

张金源/76066001

160611

作业4

北京航空航天大学

BEIJING UNIVERSITY OF AERONAUTICS AND ASTRONAUTICS

20. (1). $\{0, \rightarrow\}$

$\neg P \Leftrightarrow \neg P \vee 0 \Leftrightarrow P \rightarrow 0$, 因为 $\{1, \rightarrow\}$ 是完全集, 则 $\{0, \rightarrow\}$ 是完全集。
任取由 $\{0\}$ 生成不出现除命题变元 P 之外的命题变元的公式 A ,
令真值赋值 $v = (P/0)$, 则 $v(A) = 0$, 而 $v(\neg P) = 1$ 因此 $\{0\}$ 不能定义 \neg 。
所以 $\{0\}$ 不是完全集。任取由 $\{\rightarrow\}$ 生成的仅出现命题变元 P 的公式 A ,
令真值赋值 $v = (P/1)$, 则 $v(A) = 1$, 而 $v(\neg P) = 0$, 因此 $\{\rightarrow\}$ 不能定义 \neg 。所以
 $\{\rightarrow\}$ 不是完全集。所以 $\{1, \rightarrow\}$ 是极小完全集。

(2). $\{0, \rightarrow\}$

$\neg P \Leftrightarrow P \oplus 1 \Leftrightarrow P \oplus (P \rightarrow P)$, 因为 $\{1, \rightarrow\}$ 是完全集, 所以 $\{0, \rightarrow\}$ 是完全集。
任取由 $\{0\}$ 生成的仅出现除命题变元 P 的公式 A , 令真值 $v = (P/0)$, 则
 $v(A) = 0$ 而 $v(\neg P) = 1$, 因此 $\{0\}$ 不能定义 \neg 。所以 $\{0\}$ 不是完全集。 $\{\rightarrow\}$
不是完全集。所以 $\{0, \rightarrow\}$ 是极小完全集。

(3). $\{0, 1, \leftrightarrow\}$

$\neg P \Leftrightarrow P \oplus 1 \Leftrightarrow P \oplus (P \rightarrow P)$, 因为 $\{1, \leftrightarrow\}$ 是完全集, 所以 $\{0, 1, \leftrightarrow\}$ 是完全集。
任取由 $\{0, 1\}$ 生成的仅出现除命题变元 P 的公式 A , 令真值 $v = (P/0)$, 则 $v(A) = 0$
而 $v(\neg P) = 1$, 因此 $\{0, 1\}$ 不能定义 \neg 。所以 $\{0, 1\}$ 不是完全集。任取由 $\{1, \leftrightarrow\}$
生成仅出现命题变元 P 的公式 A , 真值 $v = (P/1)$, 则 $v(A) = 1$, 而 $v(\neg P) = 0$,
因此 $\{1, \leftrightarrow\}$ 不能定义 \neg 。所以 $\{1, \leftrightarrow\}$ 不是完全集。 $\{0, \leftrightarrow\}$ 不是完全集, 所以
 $\{0, 1, \leftrightarrow\}$ 是极小完全集。

(4). $\{0, \vee, \leftrightarrow\}$

$\neg P \Leftrightarrow P \oplus 1 \Leftrightarrow P \oplus (P \rightarrow P)$, 因为 $\{1, \vee\}$ 是完全集, 所以 $\{0, \vee, \leftrightarrow\}$ 是完全集。任取由
 $\{0, \vee\}$ 生成的仅出现除命题变元 P 的公式 A , 真值 $v = (P/0)$, 则 $v(A) = 0$

而 $v(\neg p)=1$, 因此 $\{\oplus, \neg\}$ 不能定义 \neg 。所以 $\{\oplus, \neg\}$ 不是完全集。任取由 $\{\vee, \leftrightarrow\}$ 生成, 真值 $v=(p/1)$, $v(A)=1$, 而 $v(\neg p)=0$ 因此 $\{\vee, \leftrightarrow\}$ 不能定义 \neg 。所以 $\{\vee, \leftrightarrow\}$ 不是完全集。 $\{\oplus, \neg\}$ 不是完全集, 所以 $\{\oplus, \vee, \leftrightarrow\}$ 是极小完全集。

21. (1) 任取由 $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ 生成的仅出现命题变元 p 的公式 A , 令真值赋值 $v=(p/1)$, 则 $v(A)=1$, 而 $v(\neg p)=0$, 因此 $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ 不能定义 \neg 。所以 $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ 不是完全集。

(2) 任取由 $\{\oplus, \wedge, \vee\}$ 生成的仅出现命题变元 p 的公式 A , 令真值赋值 $v=(p/0)$, 则 $v(A)=0$, 而 $v(\neg p)=1$, 因此 $\{\oplus, \wedge, \vee\}$ 不能定义 \neg 。所以 $\{\oplus, \wedge, \vee\}$ 不是完全集。

22. (1) $\neg p \Leftrightarrow p \uparrow p$, $p \wedge q \Leftrightarrow \neg \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg(p \uparrow q) \Leftrightarrow (p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q)$
因为 $\{\neg, \wedge\}$ 是完全集, 所以 $\{\uparrow\}$ 是完全集。

(2) $\neg p \Leftrightarrow p \downarrow p$, $p \vee q \Leftrightarrow \neg \neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg(p \downarrow q) \Leftrightarrow (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$
因为 $\{\neg, \vee\}$ 是完全集, 所以 $\{\downarrow\}$ 是完全集。

(3) 若 $0\Delta 0=0$ 或 $1\Delta 1=1$, 则 \neg 不能由 $\{\Delta\}$ 定义。因此, $0\Delta 0=1$ 且 $1\Delta 1=0$ 。
若 $0\Delta 1 \neq 1\Delta 0$, 则 Δ 的真值表的最后一列有偶数个 1, 真值表最后一列有奇数个 1 的 \wedge 不能由 $\{\Delta\}$ 定义。所以, $0\Delta 1=1\Delta 0$ 。若 $0\Delta 1=1\Delta 0=1$, 则 Δ 是 \uparrow 。若 $0\Delta 1=1\Delta 0=0$, 则 Δ 是 \downarrow 。

23. $p \downarrow q \Leftrightarrow \Delta p q q$, 因为 $\{\downarrow\}$ 是完全集, 所以 $\{\Delta\}$ 是极小完全集。