作业 7

习题 2.7

3.

充分性：

若$\langle a, b\rangle \in R$，由自反性<a, a>∈ R,则<b, a>∈ R 所以 R 具备对称性

若$\langle a, b\rangle$，$\langle b, c\rangle \in R$, 由对称性，有$\langle b, a\rangle$，$\langle b, c\rangle \in R$ 故<a, c>∈ R 所以 R 具备传递性。因此，R 为等价关系

必要性：

若$\langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle \in R$，由对称性<b, a>∈ R. 由传递性得$\langle b, c\rangle \in R$. 得证

5.

（a）不是，由于 R_1 有自反性，故$A^2 - R_1$没有自反性。

（c）是。由于 R_1 是等价关系，可证明${R_1}^2 = R_1$。

对任意(a, b)∈R_1, 由于 R_1 是等价关系，满足自反性，因此(a, a) ∈R_1, 从而(a, b) ∈${R_1}^2$，得 $R_1 \subseteq {R_1}^2$。对任意(a, b) ∈${R_1}^2$，一定存在 c∈A, 使得(a, c) ∈R_1 且(c, b) ∈R_1，由于 R_1 满足传递性，因此(a, b) ∈R_1，从而 ${R_1}^2 \subseteq R_1$ 。综上所述，$R_1 = {R_1}^2$，因此${R_1}^2$是 A 上的等价关系。

（e）不是。设 A={a, b, c}。R_1={<a, a>, <b, b>, <c, c>, <b, c>, <c, b>}, R_2={<a, a>, <b, b>, <c, c>, <a, b>, <b, a>}是 A 上的等价关系，$R_2 \circ R_1$={<a, a>, <b, b>, <c, c>, <a, c>}不满足对称性。

（g）是。显然 R1∪R2 满足自反性和对称性，从而 t(R1∪R2)满足自反性，对称性和传递性。

6.

（b）不是。若 $A=\{1,2,3\}$ $\Pi_2=\{\{1,2\},\{3\}\}$ 和$\Pi_1=\{\{1\},\{2,3\}\}$均是 A 的划分，但两者的交集为空集，不是划分。故不正确。

（d）是。由吸收率，原式=Π_2，所以是划分。

8.

a）已知 $A/R=\{[x]_R|x\in A\}$ 且 $[x]_R=\{y|y\in A且xRy\}$。

（充分性）

对任意的$<x, x'>\in R_1$，因为$A/R_1\leq A/R_2$，因此存在$[y]_{R_2}$，使得$[x]_{R_1}\subseteq[y]_{R_2}$，即$<y, x>, <y, x'>\in R_2$ 。由于 R_2 是等价关系，得$<x, x'>\in R_2$，因此$R_1\subseteq R_2$。

（必要性）若$R_1\subseteq R_2$，则对于每个$x,y\in A$，若$<x, y>\in R_1$,则有$<x, y>\in R_2$。因此，$[x]_{R_1}\subseteq[x]_{R_2}$，得$A/R_1\leq A/R_2$。

b）（充分性）若 $A/R_1 < A/R_2$，则由 a)知 $R_1\subseteq R_2$。

下面证明存在$<x, y>\in R_2$，但$<x, y>\notin R_1$。

由于 $A/R_1\neq A/R_2$，则存在 $S_1\in A/R_1$, $S_2\in A/R_1$，有 $S_1\subset S_2$。

设 $S_1=[x]_{R1}$，则 S_2 必为$[x]_{R2}$，因此存在 $y\in S_2$，有$<x, y>\in R_2$ 但$<x, y>\notin R_1$。

所以，得 $R_1\subset R_2$。

(必要性) 若 $R_1\subset R_2$，则由(1) 知 $A/R_1\leq A/R_2$。下面证明 $A/R_1\neq A/R_2$。

由于 $R_1\subset R_2$,则必存在$<x, y>\in R_2$,且$<x, y>\notin R_1$,得$[x]_{R1}\neq[x]_{R2}$。

又因为 $R_1 \subset R_2$，因此$[x]_{R1} \subseteq [x]_{R2}$,得$[x]_{R1} \subset [x]_{R2}$。

可证：不存在$[x']_{R1} \in A/R_1$使得$[x']_{R1}= [x]_{R2}$；否则有$[x]_{R1} \subset [x']_{R1}$，矛盾。

因此 $A/R_1 \neq A/R_2$。

作业 8

习题 3.1

2.

a) 部分函数；定义域为：$\{1, 2, 3, 4\}$，值域为：$\{<2, 3>, <3, 4>, <1, 4>\}$。

c) 不是部分函数。

5.

a) 证明：

对于任意 $y \in f[A] - f[B]$，则 $y \in f[A]$ 且 $y \notin f[B]$ 。

因为 $y \in f[A]$ ，所以存在 $x \in A$ 使得 $f(x) = y$ 。

又因为 $y \notin f[B]$，所以 $x \notin B$。（用反证法，假设 $x \in B$，则 $f(x) \in f[B]$，而 $y = f(x)$，所以 $y \in f[B]$。矛盾）

所以，$x \in A - B$ 。因此，$y = f(x) \in f[A-B]$。

于是，$f[A-B] \supseteq f[A] - f[B]$。

“=”不能代替“$\supseteq$”的反例，

令 $X = \{ x1, x2 \}$，$Y = \{ y \}$，$f = \{ <x1, y>, <x2, y> \}$。

$A = \{ x1, x2 \}$，$B = \{ x1 \}$。

则 $f[A-B] = \{y\}$，而 $f[A] - f[B] = \varnothing$。

b) 证明：

对于任意$x \in f^{-1}[C] - f^{-1}[D]$，$x \in f^{-1}[C]$且$x \notin f^{-1}[D]$，则$f(x) \in C$且$f(x) \notin D$，因此$f(x) \in C - D$，$x \in f^{-1}[C - D]$，得$f^{-1}[C] - f^{-1}[D] \subseteq f^{-1}[C - D]$。

反过来，对于任意$x \in f^{-1}[C - D]$，有$f(x) \in C - D$，得$f(x) \in C$且$f(x) \notin D$，因此$x \in f^{-1}[C] - f^{-1}[D]$，得$f^{-1}[C - D] \subseteq f^{-1}[C] - f^{-1}[D]$。

综上所述，$f^{-1}[C] - f^{-1}[D] = f^{-1}[C - D]$

6.

a) f = { <<-1, -1>, 0>, <<-1, 0>, -1>, <<-1, 1>, -2>, <<0, -1>, 1>, <<0, 0>, 0>, <<0, 1>, -1>, <<1, -1>, 2>, <<1, 0>, 1>, <<1, 1>, 0> }。

b) ran f = {-2, -1, 0, 1, 2} ;

c) $f\restriction_{\{0,1\}^2}$= { <<0, 0>, 0>, <<0, 1>, -1>, <<1, 0>, 1>, <<1, 1>, 0> } ;

d) 参见第 7 题 b)答案，见课件。

作业 9-函数

习题 3.2

2．解：

$f \circ f = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$ (x≠ 0),定义域为$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$,值域为$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

$h \circ g = \sqrt{x^2} = |x|$,定义域为$(-\infty, \infty)$,值域为$[0, \infty)$

$g \circ h = (\sqrt{x})^2 = x$ (x≥ 0), 定义域为$[0, \infty)$,值域为$[0, \infty)$

3.解：

b) i)f 是内射，不是满射，不是双射

ii)$\{< x, x + 1 > | x \in N\}$

iii)$f^{-1}[s]=\emptyset$

d) i) f 不是内射，是满射，不是双射

ii)值域为 N

iii) $f^{-1}[s]=\{-1,0,1\}$

f) i) f 是内射，不是满射，不是双射

ii)值域为(0,1]

iii)$f^{-1}[s]=\{1\}$

g) i) f 是内射，不是满射，不是双射

ii)值域为 $\{xa | x \in \{a, b\}^*\}$

iii)$f^{-1}[s]=\{b\}$

8.解：

b) 由于 $f\circ f=I_A$ 为双射，因此 f 也是双射。

设 f 是 A 上的函数，且 $f\circ f=I_A$，则对任意的 $a\in X$，有 $f^2(a)=a$，且若 $f(a)=b\neq a$，有 $f^2(a)=f(b)=a$，即有<a, b>与<b, a>同时属于 f。

反过来，假设 f 是 A 上的函数，满足对任意的 $a\in X$，若 $f(a)=b$，则必有 $f(b)=a$，则 $f^2(a)=f(f(a))=f(b)=a$，即 $f^2=I_A$。

因此，f 是 A 上的函数且满足 $f\circ f=I_A$ 当且仅当对任意的 $a\in X$，若 $f(a)=b$，则必有 $f(b)=a$。

因此，f 中的未对应到自身的二元序偶个数必为偶数个,即当 n 为偶数（奇数）时，对应到自身的二元序偶数只能为偶数（奇数）

当 n 为偶数时,有$\sum_{k=0}^{n/2} C_n^{2k}(n-2k-1)(n-2k-3)\cdots 1$个

当 n 为奇数时，有$\sum_{k=0}^{(n-1)/2} C_n^{2k+1}(n-2k-2)(n-2k-4)\cdots 1$个

c）由于 $f\circ f\circ f=I_A$，所以 f 为双射。

设 f 是 A 上的函数，且 $f\circ f\circ f=I_A$，则对任意的 $a\in X$，有 $f^3(a)=a$，且若 $f(a)=b\neq a$，有 $f^3(a)=f^2(b)=a$。

- 假设 $f(b)=a$，则 $f^2(b)=f(a)=a$，矛盾，因此 $f(b)\neq a$。
- 假设 $f(b)=b$，则 $f^2(b)=f(b)=a$，矛盾，因此 $f(b)\neq b$。
- 故只可能有 $f(b)=c$，且 a, b, c 互不相等。

因此，f 的未应到自身的二元序偶个数必为 3 的倍数。得满足 $f\circ f\circ f=I^A$ 的函数个数为：

当$n=3k'$时：

有$\sum_{k=0}^{n/3} C_n^{3k}((n-3k-1)(n-3k-2)\cdots 1)\cdots(2*1*1)$个

当$n=3k'+1$时：

有$\sum_{k=0}^{(n-1)/3} C_n^{3k+1}((n-3k-2)(n-3k-3)\cdots 1)\cdots(2*1*1)$个

当$n=3k'+2$时：

有$\sum_{k=0}^{(n-2)/3} C_n^{3k+2}((n-3k-3)(n-3k-4)\cdots 1)\cdots(2*1*1)$个

9.解：

a) 由于$g\circ f$为满射，故g为满射，又因为g为内射，故g为双射。

假设f不为满射，则存在$y\in Y$，使得$y\notin ran(f)$。

而由于g为双射，且由于$g\circ f$为满射，故$ran(f)=Y$

故矛盾，假设不成立，所以f为满射。

b) 因为 g o f 为内射，所以 f 为内射。而 f 又是满射，所以 f 为双射。

对任意的 y1, y2 ∈ Y 且 y1 ≠ y2，因为 f 为双射，因此存在 x1, x2 ∈ X 且 x1 ≠ x2，使得 y1=f(x1), y2=f(x2)。又因为 g o f 为内射，因此 g o f(x1) ≠g o f(x2)，即 g(y1) ≠g(y2)。

因此，g 是内射。

作业 10-函数

习题 3.3

1．解:

a) $g(x)=\begin{cases} log_2 x, x\in(0,\infty) \\ 1, x\in(-\infty,0] \end{cases}$

b) $g(<a,b>)=a, a\in N, b\in N$

c) $g(n)=\frac{n-1}{2}, n\in N$

d) $g(x)=x, x\in N$

e) $g(x)=2x-\frac{1}{2}, x\in[0,1]$

f)$g\ (x)=\begin{cases} \frac{1}{x}-1, x\in(0,1] \\ 0, x\in(-\infty,0]\cup(1,\infty) \end{cases}$

g) $g(x)=x_1x_2{\dots}x_{n-1}\left(n为x的长度\right), x\in\{a,b\}^*$

h) $g(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}, x\in[1,\infty) \\ \frac{1}{2},\ x\in(0,1) \end{cases}$

3.b) 满足题意的函数为 $l(x)=\left\lfloor\frac{x+1}{3}\right\rfloor$

4. f左可逆，但g不一定左可逆。

因为$g\circ f$左可逆，则$g\circ f$为内射，所以f为内射。

g不一定左可逆，反例如下:

$A=\{a\}$， $B=\{b_1,b_2\}$， $C=\{c\}$

$f=\{<a,b_1>\}$，$g=\{<b_1,c>,<b_2,c>\}$，$g\circ f=\{<a,c>$

$\}$。

所以，$g\circ f$是内射，即是左可逆的；但g不是内射，即不是左可逆的。

习题 3.4

2．解

b) A = B

$$X_{A\oplus B}=X_{(A-B)\cup(B-A)}=X_{A-B}+X_{B-A}-X_{(A-B)\cap(B-A)}$$

$$=(X_A-X_A*X_B)+(X_B-X_A*X_B)-X_\emptyset$$

$$=X_A+X_B-2X_AX_B$$

$$=X_{A\cup B}-X_{A\cap B}$$

因为$X_{A\oplus B}=X_\emptyset=0$

所以$X_{A\cup B}-X_{A\cap B}=0$

所以$X_{A\cup B}=X_{A\cap B}$

所以$A\cup B=A\cap B$

所以$A=B.$

d) A = B

因为$X_{A\cup B}=X_{A\cap B}$

所以$X_A+X_B-X_AX_B=X_AX_B$

所以$(X_A-X_B)^2=0$

所以 $X_A=X_B$

所以$A=B$