离散数学2 课程介绍

北航计算机学院：邓婷

Tel：82338694（新主楼G521）

E-mail： dengting@buaa.edu.cn

什么是离散数学？

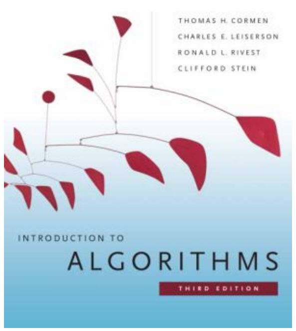
- 离散数学(**Discrete mathematics**) 是研究离散量的结构及其相互关系的数学学科，是现代数学的一个重要分支

离散1 离散2 离散3

- 数理逻辑、集合论、图论、组合数学、可计算理论、自动机理论、抽象代数数论、概率论（离散部分）

为什么学习离散数学？

- 掌握处理离散结构所必须的描述工具和方法
  - 集合、关系、树、图、有限状态机等
- 培养抽象思维和严格逻辑推理能力
- 给后继课程提供必要的数学基础
  - 数据结构、编译原理、操作系统、数据库、算法设计与分析、软件工程、计算机网络等



VIII *Appendix: Mathematical Background*

离散数学2的主要内容

- 集合论
  - 集合、关系、函数、自然数和基数
- 图论
  - 图论的基本概念、子图和图的运算
    路径、回路和连通图、欧拉图和哈密顿图
    图的矩阵表示、树、有向树和有序树

主讲教师

李建欣,教授，博导

- G506, G521,82339274
- lijx@act.buaa.edu.cn
- http://act.buaa.edu.cn/lijx

- 1997-2007, 北航计算机系学士、博士
- 2011.4-2011.10, 微软亚洲研究院,访问研究员
- 2015.3-2016.4, 美国CMU机器学习系,访问学者
- 主要研究方向：分布式系统、大数据分析与处理、信息安全

主讲教师

邓婷,硕导

- G521,82338694
- dengting@act.buaa.edu.cn
- http://act.buaa.edu.cn/dengt

- 2014-2010, 北航计算机学院博士
- 2010-2013, 北航数学与系统科学学院，博士后
- 2013年至今，北航计算机学院
- 2014.10-2015.10 英国爱丁堡大学，访问学者
- 主要研究方向：大数据查询与处理、数据质量

教学内容和方法

- 内容：集合论，图论
- 考核方式：闭卷考试
- 参考资料：
  - 离散数学，王兵山等，国防科技大学出版社
  - 离散数学、离散数学习题与解析，檀凤琴、何自强，科学出版社。
  - 离散数学，耿素云、屈婉玲等，高等教育出版社
  - **Discrete Mathematical Structures, Bernard Kolman, Robert C. Busby, Sharon Ross**，清华大学出版社
  - **Discrete Mathematics and Its Applications, Kenneth H. Rosen,** 机械工业出版社

集合论的应用--SETL

- SETL(SET Language)：基于集合论的高级程序设计语言
  - 以集合（无序集与元组）为数据类型
  - 以集合属于关系、并、交、幂集等操作
- 由纽约大学 Jacob T. Schwartz教授在上个世纪60年代晚期开发而成

SETL → ABC → Python

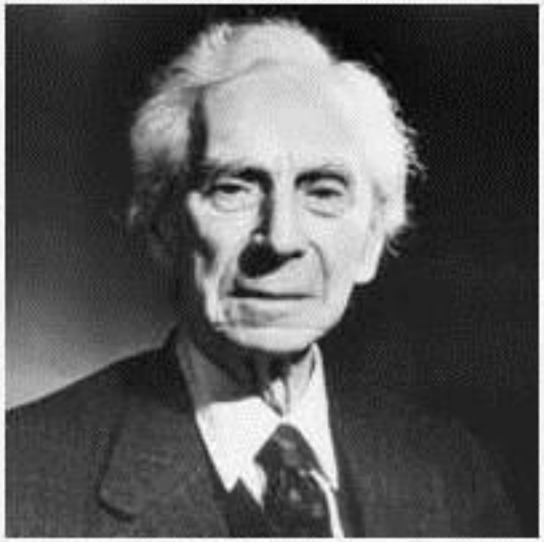
集合论的应用——安全操作系统开发、分析

- Event-B方法提供了一套描述系统/软件规约的语言，基于一阶逻辑和集合论，可描述软件系统从抽象到具体的不同层面上的模型，并通过精化的方法从抽象模型逐步建立具体的软件模型，直至自动生成可执行代码。
- Rodin是一种用于开发复杂高可信软件系统的开放工具平台，它基于Event-B形式化方法，提供对精化和数学证明的自然支持
- 广泛应用于地铁、汽车、航空航天等领域的安全操作系统开发

集合论的产生与发展

- 朴素集合论（康托）
- 罗索悖论（数学的第三次危机）
- 公理集合论

康托，德国数学家、集合论创始人



伯特兰·罗素

罗素，英国哲学家、数理逻辑学家、历史学家，也是上世纪西方最著名、影响最大的学者和和平主义社会活动家之一

集合论的创始人——康托

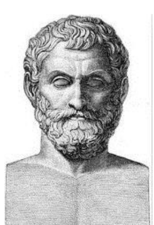
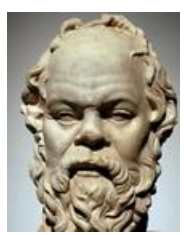
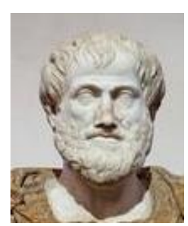
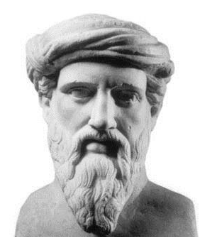
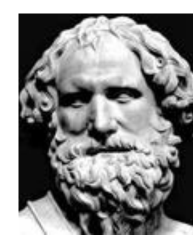
- 集合论是直接产生于对“无穷”的数学研究的需要
- 集合论是为了研究各种无穷而建立起来的数学理论
- 数学史的三次危机都与无穷相关

集合是人们能够明确区分的一些对象(客体)构成的一个整体。

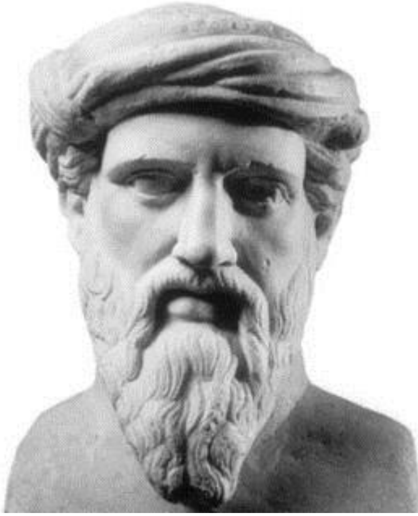
康托

数学的第一次危机

- 古希腊数学：公元前**600**到公元**600**年期间，希腊半岛、意大利半岛、埃及北部等爱琴海、亚得里亚海、地中海沿岩地区的数学家们创造的科学
  - 论证数学：以几何为核心内容，以论证为主要方法
  - 主要成就：勾股定理、无理数、三大几何作图问题、欧几里得几何和圆锥曲线理论
- 希腊七贤
  - 泰勒斯，柏拉图，苏格拉底，亚里斯多德，毕达哥拉斯，欧几里得，阿基米德

毕达哥拉斯学派



- 毕达哥拉斯 (约公元前580-前500)
  - 古希腊著名哲学家、数学家、天文学家、音乐家、教育家
  - 与孔子（公元前551-前479）与印度释迦牟尼（公元前565-前485）基本同时
- 东方之旅
  - 埃及 (几何学)、 古巴比伦 (巴比伦数学)、印度
- 讲学：创立学派
  - 克罗托内（意大利半岛南端）
  - 约300人（又说600人）
  - 组织严密，带有浓厚的宗教色彩：宣誓永不泄露学派秘密和学说

毕达哥拉斯学派的数学发现与思想

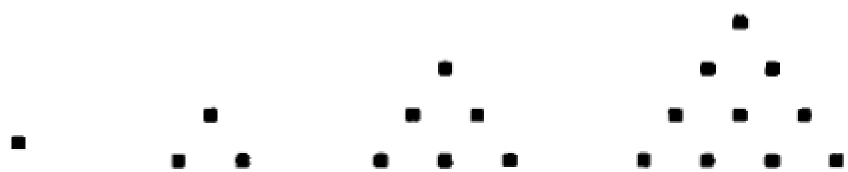
- 数的研究
  - 正整数、奇数、偶数、素数
  - 亏数：所有真因子之和小于本身，如 **4 > 1+2**

    盈数：所有真因子之和大于本身，如 **12 <1+2+3+4+6**

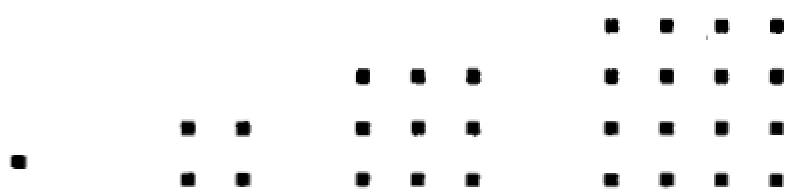
    完全数：所有真因子之和等于本身，如**6=1+2+3**

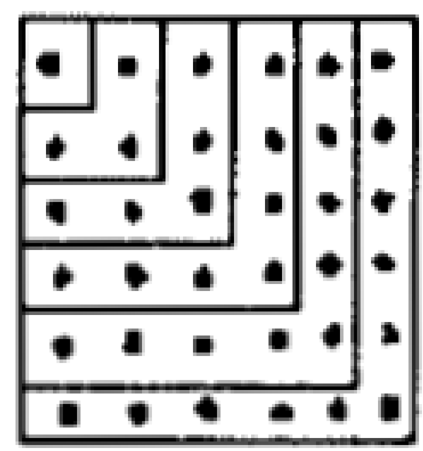
    亲和数：一对数互为真因子之和，如**220, 284**
  - 形数

三角数



平方数





$n^2+(2n+1)=(n+1)^2$

毕达哥拉斯学派的数学思想：万物皆数

- 大多数锤子可以同时敲打而产生和谐的声响

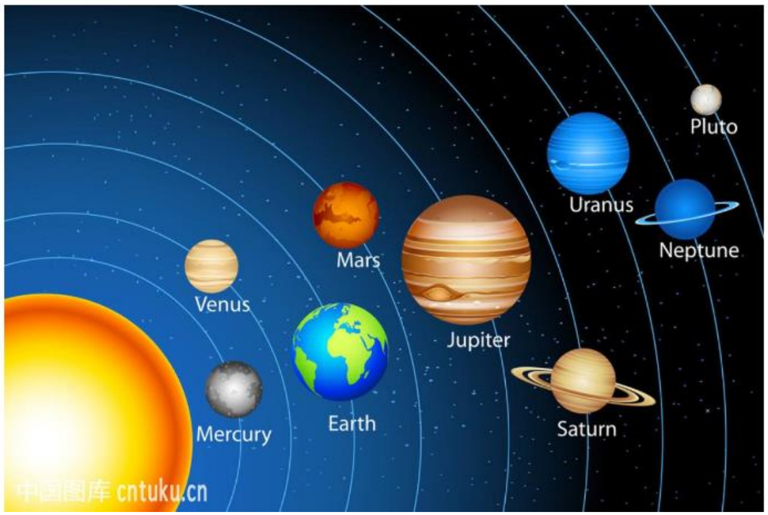
- 彼此间单调和谐的锤子之间有一种简单的数学关系
  - 那些质量等于某一把锤子重量的1/2, 1/3或1/4的锤子都能产生和谐的声响
  - 那把和任何别的锤子一起敲打时总发出噪声的锤子，它的质量和别的锤子的质量之间不存在这种简单整数比关系

万物皆数：数与自然之间的关系

- 琴弦上的试验
  - 一根拉紧的弦如果弹出do
  - 取原弦长一半时，弹出高八度的do
  - 取原弦长的2/3，弹出高五度的so
  - 取原长的3/4，弹出fa
  - 对于有同样张力的两根弦，当长度为简单的整数比时，奏出的乐声就和谐悦耳
- 根据“简单整数比”原理，创造出一套音乐理论，开创了音乐理论研究的先河

万物皆数：数与自然之间的关系

- 所有事物都可以用整数或整数的比来解释



- 四艺：数学课程的四大部分
  - 数的绝对理论：算术
  - 数的应用：音乐
  - 静止的量：几何
  - 运动的量：天文

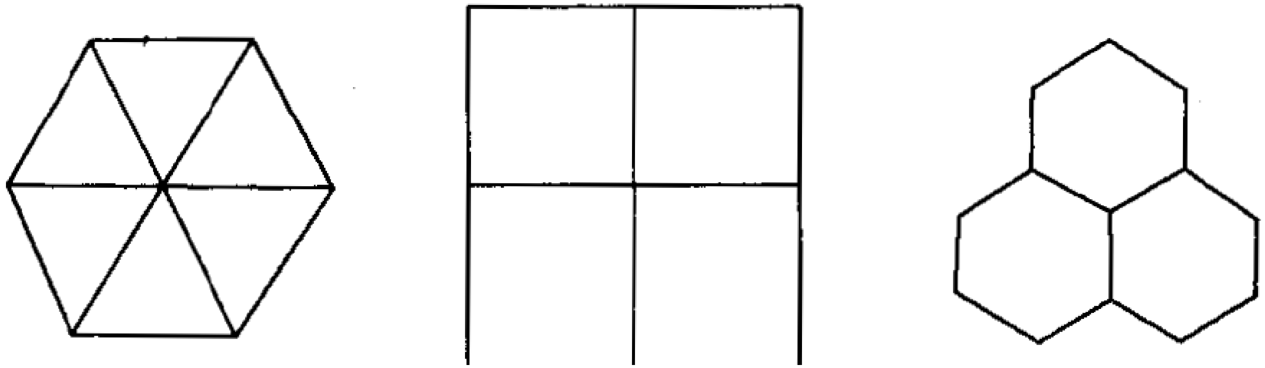
“人们所知道的一切事物都包含数；因此没有数就既不可能表达，也不可能理解任何事物”

“不仅可以在鬼神的事务上，而且可以在人间的一切行动、思想，以致一切行业和音乐中看到这种数的力量 ”

——一位后期毕达哥拉斯学派成员

毕达哥拉斯学派的数学发现与思想

- 几何的成就
  - 三角形多边形的理论
  - 正多边形覆盖平面的问题



  - 正五边形、正十边形的作图法
  - **5**种多面体：正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体、正二十面体（三维空间中所有的正多面体）
  - 勾股定理（百牛定理）

第一次数学危机：毕达哥拉斯悖论

- 比较两条线段的长度

a b d

找一条长度为 d 的小线段，如果 $a = nd$, $b = md$, 其中 n 与m为正整数， 则称

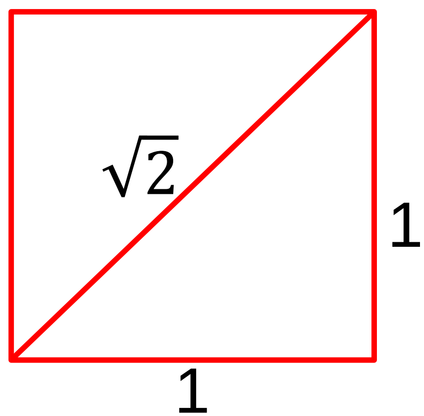
- ❑ d为a与b的共同度量单位
- ❑ a与b是可公约的或可公度的

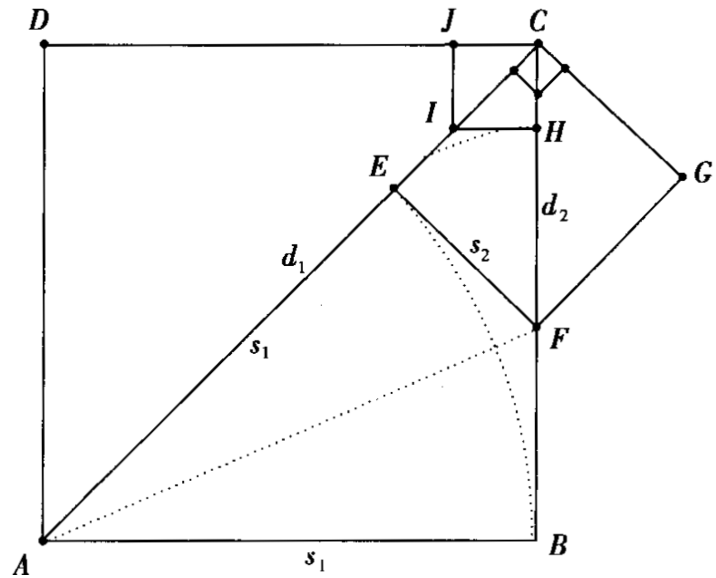
辗转相除法求最大公约数

- ❑ 对任意长度的两条线段，毕达哥拉斯学派成员认为操作过程总会在有限步后结束 ?

第一次数学危机：毕达哥拉斯悖论

- 约公元前**470**年，毕达哥拉斯的学生希帕苏斯（**Hipasus**）发现正方形的边长与对角线的长度是不可公度的

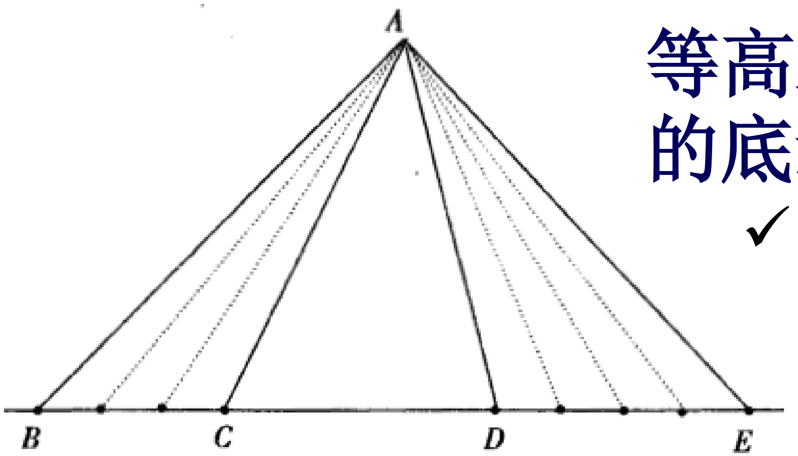




  - 与“万物即数”矛盾，毕达哥拉斯学院定了一条纪律：谁都不准泄露$\sqrt{2}$的存在
  - 称这类不可公度量为阿洛贡 (**Alogon)**，即“不可说”
  - 传说希帕苏斯无意中向别人谈到了这个发现，结果被杀害

第一次数学危机的影响

- 毕达哥拉斯学派相信任意两条线段 a与b都可公度，即存在一条小线段d作为a与b的共同度量单位
- 毕达哥拉斯学派的许多几何定理证明都是建立在任何量都可通约的基础之上的



等高三角形的面积之比等于它们的底边之比

- ✓ 假设BC与DE的公约数为d，且BC=md, DE=nd, m,n为正整数，则三角形ABC与ADE的面积之经为m/n

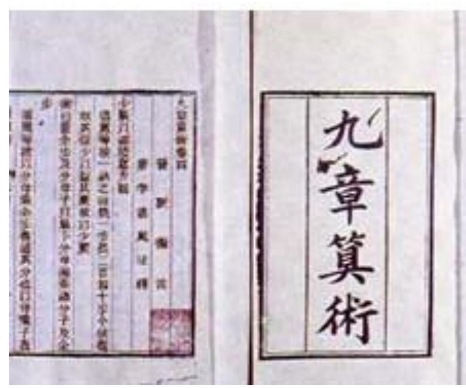
- 推翻了毕达哥拉斯学派“万物皆数”的基本哲学信条，动摇了毕达哥拉斯学派的数学与哲学根基

第一次数学危机的影响

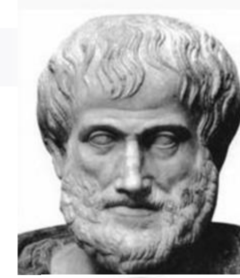
- 欧多克索斯（公元前408-前355，古希腊著名数学家、天文学家、地理学家）用几何的方法消除了第一次数学危机，拯救了整个希腊数学
  - 分离“数”和“量”
    - 在数的领域仍然只承认整数（或整数的比）
    - 在量的领域，研究转向线段、面积、体积等几何量
- 从欧几里得以后，代数与几何这数学中的两大分支被严格区分开了

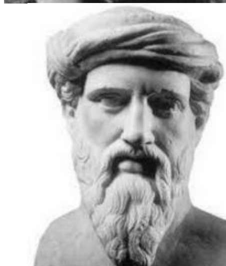
中国古代如何对待无理数？

- 《九章算术》：若开之不尽者，为不可开，当以面命之
- 著名数学家刘徽我创造了开方求微数的方法，即求无理根的十进分数近似值



第一次数学危机





- 第一次数学危机促进了**无理数**理论的发展
  - 亚里斯多德证明了$\sqrt{2}$不是有理数
  - 大约公元前425年，迪奥多鲁斯(Theodorus of Cyrene) 证明了$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{7}$，$\sqrt{8}$，$\sqrt{10}$，$\sqrt{11}$，$\sqrt{12}$，$\sqrt{13}$，$\sqrt{14}$，$\sqrt{15}$，$\sqrt{17}$也是无理数
- 无理数的理论直到1872年由德国著名数学家**戴德金**(1831-1916)年严格地建立起来
  - 实数集合是有理数与无理数集的并

Julius Wilhelm Richard Dedekind，1831—1916

实数理论的建立

- 从有理数定义出无理数
  - 戴德金
  - 魏尔斯特拉斯
  - 康托尔

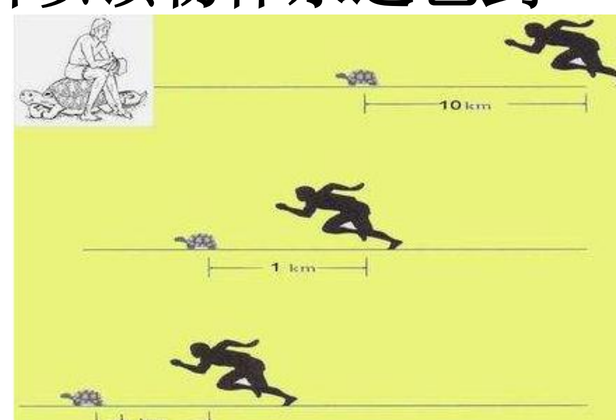
第二次数学危机

- 第一次数学危机表明毕达哥拉斯学派试图用离散的量去精确度量一切连续的量这一努力的失败
- 古希腊微积分思想：芝诺悖论
  - 芝诺（约公元前490-前425， 古希腊哲学家）

二分法悖论：任何一个物体要想由A点运行到B点，

- ✓ 必须首先到达AB的中点C, 随后需要到达CB的中点D, 再随后到达DB的中点E, 依此类推。
- ✓ 这个二分过程可以无限地进行下去，所以该物体永远也到不了终点B.

阿基里斯追龟悖论：



- 古希腊的哲学家亚里士多德试图解决芝诺悖论——把无限区分为潜无限与实无限

至于“无穷”虽在潜能上有此存在，然后这类潜能的命意并不指望其实现，这只在意识上有此潜在而已。实际是这样，分割一条线永不能分割完毕。在分割过程中，潜在的“无穷”是有的。但这无限毕竟不得实现为独立的存在。

第二次数学危机

- 牛顿与莱布尼兹提出了微积分：逻辑基础不严密，缺乏理论基础，特别对“无穷小”

例如，设自由落体在时间 t下落的距离为 S(t) ，

有公式$S(t)=\frac{1}{2}gt^2$，其中g 是固定的重力加速度，要

求物体在t_0 的瞬时速度。

$$\Delta S=S(t_1)-S(t_0)=\frac{1}{2}gt_1^2-\frac{1}{2}gt_0^2$$

$$=\frac{1}{2}g[(t_0+\Delta t)^2-t_0^2]=\frac{1}{2}g[2t_0\Delta t+(\Delta t)^2]$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta S}{\Delta t}=\boxed{gt_0}+\frac{1}{2}g\cdot\Delta t$$

瞬时速度

- **1734年，英国哲学家、牧师伯克莱提问：“无穷小”作为一个量，究竟是不是0？**

第二次数学危机(续)

- 法国大数学家柯西（**Cauchy Augustin Lous, 1789-1857**）创立的极限理论
- 德国著名数学家魏尔斯特拉斯（ Karl Theodor Wilhelm Weierstrass,1815-1897）创立的 $\varepsilon-\delta$语言
- 建立了数学分析巩固的基础，结束了几百年来微积分的混乱局面，彻底反驳了贝克莱的责难

潜无穷

- 古希腊的哲学家亚里士多德提出：

至于“无穷”虽在潜能上有此存在，然后这类潜能的命意并不指望其实现，这只在意识上有此潜在而已。实际是这样，分割一条线永不能分割完毕。在分割过程中，潜在的“无穷”是有的。但这无限毕竟不得实现为独立的存在。

- 德国数学家、“数学王子”高斯提出：

我极力反对把无穷量当成一种完成的东西来使用，这在数学上是绝对不允许的。无穷只不过是在实际谈论极限时的一个说法，有些关系可以要多接近就多接近极限，而另一些则允许无限制地增长

潜无穷

- 柯西提出极限的概念：无理数可被看作有理数序列

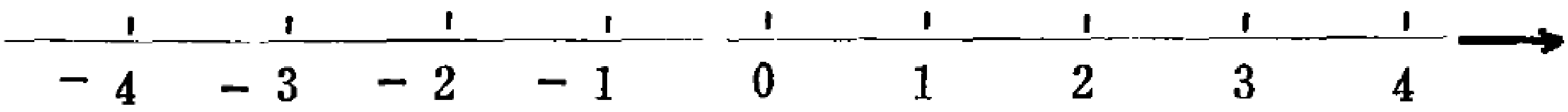
$\sqrt{2}$ 可被看作有理数序列:

1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, ….

- 魏尔斯拉斯做了改进：把 $\sqrt{2}$ 定义为集合

$\{$**1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, ….**$\}$

潜无穷→实无穷

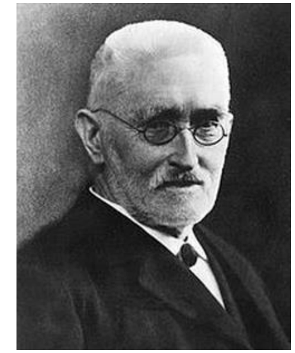


- 数轴上除了实数以外，是否还有别的数？
- 实数是否把数轴布满了，是否“连续”？
- 对“无穷”的数量研究提出需求，考虑对各种不同的无穷进行数量比较

集合论就是为了研究各种无穷而建立起来的数学理论

实数的三大派理论：从有理数出发定义出无理数

- 戴德金：有理数的分割理论
  - 1872年出版《连续性与无理数》
  - 把直线与实数对应起来
  - 有理数是稠密的但不是连续的
    - 有理数的分割：分面A,B两个集合，并且让A中的每个有理数都比B中每个有理数小
    - 分割确定了一个有理数，即A的最大数或B的最小数
    - 如果A中没有最大数，B中也没有最小数，这时需要无理数来填空



戴德金（1831-1916）
德国数学家

- 魏尔斯特拉斯：有界单调序列理论
- 康托尔：有理数序列理论

第三次数学危机——“伽里略悖论”

- “整体大于部分”或“整体在数量上多于部分”在无穷领域是否成立？
- 1636年，伽利略著作《两门新科学的对话》提出“伽利略悖论”：

  1，2，3，4，   5， 6，   7， 8，…

  1，4，9，16，25，36，49，64…

  - 正整数比完全平方数多，但对于任何正整数，又有唯一确定的完全平方数与之对应
  - 不会出现一个正整数，使得在完全平方数中不存在与之对应的数

整体大于部分➔部分能够等于整体

集合论的产生

- **1873**年**11**月**29**日，康托在给戴德金的一封信中，明确提出了“正整数集与实数集之间能否建立一一对应呢？”的问题
- 同年**12**月**7**日，再次致信戴德金说他已成功证明正整数集与实数集之间不能建立一一对应

1873年11月29日：集合论的诞生日

- 正整数集与(0, 1]上的点不能一一对应：对角线证法

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 0.\,a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\cdots \\
a_2 &= 0.\,a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\cdots \\
a_3 &= 0.\,a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}\cdots \\
&\cdots\cdots \\
a_n &= 0.\,a_{n1}a_{n2}a_{n3}a_{n4}\cdots \\
&\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

$b=0.b_{11}b_{22}b_{33}b_{44}\ldots,\ b_{ii}\neq a_{ii},\ i=1, 2, \ldots.$

有限集、无限集 ➔ 有限集、可数集和不可数集

- 1874年1月康托尔写给戴德金的信中问道：区间和正方形这两个点的集合是否构成一一对应关系?
- 1877年给出证明：

（0,1）与单位正方形两者之间存在一一对应关系

例如： 数 0.75146897……

把奇数位、偶数位分别取出得到两个新的数：

0.7169… …，0.5487… …

把以上两位数作为横坐标和纵坐标得到的点落在单位正方形中。

反之同样可构造。

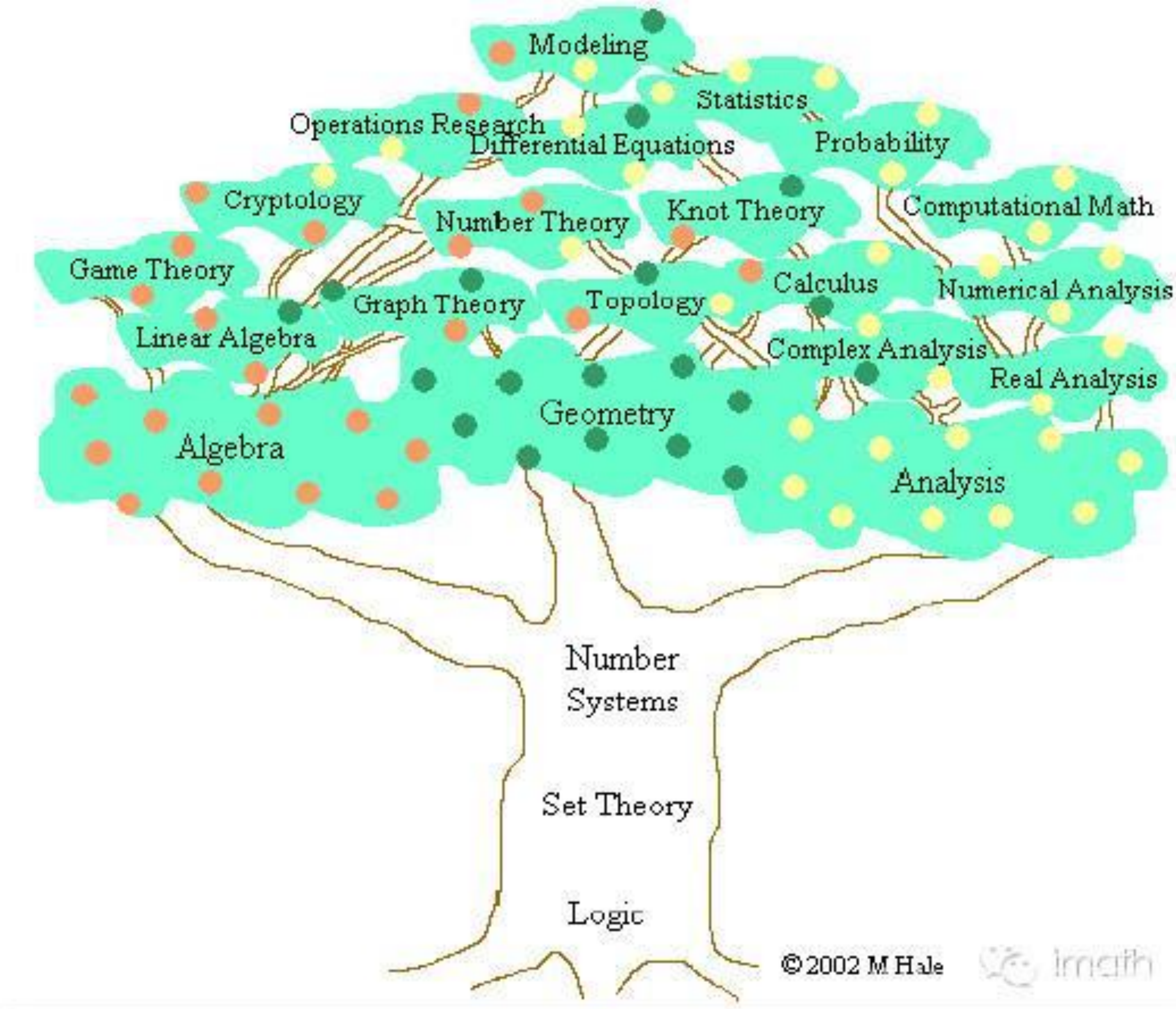
康托的进一步贡献

- **1874**年提出“可数集”的概念，且以一一对应为原则对无穷集合进行分类
  - 一切代数数是可数的
  - 任何有穷线段上的实数是不可数的
  - 超越数是不可数的
  - 一切无穷集并非都是可数的，无穷集同有穷集一样也有数量上的区别

朴素集合论的创立

- **1877**年证明了平面与直线之间上的点可以建立一一对应
- **1883**年发表专著《一般集合论基础》，标志着点集论体系的建立
- **1895**年到**1897**年出版《超穷数理论基础》，标志着集合论已从点集论过渡到抽象集合论，朴素集合论创建完成

康托创立的集合论成为了数学各个学科的基础


Modeling
Statistics
Operations Research
Differential Equations
Probability
Cryptology
Number Theory
Knot Theory
Computational Math
Game Theory
Graph Theory
Topology
Calculus
Numerical Analysis
Linear Algebra
Complex Analysis
Real Analysis
Geometry
Algebra
Analysis
Number Systems
Set Theory
Logic
©2002 M Hale
imath

集合论给数学开辟了广阔的新领域

- 集合论占统治地位后，现代数学才真正形成，并用集合论的语言重新或解决了代数、几何分析中长期存在的问题
- 19世纪末到20世纪初，又引出了实变函数论、抽象代数、点集拓扑等众多现代数学分支

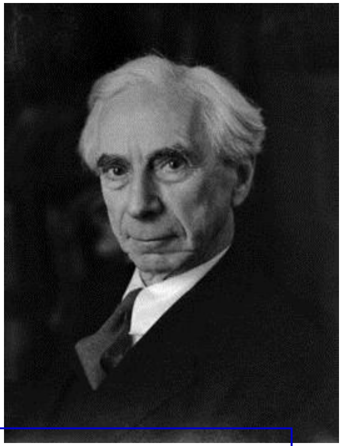
1900年第二次国际数学家大会上，著名数学家庞加莱兴高采烈地宣布“……借助集合论概念，我们可以建造整个数学大厦…… 今天，我们可以说绝对的严格性已经达到了….”

第三次数学危机——罗素悖论

- **1899年，康托已经预感到他的集合论可能引出逻辑混乱，在给戴德金的信中说到：**

  “不能谈论由所有的集合组成的集合”

- **1901年英国哲学家、数理逻辑学家、历史学家罗素(Bertrand Russell, 1872-1970)发现罗素悖论**



理发师悖论：一位乡村理发师宣称他不给村子里任何自己刮脸的人刮脸，但给所有不自己刮脸的人刮脸。有人问：理发师先生，您给自己刮脸吗？

第三次数学危机——罗素悖论

- **1902**年罗素将悖论写信告诉了数学家弗雷格
- 弗雷格在已处于付印中的《算术的基本规律》第二卷中加了一个补遗：

“一个科学家所遇到的最不合心意的事莫过于是在他的工作即将结束时，其基础崩溃了。罗素先生的一封信正好把我置于这个境地 ”

公理化集合论

- 1908年，罗素指出“我们不能任意地制造一个集合”
- 1908年，法国数学家策墨罗(Zennelo Erust Friedrich Ferdinand)提出第一个集合论的公理系统

“从现有的集合论成果出发，建立这一数学分支的原则，这些原则必须足够狭窄，以保证排除一切矛盾；另一方面，又必须充分广阔，使得康托集合论中一切有价值的东西得以保留”

1908年：第一个集合论公理系统

Ⅰ. 外延公理：对于两个集合 S 与 T，若 $S \subseteq T$，且 $T \subseteq S$，则 $S = T$。这就是说，每一集合都是由它的元素所决定的。

Ⅱ. 初等集合公理：存在一个没有元素的集合，并称它为空集合；对于对象域中的任意元素 a 与 b，存在集合 $\{a\}$ 和 $\{a, b\}$。

Ⅲ. 分离公理：假如对集合 S，命题函数 $p(x)$ 是确定的，那么就存在集合 T，它恰好只包含那些 $x \in S$ 使得 $p(x)$ 为真。

Ⅳ. 幂集合公理：如果 S 是一集合，则 S 的幂集合仍然是一集合，换言之，一集合 S 的所有子集合仍然组成一集合。

Ⅴ. 并集合公理：如果 S 是一集合，则 S 的并仍然是一集合。

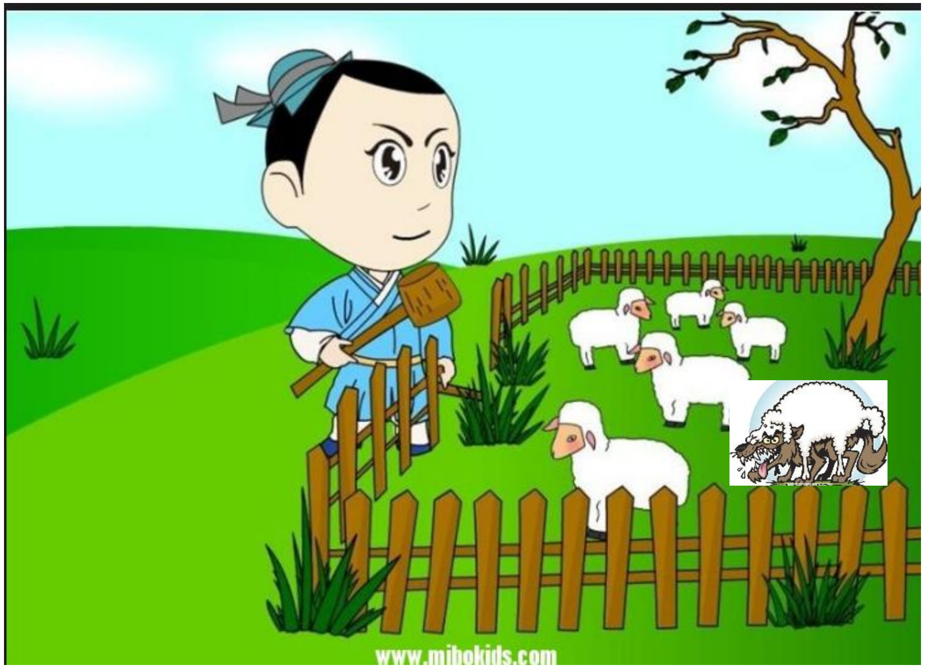
Ⅵ. 选择公理：如果 S 是不空集合的不交集合，那么存在 S 的并的一子集合 T，它与 S 的每一元素都恰好有一个公共元素。

Ⅶ. 无穷公理：存在一集合 Z，它含有空集合，并且对于任一对象 a，若 $a \in Z$，则 $\{a\} \in Z$。（策梅罗设计这一公理，是为了保证一个无限集是可以构造的）

被扩充为

- **ZF公理系统**
- **NBG公理系统**

- 数学家庞加莱指出：“我们设置栅栏，把羊群围住，免受狼的侵袭，但是很可能在围栅栏时就已经有一只狼被围在其中了。”



朴素集合论的影响

- **1897年第一次国际数学家大会上得到公开承认和称赞**
- **1900年第二次国际数学家大会上希尔伯特提出的23个数学问题的第一个就是连续统问题**
- 著名数学家希尔伯特和罗素给出最高评价
  - "它是对无穷最深刻的洞察，是数学天才的最优秀作品，是人类纯智力活动的最高成就之一"
  - "超穷算术是数学思想的最惊人的产物，在纯粹理性的范畴中是人类活动的最美的表现之一"
  - 这个成就可能是这个时代所能夸耀的最伟大的工作
  - 康托的无穷集合论是过去两千五百年中对数学的最令人不安的独创性贡献之一

“科学大厦的建立并不像盖房子那样要先打好所有的基础，然后再去建造与扩充房间。科学更喜欢尽快地获取宽裕的遨游空间。只有当后来种种迹象显示出其松散的基础无法再承受房间扩建的重压时，才设法对其进行支撑与加固。这不是一种缺陷。相反，这是一条正确健康的发展道路。”

——希尔伯特

THE END