# 第二章  关系

# 第二章　关系

1 关系及其性质

2 关系的运算

3 次序关系

4 等价关系与划分

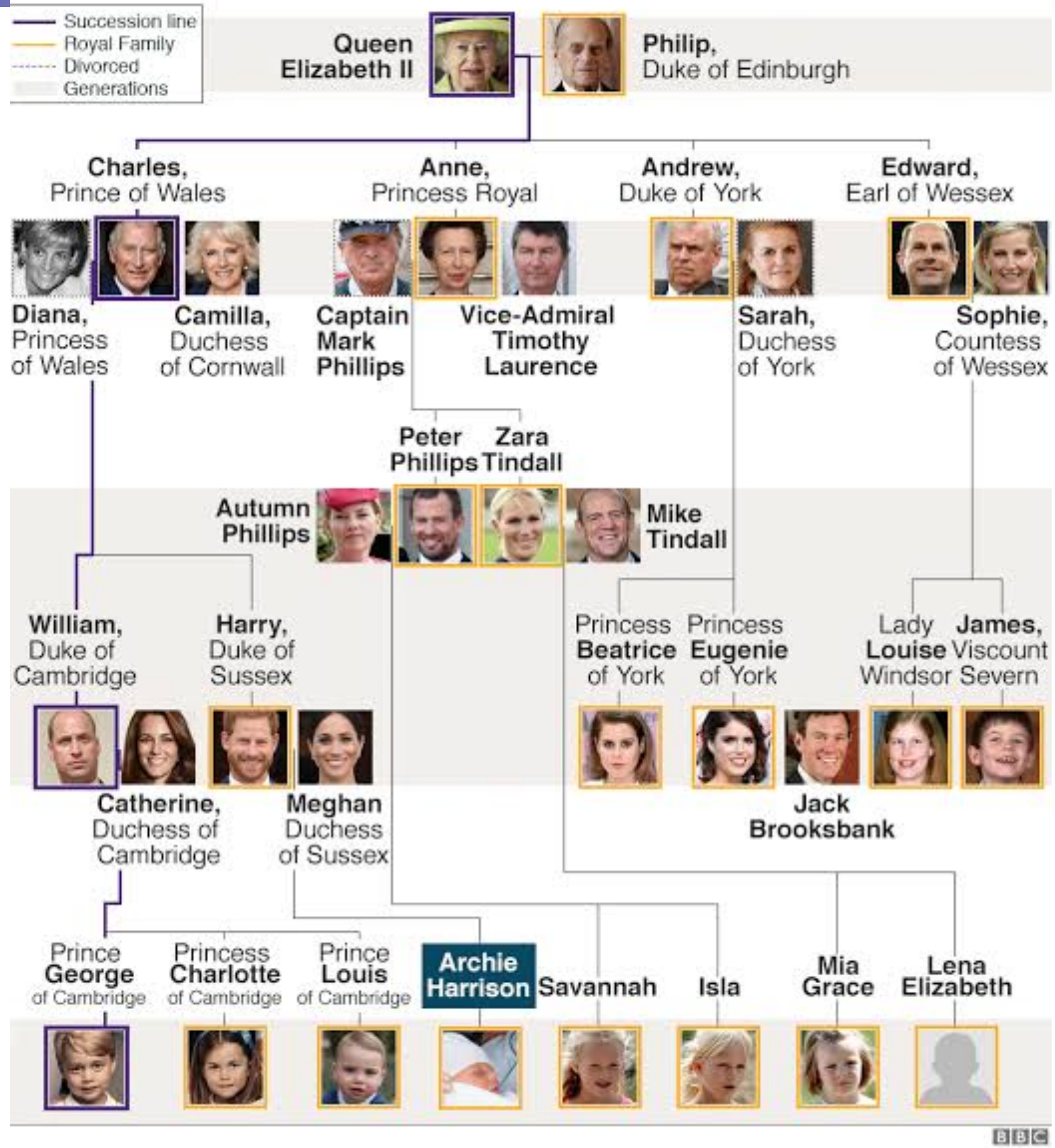
# 2.1 关系及其性质

**重点:**

**1.** 关系的表示

**2.** 关系的性质

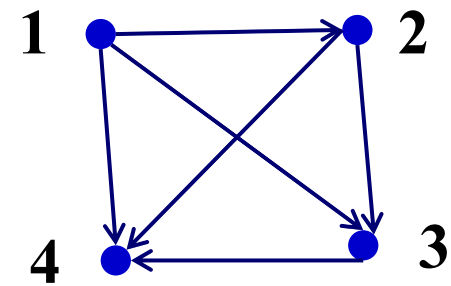
# 关系举例



Succession line
Royal Family
Divorced
Generations
Queen Elizabeth II
Philip, Duke of Edinburgh
Charles, Prince of Wales
Anne, Princess Royal
Andrew, Duke of York
Edward, Earl of Wessex
Diana, Princess of Wales
Camilla, Duchess of Cornwall
Captain Mark Phillips
Vice-Admiral Timothy Laurence
Sarah, Duchess of York
Sophie, Countess of Wessex
Peter Phillips
Zara Tindall
Autumn Phillips
Mike Tindall
William, Duke of Cambridge
Harry, Duke of Sussex
Princess Beatrice of York
Princess Eugenie of York
Lady Louise Windsor
James, Viscount Severn
Catherine, Duchess of Cambridge
Meghan Duchess of Sussex
Jack Brooksbank
Prince George of Cambridge
Princess Charlotte of Cambridge
Prince Louis of Cambridge
Archie Harrison
Savannah
Isla
Mia Grace
Lena Elizabeth
BBC

例：考虑集合$A=\{1, 2, 3, 4\}$上的小于关系“<”：

$$1 < 2,\ 1 < 3,\ 1 < 4,\ 2 < 3,\ 2 < 4,\ 3 < 4$$




用序偶$<i, j>$表示“$i<j$”，令

$$R=\{<1, 2>, <1,3>, <1, 4>, <2, 3>, <2, 4>, <3, 4>\}$$

则 R 为集合A上的小于关系。

例：实数集合上的大于关系“ > ”表示如下：

$$R_{>} = \{ < x, y > \mid x , y \text{ 是实数 且 } x > y \}$$

**定义1 (关系)**：设$n \in I_+$, 且$A_1, A_2, \ldots, A_n$为n个任意的集合，$R \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$，

(1) 称R为$A_1, A_2, \ldots, A_n$的n元关系；

(2) 若n=2，则称R为从$A_1$到$A_2$的二元关系；

(3) 若$R=\varnothing$, 则称R为空关系；

(4) 若$R= A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$，则称R为全关系

(5) 若$A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, 则称R为A上的n元关系。

$A_1, A_2, \ldots, A_n$上最多能有多少个n元关系？

对于二元关系R,

- 若 $<x, y> \in R$, 则可表示成 $x\ R\ y$, 读做“x与y有关系R”
- 若 $<x, y> \notin R$, 则记作 $x\overline{R}y$, 读作“ x与y不存在关系R”

例：令 $R_1 = \{<2n> \mid n \in N\}$

$R_2 = \{<n, n+1> \mid n \in N\}$

$R_3 = \{<n, m, k> \mid n, m, k \in N$ 且 $n^2+m^2=k\}$

则 $R_1$为N上的一元关系，

$R_2$为N上的二元关系，

$R_3$为N上的三元关系 。

考虑二元关系：

- X上的全(域)关系：

$$U_X = \{ <x_i , x_j > \mid x_i , x_j \in X \} = X \times X$$

- X上的恒等关系：$I_X = \{ < x,\ x > \mid\ x \in X \}$

例：设 $X = \{ 0,\ 1,\ 2 \}$,

$U_X = \{ <0, 0>, <0, 1>, <0, 2>, <1, 0> , <1, 1>, <1 , 2> ,$

$<2 , 0> , <2 , 1> , <2 , 2> \}$

$I_X = \{ < 0, 0> ,\ <1 , 1> ,\ <2 , 2 > \}$

例：设集合$A=\{0, 1, 2\}$, $B=\{0, 2, 4\}$,

$R_1=\{<x, y>| \ x, y \in A \cap B\}$,

$R_2= \{<x, y>| \ x \in A-B, \ y \in B-A\}$。

列出$R_1$, $R_2$中的所有 序偶。

解：$R_1=\{<0, 0>, <0, 2>, <2, 0>, <2, 2>\}$

$R_2=\{<1,4>\}$

例：考虑下面这些整数集合上的关系：

$R_1=\{<a, b>| \ a\leq b\}$，$R_2=\{<a, b>| \ a> b\}$，

$R_3=\{<a, b>| \ a=b$ 或 $a=-b\}$，$R_4=\{<a, b>| \ a=b\}$，

$R_5=\{<a, b>| \ a=b+1\}$, $R_6=\{<a, b>| \ a+b\leq 3\}$。

哪些关系包含了序偶$<1,1>$, $<1, 2>$, $<2,1>$ 或 $<1, -1>$?

**定义2 (关系的相等)：设$R_1$为$A_1, A_2, \ldots, A_n$间的n元关系， $R_2$为$B_1, B_2, \ldots, B_m$间的m元关系。如果**

**(1) n=m;**

**(2) 若$1 \le i \le n$, 则$A_i = B_i$;**

**(3) 把$R_1$和$R_2$作为集合看，$R_1 = R_2$。**

**则称n元关系 $R_1$与m元关系$R_2$相等，记为$R_1 = R_2$。**

与集合相等的区别？

例： 设$R_1 \subseteq N \times I_+$， $R_2 \subseteq I \times I$, $R_3 \subseteq I \times I$， 且

$R_1 = \{\langle n, m\rangle \mid n \in N, m \in I_+, 且 m = n+1\}$

$R_2 = \{\langle n, n+1\rangle \mid n \in I, 且 n \ge 0\}$， $R_3 = \{\langle |n|, |n|+1\rangle \mid n \in I\}$

作为集合看，$R_1 = R_2 = R_3$

作为关系看，$R_1 \ne R_2$， $R_2 = R_3$

定义3　设 $R \subseteq A \times B$, 令

$$\mathrm{dom}\,(R) = \{\, x \in A \mid \exists\, y \in B \text{使} <x, y> \in R \,\},$$

$$\mathrm{ran}\,(R) = \{\, y \in B \mid \exists\, x \in A \text{ 使 } <x, y> \in R \,\},$$

称dom (R)为R 的定义域， ran (R)为R 的值域。

显然， $\mathrm{dom}\,(R) \subseteq A$， $\mathrm{ran}\,(R) \subseteq B$

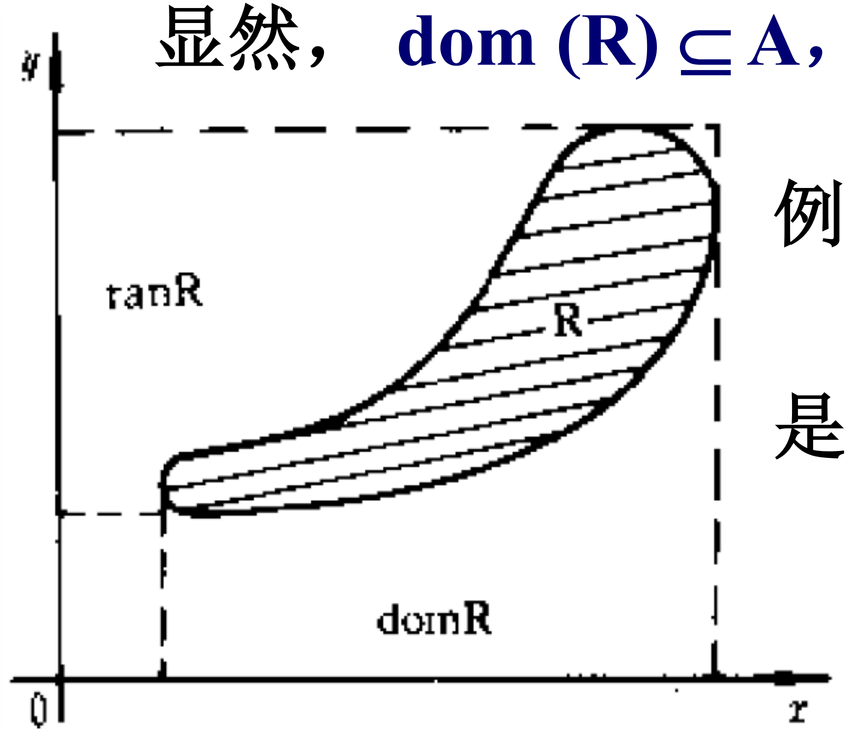



图 2.1.2　作为平面的子集的二元关系 $R$

例: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c\}$

$R = \{<1, a>, <1, b>, <2, b>\}$

是 A 到 B的关系。

$\mathrm{dom}\,(R)=\{1, 2\}$, $\mathrm{ran}(R)=\{a, b\}$

# 关系的表示

定义3（图）设 $V$ 和 $E$ 是有限集合，且 $V \neq \varnothing$

i) 如果 $\Psi: E \to \{\{v_1, v_2\} \mid v_1 \in V \text{ 且 } v_2 \in V\}$，

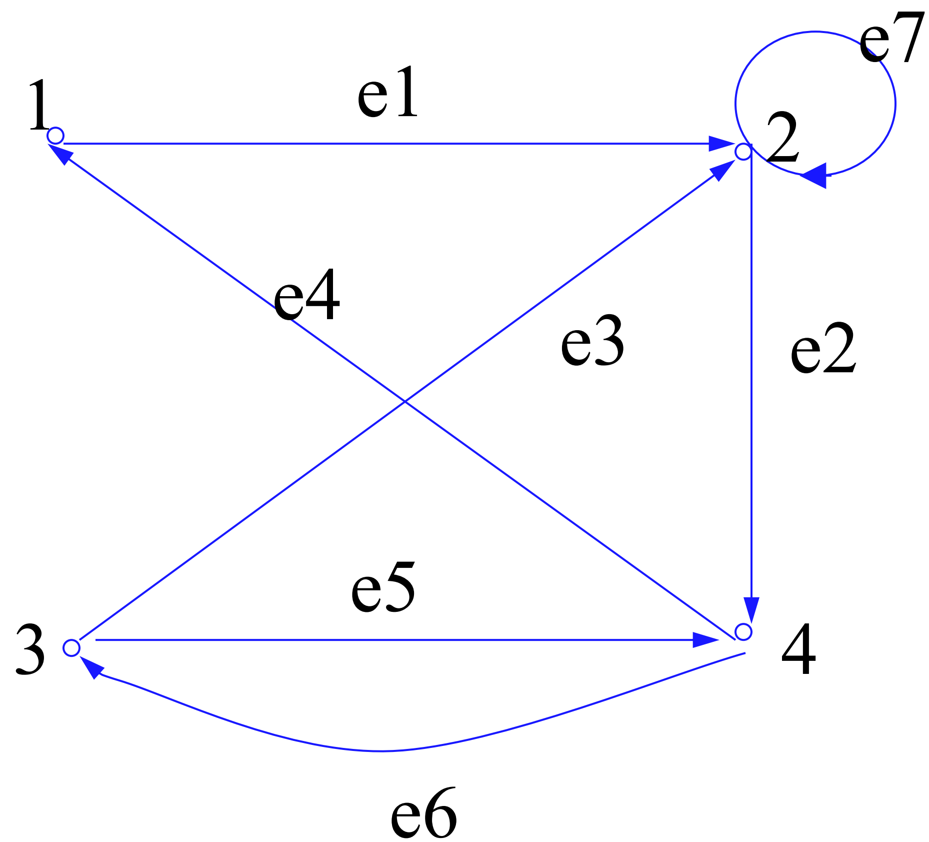
则称 $G = \langle V, E, \Psi \rangle$ 为 无向图。

i) 如果 $\Psi: E \to V \times V$，则称 $G = \langle V, E, \Psi \rangle$ 为有向图。

无向图和有向图统称为图，其中

- $V$ 的元素称为图 $G$ 的结点 (顶点)，
- $E$ 的元素称为图 $G$ 的边，
- 图 $G$ 的结点数目称为它的 阶。

用几何图形表示图：小圆圈表示结点；若$\Psi(e)=<v_1, v_2>$，就用一条由$v_1$指向$v_2$的有向线段 表示边。




$\Psi(e1)=<1, 2>$

# 关系的表示

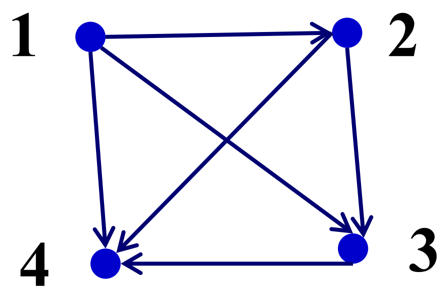
仅讨论从有限集到有限集的二元关系

定义 4 (关系图) 设A和B为任意的非空有限集， R为任意从A到B的二元关系。以A ∪B中的每个元素为一个结点，对每个<x, y> ∈R， 皆画一条从x到y的有向边，就得到一个有向图$G_R$, 称为R的关系图

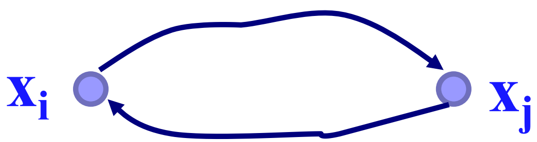
例：集合A={1, 2, 3 ,4}上的小于关系

R={<1, 2>, <1,3>, <1, 4>, <2, 3>

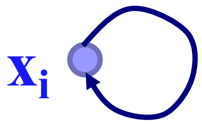
<2, 4>, <3, 4>}



- 如果 $x_i\,\mathbf{R}\,x_j$ 且 $x_j\,\mathbf{R}\,x_i$，则在 $x_i$ 和 $x_j$ 之间画上两条方向相反的弧线



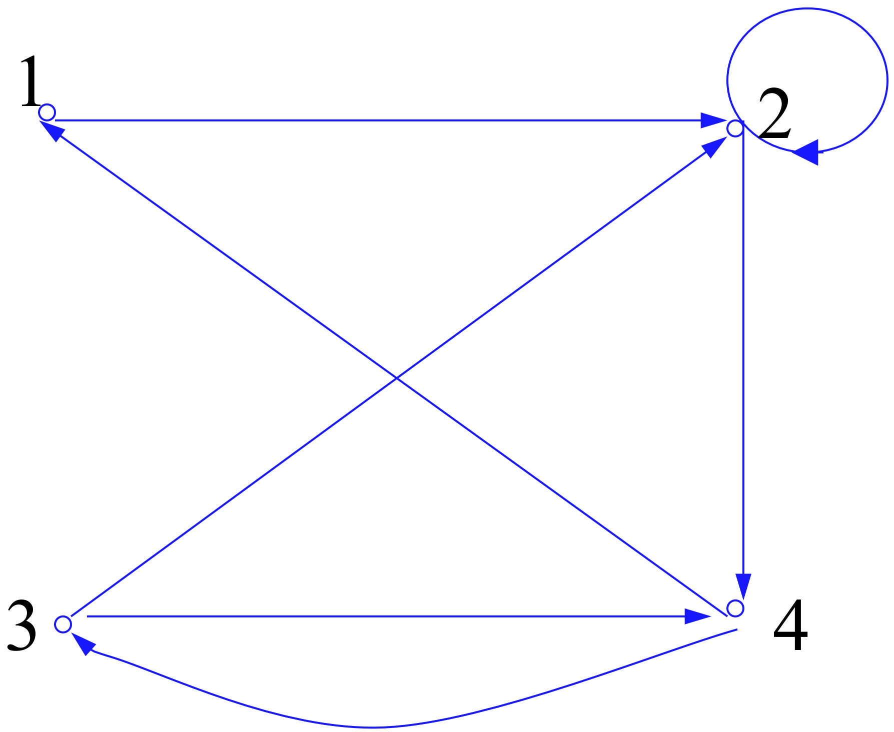

- 如果 $x_i\,\mathbf{R}\,x_i$，则画一条从 $x_i$ 出发又返回顶点 $x_i$ 的弧线，称这一条弧线为自环



例：设 X = { 1 , 2 , 3 , 4 }，R 是集合 X 上的关系,

R = { <1, 2> , <2, 2> , <2, 4> , <3, 2> , <3, 4> , <4, 1> , <4, 3> }

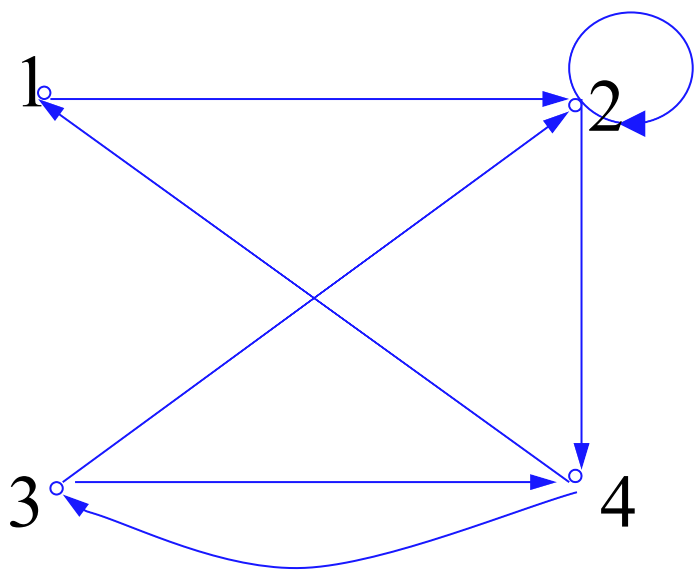
则 R的关系图$G_R$如下：



# 关系的表示

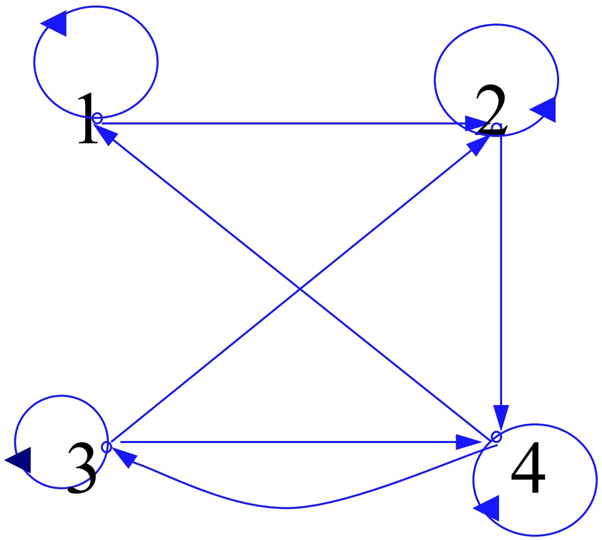
**定义5 (关系矩阵)**：设 $X = \{ x_1, \cdots\cdots, x_m \}$，$Y = \{ y_1, \cdots\cdots, y_n \}$， R 是 X 到 Y 的二元关系。 **R 的关系矩阵**，记作 $M_R = (r_{ij})_{m\times n}$， 其中

$$r_{ij} = \begin{cases} 0, 若 x_i \overline{R} y_j \\ 1, 若 x_i R y_j \end{cases}$$

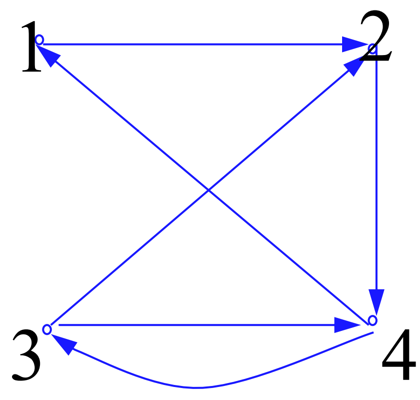



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

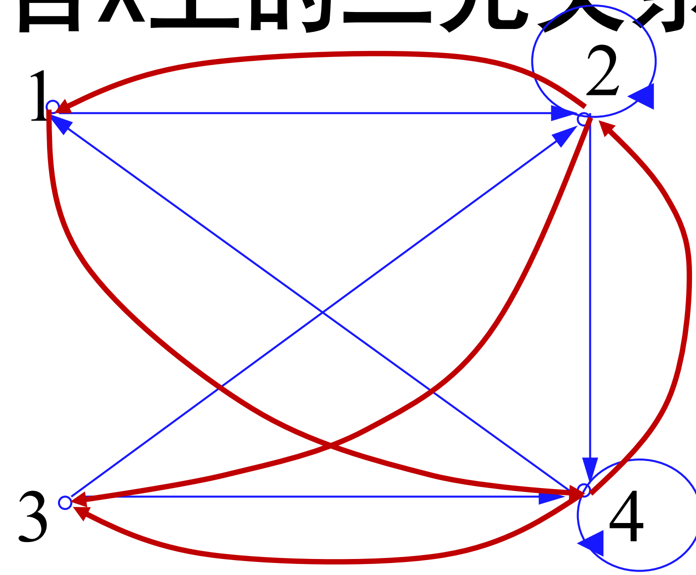
# 关系的性质:考虑有限集合X上的二元关系



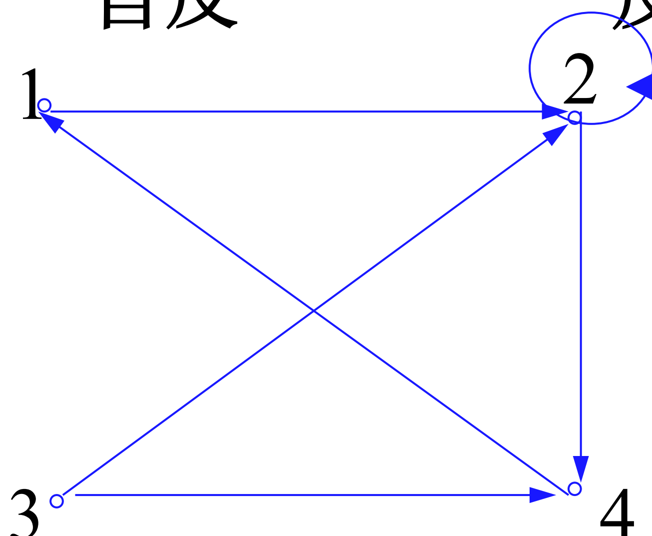

自反



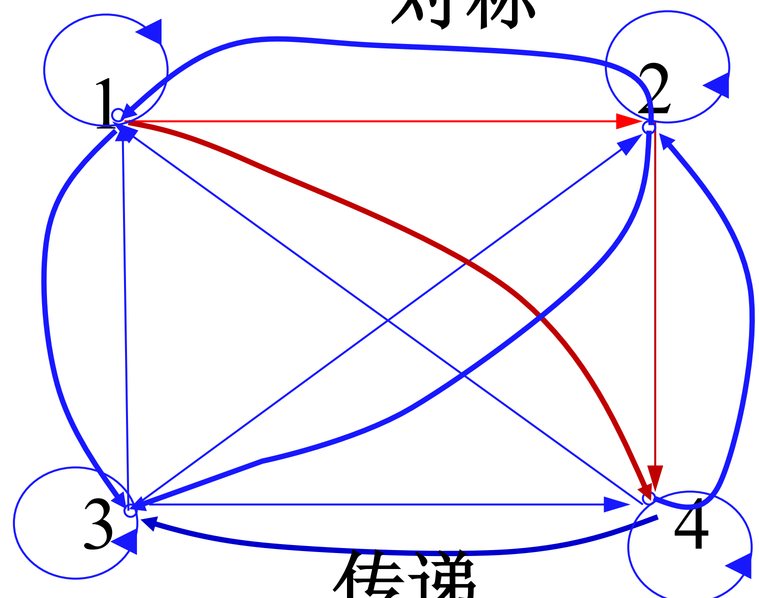

反自反




对称

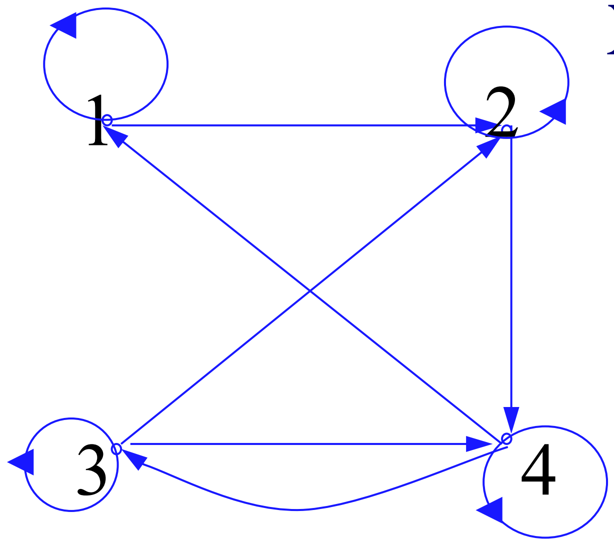



反对称




传递

定义 6 (自反) 设 R是集合X上的二元关系，R是自反的 $\Leftrightarrow$ $\forall x\,(x \in X \rightarrow \langle x, x\rangle \in R)$

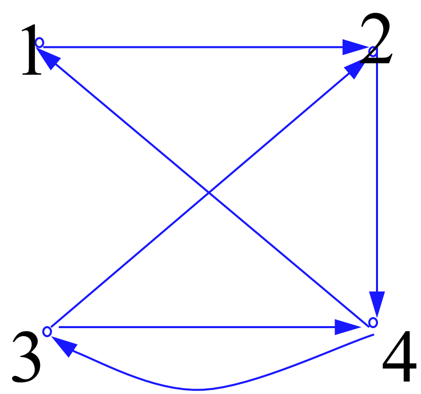



$X=\{1, 2, 3, 4\}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- 在R的关系图中，每个顶点均有自环；
- 在R的关系矩阵中，主对角线的元素均为 1。

定义7(反自反) 设 R是集合X上的二元关系。R是 反自反的 $\Leftrightarrow$ $\forall x\,(x \in X \rightarrow \langle x, x\rangle \notin R)$

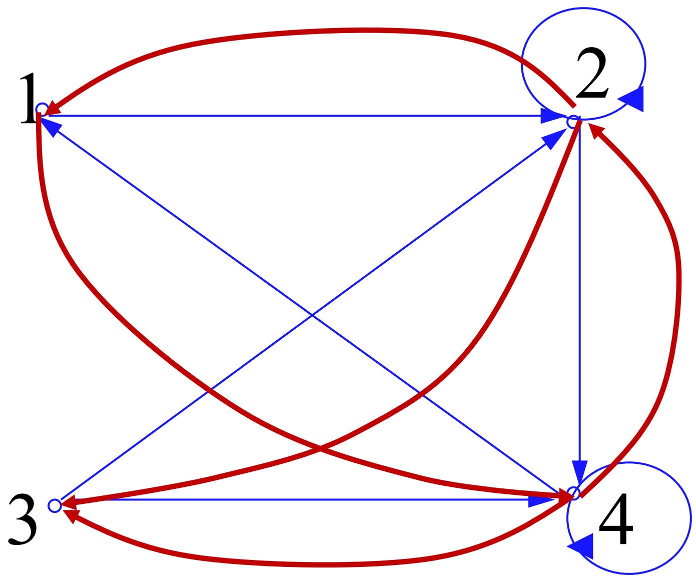



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- 在R的关系图中，每个顶点均无自环；
- 在R的关系矩阵中，主对角线的元素均为 0。

**定义8(对称)** 设 R是集合X上的二元关系。 R 是对称的

$\Leftrightarrow \forall x\, \forall y\, (\, x \in X \wedge y \in X \wedge <x\,,\, y> \in R \rightarrow <y\,,\, x> \in R\,)$



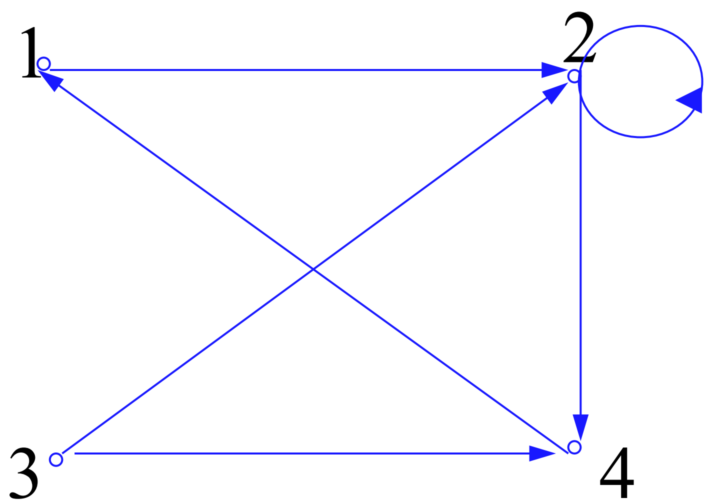

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- 在 R 的关系图中，任意两个不同顶点之间：或者无弧 或者 有两条方向相反的弧；
- R 的关系矩阵是 对称矩阵.

**定义9(反对称)** 设 R是集合X上的二元关系。 R 是反对称的

$\Leftrightarrow \forall x \forall y\,(\,x \in X \wedge y \in X \wedge \langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, x\rangle \in R \rightarrow x = y\,)$

$\Leftrightarrow \forall x \forall y\,(x \in X \wedge y \in X \wedge \langle x, y\rangle \in R \wedge x \neq y \rightarrow \langle y, x\rangle \notin R\,)$




$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

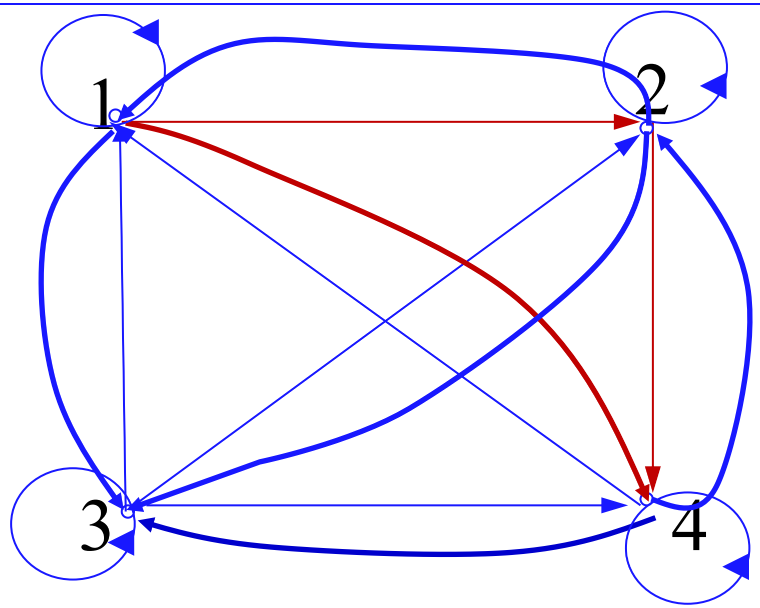
- 在 R 的关系图中，任意不同顶点之间至多有一条弧
- 在 R 的矩阵中， 若 $i \neq j$ 且 $r_{ij} = 1$， 则 $r_{ji} = 0$

  或 $r_{ij} \cdot r_{ji} = 0\ (\,i \neq j\,)$

**定义10(传递)** 设 R是集合X上的二元关系。 R是传递的

$\Leftrightarrow \forall x \forall y \forall z\, (x \in X \wedge y \in X \wedge z \in X \wedge \langle x, y\rangle \in R$

$\wedge \langle y, z\rangle \in R \rightarrow \langle x, z\rangle \in R\,)$




$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- 在 R 的关系图中，若顶点 x 到顶点 y有一条路径，则必有从 x 到 y 的一条边
- 在关系矩阵：若有k使$r_{ik} \cdot r_{kj} = 1$, 则 $r_{ij} = 1$

# 关系图和关系矩阵中五种性质的表述

| R | 自反 | 反自反 | 对称 | 反对称 | 传递 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $M_R$ | 对角线元素全1 | 对角线元素全0 | 对称矩阵 | $r_{ij} \cdot r_{ji}=0$ $(i \neq j)$ | 若有k使 $r_{ik} \cdot r_{kj}=1$, 则 $r_{ij}=1$ |
| $G_R$ | 所有结点都有自环 | 所有结点都无自环 | 结点间有向边都成对出现 | 结点间无成对出现的有向边 | 若 x 到y有一条路径，则必有从 x 到 y 的一条边 |

例：(1) 夫妻关系是反自反，反对称的

(1) 配偶关系是反自反，对称的

(2) 祖先关系是反自反，反对称，传递的

例 (1) X上的恒等关系$I_X$是自反、对称、反对称、传递的

(2) N上的“<”是反自反、反对称、传递的

思考题

(1) 非空集 X 上的空关系 ∅

反自反、对称、反对称、传递

(2) 空集 ∅上的空关系 ∅

自反、反自反、对称、反对称、传递

例：设 $X = \{1, 2, 3\}$判断 X 上的以下二元关系的性质

$R_1 = \{ <1, 2>, <2, 3>, <3, 1> \}$

反自反，反对称的

$R_2 = \{ <1, 2>, <1, 3> \}$

反自反，反对称，传递

$R_3 = \{ <1, 2>, <1, 3>, <2, 3>, <3, 2> \}$

反自反的

$R_4 = \{ <1, 2>, <2, 1>, <1, 3>, <3, 1>, <1, 1>, <2, 2>,$
$<3, 3> \}$

自反、对称的

例：指出R上的下列二元关系的性质：

(1) $S=\{<x, y>|x, y\in R$且$x\cdot y>0\}$；

(2) $S=\{<x, y>|x, y\in R$，4整除$|x-y|$且$|x-y|<10\}$。

解: (1) 由于$0\cdot 0=0$, 因此$<0,0>\notin S$, 因此S不是自反的；

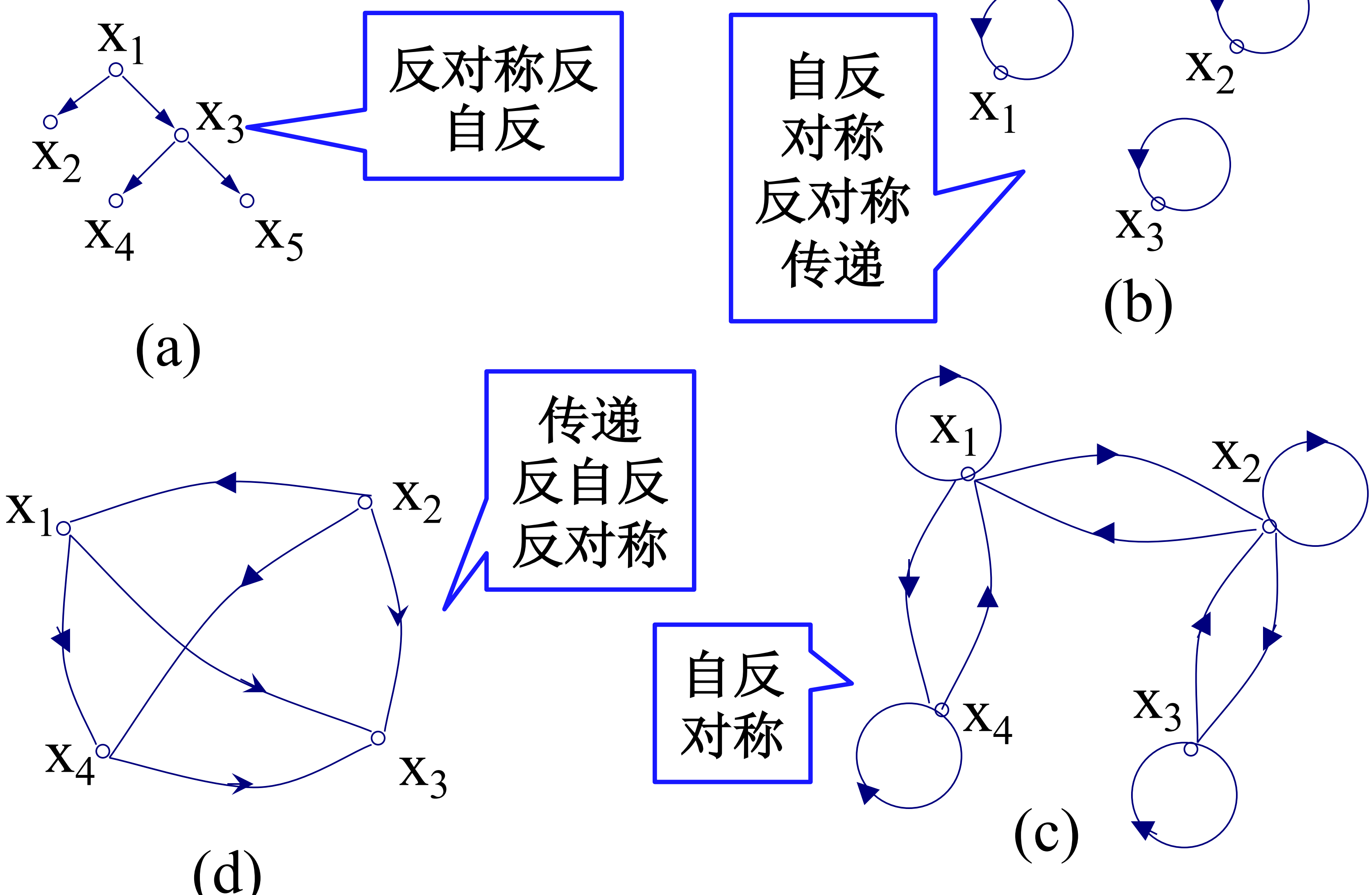
由于$<1, 1>\in S$, 因此S不是反自反的；

由于对任意的$x, y\in R$, 有$x\cdot y>0$当且仅当$y\cdot x>0$，因此$<x, y>\in S$且$<y, x>\in S$。所以S是对称的，且不是反对称的；

假设对任意的$x, y, z\in R$, $x\cdot y>0$且$y\cdot z>0$。若x为正实数，则y, z必为正实数，且若x为负实数，且y, z必为负实数，因此$x\cdot z>0$。因此$<x, y>\in S$, $<y, z>\in S$且$<x, z>\in S$。因此S是传递的。

综上所述，S是对称、传递的。

例：指出以下关系图给定的关系所具有的性质，并写出对应的关系矩阵。



例：举例说明满足以下性质的二元关系。

(1) 既是自反的，又是反自反的；

(2) 既不是自反的，又不是反自反的；

(3) 既是对称的，又是反对称的；

(4) 既不是对称的，又不是反对称的。

解: (1) 空集上的空关系

(2) 整数上的关系R={<1,1>}

(3) 集合{1, 2, 3}上的关系 {<1,1>, <2, 2>, <3, 3>}

(3) 集合{1, 2, 3}上的关系{<1, 2>, <2, 1>, <1, 3>}

例： 设 A 为恰有 n 个元素的有限集，

(1) A 上共有多少个 不同的自反关系？

(2) A 上共有多少个 不同的反自反关系？

(3) A 上共有多少个 不同的对称关系？

(4) A 上共有多少个 不同的反对称关系？

(5) A 上共有多少个 不同的既是对称又是反对称的关系？

解: (1) 设R是A上的自反关系,则对任意 $a\in A$, $<a, a> \in R$。对于A上的其他序偶$<b, c>$, $b\neq c$, $<b, c>$可能属于R, 也可能不属于R.

已知A上的其他序偶个数为n(n-1)，因此A上的自反关系的个数为$C^{1}_{n(n-1)}+C^{2}_{n(n-1)}+\ldots+C^{n(n-1)}_{n(n-1)}=2^{n(n-1)}$

例： 设 A 为恰有 n 个元素的有限集，

(3) A 上共有多少个不同的对称关系？

解: (3) 设R是A上的对称关系, 则

(a)对于A上的序偶<b, c>, b≠c, <b, c> 属于R当且仅当<c, b>R，即A上的序偶对<b, c>和<c, b>, b≠c, 必须成对出现，且

(b) 对任意的a∈A, <a, a> 可能属于R，也可能不属于R，已知A上的序偶对<b, c>和<c, b> (b≠c)个数为n(n-1)/2，<a, a>个数为n个，因此A上的对称关系的个数为 $2^{n(n-1)/2+n} = 2^{n(n+1)/2}$。

例： 设 A 为恰有 n 个元素的有限集，

(5) A 上共有多少个 不同的既是对称又反对称的关系？

解: (5) 设R是A上的关系, 且既是对称又反对称, 则R只可能包含以下序偶：<a, a> , a ∈ R.

因此，关系R的个数为$2^n$。