可把两个集合的∩，∪ 运算推广到 n个集合上：

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为集合，则：

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \{x \mid x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \cdots \wedge x \in A_n\}$$

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \{x \mid x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \cdots \vee x \in A_n\}$$

分别记作 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ 和 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$

同理可把无穷多个集合的 ∩，∪分别记为：

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots\cdots \cap A_n \cap \cdots\cdots$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots\cdots \cup A_n \cup \cdots\cdots$$

定义13 (集类)：如果一个集合的**所有元素都是集合**，则称该集合为集类。

定义14（集类上的∪、∩运算 (广义并、广义交)）

设$\mathcal{B}$为任意集类，

(1) 称集合$\{x \mid 有X\in\mathcal{B}使x\in X\}$为$\mathcal{B}$的广义并，并记为$\cup\mathcal{B}$；

(2) 若$\mathcal{B}\neq\varnothing$，则称集合$\{x \mid 若X\in\mathcal{B}，则x\in X\}$为$\mathcal{B}$的广义交，记为$\cap\mathcal{B}$。

$$\cup\mathcal{B}=\{x \mid \exists X\,(X\in\mathcal{B}\wedge x\in X)\}$$

$$\cap\mathcal{B}=\{x \mid \forall X\,(X\in\mathcal{B}\rightarrow x\in X)\},\ \mathcal{B}\neq\varnothing$$

注意：$\cap\varnothing$没有意义。

若$\mathcal{B}=\varnothing$，则蕴涵式 $X\in\mathcal{B}\rightarrow x\in X$ 的前件为假，$\forall X（X\in\mathcal{B}\rightarrow x\in X）$为真，这就定义了全集 U。因此，要求$\mathcal{B}\neq\varnothing$。

例：设 $C = \{ \{0\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 2\} \}$

则 $\cup C = \{0\} \cup \{0, 1\} \cup \{0, 1, 2\} = \{0, 1, 2\}$

$\cap C = \{0\} \cap \{0, 1\} \cap \{0, 1, 2\} = \{0\}$

例：$\cup \varnothing = \varnothing$

$\cup \{\varnothing\} = \varnothing$

$\cap \{\varnothing\} = \varnothing$

$\cup \{\{a\}, \{b\}, \{\{a, b\}\}\} = \{a, b, \{a, b\}\}$

$\cap \{\{a\}, \{b\}, \{\{a, b\}\}\} = \varnothing$

例：$\cap P(A) = \varnothing$

$\cup P(A) = A$

设 a, b$\in I$ 且 a$\neq$0。令 "a | b"表示 "a整除b",

"a $\nmid$ b" 表示 "a不能整除b"。

例：对每个 n$\in N$，设 $A_n=\{a|a\in N, 2^n|a$ 且 $2^{n+1}\nmid a\}$,

求 $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$

解：由于对任意n$\in N$, $2^n|0$ 且$2^{n+1}|0$，所以 $0\notin A_n$。

因此$0\notin \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$，得 $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \subseteq I^+$。

任取a$\in I^+$, 一定存在n$\in N$, 及奇数b使得$a=2^n b$。

因此， $2^n | a$ 且 $2^{n+1}\nmid a$，得$a\in A_n$，从而$a\in\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$。

得$I^+\subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ 。

综上所述得$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = I^+$

例: 设 $A_n=\{x|x\in R$ 且 $x>n\}$, $n\in N$。

试求$\bigcup_{n=0}^{\infty}A_n$和 $\bigcap_{n=0}^{\infty}A_n$

解：(1)由于对任意的$n\in N$，有 $A_n\subseteq A_0$，

因此 $\bigcup_{n=0}^{\infty}A_n\subseteq A_0$。

又由$A_0\subseteq\bigcup_{n=0}^{\infty}A_n$，得$\bigcup_{n=0}^{\infty}A_n=A_0$。

(2) 下面证明$\bigcap_{n=0}^{\infty}A_n=\varnothing$。

假设$\bigcap_{n=0}^{\infty}A_n\neq\varnothing$，则存在$n\in N$，$n\in\bigcap_{n=0}^{\infty}A_n$。

得 $n\in A_n$, 矛盾。

5 有穷集的计数原理

引理1：若 A 和 B 是有穷集合，且$A\cap B=\varnothing$，则

$$\#(A\cup B)=\#A+\#B$$

定理8：若 A 和 B 是有穷集合，则

$$\#(A\cup B)=\#A+\#B-\#(A\cap B)$$

定理8：若 A 和 B 是有穷集合，则

$$\#(A\cup B) = \#A + \#B - \#(A\cap B)$$

证：显然 $A\cup B$ 和 $A\cap B$ 是有穷集。

$$A\cup B = A\cup B = (A\cup B)\cap(A\cup\sim A)$$

$$= A\cup(B\cap\sim A) \qquad （分配律）$$

由于 $A\cap(B\cap\sim A) = \varnothing$，根据引理 1 得

$$\#(A\cup B) = \#A + \#(B\cap\sim A) \qquad (1)$$

又 $B = B\cap(A\cup\sim A)$

$$= (B\cap A)\cup(B\cap\sim A) \qquad （分配律）$$

同样 $(B\cap A)\cap(B\cap\sim A) = \varnothing$，根据引理 1 得

$$\#B = \#(B\cap A) + \#(B\cap\sim A)$$

$$\#(B\cap\sim A) = \#B - \#(B\cap A)$$

代入 (1) 式得

$$\#(A\cup B) = \#A + \#B - \#(A\cap B)$$

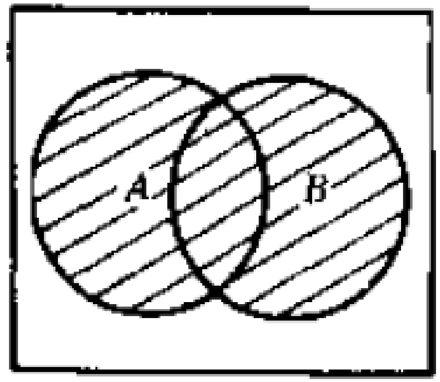
推论1：若A，B 和 C是有穷集合，则

$$\#(A\cup B\cup C)=\#A+\#B+\#C-\#(A\cap B)-\#(A\cap C)-\#(B\cap C)+\#(A\cap B\cap C)$$

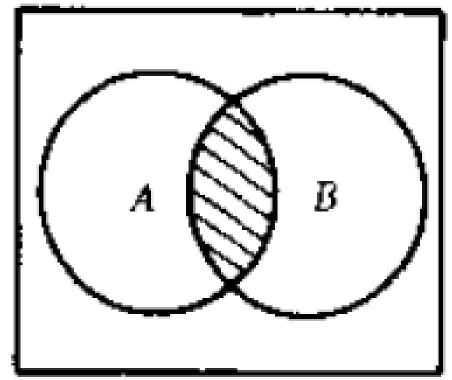
- 可推广到n个有穷集合（数学归纳法证明）
- 有穷集合计数问题的求解，可利用上述定理 或

推论，还可利用文氏图和代数相结合的方法。

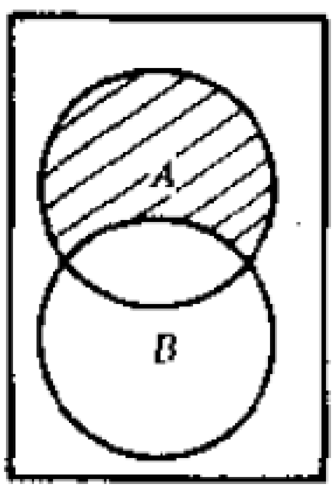
文氏图



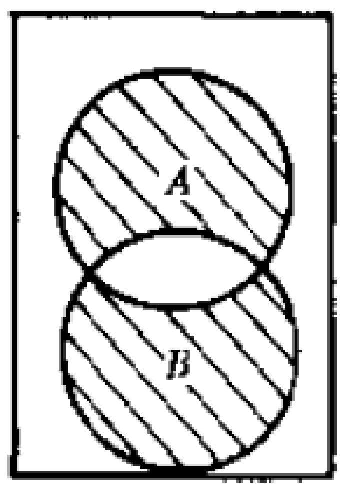
(a) $A \cup B$



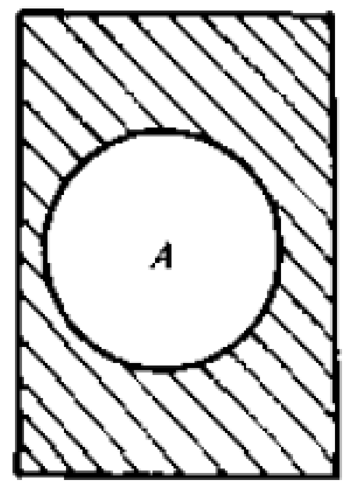
(b) $A \cap B$



(c) $A - B$



(d) $A \oplus B$



(e) $\sim A$

例：外语系120名学生中，其中

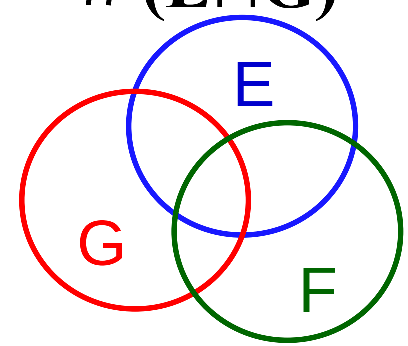
(1) 100名学生至少学习英语、德语、法语中的一种

(2) 有65人学英语，45人学德语，42人学法语

(3) 20人既学英语又学德语，25人既学英语又学法语，15人既学德语又学法语。

求同时学这三种外语的人数 和 仅学其中一门外语的人数.

解：设集合E, G, F分别表示学习英语、德语、法语的学生集合，则 $\#(E\cup G\cup F)=\#E+\#G+\#F-\#(E\cap G)-\#(E\cap F)\#(G\cap F)+\#(E\cap G\cap F)$，其中



(1) $\#(E\cup G\cup F)=100$,

(2) $\#E=65$, $\#G=45$, $\#F=42$,

(c) $\#(E\cap G)=20$, $\#(E\cap F)=25$, $\#(G\cap F)=15$。

因此得: $\#(E\cap G\cap F)=8$, 即同时学三种外语有 8 人。

例：外语系120名学生中，其中

(1) 100名学生至少学习英语、德语、法语中的一种

(2) 有65人学英语，45人学德语，42人学法语

(3) 20人既学英语又学德语，25人既学英语又学法语，15人既学德语又学法语。

求同时学这三种外语的人数 和 仅学其中一门外语的人数.

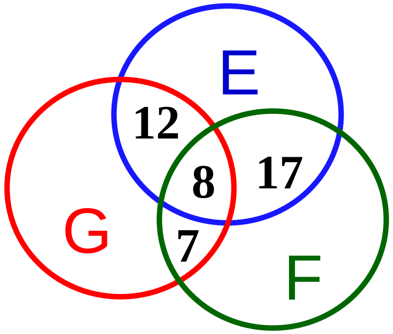
解（续）：仅学英语和德语的人数为20－8 = 12，

仅学英语和法语的人数为25－8 = 17，

仅学德语和法语的人数为15－8 = 7，

因此，仅学其中一门外语的人数为:

$$100 – 12 – 17 – 7 – 8 = 56$$



例: 求1到1000（包括1和1000在内）不能被5, 6或8整除的整数的个数.

解：设A_1, A_2和A_3分别是1到1000中能被5, 6和8整除的数集合，那么不能被5, 6或8整除的数的集合为

$U-(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$，其中U为包括1到1000的整数集合。

由于 $|A_1|=\lfloor 1000/5 \rfloor=200$， $|A_2|=\lfloor 1000/6 \rfloor=166$，

$|A_3|=\lfloor 1000/8 \rfloor=125$， $|A_1 \cap A_2|=\lfloor 1000/30 \rfloor=33$，

$|A_1 \cap A_3|=\lfloor 1000/40 \rfloor=25$， $|A_2 \cap A_3|=\lfloor 1000/24 \rfloor=41$，

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3|=\lfloor 1000/120 \rfloor=8$，

得 $|A_1 \cup A_2 \cup A_3|= 200+166+125-33-25-41+8=400$

因此不能被5, 6或8整除的整数个数为1000-400=600.

6 有序偶和笛卡儿乘积

- 掌握有序偶和笛卡儿乘积的定义和性质
- 熟练掌握求两个集合的笛卡儿乘积

定义15：（有序偶）任给两个对象 x 和 y，将它们按规定的顺序构成的序列，称之为**有序偶**，记为$< x，y >$。其中，x 称为有序偶的第一元，y 称为第二元。

注意：有序偶$\neq$二元集

如： $<a，b> \neq <b，a>$

$\{a，b\} = \{b，a\}$

$<a，a> \neq <a>$

$\{a，a\} = \{a\}$

有序偶的集合定义： 1921年, 波兰数学家库拉托夫斯基（Kuratovski）给出了一种有序偶的集合表示：

$$<x, y> = \{ \{x\}, \{x, y\} \}。$$

库拉托夫斯基，波兰数学家

$$<x, x> = \{ \{x\}, \{x, x\} \} = \{ \{x\} \}$$

定理9 有序偶的唯一性定理：

$<u, v> = <x, y>$ 当且仅当 $u = x$ 和 $v = y$。

分析： $<u, v>=<x, y> \Leftrightarrow \{\{u\}, \{u, v\}\} = \{\{x\}, \{x, y\}\}$

$\Leftrightarrow u=x, v=y$???

定理10 有序偶的唯一性定理：

<u，v>=<x，y>当且仅当 $u = x$ 和 $v = y$。

证: (充分性) 当 $u = x, v = y$ 时,有

$$\{u\} = \{x\} \text{ 和 } \{u, v\} = \{x,y\},$$

因此有 $\{\{u\}, \{u, v\}\} = \{\{x\}, \{x, y\}\}$,

即$<u, v>=<x, y>$

定理10 有序偶的唯一性定理：

$<u, v>=<x, y>$ 当且仅当 $u = x$ 和 $v = y$。

证: (必要性)

已知 $<u, v>=<x, y> \Leftrightarrow \{\{u\},\{u, v\}\} = \{\{x\}, \{x, y\}\}$,

分两种情况来证 $u=x$，$v=y$。

(1) 设 $u = v$。 因为 $<u, v> = \{\{u\}, \{u, v\}\}=\{\{u\}\}$,

且 $< u, v > = < x, y >= \{\{x\}, \{x, y\}\}$,

因此 $\{\{u\}\}=\{\{x\}, \{x, y\}\}$。所以 $u = x = y$。

因此有 $u=x$，$v=y$。

(2) 设 $u \neq v$。 因为 $\{\{u\}, \{u, v\}\} = \{\{x\}, \{x, y\}\}$,

所以 $\{u\} = \{x\}$，$\{u, v\} = \{x, y\}$。

因此有 $u = x$，$v = y$。

定义16（n元序偶） 设 $n \in I_+$ 且 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 为 n 个任意的元素。

i) 若 n=1，则令 $\langle x_1 \rangle = x_1$

ii) 若 n=2，则令 $\langle x_1, x_2 \rangle = \{\{x_1\}, \{x_1, x_2\}\}$

iii) 若 n >2，则令

$$\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle = \langle \langle x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} \rangle, x_n \rangle$$

称 $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$为由 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 组成的 **n元序偶**，并称每个 x_i（$1 \leqslant i \leqslant n$) 为它的**第 i 个分量**。

定理 11 设 $n \in I_+$ 且 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 和 $y_1, y_2, \ldots, y_n$ 为任意元素，则 $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle = \langle y_1, y_2, \ldots, y_n \rangle$ 当且仅当

$$(x_1 = y_1) \wedge (x_2 = y_2) \wedge \ldots \wedge (x_n = y_n)$$

用关于 n 的数学归纳法证明。

例：把三元序偶< a, b, c >定义为{ {a}, {a, b}, {a, b, c} }，合适吗？说明理由。

解：不合适。

反例：<a, b, a > = { {a}, {a, b}, {a, b, a}}= {{a}, {a, b}}

≠

<a, a, b > ={ {a}, {a, a}, {a, a, b} }= {{a}, {a, b}}

显然 a≠b 时，若上述定义为三元序偶，则 <a, b, a >≠ <a, a, b >，矛盾。

例: (1) 设C是集合，$x \in C, y \in C$, 试证 $<x, y> \in P(P(C))$

(2) $a \in \cup <a, b>$且$b \in \cup <a, b>$

证： (1) 因为 $<x, y> = \{ \{x\}, \{x, y\}\}$ 且$x \in C, y \in C$，

所以$\{x\} \in P(C)$，$\{x, y\} \in P(C)$。

因此 $\{\{x\}, \{x, y\}\} \subseteq P(C)$。

得到 $\{ \{x\}, \{x, y\}\} \in P(P(C))$ 。

(2) 因为 $<a, b>= \{ \{a\}, \{a, b\}\}$ ，

所以$\cup <a, b>=\{a\} \cup \{a, b\}=\{a, b\}$,

得$a \in \cup <a, b>$且$b \in \cup <a, b>$

定义17 (笛卡尔乘积) 集合 A 和 B 的笛卡儿乘积 $A \times B$ 定义为: $A \times B = \{<x, y> \mid x \in A \wedge y \in B\}$

例：$A = \{a, b\}$，$B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{x\}$，$D = \varnothing$，则有：

$A \times B = \{<a, 1>,<a, 2>,<a, 3>,<b, 1>,<b, 2>,<b, 3>\}$

$B \times A = \{<1, a>,<2, a>,<3, a>,<1, b>,<2, b>,<3, b>\}$

因此，笛卡尔乘积不满足 交换律。

定理12　设A，B为任意两个集合，则

$$A \times B = \varnothing \text{ iff } A = \varnothing \text{ 或 } B = \varnothing \text{。}$$

证明：　只需证明

$$A \times B \neq \varnothing \quad \text{iff} \quad A \neq \varnothing \text{ 且 } B \neq \varnothing$$

例：A = {a, b}，B = {1, 2, 3}, C = { x }，D = ∅，则有：

$$A \times D = \varnothing = D \times A$$

定理 13 若A, B 为任意两个有限集，则# (A×B) = #A #B。

定理14 设 A，B，C 和 D 为任意四个非空集合，则

(1) $A\times B \subseteq C\times D$ 当且仅当 $A\subseteq C$ 且 $B\subseteq D$;

(2) $A\times B = C\times D$ 当且仅当 $A = C$ 且 $B = D$。

证：(1)（必要性）如果 $A\times B\subseteq C\times D$，则对任意 $x \in A, y\in B$, 有 $<x, y> \in A\times B$，得到 $<x, y> \in C\times D$。

因此， $x \in C$ 且 $y \in D$。从而 $A\subseteq C$ 且 $B\subseteq D$。

（充分性）如果 $A\subseteq C$ 且 $B\subseteq D$，则对任意的 $<x, y> \in A\times B$，由 $x \in A, y \in B$ 得 $x \in C$，$y \in D$。

因此 $<x, y> \in C\times D$。

(2) 由(1) 可得。

定理15 设 A，B 和 C 为任意三个集合，则

(1) $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$;

(2) $(A\cup B)\times C = (A\times C)\cup(B\times C)$;

(3) $A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$;

(4) $(A\cap B)\times C = (A\times C)\cap(B\times C)$;

(5) $A\times(B-C) = (A\times B)-(A\times C)$;

(6) $(A-B)\times C = (A\times C)-(B\times C)$。

定理15 设 A，B 和 C 为任意三个集合，则

(1) $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$;

证: (1) 由定理14知

$$A\times B\subseteq A\times(B\cup C),\ A\times C\subseteq A\times(B\cup C),$$

因此，$(A\times B)\cup(A\times C)\subseteq A\times(B\cup C)$。

对任意的$<x, y>\in A\times(B\cup C)$，则$x\in A$ 且$y\in B\cup C$。

考虑两种情况：$y\in B$或$y\in C$：

(a) 若 $y\in B$，则$<x, y>\in A\times B$;

(b) 若 $y\in C$，则$<x, y>\in A\times C$;

因此$<x, y>\in (A\times B)\cup(A\times C)$,

得$A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$

定理15 设 A，B 和 C 为任意三个集合，则

(5) $A\times(B-C) = (A\times B)-(A\times C)$;

证：对任意$<x, y>\in A\times(B-C)$,

有$x\in A$且$y\in B-C$，则 $y\in B$且$y\notin C$。

因此$<x, y>\in A\times B$且$<x, y>\notin A\times C$。

因此 $<x, y>\in (A\times B)-(A\times C)$，得

$$A\times(B-C)\subseteq (A\times B)-(A\times C)。$$

反之，对任意$<x, y>\in (A\times B)-(A\times C)$，有

$$<x, y>\in (A\times B) 且<x, y>\notin (A\times C),$$

因此$x\in A$， $y\in B$且$y\notin C$，即$y\in B-C$。

所以$<x, y>\in A\times(B-C)$，因此$A\times(B-C)\subseteq (A\times B)-(A\times C)$。故$A\times(B-C) = (A\times B)-(A\times C)$。

例：以下命题是否成立，给出证明或反例：

(1) $(A \cap B)\times(C \cap D) = (A\times C) \cap (B\times D)$

(2) $(A \cup B)\times(C \cup D) = (A\times C) \cup (B\times D)$

解: (1) 成立。对于任意<x，y>,

$\langle x, y\rangle \in (A \cap B)\times(C \cap D) \Leftrightarrow x \in A\cap B \wedge y\in C \cap D$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \wedge y\in C \wedge y\in D$

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge y\in C) \wedge (x \in B \wedge y\in D)$

$\Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in (A\times C) \wedge \langle x, y\rangle \in (B\times D)$

$\Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in (A\times C) \cap (B\times D)$

所以，$(A \cap B)\times(C \cap D) = (A\times C) \cap (B\times D)$

(2) 不成立。

反例：A={1}, B={2}, C={3}, D={4}

或 A= ∅, B={2}, C={3}, D= ∅

例. 证明: 若$A \cap B \neq \varnothing$，则

$$(A \cup B) \times (A \cap B) \subseteq (A \times A) \cup (B \times B)$$

证：对任意 $<x，y> \in (A \cup B) \times (A \cap B)$，则

$x \in A \cup B$，且 $y \in A \cap B$。

考虑$x \in A$和 $x \in B$ 两种情况：

(1)当$x \in A$时，$<x, y> \in A \times (A \cap B) \subseteq A \times A$

(2)当$x \in B$时，$<x, y> \in B \times (A \cap B) \subseteq B \times B$

因此$<x, y> \in (A \times A) \cup (B \times B)$。

故$(A \cup B) \times (A \cap B) \subseteq (A \times A) \cup (B \times B)$。

$(A \cup B) \times (A \cap B) \subseteq (A \times B) \cup (B \times A)$??

可把两个集合的笛卡儿乘积推广到多个集合上

定义18： 设 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 是任意 n个集合，它们的笛卡儿乘积 $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ 定义为：

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$$

$$= \{ <x_1, x_2, \ldots, x_n> \mid \text{当 } i = 1,\ldots, n\text{时}, \ x_i \in A_i \}$$

- 特别地， 将 $A \times A \times \ldots\ldots \times A$ 记作 A^n

例：n维欧氏空间是实数轴R的n维笛卡尔乘积R^n, 即

$$R^n = \{<x_1,\ldots, x_n> \mid x_i \in R, 1 \le i \le n \}$$

- n个集合的笛卡儿乘积有与两个集合的笛卡儿乘积相同的运算性质。

总结

1. 集合与元素
2. 集合间的相等和包含关系
3. 幂集
4. 集合的运算
5. 有穷集的计数原理
6. 有序偶和笛卡儿乘积