张金源
76066001

数学作业纸

班级：　　姓名：　　编号：　　第　　页

练习7.1

5. 在一次集会，相互认识的人会彼此握手。试证明与奇数个人握手的人数是偶数

证明：

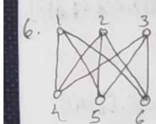
设集会中的人有m个，可分为两部分，一部分为与奇数个人握手的人，设为x个，另一个部分为与偶数个人握手的人，为m-x个。

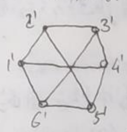
由于握手是相互的，即一次握手，两个人握手的次数都加1，一共加2，因此集会上所有人的握手次数之和为偶数。与偶数个人握手的人，这些人的握手次数之和为 $a_1+a_2+\cdots+a_{m-x}$（其中，$a_1, a_2, \cdots a_{m-n}$ 都是偶数），为偶数。

与奇数个人握手的人，这些人为 $b_1+b_2+\cdots+b_x$（其中 $b_1, b_2, \cdots, b_x$ 为奇数）。由于所有人的握手次数之和偶数，因此 $b_1+b_2+\cdots b_x$ 也要为偶数即 $(b_1+b_2+b_3\cdots+b_x) \bmod 2=0$

因为 $(b_1+b_2+\cdots+b_x) \bmod 2 = b_1 \bmod 2 + b_2 \bmod 2 + \cdots + b_x \bmod 2 = x \bmod 2$

即 $x \bmod 2 = 0$，因此x为偶数即与奇数个人握手的人是偶数个，得证。

6. 



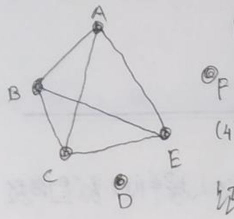
两个图的结点和边的数目都相同。假设函数 $\varphi=\{\langle 1,1'\rangle, \langle 5,2'\rangle, \langle 3,3'\rangle, \langle 4,4'\rangle, \langle 5,2'\rangle, \langle 6,6'\rangle\}$，左图中相邻的结点是1和4，1和5，1和6，2和4，2和5，2和6，3和4，3和5，3和6，对应的像点1'和4'，1'和2'，1'和6'，5'和4'，5'和2'，5'和6'，3'和5'，3'和2'，3'和6'在右图中也相邻，因此两个图同构。

7. 分三种情况：

(1). 任何一个人最多认识另一个人，将相互认识的两个人分成一组则至少可以分3组，每组取一个人，则这三个必不认识。

(2). 任何一个人最多认识另两个人，最坏的情况是当每个人都认识另外两个人时，若认识的人之间画一条线可以构成一个六边形，取不相邻的三个点即是不认识的。

(3). 任何一个人最多认识另外的三个人

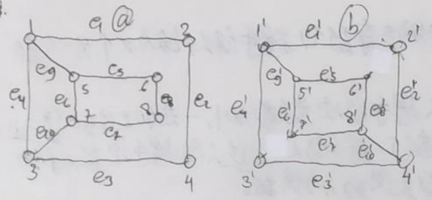


不妨设点A与B,C,E认识。因为B,C,E之间只有两个认识就不满足任何三个人都不认识的条件,比如B,C认识画一条实线那么A,B,C就相互认识与已知矛盾。所以B,C,E是所求的三个互都认识的人.

(4).任何一个人最多认识两外4或5个人,该情况与(3)类似所求的人即与A认识的两外4或5个人中的三个人。

证毕。

8.



$\varphi=\{\langle 1,1'\rangle,\langle 2,2'\rangle,\langle 3,3'\rangle,\langle 4,4'\rangle,\langle 5,5'\rangle,\langle 6,6'\rangle,\langle 7,7'\rangle,\langle 8,8'\rangle\}$

①. ⓐ中的子图$G_1=\langle V_1,E_1,\varphi_1\rangle$, $V_1=\{1,2,3,4\}$, $E_1=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$,

$\varphi_1=\{\langle e_1,\{1,2\}\rangle,\langle e_2,\{2,3\}\rangle,\langle e_3,\{3,4\}\rangle,\langle e_4,\{1,4\}\rangle\}$与ⓑ中的子图$G_1'=\langle V_1',E_1',\varphi_1'\rangle$,

$V_1'=\{1',2',3',4'\}$, $E_1'=\{e_1',e_2',e_3',e_4'\}$, $\varphi_2=\{\langle e_1',\{1,2\}\rangle,\langle e_2',\{2,3\}\rangle,\langle e_3',\{3,4\}\rangle,\langle e_4',\{1,4\}\rangle\}$

同构

②. ⓐ中的子图$G_2=\langle V_2,E_2,\varphi_2\rangle$, $V_2=\{5,6,7,8\}$, $E_2=\{e_5,e_6,e_7,e_8\}$,

$\varphi_2=\{\langle e_5,\{5,6\}\rangle,\langle e_6,\{6,7\}\rangle,\langle e_7,\{7,8\}\rangle,\langle e_8,\{8,9\}\rangle\}$与ⓑ中的子图$G_2'=\langle V_2',E_2',\varphi_2'\rangle$

$V_2'=\{5',6',7',8'\}$, $E_2'=\{e_5',e_6',e_7',e_8'\}$, $\varphi_2'=\{\langle e_5',\{5,6\}\rangle,\langle e_6',\{6,7\}\rangle,\langle e_7',\{7,8\}\rangle,\langle e_8',\{8,9\}\rangle\}$

同构。

除这两个子图以外,对应ⓐ中的子图$G_3=\langle V_3,E_3,\varphi_3\rangle$, $V_2=\{1,5,7,3\}$, $E_2=\{e_4,e_8,e_9,e_{10}\}$

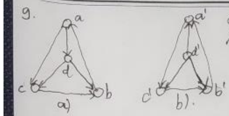
$\varphi_2=\{\langle e_9,\{1,5\}\rangle,\langle e_8,\{5,7\}\rangle,\langle e_{10},\{7,3\}\rangle,\langle e_4,\{3,1\}\rangle\}$在ⓑ无中对应的同构图,因此ⓐ和ⓑ不同构

张金源
76066001

数学作业纸

班级： 姓名： 编号： 第 页

9.



对于图ⓑ中的点d'，其出度为：$d^{+}_{G'}(d')=3$，入度：$d^{-}_{G'}(d')=0$。而在ⓐ图中不存在这样的结点。因此这两个图不同构。

10. 解：一个有n个结点的连通图(如果有一个孤立结点，去掉孤立结点考虑联通子图)。因为是无向连通图，每个结点的最大度数是n-1，最小度数是1，即对n个点赋值，共n-1种取值，由抽屉原理，必有两个结点的取值相同，即必有两个点的度数相同。

11. 结点数为n，由总边数建立关系：

$m=\frac{n_k\cdot k+(n-n_k)(k+1)}{2}$，由此可得$n_k=(k+1)n-2m$。

$2m=\cancel{kn_k}+nk+n-\cancel{kn_k}-n_k$

$2m=nk+n-n_k$

$2m=(k+1)n-n_k$

$n_k=(k+1)n-2m$。