张金源
班级：160611
学号：76066001

1. 简答题

(1). 联结词完全集：$\{\neg, \wedge, \vee\}$

~~[illegible]~~

$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to p) \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$(\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$ 的真值表如下

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee q$	$p \vee \neg q$	$(\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1	1

(2). 若A是合式公式，则$\neg A$是合式公式

若A和B是合式公式，则$(A \to B)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$是合式公式

若A是合式公式，x是个体变元，则$(\forall x A)$是合式公式。

(3). 可靠性：

根据定理：若$\Gamma \vdash A$ 则$\Gamma \vDash A$

证明：设$A_1, \ldots, A_n$是A的从Γ的一个推演，归纳证明$\Gamma \vDash A_i$, $i=1,\ldots,n$。

* 若A_i是公理，则A_i为永真式，因此$\Gamma \vDash A_i$
* 若$A_i \in \Gamma$，则显然$\Gamma \vDash A_i$
* 若A_i是由A_j, A_k根据MP规则生成，设$A_k = A_j \to A_i$，

根据归纳假设有：

$\Gamma \vDash A_j$且$\Gamma \vDash A_j \to A_i$，即对赋值v，若满足$\Gamma$，则$v(A_j) = v(A_j \to A_i) = 1$ 有$v(A_i)=1$

因此$\Gamma \vDash A_i$，推论：若$\vdash A$，则$\vDash A$。

张金源
学号 16066001
班级:160611

完备性:

据定理:若$\Gamma \vDash A$,则$\Gamma \vdash A$

证明:对任意满足Γ的赋值v,则v满足A.则$\Gamma \cup \{\neg A\}$是不可满足的,

则$\Gamma \cup \{\neg A\}$是不协调的。因此,$\Gamma \cup \{\neg A\} \vdash A$,根据演绎定理有:$\Gamma \vdash \neg A \to A$,

有$\Gamma \vdash (\neg A \to A) \to A$ 则$\Gamma \vdash A$,推论:若$\vDash A$,则$\vdash A$。

(4). 若$\Gamma \vdash B$,则$\Gamma \vdash A \to B$

证明:

* $\Gamma \vdash B$
* $\Gamma \vdash B \to (A \to B)$ 公理模式A_1: $A \to (B \to A)$
* $\Gamma \vdash A \to B$.

2. 论述题

(1). 演绎定理:若A是语句,则$\Gamma \cup \{A\} \vdash B$当且仅当$\Gamma \vdash A \to B$

a. 充分性(若$\Gamma \cup \{A\} \vdash B$,证明$\Gamma \vdash A \to B$),设$A_1, \cdots A_n$是B的从$\Gamma \cup \{A\}$的一个推演,归纳证明$\Gamma \vdash A \to A_i$, $i=1, \cdots, n$。

b. 必要性:若$\Gamma \vdash A \to B$,则$\Gamma \cup \{A\} \vdash B$,$\Gamma \vdash A \to B$,则$\Gamma \cup \{A\} \vdash A \to B$,因为$\Gamma \cup \{A\} \vdash A$,因此$\Gamma \cup \{A\} \vdash B$。

演绎 $\vdash (P \to (Q \to R)) \to (Q \to (P \to R))$

$P \to (Q \to R) \vdash Q \to (P \to R)$

$P \to (Q \to R), Q \vdash P \to R$

$P \to (Q \to R), Q, P \vdash R$

证明:

$A_1 = P \to (Q \to R)$ $A_1 \in \Gamma$

$A_2 = P$ $A_2 \in \Gamma$

$A_3 = Q \to R$ $A_1 = A_2 \to A_3$

$A_4 = Q$ $A_4 \in \Gamma$

$A_5 = R$ $A_3 = A_4 \to A_5$

(2). (a). $\forall x (Q(x) \to 0 \le x)$

自然数域:真

整数域:假

张金源　班级:160611
26066001

(3).

(b). $\forall x(Q(x)\rightarrow\exists y(Q(y)\rightarrow y<x))$

自然数域:假

整数域:真

(c). $\forall x\forall y(Q(x)\wedge Q(y)\rightarrow x+y=y+x$

自然数域:真

整数域:真

(3). 永真式: 若对L语言的解释I及解释I下的任何值v都有$V^I(A)=1$, A是永真式

可满足式: 对L语言的存在解释I及解释I下的值v, 使$V^I(A)=1$, A为可满足式。

永假式: 对L语言的解释I及解释I下的任何值v都有$V^I(A)=0$, A是永假式。

性质: 永真可称可满足, 但可满足不一定是永真。

公式为可满足, 不可能为永假, 为永假时, 公式不可能为可满足。

(4). UG规则: 从A推出$(\forall x A)$

$\vdash\forall x(P(x)\vee\neg P(x))$

证明:

$A_1 = \neg P(x)\rightarrow\neg P(x)$　　$A\rightarrow A$

$A_2 = P(x)\vee\neg P(x)$　　$Q\vee R\equiv(\neg Q\rightarrow R)$

$A_3 = \forall x(P(x)\vee\neg P(x))$ 在这使用UG规则推出 $\forall x(P(x)\vee\neg P(x))$。

张金源 16066001 (4)
160611

3. 判断题

(1). (a). 不可满足

$\Gamma \vDash \neg Q \wedge Q \Longleftrightarrow A$

如果Γ可满足，则存在一个指派α，使得

Γ为真，在此有¬Q∧Q为真但¬Q∧Q恒假，与题目矛盾，则Γ不可满足。

(b). 可满足

取Γ的值为永真式，就可以判断命题逻辑是可满足。

(2). 不成立

假设论域为全体自然数

R(x) = x是偶数

Q(x) = x为奇数

当 $\exists x Q(x)$ 和 $\exists x R(x)$ 均为真

则 $\exists x Q(x) \wedge \exists x R(x)$ 为真

但是 $\exists x (Q(x) \wedge R(x))$ 为假

该题目不成立。

(3). 成立

从意义上进行推理，$\exists x \forall y P(x,y)$ 含义为存在一个x，对一切y均有P(x,y)成立是真

则必然可推得对一切y，均存在x使得P(x,y)是真，后者的x，取前者的x

即可。

(4). 不成立

设论域为全体自然数

则 R(x) = x为偶数

Q(x) = x为奇数

则 $\forall x (Q(x) \vee R(x))$ 为真，$\forall x Q(x)$ 为假，$\forall x R(x)$ 为假 则 $\forall x Q(x) \vee \forall x R(x)$ 为假

这公理系统不成立。

张剑源 / 160611 ⑤
26066001

4. 范式题

(1). $(\neg p \vee \neg q) \to (p \leftrightarrow \neg q)$

$\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q) \vee ((\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q))$

$\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$

(2). $\forall x(A(x) \to (\exists z B(z) \to \exists y C(x,y)))$

$\Leftrightarrow \forall x(A(x) \to \forall z \exists y(B(z) \to C(x,y)))$

$\Leftrightarrow \forall x \forall z \exists y(A(x) \to (B(z) \to C(x,y)))$

5. 证明题

(1). $(Q \to P) \to (Q \to R) \models Q \wedge (P \to R)$

设Q的值为0(假)时

$\models$的左部分

$(0 \to p) \to (0 \to R)$

$\Leftrightarrow 1 \to 1 \Leftrightarrow 1$

$\models$的右部分

$0 \wedge (p \to R)$

$\Leftrightarrow 0$

从上述可看出$1 \models 0$,故$1 \models 0$为假,则推论不成立。

(2). $R \to \neg Q, P \to Q \vdash R \to \neg P$

① R 前提

② $P \to \neg Q$ 前提

③ $\neg Q$ ①,②

④ $P \to Q$ 前提

⑤ $\neg P$ ③④

⑥ $R \to \neg P$ ①⑤

76066001 张金源 (6).
160611

(3). $A_1 = \forall x \neg P(x)$ F

$A_2 = \neg F(a_1)$ $A_1 \to A_2$

$A_3 = \neg P(a_2)$ $A_1 \to A_3$

$A_4 = \neg P(a_{n-1})$ $A_1 \to A_4$

$A_{n+1} = \exists x \neg P(x)$