作业 12

习题 3.5

1.

a) $f(x)=e^x$, $x\in R$，或 $f(x)=|x|$，$x\in R$。

b)

$$f(x)=\begin{cases}0 & x=\frac{1}{2}\\ (\frac{1}{2})^{n-1} & x=(\frac{1}{2})^n \quad (n\ge 2)\\ x & \text{其它}\end{cases}$$

或 $$f(x)=\begin{cases}0 & x=\frac{1}{2}\\ \frac{1}{n-1} & x=\frac{1}{n} \quad (n>2)\\ x & \text{其它}\end{cases}$$

c） $f(x) = 1/2 - x/4$ 或 $f(x) = 1/2\cos(\pi x/3)$。

2. 证明：令 $S_i=x_1+...+x_i$, $i\in[1, n]$，即 S_i 是序列 $x_1,x_2,\ldots, x_n$ 的前 i 个的和。令 bi 是 Si 除 n 后的余数，$i\in[1, n]$,则 bi 的取值为 0,1,…, n-1。若存在一个 $b_j=0$，则此时，令 i=1, k=j，有 $S_j=x_i+\ldots+x_k$ 能被 n 整除。

否则，b_i, $i\in[1, n]$,只有 n-1 个取值 1,…, n-1。

因为一共有 n 个 bi, 由抽屉原理知必有两个 bj,bk (j<k)相等。

则 $S_k-S_j=x_{j+1}+\ldots+S_k$ 能被 n 整除。

7. 证明：设 37 天中每天复习的小时数分别为 $a_1, a_2, \ldots, a_{36}, a_{37}$。构造出数列 $a_1, a_2, \ldots, a_{36}, a_{37}$ 的前 n 项和的数列 $s_1, s_2, \ldots, s_{36}, s_{37}$，即

$s_i=a_1+\ldots+a_i,\ i\in[1, n]$。

则有：$1\le a_1=s_1<s_2<\ldots<s_{36}<s_{37}\le 60$，是严格递增序列，

而序列 $s_1+13, s_2+13, \ldots, s_{36}+13, s_{37}+13$ 也是一个严格递增序列:

$14\le s_1+13<s_2+13<\ldots<s_{36}+13<s_{37}+13\le 60+13=73$。

于是，这 74 个数 s_1，s_2，$\cdots s_{36}$，s_{37} 和 s_1+13，s_2+13，…，$s_{36}+13$，$s_{37}+13$ 都在区间[1，73]内。

根据抽屉原理，必定存在两个数相等。

由于 $s_1, s_2, \ldots, s_{36}, s_{37}$ 与 s_1+13，s_2+13，…，$s_{36}+13$，$s_{37}+13$ 均为严格单调的，因此必然存在一个 i 和 j，使得 $s_i=s_j+13$。

因此该工人在第 j+1 天起到第 i 天的这些天里，共复习了 13 小时。