第7章 图论

7-5 图的矩阵表示

北航计算机学院：李建欣

Tel：82339274（G506）

E-mail：lijx@buaa.edu.cn

http://act.buaa.edu.cn/lijx

主要内容

1. 图论的基本概念
2. 子图和图的运算
3. 路径、回路和连通图
4. 欧拉图和哈密顿图
5. 图的矩阵表示
6. 树、有向树和有序树

§ 7.5　图的矩阵表示

图的矩阵表示

目的：图的各种矩阵表示及性质、图的各种表示之间的关联性质；

重点：图的各种矩阵表示、各种表示之间的关联性质；

难点：图的各种表示之间的关联性质。

图的表示法：

- 抽象数学系统: 适于对图进行理论分析，但不直观
- 图解表示法: 直观，但不适用于进行严格的论证
- 矩阵表示法: 便于用计算机存储和处理

可以利用矩阵代数的运算便于求图的路径、回路以及其它性质

为了用矩阵表示图，首先需要对图的结点和边分别编号，即为它们规定某种顺序。在本节中 约定，事先已为图的结点和边规定好了某种顺序。

邻接矩阵

设 n 阶图 G 的结点集为 $\{ v_1, v_2, \ldots ,v_n \}$ ，

定义 G 的邻接矩阵 X (G) 为 $n\times n$ 矩阵 (x_{ij})，其中,

x_{ij} 为分别以 v_i 和 v_j 为起点和终点的边的数目。

邻接矩阵

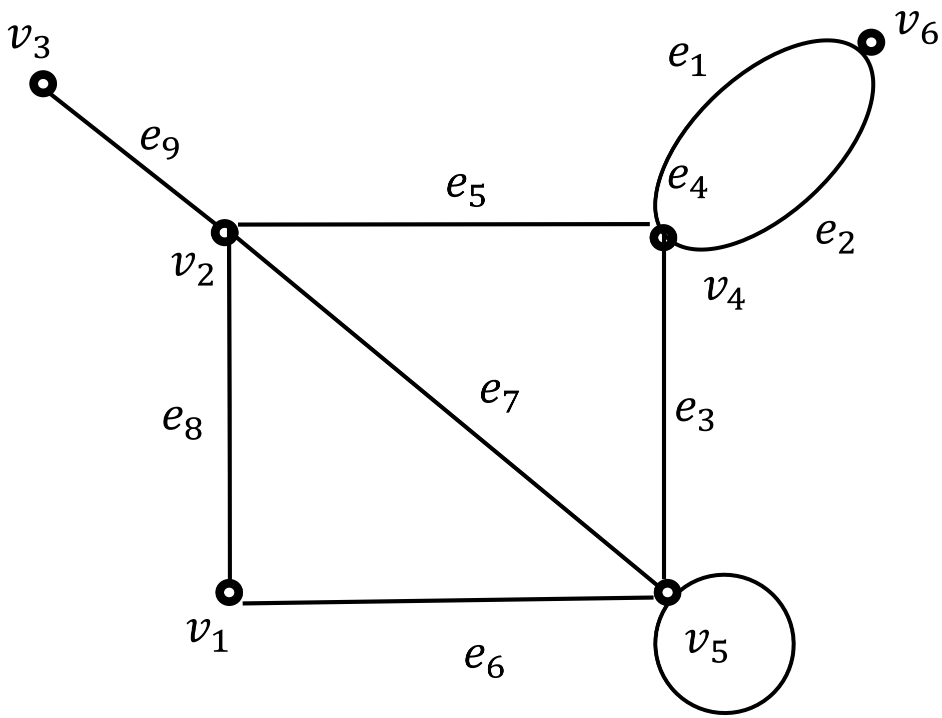
i) 如果G_1和G_2是两个同构的图，则首先交换 $X(G_1)$的一些行，然后交换相应的列，就可由$X(G_1)$得到$X(G_2)$；

ii) 对于结点的不同排列顺序，可以得到同一个图的不同邻接矩阵；

iii) 对于同构的图不加区别。

因此，不关心矩阵中结点和边的顺序是合理的。

例子：邻接矩阵



$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Q&A：n阶图G和X(G)之间的联系

1. 无向图G的邻接矩阵 X(G) 是对称的\非对称。
2. 图G没有平行边 iff X(G)的元素都是？
3. 图G有自圈 iff X(G)的对角线有？
4. 图G是简单图 iff X(G)的元素都是？，并且对角线元素都为？ 。
5. 图G是零图 iff X(G)是？矩阵 (即所有元素都是？的矩阵)。
6. 若图G是无向图，$d_G(v_i) = ?$ 。
7. 若图G是有向图，$d_G^+(v_i) =$ ， $d_G^-(v_i) =$ ，

   $d_G(v_i) =$ 。
8. 无向图(有向图) G 有 k 个分支 (弱分支) G_1，G_2，…，G_k iff

   顺序排列 G_1，G_2，…，G_k 的结点可使

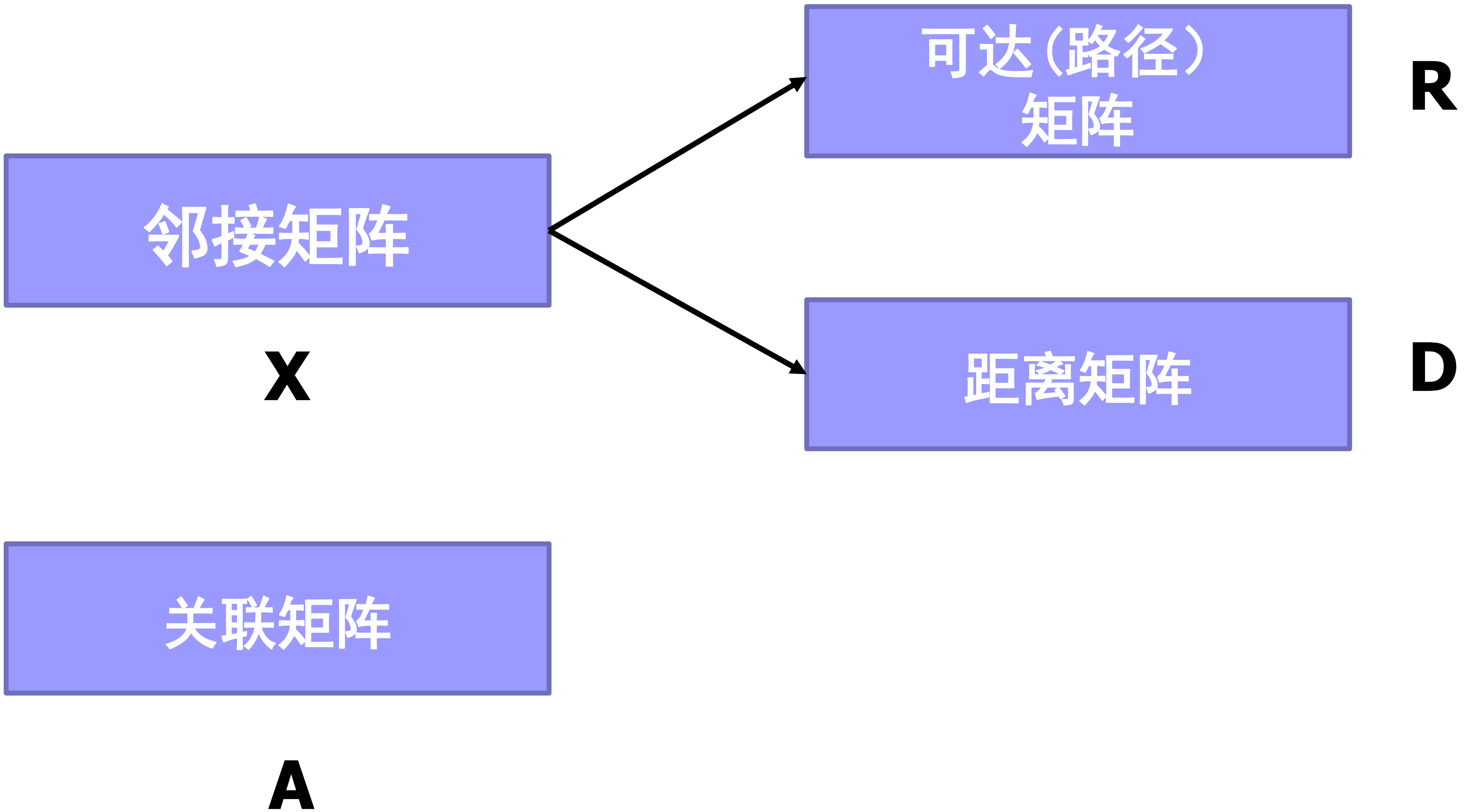
$$X(G) = \begin{bmatrix} X(G_1) & & & \\ & X(G_2) & & \\ & & \Lambda & \\ & & & X(G_k) \end{bmatrix}$$

n阶图G和X(G)之间的联系

1. 无向图G的邻接矩阵 X(G) 是对称的。
2. 图G没有平行边　iff　X(G)的元素都是0和1。
3. 图G有自圈　　　　iff　X(G)的对角线有非0元素。
4. 图G是简单图　　　iff　X(G)的元素都是0和1，并且对角线元素都为0。
5. 图G是零图　　　　iff　X(G)是零矩阵 (即所有元素都是0的矩阵)。
6. 若图G是无向图，$d_G(v_i) = x_{ii} + \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$　　(i = 1, 2, … , n)。
7. 若图G是有向图，$d_G^+(v_i) = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$，$d_G^-(v_i) = \sum_{j=1}^{n} x_{ji}$，
   $d_G(v_i) = \sum_{j=1}^{n} (x_{ij} + x_{ji})$　　(i = 1, 2, … , n)。
8. 无向图(有向图) G 有 k 个分支 (弱分支) G_1, G_2, … , G_k　iff
   顺序排列 G_1, G_2, … , G_k 的结点可使

$$X(G) = \begin{bmatrix} X(G_1) & & & \\ & X(G_2) & & \\ & & \Lambda & \\ & & & X(G_k) \end{bmatrix}$$

主要知识点



对于矩阵 X，$m \in N$，令 $x_{ij}^{(m)}$ 表示 X^m 的第 i 行第 j 列元素。

在 X(G) 中，若 $x_{ij} = r$，则说明：

从 v_i 至 v_j 存在 r 条长度为 1 的路径。

该结果可推广到 X 的任意正整数次幂 X^m，其中：

$$X^0 = I_n, \quad X^{m+1} = X^m * X$$

定理7.5.1

设 $m \in I_+$，n 阶图G的 $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$，若 X 是G的邻接矩阵且 $1 \le i, j \le n$，则 $x_{ij}^{(m)}$ 等于 G 中从 v_i 至 v_j 的长度为 m 的路径数。

证明：对 m 用第一归纳法：

i) 当 m =1 时，定理显然成立。

ii) 假设当 m = k (k ≥1) 时，定理成立。

当 m = k +1时，根据归纳假设，若 $1 \le l \le n$，则

$x_{il}^{(k)}$ 等于 G 中从 v_i 至 v_l 长度为 k 的路径数，

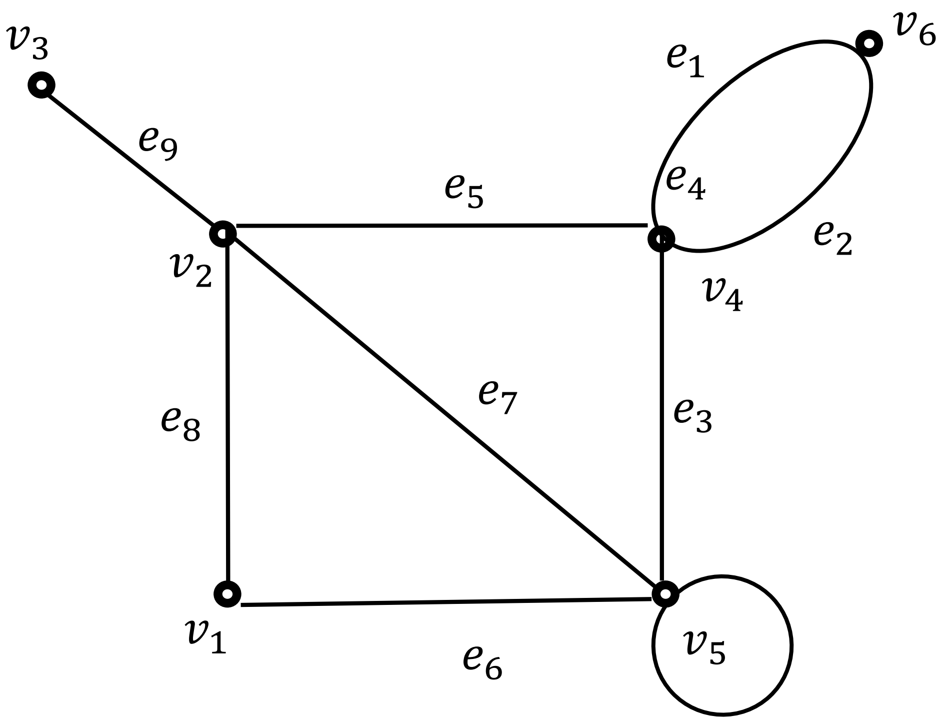
x_{lj} 等于从 v_l 至 v_j 长度为 1 的路径数，

因此，

$x_{il}^{(k)} * x_{lj}$ 等于从 v_i 至 v_j 长度为 k+1 且倒数第二个结点为v_l 的路径数,

所以

$x_{ij}^{(k+1)} = \sum_{l=1}^{n} x_{il}^{(k)} * x_{lj}$ 即为 G 中从 v_i 至 v_j 长度为 k+1 的路径数。



$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X^3 = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 3 & 7 & 4 \\ 7 & 5 & 4 & 11 & 9 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 11 & 1 & 3 & 11 & 12 \\ 7 & 9 & 3 & 11 & 11 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 12 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

路径矩阵、可达性矩阵

设 n 阶图 G 的全部结点为 v_1，v_2，…，v_n，定义图G的路径矩阵为 n×n 矩阵 P =（p_{ij}），其中♡

$$p_{ij}=\begin{cases}1 & \text{从}v_i\text{可达}v_j\\ 0 & \text{从}v_i\text{不可达}v_j\end{cases}$$

路径矩阵也称为可达性矩阵。

由邻接矩阵求路径矩阵

1° p_{ij} = 1 iff 从 v_i 可达 v_j

iff 存在从 v_i 到 v_j 的路径

iff 存在从 v_i 到 v_j 的基本路径（定理7.3.3）

iff 存在从 v_i 到 v_j 长度小于 n 的路径（定理7.3.2）

2° 去掉自圈和平行边不会改变结点间的可达性。

定理7. 5. 2

设 X 和 P 分别是 n 阶简单图 G 的邻接矩阵和路径矩阵，

记 $X^{(0)} = I_n$（ I_n 是 n 阶单位矩阵)。

$X^{k+1} = X^{(k)} \otimes X$（$k = 0, 1, 2, \ldots, n$），

则

$$P = \sum_{k=0}^{n-1} X^{(k)}$$

。

其中，$\otimes$ 的定义参见 P143 。

距离矩阵

设 n 阶图 G 的全部结点为 v_1，v_2，…，v_n，

称 $n \times n$ 矩阵 $D = (d_{ij})$ 为 G 的 **距离矩阵**，其中：

d_{ij} 为从 v_i 至 v_j 的距离。

由图的邻接矩阵可以求得它的距离矩阵。

定理7. 5. 3

设 $D = (d_{ij})$ 和 $X = (x_{ij})$ 分别是 n 阶图 G 的距离矩阵和邻接矩阵，则

$$d_{ij} = \begin{cases} \infty & \text{若} \quad (\forall m)(m \in N \wedge m < n \to x_{ij}^{(m)} = 0) \\ \min\{k \mid 0 \le k < n \wedge x_{ij}^{\{k\}} > 0\} & \text{否则} \end{cases}$$

图的路径矩阵和距离矩阵不能给出图的全部信息；

图的邻接矩阵可以给出图的全部信息；

无自圈图的关联矩阵可以给出无自圈图的全部信息。

无自圈的无向图的关联矩阵

设无自圈的无向图 G 的结点集和边集分别为｛v_1，v_2，…，v_n｝和｛e_1，e_2，…，e_m｝，定义 G 的关联矩阵 A(G) 为 n×m 矩阵（a_{ij}），其中

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & e_j\text{和}v_i\text{关联}\\ 0 & e_j\text{和}v_i\text{不关联}\end{cases}$$

无自圈的有向图的关联矩阵

设无自圈的有向图 G 的结点集和边集分别为 { v_1，v_2，…，v_n } 和 { e_1，e_2，…，e_m }，定义 G 的关联矩阵 A(G) 为 n×m 矩阵 (a_{ij})，其中

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & v_i\text{是}e_j\text{的起点}\\ -1 & v_i\text{是}e_j\text{的终点}\\ 0 & e_j\text{和}v_i\text{不关联}\end{cases}$$

无自圈有m条边的n阶图G和A(G)之间的联系

1. G 是零图 iff A(G) 是空矩阵 (即没有任何元素的矩阵)。
2. 无向图 G 的关联矩阵 A(G) 的每列元素之和为 2。
3. 有向图 G 的关联矩阵 A(G) 的每列元素之和为 0。
4. e_i 和 e_j 是 G 的平行边 iff A(G)的第i列与第j列相同。
5. 若G是无向图，$d_G(v_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}$ (i = 1，2，…， n)。
6. 若G是有向图，$d_G^+(v_i)$ 为 A(G) 的第 i 行中值为 1 的元素个数，
   $d_G^-(v_i)$ 为 A(G) 的第 i 行中值为 −1 的元素个数，
   $d_G(v_i)$ 为 A(G) 的第 i 行中非零元素个数 (i = 1，2，…， n)。
7. v_i 是孤立点 iff A(G) 的第 i 行全为 0。
8. 无向图 (有向图) G 有 k个分支 (弱分支) G_1，G_2，…，G_k iff
   顺序排列 G 的结点和边的顺序，可使

$$A(G) = \begin{bmatrix} A(G_1) & & & \\ & A(G_2) & & \\ & & \Lambda & \\ & & & A(G_k) \end{bmatrix}$$

作业

习题7.5

1.
2.
3.
4.