第7章 图论

7-4 欧拉图和哈密顿图

北航计算机学院：李建欣

Tel：82339274（G506）

E-mail：lijx@buaa.edu.cn

http://act.buaa.edu.cn/lijx

主要内容

1. 图论的基本概念
2. 子图和图的运算
3. 路径、回路和连通图
4. 欧拉图和哈密顿图
5. 图的矩阵表示
6. 树、有向树和有序树

§7.4　欧拉图和哈密顿图

欧拉图和哈密顿图

目的：熟悉欧拉定理的运用、判欧拉图和Hamilton图的方法；

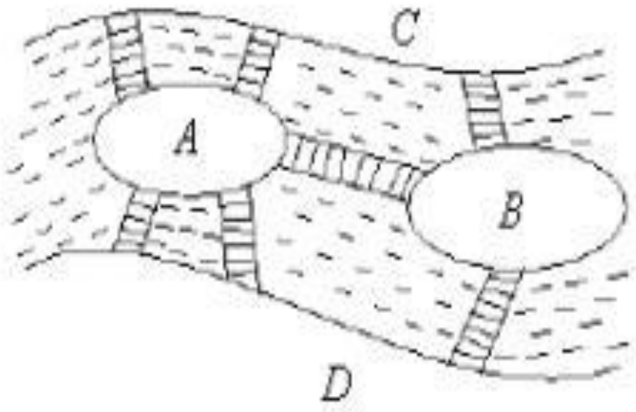
重点：判欧拉图、Hamilton图的算法；欧拉定理的运用；

问题：

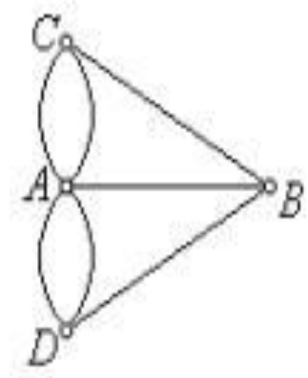
1.什么是欧拉图、Hamilton图？

2.判定条件是什么？

哥尼斯堡桥问题 (Königsberg bridges problem)



(1)

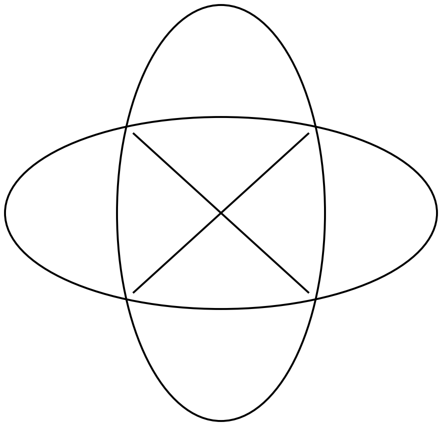


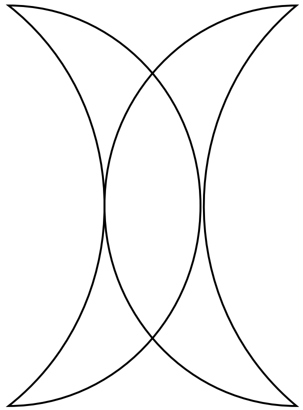
(2)

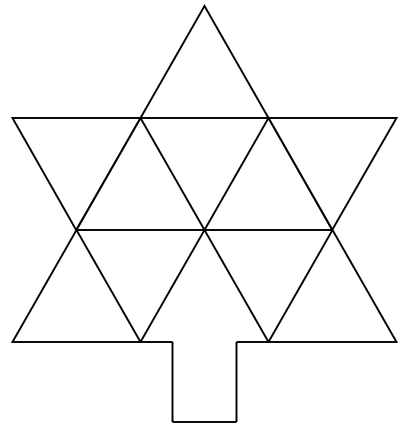
从四块陆地的任何一块出发，怎样通过每座桥恰巧一次，最终回到出发地点？（即找包含所有边的简单闭路径）

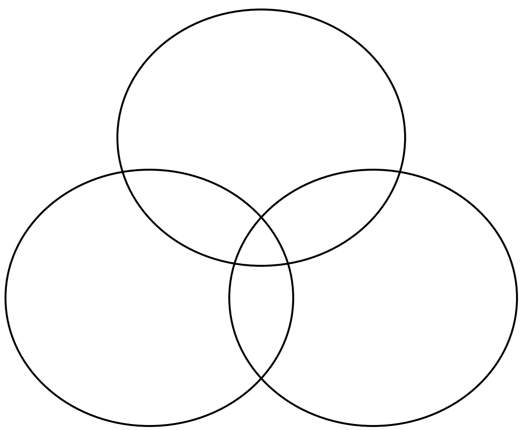
Euler 1736　　　瑞士数学家　　　证明不可能

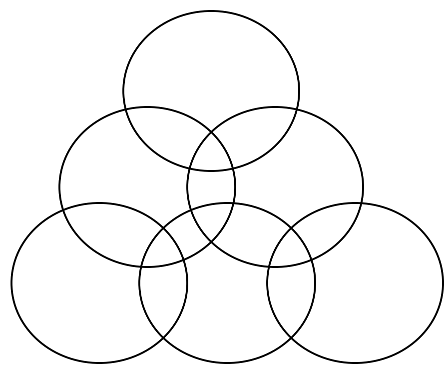
一笔画







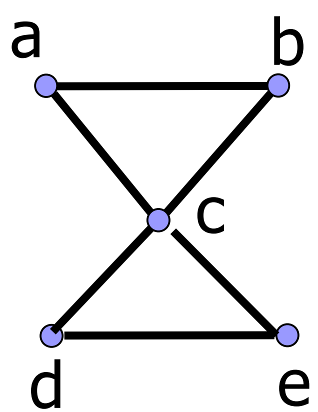


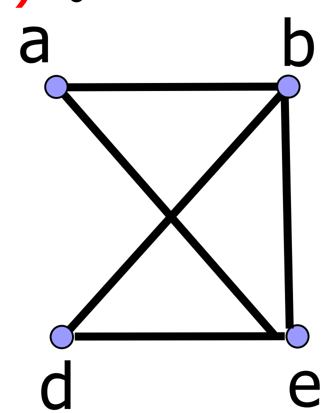


欧拉路径、欧拉闭路

图 G 中包含其所有边的简单开路径称为 G 的欧拉路径。

图 G 中包含其所有边的简单闭路径称为 G 的欧拉闭路（欧拉回路，Euler Tour/Circuit）。





Euler circuit: a,c,d,e,c,b,a

Euler path: b,a,e,d,b,e

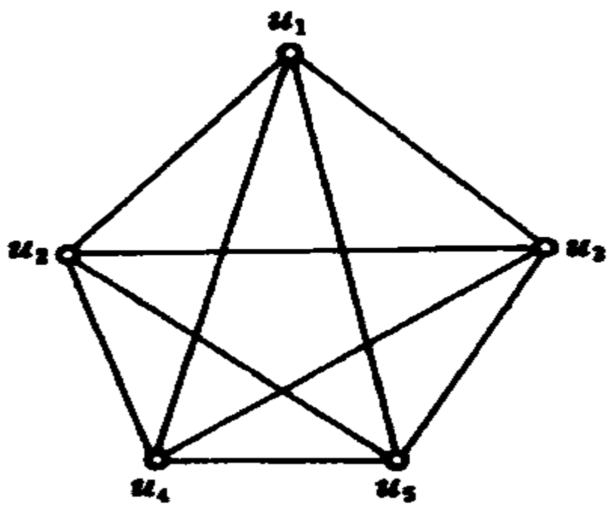


图 13.1　欧拉图

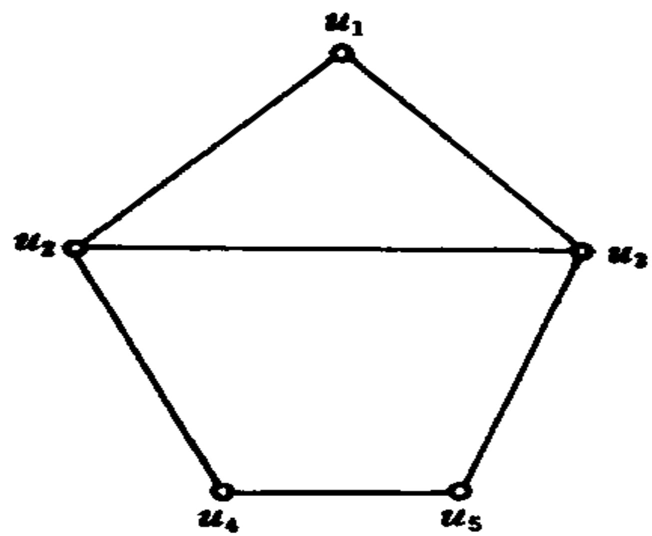


图 13.2　非欧拉图

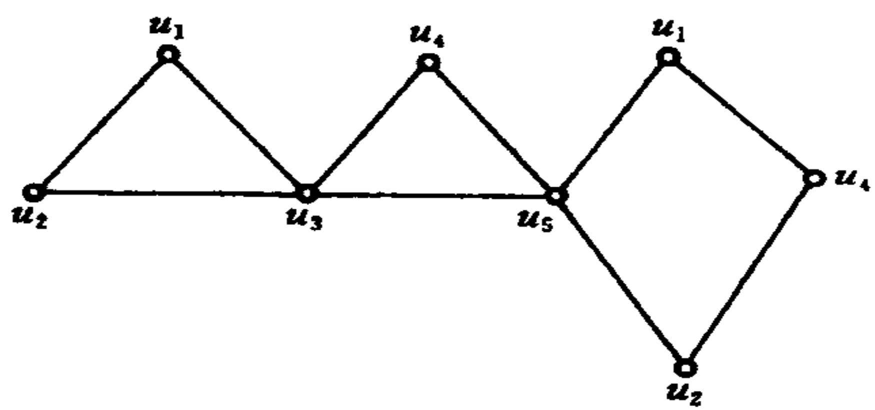


图 13.3　欧拉图

欧拉图、欧拉有向图

- 每个结点都是偶结点的无向图称为欧拉图。
- 每个结点的出度和入度都相等的有向图称为欧拉有向图。

欧拉找到了连通无向图是欧拉图的充分必要条件：欧拉定理。

其他教科书：具有欧拉闭路的无向图称为欧拉图。

欧拉定理

定理7.4.1 设 G 是连通无向图，
G是欧拉图(每个结点都是偶结点)　 iff　G有欧拉闭路。

证明：
(1) 充分性 $\Leftarrow$):
设G 是连通无向图，且有欧拉圈a，所以G的每个顶点u都至少在a上出现一次。当a通过u 进去和出来一次，就使u 的度数增加2。又因为a上的边不重复，所以如果a再次通过u，则必有另外两条边使u的次数增加2，如此等等。可见，G中每一顶点的度数必定是偶数。

欧拉定理

定理7.4.1 设 G 是连通无向图，G是欧拉图(每个结点都是偶结点) iff G有欧拉闭路。

证明：必要性 ⇒)。

对G的边的数目 n 用第二归纳法:

i) 若 $n = 0$， 则 G为平凡图，必要性成立。

ii) 令 $n \in I^+$，设任意边数少于 n 的连通欧拉图均有欧拉闭路。

若G有 n 条边，

G是连通欧拉图 $\xrightarrow{\text{连通、偶结点}}$ G的任意结点的度大于1（大于等于2）

$\xrightarrow{\text{定理7.3.9}}$ G有回路。 设G有长度为 m 的回路 C

$\xrightarrow{\text{定理7.3.6}}$ 在 C 中存在闭路径 $v_0e_1v_1\ldots v_{m-1}e_mv_0$，其中 $v_0, v_1,\ldots, v_{m-1}$ 各不相同，并且$\{v_0, v_1,\ldots, v_{m-1}\}$ 和 $\{e_1, e_2,\ldots, e_m\}$分别是 C 的结点集合和边集合。

欧拉定理

令 $G' = G - \{e_1, \ldots, e_m\}$，设 G' 有 k 个分支 $G_1, \ldots, G_k$。

$\xrightarrow{\text{G是连通的}}$ G'的每个分支 G_i 与 C 都有公共结点。

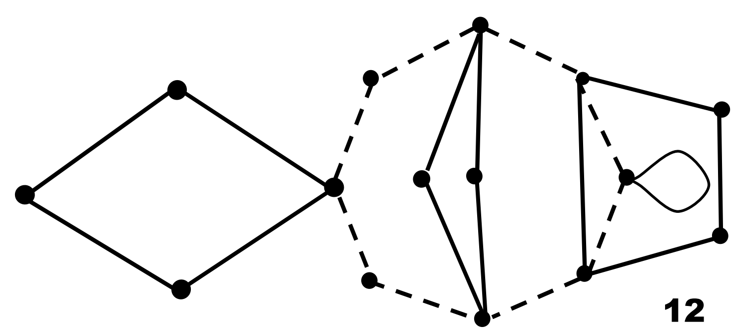
设 v_{ni}为 G'的分支 G_i（$1 \le i \le k$）与 C的一个公共结点，并假定 $0 \le n_1 \le \ldots \le n_k \le m-1$。

显然，G_i 为边数小于 n 的连通欧拉图（G_i为分支且每个结点仍为偶结点）。由归纳假设：G_i 有一条从 v_{ni} 到 v_{ni} 的欧拉闭路径 P_i。

因此，以下的闭路径：

$$v_0 e_1 v_1 \ldots e_{n1} P_1 e_{n1+1} \ldots e_{nk} P_k e_{nk+1} \ldots v_{m-1} e_m v_0$$

就是G的一条欧拉闭路径。



定理7.4.2

设 $G = \langle V, E, \Psi \rangle$ 为连通无向图，$v_1, v_2 \in V$ 且 $v_1 \neq v_2$。
则 G 有一条从 v_1 至 v_2 的欧拉路径 iff
G 恰有两个奇结点 v_1 和 v_2。

证明：任取 $e \notin E$，并令 $\Psi' = \{ \langle e, \{v_1, v_2\} \rangle \}$，则

G 有一条从 v_1 至 v_2 的欧拉路径 iff

$G' = G + \{e\}_{\Psi'}$ 有一条欧拉闭路 iff

G' 是欧拉图 iff

G' 中每个结点都是偶结点 iff

G 中恰有两个奇结点 v_1 和 v_2

定理7. 4. 3

设 G 为弱连通的有向图。G 是欧拉有向图 iff G 有欧拉闭路。

证明过程与定理7.4.1类似。

定理7. 4. 4

设 G 为弱连通的有向图。v_1 和 v_2 为 G 的两个不同结点。

G有一条从 v_1 至 v_2 的欧拉路径　iff

$d_G^+(v_1) = d_G^-(v_1) + 1$，　$d_G^+(v_2) = d_G^-(v_2) - 1$

且对 G 的其它结点 v ，均有 $d_G^+(v) = d_G^-(v)$

证明过程与定理7.4.2类似。

根据哥尼斯堡桥问题画出的图不是欧拉图，因此不存在欧拉闭路，即哥尼斯堡桥问题没有解。

定理7.4.5

如果G_1和G_2是可运算的欧拉图，则$G_1 \oplus G_2$是欧拉图。

证明：$G_1 = <V_1, E_1, \Psi_1>$，$G_2 = <V_2, E_2, \Psi_2>$，

$G_1 \oplus G_2 = <V, E, \Psi>$

设v是$G_1 \oplus G_2$的任意结点，则有以下三种可能：

i) $v \in V_1$ 但 $v \notin V_2$；

ii) $v \in V_2$ 但 $v \notin V_1$；

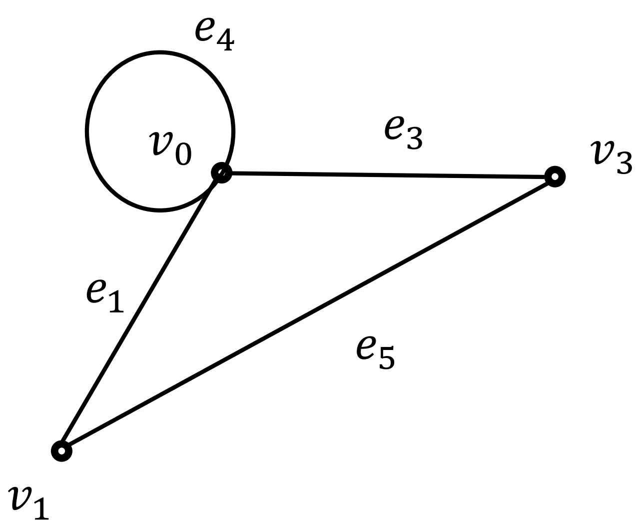
这两种情况下，与 v 相连的边在 $G_1 \oplus G_2$ 中不变，v 仍是 $G_1 \oplus G_2$ 的偶结点。

iii) $v \in V_1$ 且 $v \in V_2$。

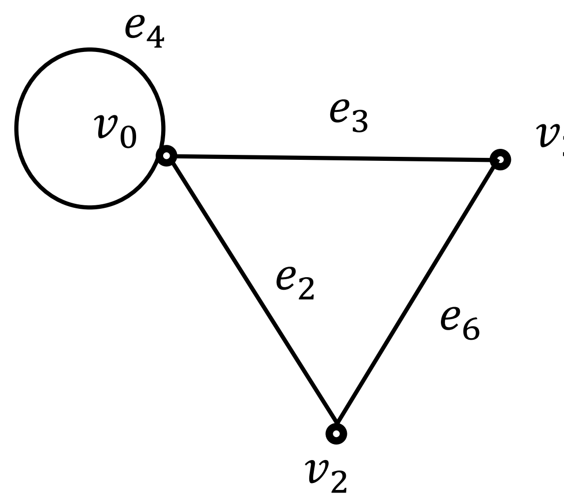
设 G_1 和 G_2 有 k 条公共边与 l 个公共自圈与 v 关联，则 $d_{G1 \oplus G2}(v) = d_{G1}(v) + d_{G2}(v) - 2(k + 2l)$，故 v 仍是 $G_1 \oplus G_2$ 的偶结点。

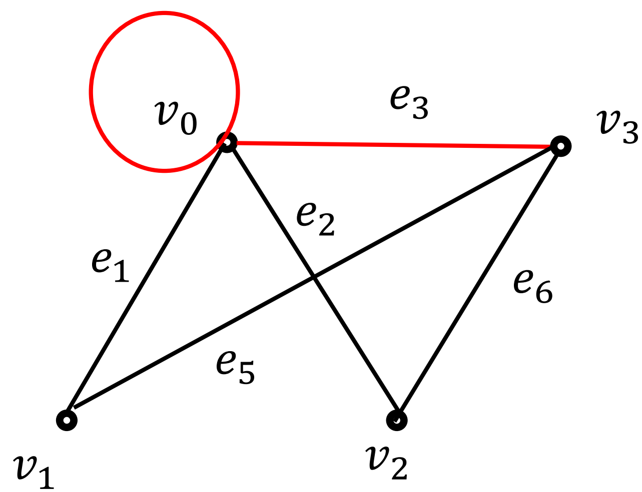
$\therefore$ $G_1 \oplus G_2$ 是欧拉图（图中所有结点均为偶结点）。

例：图的环和



$G_1 \oplus G_2$





Fleury算法

- 输入:无向图G.
- 输出: 从v到w的欧拉路径/欧拉闭路.
- 算法:
  - 从任意一点开始, 沿着没有走过的边向前走
  - 在每个顶点, **优先选择剩下的非桥边**, 除非只有唯一一条边
  - 直到得到欧拉回路或宣布失败

Fleury算法(递归形式)

- 算法:

(1) if d(v)>1 then e:=v关联的任意非割边

(2) else e:=v关联的唯一边

(3) u:=e的另一个端点.

(4) 递归地求G-e的从u到w的欧拉通路

(5) 把e接续在递归地求出的通路上

Fleury算法(迭代形式)

- 算法:

(1) P_0:=v;

(2) 设$P_i=v_0e_1v_1e_2\ldots e_iv_i$已经行遍,设$G_i=G-\{e_1,e_2,\ldots,e_i\}$,

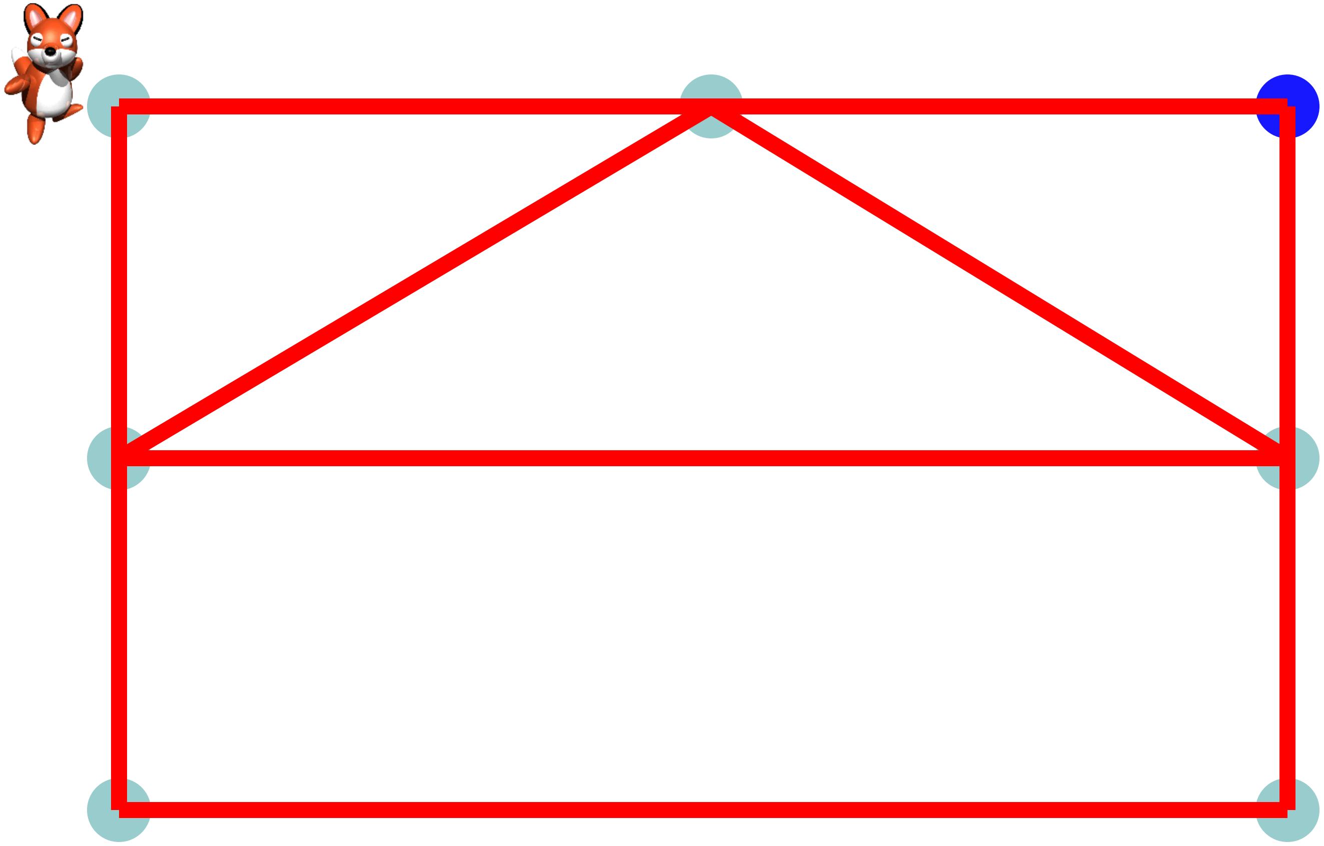
$e_{i+1}:= G_i$中满足如下2条件的边:

(a) e_{i+1}与v_i关联

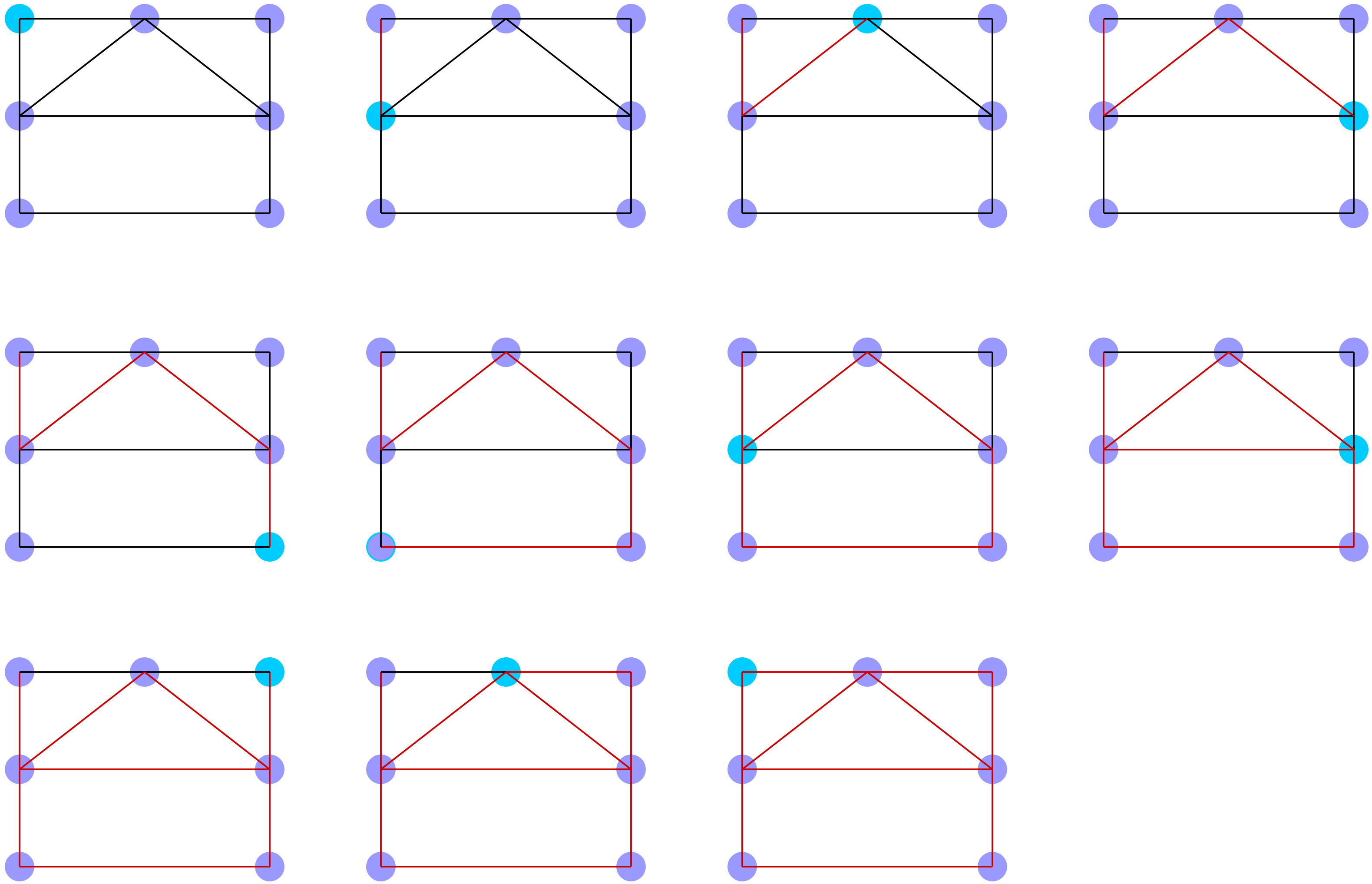
(b) 除非别无选择,否则e_{i+1}不是G_i中的桥

(3) 若$G_i \neq N_i$, 则回到(2); 否则算法停止

Fleury算法(举例)



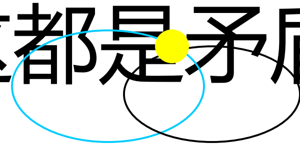
Fleury算法(举例)

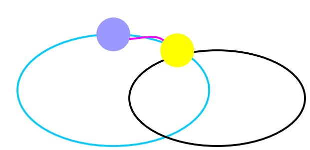


Fleury算法(正确性证明)

- 设G是无向欧拉图,则Fleury算法终止时得到的简单路径是欧拉闭路
- 证明: (1) P_m是回路：显然.

  (2) P_m经过G中所有边: (反证)否则, G-P_m的连通分支还是欧拉回路, 并且与P_m相交. 若v_0是交点,则算法不应结束; 若v_0不是交点,则算法在最后离开交点回到v_0时走了桥; 这都是矛盾! #



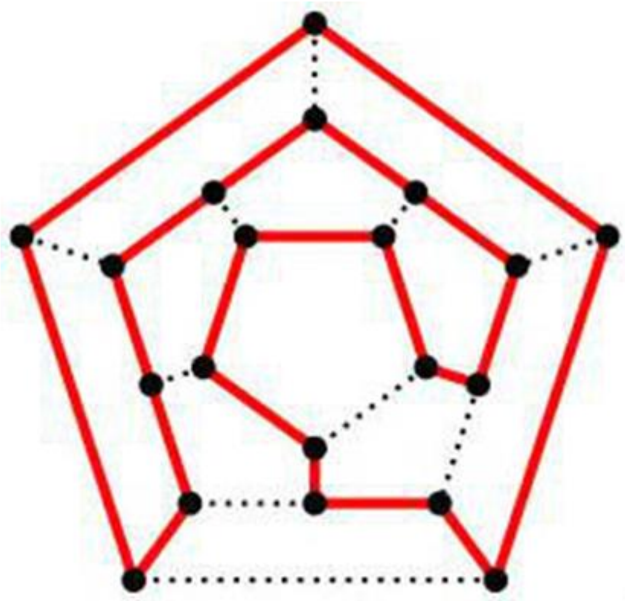


Willam Rowan Hamilton

- Willam Rowan Hamilton(1805~1865):
  - 爱尔兰神童(child prodigy)
  - 三一学院(Trinity College)
  - 1827年敦辛克天文台的皇家天文研究员和三一学院的天文学教授

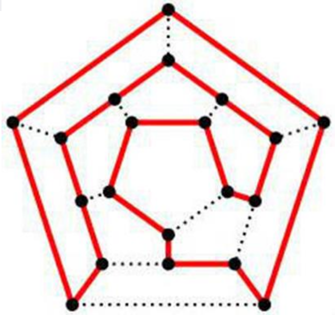
周游世界

- William Rowan Hamilton, 1857, Icosian game:(哈密顿) 十九世纪爱尔兰数学家



正十二面体，二十个顶点，三十条棱

周游世界的数学游戏



问：找一条从某城市出发，经过每个城市恰好一次，并且最后回到出发点的路线。

等价于：在图中找出一条包含所有结点的闭路，并且，除始点和终点重合外，这条闭路所含结点是互不相同的。根据定理7.3.6，这条闭路的所有结点和边组成了一个回路。

Hamilton回路

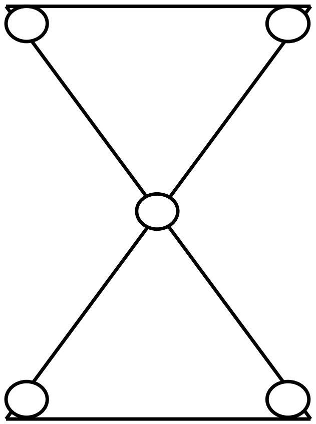
如果回路 (有向回路) C 是图 G 的生成子图，则称 C 为 G 的 Hamilton回路（Hamilton有向回路）。

图G中包含它的所有结点的基本路径称为G的Hamilton路径。

有Hamilton回路（Hamilton有向回路）的图称为Hamilton图（Hamilton有向图）。

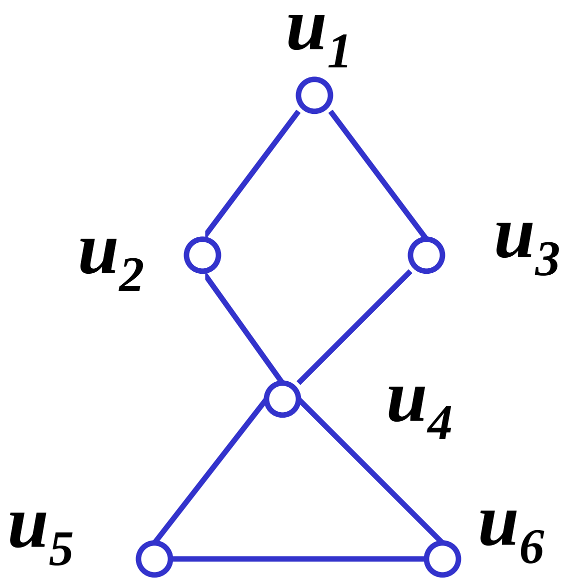
一个图是Hamilton图的充要条件 ？

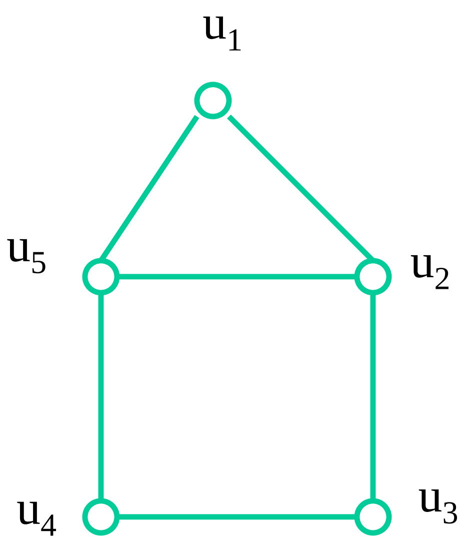
非Hamilton图



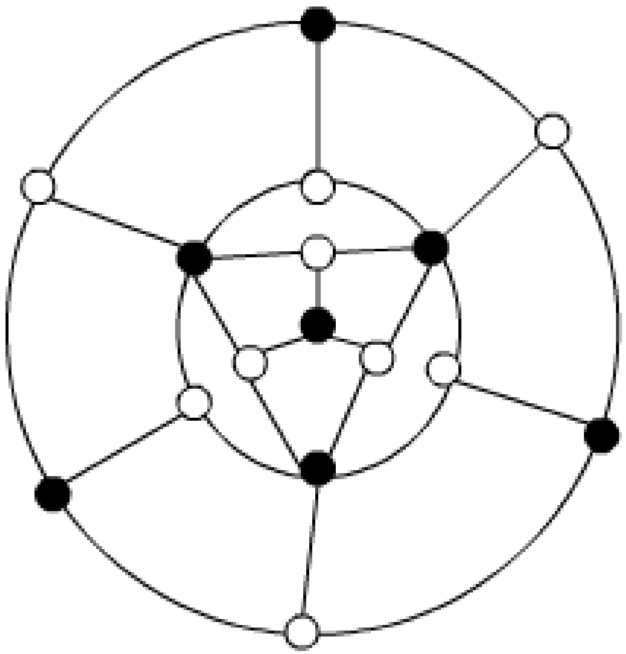
哈密顿图

定义（哈密顿图）： 无向图G中穿过每个顶点一次且仅一次的圈，称为哈密顿圈, 具有哈密顿圈的图称为哈密顿图.

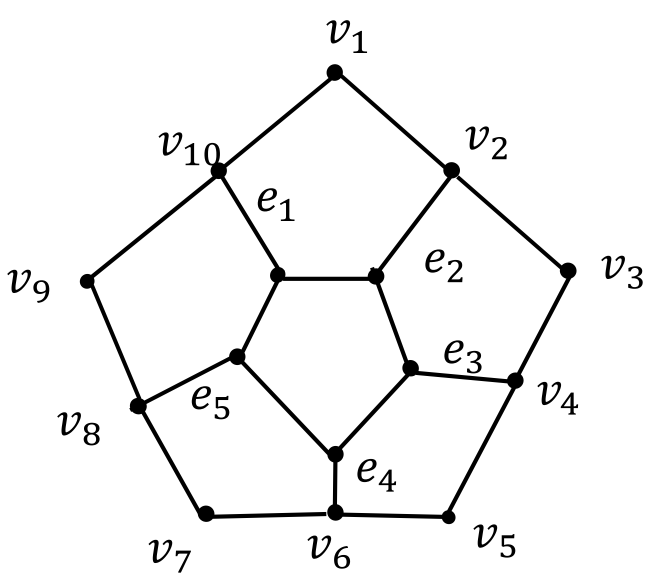




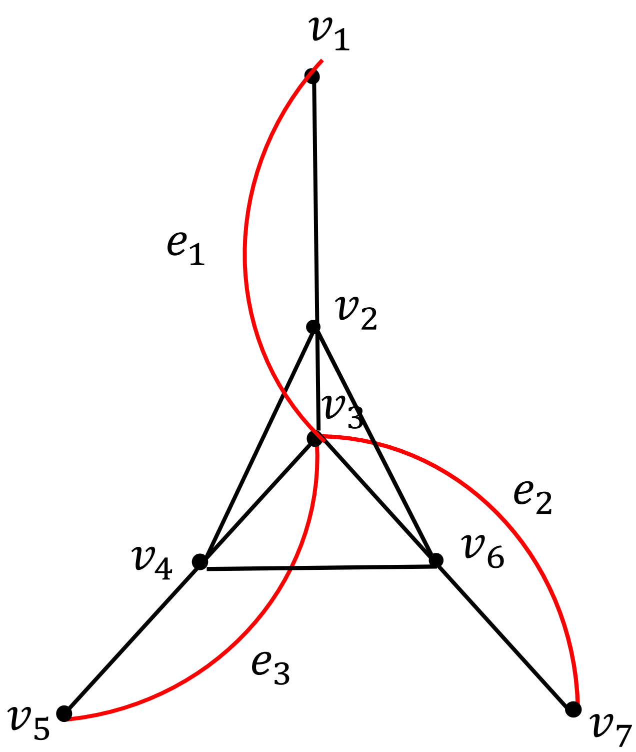
必要条件1：标点法



必要条件2：去边法



$< G_1 >$



$< G_2 >$

必要条件3：无向哈密顿图子集

- **定理**: 设$G=\langle V,E\rangle$是无向哈密顿图, 则对V的任意非空真子集V_1有

$$p(G-V_1)\le|V_1|$$

- 本定理的条件是哈密顿图的必要条件，但不是充分条件
- 可以验证彼得松图满足定理中的条件，但不是哈密顿图。
- 若一个图不满足定理中的条件，它一定不是哈密顿图。

定理 证明

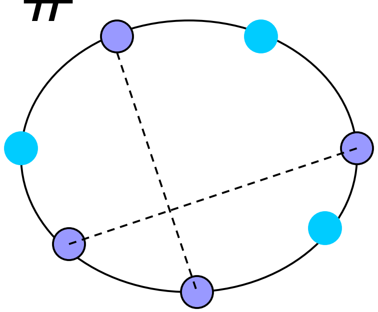
- 证明：设C是G中任意哈密顿回路，当V_1中顶点在C中都不相邻时，

  $p(C-V_1)=|V_1|$最大；

  否则，$p(C-V_1)<|V_1|$.

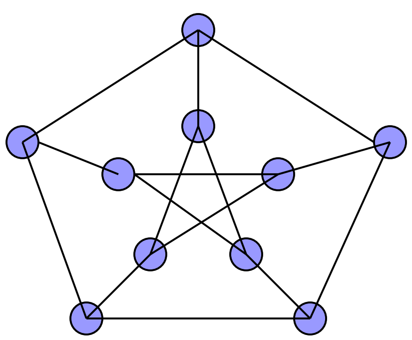
  因为C是G的生成子图，

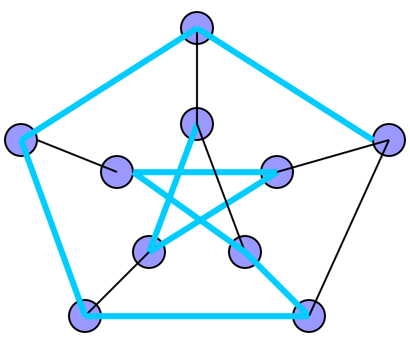
  所以$p(G-V_1)\le p(C-V_1)\le|V_1|$. #



定理说明

- 上述条件只是**必要条件**,而**不是充分条件**
- 满足条件的图不一定是哈密顿图，**反例**: Petersen图
  - Petersen图满足: $\forall V_1 \neq \varnothing$， $p(G-V_1) \leq |V_1|$
  - Petersen图不是哈密顿图: 穷举





货郎担问题

- 设有n个城市，城市之间均有道路，道路的长度均大于或等于0，可能是∞（对应关联的城市之间无交通线）。一个旅行商从某个城市出发，要**经过每个城市一次且仅一次**，最后回到出发的城市，问他如何走才能使他**走的路线最短**？

  这就是著名的**旅行商问题**或**货郎担问题**。

货郎担问题

- 这个问题可化归为如下的图论问题。

设$G = <V, E, W>$，为一个n阶完全带权图K_n，各边的权非负，且有的边的权可能为∞。**求G中一条最短的哈密顿回路**，这就是货郎担问题的数学模型。

- 此问题中不同哈密顿回路的含义：

将图中生成圈看成一个哈密顿回路，即不考虑始点(终点)的区别以及顺时针行遍与逆时针行遍的区别。

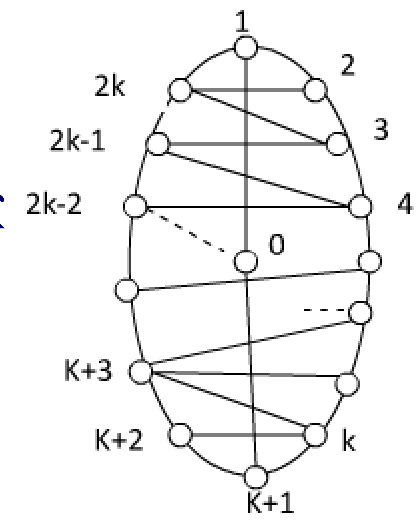
总结

- 欧拉图
  - 七桥问题,一笔画,欧拉通(回)路,欧拉图
  - 判定欧拉图的充分必要条件
  - 求欧拉回路的算法
- 哈密顿图
  - 周游世界,哈密顿通(回)路,哈密顿图
  - 判定哈密顿图的必要条件
  - 判定哈密顿图的充分条件
  - 边不重的哈密顿回路

作业题 7.4： 2、3、4、5、6、7

1、如果G_1和G_2是可运算的欧拉有向图，则 $G_1 \oplus G_2$ 仍是欧拉有向图。这句话对吗？如果对，给出证明，如果不对，举出反例。

2、设 n是大于2的奇数，证明 n 阶完全无向图有（n-1）/2个边不相交的哈密顿回路。



3、基础图是完全无向图的有向图有哈密顿路径试证明之。