1.用归纳定义法给出下列集合。

(1) 不允许有前0的被 5 整除的二进制无符号整数的集合

(2) 集合{0,1,4,9,16, 25,...}

习题1.2

10. 设 $A_n=\{x \mid x\in R \text{ 且 } x>n\}$，$n\in N$，试求 $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ 和 $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$

11. 设 $A_x=\{y \mid y\in R \text{ 且 } 0\le y\le x\}, x\in R$。试求 $\bigcup_{\substack{x\in R\\ x>1}} A_x$ 和 $\bigcap_{\substack{x\in R\\ x>1}} A_x$

习题1.4

2、证明或用反例推翻下列命题：

c) $(A-B)\times(C-D)=(A\times C)-(B\times D)$

d) $(A\oplus B)\times(C\oplus D)=(A\times C)\oplus(B\times D)$

习题1.4.

7、为了给出序偶的另一定义，选取两个不同集合 A 和 B(例如取 $A=\varnothing$，$B=\{\varnothing\}$)，并定义 $<a, b>=\{\{a, A\},\{b, B\}\}$。证明这个定义的合理性。

习题2.1

1.列出从*A*到*B*的关系*R*中的所有序偶。

b) $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$，$B=\{1, 2, 3\}$，$R=\{<x, y> \mid x \in A, y \in B$ 且 $x = y^2\}$

8、设$n, m \in \boldsymbol{I}_+$。若集合*A*恰有*n*个元素，则在*A*上能有多少个不同的*m*元关系？证明你的结论。

习题2.2

4. 设A为恰有n个元素的有限集。

b) 共有多少个A上的不相同的反自反关系？

d) 共有多少个A上的不相同的反对称关系？

e) 共有多少个A上的既是对称又反对称的关系？

习题2.3

3. 设I_A为集合A上的恒等关系，即$I_A=\{<x, x>|x\in A\}$。则对A上的任意二元关系R，A上的二元关系$I_A\cup R\cup R^{-1}$必是自反的和对称的。

习题2.4

5. 设R_1和R_2都是集合A上的二元关系。证明或用反例推翻以下的论断：

- b) 如果R_1和R_2都是反自反的，则$R_1 \circ R_2$也是反自反的；
- d) 如果R_1和R_2都是反对称的，则$R_1 \circ R_2$也是反对称的；

6、设 $A=\{0，1，2，3\}$上的二元关系 R_1 和 R_2 为 $R_1=\{<i, j>| j=i+1$ 或 $j=i/2\}$；$R_2=\{<i, j>|i=j+2\}$

试求 M_{R_1}，M_{R_2}，$M_{R_1 \bullet R_2}$，$M_{R_1 \bullet R_2 \bullet R_1}$ 及 $M_{R_1^3}$。

10. 如果集合A上的二元关系R既是自反的，又是传递的，则R^2=R

习题2.4

12、设 R 为从集合 A 到集合 B 的二元关系，且对每个 $X\subseteq A$，皆令 $R(X)=\{y\in B|$有 $x\in X$ 使 $<x, y>\in \boldsymbol{R}\}$。若 $X_1\subseteq A$ 且 $X_2\subseteq A$，则有

i) $R(X_1\cup X_2)=R(X_1)\cup R(X_2)$；

ii) $R(X_1\cap X_2)\subseteq R(X_1)\cap R(X_2)$；

iii) $R(X_1\setminus X_2)\supseteq R(X_1)\setminus R(X_2)$；

习题2.5

4、设R_1和R_2都是集合A上的二元关系，试证明：

a) $r(R_1\cap R_2)=r(R_1)\cap r(R_2)$；

b) $s(R_1\cap R_2)\subseteq s(R_1)\cap s(R_2)$；

c) $t(R_1\cap R_2)\subseteq t(R_1)\cap t(R_2)$。

并分别给出使 $s(R_1)\cap s(R_2)\subseteq s(R_1\cap R_2)$ 和 $t(R_1)\cap t(R_2)\subseteq t(R_1\cap R_2)$不成立的$R_1$和$R_2$的具体实例。

习题2.7

1、试判断下列*I*上的二元关系是不是I上的等价关系，并说明理由。

- a) $\{<i, j>| i, j \in \boldsymbol{I}$ 且 $i \cdot j > 0\}$；
- c) $\{<i, j>| i, j \in \boldsymbol{I}$ 且 $i \leq 0\}$；
- e) $\{<i, j>| i, j \in \boldsymbol{I}$ 且 $i | j\}$；
- g) $\{<i, j>| i, j \in \boldsymbol{I}$ 且 $| i - j | \leq 10\}$；
- i) $\{<i, j>| i, j \in \boldsymbol{I}$ 且有 $x \in \boldsymbol{I}$ 使 $10x < i < 10(x+1)\}$。

3、 设集合 A 上的二元关系 R 是自反的。证明 R 为等价关系的充要条件是：若 $\langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle \in \mathrm{R}$，则 $\langle b, c\rangle \in R$.

6. 设C_1和C_2都是集合A的划分。试判断下列集类是不是A的划分，为什么？

b) $C_1 \cap C_2$；

d) $(C_1 \cap (C_2 - C_1)) \cup C_1$；

例. 设$<A, \leq>$为偏序结构，证明A的每个非空有限子集都至少有一个极小元和极大元。

证:（反证法）设S为A的任意一个非空有限子集，且S没有极小元。

则对任意的$a_0 \in S$, 存在$a_1 \in S$, 使得$a_1 \leq a_0$。

可以证明，对任意的$n \in I_+$, 若存在$a_0, a_1, \ldots, a_n \in S$, 满足$a_n \leq a_{n-1} \leq \ldots \leq a_1 \leq a_0$, 由于S没有极小元，则一定存在$a_{n+1}$，使得$a_{n+1} \leq a_n$。

由归纳法知，S中一定存在一个无限递减序列$a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$，矛盾。因此S一定有一个极小元。

同理可证S一定有一个极大元。

例：设$<A, \leq>$为全序结构，证明A的每个非空有限子集都至少有一个最小元和最大元。

例：设A为恰有n个元素的有限集。

(2) 共有多少个A上的不相同的反对称关系？

解: (2) 设R是A上的反对称关系，则对任意的x,y∈A, x≠y, 当<x, y> ∈R时，一定有<y, x> ∉ R，即<x, y>与<y, x>在R中要么都不出现，要么只出现一个。此时有三种情况：

(a) <x, y> ∈R, <y, x> ∉ R,

(b) <y, x> ∈R, 且<x, y> ∉ R, 或

(c) <x, y> ∉ R, <y, x> ∉ R。

成对考虑序偶对<x, y>, <y, x>, x≠y, 一共有n(n-1)/2对。

另外，对任意的x ∈A, 有<x, x> ∈R 或者<x, x> ∉ R，这 样的序偶<x, x>一共有n个。

因此， A上的不相同的反自反关系的个数为 $3^{n(n-1)/2} \cdot 2^{n}$。

例：设$\prod_1$和$\prod_2$都是集合A的划分，若对每个$S_1 \in \prod_1$，皆有$S_2 \in \prod_2$使$S_1 \subseteq S_2$，就称$\prod_1$是$\prod_2$的加细，记为$\prod_1 \leq \prod_2$; 若$\prod_1 \leq \prod_2$且$\prod_1 \neq \prod_2$，就称$\prod_1$为$\prod_2$的真加细，并记为$\prod_1 < \prod_2$。

设R_1和R_2都是集合A上的等价关系，证明：

(1) $R_1 \subseteq R_2$当且仅当$A/R_1 \leq A/R_2$。

(2)$R_1 \subset R_2$当且仅当$A/R_1 < A/R_2$。

证: (1) (必要性) 若$R_1 \subseteq R_2$，则对任意$<x, y> \in R_1$, 则一定有$<x, y> \in R_2$。

对任意的$S_1 \in A/R_1$,设$S_1=[x]_{R1}$, 其中$x \in A$,则对任意$y \in A$, 若$y \in [x]_{R1}$，则必有$y \in [x]_{R2}$，因此 $[x]_{R1} \subseteq [x]_{R2}$。

显然，$[x]_{R2} \in A/R_2$。故$A/R_1 \leq A/R_2$。

(充分性) 对任意的$<x, y> \in R_1$，则有$x, y \in [x]_{R1}$。

由于$A/R_1 \leq A/R_2$, 必存在$S_2 \in A/R_2$, 使得$[x]_{R1} \subseteq S_2$, 得$x, y \in S_2$.

从而得 $<x, y> \in R_2$。

因此$R_1 \subseteq R_2$。

例：设$\prod_1$和$\prod_2$都是集合A的划分，若对每个$S_1\in\prod_1$，皆有$S_2\in\prod_2$使$S_1\subseteq S_2$，就称$\prod_1$是$\prod_2$的加细，记为$\prod_1\leq\prod_2$; 若$\prod_1\leq\prod_2$且$\prod_1\neq\prod_2$，就称$\prod_1$为$\prod_2$的真加细，并记为$\prod_1<\prod_2$。

设R_1和R_2都是集合A上的等价关系，证明：

(1) $R_1\subseteq R_2$当且仅当$A/R_1\leq A/R_2$。

(2)$R_1\subset R_2$当且仅当$A/R_1 < A/R_2$。

证: (2) (必要性) 若$R_1\subset R_2$，则由(1) 知$A/R_1\leq A/R_2$。下面证明$A/R_1\neq A/R_2$。

由于$R_1\subset R_2$,则必存在$\langle x, y\rangle\in R_2$,且$\langle x, y\rangle\notin R_1$,得$[x]_{R1}\neq[x]_{R2}$。

又因为$R_1\subset R_2$, 因此$[x]_{R1}\subseteq[x]_{R2}$,得$[x]_{R1}\subset[x]_{R2}$。

可证: 不存在$[x']_{R1}\in A/R_1$使得$[x']_{R1}=[x]_{R2}$; 否则有$[x]_{R1}\subset[x']_{R1}$, 矛盾。

因此$A/R_1\neq A/R_2$。

例：设$\prod_1$和$\prod_2$都是集合A的划分，若对每个$S_1\in\prod_1$，皆有$S_2\in\prod_2$使$S_1\subseteq S_2$，就称$\prod_1$是$\prod_2$的加细，记为$\prod_1\le\prod_2$; 若$\prod_1\le\prod_2$且$\prod_1\ne\prod_2$，就称$\prod_1$为$\prod_2$的真加细，并记为$\prod_1<\prod_2$。

设R_1和R_2都是集合A上的等价关系，证明：

(1) $R_1\subseteq R_2$当且仅当$A/R_1\le A/R_2$。

(2)$R_1\subset R_2$当且仅当$A/R_1<A/R_2$。

证: (2) (充分性) 若$A/R_1<A/R_2$，则由(1)知$R_1\subseteq R_2$。

下面证明存在$<x, y>\in R_2$, 但$<x, y>\notin R_1$。

由于$A/R_1\ne A/R_2$, 则存在$S_1\in A/R_1$, $S_2\in A/R_1$, 有$S_1\subset S_2$。

设$S_1=[x]_{R1}$, 则S_2必为$[x]_{R2}$，因此存在$y\in S_2$, 有$<x, y>\in R_2$但$<x, y>\notin R_1$。

所以，得 $R_1\subset R_2$。

例：如果$n,m\in I_+$，则$I/_{\equiv n}$为$/ I_{\equiv m}$的加细当且仅当$m|n$。

证: (必要性) 设$I/_{\equiv n}$为$/ I_{\equiv m}$的加细。

已知$I/_{\equiv n} =\{ [0]_{\equiv n}, [1]_{\equiv n}, \ldots, [n-1]_{\equiv n}\}$，其中$[i]_{\equiv n}=\{kn+i|k\geq 0\}$, $i=0,\ldots, n-1$;

$I/_{\equiv m} =\{ [0]_{\equiv m}, [1]_{\equiv m}, \ldots, [m-1]_{\equiv m}\}$，其中$[i]_{\equiv m}=\{km+i|k\geq 0\}$, $i=0,\ldots, m-1$。

由于$I/_{\equiv n}$为$/ I_{\equiv m}$的加细，因此存在$0\leq i \leq m-1$，使得$[0]_{\equiv n}\subseteq[i]_{\equiv m}$，得$n, 2n \in [i]_{\equiv m}$。

设$n= km+i$, $2n=k'm+i$，则$n=(k'-k)m$，得$m|n$

例：如果$n,m\in I_+$，则$I/_{\equiv n}$为$/ I_{\equiv m}$的加细当且仅当$m|n$。

证: (充分性) 若 $m|n$，设$n=k'm$, 其中$k'\in I_+$。

已知$I/_{\equiv n}=\{ [0]_{\equiv n}, [1]_{\equiv n}, \ldots, [n-1]_{\equiv n}\}$,其中$[i]_{\equiv n}=\{kn+i|\ k\geq 0\}$, $i=0,\ldots, n-1$;

$I/_{\equiv m}=\{ [0]_{\equiv m}, [1]_{\equiv m}, \ldots, [m-1]_{\equiv m}\}$,其中$[i]_{\equiv m}=\{km+i|\ k\geq 0\}$, $i=0,\ldots, m-1$。

对任意的$[i]_{\equiv n}$， $0\leq i\leq n$，有

$[i]_{\equiv n}=\{kn+i \mid k\in I \text{ 且 } k\geq 0\}=\{kk'm+i \mid k\in I \text{ 且 } k\geq 0, k'\in I_+\}$。

设$i=k''m+q$, 其中$k, q\in I$且$0\leq q\leq m$，得

$[i]_{\equiv n}=\{(kk'+k'')m+q|k\in I\text{且 } k\geq 0, k'\in I_+ , k, q\in I\text{且}0\leq q\leq m\}$,

因此 $[i]_{\equiv n}\subseteq[q]_{\equiv m}$。

所以， $I/_{\equiv n}$为$/ I_{\equiv m}$的加细。