定义6.13 设$<A, \leq>$是偏序结构，并且$S \subseteq A$，$S \neq \phi$, 则

(1) b 是 S 的上界 $\Leftrightarrow$ $b \in A \wedge \forall x (x \in S \rightarrow x \leq b)$

(2) b 是 S 的下界 $\Leftrightarrow$ $b \in A \wedge \forall x (x \in S \rightarrow b \leq x)$

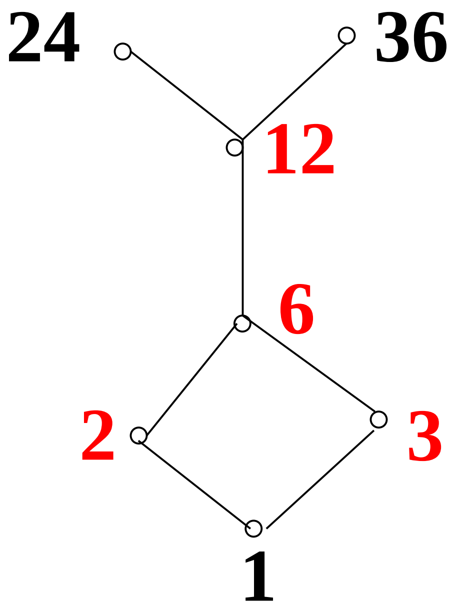
(3) b 是 S 的最小上界(上确界) $\Leftrightarrow$ b是S的上界, 且对S的任意上界 x， 都有 $b \leq x$ 。

(4) b 是 S 的最大下界(下确界) $\Leftrightarrow$ b是S的下界, 且对S的任意下界 x,都有 $x \leq b$ 。

- S的上界和下界可能不唯一；
- S的最小上界和最大下界若存在，则唯一。

例: (A, ≤): A = {1,2, 3, 6, 12, 24, 36}，≤ 为整除关系，如果 x 整除 y， 便有 x ≤ y .

设 S={2, 3, 6, 12}



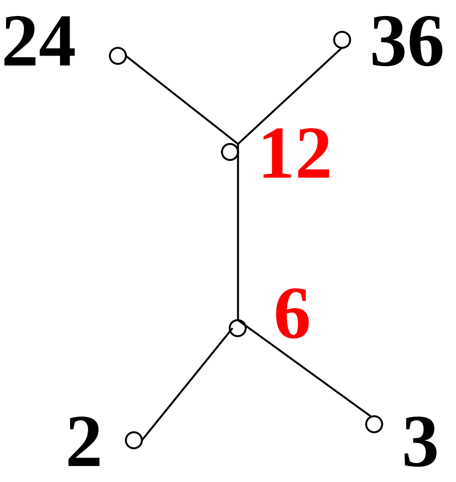
S的极大元：12, 极小元：2,3

最大元： 12 最小元：无

上界： 12, 24, 36 下界： 1

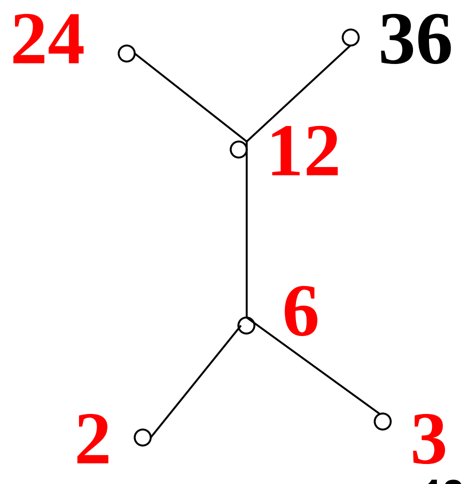
最小上界：12 最大下界：1

例: (A, ≤): A = {2, 3, 6, 12, 24, 36 },
≤为整除关系，如果 x 整除 y，便有 x ≤ y。令S={6，12}, 求S的极大元、极小元、最大元、最小元、上界、下界、最小上界、最大下界。



解：S的极大元是 12；极小元是6；
S的最大元是12；最小元是6
S的上界有12, 24, 36;下界有2, 3, 6;
S的最小上界是12；最大下界是 6

S={2, 3, 6, 12, 24} ???



解：S的极大元是 24；极小元是2, 3;
S的最大元是24；无最小元
S的上界和最小上界是24，无下界。

例：若 $S=\{x|\ x\in R$ 且 $1< x< 2\}$，$\leq$ 是R上的小于或等于关系，给出S的极大元、极小元、最大元、最小元、最小上界、最大下界。

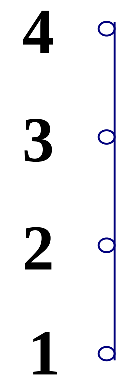
解：S无极大元、极小元、最大元、最小元

S的最小上界为2，最大下界为1

定义（良序结构）：设有偏序结构<A , ≤ >，如果 A 的每一个非空子集都有一个最小元，则称 ≤ 为良序关系，<A , ≤ >为良序结构 。

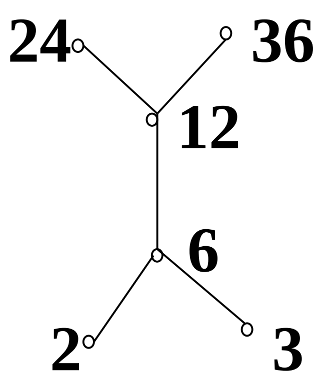
- 良序关系一定是全序关系。（？ ？ ？ ）

例： < A, ≤ > : A＝｛1，2，3，4｝，并设 ≤ 是 A 上的小于或等于关系 。



< A, ≤ >是良序。

例: <A, ≤ >: A = {2, 3, 6, 12, 24, 36 }，≤ 为整除关系，如果 x 整除 y ，便有 x ≤ y .



< A, ≤ >不是良序。

定理： $<N, \leq>$ 是良序结构

证明：任取N的非空子集A，证明A一定有最小元。

任取$m \in A$, 构造$S=\{ i \mid i \in A 且 i \leq m\}$，则有$S \subseteq N$, 且$m \in S$.

可证，若S有最小元a，则a必为A的最小元（请补充）。

因此只需证S有最小元。

下面对$|S|$ 进行数学归纳：

当$|S|=1$时，$S=\{m\}$，此时m为S的最小元；

假设 对任意的$k \in I_+$, 结论成立， 即$|S|=k$时如上构造的S有最小元；

当$|S|=k+1$时，任取$b \in S$, 有$S-\{b\}$只有k个元素，因此由归纳假设$S-\{b\}$必有最小元，设为c, 则b与c中的最小值 必为S的最小元。即结论对k+1时成立。

因此$<N, \leq>$ 是良序结构 。

例：判断 $<I, \le>$、$<Q_+, \le>$、$<R_+, \le>$ 是否为良序结构。

解：(1) $<I, \le>$ 不是良序结构：I 无最小元

(2) $<Q_+, \le>$ 不是良序结构： Q_+ 无最小元

(3) $<R_+, \le>$ 不是良序结构： R_+无最小元

定理 若 $\leq$ 为集合A上的偏序关系，则 $\leq$ 为A上良序关系的充分必要条件为

(1) $\leq$ 为A上的全序关系；

(2) A 的每个非空子集都有极小元。

证: **(必要性)** 设$\leq$ 为A上良序关系，则对任意的$x, y \in A$, $\{x, y\}$有极小元。

若极小元为x, 则有$x \leq y$; 若极小元为y, 则$y \leq x$，所以$\leq$ 为A上的全序关系。

因为 $\leq$ 为A上良序关系，因此A的每个非空子集都有最小元，即有极小元。

定理 若$\leq$为集合A上的偏序关系，则$\leq$为A上良序关系的充分必要条件为

(1) $\leq$为A上的全序关系；

(2) A 的每个非空子集都有极小元。

证: (充分性) 设S为A的任意非空子集，且a 为S的极小元。下面证明a为S的最小元。

对任意的$x \in S$, 且$x \neq a$, 由于$\leq$为A上的全序关系，所以有 $a \leq x$ 或$x \leq a$。

当$x \leq a$ 时，因为a为 极小元，则有$x=a$，因此必有$a \leq x$。

从而a为S的最小元。

因此，$\leq$为A上良序关系。

定理 设<A, < >为全序结构，则<A, < >是良序结构的**充分必要条件**是: 不存在 A 中元素的无穷序列

$$a_0, a_1, a_2, \ldots,$$

使得对每个 $i \in N$，皆有 $a_{i+1} < a_i$。即**不存在 A 中元素的无穷递降序列。**

例：< N, ≤ >是良序结构，但< I, ≤ >不是良序结构。

证：(必要性) 反证法。

假设存在 A 中元素的无穷递降序列$a_0, a_1, a_2, \ldots$，令S为包含该无穷序列的所有元素的集合，则S为A的非空子集。

显然S无最小元，与A是良序矛盾。

定理 设<A, < >为全序结构，则<A, < >是良序结构的**充分必要条件**是: 不存在 A 中元素的无穷序列

$$a_0, a_1, a_2, \dots,$$

使得对每个 i $\in N$，皆有 $a_{i+1} < a_i$。即**不存在 A 中元素的无穷递降序列。**

证:(充分性) 假设<A, < >不是良序结构，则存在一个非空子集S无最小元。

任取$a_0 \in S$, 因为a_0不是S的最小元，且<为A上的全序关系，因此**必存在$a_1 \in S$, 使得$a_1 < a_0$**。

同理，对任意的$n \in N$, 如果有$a_0, a_1, \dots, a_n \in S$, 满足$a_n < a_{n-1} < \dots < a_1 < a_0$, 因为$a_n$不是最小元且<是全序关系，因此**必存在$a_{n+1} \in S$, 使得$a_{n+1} < a_n$**。

由归纳法可得存在一个无穷递降序列$a_0, a_1, a_2, \dots$。

例. 设R为集合A上的二元关系且$S \subseteq A$. 证明或用反例推翻下述断言：R是A上的偏序（严格偏序、全序、良序），则$R|_S$是S上的偏序（严格偏序、全序、良序），其中 $R|_S=\{<x, y> \in R \mid x, y \in S\}$。

解: (1) 设R是A上的偏序，则R是自反的、反对称的、传递的。下面证明$R|_S$也是自反、反对称和传递的。

自反性：对任意$x \in S$, 因为R是自反的, 因此 $<x, x>\in R$,得 $<x, x>\in R|_S$。因此$R|_S$是自反的。

反对称性：对任意$<x, y>, <y, x>\in R|_S$, 有$<x, y>, <y, x>\in R$. 由R是反对称的，得$x=y$，因此$R|_S$也是反对称的。

传递性：对任意$<x, y>, <y, z>\in R|_S$, 有$<x, y>, <y, z>\in R$。因为R是传递的，因此$<x, z>\in R$。由$x, z\in S$, 得

$<x, z> \in R|_S$，得$R|_S$是传递的。

故$R|_S$是偏序。

例. 设R为集合A上的二元关系且$S \subseteq A$. 证明或用反例推翻下述断言：R是A上的偏序（严格偏序、全序、良序），则$R|_S$是S上的偏序（严格偏序、全序、良序），其中 $R|_S=\{<x, y> \in R \mid x, y \in S\}$。

解: (2) 设R是A上的严格偏序，则R是反自反的、反对称的、传递的。

由(1) 知$R|_S$也是反对称和传递的。

下面证明$R|_S$是反自反的。

反证法：若存在$x \in S$且$<x, x> \in R|_S$, 则$<x, x> \in R$, 与R为反自反关系矛盾。

因此$<x, x> \notin R|_S$，得$R|_S$是反自反的。

因此$R|_S$是严格偏 序。

例. 证明：

(1) 偏序关系的逆关系仍然是偏序关系；

(2) 全序关系的逆关系仍然是全序关系；

(3) 良序关系的逆关系 未必是良序关系。

证: (1) 设R是集合A上的偏序关系，则R是自反、反对称和传递的，得R^{-1}是自反、反对称和传递的。因此R^{-}仍是偏序关系。

(2)设R是集合A上的全序关系，由(1) 知R是偏序关系。对任意的x, y $\in$A, 因为R是A上的全序，则有 $\langle x, y\rangle \in R$, 得 $\langle y, x\rangle \in R^{-1}$。因此$R^{-1}$是全序。

(3) 反例：$\langle N, \leq \rangle$。

2.4 等价关系与划分

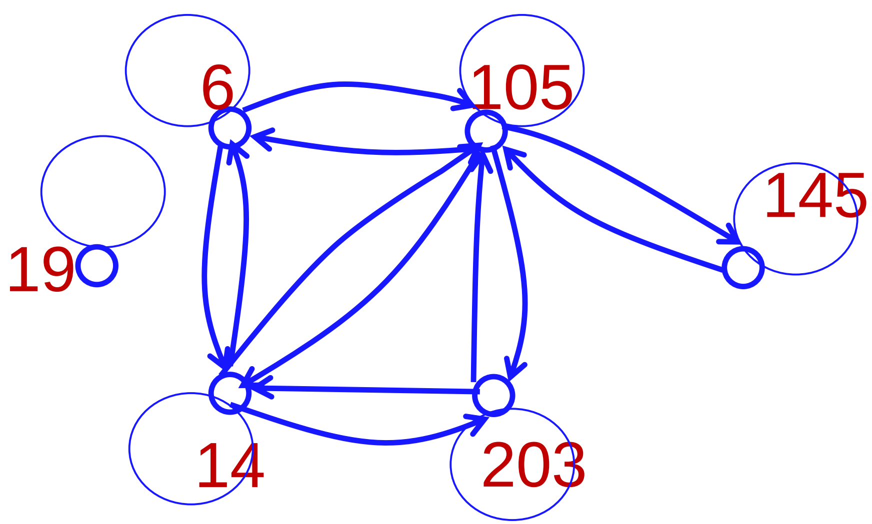
重点:

1. 等价关系、等价类
2. 等价关系与划分的关系

定义 (相容关系) 如果集合A上的关系R是自反和对称的，则称 R 为 A 上的相容关系。若xRy, 则称x和y相容；否则称x和y不相容。

例. 设A={6, 14, 19, 105, 145, 203}，并取 R={ <x, y> | x, y ∈ A且(x, y)>1 }, 其中(x, y) 表示x和y最大公因子。

R是A上的相容关系。



$$
\begin{array}{cccccc}
6 & 14 & 19 & 105 & 145 & 203 \\
\end{array}
$$

$$
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{pmatrix}
$$

定理. 设R为集合A上的二元关系，则R为A上的相容关系，当且仅当$r(R)=s(R)=R$.

相容关系的简化关系矩阵与简化关系图

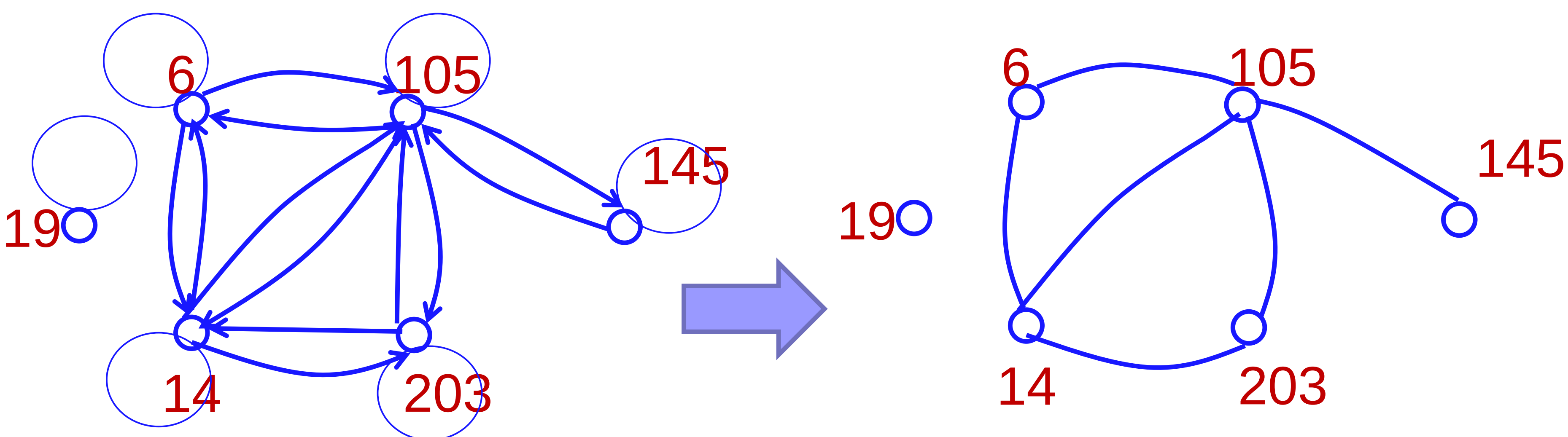
设R为非空有限集$A=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$上的相容关系。

- 关系矩阵M_R:
  - 主对角线上全为1
  - 对称矩阵
  - 只需知道M_R对角线以下 的元素

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

相容关系的简化关系矩阵与简化关系图

- 关系图G_R：
  - 每个结点有自环
  - 任意两个不同结点间不会仅有单向边
  - 去掉自环，并把每对反向边改为一条无向边



定义(等价关系) 如果集合A上的关系R是自反、对称、传递的，则称 R 为 A 上的等价关系。

如果x, y ∈ A, 且xRy, 则称x与y等价，记为 $x \approx_R y$, 常简记为 $x \approx y$。

例. 下面列举的都是等价关系：

(1) 实数集R上的普通的相等关系；

(2) 集合A的幂集P(A) 上的集合相等关系；

(3) 平面上的直线的集合上的直线间的平行关系；

(4) 中国城市居民中，人们同住在一个城市内的关系。

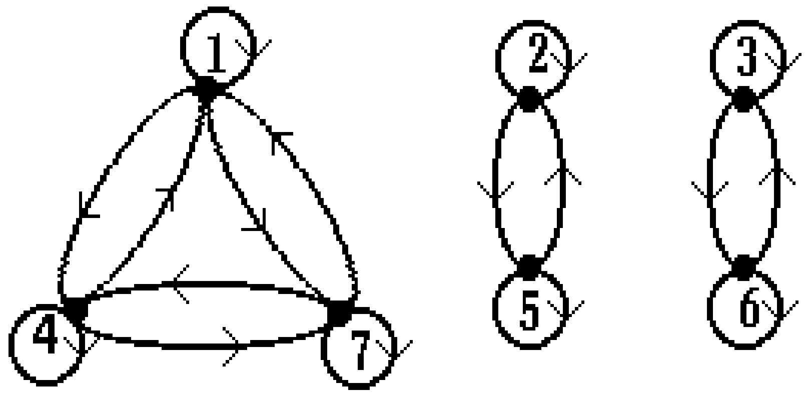
例. 设 R 是集合 A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} 上的关系，

$R = \{\langle x, y\rangle \mid x \in A \land y \in A \land 3 \mid (x-y)\}$ (模3同余关系)

证明 R是一个等价关系，并画出其关系图。

其关系图如右图所示:

可见 R的确是 A 上自反、对称、传递的关系，故 R 是 A 上的等价关系。



模3同余关系的关系图

例：设集合 X 是整数集合 I 的任意子集，证明：

X上的 模m 同余关系 是 等价关系。

证明. 自反性: 对于任意$x \in X$，显然 $x \equiv x \pmod{m}$ 。

对称性：对于任意 $x, y \in X$, 若 $x \equiv y \pmod{m}$, 则存在 $k \in I$，使得 $x - y = k*m$，故 $y - x = (-k)*m$ ，因此 $y \equiv x \pmod{m}$。

传递性: 对于任意$x, y, z \in X$, 若$x \equiv y \pmod{m}$, $y \equiv z \pmod{m}$, 则存在 $k, n \in I$ 使得 $x - y = k*m$, $y - z = n*m$ ， 于是有 $x - z = (k+n)*m$，因此 $x \equiv z \pmod{m}$

综上所述，模m同余关系是等价关系。

定理. 如果R为集合A上的二元关系，则R为A上的等价关系之充要条件为$r(R)=s(R)=t(R)=R$。

- R为A上的等价关系当且仅当R的自反、对称和传递闭包都是R自身。

定理. 如果R为集合A上的二元关系，则$tsr(R)$, $trs(R)$和$rts(R)$都是A上的等价关系。

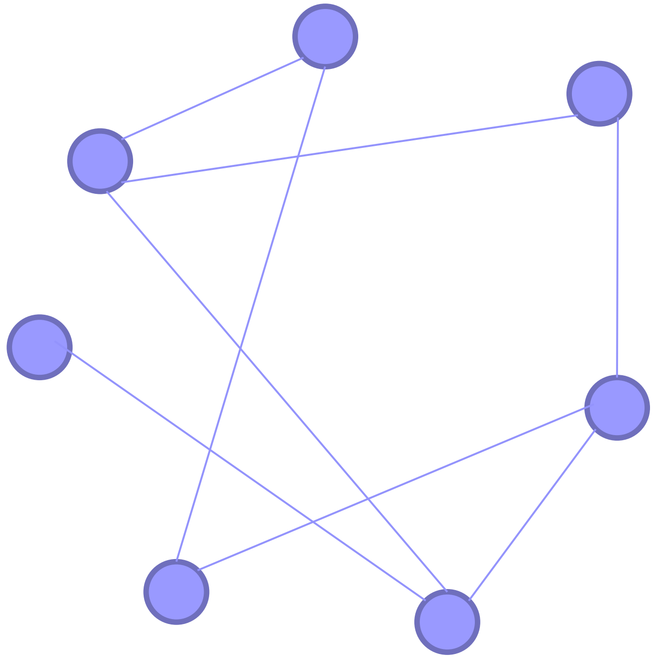
证明. 由以下定理即可证明：

定理：设二元关系 $R \subseteq A^2$，则
(1) 若 R 是自反的，则 s (R) 和 t (R) 也是自反的；
(2) 若 R 是对称的，则 r (R) 和 t (R) 也是对称的；
(3) 若 R 是传递的，则 r (R) 也是传递的

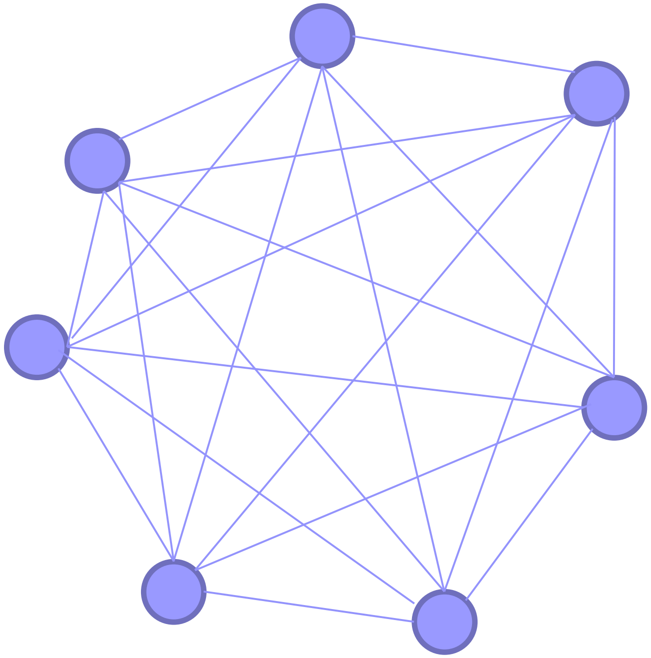
等价关系的简化关系图与简化关系矩阵

无向图的几个概念：

- **子图**：如果图G_1的每个结点和每条边都分别为图G_2的结点和边，称G_1为G_2的子图；
- **连通图**：若对图G的任意两个不同的结点a和b, 皆有G的有限个结点，如$u_0=a, u_1, \ldots, u_{n-1}, u_n=b$, 使得对每个$i \in \{1, \ldots, n\}$, 皆有一条连接$u_i$与$u_{i+1}$的边,就称G为连通的。
- **分支**：图G的最大连通子图称为G的分支。
- **完全图**：若图G的任意两个不同的结点，都有一条连接它们的边，就称G为完全图。



连通图



完全图

定理. 若R为非空有限集A上的二元关系，则R 为A上的**等价关系**之充要条件为**R有简化关系图，且其每个分支都是完全图。**

证明: **(必要性)** 设R为A上的等价关系，则R 是自反的和对称的，因此R有简化关系图。

设G'是G_R的一个分支，对G'中任意两个结点a, b，则存在有限个不同的结点$a=u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}, u_n=b$，使得对每个i, $1 \le i \le n-1$，有一条连接u_i, u_{i+1}的边，即$\langle u_i, u_{i+1} \rangle \in R$。又由R是传递的，可得$\langle a, b \rangle \in R$, 即G'中存在一条 a到b的边，故每个分支都是完全图。

定理. 若R为非空有限集A上的二元关系，则R 为A上的等价关系之充要条件为R有简化关系图，且其每个分支都是完全图。

证明: (充分性) 设R有简化关系图，则R是自反的和对称的，下面证明R是传递的。

对任意<x, y>, <y, z> ∈R, 即G_R中有连接x与y以及连接y与z的边，因此x, y, z位于同一个分支中。

又因为每个分支都是完全图，所以存在x到z的边，即<x, z> ∈R。

因此R是传递的，得R为A上的等价关系。

定理. 若R为非空有限集A上的二元关系，则R 为A上的等价关系之充要条件为

(1) M_R的对角线上的元素全为1； 自反

(2) M_R是对称矩阵；且 对称

(3) M_R可以经过有限次把行与行及相应的列与列对调，化为主对角型分块矩阵，且对角线上每个子块都是全1方阵。

	1	2	3	4	5
1	a11	a12	a13	a14	a15
2	a21	a22	a23	a24	a25
3	a31	a32	a33	a34	a35
4	a41	a42	a43	a44	a45
5	a51	a52	a53	a54	a15

a11	a12	a13	a14	a15
a41	a42	a43	a44	a45
a31	a32	a33	a34	a35
a21	a22	a23	a24	a25
a51	a52	a53	a54	a15

	1	4	3	2	5
1	a11	a14	a13	a12	a15
4	a41	a44	a43	a42	a45
3	a31	a34	a33	a32	a35
2	a21	a24	a23	a22	a25
5	a51	a54	a53	a52	a15

- 交换两行和相应的两列，关系R没有发生变化
- 主对角型分块矩阵的每个全为1的子块对应一个分支（最大连通子图）

例. 若A={1, 2, 3, 4, 5, 6}上的二元关系R为:

R={ <1, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <4, 4>, <5, 5>, <6, 6>, <1, 3>, <3, 1>, <1, 5>, <5, 1>, <2, 4>, <4, 2>, <3, 5>, <5, 3>, }.

$$M_R=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{交换第2,5列}]{\text{交换第2,5行}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

R是A上的等价关系

R的关系图G_R是什么样?

定义(等价类) 设 R 是集合A上的等价关系。对于每个x∈A，A中与 x 有关系R的元素的集合 称为 x关于R的等价类，简称为 x 的等价类，记作 $[x]_R$，

即：$[x]_R = \{ y \mid y \in A \wedge x R y \}$，

显然，$[x]_R \subseteq A$

- 因为R是自反的，因此对每个x ∈A, 有 $x \in [x]_R$
- 因为R是对称的，因此对任意x, y∈A，若<x, y> ∈R，则 $[x]_R=[y]_R$

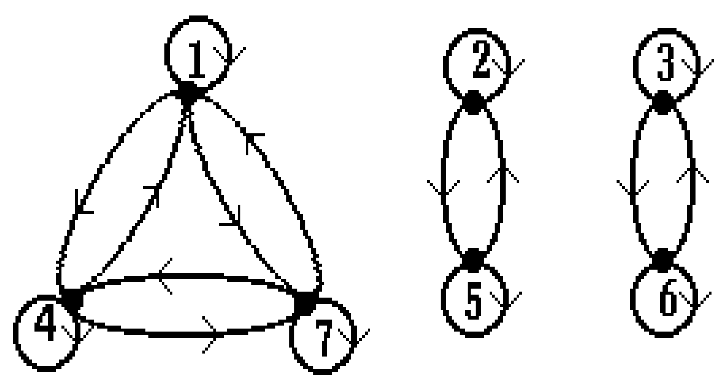
例. 集合A= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

R，A中各元素的等价类如下：

$[1]_R = [4]_R = [7]_R = \{1, 4, 7\}$

$[2]_R = [5]_R = \{2, 5\}$

$[3]_R = [6]_R = \{3, 6\}$



模3同余关系的关系图

定理 设 R 是非空集合A上的等价关系，则有：

(1) 对于每个 $x \in A$，$x \in [x]_R$，即 $[x]_R$ 是A的非空子集。

(2) $[x]_R = [y]_R$ 当且仅当 $x R y$。

(3) 若 $x, y \in A$ 且 $x \bar{R} y$，则 $[x]_R \cap [y]_R = \varnothing$。

(4) $\bigcup_{x \in A} [x]_R = A$。

证明：(1) 因 R自反，任取 $x \in A$ 均有 $x R x$，故 $x \in [x]_R$，因此，$[x]_R \neq \varnothing$。

(2) (必要性) 设 $[x]_R = [y]_R$，因为 $y \in [y]_R$，所以 $y \in [x]_R$，由 $[x]_R$ 的定义，可得 $x R y$。

(充分性) 设 $x R y$，任取 $z \in [y]_R$，则有 $y R z$。因 R 传递，故 $x R z$，因此 $z \in [x]_R$，故 $[y]_R \subseteq [x]_R$。因 R对称，所以有 $y R x$，同理可证：$[x]_R \subseteq [y]_R$。因此，$[x]_R = [y]_R$

定理 设 R 是非空集合A上的等价关系，则有：

(1) 对于每个 $x \in A$， $x \in [x]_R$， 即 $[x]_R$ 是A的非空子集。

(2) $[x]_R = [y]_R$ 当且仅当 $x R y$ 。

(3) 若 $x, y \in A$ 且 $x \bar{R} y$， 则 $[x]_R \cap [y]_R = \varnothing$ 。

(4) $\bigcup_{x\in A}[x]_R = A$。

(3) 假设 $[x]_R \cap [y]_R \neq \varnothing$， 则 $\exists z$ 使 $z \in [x]_R$ 且 $z \in [y]_R$， 即 $x R z$， $y R z$。

因 R是对称的， 故 $z R y$。又因R是传递的， 所以有 $x R y$， 这与 $x \bar{R} y$ 的题设 矛盾！ 因此， $[x]_R \cap [y]_R \neq \varnothing$ 。

(4) 任取 $x \in A$， 则 $[x]_R \subseteq A$。 所以有 $\bigcup_{x\in A}[x]_R \subseteq A$。

任取 $z \in A$， 有 $z \in [z]_R$， $[z]_R \subseteq \bigcup_{x\in A}[x]_R$， 故有 $z \in \bigcup_{x\in A}[x]_R$ 。

因此， $A \subseteq \bigcup_{x\in A}[x]_R$， 所以$\bigcup_{x\in A}[x]_R = A$。

定义(划分). 设A为任意集合且$C \subseteq P(A)$。如果C满足：

(1) 若$S \in C$，则$S \neq \phi$;

(2) $\cup C = A$;

(3) 若$S_1, S_2 \in P(A)$, 且$S_1 \cap S_2 \neq \phi$，则$S_1 = S_2$。

则称C为A的一个划分。

例：设 $A = \{a, b, c\}$，给定下列 A 的子集的集合：

$B = \{\{a\}, \{b, c\}\}$ √

$C = \{\{a, b, c\}\}$ √

$D = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$ √

$E = \{\{a, b\}, \{b, c\}\}$

$F = \{\{a\}, \{c\}\}$

$G = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}\}$

问：这些集合中 哪些是 A 上的划分?

定理. 若R为集合A上的等价关系，则$C_R=\{[x]_R \mid x\in A\}$为A的一个划分。

例. 集合A=｛1, 2, 3, 4, 5, 6, 7｝上的关系模3同余关系R，A中各元素的等价类如下：

$[1]_R = [4]_R = [7]_R =\{1, 4, 7\}$,

$[2]_R = [5]_R = \{2, 5\}$

$[3]_R = [6]_R = \{3, 6\}$

则$\{ \{1, 4, 7\}, \{2, 5\}, \{3, 6\}\}$ 构成A的一个划分。

定理. 若R为集合A上的等价关系，则$C_R=\{[x]_R \mid x\in A\}$为A的一个划分。

证明: (1) 对任意的$[x]_R \in C_R$, 有$x \in [x]_R$, 因此$[x]_R$非空。

(2) 由于对任意的$x \in A$, 有$x \in [x]_R \in C_R$, 得

$$\cup C_R \subseteq A \subseteq \cup C_R,$$

即$\cup C_R = A$

(3) 任取 $[x]_R, [y]_R \in C_R$，且$[x]_R \cap [y]_R \neq \phi$，则存在$z \in A$，使得$xRz$且$yRz$。下面证明 $[x]_R=[y]_R$。

对任意的$w \in [x]_R$，有wRx。由R的传递性知wRz，得$w \in [y]_R$,

因此$[x]_R \subseteq [y]_R$。

同理可证$[y]_R \subseteq [x]_R$。得$[x]_R=[y]_R$。

因此C_R是A的一个划分。

定义. 设R为集合A上的等价关系。称集合$\{ [x]_R \mid x \in A\}$为A关于R的商集，并记为A/R, 并称n(A/R)为R的秩。

例. 集合A=｛1, 2, 3, 4, 5, 6, 7｝上的关系模3同余关系R，A中各元素的等价类如下：

$[1]_R = [4]_R = [7]_R =$ ｛1, 4, 7｝

$[2]_R = [5]_R =$ ｛2, 5｝

$[3]_R = [6]_R =$ ｛3, 6｝

商集 $A/R = \{ \{1, 4, 7\}, \{2, 5\}, \{3, 6\} \}$，R的秩为3。

定理. 设C为集合A的一个划分。若令

$$R_C=\{ \langle x, y\rangle \mid \text{存在} S\in C, \text{使} x, y \in S \},$$

则R_C为A上的等价关系，且$A/ R_C=C$。

- C确定的等价关系 就是:

$$R_C=(C_1\times C_1)\cup(C_2\times C_2)\cup\ldots\cup(C_n\times C_n)$$

定理. 设C为集合A的一个划分。若令

$$R_C=\{ \langle x, y\rangle \mid 存在S\in C, 使x, y \in S \},$$

则R_C为A上的等价关系，且$A/ R_C=C$。

证明. (1) 首先证明： R_C 具有自反性、对称性、传递性。

(自反性) 任取 $x\in A$，由划分的定义可知: 存在 $S\in C$使得 $x\in S$, 有 $x R_C x$ 。

(对称性) 设 $x R_C y$，于是存在 $S\in C$ 使得 $x, y\in S$,

故有 $y R_C x$ 。

(传递性) 设 $x R_C y$， $y R_C z$，于是存在 $S, T\in C$, 使得 $x, y\in S$ 且 $y, z\in T$。

由于 C 是划分，则由 S 与 T 有公共元 y 可知：$S\cap T\neq\varnothing$,

故必有 $S = T$，因此 $z\in S$，所以$x R_C z$。

因此， R_C 是 A 上的等价关系。

(2) 下面证明： $A / R_C = C$。

先证明 $C \subseteq A / R_C$:

任取 $S \in C$, 存在 $x \in S$，则必有 $S = [x]_{R_C}$ （why?）

由 $[x]_{R_C} \in A / R_C$, 因此 $S \in A / R_C$。

后 证明 $A / R_C \subseteq C$:

任取 $[x]_{R_C} \in A / R_\pi$， 其中 $x \in A$。

因π为A 上的一个划分，则必有 $S \in C$，使得 $x \in S$,

故必有 $S = [x]_{R_C}$ （why?）

因此， $[x]_{R_C} \in C$。