定义3.1 (部分函数) 如果从集合 X 到 Y 的二元关系 f 是 “ 单值 ”的，即 f 满足以下条件：

若 $<x, y_1> \in f$ 且 $<x, y_2> \in f$，则 $y_1 = y_2$,

就称 f 为从 X 到 Y 的部分函数。

定义3.2 设 f 为从集合 X 到集合 Y 的 部分函数。

1) 若 dom (f) = X，则称 f 为从 X 到 Y 的全函数，简称 f 为从 X 到 Y 的函数，记为 $f: X \to Y$。

2) 若 dom (f) $\subset$ X，则称 f 为从 X 到 Y 的严格部分函数。

3) 若 ran (f) = Y，则称 f 为从 X 到 Y 上的部分函数。

4) 若 ran (f) $\subset$ Y，则称 f 为从 X 到 Y 内的部分函数。

5) 若对任意的 x_1，$x_2 \in$ dom (f) ,

当 $x_1 \neq x_2$ 时，皆有 $f(x_1) \neq f(x_2)$，

则称 f 为从 X 到 Y 的 1 - 1 部分函数。

(即：当 $f(x_1) = f(x_2)$ 时，皆有 $x_1 = x_2$)

定义7.3(函数 f 的限制)：设函数$f: X\rightarrow Y$，$A\subseteq X$，则 $f\cap(A\times Y)$ 是从 A 到 Y 的函数，称为 f 在A上的限制，记作 $f|_A$，又称 f 为 $f|_A$ 到 X 的延拓。$f|_A$ 可表示为：

$$f|_A = \{\langle x, y\rangle \mid \langle x, y\rangle \in f \wedge x \in A\}$$

定义. 设A和B为任意两个集合，记A到B的全函数的集合为B^A： $B^A = \{f \mid f: A\rightarrow B\}$。

例： 设 $X=\{a, b, c\}$， $Y=\{0, 1\}$，

$X\times Y=\{\langle a, 0\rangle,\langle b, 0\rangle,\langle c, 0\rangle,\langle a, 1\rangle,\langle b, 1\rangle,\langle c, 1\rangle\}$，

并且$X\times Y$有 2^6个可能的子集

然而只有如下2^3个子集定义了从X到Y的全函数：

$f_0=\{\langle a, 0\rangle,\langle b, 0\rangle,\langle c, 0\rangle\}$

$f_1=\{\langle a, 0\rangle,\langle b, 0\rangle,\langle c, 1\rangle\}$

$f_2=\{\langle a, 0\rangle,\langle b, 1\rangle,\langle c, 0\rangle\}$

$f_3=\{\langle a, 0\rangle,\langle b, 1\rangle,\langle c, 1\rangle\}$

$f_4=\{\langle a, 1\rangle,\langle b, 0\rangle,\langle c, 0\rangle\}$

$f_5=\{\langle a, 1\rangle,\langle b, 0\rangle,\langle c, 1\rangle\}$

$f_6=\{\langle a, 1\rangle,\langle b, 1\rangle,\langle c, 0\rangle\}$

$f_7=\{\langle a, 1\rangle,\langle b, 1\rangle,\langle c, 1\rangle\}$

从X到Y的每个全函数恰有$|X|$ 个有序偶，X中的每一个x 的函数值可有$|Y|$种不同的取法，故从X到Y的函数个数为 $|Y^X| = |Y|^{|X|}$ 。

例：设A和B为有限集，n(A)=m, 且n(B)=p。

(1) 有多少个从A到B的1-1函数？

(2) 有多少个从A到B上的函数？

例：(1) 显然，当m>p时，不存在从A到B的1-1函数。

当$m \leq p$时，从A到B的1-1函数个数为从B中选m个元素构成的排列个数，即

$$P_p^m = \frac{p!}{(p-m)!}$$

(2) 当$m < p$时，不存在从A到B上的函数；

当$p = 0$且$m \neq 0$，0个；$p = 0$且$m = 0$，1个；

当 $m \geq p \geq 1$时，从A到B上的一个函数对应集合A的一个包含p个子集的划分，而一个划分对应p!个函数

因此从A到B上的函数个数等于s(m, p) p!其中，集合A的包含p个子集的划分个数。

3.2　函数的合成

重点：

- 函数的合成（复合）运算

定义（关系的合成）设 R 是 X 到 Y 的关系， S 是Y 到 Z的关系，则

$$R \circ S = \{<x, z> \mid \exists y \in Y (<x, y> \in R \wedge < y, z> \in S) \}$$

为 X 到 Z 的关系，称为 R 和 S 的合成关系。

定理 (部分函数的合成) 设 f 为从 X 到 Y 的部分函数，g 为从 Y 到 Z 的部分函数， 则复合关系 $f \circ g$ 为从 X 到 Z 的部分函数。

证明：若$<x, z_1>, <x, z_2> \in f \circ g$，则有 $y_1, y_2 \in Y$ 使 $<x, y_1>, <x, y_2> \in f$ 且$<y_1, z_1>$，$<y_2, z_2> \in g$ 。

因为 f，g是部分函数，所以 $y_1 = y_2$ 且$z_1 = z_2$，

因此$f \circ g$ 是一个从 X 到 Z 的部分函数。

定义. 设 f 为从X到Y的部分函数，g为从Y到Z的部分函数, 则称复合关系 $f \circ g$ 为 f 与 g 的合成（复合）函数，用 $g \circ f$ 表示，即

$g \circ f=\{<x, z> \mid x \in X \wedge z \in Z \wedge \exists y\,(\,y \in Y \wedge y = f(x) \wedge z = g(y)\,)\,\}$

- 合成函数 $g \circ f$ 与合成关系 $f \circ g$ 表示同一个集合。

这种表示上的差异是历史形成的，具有其方便之处：

- $(\,g \circ f\,)\,(x) = g\,(\,f\,(x)\,)$
- 当 $<x, z> \in f \circ g$ 时，必有 $y \in Y$ 使 $<x, y> \in f$ 且 $<y, z> \in g$

定理：设 f 为从 X 到 Y 的部分函数，g 为从 Y 到 Z 的部分函数，
则 (1) $dom(g \circ f) = f^{-1}[dom\ g]$ 且 $ran(g \circ f) = g[ran\ f]$。
(2) 若 f 和 g 都是全函数，则 $g \circ f$ 也是全函数。

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

证明：(1) 若 $x \in dom(g \circ f)$，则有 $z \in Z$ 使 $<x, z> \in g \circ f$，因此，
必有 $y \in Y$ 使 $<x, y> \in f$ 且 $<y, z> \in g$。
但由 $<y, z> \in g$ 可知 $y \in dom\ g$，由 $<x, y> \in f$ 即得 $x \in f^{-1}[dom\ g]$。
另一方面，若 $x \in f^{-1}[dom\ g]$，则有 $y \in dom\ g$ 使 $<x, y> \in f$。
但由 $y \in dom\ g$ 知有 $z \in Z$ 使 $<y, z> \in g$，故 $<x, z> \in g \circ f$，
这表明 $x \in dom(g \circ f)$。
同理可证： $ran(g \circ f) = g[ran\ f]$。
(2)若 f 和 g 都是全函数，则 $f^{-1}[Y] = X$ 且 $dom\ g = Y$，
因此 $dom(g \circ f) = f^{-1}[dom\ g] = f^{-1}[Y] = X$。
这表明 $g \circ f$ 也是全函数。

例. 设 $X = \{ 1, 2, 3 \}$, f, g, h 是从 X 到 X 的函数，它们分别定义为:

$f = \{ <1, 2>, <2, 3>, <3, 1> \}$

$g = \{ <1, 2>, <2, 1>, <3, 3> \}$

$h = \{ <1, 1>, <2, 2>, <3, 1> \}$

求复合函数 $f \circ g$，$g \circ f$，$f \circ g \circ h$

解: $f \circ g = \{ <1, 3>, <2, 2>, <3, 1> \}$

$g \circ f = \{ <1, 1>, <2, 3>, <3, 2> \}$

$f \circ g \circ h = \{ <1, 3>, <2, 2>, <3, 3> \}$

例. 设对于 $x \in R$，$f(x) = x+2$，$g(x) = x-2$，$h(x) = 3x$，R 是实数集合。求 $g \circ f$，$f \circ g$，$f \circ f$，$g \circ g$，$f \circ h$，$h \circ g$，$h \circ f$，$(f \circ h) \circ g$，$f \circ (h \circ g)$。

解

$g \circ f = \{ <x , x> \mid x \in R \}$

$f \circ g = \{ <x , x> \mid x \in R \} = g \circ f$

$f \circ f = \{ <x , x+4> \mid x \in R \}$

$g \circ g = \{ <x , x-4> \mid x \in R \}$

$f \circ h = \{ <x , 3x+2> \mid x \in R \}$

$h \circ g = \{ <x , 3x-6> \mid x \in R \}$

$h \circ f = \{ <x , 3x+6> \mid x \in R \}$

$(f \circ h) \circ g = \{ < x, 3x-4 > \mid x \in R \}$

$f \circ (h \circ g) = \{ < x, 3x-4 > \mid x \in R \} = f \circ (h \circ g)$

例 设 $f: N \to N$，$g: N \to N$，且 $g(x) = 2x$,

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & x\text{是偶数} \\ 0 & x\text{是奇数} \end{cases}$$

求：$f \circ g$，$g \circ f$

解：(1) $f \circ g: N \to N$, $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x) = x$,

(2) $g \circ f: N \to N$

若 x 是 偶数：$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x/2) = x$

若 x 是 奇数：$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(0) = 0$

所以，$(g \circ f)(x) = \begin{cases} x & \text{当 } x\text{是偶数} \\ 0 & \text{当 } x\text{是奇数} \end{cases}$

函数复合运算的性质：

恒等函数： 集合 X上的恒等关系 $I_X = \{<x, x>| x \in X \}$ 为 X 到 X 的恒等函数。

定理: 函数 $f : X \rightarrow Y$， I_X 和 I_Y 是恒等函数，则

$$f \circ I_X = I_Y \circ f = f$$

证明: 对任意$x, y \in X$, 有 $< x, x > \in I_X$， 且 $< y , y > \in I_Y$,

$$\text{所以} < x, y > \in f \Leftrightarrow < x, x > \in I_X \wedge < x, y > \in f$$

$$\Leftrightarrow < x, y > \in f \circ I_X$$

$$\text{又} \quad < x, y > \in f \Leftrightarrow < x, y > \in f \wedge < y , y > \in I_Y$$

$$\Leftrightarrow < x , y > \in I_Y \circ f$$

定理: 若f是X到Y的部分函数，g是 Y到Z的部分函数，h是Z到W的部分函数，则 $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$

证明：由题设，$h\circ g$，$g\circ f$，$h\circ(g\circ f)$，$(h\circ g)\circ f$ 均有定义，又因为f, g, h是关系，由关系的复合运算满足结合律，可知上式成立。

定义：若函数 $f: X\to X$，则 f 的 n 次幂，记为 f^n，可归纳定义如下:

1) $f^0 = I_X$

2) $f^{n+1} = f\circ f^n$

即：1) $f^0(a) = I_X(a) = a$；

2) $f^{n+1}(a) = f(f^n(a))$

定义: 若f: X → Y，

(1) 若ran f = Y, 则称f为满射；

即 $\forall y\,(y \in Y \rightarrow \exists x\,(x \in X \wedge f(x) = y))$

(2) 若f是1-1的，则称f是内射；

即 $\forall x_1 \forall x_2 (x_1 \in X \wedge x_2 \in X \wedge f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2)$

$\forall x_1 \forall x_2 (x_1 \in X \wedge x_2 \in X \wedge x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$

(3) 若f既是满射，又是内射，则称f为双射。

例：若R为集合A上的等价关系，则$\varphi = \{ \langle x, [x]_R \rangle \mid x \in A \}$是从A到A/R 的满射，并称φ 为自然映射或正则映射。

例: (1) 有限集 X 上 的 满射 必为 单射;
(2) 有限集 X 上 的 内射 必为 满射。

例: 下列函数是否为满射，内射和双射？

(1) $f: \{1, 2\} \rightarrow \{0\}$

由于 f 的值域是单元素集，显然 $f(1) = f(2) = 0$。

函数f是满射，而不是单射的。

(2) $f: \{a, b\} \rightarrow \{2, 4, 6\}$， $f(a) = 2$， $f(b) = 6$

f 是单射，而不是满射。

(3) $f: N \rightarrow N$， $f(x) = 2x$

因 f 的值域是偶整数集，并且 若 $x_1 \neq x_2$，则 $f(x_1) \neq f(x_2)$，

所以，函数 f 是单射，而不是满射。

(4) $f: I \rightarrow I$， $f(x) = x+1$ $f: N \rightarrow N$， $f(x) = x+1$??

因为若 $x_1 \neq x_2$，则 $f(x_1) \neq f(x_2)$，并且对任意 $y \in I$，都存在 $x = y-1 \in I$，使得 $y = f(x)$，故函数 f 是双射。

例: 设 [a, b] 表示实数闭区间，a<b，即

$$[a, b] = \{ x \mid a \le x \le b \}.$$

令 $f: [0, 1] \rightarrow [a, b]$ 为： $f(x) = (b - a)x + a$ 。

判断f是否为满射，内射和双射？

解：若 $x_1 \neq x_2$，则有

$(b-a)x_1 + a-((b-a)x_2+a)=(b-a)(x_1-x_2) \neq 0$, 即 $f(x_1) \neq f(x_2)$,

因此 f是内射。

对任意 $y \in [a, b]$ 都有 $x = (y-a)/(b-a) \in [0, 1]$,使得

$y = f(x)$，故函数 f 是满射。

因此 函数 f 是双射。

定理: 设f: X→ Y和g: Y→Z，则

(1) 若f和g都是满射，则 $g\circ f$ 也是满射。

(2) 若f和g都是内射，则 $g\circ f$ 也是内射

(3) 若f和g都是双射，则 $g\circ f$ 也是双射

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

解: (1) 因为f和g都是满射，因此ran(f)=Y, ran(g)=Z。

得 $ran(g\circ f) = g(ran(f)) = g(Y)=Z$. 因此 $g\circ f$ 是满射

(2)若 $x_1, x_2 \in X$ 且 $x_1 \neq x_2$，因为 f 单射，因此 $f(x_1) \neq f(x_2)$。

又因为 g 单射，得 $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$

即 $(g\circ f)(x_1) \neq (g\circ f)(x_2)$

故 $g\circ f$ 为单射

定理　设 $f: X \to Y$ 和 $g: Y \to Z$

1) 若 $g \circ f$ 是满射，则 g 是满射；

2) 若 $g \circ f$ 是单射，则 f 是单射；

3) 若 $g \circ f$ 是双射，则 g 是满射且 f 是单射。

规则：左满　右单

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

证明: (1)　只需证明 $\operatorname{ran} g = Z$。显然　$\operatorname{ran} g \subseteq Z$。

由　$\operatorname{ran} f \subseteq Y$ 可知：　$g[\operatorname{ran} f] \subseteq g[Y] = \operatorname{ran} g$

而　$g[\operatorname{ran} f] = \operatorname{ran}(g \circ f)$ 且　$\operatorname{ran}(g \circ f) = Z$

($g \circ f$ 满射)

所以：　$Z \subseteq \operatorname{ran} g$

因此：　$Z = \operatorname{ran} g$，　即 g 为满射。

定理　设 $f: X \to Y$ 和 $g: Y \to Z$

1) 若 $g \circ f$ 是满射，则 g 是满射；

2) 若 $g \circ f$ 是单射，则 f 是单射；

3) 若 $g \circ f$ 是双射，则 g 是满射且 f 是单射。

规则：左满　右单

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

(2) 反证法：

假设 f 不是单射，则有 $x_1, x_2 \in X$ 且 $x_1 \neq x_2$ 使

$$f(x_1) = f(x_2),$$

因此 $(g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2)$，

这与 $g \circ f$ 为单射矛盾。

所以假设不成立，即 f 为单射。

例:对于下面的函数 f，确定

(1) f是否为内射、满射和双射；(2) f的值域；(3) $f^{-1}[s]$

(a) $f:R\to R$ 内射

$f(x)=2^x$ $\mathrm{ran}(f)=R_+$

$s=\{1\}$ $f^{-1}[s]=\{0\}$

(b) $f:N\to N$ 内射

$f(n)=2n+1$ $\mathrm{ran}(f)=$奇自然数

$s=\{2,3\}$ $f^{-1}[s]=\{1\}$

(c) $f:[0,1]\to[0,1]$ 内射

$f(x)=x/2+1/4$ $\mathrm{ran}(f)=[1/4, 3/4]$

$s=[0,1/2]$ $f^{-1}[s]= [0, 1/2]$