定义1(后继) 若A为集合，则称$A \cup \{A\}$为A的后继，并记为 A^+。

定理1：设 A 为任意集合， 则

(1) $\varnothing^+ = \{\varnothing\}$；

(2) $\{\varnothing\}^+ = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$;

(3) $A \in A^+$;

(4) $A \subseteq A^+$;

(5) $A^+ \neq \varnothing$ 。

定义2: 自然数的集合N可用归纳定义法定义如下：

(1) $0 \in N$， 这里 $0 = \varnothing$;

(2) 若 $n \in N$， 则 $n^+ \in N$；

(3) 若 $S \subseteq N$, 且满足 （极小化）

(a) $0 \in S$

(b) 如果 $n \in S$， 则 $n^+ \in S$

则 $S = N$。

对任意$n\in N$, 令$N_n=\{0, 1,2, \ldots, n-1\}$, $\overline{N}_n=N-N_n=\{n,n+1,n+2, \ldots\}$

定理(第一数学归纳法)：设$n_0\in N$。若对每个$n\in\overline{N}_{n_0}$，命题$P(n)$满足：

(1) $P(n_0)$是真；

(2) 对任何$n\in\overline{N}_{n_0}$，若$P(n)$为真，则$P(n^+)$也为真。

则对所有$n\in\overline{N}_{n_0}$，$P(n)$皆为真。

定理(第二数学归纳法):设$n_0\in N$. 若对每个$n\in\overline{N}_{n_0}$, $P(n)$满足：

(1) $P(n_0)$是真；

(2) 对任何自然数$n>n_0$, 若当$k\in N$, 且$n_0\leq k<n$时$P(k)$为真，则$P(n)$也为真。

则对所有$n\in\overline{N}_{n_0}$，$P(n)$皆为真。

定理(第二数学归纳法):设$n_0 \in N$. 若对每个$n\in \bar{N}_{n_0}$, $P(n)$满足:

(1) $P(n_0)$是真;

(2) 对任何自然数$n>n_0$, 若当$k\in N$, 且$n_0 \le k < n$时$P(k)$为真,
则$P(n)$也为真。

则对所有 $n\in \bar{N}_{n_0}$, $P(n)$皆为真。

证明: 对每个$n\in \bar{N}_{n_0}$, 用$Q(n)$表示以下命题:

如果$k\in N$, 且$n_0\le k \le n$, 则$P(k)$皆真。

下面验证$Q(n)$满足第一归纳法的条件。

(i) 因为$Q(n_0)$就是$P(n_0)$, 所以由(1)知, $Q(n_0)$为真;

(ii) 对于任意的$n\in \bar{N}_{n_0}$, 假定$Q(n)$为真。

则当$k\in N$且$n_0\le k \le n$时$P(k)$皆真。

因为没有$m\in N$能使$n<m<n^+$, 因此当$n_0\le k< n^+$时, $P(k)$也皆真。

从而由题设(2)知$P(n^+)$为真, 即$Q(n^+)$为真。

根据第一归纳法, 由(i), (ii)知, 对任意的$n\in \bar{N}_{n_0}$, $Q(n)$皆为真。

从而由$Q(n)$的定义知, 对任意的$n\in \bar{N}_{n_0}$, $P(n)$皆为真。

例. 设有两个口袋，分别装有m个球和n个球，并且 m>n。今有二人进行取球比赛，其比赛规则如下：

(1) 二人轮流从口袋里取球，每次只准一个人取；

(2) 每人每次只能从一个口袋里取且至少得取出一个球，多取不限；

(3) 最后取完口袋里的球者为获胜者。

试证明：先取者总能获胜。

证明：关于n进行第二数学归纳法证明：

(1) 当$n=0$时，仅一个口袋里有球，先取者全部取出即胜，此时命题为真。

(2) 对任意的自然数$p>0$,假定 对任意的自然数$k<p$,当$n=k$时，命题为真。当$n=p$时，

因为$m>p$, 所以先取者可以从装有m个球的口袋里取出$(m-p)$个球，此时两个口袋都只有p个球，且后选者需要从一个口袋里取出至少一个球。所以先取者再取时，一个口袋里有p个球，另一个口袋里不足p个球。

根据归纳假设，先取者总能获胜，即当$n=p$时，命题为真。

错误的例子：

例. 证明若n为自然数，则n+1=n。

证明：对任意的k∈N, 假设当n=k时命题为真，即k+1=k。

从而得到(k+1)+1=k+1，即当n=k+1时命题也为真。

因此由第一归纳法得知，若n为自然数，则n+1=n。

例. 证明世界上所有的人都同岁。

证明: (1) 当n=1时，因为只有一个人，他和他自己同岁，命题为真。

(2) 假定对任意的自然数k>1, 当n=k时命题为真，即任意k个人都同岁。任取 k+1个人，假定为$a_1, a_2,\ldots, a_{k+1}$。

根据假定，$a_1, a_2, \ldots, a_k$同岁，$a_2, a_3,\ldots, a_{k+1}$也同岁。

所以a1,a2,…, a_{k+1}都与a_2同岁，表明$a_1,a_2,\ldots, a_{k+1}$必同岁。

因此，n=k+1时命题也为真。

例：证明以下的二重归纳原理的正确性：设 $i_0, j_0 \in N$。假定对任意自然数$i \geq i_0$ 及 $j \geq j_0$皆有一个命题 $P(i, j)$ 满足：

1) $P(i_0, j_0)$为真；

2) 对任意自然数 $k \geq i_0$ 及 $l \geq j_0$，

   若$P(k, l)$ 为真，则$P(k+1, l)$ 和 $P(k, l+1)$皆真。

则对任意自然数 $i \geq i_0$ 及 $j \geq j_0$，$P(i, j)$ 皆真。

证明：（第一归纳法）

对于每个$i \geq i_0$，令$Q(i)$表示命题：对于任意$j \geq j_0$，$P(i, j)$皆真。

下面验证：$Q(i)$满足第一归纳法的条件。

(i) $Q(i_0)$为真（为此对 j 施用第一归纳法）：

(a) $P(i_0, j_0)$为真；

(b) 若$P(i_0, j)$为真，则$P(i_0, j+1)$为真；由归纳法可知，$Q(i_0)$为真。

(ii)若$Q(i)$为真($i \geq i_0$)，即对于任意$i \geq i_0$，$j \geq j_0$，$P(i, j)$为真。

则对于任意$j \geq j_0$，$P(i+1, j)$为真，即$Q(i+1)$为真。

由i)和ii)可知，对于任意$i \geq i_0$，$Q(i)$皆真。

所以，对于任意$i \geq i_0$，$j \geq j_0$，$P(i, j)$为真。

例：设n，m都是正整数，用二重数学归纳法证明方程

$$x_1+x_2+\cdots x_m=n$$

的非负整数解的个数为C^{n}_{n+m-1}。

基　　数

本节讨论度量和比较 两个集合大小的方法。

重点掌握 等势，有穷、无穷集合，可数无穷集合，
可数、不可数集合，无穷集合的性质，
有穷集合、**N** 与 **R** 的基数，基数的比较。

对任意两个有限集合A和B，如何知道A和B中哪个含有更多的元素？

1. 计数法：先数出它们的元素个数，再加以比较。

2. 愚人比宝法：每次各取一，看哪个最后取完。

对无限集，计数法失效。

什么叫做数一个集合中元素个数？

在该集合与某个自然数之间建立一个双射。

定义: 设 A 和 B 为两个集合，若存在从 A 到 B 的双射，则称 A 和 B 对等，或称 A 和 B 等势，记为 A ～ B。

例: 设集合 $E = \{0, 2, 4, \ldots\}$，即E是偶自然数集合。

令 $f: N \to E$ 为 $f(n) = 2n$, 其中 $n \in N$, 则 f 为双射,

故 $N \sim E$。

例: 设集合 $O = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$，即 O 是正奇数集合。

令 $g: N \to O$ 为 $g(n) = 2n+1$, 其中 $n \in N$, 则 g 为双射,

故 $N \sim O$。

例. 证明：Z～N

例. 证明：Z～N

N:	0	1	2	3	4	5	6	7	…
Z:	0	-1	1	-2	2	-3	3	-4	…

证明一:构造从Z到N的双射f:

$$f(x)=\begin{cases} 2n, & n\geq 0 \\ -2n-1, & n<0 \end{cases}$$

证明二: 构造从N到Z的双射g:

$$g(n)=\begin{cases} n/2, & n\text{是偶数} \\ -(n+1)/2, & n\text{是奇数} \end{cases}$$

等势关系的性质：

对于任何集合 A , B , C ， 均有：

(1) $A \sim A$;

(2) 若 $A \sim B$， 则 $B \sim A$;

(3) 若 $A \sim B$， $B \sim C$， 则 $A \sim C$。

即 等势关系有自反性, 对称性和传递性， 因此等势是集合族上的等价关系。

定义: 设A是集合。如果存在n∈N, 使$A \sim n$，则称A为有限集，否则称A为无限集。

- 如果存在有限集A和B之间的双射，则A和B的元素个数必相等

定理：任何有限集合都不能与它的真子集对等。

- 以上定理也叫抽屉原理(鸽巢原理)，可通俗表述为：“如果把 n+1 本书放进 n 个抽屉里，至少在一个抽屉里有两本或两本以上的书。”

例: (1) 任意 13 个人，至少有二人生日在同一个月；
(2) 任意 50 个人中，至少有5人生日同月。

- 任何与自身的真子集等势的集合均是无限集 。

定理：任意有穷集合A唯一地与一个自然数等势。

证明：显然，任意有穷集合A都与一个自然数等势。

设对于某两个自然数 m 和 n，A ~ m 且 A ~ n，则 m ~ n。

根据自然数的三岐性，则

m = n，或者其中一个是另一个的真子集。

因为 m ~ n，所以后一种可能是不存在的，

因此只能是 m = n 。

因此任意有穷集合A唯一地与一个自然数等势。

定义（有限集的基数）：对于任意有限集A，存在唯一的自然数 n，使得 A ~ n，称 n 为 A 的基数，记为 #A。

例：在 1, 2, ⋯ , 2n 中任取 n+1个互不相同的数中, 必存在两个数，其中一个数是另一个数的倍数。

证明：任何正整数 n 都可以表示成 $n = 2^m \cdot b$, 其中m=0, 1, 2, ⋯且 b为奇数。

设取出的 n+1 个数为 $k_1, k_2, \cdots, k_{n+1}$, 且

$$k_i = 2^{m_i} \cdot b_i\ ,\quad i=1,\ldots, n+1$$

由于 $b_1, b_2, \cdots, b_{n+1}$是n+1个奇数，并且每个$b_i \le k_i$。而在 { 1, 2, ⋯ , 2n } 中只有 n 个不同的奇数，所以必存在 $i, j\ (1 \le i < j \le n+1)$ 使得 $b_i = b_j$ 。

不妨设 $k_i < k_j$，则有 $k_j / k_i = 2^{m_j - m_i}$ 为正整数，因此 k_j 是 k_i的倍数。

例：任给52个整数，证明其中必有两数之和（或之差）能被100整除。

证明：设 r 为任意整数 n 被100 除的余数，则 r 均满足：

$0 \le r \le 99$ 。这些余数可以构成如下51个抽屉：

(0, 0), (1, 99), (2, 98), (3, 97) , ···, (49, 51), (50, 50)

任给 52 个整数，则必有两个整数 a 和 b 的余数 r_a和 r_b 落在同一个抽屉中，

若 r_a和 r_b落在(0, 0) 或 (50, 50)中，则a 和 b之和、之差均能被100整除。

若 r_a和 r_b落在 (i, 100-i) ($1 \le i \le 49$)中, 当 r_a和 r_b 取同一个数时，则 a 和 b之差能被100整除,否则a 和 b之和能被100整除。

- 抽屉原理对于无限集并不成立。

  希尔伯特旅馆

设想有一家旅馆，所有的房间都已客满。这时来了一位新客，想订个房间。

(1) 旅馆房间数有限时：“对不起”，旅馆主人说，“所有的房间都住满了。”

(2) 旅馆有无限间房间呢？

把1号房间的旅客移到2号房间，2号房间的旅客移到3号房间，3号房间的旅客移到4号房间等等，这样继续移下去。这样一来，新客就被安排住进了已被腾空的1号房间。

再设想一个有无限个房间的旅馆，各个房间也都住满了客人。这时又来了无穷多位要求订房间的客人。

把1号房间的旅客移到2号房间，2号房间的旅客移到4号房间，3号房间的旅客移到6号房间，如此等等，这样继续下去。现在，所有的单号房间都腾出来了，新来的无穷多位客人可以住进去，问题解决了！

记号：

对任意a, b $\in$R, 令

$$(a, b) = \{x \mid x \in R\text{且}a < x < b\}$$

$$(a, b] = \{x \mid x \in R\text{且}a < x \le b\}$$

$$[a, b) = \{x \mid x \in R\text{且}a \le x < b\}$$

$$[a, b] = \{x \mid x \in R\text{且}a \le x \le b\}$$

例: 证明 (0, 1) 与实数集合 R 等势。

证: 可以建立 (0, 1) 到 R 的双射函数 f 如下:

$$f(x) = tg((x - 1/2)\pi),$$

若$x \in (0, 1)$, 则$(x - 1/2)\pi \in (-\pi/2, \pi/2)$, 显然f是双射,

因此$(0, 1) \sim R$。

例: 如果 $a, b \in R$, $a < b$, 则 $(a, b) \sim R$。

证: 定义 $f: (a, b) \to R$ 如下:

$\forall x \in (a, b)$, 令 $f(x) = tg\left(\frac{x - \frac{a+b}{2}}{b-a} \cdot \pi\right)$,

若 $x \in (a, b)$ 时, 则 $\frac{x - \frac{a+b}{2}}{b-a} \cdot \pi \in (-\pi/2, \pi/2)$

可证 f 是双射（补充）, 所以 $(a, b) \sim R$。

例: 证明 (0, 1) 与[0,1]等势。

证: 如下定义f: (0, 1) → [0, 1]:

$$
f(x)=\begin{cases} 0, & x=\frac{1}{2} \\ 1, & x=\frac{1}{3} \\ \frac{1}{i-2}, & x=\frac{1}{i},\quad i\in N,\ i\geq 4 \\ x, & \text{其他} \end{cases}
$$

可证：f是内射，也是满射（补充）。

例: 证明

(1) (0, 1) 与(0,1]等势;

(2) (0,1) 与[0, 1)等势。