11. (1) $\exists xP(x)\vee\exists xQ(x)\to\exists x(P(x)\vee Q(x))$是永真式。若解释 $I$ 使得$I(\exists xP(x)\vee\exists xQ(x))=1$，则$I(\exists xP(x))=1$或$I(\exists xQ(x))=1$。

① 若$I(\exists xP(x))=1$，则存在$d\in D_I$使得$P^I(d)=1$， $P^I(d)\vee Q^I(d)=1$。

② 若$I(\exists xQ(x))=1$，则存在$d\in D_I$使得$Q^I(d)=1$， $P^I(d)\vee Q^I(d)=1$。

因此， $I(\exists x(P(x)\vee Q(x)))=1$。

(2) $\exists xP(x)\wedge\exists xQ(x)\to\exists x(P(x)\wedge Q(x))$是非永真的可满足式。给定解释$I$如下。

$$D_I=\{d\}，\quad P^I(d)=1，\quad Q^I(d)=1$$

则$I(\exists xP(x)\wedge\exists xQ(x)\to\exists x(P(x)\wedge Q(x)))=1$。

给定解释$I'$如下。

$$D_{I'}=\{a,b\}，\ P^{I'}(a)=1，\ P^{I'}(b)=0，\ Q^{I'}(a)=0，\ Q^{I'}(b)=1$$

则$I'(\exists xP(x)\wedge\exists xQ(x)\to\exists x(P(x)\wedge Q(x)))=0$。

(3) $\forall x(P(x)\vee Q(x))\to\forall xP(x)\vee\forall xQ(x)$是非永真的可满足式。给定解释$I$如下。

$$D_I=\{d\}，\quad P^I(d)=1，\quad Q^I(d)=1$$

则$I(\forall x(P(x)\vee Q(x))\to\forall xP(x)\vee\forall xQ(x))=1$。

给定解释$I'$如下。

$$D_{I'}=\{a,b\}，\ P^{I'}(a)=1，\ P^{I'}(b)=0，\ Q^{I'}(a)=0，\ Q^{I'}(b)=1$$

则$I'(\forall x(P(x)\vee Q(x))\to\forall xP(x)\vee\forall xQ(x))=0$。

(4) $\forall xP(x,x)\to\forall x\forall yP(x,y)$是非永真的可满足式。给定解释$I$如下。

$$D_I=\{d\}，\quad P^I(d,d)=1$$

则$I(\forall xP(x,x)\to\forall x\forall yP(x,y))=1$。

给定解释$I'$如下。

$$D_{I'}=\{a,b\}，\ P^{I'}(a,a)=P^{I'}(b,b)=1，\ P^{I'}(a,b)=P^{I'}(b,a)=0$$

则$I'(\forall xP(x,x)\to\forall x\forall yP(x,y))=0$。

(5) $(\forall xP(x)\to\forall xQ(x))\to\forall x(P(x)\to Q(x))$是非永真的可满足式。给定解释$I$如下。

$$D_I=\{d\}，\quad P^I(d)=1，\quad Q^I(d)=1$$

则$I((\forall xP(x)\to\forall xQ(x))\to\forall x(P(x)\to Q(x)))=1$。

给定解释$I'$如下。

$$D_{I'}=\{a,b\}，\ P^{I'}(a)=1，\ P^{I'}(b)=0，\ Q^{I'}(a)=0，\ Q^{I'}(b)=1$$

则$I'((\forall xP(x)\to\forall xQ(x))\to\forall x(P(x)\to Q(x)))=0$。

(6) $(\exists xP(x)\to\forall xQ(x))\to\forall x(P(x)\to Q(x))$是永真式。若解释 $I$ 使得$I(\forall x(P(x)\to Q(x)))=0$，则存在$d\in D_I$使得$P^I(d)\to Q^I(d)=0$，因此$P^I(d)=1$且

$Q^I(d)=0$，$I(\exists xP(x))=1$且$I(\forall xQ(x))=0$，$I((\exists xP(x)\to\forall xQ(x)))=0$。

(7) $\forall x(P(x)\to Q(x))\to(\exists xP(x)\to\exists xQ(x))$ 是永真式。若解释 $I$ 使得 $I((\exists xP(x)\to\exists xQ(x)))=0$，则 $I(\exists xP(x))=1$且$I(\exists xQ(x))=0$。存在 $d\in D_I$ 使得 $P^I(d)=1$，又因为 $I(\exists xQ(x))=0$，所以 $Q^I(d)=0$，$P^I(d)\to Q^I(d)=0$。因此，$I(\forall x(P(x)\to Q(x)))=0$。

12. (1) 任取解释 $I$ 和 $I$ 中赋值 $v$，若 $I(A_t^x)(v)=1$, 则 $I(A_t^x)(v)=I(A)(v[x/I(t)(v)])=1$，所以 $I(\exists xA)(v)=1$。这表明 $A_t^x\to\exists xA$ 是永真式。

(2) 任取解释 $I$ 和 $I$ 中赋值 $v$，

$I(\neg\forall xA)(v)=1$

当且仅当 $I(\forall xA)(v)=0$

当且仅当 存在 $d\in D_I$ 使得 $I(A)(v[x/d])=0$

当且仅当 存在 $d\in D_I$ 使得 $I(\neg A)(v[x/d])=1$

当且仅当 $I(\exists x\neg A)(v)=1$

这表明 $\neg\forall xA\leftrightarrow\exists x\neg A$ 是永真式。

(3) 任取解释 $I$ 和 $I$ 中赋值 $v$，

$I(\neg\exists xA)(v)=0$

当且仅当 $I(\exists xA)(v)=1$

当且仅当 存在 $d\in D_I$ 使得 $I(A)(v[x/d])=1$

当且仅当 存在 $d\in D_I$ 使得 $I(\neg A)(v[x/d])=0$

当且仅当 $I(\forall x\neg A)(v)=0$

这表明 $\neg\exists xA\leftrightarrow\forall x\neg A$ 是永真式。

(4) 任取解释 $I$ 和 $I$ 中赋值 $v$，若 $I(\exists x(A\wedge B))(v)=1$，则存在 $d\in D_I$ 使得 $I(A\wedge B)(v[x/d])=1$，$I(A)(v[x/d])=I(B)(v[x/d])=1$，$I(\exists xA)(v)=1$ 且 $I(\exists xB)(v)=1$，$I(\exists xA\wedge\exists xB)(v)=1$。这表明 $\exists x(A\wedge B)\to\exists xA\wedge\exists xB$ 是永真式。

(5) 任取解释 $I$ 和 $I$ 中赋值 $v$，若 $I(\forall x(A\vee B))(v)=0$，则存在 $d\in D_I$ 使得 $I(A\vee B)(v[x/d])=0$，$I(A)(v[x/d])=I(B)(v[x/d])=0$，$I(\forall xA\vee\forall xB)(v)=0$。这表明 $\forall xA\vee\forall xB\to\forall x(A\vee B)$ 是永真式。

(6) 任取解释 $I$ 和 $I$ 中赋值 $v$，若 $I(\forall x(A\to B))(v)=I(A)(v)=1$，则对于每个 $d\in D_I$，$I(A\to B)(v[x/d])=1$，因为 $x$ 不是 $A$ 的自由变元，所以 $I(A)(v[x/d])=I(A)(v)=1$，因此

$I(B)(v[x/d])=1$， $I(\forall xB)(v)=1$。这表明$\forall x(A\to B)\to(A\to\forall xB)$是永真式。

13.（1）首先证明：若 $A$ 是永真式，则$\forall xA$是永真式。设 $A$ 是永真式。任取解释 $I$ 和 $I$ 中赋值 $v$，任取 $d\in D_I$，因为$v[x/d]$也是 $I$ 中赋值，所以$I(A)(v[x/d])=1$， $I(\forall xA)(v)=1$。$\forall xA$是永真式。若 $A$ 是永真式，则$\forall x_n A$是永真式，…， $\forall x_1\cdots\forall x_n A$是永真式。
因为$\forall x_1\cdots\forall x_n A\to A$是永真式，所以若$\forall x_1\cdots\forall x_n A$是永真式，则 $A$ 是永真式。
（2） 因为$A\to\exists x_1\cdots\exists x_n A$是永真式，所以若解释 $I$ 和 $I$ 中赋值 $v$ 满足 $A$，则 $I$ 和 $v$ 满足 $\exists x_1\cdots\exists x_n A$。
若解释 $I$ 和 $I$ 中赋值 $v$ 满足$\exists x_1\cdots\exists x_n A$，则有$d_1,\cdots,d_n\in D_I$使得$I(A)(v[x_1/d_1,\cdots,x_n/d_n])=1$，$I$ 和 $I$ 中赋值$v[x_1/d_1,\cdots,x_n/d_n]$满足 $A$。