2.3 次序关系

重点:　偏序关系

哈斯图

求偏序集合中的特殊元素

定义（偏序关系）集合 A上的关系 R 称为 A上的偏序关系（或半序关系），当且仅当 R是自反的、反对称的和传递的。

例：整数集合N上的小于等于关系 ≤ 是A上的偏 序关系

- 用“≤”表示任意偏序关系，并用<A , ≤ >表示偏序结构
- 如果 x , y∈A 且x ≤ y，则称“ x 小于或等于y ”或“ x 在 y 之前 ”
- 对于偏序集合<A, ≤ >，x , y ∈A，如果有x ≤ y 或者 y ≤ x，称 A的元素 x 和 y 是可比的

例：以下哪些是偏序结构

(1) $< N , \le >$

(2) $< N , \ge >$

(3) $< P(A) , \subseteq >$

(4) $< I_+ , | >$

定义6.10（全序关系） 设$<A, \leq>$是一个偏序结构，如果对于任意 $x, y \in A$，或者 $x \leq y$，或者 $y \leq x$，即 x与y可比，则称$\leq$为A上的**全序或线序**，并称$<A, \leq>$为**全序结构或链**。即

$$(\forall x)(\forall y)(x \in A \wedge y \in A \rightarrow x \leq y \vee y \leq x)$$

例：$<N, \leq>$，$<N, \geq>$，$<P(A), \subseteq>$，$<I_+, |>$ 是偏序结构

- $<N, \leq>$, $<N, \geq>$是全序结构，即它们中的任意元素 x 和 y 都是可比的
- 而$<P(A), \subseteq>$, $<I_+, |>$ 都不是全序结构

定义6.11（严格偏序关系，又称 拟序关系）R是集合A上的 严格偏序关系当且仅当 R是反自反的和传递的。

用 “<” 表示 严格偏序关系，并称 “ x 小于 y ”，

称<A , <>为严格偏序（拟序）结构。

例: <N , < >, < N , > >, < P(A) , ⊂ > 都是 严格偏序结构。

定理：若 R 是 A上严格偏序关系，则 R 是 反对称的。

证明：假设 R不是反对称的，则存在 x , y∈A 且 x≠y，

使得 <x , y>∈R 且 <y , x>∈R。

因为R是传递的，所以 <x , x> ∈R， 这与 R反自反矛盾。

偏序关系与严格偏序关系的区别：

- 偏序：自反的、反对称的和传递的
- 严格偏序：反自反、反对称的和传递的

偏序关系与严格偏序关系的关系：

定理: 设R 是集合A上的二元关系。

(1) 若R是A上的严格偏序关系，则 r(R) 是A上的偏序；

(2) 若R是A上的偏 序，则$R-I_A$是A上的严格偏序。

符号表示：

- 用"≤"表示偏序
- 用"<"表示严格偏序

"≤"与"<"不再表示通常数的大小次序关系

例. 设R是集合A上的二元关系。证明：

(1) 若R是A上的偏序当且仅当 $R\cap R^{-1}=I_A$且$R=R^*$；

(2) 若R是A上的严格偏序当且仅当 $R\cap R^{-1}=\varnothing$且$R=R^+$；

其中 $R^*=\bigcup_{n=0}^{\infty} R^n$, $R^+=\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。

解: (1) R是A上的偏序当且仅当R是自反的，反对称的和传递的。

由于 R是自反的当且仅当$I_A \subseteq R \cap R^{-1}$,

R是反对称的当且仅当$R\cap R^{-1} \subseteq I_A$,

R是传递的当且仅当$R=t(R)=R^+$。

因此，R是A上的偏序当且仅当$R\cap R^{-1}=I_A$且$R=R^+\cup I_A=R^*$ 。

例. 设R是集合A上的二元关系。证明:

(1) 若R是A上的偏序当且仅当 $R\cap R^{-1}=I_A$ 且 $R=R^*$;

(2) 若R是A上的严格偏序当且仅当 $R\cap R^{-1}=\varnothing$ 且 $R=R^+$;

其中 $R^*=\bigcup_{n=0}^{\infty} R^n$, $R^+=\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。

解: (2) (必要性) 由于 R是A上的严格偏序,因此R是反自反的,反对称的和传递的。

由于R是反自反的,因此 $I_A \cap R = \varnothing$ 且 $I_A \cap R^{-1} = \varnothing$ 。

又因为R是反对称,因此 $R\cap R^{-1} \subseteq I_A$。

所以,$R\cap R^{-1} = R\cap R^{-1} \cap I_A = \varnothing$,得 $R\cap R^{-1} = \varnothing$。

又由于R是传递的,因此 $R=t(R) =R^+$。

例. 设R是集合A上的二元关系。证明:

(1) 若R是A上的偏序当且仅当 $R\cap R^{-1}=I_A$ 且 $R=R^*$;

(2) 若R是A上的严格偏序当且仅当 $R\cap R^{-1}=\varnothing$ 且 $R=R^+$;

其中 $R^*=\bigcup_{n=0}^{\infty} R^n$, $R^+=\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。

解: (2) (充分性) 由于 $R\cap R^{-1} = \varnothing$，因此R是反自反的；否则若R不是反自反，则存在 $\langle x, x\rangle \in R$, 得 $\langle x, x\rangle \in R\cap R^{-1}$，矛盾。

又由 $R\cap R^{-1} = \varnothing \subseteq I_A$，知 R 一定是反对称的，否则必存在 $\langle x, y\rangle, \langle y, x\rangle \in R\cap R^{-1}$， $x\neq y$。

下面证明R是传递的。对任意的 $\langle x, y\rangle, \langle y, z\rangle \in R$，则必有 $\langle x, z\rangle \in R^2 \subseteq R^+=R$。

因此，R是A上的严格偏序。

定义: 在偏序结构$<A, \le>$中，对于任意两个元素 $x, y \in A$，如果 $x < y$ 且不存在任何其它元素 $z \in A$，使得 $x < z$ 和 $z < y$，则称 y 为 x关于≤的覆盖（遮盖），简称为 y 为 x的覆盖。即

$$y是x的覆盖 \Leftrightarrow x < y \wedge \neg \exists z (z \in A \wedge x < z \wedge z < y)$$

例: $A = \{1, 2, 3, 4\}$, ≤是 A上的小于或等于关系，

则 4 是 3的覆盖，3是 2的覆盖，2 是 1的覆盖 。

若 ≤ 是A上的大于或等于关系，则上述覆盖关系恰好相反

例: 对偏序结构$<R, \leq>$, 其中 $\leq$ 是实数域R上的小于或等于关系。

任何实数都没有覆盖。

因为在任意两个不同的实数之间，都存在有另外的实数，如平均值。

例: 对偏序结构$<N, \leq>$, 其中 $\leq$ 是自然数域N上的小于或等于关系。

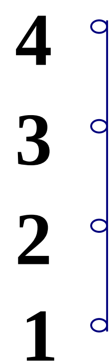
任何自然数都有唯一的覆盖。

- 偏序关系的简化的关系图——偏序结构图 或 哈斯图

- 设R为非空有限集A上的偏序，R的哈斯图是一个无向图H_R：集合A的每一个元素为H_R中一个点，对于 $x, y \in A$，
  - ✓ 如果 $x<y$，则点 x 画在点 y 之下，
  - ✓ 如果 y 覆盖 x，则 x 和 y 之间存在一条无向边。

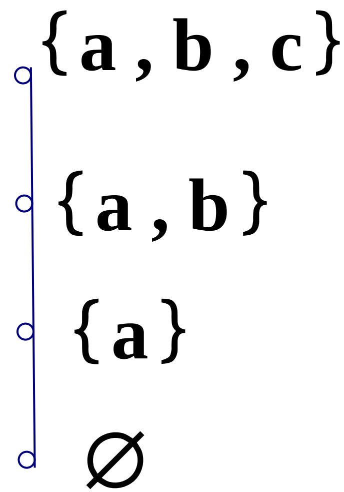
例：画出满足下列条件的哈斯图 .

（1）$< A, \leq >$: A＝｛1，2，3，4｝，并设≤ 是 A 上的小于或等于关系 。



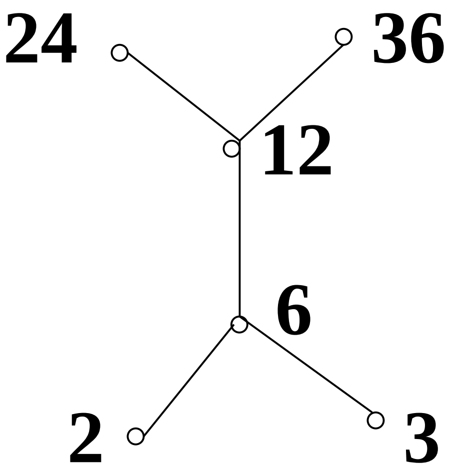
例：画出满足下列条件的哈斯图 .

(2) $<A, \leq > : A = \{ \varnothing , \{a\}, \{a , b\}, \{a , b , c\} \}$，并设 $\leq$ 是 A上的包含关系。



(3) $<A, \leq > : A = \{ \varnothing , \{a\}, \{a , b\}, \{b, c\}, \{a , b , c\} \}$，并设 $\leq$ 是 A上的包含关系。

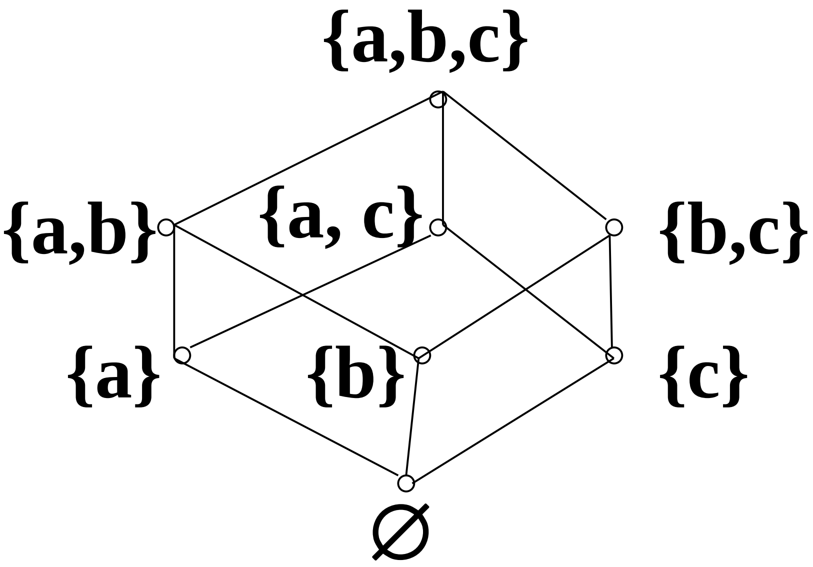
例：设 X = {2，3，6，12，24，36 }，≤为整除关系，如果 x 整除 y，便有 x ≤ y．画出<X ,≤ >的哈斯图。



分析:

24与36是12的覆盖，12是6的覆盖，6是2和3的覆盖。

例 设 A = {a, b, c} , ≤ 是幂集 P(A) 上的包含关系， 画出 < P(A) , ≤ >的 哈斯图



偏序结构中的特殊元素：

定义　设$<A, \leq>$是偏序结构，并且$S \subseteq A$，$S \neq \phi$, 则

(1) b 是 S 的最大元 $\Leftrightarrow b \in S \wedge \forall x\,(x \in S \to x \leq b)$

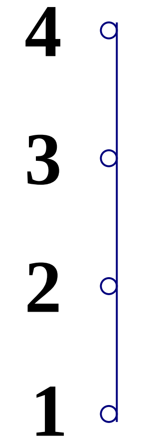
(2) b 是 S 的最小元 $\Leftrightarrow b \in S \wedge \forall x\,(x \in S \to b \leq x)$

(3) b 是 S 的极大元 $\Leftrightarrow b \in S \wedge \forall x\,(x \in S \wedge b \leq x \to x = b)$

(4) b 是 S 的极小元 $\Leftrightarrow b \in S \wedge \forall x\,(x \in S \wedge x \leq b \to x = b)$

- S的最大元、最小元 若存在，则唯一；
- S的极大元、极小元若存在，不一定唯一；
- 若 S是有穷集，则S的极大元、极小元必存在，但 S 的最大元、最小元不一定存在 。

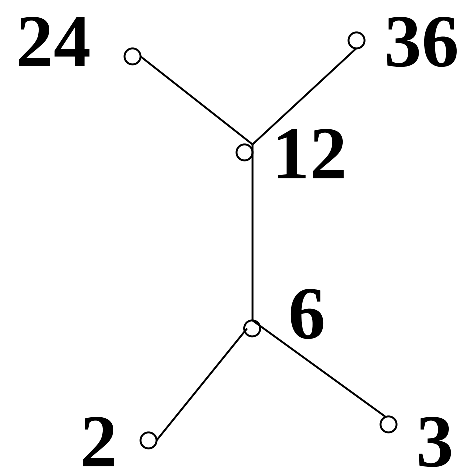
例. (1) (A, ≤): A＝｛1，2，3，4｝，并设≤是A上的小于或等于关系。



A上的极大元：4; 极小元： 1

A上的最大元：4; 最小元： 1

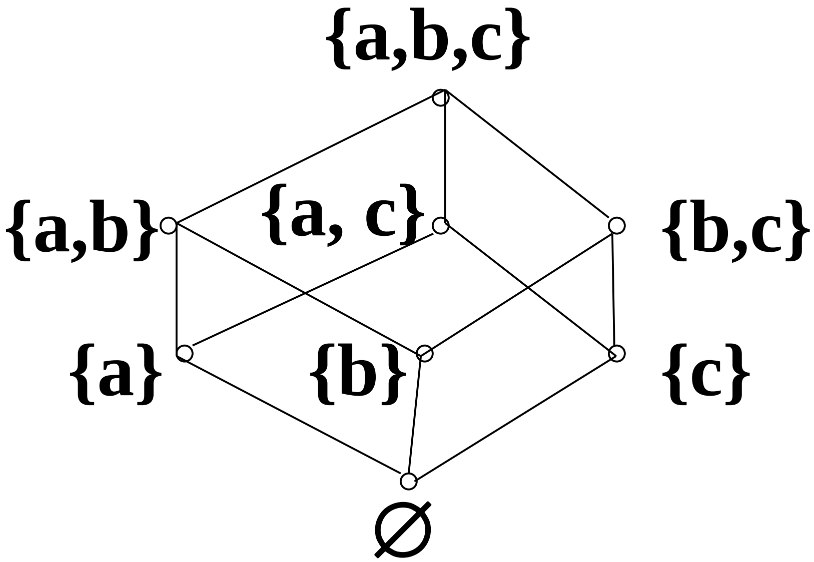
例: (A, ≤): A = {2, 3, 6, 12, 24, 36 }, ≤为整除关系，如果 x 整除 y，便有 x ≤ y .



A上的极大元：24, 36; 极小元： 2, 3

A 无最大元，也无最小元

例. <P(A), ≤ > : A = {a, b, c} , ≤ 是幂集P(A) 上的包含关系。



A上的极大元： {a,b,c} ; 极小元： ∅

A上的最大元： {a,b,c} ; 最小元： ∅

定义6.13 设$<A, \le>$是偏序结构，并且$S \subseteq A$，$S \neq \phi$，则

(1) b 是 S 的上界 $\Leftrightarrow$ $b \in A \land \forall x (x \in S \to x \le b)$

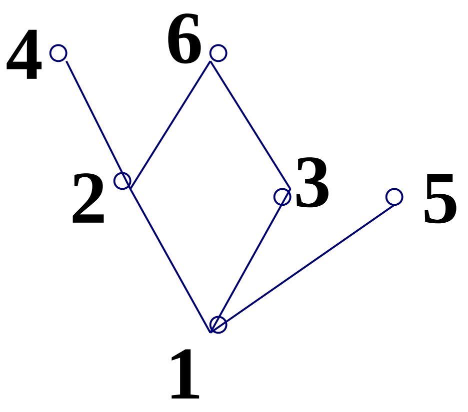
(2) b 是 S 的下界 $\Leftrightarrow$ $b \in A \land \forall x (x \in S \to b \le x)$

(3) b 是 S 的最小上界(上确界) $\Leftrightarrow$ b是S的上界, 且对S的任意上界 x， 都有 $b \le x$ 。

(4) b 是 S 的最大下界(下确界) $\Leftrightarrow$ b是S的下界, 且对S的任意下界 x,都有 $x \le b$ 。

- S的上界和下界可能不唯一；
- S的最小上界和最大下界若存在，则唯一。

例：设集合 A ＝｛1, 2, 3, 4, 5, 6｝，≤ 关系是整除关系，画出哈斯图，并指出A的极大元、极小元、最大元、最小元、上界、下界、最小上界、最大下界.



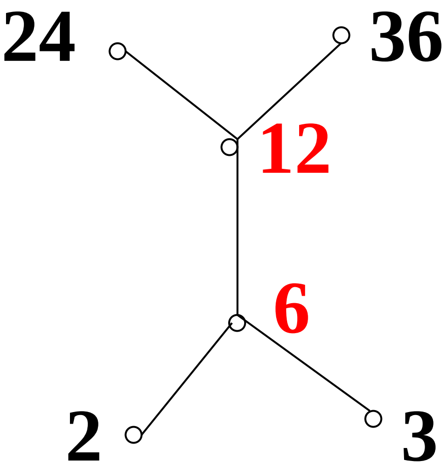
A的极大元：4, 5, 6　　极小元：1

最大元：无　　最小元：1

上界：无　　下界：1

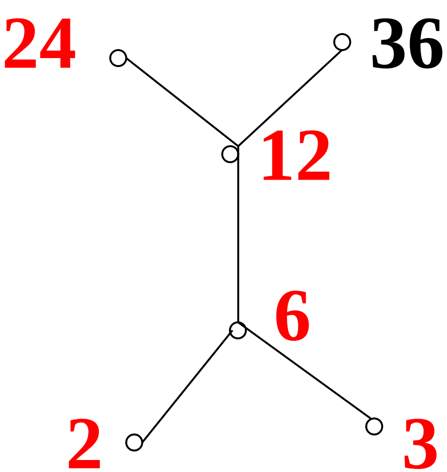
最小上界：无　　最大下界：1

例: (A, ≤): A = {2, 3, 6, 12, 24, 36 },
≤为整除关系，如果 x 整除 y，便有 x ≤ y。令S={6，12}, 求S的极大元、极小元、最大元、最小元、上界、下界、最小上界、最大下界。



解：S的极大元是 12；极小元是6;
S的最大元是12；最小元是6
S的上界有12, 24, 36;下界有2, 3, 6;
S的最小上界是12；最大下界是 6

S={2, 3, 6, 12, 24} ???



解：S的极大元是 24；极小元是2, 3;
S的最大元是24；无最小元
S的上界和最小上界是24，无下界。

例：若 $S=\{x \mid x \in R$ 且$1< x< 2\}$，$\leq$是R上的小于或等于关系，给出S的极大元、极小元、最大元、最小元、最小上界、最大下界。

解：S无极大元、极小元、最大元、最小元

S的最小上界为2，最大下界为1