定义　设 X 和 Y 为二集合 且 $f: X \to Y$。

(1) 若有 $g: Y \to X$ 使 $g \circ f = I_X$，则称 f 为左可逆的，并称 g 为 f 的一个左逆函数，简称 左逆。

(2) 若有 $g: Y \to X$ 使 $f \circ g = I_Y$，则称 f 为右可逆的，并称 g 为 f 的一个右逆函数，简称 右逆。

(3) 若有 $g: Y \to X$ 使 $g \circ f = I_X$ 且 $f \circ g = I_Y$，则称 f 为可逆的，并称 g 为 f 的一个逆函数，简称 逆。

定理 设 X 和 Y 为二集合且 $X \neq \varnothing$。若 $f: X \rightarrow Y$，则下列条件等价：

(1) f 为内射；

(2) $f: X \to Y$ 为左可逆

(3) f可左消去，即对任意集合Z及任意的 $g: Z \to X$ 和 $h: Z \to X$，当 $f \circ g = f \circ h$ 时，皆有 $g=h$。

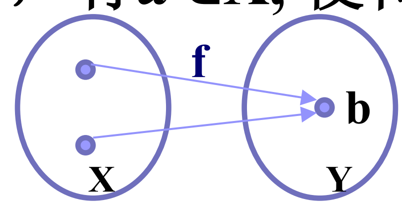
定理: 设 X 和 Y 为二集合,若f: $X \to Y$,则下列条件等价:

(1) f为满射;

(2) f 右可逆;

(3) f 可右消去, 即对任意集合Z及任意的 g: Y→ Z和 h:Y→Z, 当$g \circ f = h \circ f$ 时, 皆有g=h。

证明: (1) →(2) 若 f 为满射, 则对任意的$b \in Y$, 有$a \in X$, 使得 $b=f(a)$, 即$f^{-1}[\{b\}]\neq\emptyset$。



如下定义函数$g: Y \to X$, 使得对任意的$b \in Y$, 任取 $x_b \in f^{-1}[\{b\}]$, 定义$g(b)=x_b$。

则有对任意的$b \in Y$, $(f \circ g)(b) = f \circ (g(b)) = f(x_b)=b$。

因此$f \circ g = I_Y$, 从而f是右可逆。

定理: 设 X 和 Y 为二集合,若f：$X \to Y$,则下列条件等价：

(1) f为满射；

(2) f 右可逆；

(3) f 可右消去，即对任意集合Z及任意的 $g: Y \to Z$和 $h: Y \to Z$, 当$g \circ f = h \circ f$时，皆有$g=h$ 。

证明: (2) ➔(3) 若f右可逆，则存在f': $Y \to X$, 使得

$f \circ f' = I_Y$.

又由 $g \circ f = h \circ f$，得

$$g = g \circ (f \circ f') = (g \circ f) \circ f' = (h \circ f) \circ f' = h \circ (f \circ f') = h。$$

定理: 设 X 和 Y 为二集合,若f: $X \to Y$,则下列条件等价:
(1) f为满射;
(2) f 右可逆;
(3) f 可右消去，即对任意集合Z及任意的 g: Y→ Z和 h:Y→Z, 当$g \circ f=h \circ f$时，皆有g=h 。

证明: (3) →(1) 假设f不是满射, 则存在b ∈Y, 使得$b \notin f[X]$。
(1) 若X=∅, 则由f: $X \to Y$，可知f=∅. 令Z={1, 2}, 且
g: $Y \to Z$, 满足g(y) = 1, h: $Y \to Z$, 满足h(y)=2。
此时，$g \neq h$，但 $g \circ f=h \circ f = \emptyset$，与(3) 矛盾。
(2)若$X \neq \emptyset$, 则有$f[X] \neq \emptyset$。任取b’ ∈ f[X], 显然有b ≠b’。
定义 h: Y→X, 满足 $h(y)=\begin{cases} y, y \in Y, y \neq b \\ b', y = b \end{cases}$，有$h \neq I_Y$，且
$h \circ f = I_Y \circ f$，与(3) 矛盾。
综上所述，f为满射。

定理: 设 X 和 Y 为二集合，若 f: X→Y 既是左可逆的，又是右可逆的，则 f 是可逆的，且 f 的左逆和右逆都等于 f 的唯一的逆。

证明: 设g_1: Y →X, g_2:Y →X 分别是f的左逆与右逆, 即$g_1 \circ f = I_X$, $f \circ g_2 = I_Y$。

则 $g_1 = g_1 \circ I_Y = g_1 \circ (f \circ g_2) = (g_1 \circ f) \circ g_2 = I_X \circ g_2 = g_2$。

因此，g_1是f的逆。

下面证明唯一性。假设g’是f的逆，即$g' \circ f = I_X$, $f \circ g' = I_Y$。

同理可证$g_1 = g'$（略）。

定义：设 X 和 Y 为二集合。若 f：X → Y 为可逆的，则 f 的逆函数用 f^{-1} 表示。

定理：若 X 和 Y 为二集合 且 $f: X \to Y$, 则下列条件等价：

(1) f 是双射；

(2) f 既是左可逆的，又是右可逆的；

(3) f 是可逆的；

(4) f 的 逆关系 f^{-1} 即为 f 的 逆函数。

证明: (1)→(2)，(2)→(3)都可由前面的定理直接得到。

(3)→(4) 若f是可逆的，则存在逆$f^{-1}: Y \to X$, 使得 $f \circ f^{-1} = I_Y$, 且$f^{-1} \circ f = I_X$。

因此f是双射。则其逆关系也是双射，即为f的逆。

(4)→(1) 因为f^{-1}是f的逆函数，故f^{-1}既是f的左逆又是f的右逆，即$f^{-1} \circ f = I_X$, $f \circ f^{-1} = I_Y$。

因此f既是内射又是满射，即f 是双射。

定理: 设X, Y, Z为三集合。若 $f: X \rightarrow Y$ 和 $g: Y \rightarrow Z$ 都是可逆的，则 $g \circ f$ 也是可逆的，且 $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$。

证明：因为：

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1}$$

$$= g \circ I_Y \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = I_Z$$

同理可得 $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = I_X$

故 $g \circ f$ 是可逆的，且 $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$。

例：设 A 为有限集 且 $f: A \to A$，证明：

(1) 若有自然数 $n \geq 1$ 使 $f^n = I_A$，则 f 为双射；

(2) 若 f 为双射，则有自然数 $n \geq 1$ 使 $f^n = I_A$。

证明: (1) 由 $f^n = I_A$，有 $f^{n-1} \circ f = f \circ f^{n-1} = I_A$，且 I_A 为双射。

由 $f^{n-1} \circ f = I_A$ 为内射可知 f 为内射，

由 $f \circ f^{n-1} = I_A$ 为满射可知 f 为满射，故 f 为双射。

(2) 因 f 为双射，由归纳法可知:对每个 $n > 0$，f^n 均为双射。

设 $n(A)=m$，则A上的双射有 $m!$ 个，

由抽屉原理可知：在 f，f^2，f^3，…，$f^{m!+1}$ 这 $m!+1$ 个双射中，必有两个相等，不妨设为：$f^j = f^k$ ($1 \leq k<j$)，

因为 f 为双射，故有逆函数 f^{-1}，得

$$f^{j-k} = f^j \circ (f^{-1})^k = f^k \circ (f^{-1})^k = I_A。$$

例：设 $f: A \to B$，且 $n(A) \geq 2$。证明f是可逆的当且仅当f有唯一的左（右）逆。

证明：假设 f 是可逆的，则 f 的 逆 f^{-1} 是f 的唯一的左（右）逆。

假设 f 有唯一的左逆 g，则 $g \circ f = I_A$。

由于 I_A 是内射，得 f是内射。

下面证明f是满射。

（反证法）若f 不是满射，则存在b' ∈B，使得b'∉f[A]。

假设 g(b')=a。由于n(A)≥2，则一定存在a' ∈A且a'≠a。

如下定义 $g': B \to A$: 对任意的b∈B,

$$g'(b) = \begin{cases} g(b) & ,\text{若} b \neq b' \\ a' & ,\text{若} b = b' \end{cases}$$

对任意的a ∈A, $g' \circ f(a) = g'(f(a)) = g(f(a)) = a$。

因此 $g' \circ f = I_A$，即g' 也是f的左逆， 矛盾。

故f是满射，得f是双射，因此f可逆。

例：设f, g, h都是从N到N的函数，其中$f(x)=3x$, $g(x)=3x+1$, $h(x)=3x+2$。找出它们的一个共同左逆。

解：令 $p: N \to N$, 满足对任意 $x \in X$, $p(x) = \lfloor x/3 \rfloor$,

即$p(x)$ 是小于$x/3$的最大整数。

可证：

$$p \circ f = p \circ g = p \circ h = I_N,$$

因此p是f, g, h 的一个共同左逆。

3.4 特征函数

- 用函数来确定集合与集合间的关系

定义：设X为任意集合，f和g都是从X到 R的函数，

(1) $f \le g$ 表示对每个$x \in X$, 皆有$f(x) \le g(x)$;

(2) $f + g$: $X \to R$, 对每个$x \in X$, 皆有$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, 称$f+g$为f和g的和；

(3) $f-g$: $X \to R$, 对每个$x \in X$, 皆有$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$, 称$f-g$为f和g的差；

(4) $f*g$: $X \to R$, 对每个$x \in X$, 皆有$(f*g)(x)=f(x)*g(x)$, 称$f*g$为f和g的积。

定义 (特征函数)设 U 是全集，A 是 U 的子集，A的特征函数χ_A为如下定义的从U到R的函数：

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & 若\ x \in A \\ 0 & 若\ x \notin A \end{cases}$$

例：设 U 是某大学 全体学生的集合，A 是计算机学院学生的集合，求 $\chi_A(x)$。

解：若 x 是计算机学院的学生，则 $\chi_A(x) = 1$，

若 x 不是计算机学院的学生，则 $\chi_A(x) = 0$。

例：设 $U = \{a, b, c, d\}$，$A = \{a, c\}$，$\chi_A(x)$ 是 特征函数，求 $\chi_A(x)$。

解：$x_A(a) = 1$，$x_A(b) = 0$，$\chi_A(c) = 1$，$\chi_A(d) = 0$

特征函数的性质： 设 A 与 B 是全集 U 的任意两个子集，0表示从U到R的函数$\{\langle x, 0\rangle \mid x\in U\}$, 1表示从U到R的函数$\{\langle x, 1\rangle \mid x\in U\}$。

(1) $0 \le \chi_A \le 1$

(2) $\chi_A=0$ 当且仅当$A=\varnothing$ $\quad \forall x\,(\chi_A(x)=0) \Leftrightarrow A=\varnothing$

(3) $\chi_A=1$ 当且仅当$A=U$ $\quad \forall x\,(\chi_A(x)=1) \Leftrightarrow A=U$

(4) $\chi_A \le \chi_B$当且仅当 $A\subseteq B$ $\quad \forall x\,(\chi_A(x)\le\chi_B(x)) \Leftrightarrow A\subseteq B$

(5) $\chi_A = \chi_B$当且仅当 $A = B$ $\quad \forall x\,(\chi_A(x)=\chi_B(x)) \Leftrightarrow A=B$

(6) $\chi_{\sim A} = 1-\chi_A$ $\quad \forall x,\ \chi_{\sim A}(x)=1-\chi_A(x)$

(7) $\chi_{A\cap B}=\chi_A*\chi_B$ $\quad \forall x,\ \chi_{A\cap B}(x)=\chi_A(x)*\chi_B(x)$

(8) $\chi_{A\cup B}=\chi_A+\chi_B-\chi_A*\chi_B$ $\quad \forall x,\ \chi_{A\cup B}(x)=\chi_A(x)+\chi_B(x)-\chi_A(x)*\chi_B(x)$

(9) $\chi_{A-B}=\chi_A-\chi_A*\chi_B$ $\quad \forall x,\ \chi_{A-B}(x)=\chi_A(x)-\chi_A(x)*\chi_B(x)$

(10) $\chi_A*\chi_B=\chi_A$当且仅当$A\subseteq B$ $\quad \forall x\,(\chi_A(x)*\chi_B(x)=1\Leftrightarrow \chi_A(x)=1)$

(11) $\chi_A*\chi_A=\chi_A$ $\quad \forall x,\ \chi_A(x)*\chi_A(x)=\chi_A(x)$

应用

例：**证明 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$**

证明：$\chi_{A\cap(B\cup C)}$

$=\chi_A*\chi_{B\cup C}$

$=\chi_A*(\chi_B+\chi_C-\chi_{B\cap C})$

$=\chi_A*\chi_B+\chi_A*\chi_C-\chi_A*\chi_{B\cap C}$

$=\chi_{A\cap B}+\chi_{A\cap C}-\chi_{A\cap(B\cap C)}$

$=\chi_{A\cap B}+\chi_{A\cap C}-\chi_{(A\cap B)\cap(A\cap C)}$

$=\chi_{(A\cap B)\cup(A\cap C)}$

例：证明 $\sim\sim A = A$

证明：$\chi_{\sim\sim A} = 1 - \chi_{\sim A}$

$$= 1 - (1 - \chi_A)$$

$$= \chi_A$$

故 $\sim\sim A = A$。

例: 证明 $\sim(A\cup B) = \sim A\cap\sim B$ 。

证明: $\chi_{\sim(A\cup B)} = 1 - \chi_{A\cup B}$

$= 1 - \chi_A - \chi_B + \chi_A * \chi_B$

$\chi_{\sim A\cap\sim B} = \chi_{\sim A} * \chi_{\sim B}$

$= (1 - \chi_A) * (1 - \chi_B)$

$= 1 - \chi_A - \chi_B + \chi_A * \chi_B$

所以 $\chi_{\sim(A\cup B)} = \chi_{\sim A\cap\sim B}$

从而 $\sim(A\cup B) = \sim A\cap\sim B$

例: 用特征函数求$(A-B)\cup(A-C)=A$成立的充分必要条件。

解: $\chi_{(A-B)\cup(A-C)}=\chi_{(A-B)}+\chi_{(A-C)}-\chi_{(A-B)\cap(A-C)}$

$=\chi_A-\chi_A*\chi_B+\chi_A-\chi_A*\chi_C-\chi_{(A-B)}*\chi_{(A-C)}$

$=2\chi_A-\chi_A*\chi_B-\chi_A*\chi_C$

$-(\chi_A-\chi_A*\chi_B)*(\chi_A-\chi_A*\chi_C)$

$=2\chi_A-\chi_A*\chi_B-\chi_A*\chi_C-(\chi_A*\chi_A-\chi_A*\chi_A*\chi_C-\chi_A*\chi_B*\chi_A+$

$\chi_A*\chi_B*\chi_A*\chi_C)$

$=\chi_A-\chi_A*\chi_B-\chi_A*\chi_C-\chi_A+\chi_A*\chi_C+\chi_A*\chi_B-\chi_A*\chi_B*\chi_c$

$=\chi_A-\chi_A*\chi_B*\chi_c$

因此 $(A-B)\cup(A-C)=A$ 当且仅当 $\chi_A*\chi_B*\chi_c=0=\chi_{A\cap B\cap C}$

当且仅当$A\cap B\cap C=\emptyset$。