定义. 设 f 为从X到Y的部分函数，g为从Y到Z的部分函数, 则称复合关系 $f\circ g$ 为 f 与 g 的合成（复合）函数，用 $g\circ f$ 表示，即

$g\circ f=\{\langle x, z\rangle \mid x\in X \wedge z\in Z \wedge \exists y\,(y\in Y \wedge y = f(x) \wedge z = g(y))\}$

例 设 $f: N \to N$，$g: N \to N$，且 $g(x) = 2x$,

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & x\text{是偶数} \\ 0 & x\text{是奇数} \end{cases}$$

求：$f\circ g$，$g\circ f$

解： (1) $f\circ g: N \to N$, $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x) = x$,

(2) $g\circ f: N \to N$

若 x 是 偶数：$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(x/2) = x$

若 x 是 奇数：$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(0) = 0$

所以，$(g\circ f)(x) = \begin{cases} x & \text{当 } x\text{是偶数} \\ 0 & \text{当 } x\text{是奇数} \end{cases}$

函数复合运算的性质：

恒等函数：集合 X上的恒等关系 $I_X = \{<x, x>| x \in X\}$ 为 X 到 X 的恒等函数。

定理: 函数 $f: X \rightarrow Y$， I_X 和 I_Y 是恒等函数，则

$$f \circ I_X = I_Y \circ f = f$$

证明: 对任意$x, y \in X$, 有 $< x, x > \in I_X$， 且 $< y , y > \in I_Y$,

$$\text{所以} < x, y > \in f \Leftrightarrow < x, x > \in I_X \wedge < x, y > \in f$$

$$\Leftrightarrow < x, y > \in f \circ I_X$$

$$\text{又} \quad < x, y > \in f \Leftrightarrow < x, y > \in f \wedge < y , y > \in I_Y$$

$$\Leftrightarrow < x , y > \in I_Y \circ f$$

定理: 若f是X到Y的部分函数，g是 Y到Z的部分函数，h是Z到W的部分函数，则 $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ （结合律）

证明：由题设，$h \circ g$，$g \circ f$，$h \circ (g \circ f)$, $(h \circ g) \circ f$ 均有定义，又因为f, g, h是关系, 由关系的复合运算满足结合律，可知上式成立 。

定义：若函数 $f: X \to X$，则 f 的 n 次幂，记为 f^n，可归纳定义如下:

1) $f^0 = I_X$

2) $f^{n+1} = f \circ f^n$

即：1) $f^0(a) = I_X(a) = a$;

2) $f^{n+1}(a) = f(f^n(a))$

定义: 若$f: X \to Y$，

(1) 若$\mathrm{ran}\ f = Y$, 则称f为满射；

即 $\forall y\ (\ y \in Y \to \exists x\ (\ x \in X \wedge f\ (x) = y\ )\ )$

(2) 若f是1-1的，则称f是内射（单射）；

即 $\forall x_1 \forall x_2 (x_1 \in X \wedge x_2 \in X \wedge f(x_1)=f(x_2) \to x_1=x_2)$

$\forall x_1 \forall x_2 (\ x_1 \in X \wedge x_2 \in X \wedge x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2))$

(3) 若 f既是满射，又是内射，则称f为双射。

例：若R为集合A上的等价关系，则$\varphi = \{ <x, [x]_R> \mid x \in A\}$是从A到A/R 的满射，并称φ 为自然映射或正则映射。

例：(1) 有限集 X 上的满射必为内射；

(2) 有限集 X 上的内射 必为 满射。

例: 下列函数是否为满射，内射和双射？

(1) $f:\{1,2\}\to\{0\}$

由于 f 的值域是单元素集，显然 $f(1)=f(2)=0$。函数f是满射，而不是内射的。

(2) $f:\{a,b\}\to\{2,4,6\}$， $f(a)=2$， $f(b)=6$

f 是内射，而不是满射。

(3) $f:N\to N$， $f(x)=2x$

因 f 的值域是偶整数集，并且 若 $x_1\neq x_2$，则 $f(x_1)\neq f(x_2)$，所以，函数 f 是内射。

所有奇自然数关于f没有源象，因此f 不是满射。

(4) $f:I\to I$， $f(x)=x+1$ $f:N\to N$， $f(x)=x+1$??

因为若 $x_1\neq x_2$，则 $f(x_1)\neq f(x_2)$，并且对任意 $y\in I$，都存在 $x=y-1\in I$，使得 $y=f(x)$，故函数 f 是双射。

定理: 设f: X→ Y和g: Y→Z，则

(1) 若 f 和 g 都是满射，则 $g\circ f$ 也是满射。

(2) 若 f 和 g 都是内射，则 $g\circ f$ 也是内射

(3) 若 f 和 g 都是双射，则 $g\circ f$ 也是双射

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

解: (1) 因为f和g都是满射，因此ran(f)=Y, ran(g)=Z。

得 $ran(g\circ f) = g(ran(f)) = g(Y)=Z$. 因此$g\circ f$是满射

(2)若 $x_1, x_2 \in X$且$x_1 \neq x_2$,

因为 f 是内射，因此 $f(x_1) \neq f(x_2)$。

又因为 g 是内射，得 $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$

即 $(g\circ f)(x_1) \neq (g\circ f)(x_2)$

故 $g\circ f$ 为单射

定理　设 $f: X \to Y$ 和 $g: Y \to Z$

1) 若 $g \circ f$ 是满射，则 g 是满射；

2) 若 $g \circ f$ 是内射，则 f 是内射；

3) 若 $g \circ f$ 是双射，则 g 是满射且 f 是内射。

规则：左满　右内

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

证明: (1)　只需证明 $\mathrm{ran}\, g = Z$。

显然　$\mathrm{ran}\, g \subseteq Z$。

由　$\mathrm{ran}\, f \subseteq Y$ 可知：　$g[\mathrm{ran}\, f] \subseteq g[Y] = \mathrm{ran}\, g$

而　$g[\mathrm{ran}\, f] = g \circ f[X] = \mathrm{ran}(g \circ f)$ 且　$\mathrm{ran}(g \circ f) = Z$ ($g \circ f$ 满射)

所以：$Z \subseteq \mathrm{ran}\, g$

因此：$Z = \mathrm{ran}\, g$，　即 g 为满射。

定理 设 $f: X \to Y$ 和 $g: Y \to Z$

1) 若 $g \circ f$ 是满射，则 g 是满射；
2) 若 $g \circ f$ 是内射，则 f 是内射；
3) 若 $g \circ f$ 是双射，则 g 是满射且 f 是内射。

规则：左满 右内

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

(2) 反证法：

假设 f 不是内射，则有 $x_1, x_2 \in X$ 且 $x_1 \neq x_2$ 使

$$f(x_1) = f(x_2),$$

因此 $(g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2)$，

这与 $g \circ f$ 为内射矛盾。

所以假设不成立，即 f 为内射。

例:对于下面的函数 f，确定

(1) f是否为内射、满射和双射；(2) f的值域；(3) $f^{-1}[s]$

(a) $f: R \to R$

$f(x)=2^x$

$s=\{1\}$

内射

ran(f)=R_+

$f^{-1}[s]=\{0\}$

(b) $f: N \to N$

$f(n)=2n+1$

$s=\{2,3\}$

内射

ran(f)=奇自然数

$f^{-1}[s]=\{1\}$

(c) $f:[0,1] \to [0,1]$

$f(x)=x/2+1/4$

$s=[0,1/2]$

内射

ran(f)=$[1/4, 3/4]$

$f^{-1}[s]= [0, 1/2]$

例：设f是从A到A的满射且 $f \circ f = f$, 证明 $f = I_A$。

证明: (1) 首先证明 $I_A \subseteq f$。

因为 $f: A \to A$ 为满射，所以对任意 $a \in A$ 存在 $b \in A$ 使得 $f(b) = a$。

又因为 $f \circ f = f$，所以 $f(a) = f(f(b)) = f \circ f(b) = f(b) = a$，即 $f(a) = a$, 得 $I_A \subseteq f$。

(2) 下面证明 $f \subseteq I_A$。对于任意 $<x, y> \in f$，因为 $I_A \subseteq f$，所以 $<x, x> \in f$。

而f为部分函数，即“单值”，于是，$x = y$。

所以 $<x, y> = <x, x> \in I_A$。

所以 $f \subseteq I_A$。

例：设f是从A到A的满射且 $f \circ f = f$, 证明 $f = I_A$。

(2)下面证明 $f \subseteq I_A$ (方法二)

下面要证 $I_A \subset f$ 不可能。用反证法，假设 $I_A \subset f$，则存在 $b \neq a$ 使得 $f(b) = a$。

因为f为满射，所以必存在 $c \in A$ 使得 $f(c) = b$。

因为 $f \circ f = f$, 所以 $b = f(c) = f \circ f(c) = f(f(c)) = f(b) = a$。

这与 $b \neq a$ 矛盾。所以假设不成立，即 $II_A \subset f$ 不可能。

例: 设 $X = \{0, 1, 2\}$，求出 X^X 中满足 $f^2 = f$ 的所有函数。

解: 假设函数 f 满足 $f^2 = f$，则

若 $f(a) = a$，则 $f^2(a) = f(a) = a$。 (1)

若 $f(a) = b$ ($b \neq a$)，则由 $f^2(a)=f(b) = f(a)=b$，得 $f(b) = b$。(2)

下面证明满足(1)与(2)的函数f一定满足 $f^2 = f$ 。

对任意的 $a \in X$,

若 $f(a) = a$, 则 $f^2(a)=a=f(a)$;

若 $f(a)=b\neq a$, 且 $f(b)=b$， 则 $f^2(a)=f(f(a))=f(b)=b=f(a)$。

得： f是满足 $f^2 = f$ 的函数当且仅当对任意 $a \in X$, $f(a)=a$ 或 $f(a)=b\neq a$ 且 $f(b)=b$。

因此，满足条件 $f^2(x) = f(x)$ 的函数是:

(1) 只有一个 $a\in\{1,2,3\}$,满足 $f(a)=a$:

$f_1(x) = \{ <0, 0>, <1, 0>, <2, 0> \}$

$f_2(x) = \{ <0, 1>, <1, 1>, <2, 1> \}$

$f_3(x) = \{ <0, 2>, <1, 2>, <2, 2> \}$

(2) 只有两个a∈{1,2,3},满足f(a)=a:

$f_4(x) = \{ \langle 0, 0\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 2, 0\rangle \}$

$f_5(x) = \{ \langle 0, 0\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 2, 1\rangle \}$

$f_6(x) = \{ \langle 0, 0\rangle, \langle 1, 0\rangle, \langle 2, 2\rangle \}$

$f_7(x) = \{ \langle 0, 0\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 2\rangle \}$

$f_8(x) = \{ \langle 0, 1\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle \}$

$f_9(x) = \{ \langle 0, 2\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle \}$

(3) 任意a∈{1,2,3}, 满足f(a)=a

$f_{10}(x) = \{ \langle 0, 0\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle \}$

例: 设A={1, 2, …, n}。有多少满足以下条件的从A到A的函数 f:

(1) $f \circ f = f$

解: (1) 由上例知f是满足 $f^2 = f$ 的函数当且仅当对任意$a \in X$, $f(a)=a$ 或$f(a)=b \neq a$且$f(b)=b$。

设f是A上的函数，满足只存在k个A中的元素a使得$f(a)=a$。假设$A' \subseteq A$, $|A'|=k$, 且对任意 $a \in A'$, 有$f(a)=a$，

则对任意的$b \in A-A'$, 一定存在一个$c \in A'$, 有$f(b)=c$。

否则，若存在$c' \in A-A'$,使得$f(b)=c'$，则$f(c')=c'$，与只存在k个A中的元素a使得$f(a)=a$矛盾。

因此，满足$f^2 = f$ 的函数的个数为 $\sum_{k=1}^{n} C_n^k k^{n-k}$

3.3 逆函数

问题：能否用关系的逆定义函数的逆?

例： 设 $f: I \to I$, $f = \{ <i, i^2> \mid i \in I \}$

则 $f^{-1} = \{ <i^2, i>, <i^2, -i> \mid i \in N \}$ (关系的逆)

显然， $<1, 1>$， $<1, -1> \in f^{-1}$，

所以，关系 f^{-1} 不是部分函数,

故 不能把 逆函数 直接定义为 逆关系 。

定义　设 X 和 Y 为二集合且 $f: X \to Y$。

1)若有 $g: Y \to X$ 使 $g \circ f = I_X$，则称 f 为左可逆的，并称 g 为 f 的一个左逆函数，简称左逆。

2)若有 $g: Y \to X$ 使 $f \circ g = I_Y$，则称 f 为右可逆的，并称 g 为 f 的一个右逆函数，简称右逆。

3)若有 $g: Y \to X$ 使 $g \circ f = I_X$ 且 $f \circ g = I_Y$，则称 f 为可逆的，并称 g 为 f 的一个逆函数，简称逆。

- 一个函数的左逆、右逆和逆不一定存在。即使存在，是否唯一？
- 那么，它们存在的条件是什么？

例：如下定义N上的四个函数：

$f_1=\{<0,0>, <1,0>\}\cup\{<n+2, n> \mid n\in N\}$

$f_2=\{<0,1>, <1,1>\}\cup\{<n+2, n> \mid n\in N\}$

$g_1=\{<n, n+2> \mid n\in N\}$

$g_2=\{<0,0>\}\cup\{<n+1, n+3> \mid n\in N\}$

有：$f_1\circ g_1=f_2\circ g_1=f_1\circ g_2=I_N$

对任意$n\in N$,

(1) $(f_1\circ g_1)(n)= f_1(n+2)=n$;

(2) $(f_2\circ g_1)(n)= f_2(n+2)=n$;

(3) $n=0$时，$(f_1\circ g_2)(0)= f_1(0)=0$;

$n>0$时，$(f_1\circ g_2)(n)=f_1(n+2)=n$

- f_1与f_2都是g_1的左逆
- f_1是g_2的左逆
- g_1与g_2都是f_1的右逆
- g_1是f_2的右逆

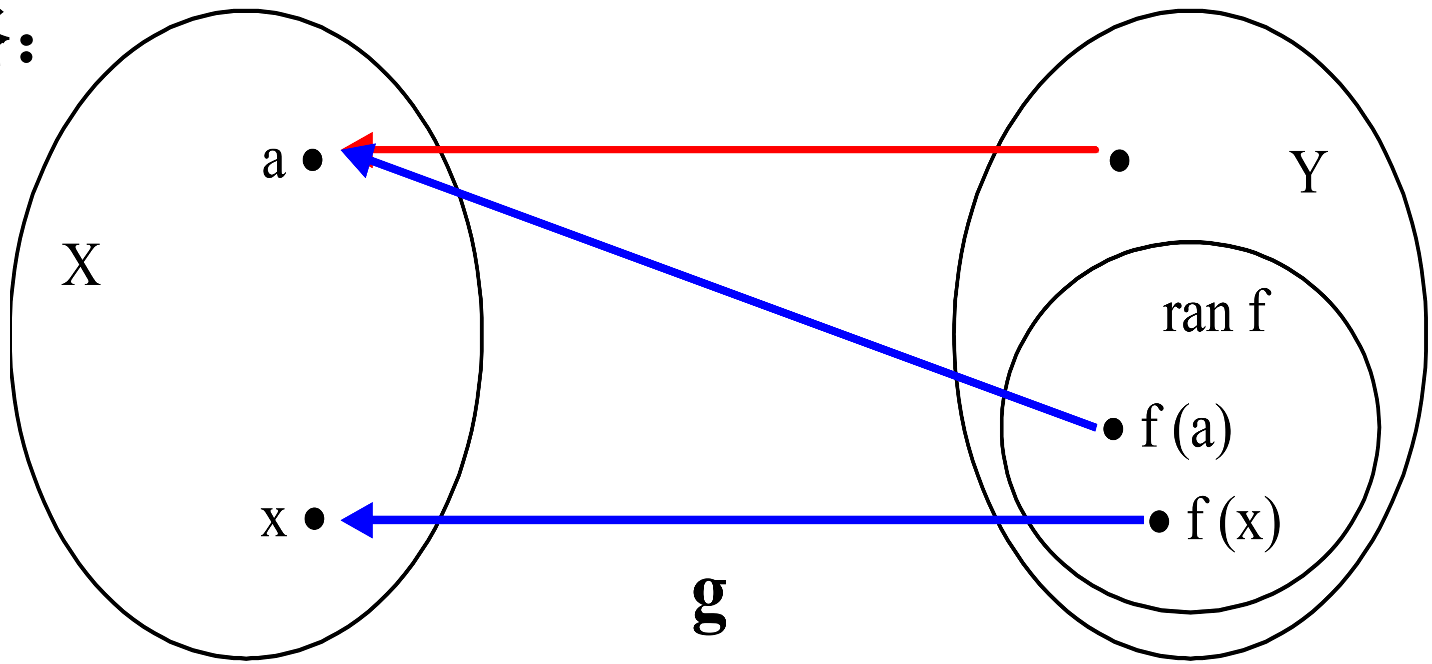
定理：设 X 和 Y 为二集合且 $X \neq \varnothing$。若 $f: X \rightarrow Y$, 则下列条件等价：

(1) f 为内射；

(2) $f: X \rightarrow Y$ 为左可逆

(3) f可左消去，即对任意集合Z及任意的 $g: Z \rightarrow X$ 和 $h: Z \rightarrow X$, 当 $f \circ g = f \circ h$ 时，皆有 $g = h$。

证明思路：



定理：设 X 和 Y 为二集合且 $X \neq \varnothing$。若 $f: X \rightarrow Y$, 则下列条件等价：

(1) f 为内射；

(2) $f: X \rightarrow Y$ 为左可逆

(3) f 可左消去，即对任意集合 Z 及任意的 $g: Z \rightarrow X$ 和 $h: Z \rightarrow X$, 当 $f \circ g = f \circ h$ 时，皆有 $g=h$ 。

证明：(1) → (2) 设 f 是内射，则对任意的 $x, y \in X$, 若 $x \neq y$, 则必有有 $f(x) \neq f(y)$，因此，f 的逆关系 f^{-1} 为从 Y 到 X 的一个部分函数。

又因为 $X \neq \varnothing$，令 $a \in X$，则定义函数 $g: Y \rightarrow X$:

$$g = f^{-1} \cup ((Y - \operatorname{ran} f) \times \{a\}),$$

对任意 $x \in X$, $g \circ f(x) = g(f(x)) = x$，即 $g \circ f = I_X$。

因此，g 为 f 的一个左逆。

定理：设 X 和 Y 为二集合且 $X \neq \varnothing$。若$f: X \to Y$, 则下列条件等价：

(1) f 为内射；

(2) $f: X \to Y$ 为左可逆

(3) f可左消去，即对任意集合Z及任意的$g: Z \to X$和 $h: Z \to X$, 当$f \circ g = f \circ h$时，皆有$g=h$ 。

证明: (2) ➔(3) 若 f 为左可逆的，则有 $f_1: Y \to X$ 使

$$f_1 \circ f = I_X,$$

又由$f \circ g = f \circ h$知，

$$g = I_X \circ g = (f_1 \circ f) \circ g = f_1 \circ (f \circ g) = f_1 \circ (f \circ h) = (f_1 \circ f) \circ h = I_X \circ h = h$$

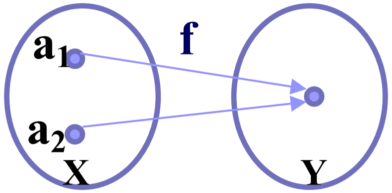
定理：设 X 和 Y 为二集合且 $X \neq \varnothing$。若$f: X \rightarrow Y$, 则下列条件等价：

(1) f 为内射；

(2) $f: X \rightarrow Y$ 为左可逆

(3) f可左消去，即对任意集合Z及任意的$g: Z \rightarrow X$和 $h: Z \rightarrow X$, 当$f \circ g = f \circ h$时，皆有$g=h$ 。

证明: (3) ➔(1) 假设f 不是内射，则必有$a_1, a_2 \in X$, 使得 $a_1 \neq a_2$ 且$f(a_1) = f(a_2)$。



令$h(x)=\begin{cases} x, x \in X, x \neq a_1 \\ a_2, \quad x = a_1 \end{cases}$, 则有$h: X \rightarrow X$, 且$h \neq I_x$,

且$f \circ I_X = f = f \circ h$，与(3) 矛盾，因此f一定是内射。