

## 作业 17-图论

### 习题 7.5

2. 答:

令邻接矩阵为  $A$ , 若  $A + A^2 + \cdots + A^{n-1}$  的非对角线上的元素均不为 0, 则为连通图, 否则不连通。

3. 答: 考虑无向图, 令邻接矩阵为  $A$  (若为有向图, 可先转化为无向图)。若  $A + A^2 + \cdots + A^{n-1}$  对角线全为 0, 则为非循环图。

4. 答: 用  $W$  过程对邻接矩阵  $A$  进行对应处理 (略)

## 作业 18-图论

### 习题 7.6

#### 8. 证明:

在二叉树中,任何结点的出度为 0 或 2。假设出度为 2 的结点有  $x$  个,则该二叉树的出度之和为  $2x$ ;

设二叉树共有  $n$  个结点,这些结点中除了根结点的入度为 0,其余结点的入度都为 1,因此,所有结点的入度之和为  $n-1$ 。

由图的性质,可知二叉树的出度之和与入度之和相等,即  $n-1=2x$ ,  $n=2x+1$ , 因此,无论  $x$  如何取值,二叉树的结点总数  $n$  都是奇数。

#### 9. 证明

(1) 在二叉树中,出度为 0 的结点是叶子结点,出度为 2 的结点是分支结点,设分支结点个数为  $x$ ,由上题证明过程可知,  $n=2x+1$ ,  $x=(n-1)/2$ 。因此,叶子结点的个数为  $n-x=(n+1)/2$ 。

(2)  $n$  阶二叉树的叶子结点有  $(n+1)/2$  个,分支结点有  $(n-1)/2$  个。

假设  $n$  阶二叉树的高度为  $m$ 。当  $1 \leq i \leq m-1$  时,第  $i$  级的结点包含一个分支结点和一个叶结点且第  $m$  级结点为两个叶结点时,树高最大,此时树高为  $m=(n-1)/2-1+1=(n-1)/2$ 。

当  $1 \leq i \leq m-1$  时,第  $i$  级的结点为  $2^i$  个分支结点,第  $m$  级结点为  $2^m$  个叶结点时,树高最小,满足:  $2^0+2+\dots+2^m=n$ ,得  $m=\log_2(n+1)-1$ 。

因此,  $\log_2(n+1)-1 \leq h \leq (n-1)/2$ 。