iff 顺序排列 G_1， G_2， …， G_k 的结点可使

$$X(G) = \begin{bmatrix} X(G_1) & & & \\ & X(G_2) & & \\ & & \cdots & \\ & & & X(G_k) \end{bmatrix}$$

主要知识点



- 对于矩阵 X，m∈N，令 $x_{ij}^{(m)}$ 表示 X^m 的第 i 行第 j 列元素。
- 在 X(G) 中，若 $x_{ij} = r$，则说明：

  从 v_i 至 v_j 存在 r 条长度为 1 的路径。
- 该结果可推广到 X 的任意正整数次幂 X^m，其中：

$$X^0 = I_n, \quad X^{m+1} = X^m * X$$

定理 7.5.1 设 $m \in I_+$，n 阶图G的 $V = \{v_1，v_2，…，v_n\}$，若 X 是G的邻接矩阵且$1 \le i, j \le n$，则 $x_{ij}^{(m)}$ 等于 G 中从 v_i 至 v_j 的长度为 m 的路径数。

证明：对 m 用第一归纳法：

i) 当 m =1 时，定理显然成立。

ii) 假设当 m = k (k ≥1) 时，定理成立。

当 m = k +1时，根据归纳假设，若$1 \le l \le n$，则

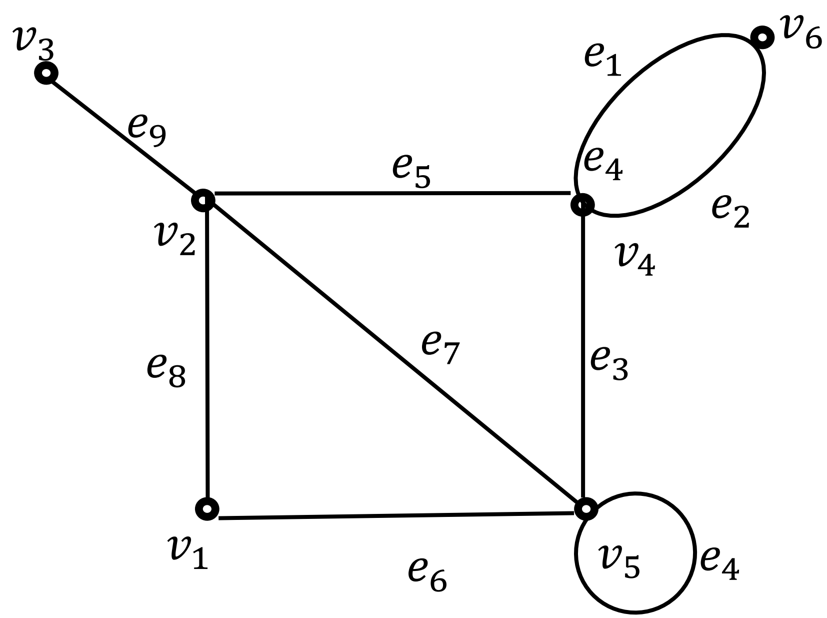
$x_{il}^{(k)}$ 等于 G 中从 v_i 至 v_l 长度为 k 的路径数，

x_{lj} 等于从 v_l 至 v_j 长度为 1 的路径数，

因此，

$x_{il}^{(k)} * x_{lj}$ 等于从 v_i 至 v_j 长度为 k+1 且倒数第二个结点为v_l的路径数，

所以 $x_{ij}^{(k+1)} = \sum_{l=1}^{n} x_{il}^{(k)} * x_{lj}$ 即为 G 中从 v_i 至 v_j 长度为 k+1 的路径数。



$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad X^3 = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 3 & 7 & 4 \\ 7 & 5 & 4 & 11 & 9 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 11 & 1 & 3 & 11 & 12 \\ 7 & 9 & 3 & 11 & 11 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 12 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

v_1到v_1的长度为 2 的路径为 2 条：$v_1e_8v_2e_8v_1$　$v_1e_6v_5e_6v_1$

问题：列出所有v_1到v_1的长度为 3 的路径

v_1到v_2的长度为 2 的路径为 1 条：$v_1e_6v_5e_7v_2$

v_2到v_1的长度为 1 的路径为 1 条：$v_2e_8v_1$

v_1到v_5的长度为 2 的路径为 2 条：$v_1e_8v_2e_7v_5$，$v_1e_6v_5e_4v_5$

v_5到v_1的长度为 1 的路径为 1 条：$v_5e_6v_1$

v_1到v_1的长度为 3 的路径为3条：$v_1e_6v_5e_7v_2e_8v_1$，　$v_1e_8v_2e_7v_5e_6v_1$，$v_1e_6v_5e_4v_5e_6v_1$

路径矩阵、可达性矩阵

设 n 阶图 G 的全部结点为 v_1，v_2，…，v_n，定义图G的**路径矩阵**为 $n \times n$ 矩阵 $P=(p_{ij})$，其中

$$p_{ij}=\begin{cases}1 & \text{从}v_i\text{可达}v_j \\ 0 & \text{从}v_i\text{不可达}v_j\end{cases}$$

路径矩阵也称为**可达性矩阵**。

由邻接矩阵求路径矩阵

对于n 阶图 G,

1. p_{ij} = 1 iff　从 v_i 可达 v_j

iff　存在从 v_i 到 v_j 的路径

iff　存在从 v_i 到 v_j 的基本路径（定理7.3.3）

iff　存在从 v_i 到 v_j 长度小于 n 的路径（定理7.3.2）

2. 去掉自圈和平行边不会改变结点间的可达性。

距离矩阵

设 n 阶图 G 的全部结点为 v_1， v_2， …， v_n，

称 n×n 矩阵 D＝(d_{ij})为 G 的 距离矩阵，其中：

d_{ij} 为从 v_i 至 v_j 的距离。

由图的邻接矩阵可以求得它的距离矩阵。

距离矩阵

定理 7.5.3 设 D ＝ (d_{ij}) 和 X ＝ (x_{ij}) 分别是 n 阶图 G 的距离矩阵和邻接矩阵，则

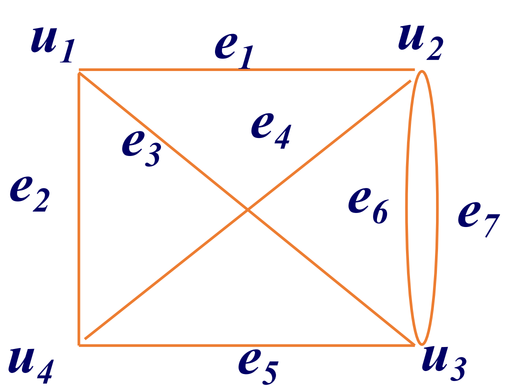
$$d_{ij} = \begin{cases} \infty & 若 \quad (\forall m)(m \in N \wedge m < n \to x_{ij}^{(m)} = 0) \\ \min\{k \mid 0 \le k < n \wedge x_{ij}^{\{k\}} > 0\} & 否则 \end{cases}$$

- 图的路径矩阵和距离矩阵不能给出图的全部信息；
- 图的邻接矩阵可以给出图的全部信息；
- 无自圈图的关联矩阵可以给出无自圈图的全部信息。

无自圈的无向图的关联矩阵

定义 7.5.4 设无自圈的无向图 G 的结点集和边集分别为 $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ 和 $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$，定义 G 的关联矩阵 A(G) 为 $n\times m$ 矩阵（a_{ij}），其中

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & e_j\text{和}v_i\text{关联}\\ 0 & e_j\text{和}v_i\text{不关联}\end{cases}$$

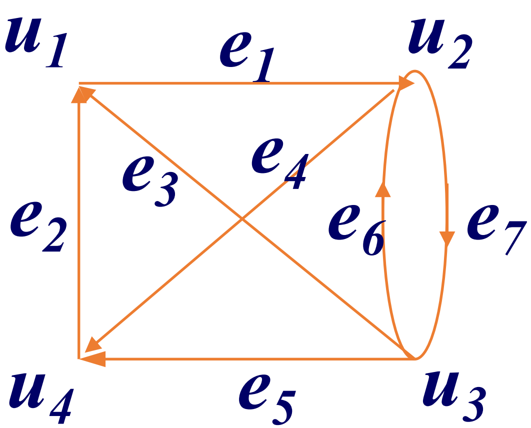


$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

无自圈的有向图的关联矩阵

设无自圈的有向图 G 的结点集和边集分别为 $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ 和 $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$，定义 G 的关联矩阵 A(G) 为 n×m 矩阵（a_{ij}），其中

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & v_i\text{是}e_j\text{的起点} \\ -1 & v_i\text{是}e_j\text{的终点} \\ 0 & e_j\text{和}v_i\text{不关联} \end{cases}$$



$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

无自圈有m条边的n阶图G和A(G)之间的联系

1. G 是零图 iff A(G) 是空矩阵 (即没有任何元素的矩阵)。
2. 无向图 G 的关联矩阵 A(G) 的每列元素之和为 2。
3. 有向图 G 的关联矩阵 A(G) 的每列元素之和为 0。
4. e_i 和 e_j 是 G 的平行边 iff A(G)的第 i 列与第 j 列相同。
5. 若G是无向图，$d_G(v_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}$. (i = 1，2，…，n)。

无自圈有m条边的n阶图G和A(G)之间的联系

6. 若G是有向图，(i = 1 ，2， …， n):

   $d_G^{+}(v_i)$为 A(G) 的第 i 行中值为 1 的元素个数，

   $d_G^{-}(v_i)$ 为 A(G) 的第 i 行中值为 −1 的元素个数，

   $d_G(v_i)$ 为 A(G) 的第 i 行中非零元素个数

7. v_i 是孤立点 iff A(G) 的第 i 行全为 0。

8. 无向图 (有向图) G 有 k个分支 (弱分支) G_1，G_2，…，G_k iff 顺序排列 G 的结点和边的顺序，可使

$$A(G)=\begin{bmatrix} A(G_1) & & & \\ & A(G_2) & & \\ & & \cdots & \\ & & & A(G_k) \end{bmatrix}$$

例：1.如何由邻接矩阵判断图的连通性？

2.如何由邻接矩阵判断图是不是非循环？

3.如何由邻接矩阵判断有向图是否有有向回路？

主要知识点

邻接矩阵 → 可达（路径）矩阵 R

邻接矩阵 → 距离矩阵 D

邻接矩阵 X

关联矩阵 A

主要内容

1. 图论的基本概念
2. 子图和图的运算
3. 路径、回路和连通图
4. 欧拉图和哈密顿图
5. 图的矩阵表示
6. 树、有向树和有序树

§7.6　　树

树、有向树、有序树

目的：树的六种定义，了解分支、森林、生成树、生成森林、最小生成树、枝、弦、基本回路、有向树、有向森林、二叉树（完全二元树）、最优二叉树、有序树、有序森林、定位二元有序树等概念和性质；掌握求最小生成树、最优二叉树的算法、定位二元有序树和有序森林的双射关系，以及有关的证明方法；

重点：树的六种定义，各种概念、算法及基本的证明思路；

难点：通过树的六种定义方式如何发现树的各种性质，大量相关知识点在证明种的综合运用。

概念图谱

无向图G

什么是树？ 树 —G去掉连通约束→ 森林

6个条件(连通;非循环;无自圈;v和v'有唯一路径；G-e非连通;n(E)=n-1)

是否存在？

生成森林 任意G都存在

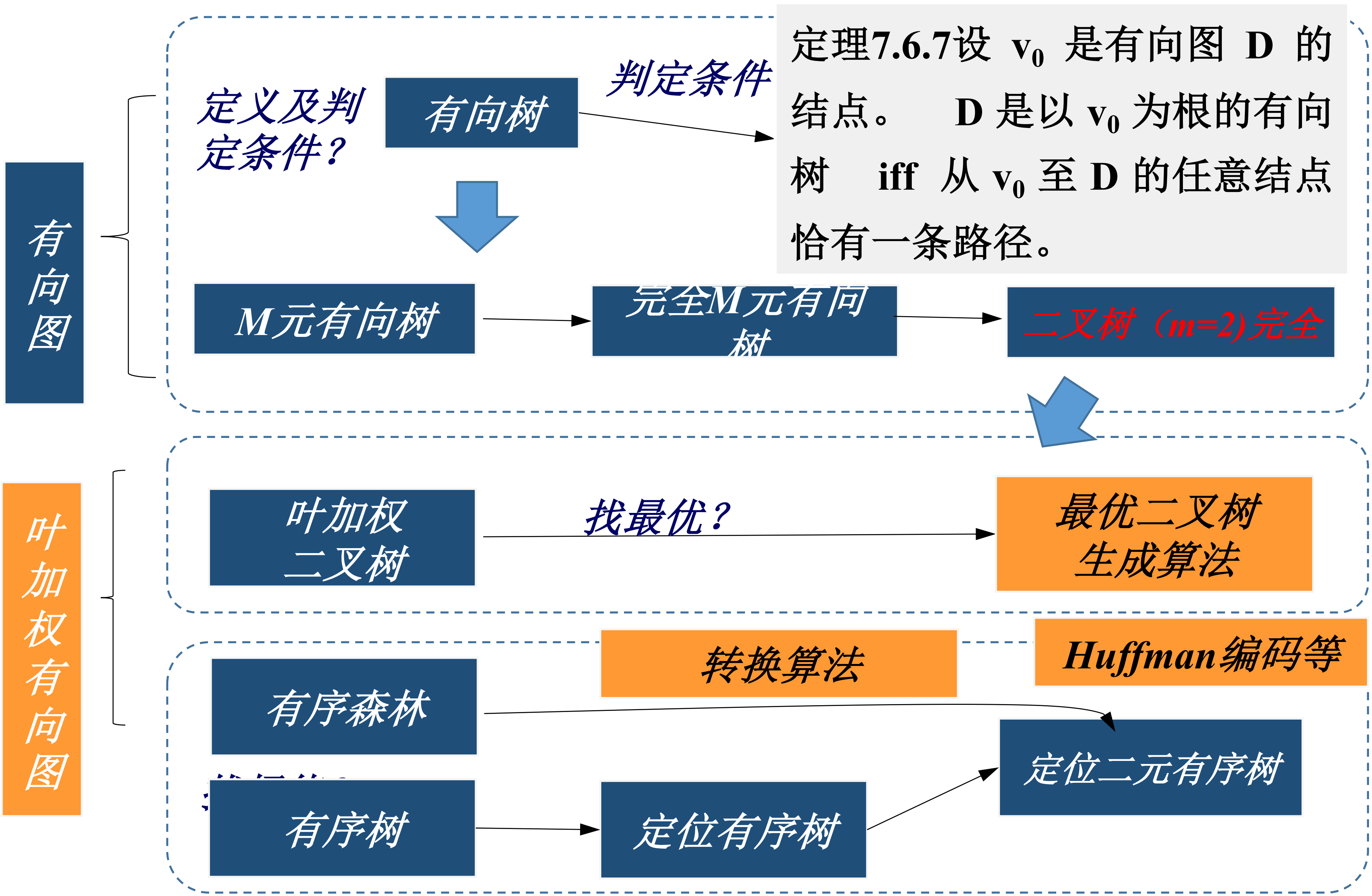
生成树 连通图G

如何找？ N阶连通无向图 —避圈法 / 破圈法→ 树

加权图

找极值？ 最小生成树算法（MST）

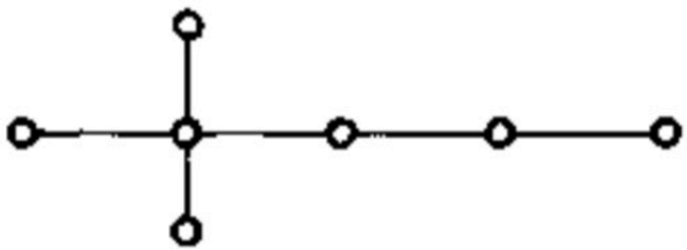
概念图谱

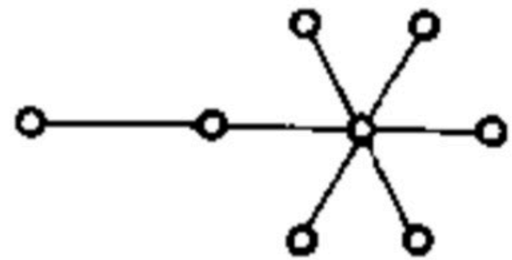


有向图
定义及判定条件？
有向树
判定条件
定理7.6.7设 v_0 是有向图 D 的结点。 D 是以 v_0 为根的有向树 iff 从 v_0 至 D 的任意结点恰有一条路径。
M元有向树
完全M元有向树
二叉树（m=2)完全
叶加权有向图
叶加权二叉树
找最优？
最优二叉树生成算法
转换算法
Huffman编码等
有序森林
定位二元有序树
有序树
定位有序树

树

定义 7.6.1 非循环的连通无向图称为树。





平凡树：只有一个顶点的无向图

树叶：树T中，度数为一的顶点称为树叶

分支顶点：树T中，度数大于1的顶点称为分支顶点

定理7.6.1 树定义的等价条件

设 G ＝〈V， E， Ψ〉是 n 阶无向图，则以下条件等价:

i) G 是连通的和非循环的。

ii) G 无自圈，且当 v, v'∈ V时，皆有唯一的一条从 v 至 v' 的基本路径。

iii) G 是连通的，且当 v, v'∈ V时，e ∉ E, Ψ'= {<e, {v， v'}>} 时,， $G+\{e\}_{\Psi'}$有唯一的一条回路。

iv) G 是连通的，且当e ∈E时， G – e 是非连通的。

v) G是连通的 且n(E)= n – 1。

vi) G是非循环的且有n(E)= n – 1。

i)G 是连通的和非循环的。

ii) G 无自圈，且当 v, v'∈ V时，皆有唯一的一条从 v 至 v'的基本路径。

(i)⟹ ii)). 因为G是非循环的，所以无自圈。

若 v, v'∈V， 由于G是连通图，则存在从v到v'的路径，则由定理7.3.1得，必有从v到v'的基本路径。

假如从v到v'的基本路径不唯一，不妨设

$$v_0 e_1\ v_1 \dots v_{p-1} e_p v_p \text{ 和 } v_0' e_1' v_1' \dots v_{q-1}' e_q' v_q'$$

(其中，$v_0 = v = v_0'$且$v_p = v' = v_q'$)为两条不同的基本路径。

设G_1是G的以$\{v_0, \dots, v_p\}$为结点集合且以$\{e_1, \dots, e_p\}$为边集合的子图，G_2是G的以$\{v_0', \dots, v_q'\}$为结点集合且以$\{e_1', \dots, e_q'\}$为边集合的子图。

任取$e \notin E$，令 $\Psi' = \{< e, \{v, v'\} >\}$，则 $G_1 + \{e\}_{\Psi'}$和$G_2 + \{e\}_{\Psi'}$显然都是回路，且为欧拉图。

因此$G' = (G_1 + \{e\}_{\Psi'}) \oplus (G_2 + \{e\}_{\Psi'})$是欧拉图和G的子图，且不是零图，所以$G'$必有非平凡分支$G''$。

对G''的每个结点u显然皆有$d_{G''}(u) > 1$，根据定理7.3.9和G''为G 的子图知道，G 不是非循环图。这与G是非循环的矛盾。

ii) G 无自圈，且当 v, v'∈ V时，皆有唯一的一条从 v 至 v'的基本路径。
iii) G 是连通的，且当 v, v'∈ V时，e ∉ E, Ψ'= {<e, {v，v '}>}时, $G+\{e\}_{\Psi'}$有唯一的一条回路。

(ii)⟹ iii)). 若v,v'∈V，则由 ii)知道，必有从v 到 v' 的基本路径。因此G 必为连通的。

对任意 e∉E，当令 Ψ'={<e,{ v, v'}>}时，$G+\{e\}_{\Psi'}$中必有回路。

假如$G+\{e\}_{\Psi'}$中的回路不唯一，不妨设C_1和C_2为它的两个不同回路，显然e 是C_1, C_2的公共边且C_1, C_2可运算，$C_1 \oplus C_2$ 是G 的子图且不为零图。由于C_1, C_2为回路，因此为欧拉图，则由定理7.4.5，$C_1 \oplus C_2$ 还是欧拉图。因此$C_1 \oplus C_2$ 的非平凡分支G ' 必是欧拉闭路，故而对G'中每个节点μ皆有$d_G(u) > 1$,根据定理7.3.9,G必有回路C, 对C 中任意两个节点μ和μ'，必有两条不同的从μ到μ' 的基本路径，这与条件ii)相矛盾。

iii) G 是连通的，且当 $v, v' \in V$时，$e \notin E$，$\Psi' = \{<e, \{v, v'\}>\}$时，$G + \{e\}_{\Psi'}$有唯一的一条回路。

iv) G 是连通的，且当$e \in E$时，$G - e$ 是非连通的。

(iii)⇒iv) 反证法。

假设 iv) 不成立，则由G是连通的可知，必有$e \in E$，使得 $G - e$ 仍是边通的。

设$\Psi(e) = \{v, v'\}$，则G中必有两条不同的从 v到v'的基本路径，从而由上面的论证知，G必有回路。

任取$e' \notin E$及 $u \in V$，当令$\Psi' = \{<e', \{v\}>\}$时，$G + \{E'\}_{\Psi'}$显然有两个不同的回路，与iii)矛盾。

iv) G 是连通的，且当$e \in E$时，$G - e$ 是非连通的。
v) G是连通的 且$n(E) = n - 1$。

(iv) $\Rightarrow$ v)

显然G是连通的简单图。下面关于 **n** 用第二归纳法证明$n(E) = n - 1$.

a) 当$n = 1$时，G显然没有边，即$n(E) = 0$

b) 假定对任意的$k \geq 2$，当$n<k$ 时皆有$n(E) = n - 1$;

c) 假定当 $n = k$ 时有$n(E) = m$。

任取$e \in E$，由$G - e$是非连通图可知，$G - e$恰有两个分支G_1与G_2。

设$G_i (i = 1,2)$ 有n_i个节点和m_i条边，根据归纳假设，必有

$m_1 = n_1 - 1, m_2 = n_2 - 1$。

从而即得到$m = m_1 + m_2 + 1 = n_1 + n_2 - 1$,即$n(E) = m = k - 1$。

v) G是连通的 且n(E)= n – 1。
vi) G是非循环的且有n(E)= n – 1

(v) ⇒ vi) 只须用关于**n**的归纳法证明**G**是非循环图即可。
当**n=1**时，**G**为平凡图，故为非循环。
若**n=k+1**，则由$n(E) = n - 1 = k$得$\sum_{v \in V} d_G(v) = 2 \cdot n(E) = 2k$。
由于 **G**为连通的，对每个$v \in V$皆有$d_G(v) \geq 1$，所以必有$v' \in V$使$d_G(v') = 1$.这时$G - v'$显然是连通的，

阶为**n-1=k**且边数为$n(E) - 1 = k - 1$，根据归纳假设，$G - v'$必是非循环的，因此**G**也必是非循环的。

vi)G是非循环的且有n(E)= n – 1。
i)　G 是连通的和非循环的。

vi) $\Longrightarrow$ i)

假定 G 有 k 个分支$G_1, \ldots, G_k$， 设$G_i(1 \le i \le k)$有n_i个结点和m_i条边 。

因为每个$G_i(1 \le i \le k)$都是非循环且为连通的，所以由前面的论证知道必有 i)$\Longrightarrow$ v)，因此$m_i = n_i - 1(1 \le i \le k)$，

从而得到$n - 1 = \sum_{i=1}^{k} m_i = \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1) = n - k$， 即$k = 1$，

这表明G必是连通的

定理7. 6. 1 树定义的等价条件

设 G ＝〈V， E，Ψ〉是 n 阶无向图，则以下条件等价:

i) G 是连通的和非循环的。(树的定义)

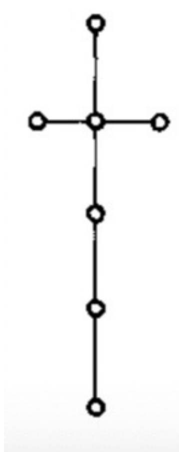
ii) G 无自圈，且当 v, v'∈ V时，皆有唯一的一条从 v 至 v' 的基本路径。

iii) G 是连通的，且当 v, v'∈ V时，e ∉ E，Ψ'= {<e, {v，v'}>} 时,， $G+\{e\}_{\Psi'}$ 有唯一的一条回路。

iv) G 是连通的，且当e ∈E时， G – e 是非连通的。

v) G是连通的 且n(E)= n – 1。

vi) G是非循环的且有n(E)= n – 1。



三个基本条件：

i. G是连通的，

ii. G是非循环的，

iii.有 n – 1 条边。

给定其中两个条件，证明第三个条件