定义： 设 A 和 B 为二集合。

1) 如果 $A \sim B$，就称 A 和 B 的基数相等，记为 $\#(A) = \#(B)$。

2) 如果存在从 A 到 B 的内射，

就称 A 的基数小于等于 B 的基数，记为 $\#(A) \leq \#(B)$，

或称 B 的基数大于等于 A 的基数， 记为 $\#(B) \geq \#(A)$ 。

3) 如果 $\#(A) \leq \#(B)$ 且 $\#(A) \neq \#(B)$，

就称 A 的基数小于 B 的基数，记为 $\#(A) < \#(B)$，

或称 B 的基数大于 A 的基数，记为 $\#(B) > \#(A)$。

定理: 若A, B为二集合， 则 $\#(B) \leq \#(A)$ 当且仅当存在从 A 到 B 的满射。

定理： 设 A， B 和 C 为三集合，则有

(1) $\#(A) \leq \#(A)$;

(2) 若 $\#(A) \leq \#(B)$ 且 $\#(B) \leq \#(A)$， 则$\#(A) = \#(B)$;

(3) 若 $\#(A) \leq \#(B)$ 且 $\#(B) \leq \#(C)$， 则$\#(A) \leq \#(C)$。

其中， (2) 为著名的伯恩斯坦（E. Bernstein） 定理。

定义（可数集、可列集）：任何与自然数集合N对等的集合称为 可数集或可列集。

可数集：

- N
- N×N
- Q
- Z
- 奇自然数集合
- 偶自然数集合
- … …

定理. 以下三个条件等价：

(1) A 为无限集；

(2) A 有可数子集；

(3) A 有与它对等的真子集。

定理：可数无穷集合的无穷子集必是可数无穷的。

定理：对每个集合 A，皆有 $\#(A) < \#(P(A))$。

- 记 $\#(P(N)) = \aleph$

$\# R = \# P(N) = \aleph$

$\#(R \times R) = \aleph$

$\#(0,1)=\#(0,1]=\#[0,1)=\#[0,1]=\aleph$

例. 证明：实数集合 R 是不可数的 。

证明 ：首先证明(0, 1)是不可数的， 由于R和(0,1)是对等的，从而证明了R是不可数的。

假设(0, 1)是可数的, 则(0,1)与自然数集合N对等，于是能够把 (0, 1)中的元素排列成无穷序列s_0 , s_1 , s_2 , … s_n , …, 其中， $s_i \in (0, 1)$, $i \in N$.

而且每个s_i可表示成十进制小数$s_i = 0.y_1y_2y_3\cdots$，其中 $y_i \in \{0 , 1 , 2 , \cdots , 9\}$ 。(假设不用从某位后全是“9”的十进制小数表示。)

将(0,1)的元素S_1, S_2, S_3, … S_n , … 表示成：

$$S_0 = 0.a_{11}a_{12}a_{13}\cdots$$

$$S_1 = 0.a_{21}a_{22}a_{23}\cdots$$

$$\cdots$$

$$S_n = 0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}\cdots$$

$$\cdots$$

将(0,1)的元素$S_1, S_2, S_3, \cdots S_n, \cdots$表示成：

$$S_0 = 0.a_{11}a_{12}a_{13}\cdots$$
$$S_1 = 0.a_{21}a_{22}a_{23}\cdots$$
$$\cdots$$
$$S_n = 0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}\cdots a_{nn}\cdots$$
$$\cdots$$

证(续): 构造一个实数 $r = 0.b_1b_2b_3\cdots b_n\cdots$, 其中

b_j ($j= 1, 2, 3, \cdots$)按下列原则选取：

若 $a_{jj} \neq 1$, 则取 $b_j=1$; 若$a_{jj}=1$, 则取 $b_j=2$.

可得：在小数点后第1个位置上 r 与 S_1 不同 ,

在小数点后第2个位置 2上r 与 S_2不同 , …,

在小数点后第n个位置上r与S_n上不同，$n\in N$.

所以 r 不同于 $S_1, S_2, S_3, \cdots S_n, \cdots$

这表明 $r \notin S$. 从而导致矛盾 . 因此 S 是不可数的 .

又因为实数集合 R 和集合 (0, 1) 是等势的 , 从而 R 也是不可数的 .

例. 证明: 全体从N到N的严格单调递增函数组成的集合，其基数大于 $\aleph_0$

证明：设F是全体从N到N的严格单调递增函数组成的集合。首先证明$\aleph_0 \leq \#(F)$，然后证明$\#(F) \neq \aleph_0$。

(1) ($\aleph_0 \leq \#(F)$) 定义$f: N \to F$：对任意的$n \in N$, $f(n)$是N到N的函数，记$f(n)$为f_n，满足对任意的$m \in N$,

$$f_n(m)=(n+1)\cdot m。$$

显然，f_n是从N到N的严格单调递增函数。

而且当$n \neq n'$时，$f_n \neq f_{n'}$，即f是单射。

因此，$\aleph_0 \leq \#(F)$。

证明(续): (2) ($\#(F)\neq\aleph_0$) 反证法. 假设$\#(F)=\aleph_0$,则存在双射$g: N\rightarrow F$.
对任意的$n\in N$, 记$g(n)=g_n$, 即g_n是从N到N的严格单调递增函数。
递归构造从N到N的函数g':

(a) $g'(0) = g_0(0)+1$;

(b) $g'(n) = \max\{g'(n-1), g_n(n)\}+1$, $n\geq 1$.

显然，g'是N到N的严格单调递增函数.

下面证明$g'\notin F$。

$g_0(0)$	$g_0(1)$	$g_0(2)$	$g_0(3)$	$g_0(4)$
$g_1(0)$	$g_1(1)$	$g_1(2)$	$g_1(3)$	$g_1(4)$
$g_2(0)$	$g_2(1)$	$g_2(2)$	$g_2(3)$	$g_2(4)$
$g_3(0)$	$g_3(1)$	$g_3(2)$	$g_3(3)$	$g_3(4)$
$g_4(0)$	$g_4(1)$	$g_4(2)$	$g_4(3)$	$g_4(4)$

可证对任意 $n\in N, g'(n)\neq g_n(n)$,从而g'与F中的任意一个函数都不相等。

(i) 当$n=0$时， $g'(0) = g_0(0)+1 \neq g_0(0)$;

(ii) 当$k>0$时， 假设$n=k$时$g'(k)\neq g_k(k)$, 当$n=k+1$时，

$g'(k+1)=\max\{g'(k), g_{k+1}(k+1)\}+1$。

当$g'(k)\geq g_{k+1}(k+1)$时, $g'(k+1)=g'(k)+1>g_{k+1}(k+1)$;

当$g'(k)< g_{k+1}(k+1)$时, $g'(k+1)=g_{k+1}(k+1)+1>g_{k+1}(k+1)$.

由归纳证明知，对任意的 $n\in N$, $g'(n)\neq g_n(n)$， 得g'与F中的任意一个函数都不相等，即$g'\notin F$，与F是包含所有从N到N的严格递增函数的集合矛盾。因此假设不成立，即$\#(F)\neq\aleph_0$, 得$\#(F)>\aleph_0$

例. 证明：N的全体有限子集组成的集合是可数无穷集,即其基数为$\aleph_0$。

证明：记N的全体有限子集组成的集合为S, 定义函数

$f: S \to N$为：对N的任意的有限子集$S_1=\{n_0, n_1, n_2, \ldots, n_k\}$,

$k \geq 0$，$f(S_1)= 2^{n_0} + 2^{n_1}+\ldots 2^{n_k}$。

下面证明f是双射。

(1) 首先证明f是满射。

对任意的自然数$n\in N$, n总可以写成如下形式：

$n = 2^{i_0} + 2^{i_1}+\ldots 2^{i_k}$, 其中$i_0, i_1,\ldots, i_k$都是自然数，且

$i_0>i_1>\ldots>i_k\geq 0$。

此时,有$f(\{i_0, i_1, \ldots, i_k\}) =n$，因此，f是满射。

例. 证明：N的全体有限子集组成的集合是可数无穷集，即其基数为$\aleph_0$。

证明：(2) 下面证明f 是单射。

对N的任意两个不同有限子集$S_1=\{n_0, n_1, n_2, \ldots, n_k\}$与$S_2=\{m_1, m_2,\ldots, m_j\}$，有

$f(S_1)= 2^{n_0} + 2^{n_1}+\ldots +2^{n_k}$，$f(S_2)= 2^{m_0} + 2^{m_1}+\ldots+ 2^{m_j}$

不妨假设$n_0 > n_1 >\ldots > n_k$且$m_0 > m_1 > \ldots > m_j$。

令i是最大的自然数，满足 $n_{k-i} \neq m_{j-i}$, 且$n_{k-i+1}=m_{j-i+1},\ldots, n_k=m_j$。

则 $f(S_1)-f(S_2) = 2^{n_0}+\ldots+ 2^{n_{k-i}} - 2^{m_0} -\ldots-2^{m_{j-i}}$

不妨设$n_{k-i} > m_{j-i}$, 则

$$f(S_1)-f(S_2) =2^{m_{j-i}}(2^{n_0-m_{j-i}}+\ldots+ 2^{n_{k-i}-m_{j-i}} - 2^{m_0-m_{j-i}} -\ldots- 2^{m_{j-i+1}-m_{j-i}} -1)$$

显然, $f(S_1)-f(S_2) \neq 0$。因此 f为单射

综上所述，f为双射，得N的全体有限子集组成的集合与N对等，即为可数无穷集。

总结

- 自然数
- 基数

例：任意三个相邻整数的立方和都能被9整除。

证明：分为三种情况：

(1) 三个相邻整数中最小者 ≥ 0；

(2) 三个相邻整数中最小者 $= -1$；

(3) 三个相邻整数中最小者 ≤ -2。

对(1) 用第一归纳法，即证 $9 \mid n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3,\ n\geq 0$

(a) 当 $n = 0$ 时，$9 \mid 9$，所以 $n = 0$ 时命题为真；

(b) 对任意的 $k \geq 0$，假设当 $n = k$ 时命题为真，即

$$9 \mid k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3$$

$(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 = k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 + 9(k^2 + 3k + 3)$

由于 $9 \mid k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3$ 且 $9 \mid 9(k^2 + 3k + 3)$

所以，$9 \mid (k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3$，即当 $n = k+1$ 时命题也为真。

由(a), (b) 可知，对于任意 $n \geq 0$ 均有 $9 \mid n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$。

对(2) 因为 $9 \mid 0$，所以此时命题也为真。

对(3)由于 $9|n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$，所以，$9|(-n)^3+(-(n+1))^3+(-(n+2))^3$。

根据以上证明可知，任意三个相邻整数的立方和能被9整除。

自然数的性质：

(1) 若$n \in N$，则 $n \notin n$

(2) 若$n, m \in N$, 且$n \in m$, 则$n^{+} \in m$或者$n^{+}=m$

(3) 若$n, m \in N$，则$n \subset m$ 当且仅当 $n \in m$。

(4) 若$n, m \in N$，则$n \in m$ 当且仅当 $n^{+} \in m^{+}$

(5) 若$n \in N$，则不可能有$m \in N$ 使$n < m < n^{+}$

例. 证明：若$n, m \in N$，则$n \subset m$ 当且仅当 $n \in m$。

证明: (充分性)

若$n \in m$，则对任意的$x \in n$, 由自然数的传递性得 $x \in m$。因此$n \subseteq m$。

又由于 $n \notin n$, 且$n \in m$, 因此$n \subset m$。

(必要性) 若$n \subset m$, 构造集合$S=\{m \in N | n \subset m \Rightarrow n \in m\}$。

下面证明$S=N$。

显然$S \subseteq N$，为证明 $S = N$，只需验证 S 满足自然数的归纳定义中(3)的(a)与(b):

(a) $0 \in S$：因为没有自然数n满足$n \subset 0$;

(b)若$m \in S$, 则对任意的$n \in N$, 若$n \subset m$, 则 $n \in m$.下面证明$m^+ \in S$。

对任意的$n \in N$, 假设$n \subset m^+ = m \cup \{m\}$成立,下面证明$n \in m^+$。

由三歧性，考虑以下三种情形：$n \in m$, $n=m$, $m \in n$。

例. 证明：若$n, m \in N$，则$n \subset m$ 当且仅当 $n \in m$。

证明: (续)对任意的$n \in N$, 假设$n \subset m^+ = m \cup \{m\}$成立,下面证明$n \in m^+$。由三歧性，考虑以下三种情形: $n \in m$, $n=m$, $m \in n$。

(i) 首先证明$m \in n$不成立。假设$m \in n$, 则$m<n$, 有$m^+=n$ 或者$m^+<n$，与$n \subset m^+$矛盾。

(ii) 若$n \in m$，由$m^+=m \cup \{m\}$，得$n \in m^+$。

(iii) 若$n=m$，同样由$m^+=m \cup \{m\}$得$n \in m^+$。

综上所述，由自然数集合的归纳定义得$S=N$。所以命题成立。

例. 证明：若$n, m \in N$，则$n \in m$ 当且仅当 $n^+ \in m^+$。

证明: (必要性) 若$n \in m$，则$n \subset m$。

已知 $n^+=n\cup\{n\}$, $m^+=m\cup\{m\}$。

由$n \in m$知$\{n\} \subset m$。因此，$n^+ = n\cup\{n\} \subseteq m$。

又由于$m \notin m$, 得$n^+ \subset m^+$，从而$n^+ \in m^+$。

(充分性) 反证法。假设$n \notin m$, 则由自然数的三歧性知 $n=m$ 或者$m \in n$。

若$n=m$，则$n^+ = m^+$，与$n^+ \in m^+$矛盾；

若$m \in n$, 则由必要性证明知$m^+ \in n^+$，与$n^+ \in m^+$矛盾。

因此假设不成立，即一定有$n \in m$。

例：称一个集合A为传递的，如果A的元素的元素仍然是A的元素。证明每个$n \in N$都是传递的。

证明：对n进行数学归纳法证明。

当n=0时，$0=\{\emptyset\}$，显然，0是传递的。

当n=1时，$1=\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$，1是传递的。

假设当$n\geq 1$时，n是传递的，则对任意的$a \in n$, 任意的$x \in a$, 有$x \in n$。下面证明n^+也是传递的。

对任意的$a \in n^+=n \cup \{n\}$,

(a)若$a\in n$, 则对任意$x\in a$，由归纳假设知$x\in n$, 得$x\in n^+$。

(b)若$a\in\{n\}$,则$a=n$，显然，对任意$x \in a$， $x\in n^+$。

因此，每个$n\in N$都是传递的。

例. 构造从集合A到集合B的双射。

(a) A=R, B=(0, ∞);

(b) A=(0,1), b=[0, 1);

(c) A=[0,1), B=(1/4, 1/2];

解： (a) f: x → 2^x。

(b)

$$f(x)=\begin{cases}0 & x=\frac{1}{2}\\ \frac{1}{n-1} & x=\frac{1}{n}\ (n>2)\\ x & \text{其他}\end{cases}$$

或

$$f(x)=\begin{cases}0 & x=\frac{1}{2}\\ (\frac{1}{2})^{n-1} & x=(\frac{1}{2})^{n}\ (n>2)\\ x & \text{其他}\end{cases}$$

(c) f (x) = 1/2 – x/4 或 f (x) = 1/2 cos(πx/3)。

例：设n>0且$x_1, x_2, \ldots, x_n$是n个任意整数，证明存在 k 和i 使$1 \le i \le k \le n$且$x_i+x_{i+1}+\ldots+x_k$能被 n整除。

证明：(1) 若存在$1 \le k' \le n$使得$x_1 + \ldots + x_{k'}$ 被n整除，则取$i = 1, k = k'$ 即可。

(2) 否则，$x_1 , x_1 + x_2 , \ldots , x_1 + \ldots + x_n$共n个数，而它们被n除的余数除0外仅有n-1个。

根据抽屉原则，其中必有两个它们被n除的余数相等。

假设它们为：

$$x_1 + \ldots + x_{j1} 和 x_1 + \ldots + x_{j2}$$

则取$i = j_1+1, k = j_2$ 即可。

例：证明在n+1个小于等于2n 的正整数中必有两数互素，其中$n \geq 1$。

证明：小于等于2n 正整数可写成如下n个整数对：

$$(1, 2), (3, 4), \ldots, (2n-1, 2n)。$$

任取n+1个数，则一定有两个数处理同一整数对，这两个数必互素。

例：设$n \in I_+$, 证明在能被n整除的正整数中必存在只由数字7和0组成的数。

证明：考虑全由7组成的n+1个数：

7， 77， …, 77…7 （最后一个由n+1个7组成）。

则这n+1个数除以n的余数只有n种情况：0, 1, 2,…, n-1。

由抽屉原理知，必有两个数的余数相同，则这两个数的差满足条件。