张金源/76066001
160611
作业4



20.(1). $\{0,\to\}$

$\neg p \Leftrightarrow \neg p \vee 0 \Leftrightarrow p\to 0$，因为$\{\neg,\to\}$是完全集，则$\{0,\to\}$是完全集。
任取由$\{0\}$生成不出现除命题变元p之外的命题变元的公式A，
令真值赋值$v=(p/0)$，则$v(A)=0$，而$v(\neg p)=1$ 因此$\{0\}$不能定义$\neg$。
所以$\{0\}$不是完全集。任取由$\{\to\}$生成的仅出现命题变元p的公式A，
令真值赋值$v=(p/1)$，则$v(A)=1$，而$v(\neg p)=0$，因此$\{\to\}$不能定义$\neg$。所以
$\{\to\}$不能完全集。所以$\{\neg,\to\}$是极小完全集。

(2). $\{\oplus,\to\}$

$\neg p \Leftrightarrow p\oplus 1 \Leftrightarrow p\oplus(p\to p)$，因为$\{\neg,\to\}$是完全集，所以$\{\oplus,\to\}$是完全集
任取由$\{\oplus\}$生成的仅出现除命题变元p的公式A，令真值$v=(p/0)$，则
$v(A)=0$ 而$v(\neg p)=1$，因此$\{\oplus\}$不能定义$\neg$。所以$\{\oplus\}$不是完全集。$\{\to\}$
不是完全集。所以$\{\oplus,\to\}$是极小完全集。

(3). $\{\oplus,\wedge,\leftrightarrow\}$

$\neg p \Leftrightarrow p\oplus 1 \Leftrightarrow p\oplus(p\to p)$，因为$\{\neg,\wedge\}$是完全集，所以$\{\oplus,\wedge,\leftrightarrow\}$是完全集。
任取由$\{\oplus,\wedge\}$生成的仅出现除命题变元p的公式A，令真值$v=(p/0)$，则$v(A)=0$
而$v(\neg p)=1$，因此$\{\oplus,\wedge\}$不能定义$\neg$。所以$\{\oplus,\wedge\}$不是完全集。任取由$\{\wedge,\leftrightarrow\}$
生成仅出现命题变元p的公式A，真值$v=(p/1)$，则$v(A)=1$，而$v(\neg p)=0$，
因此$\{\wedge,\leftrightarrow\}$不能定义$\neg$。所以$\{\wedge,\leftrightarrow\}$不是完全集。$\{\oplus,\leftrightarrow\}$不是完全集，所以
$\{\oplus,\wedge,\leftrightarrow\}$是极小完全集。

(4). $\{\oplus,\vee,\leftrightarrow\}$

$\neg p \Leftrightarrow p\oplus 1 \Leftrightarrow p\oplus(p\to p)$，因为$\{\neg,\vee\}$是完全集，所以$\{\oplus,\vee,\leftrightarrow\}$是完全集。任取由
$\{\oplus,\vee\}$生成的仅出现除命题p的公式A，真值$v=(p/0)$，则$v(A)=0$

而$v(\neg p)=1$，因此$\{\oplus,\vee\}$不能定义$\neg$。所以$\{\oplus,\vee\}$不是完全集。任取由$\{\vee,\leftrightarrow\}$生成，真值$v=(p/1)$，$v(A)=1$，而$v(\neg p)=0$ 因此$\{\vee,\leftrightarrow\}$不定义$\neg$。所以$\{\vee,\leftrightarrow\}$不是完全集。$\{\oplus,\leftrightarrow\}$不是完全集，所以$\{\oplus,\vee,\leftrightarrow\}$是极小完全集。

21. (1) 任取由$\{\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow\}$生成的仅出现命题变元 $p$ 的公式 $A$，令真值赋值$v=(p/1)$，则$v(A)=1$，而$v(\neg p)=0$，因此$\{\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow\}$不能定义$\neg$。所以$\{\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow\}$不是完全集。

(2) 任取由$\{\oplus,\wedge,\vee\}$生成的仅出现命题变元$p$的公式$A$，令真值赋值$v=(p/0)$，则$v(A)=0$，而$v(\neg p)=1$，因此$\{\oplus,\wedge,\vee\}$不能定义$\neg$。所以$\{\oplus,\wedge,\vee\}$不是完全集。

22. (1) $\neg p \Leftrightarrow p\uparrow p$，$p\wedge q \Leftrightarrow \neg\neg(p\wedge q)\Leftrightarrow \neg(p\uparrow q)\Leftrightarrow (p\uparrow q)\uparrow(p\uparrow q)$

因为$\{\neg,\wedge\}$是完全集，所以$\{\uparrow\}$是完全集。

(2) $\neg p \Leftrightarrow p\downarrow p$，$p\vee q \Leftrightarrow \neg\neg(p\vee q)\Leftrightarrow \neg(p\downarrow q)\Leftrightarrow (p\downarrow q)\downarrow(p\downarrow q)$

因为$\{\neg,\vee\}$是完全集，所以$\{\downarrow\}$是完全集。

(3) 若$0\Delta 0=0$或$1\Delta 1=1$，则$\neg$不能由$\{\Delta\}$定义。因此，$0\Delta 0=1$且$1\Delta 1=0$。若$0\Delta 1\neq 1\Delta 0$，则$\Delta$的真值表的最后一列有偶数个 1，真值表最后一列有奇数个 1 的$\wedge$不能由$\{\Delta\}$定义。所以，$0\Delta 1=1\Delta 0$。若$0\Delta 1=1\Delta 0=1$，则$\Delta$是$\uparrow$。若$0\Delta 1=1\Delta 0=0$，则$\Delta$是$\downarrow$。

23. $p\downarrow q\Leftrightarrow \Delta pqq$，因为$\{\downarrow\}$是完全集，所以$\{\Delta\}$是极小完全集。