加权图

定义7.3.5 设图 G ＝〈V, E, Ψ〉。若 W : E → R^+（R^+是正实数集），则称〈G，W〉为加权图。

i) 若 e∈ E，称 W(e) 为边 e 的加权长度。

ii) 路径中所有边的加权长度之和称为该路径的加权长度。

iii)从结点v至结点 v′的路径中，加权长度最小的称为从 v 至 v′的 最短路径。

iv) 若从v可达v′，则称从v 至 v′的最短路径的加权长度为从v至v′的加权距离。

v) 若从 v 不可达 v′，则称从 v 至 v′的加权距离为 ∞。

迪克斯特拉（Dijkstra）

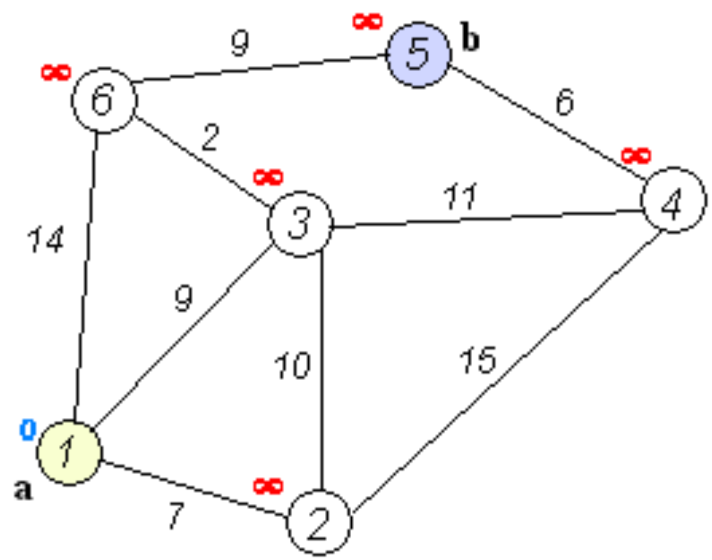
- 艾兹格·**W**·迪克斯特拉（**Edsger Wybe Dijkstra**，**1930**年**5**月**11**日~**2002**年**8**月**6**日）
- 荷兰人。 计算机科学家， 毕业就职于荷兰**Leiden**大学， 早年钻研物理及数学， 而后转为计算学。
- **1972**年获得图灵奖

迪克斯特拉（Dijkstra）

- 1 提出“goto有害论”；
- 2 提出信号量和pv原语;
- 3 解决了“哲学家聚餐”问题;
- 4 Dijkstra最短路径算法和银行家算法的创造者;
- 5 第一个Algol 60编译器的设计者和实现者;
- 6 THE操作系统的设计者和开发者;
- 与D. E. Knuth并称为我们这个时代最伟大的计算机科学家的人。
- 与癌症抗争多年，于2002年8月6日在荷兰Nuenen自己的家中去世，享年72岁

迪克斯特拉（Dijkstra）算法

- **1959年, 最短路径算法**
- 应用产物
  - ✓ 单源路径计算（**Single-source shortest paths problem**）
  - ✓（连通）有权（有向）图
  - ✓边的权值非负数
- 贪心算法**(Greedy Algorithm)**



迪克斯特拉（Dijkstra）算法

算法（求从结点 s 至 t 的加权距离）

距离数组$\lambda(v)$

1) $\lambda(s) \leftarrow 0$，且 $\forall\, v \in V - \{s\}$，$\lambda(v) \leftarrow \infty$;

2) $S \leftarrow V$;

3) 任取 $u \in \{ u' \mid$ 若 $v' \in S$，则 $\lambda(u') \le \lambda(v') \}$；

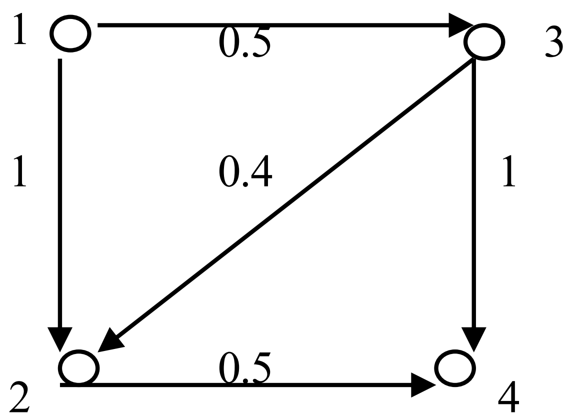
4) 如果 $u = t$，则 算法结束。

5) 对于以 u 为起点的每条边 e，如果 e 的终点 $v \in S$ 并且 $\lambda(v) > \lambda(u) + W(e)$，则$\lambda(v) \leftarrow \lambda(u) + W(e)$;

6) $S \leftarrow S - \{u\}$， 且 转向 3)。

当算法结束时，$\lambda(t)$ 即为从 s 至 t 的加权距离。

例子（加权距离）



当前点 \ d[v] \ 结点	1	2	3	4
	0	∞	∞	∞
1	/	1	0.5	∞
3	/	0.9	/	1.5
2	/	/	/	1.4
4				

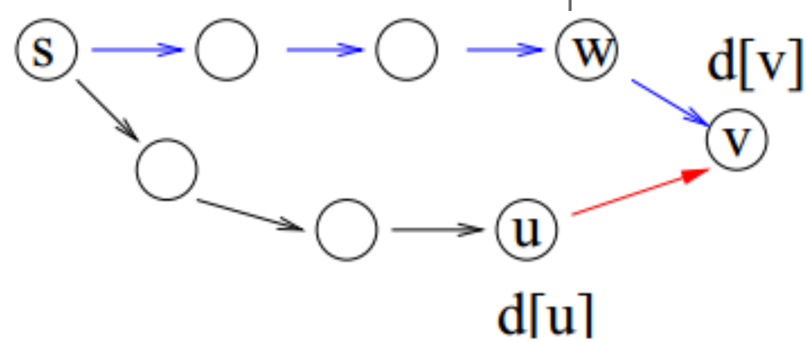
从 1 到 4 的加权距离为 1.4。

迪克斯特拉（Dijkstra）算法

```
Input: A graph G, a matrix w representing the weights between vertices
       in G, source vertex s
Output: None
for u ∈ V do
  | d[u] ← ∞, color[u] ← WHITE;// Initialize
end
d[s] ← 0;
pred[s] ← NULL;
Q ←queue with all vertices;
while Non-Empty(Q) do
  | // Process all vertices
  | u ←Extract-Min(Q);// Find new vertex
  | for v ∈ Adj[u] do
  |   | if d[u] + w(u, v) < d[v] then
  |   |   | // If estimate improves
  |   |   | d[v] ← d[u] + w(u, v);// relax
  |   |   | Decrease-Key(Q, v, d[v]);
  |   |   | pred[v] ← u;
  |   | end
  | end
  | color[u] ←BLACK;
end
```

- **d[u]：结点u到源点s的最短距离**
- **Q：优先队列**

v.key=d[v]



迪克斯特拉（Dijkstra）算法

Input: A graph $\boldsymbol{G}$, a matrix $\boldsymbol{w}$ representing the weights between vertices in G, source vertex $\boldsymbol{s}$

Output: None

for $u \in V$ **do**

  $d[u] \leftarrow \infty, color[u] \leftarrow$ WHITE;// Initialize

end

$d[s] \leftarrow 0$;

$pred[s] \leftarrow$ NULL;

$Q \leftarrow$queue with all vertices;

while *Non-Empty(Q)* **do**

  // Process all vertices

  $u \leftarrow$Extract-Min(Q);// Find new vertex

  for $v \in Adj[u]$ **do**

    if $d[u] + w(u,v) < d[v]$ **then**

      // If estimate improves

      $d[v] \leftarrow d[u] + w(u,v)$;// relax

      Decrease-Key($Q, v, d[v]$);

      $pred[v] \leftarrow u$;

    end

  end

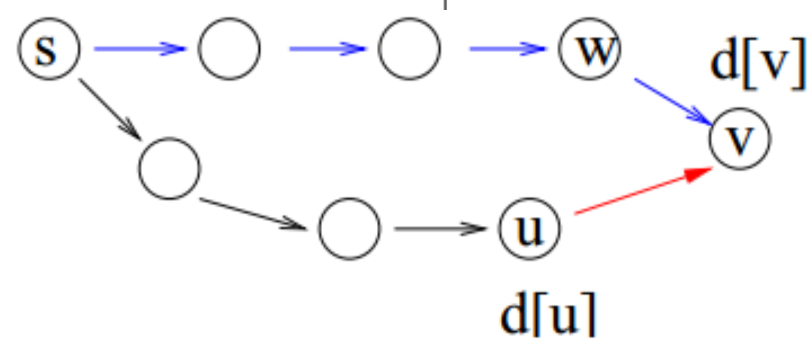
  $color[u] \leftarrow$BLACK;

end

怎么构造最短路径？

- d[u]：结点u到源点s的最短距离
- Q：优先队列

v.key=d[v]



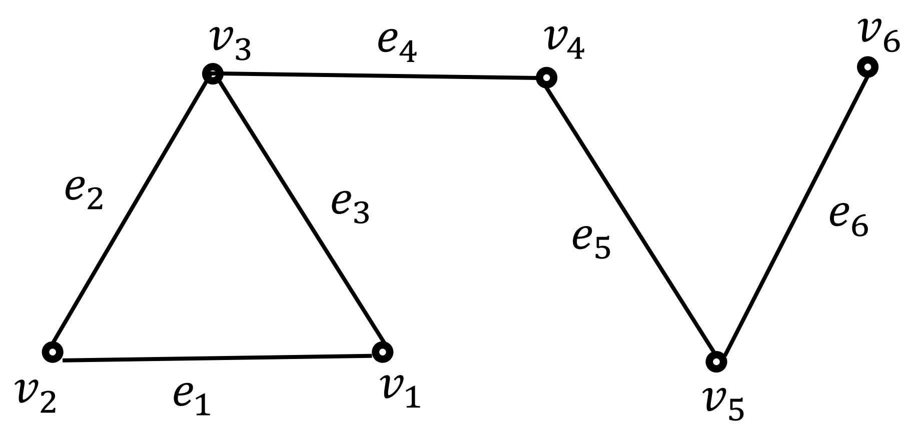
最短路径算法扩展

- 放松最短路条件
  - ✓任意值，即可能存在负数，可能有圈
  - ✓任意两点之间的最短路？
- 其他算法
  - ✓任意权值、单源：Bellman-Ford
  - ✓任意权值、任意两点：Folyd-Warshall

无向图的连通

定义7.3.6 如果无向图 G 的任意两个结点都互相可达，则称G是连通的；否则称G是非连通的。

- 无向图 G ＝〈V， E， Ψ〉是连通的 当且仅当对于 $\forall v \in V$，皆有 $R(v) = V$。



无向连通图

有向图的连通 — 基础图

定义 7.3.7 设有向图 G ＝ <V， E， Ψ>， 如下定义

Ψ'： $E \to \{\{v_1, v_2\} \mid v_1 \in V \wedge v_2 \in V\}$：

对任意 $e \in E$ 和 $v_1, v_2 \in V$，

若 $\Psi(e) = \langle v_1, v_2 \rangle$，则 $\Psi'(e) = \{v_1, v_2\}$。

称无向图 $G' = <V, E, \Psi'>$为有向图 G 的基础图。

$$\text{有向图} \xrightarrow{\text{有向边改为无向边}} \text{有向图的基础图}$$

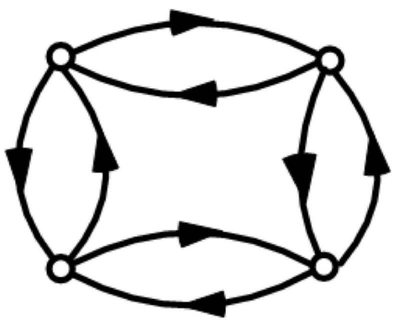
有向图的连通

定义7.3.8 设 G 是有向图。

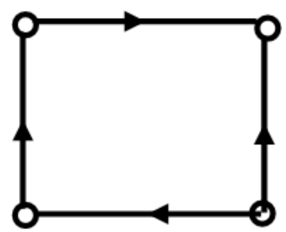
i) 如果 G 中任意两个结点都互相可达，则称 G 是强连通的；

ii) 如果对于 G 的任意两结点，必有一个结点可达另一结点，则称 G 是单向连通的；

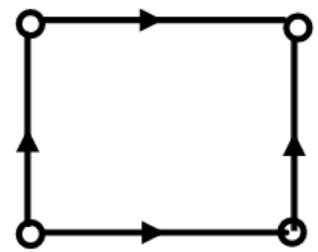
iii) 如果 G 的基础图是连通的，则称 G 是弱连通的。



(a) 强连通图



(b) 单向连通图



(c) 弱连通图

强连通图 ➔ 单向连通图 ➔ 弱连通图

极大子图、分支

定义7.3.9 设 G'是图 G 的具有某性质 P 的子图，并且对于 G 的具有该性质的任意子图 G''，只要 $G' \subseteq G''$就有 $G' = G''$，则称 G'相对于该性质 是 G 的极大子图。

定义7.3.10 无向图G的极大连通子图称为 G 的分支。

定义7.3.11 设 G 是有向图。

i) G 的极大强连通子图称为 G 的强分支。

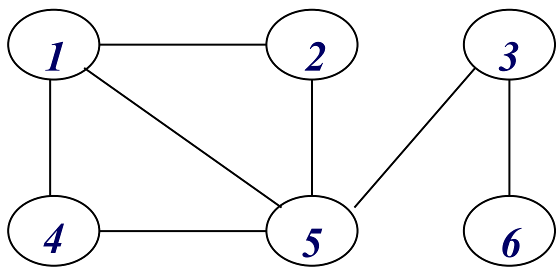
ii) G 的极大单向连通子图称为 G 的单向分支。

iii) G 的极大弱连通子图称为 G 的弱分支。

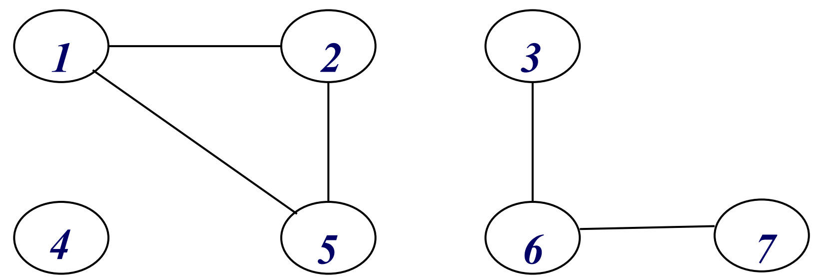
定理7.3.4

1) 连通无向图恰有一个分支。

2) 非连通无向图的分支多于一个。



连通无向图：**1**个分支



非连通无向图：**3**个分支

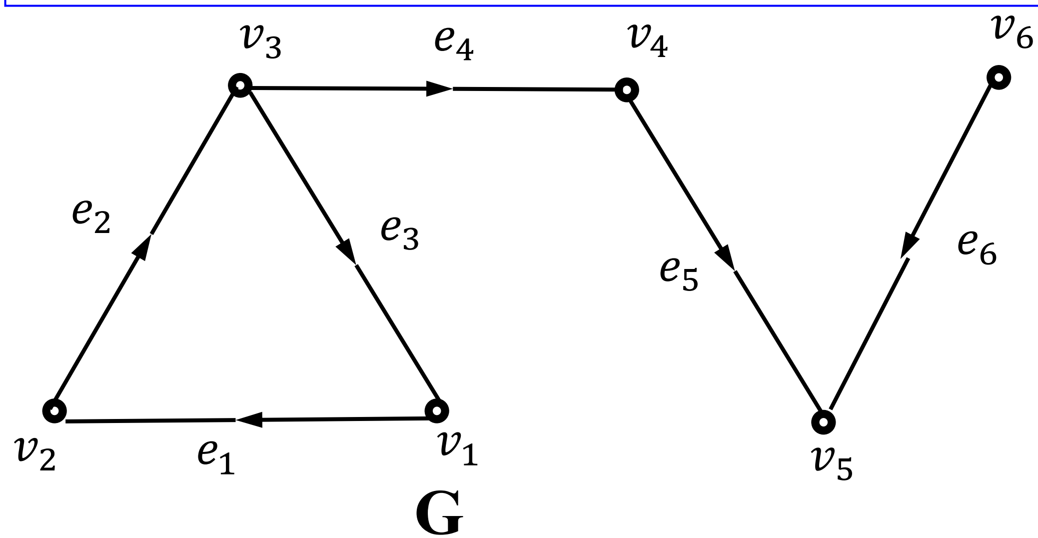
- ◆ 分支与等价关系：给定无向图 $G = \langle V, E, \Psi \rangle$。
- ✓ 关系 $R_V=\{<u,v> \mid u,v \in V$ 且从 u 到 v 可达$\}$ 是V上的等价关系。
- ✓ 分支: V关于R的等价类的导出子图。
  - 商集 $V/R=\{V_1,V_2,\ldots,V_k\}$，
  - $G[V_1], G[V_2], \ldots, G[V_k]$ 为G的分支。

例：证明有向图的每个结点和每条边恰处于一个弱分支中。

定理 7.3.5

1) 强连通 (单向连通，弱连通) 有向图恰有一个强分支 (单向分支，弱分支)。

2) 非强连通 (非单向连通，非弱连通) 有向图有一个以上强分支 (单向分支，弱分支)。



- **4个强分支：**

  G[{v_1,v_2,v_3}], G[{v_4}], G[{v_5}], G[{v_6}]

- **2个单向分支：**

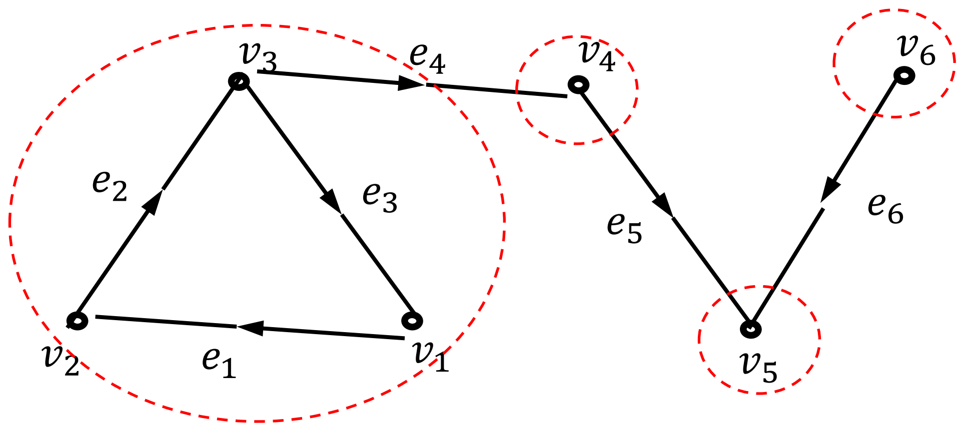
  G[{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5}], G[{v_5, v_6}]

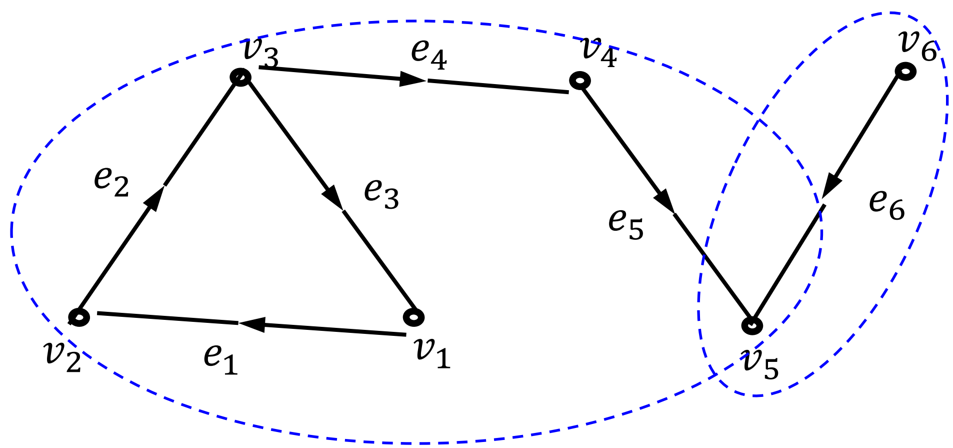
- **1个弱分支**

问题：给定有向图 G ＝〈V， E，Ψ〉，能否定义V上的等价关系使得等价类的导出子图构成强分支 (单向分支，弱分支)?

例：有向图的每个结点（每条边）是否处于一个强分支中？是否恰处于一个单向分支中？

强分支：
结点是，边不一定





单向分支：
结点与边都不一定

例：设G=<V, E, Ψ >。证明G为连通图当且仅当对V的每个划分{V_1, V_2},必存在一条边，它的两个端点分别属于V_1和V_2。

证明：(充分性) 反证法。假设G不连通，则G至少有两个分支G1和G2。

令V1是G1的结点集，V2是G-G1的结点集，显然 {V1, V2}是V的一个划分。

此时，V1, V2之间不可能有v∈V1, u ∈V2，使{v, u}是G中的一条边。矛盾

例：设G=<V, E, Ψ >。证明G为连通图当且仅当对V的每个划分$\{V_1, V_2\}$,必存在一条边，它的两个端点分别属于V_1和V_2。

证明：(必要性) 设 v1 ∈V1, v2 ∈V2，由连通性知，从v1至v2存在一条长度为n的简单路径P。

下面对n用第一数学归纳法。

1) 当n=1时，显然成立。

2) 设n=k时结论成立，当n=k+1时，考虑路径P上与v1邻接的点v'。

若v' ∈V2, 则边{v1, v'}满足要求。

若v' ∈V1, 则从P中删去v1，得到从v'到v2的长度为k的简单路径，由归纳假设知结论成立。

半路径

定义7.3.12

1) 设 G′是有向图 G＝〈V， E，Ψ〉的基础图，G′中的路径称为 G 中的半路径。

2) 设 $v_0e_1v_1\ldots v_{m-1}e_mv_m$是G中的半路径。对每个i (1≤i ≤m)，

- 若$\Psi(e_i)=<v_{i-1}, v_i>$，则称 e_i 是该半路径中的正向边；
- 如果$\Psi(e_i)=<v_i, v_{i-1}>$，则称 e_i 是该路径中的反向边。

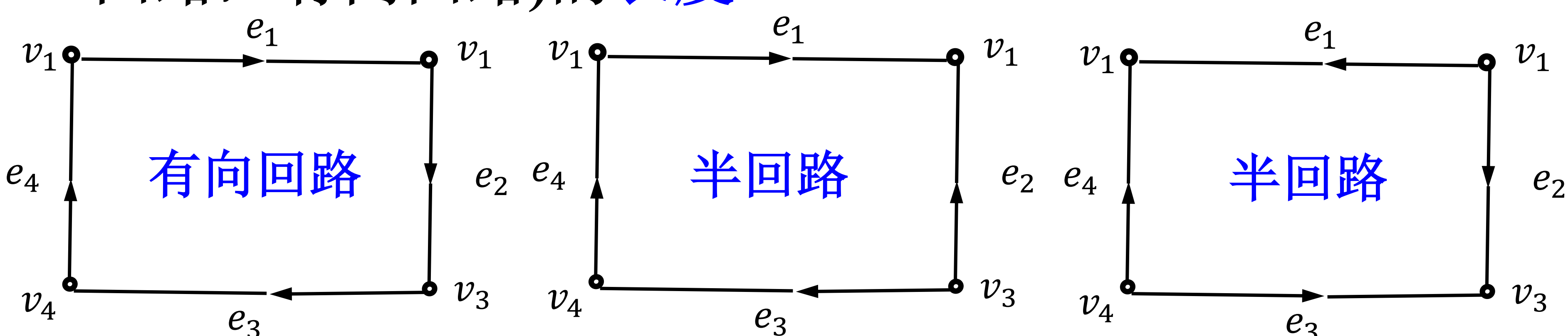
◆ 有向图 G 中的路径一定是 G 中的半路；但 G 中的半路径未必是 G 中的路径。

◆ 有向图中的半路径是路径当且仅当该半路径中的边都是正向边

回路、半回路、有向回路

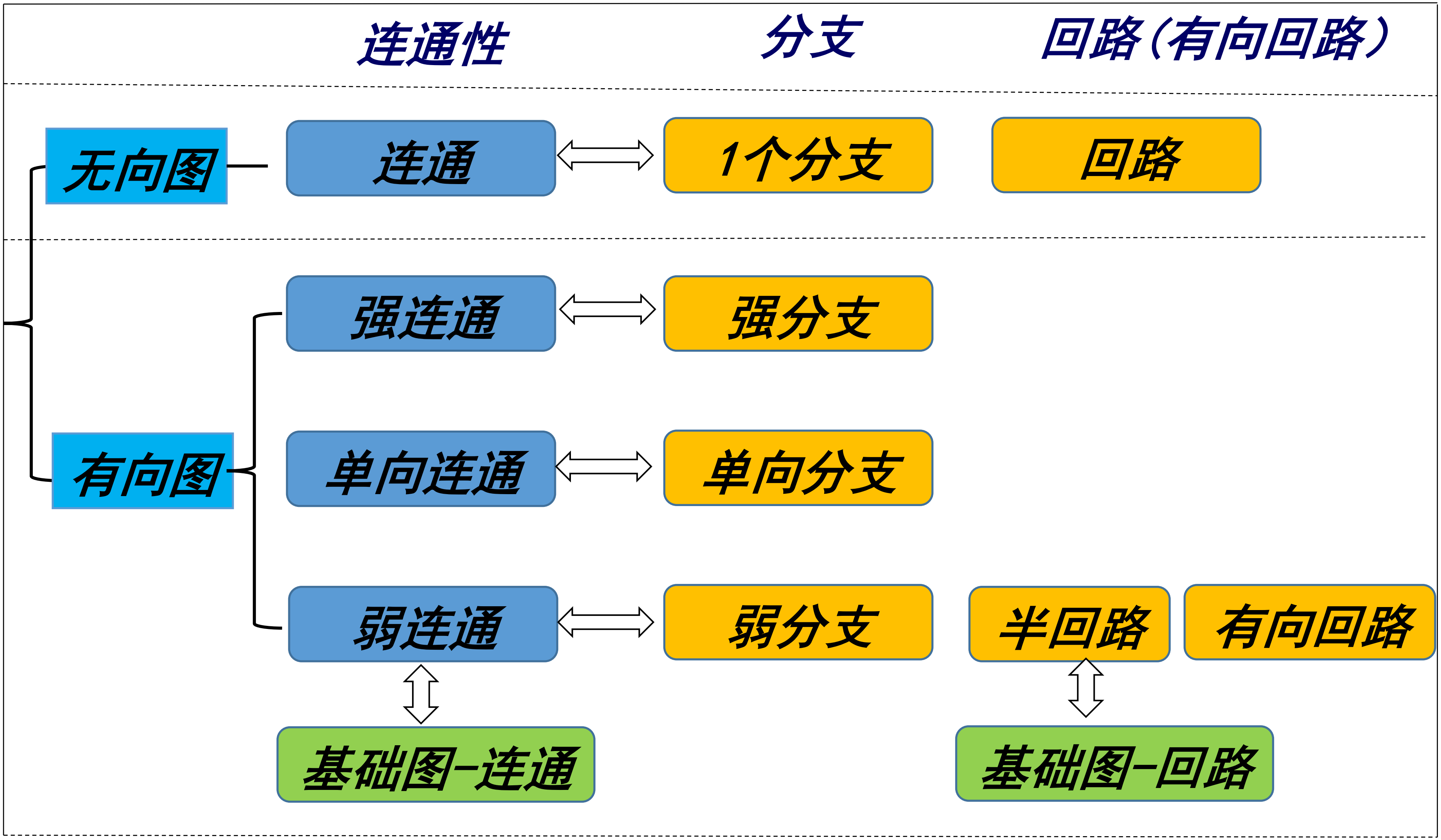
定义7.3.13.

1) 连通2度正则图称为回路；
2) 基础图是回路的有向图称为半回路；
3) 每个结点的出度和入度均为 1 的弱连通有向图称为有向回路；
4) 回路 (半回路，有向回路)边的数目称为回路 (半回路，有向回路)的长度。



(a) (b) (c)

部分概念关系图



连通性
分支
回路（有向回路）
无向图
连通
1个分支
回路
有向图
强连通
强分支
单向连通
单向分支
弱连通
弱分支
半回路
有向回路
基础图-连通
基础图-回路

定理 7.3.6 设v是图G的任意结点，G是回路（或有向回路），当且仅当
(i)G的阶与边数相等，并且
(ii)在G中存在这样一条v到v的闭路径，使得除了v在该闭路径中出现两次外，其余结点和每条边都在该闭路中恰出现 一次。

证明：充分性显然。

下面证明必要性。设 G＝〈V， E，Ψ〉

i) 证明 G 的阶与边数相等。

若 G 是回路（或有向回路），则G（或G的基础图）是连通2度正则图，有 $\sum_{v\in V} d_G(v) = 2|E| = 2|V|$。

因此G的阶与边数相等。

定理 7.3.6 设v是图G的任意结点，G是回路（或有向回路），当且仅当
(i)G的阶与边数相等，并且
(ii)在G中存在这样一条v到v的闭路径，使得除了v在该闭路径中出现 两次外，其余结点和每条边都在该闭路中恰出现 一次。

证明：ii) 对G的阶用第一归纳法。

若G是1阶有向回路，则G只有一个自圈e, vev是一个闭路径。

设G是n阶有向回路时必要性成立。若 G为n+1阶有向回路,

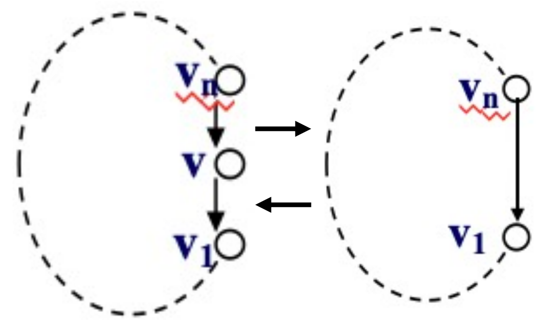
由于$d_G^+(v)=d_G^-(v)=1$，一定存在v_1, $v_n \in V$和e_1, $e_{n+1} \in E$,

使得$\Psi(e_1)=<v, v_1>$且$\Psi(e_2)=<v_n, v>$。

设边$e \notin E$, $\Psi'(e)=\{<v_n,v_1>\}$，定义图

$G'=\langle V-\{v\}, (E-\{<v_n,v>, <v, v_1>\})+\{<v_n, v_1>\},\Psi'\rangle$，

其中，对于任意边$e \in E-\{<v_n,v>, <v, v_1>\}$, $\Psi'(e)=\Psi(e)$。



n+1 阶　　n 阶

由归纳假设知，G'存在路径$v_1e_2v_2\ldots v_{n-1}e_nv_nev_1$。

此时， $ve_1v_1e_2v_2\ldots v_{n-1}e_nv_ne_{n+1}v$ 是G中满足条件的路径。

有回路、非循环图

定义7.3.14

1) 如果回路 (有向回路，半回路) C 是图 G 的子图，则称 G 有回路 (有向回路，半回路) C。

2) 没有回路的无向图和没有半回路的有向图称为非循环图。

回路：连通2度正则图；

半回路：基础图是回路的有向图

- 树和有向树都是非循环图
- 问题：如何判断一个图是非循环图？

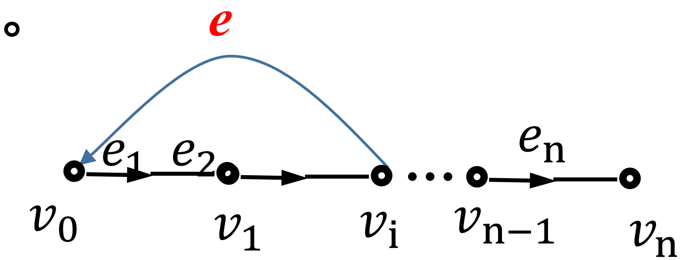
定理7.3.7 如果有向图 G 有子图 G′，使得对于 G′的任意结点 v，皆有$d_{G'}^{+}(v) > 0$，则 G 有有向回路。

定理7.3.8 如果有向图 G 有子图 G′，使得对于 G′中的任意结点 v，$d_{G'}^{-}(v) > 0$，则 G 有有向回路。

证明：设 G′=〈V′，E′，Ψ′〉，$v_0e_1v_1 \ldots v_{n-1}e_nv_n$ 是 G′ 中最长的基本路径。

由于$d_{G'}^{-}(v_0) > 0$，必可找到 $e \in E'$和 $v \in V'$，使 $vev_0e_1v_1 \ldots v_{n-1}e_nv_n$ 是G′中简单路径，且存在$i \in [0, n]$，使得 $v = v_i$。

因此，G的以 $\{v_0, \ldots, v_i\}$ 为结点集合，以 $\{e, e_1, \ldots, e_i\}$为边集合的子图是有向回路。



$v = vi$

W–过程：判断一个有向图是否有有向回路

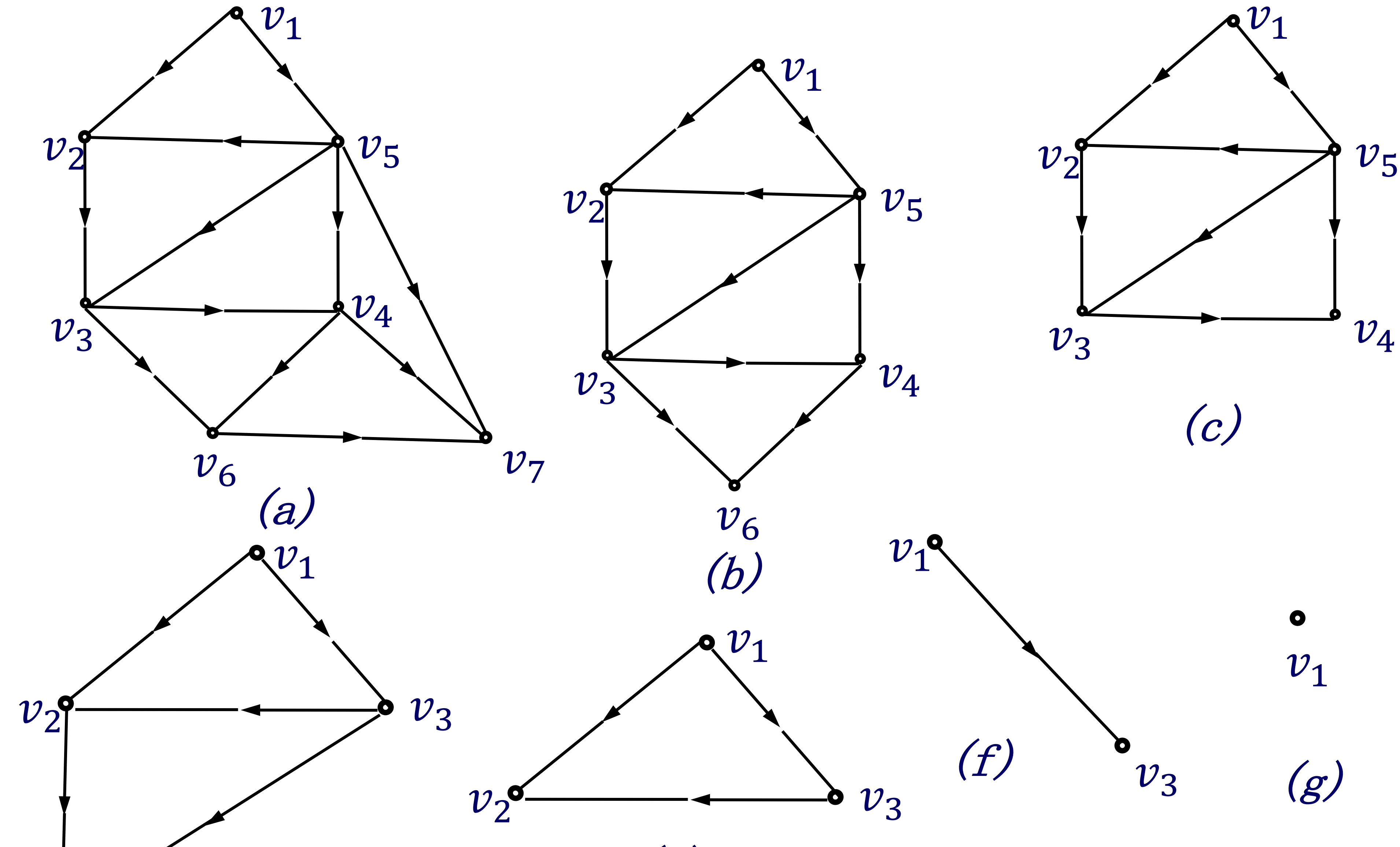
定理7.3.7 如果有向图 G 有子图 G′，使得 对于 G′的任意结点 v，皆有$d_{G'}^{+}(v) > 0$，则 G 有有向回路。

定理7.3.8 如果有向图 G 有子图 G′，使得 对于 G′中的任意结点 v， $d_{G'}^{-}(v) > 0$，则 G 有有向回路。

设 v 是有向图G的结点且$d_G^{+}(v)=0$ 或 $d_G^{-}(v)=0$。

- 从G中去掉 v 和与之关联的边得到有向图 G-{v}的过程称为W-过程。
  - ✓ G 有有向回路当且仅当 G – {v} 有有向回路；
  - ✓ 若 n 阶有向图 G 没有有向回路，则经过 n–1 次W—过程得到平凡图。

例：判断一个有向图是否有有向回路的W-过程



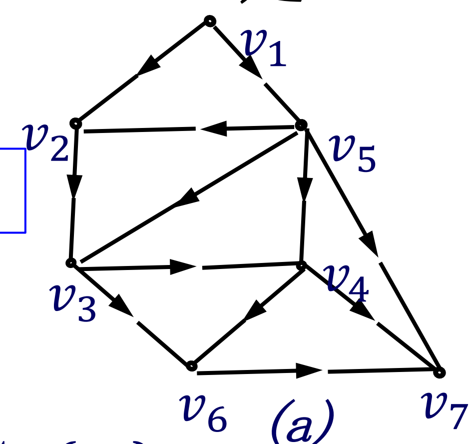
没有有向回路

判断一个图是否是非循环图

定理7.3.9 图 G不是非循环图当且仅当 G 有子图 G′，使得 对于G′的任意结点v，皆有 $d_{G'}(v) > 1$。

- 图 G是非循环图当且仅当 对于G的任意子图 G′，一定存在一个结点v，使得 $d_{G'}(v) \le 1$。

不是非循环图



给定 n阶图有向图 G。令$G_0 = G$。

对于小于n-1的自然数 i，如下归纳定义 G_i:

- 若 G_i 有结点v_i满足$d_{G_i}(v) \le 1$，则令$G_{i+1} = G_i - \{v_i\}$。

得到图序列 G_0， G_1， … ， G_m，其中$0 \le m \le n-1$。

若G_m是平凡图，则 G 是非循环图，否则不然。

连通的充分条件

例：设 G 为 n 阶简单无向图，

1) 若 G 的任意两个结点的度数之和大于等于 n – 1，则 G 是连通的。

2) 若对G的任意结点 v, 皆有$d_G(v) \geq (n-1)/2$，则G是连通的。

证明：1) 设u, v是图G中任意两个结点，则$d_G(u)+d_G(v)\geq n-1$。

由于G为简单无向图, 因此 u, v只能与n-1个结点相连。

(a)若u与v相连，即G有边{u, v}，则u, v可达；

(b)若u与v不相连，则u, v只能与剩下的n-2个结点相连。

由于$d_G(u)+d_G(v)\geq n-1$，由抽屉原理得，至少存在一个结点既与u相连，又与v相连，得u从 v可达。

因此，G是连通无向图。

连通的充分条件

例：设 G 为 n 阶简单无向图，

1) 若 G 的任意两个结点的度数之和大于等于 n – 1 ，则 G 是连通的。

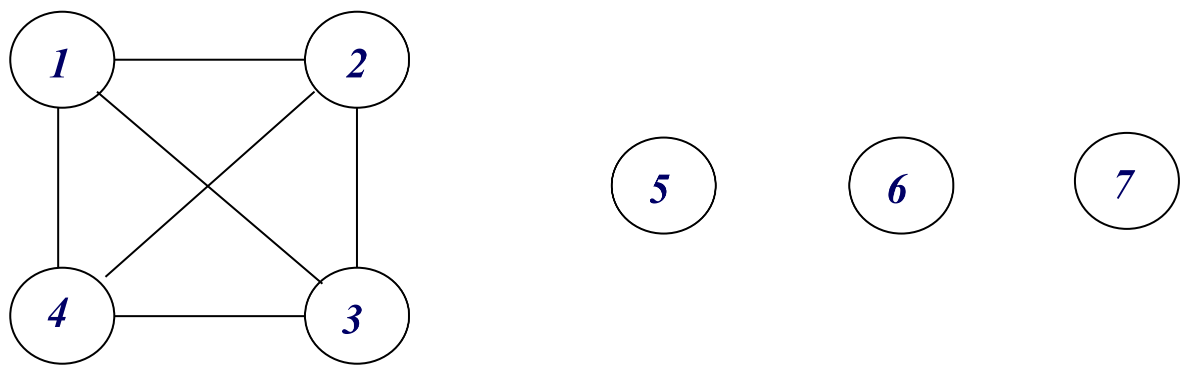
2) 若对G的任意结点 v, 皆有$d_G(v) \geq (n-1)/2$，则G是连通的。

证明：2) 对任意的两个结点u, v， 有

$$d_G(u)+d_G(v) \geq (n-1)/2+ (n-1)/2 = n-1。$$

由1)得，G是连通有向图

例：设 G为 n 阶简单无向图，且G有k个分支，m条边，则有 $m \le (n-k)(n-k+1)/2$。



如何定义连通度

- 问题：如何定量地比较无向图的连通性的强与弱？
  - 点连通度：为了破坏连通性，至少需要删除多少个顶点？
  - 边连通度：为了破坏连通性，至少需要删除多少条边？
- “破坏连通性”是指“变得更加不连通”。

点割集的定义

- 设无向图$G=\langle V, E\rangle$为连通图, 若有点集$V_1 \subset V$, 使
  - ✓图G删除了V_1的所有结点后，所得的子图是不连通图，
  - ✓而删除了V_1的任意真子集后，所得到的子图仍是连通图，

则称V_1是G的一个点割集。

- 若某一个结点构成一个点割集，则称该结点为割点。

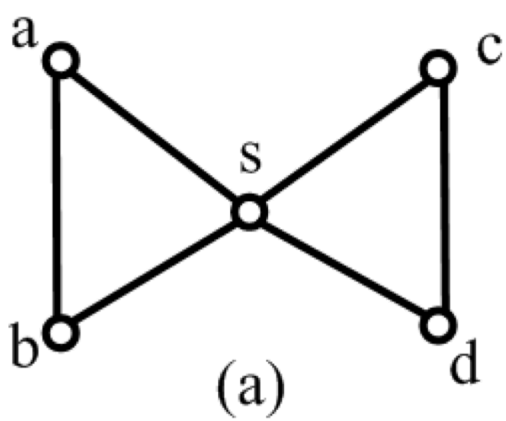
形式化为：

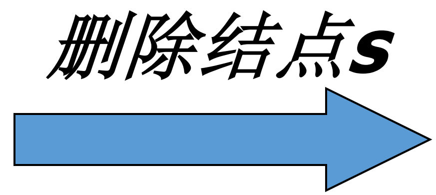
若分支数$W(G-V_1) > W(G)$且$\forall V' \subset V_1$, $W(G-V') = W(G)$,

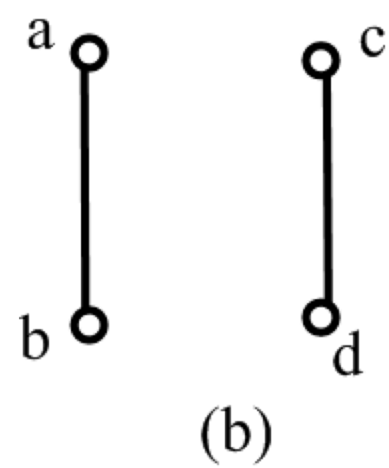
则称V_1为G的点割集. 若$\{v\}$为点割集, 则称v为割点.

实例1

- 例1求下图的割点







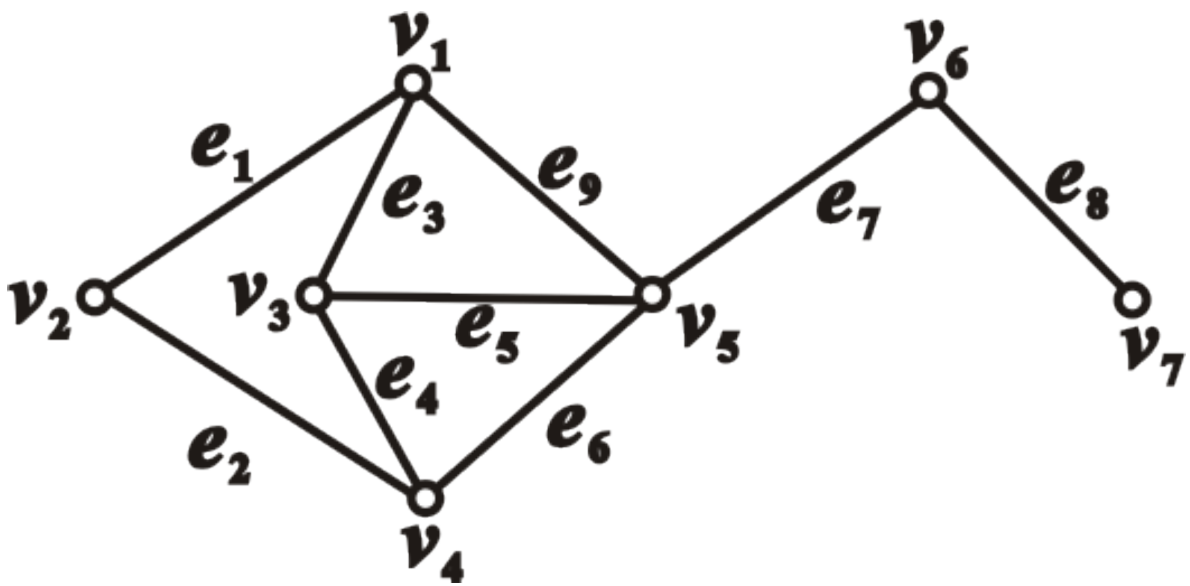
连通图，W=1

非连通图，W=2

因此s是割点。

实例2

例2 在下图所示的图中，找出点割集和割点。



点割集：$\{v_1,v_4\}$, $\{v_6\}$，$\{v_5\}$，

割点：v_6，v_5

v_2、v_3与v_7不在任何点割集中。

无向图的点连通度

定义 设G是无向图，$k(G)=\min\{\,|V_1|\mid V_1$是 G 的点割集$\}$ 是G的点连通度，也称作连通度。

几点说明：

1.连通度k(G)表示为了产生一个不连通图所需要删除的点的最少数目。

2. 非连通图的连通度等于0，存在割点的连通图的连通度为1，n阶完全图的连通度为n-1。

3.连通度k(G)表示图G的连通程度， k(G)大表示连通性强，即需要删除更多的点才能使图从连通变为非连通。

边割集

- 设无向图 $G = \langle V, E\rangle$ 为连通图, 若有边集 $E_1 \subset E$, 使
  - ✓ 图 G 删除了 E_1的所有边后，所得的子图是不连通图，
  - ✓ 而删除了E_1的任意真子集后，所得到的子图仍是连通图，

则称E_1是G的一个边割集。

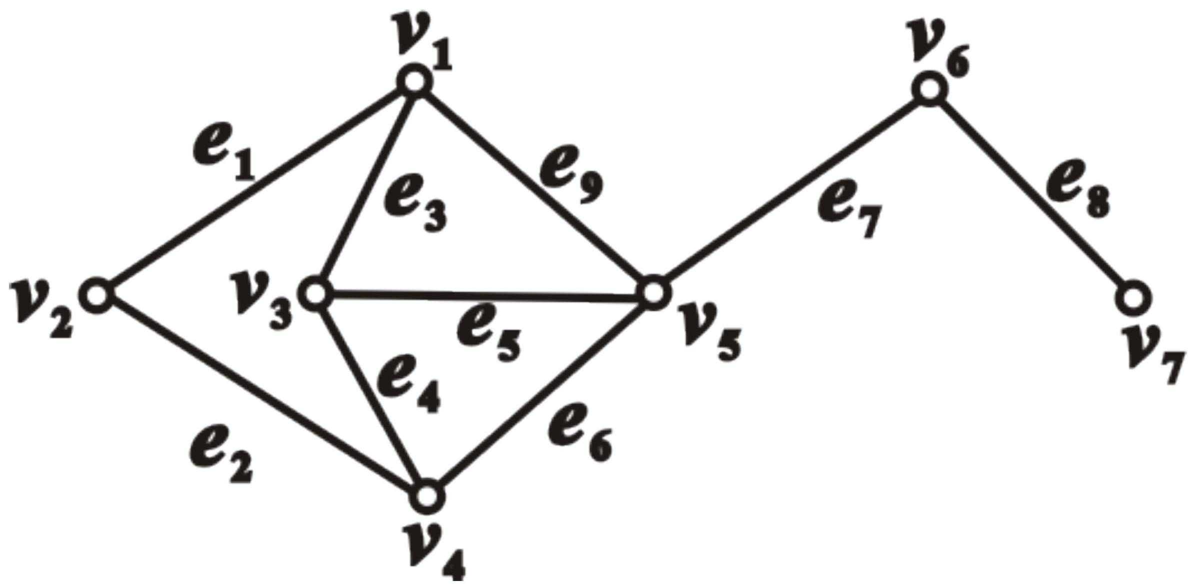
- 若某一个结点构成一个点割集，则称该结点为割边（或桥）。

更一般定义为：

若$W(G-E_1)>W(G)$且$\forall E'\subset E_1$，$W(G-E')=W(G)$，则称E_1为G的边割集. 若{e}为点割集, 则称e为割边.

实例3

例3 在下图所示的图中，举出边割集和桥的例子。



边割集：$\{e_1,e_2\}$, $\{e_3,e_4,e_5\}$, $\{e_1,e_3,e_5,e_6\}$, $\{e_7\}$， $\{e_8\}$等

割边：e_7， e_8

边连通度

定义：设G是无向图，$\lambda(G)=\min\{|E_1| \mid E_1\text{是}G\text{的边割集}\}$是G的边连通度。

几点说明：

1. 边连通度 **λ(G)** 是为了产生一个不连通图所需要删除的边的最少数目。

2. 非连通图的边连通度等于**0**，存在桥的连通图的边连通度为**1**，平凡图的边连通度为**0**。

3. 边连通度 **λ(G)** 表示图**G**的边连通程度，**λ(G)**大表示边连通性强，即需要删除更多的边才能使图从连通变为非连通。

割点、割边的充分必要条件

- 一个连通无向图G中的结点v是割点 $\Leftrightarrow$ 存在结点u和w，使得连接u和w的每条路都经过v。
- 一个连通无向图G中的边e是割边 $\Leftrightarrow$ 存在结点u和w，使得连接u和w的每条路都经过e。

点连通度与边连通度的比较

定理：对于任何一个图*G*，有

$$k(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$$