第二章 关系

第二章　关系

1 关系及其性质

2 关系的运算

3 次序关系

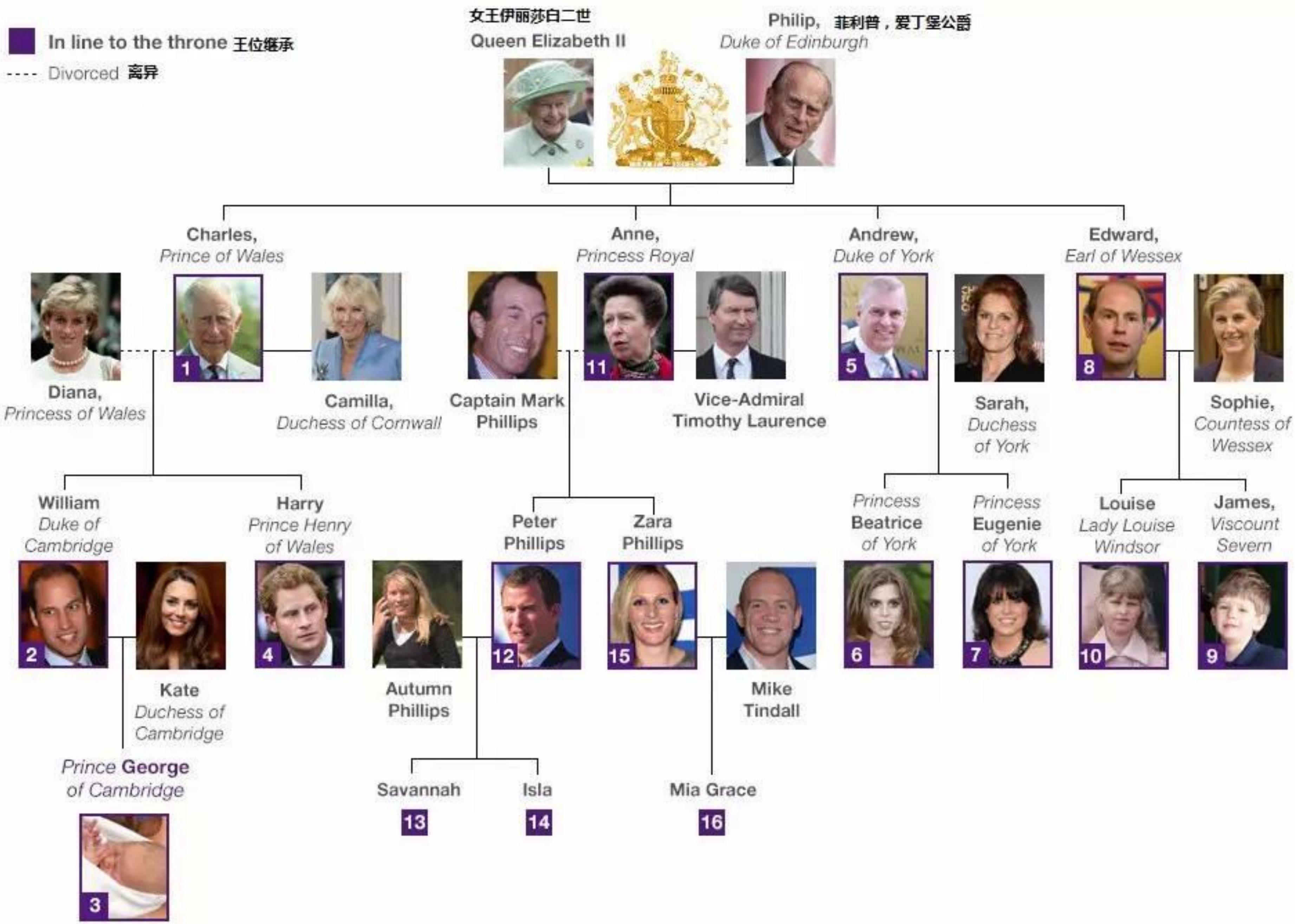
4 等价关系与划分

2.1 关系及其性质

重点:

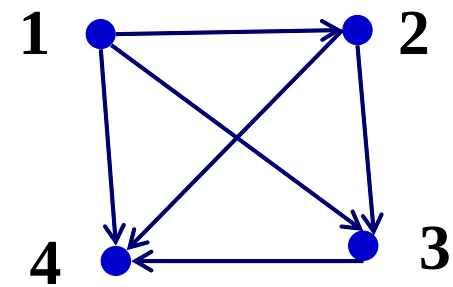
1. 关系的表示

2. 关系的性质


In line to the throne 王位继承
Divorced 离异
女王伊丽莎白二世
Queen Elizabeth II
Philip, 菲利普，爱丁堡公爵
Duke of Edinburgh
Charles,
Prince of Wales
Anne,
Princess Royal
Andrew,
Duke of York
Edward,
Earl of Wessex
Diana,
Princess of Wales
1
Camilla,
Duchess of Cornwall
Captain Mark
Phillips
11
Vice-Admiral
Timothy Laurence
5
Sarah,
Duchess
of York
8
Sophie,
Countess of
Wessex
William
Duke of
Cambridge
Harry
Prince Henry
of Wales
Peter
Phillips
Zara
Phillips
Princess
Beatrice
of York
Princess
Eugenie
of York
Louise
Lady Louise
Windsor
James,
Viscount
Severn
2
4
12
15
6
7
10
9
Kate
Duchess of
Cambridge
Autumn
Phillips
Mike
Tindall
Prince George
of Cambridge
3
Savannah
13
Isla
14
Mia Grace
16

例：考虑集合A={1, 2, 3 ,4}上的小于关系“<”：

$$1 < 2,\ 1 < 3,\ 1 < 4,\ 2 < 3,\ 2 < 4,\ 3 < 4$$



用序偶$\langle i, j\rangle$表示“$i<j$”，令

$$R=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 4\rangle\}$$

则R概括了集合A上的小于关系。

例：实数集合上的大于关系 “ > ” 表示如下：

$$R_{>} = \{ \langle x, y \rangle \mid x , y \text{ 是实数 且 } x > y \}$$

定义1 (关系)：设$n \in I_+$, 且$A_1, A_2, \ldots, A_n$为n个任意的集合，$R \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$，

(1) 称R为$A_1, A_2, \ldots, A_n$的n元关系；

(2) 若n=2，则称R为从A_1到A_2的二元关系；

(3) 若$R=\varnothing$, 则称R为空关系；

(4) 若$R= A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$，则称R为全关系

(5) 若$A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, 则称R为A上的n元关系。

$A_1, A_2, \ldots, A_n$上最多能有多少个n元关系？

对于二元关系R，

- 若 $\langle x, y\rangle \in R$, 则可表示成 $x\ R\ y$, 读做 "x与y有关系R"
- 若 $\langle x, y\rangle \notin R$, 则记作 $x\overline{R}y$, 读作 " x与y不存在关系R"

例：X上的全(域)关系:

$$U_X = \{ <x_i , x_j > \mid x_i , x_j \in X \} = X \times X$$

例：X上的恒等关系：$I_X = \{ < x, x > \mid x \in X \}$

设 $X = \{ 0, 1, 2 \}$,

$U_X = \{ <0, 0>, <0, 1>, <0, 2>, <1, 0>, <1, 1>, <1, 2>, <2, 0>, <2, 1>, <2, 2> \}$

$I_X = \{ <0, 0>, <1, 1>, <2, 2> \}$

例：设集合$A=\{0, 1, 2\}$, $B=\{ 0, 2, 4\}$,

$R_1=\{<x, y>| x, y \in A \cap B\}$,

$R_2= \{<x, y>| x \in A-B,\ y \in B-A\}$。

列出R_1, R_2中的所有 序偶。

解：$R_1=\{<0, 0>, <0, 2>, <2, 0>, <2, 2>\}$

$R_2=\{<1,4>\}$

例：考虑下面这些整数集合上的关系：

$R_1=\{<a, b>| a\le b\}$, $R_2=\{<a, b>| a> b\}$,

$R_3=\{<a, b>| a=b$ 或 $a=-b\}$, $R_4=\{<a, b>| a=b\}$,

$R_5=\{<a, b>| a=b+1\}$, $R_6=\{<a, b>| a+b\le 3\}$。

哪些关系包含了序偶$<1,1>$, $<1, 2>$, $<2,1>$ 或 $<1, -1>$?

定义2 (关系的相等)：设R_1为$A_1, A_2, \ldots, A_n$间的n元关系， R_2为$B_1, B_2, \ldots, B_m$间的m元关系。如果

(1) $n=m$;

(2) 若$1 \le i \le n$, 则$A_i=B_i$;

(3) 把R_1和R_2作为集合看，$R_1=R_2$。

则称n元关系 R_1与m元关系R_2相等，仍然记为$R_1=R_2$。

与集合相等的区别？

例： 设$R_1 \subseteq N \times I_+$， $R_2 \subseteq I \times I$, $R_3 \subseteq I \times I$， 且

$R_1=\{<n, m> \mid n \in N, m \in I_+, \text{且} m=n+1\}$

$R_2=\{<n, n+1> \mid n \in I, \text{且} n \ge 0\}$， $R_3=\{<|n|, |n|+1> \mid n \in I\}$

作为集合看，$R_1=R_2=R_3$

作为关系看，$R_1 \ne R_2$， $R_2=R_3$

定义3 设 $R \subseteq A \times B$, 令

$$\text{dom}(R) = \{\, x \in A \mid \exists\, y \in B \text{使} <x, y> \in R \,\},$$

$$\text{ran}(R) = \{\, y \in B \mid \exists\, x \in A \text{ 使 } <x, y> \in R \,\},$$

称dom (R)为R 的定义域， ran (R)为R 的值域。

显然， $\text{dom}(R) \subseteq A$， $\text{ran}(R) \subseteq B$

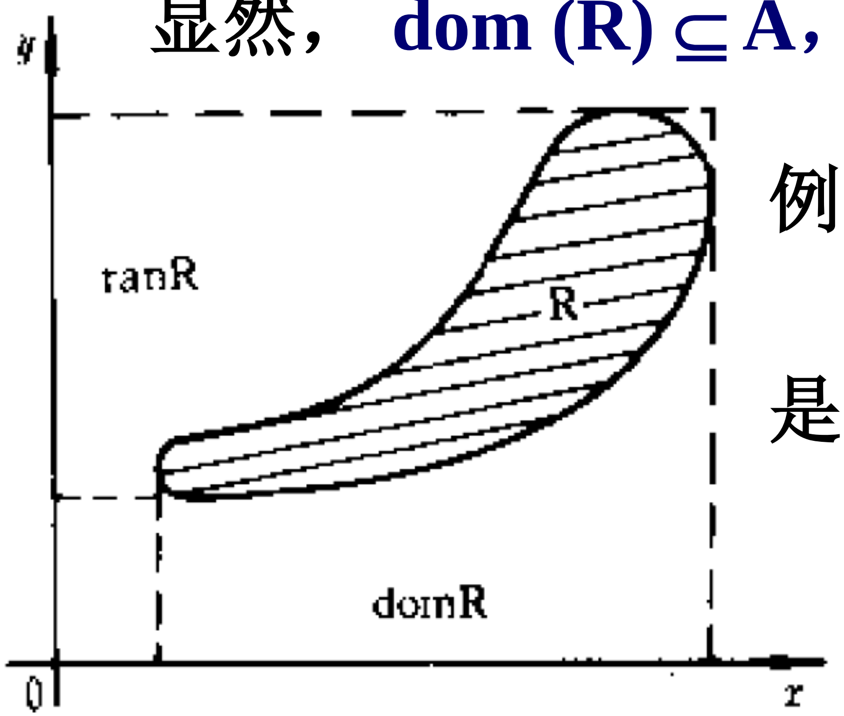


图 2.1.2 作为平面的子集的二元关系 R

例: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$

$R = \{<1, a>, <1, b>, <2, b>\}$

是 A 到 B的关系。

$\text{dom}(R)=\{1, 2\}$, $\text{ran}(R)=\{a, b\}$

关系的表示

定义3（图）设 V 和 E 是有限集合，且 $V \neq \varnothing$

i) 如果 $\Psi: E \to \{\{v_1, v_2\} \mid v_1 \in V$ 且 $v_2 \in V\}$,

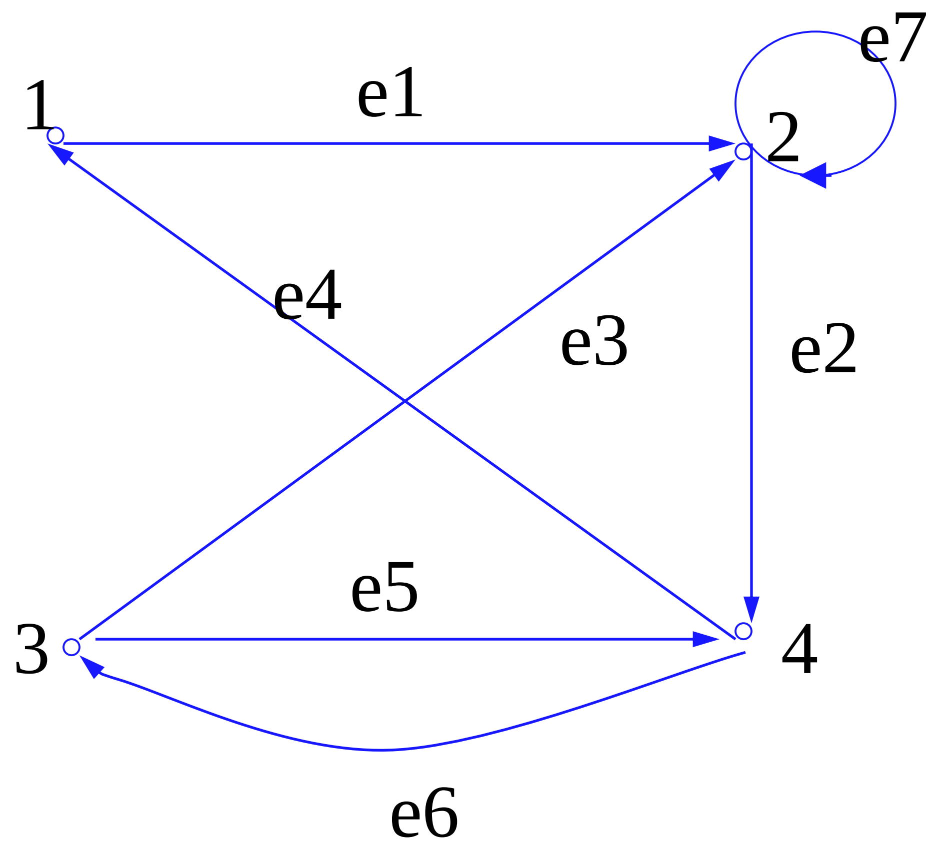
则称 $G = <V, E, \Psi>$ 为 无向图。

i) 如果 $\Psi: E \to V \times V$, 则称 $G = <V, E, \Psi>$ 为有向图。

无向图和有向图统称为图，其中

- V的元素称为图 G 的结点 (顶点),
- E 的元素称为图 G 的边,
- 图 G 的结点数目称为它的 阶。

用几何图形表示图：小圆圈表示结点；若$\Psi(e)=<v_1，v_2>$，就用一条由v_1指向v_2的有向线段 表示边。



$\Psi(e1)=<1, 2>$

关系的表示

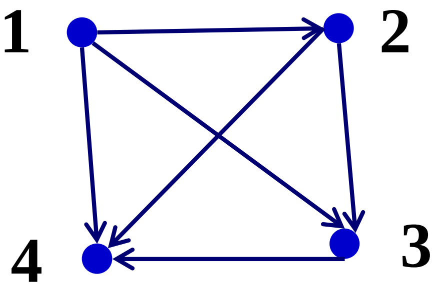
仅讨论从有限集到有限集的二元关系

定义 4 (关系图) 设A和B为任意的非空有限集，R为任意从A到B的二元关系。以A ∪B中的每个元素为一个结点，对每个<x, y> ∈R，皆画一条从x到y的有向边，就得到一个有向图G_R, 称为R的关系图

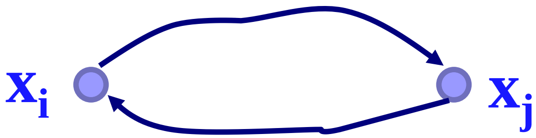
例：集合A={1, 2, 3 ,4}上的小于关系

R={<1, 2>, <1,3>, <1, 4>, <2, 3>

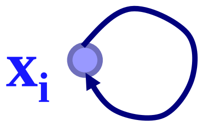
<2, 4>, <3, 4>}



- 如果 $x_i\,R\,x_j$ 且$x_j\,R\,x_i$，则在x_i 和 x_j 之间画上两条方向相反的弧线



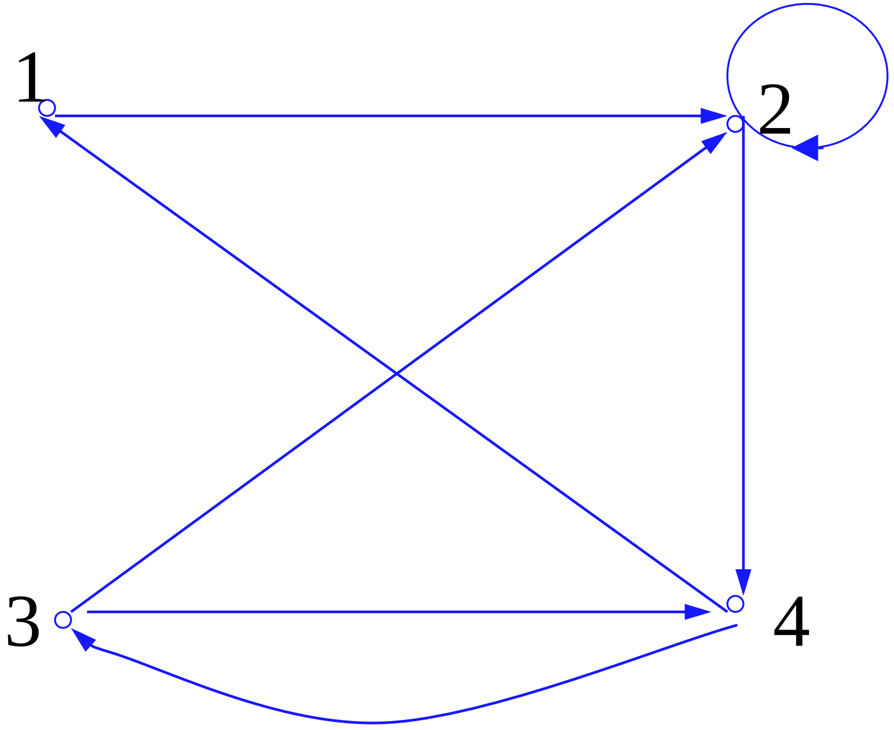
- 如果 $x_i\,R\,x_i$，则画一条从x_i 出发又返回顶点 x_i 的弧线，称这一条弧线为自环



例：设 **X = { 1 , 2 , 3 , 4 }**，**R** 是集合 **X** 上的关系,

R = { <1, 2> , <2, 2> , <2, 4> , <3, 2> , <3, 4> , <4, 1> , <4, 3> }

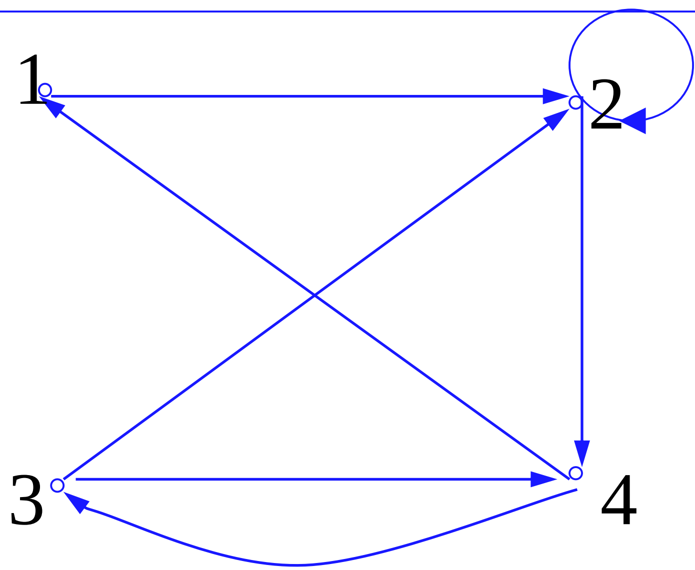
则 **R**的关系图G_R如下：



关系的表示

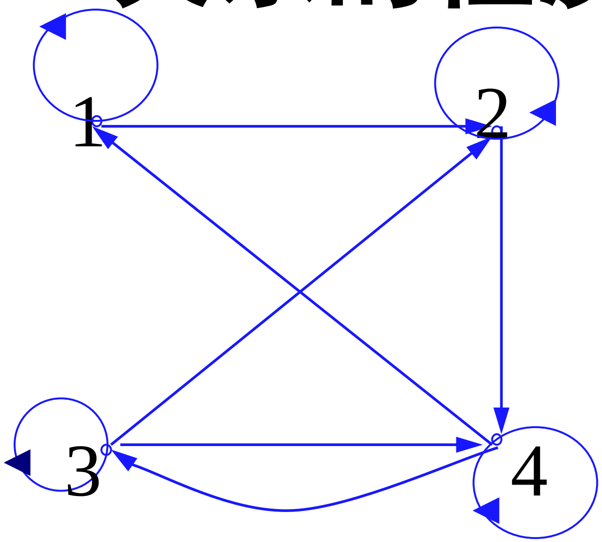
定义5 (关系矩阵)：设 $X = \{ x_1, \cdots\cdots, x_m \}$，$Y = \{ y_1, \cdots\cdots, y_n \}$，R 是 X 到 Y 的二元关系。**R 的关系矩阵**，记作 $M_R = (r_{ij})_{m\times n}$，其中

$$r_{ij} = \begin{cases} 0, \text{若} x_i \overline{R} y_j \\ 1, \text{若} x_i R y_j \end{cases}$$

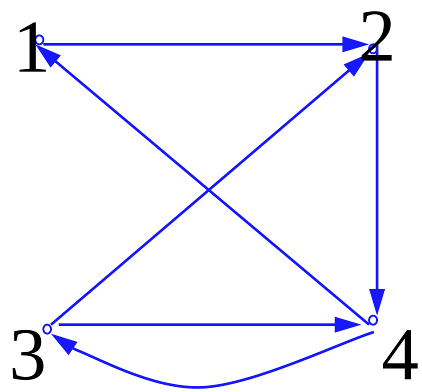


$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

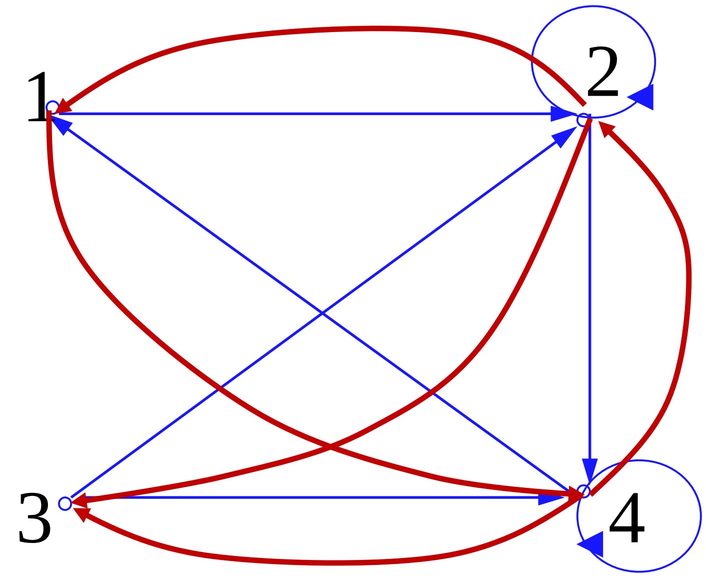
关系的性质



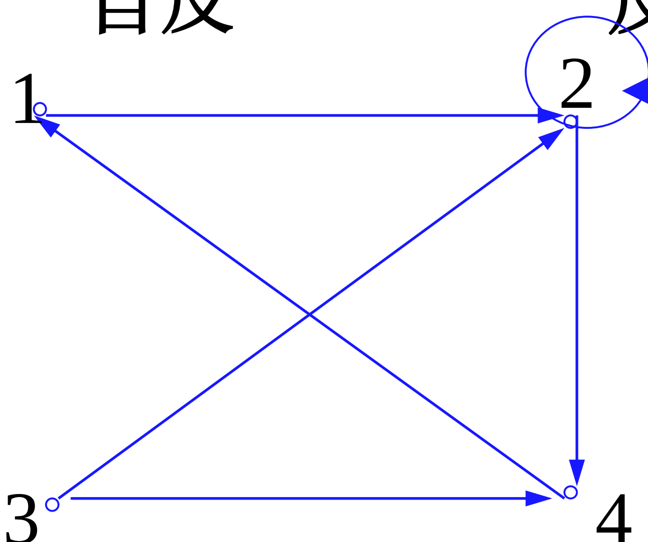
自反



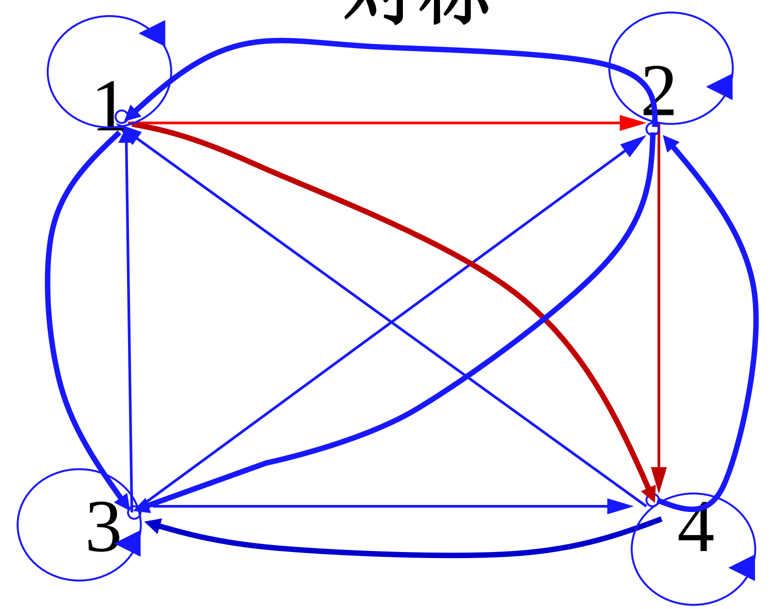
反自反



对称



反对称



传递