16.

(1) 不成立。取解释 I 如下。

$$D_I=\{a,b\}，\quad P^I(a)=0，\quad P^I(b)=1，\quad Q^I(a)=1，\quad Q^I(b)=0$$

则 $I(\forall x(P(x)\vee Q(x)))=1$ 且 $I(\forall xP(x)\vee\forall xQ(x))=0$ 。这表明 $\forall x(P(x)\vee Q(x))\not\models\forall xP(x)\vee\forall xQ(x)$。

(2) 不成立。取解释 I 如下。

$$D_I=\{a,b\}，\quad P^I(a)=0，\quad P^I(b)=1，\quad Q^I(a)=1，\quad Q^I(b)=0$$

则 $I(\exists xP(x)\wedge\exists xQ(x))=1$ 且 $I(\exists x(P(x)\wedge Q(x)))=0$ 。这表明 $\exists xP(x)\wedge\exists xQ(x)\not\models\exists x(P(x)\wedge Q(x))$。

(3) 不成立。取解释 I 如下。

$$D_I=\{a,b\}，\quad P^I(a)=P^I(b)=0，\quad Q^I(a)=1，\quad Q^I(b)=0$$

则 $I(\forall x(P(x)\leftrightarrow\forall xQ(x)))=1$ 且 $I(\forall x(P(x)\leftrightarrow Q(x)))=0$ 。这表明 $\forall x(P(x)\leftrightarrow\forall xQ(x))\not\models\forall x(P(x)\leftrightarrow Q(x))$。

(4) 若解释 I 使得 $I(\forall x(P(x)\to Q(x)))=0$，则有 $d\in D_I$ 使得 $P^I(d)\to Q^I(d)=0$，$P^I(d)=1$ 且 $Q^I(d)=0$， $I(\forall xQ(x))=0$， $I(\forall x(P(x)\to\forall xQ(x)))=0$ 。这表明 $\forall x(P(x)\to\forall xQ(x))\models\forall x(P(x)\to Q(x))$。

(5) 不成立。取解释 I 如下。

$$D_I=\{a,b\}，\quad P^I(a)=1，\quad P^I(b)=0，\quad Q^I(a)=Q^I(b)=0$$

则 $I(\exists x(P(x)\to Q(x)))=I(\exists xP(x))=1$ 且 $I(\exists xQ(x))=0$ ，这表明 $\exists x(P(x)\to Q(x)),\exists xP(x)\not\models\exists xQ(x)$。

(6) 不成立。取解释 I 如下。

$$D_I=\{a,b\}，\quad P^I(a,b)=1，\quad P^I(a,a)=P^I(b,a)=P^I(b,b)=1$$

则 $I(\exists x\exists yP(x,y))=1$，但 $I(\exists xP(x,x))=0$ 。所以 $\exists x\exists yP(x,y)\not\models\exists xP(x,x)$。

17.

(1) 若解释 I 和 I 中赋值 v 使得 $I(\exists x(A\wedge B))(v)=1$，则有 $d\in D_I$ 使得 $I(A\wedge B)(v[x/d])=1$，$I(A)(v[x/d])=I(B)(v[x/d])=1$，$I(\exists xA)(v)=1$ 且 $I(\exists xB)(v)=1$，$I(\exists xA\wedge\exists xB)(v)=1$。这表明 $\exists x(A\wedge B)\models\exists xA\wedge\exists xB$。

(2) 若解释 I 和 I 中赋值 v 使得 $I(\forall x(A\to B))(v)=I(\forall xA)(v)=1$，则对于每个 $d\in D_I$，$I(A\to B)(v[x/d])=I(A)(v[x/d])=1$，$I(B)(v[x/d])=1$，$I(\forall xB)(v)=1$。这表明 $\forall x(A\to B),\forall xA\models\forall xB$。

(3) 若解释 I 和 I 中赋值 v 使得 $I(\exists xA_x^y)(v)=1$，则有 $d\in D_I$ 使得 $I(A_x^y)(v[x/y])=1$，因为 $I(A_x^y)(v[x/d])=I(A)(v[x/d][y/I(x)(v[x/d])])=I(A)(v[x/d][y/d])$，所以 $I(A)(v[x/d][y/d])=1$，$I(\exists yA)(v[x/d])=1$，$I(\exists x\exists yA)(v)=1$。这表明 $\exists xA_x^y\models\exists x\exists yA$。

(4) 若解释 I 和 I 中赋值 v 使得 $I(\exists x(A\to B))(v)=0$，则对于每个 $d\in D_I$，$I(A\to B)(v[x/d])=0$，$I(A)(v[x/d])=1$ 且 $I(B)(v[x/d])=0$，因此 $I(\exists xA)(v)=1$ 且 $I(\exists xB)(v)=0$，$I(\exists xA\to\exists xB)(v)=0$。所以 $\exists xA\to\exists xB\models\exists x(A\to B)$。

18. 设解释 I 和 I 中赋值 v 满足 $\Gamma\cup\{\exists xA\}$，则 $I(\exists xA)(v)=1$，有 $d\in D_I$ 使得 $I(A)(v[x/d])=1$。因为 x 不是公式集 Γ 中任何公式的自由变元，所以 I 和 $v[x/d]$ 也满足 Γ，I 和 $v[x/d]$ 满足 $\Gamma\cup\{A\}$。又因为 $\Gamma\cup\{A\}\models B$，所以 $I(B)(v[x/d])=1$，因为 x 不是 B 中的自由变元，因此 $I(B)(v)=1$。这表明 $\Gamma\cup\{\exists xA\}\models B$。

19. 设 $\Gamma\cup\{\neg A\}$ 可满足，解释 I 和 I 中赋值 v 满足 $\Gamma\cup\{\neg A\}$，则 I 和 v 满足 Γ 且

$I(A)(v)=0$，所以$\Gamma \not\models A$。

设$\Gamma \not\models A$，则有解释 I 和 I 中赋值 v 满足Γ且$I(A)(v)=0$，所以 I 和 v 满足

$\Gamma \cup \{\neg A\}$。因此，$\Gamma \cup \{\neg A\}$可满足。

20.

(1) 可满足。取解释I和I中赋值v如下。

$$D_I=\{1,2\}，\quad P^I(1)=0，\quad P^I(2)=1，$$

对每个常元a，$a^I=1$；

对每个n元函数符号f，$f^I(x_1,\cdots,x_n)=1$；

对每个变元x，$v(x)=1$。

可归纳证明：对每个项t，$I(t)(v)=1$。

I和v满足$\{\neg P(t) \mid t\text{是项}\} \cup \{\exists x P(x)\}$。

(2) 可满足。取解释I和I中赋值v如下。

$$D_I\text{为自然数集，}\quad P^I(x,y)=1 \text{ 当且仅当 } x<y$$

则I和v满足$\{\forall x \neg P(x,x), \forall x \forall y \forall z(P(x,y)\wedge P(y,z)\to P(x,z)), \forall x \exists y P(x,y)\}$。

习题四

3.

(1) $\neg \forall x(P(x)\to \forall y(P(y)\to P(f(x,y)))\wedge \neg \forall y(Q(x,y)\to P(y)))$

$\Leftrightarrow \neg \forall x(P(x)\to \forall y(P(y)\to P(f(x,y)))\wedge \neg \forall z(Q(x,z)\to P(z)))$

$\Leftrightarrow \exists x \neg(P(x)\to \forall y(P(y)\to P(f(x,y)))\wedge \neg \forall z(Q(x,z)\to P(z)))$

$\Leftrightarrow \exists x(P(x)\wedge \neg(\forall y(P(y)\to P(f(x,y)))\wedge \neg \forall z(Q(x,z)\to P(z)))$

$\Leftrightarrow \exists x(P(x)\wedge(\neg \forall y(P(y)\to P(f(x,y)))\vee \forall z(Q(x,z)\to P(z))))$

$\Leftrightarrow \exists x(P(x)\wedge(\exists y \neg(P(y)\to P(f(x,y)))\vee \forall z(Q(x,z)\to P(z))))$

$\Leftrightarrow \exists x \exists y \forall z(P(x)\wedge(\neg(P(y)\to P(f(x,y)))\vee(Q(x,z)\to P(z))))$

$\neg \forall x(P(x)\to \forall y(P(y)\to P(f(x,y)))\wedge \neg \forall y(Q(x,y)\to P(y)))$的斯科伦范式是

$\forall z(P(a)\wedge(\neg(P(b)\to P(f(a,b)))\vee(Q(a,z)\to P(z))))$。

(2) $\forall x\exists y(P(x,y)\to Q(y,x))\land(Q(y,x)\to R(x,y))$

$\Leftrightarrow \forall z\exists u(P(z,u)\to Q(u,z))\land(Q(y,x)\to R(x,y))$

$\Leftrightarrow \forall z\exists u((P(z,u)\to Q(u,z))\land(Q(y,x)\to R(x,y)))$

$\forall x\exists y(P(x,y)\to Q(y,x))\land(Q(y,x)\to R(x,y))$的斯科伦范式是

$\forall z((P(z,f(z))\to Q(u,f(z)))\land(Q(y,x)\to R(x,y)))$。

(3) $\forall xP(x,y)\to(Q(x)\to\neg\exists xR(y,x))$

$\Leftrightarrow \forall zP(z,y)\to(Q(x)\to\neg\exists uR(y,u))$

$\Leftrightarrow \forall zP(z,y)\to(Q(x)\to\forall u\neg R(y,u))$

$\Leftrightarrow \exists z\forall u(P(z,y)\to(Q(x)\to\neg R(y,u)))$

$\forall xP(x,y)\to(Q(x)\to\neg\exists xR(y,x))$的斯科伦范式是$\forall u(P(a,y)\to(Q(x)\to\neg R(y,u)))$。

(4) $\forall xP(x,y)\oplus\exists yQ(x,y)$

$\Leftrightarrow (\forall xP(x,y)\land\neg\exists yQ(x,y))\lor(\neg\forall xP(x,y)\land\exists yQ(x,y))$

$\Leftrightarrow (\forall zP(z,y)\land\neg\exists uQ(x,u))\lor(\neg\forall vP(v,y)\land\exists wQ(x,w))$

$\Leftrightarrow (\forall zP(z,y)\land\forall u\neg Q(x,u))\lor(\exists v\neg P(v,y)\land\exists wQ(x,w))$

$\Leftrightarrow \forall z\forall u(P(z,y)\land\neg Q(x,u))\lor\exists v\exists w(\neg P(v,y)\land Q(x,w))$

$\Leftrightarrow \exists v\exists w\forall z\forall u((P(z,y)\land\neg Q(x,u))\lor(\neg P(v,y)\land Q(x,w)))$

$\forall xP(x,y)\oplus\exists yQ(x,y)$的斯科伦范式是

$\forall z\forall u((P(z,y)\land\neg Q(x,u))\lor(\neg P(a,y)\land Q(x,b)))$。

4. 设A'是前束范式A的无$\exists$前束范式。

$(\Leftarrow)$设A可满足，即有解释I和I中赋值v使得$I(A)(v)=1$，我们证明A'可满足。

对A中$\exists$的出现次数进行归纳。

若A中不出现$\exists$，则A'与A相同，A'可满足。

设A中$\exists$的出现次数为$m+1$。

若A为$\exists yB$，A'为$(B_a^y)'$。因为$I(A)(v)=1$，故有$d\in D_I$使得$I(B)(v[y/d])=1$。令解释I'与I的区别仅在于$a^{I'}=d$，则

$$I'(B_a^y)(v)=I'(B)(v[y/I'(a)(v)])=I'(B)(v[y/d])=1$$

B_a^y可满足，由归纳假设知，$(B_a^y)'$可满足，即A'可满足。

若A为$\forall x_1\cdots\forall x_n\exists yB$，$A'$为$(\forall x_1\cdots\forall x_n B_{f(x_1,\cdots,x_n)}^y)'$。定义$D_I$上的$n$元运算$g$如下：对于任意$a_1,\cdots,a_n\in D_I$，令$g(a_1,\cdots,a_n)$为集合$\{b\mid I(B)(v[x_1/a_1,\cdots,x_n/a_n,y/b])=1\}$中的一个元素，这个集合是非空的，因为$I(\exists yB)(v[x_1/a_1,\cdots,x_n/a_n])=1$。令解释$I'$与$I$的区别仅在于$f^{I'}=g$。对于任意$a_1,\cdots,a_n\in D_I$，

$I'(B^y_{f(x_1,\cdots,x_n)})(v[x_1/a_1,\cdots,x_n/a_n])$

$= I'(B)(v[x_1/a_1,\cdots,x_n/a_n,y/I'(f(x_1,\cdots,x_n))(v[x_1/a_1,\cdots,x_n/a_n])])$

$= I'(B)(v[x_1/a_1,\cdots,x_n/a_n,y/g(a_1,\cdots,a_n)]) = 1$

所以，$I'(\forall x_1\cdots\forall x_n B^y_{f(x_1,\cdots,x_n)})(v)=1$，$\forall x_1\cdots\forall x_n B^y_{f(x_1,\cdots,x_n)}$ 可满足，由归纳假设知，$(\forall x_1\cdots\forall x_n B^y_{f(x_1,\cdots,x_n)})'$ 可满足，即 A' 可满足。

$(\Rightarrow)$ 我们证明 $A'\models A$。由谓词逻辑公理系统的可靠性定理知，只需证明 $A'\vdash A$。

对 A 中 $\exists$ 的出现次数进行归纳。

若 A 中不出现 $\exists$，则 A' 与 A 相同，$A'\vdash A$。

设 A 中 $\exists$ 的出现次数为 $m+1$。

若 A 为 $\exists yB$，A' 为 $(B^y_a)'$。由第三章习题 9（1）知，$\vdash B^y_a\to\exists yB$，故 $B^y_a\vdash\exists yB$。由归纳假设知，$(B^y_a)'\vdash B^y_a$，因此 $(B^y_a)'\vdash\exists yB$。

若 A 为 $\forall x_1\cdots\forall x_n\exists yB$，$A'$ 为 $(\forall x_1\cdots\forall x_n B^y_{f(x_1,\cdots,x_n)})'$。由归纳假设知，$(\forall x_1\cdots\forall x_n B^y_{f(x_1,\cdots,x_n)})'\vdash\forall x_1\cdots\forall x_n B^y_{f(x_1,\cdots,x_n)}$。由第三章习题 9（1）知，$\vdash B^y_{f(x_1,\cdots,x_n)}\to\exists yB$，再次应用例 3.8 得到 $\vdash\forall x_1\cdots\forall x_n B^y_{f(x_1,\cdots,x_n)}\to\forall x_1\cdots\forall x_n\exists yB$。所以，$(\forall x_1\cdots\forall x_n B^y_{f(x_1,\cdots,x_n)})'\vdash\forall x_1\cdots\forall x_n\exists yB$，即 $A'\vdash A$，$A'\models A$。若 A' 可满足，有解释 I 和 I 中赋值 v 满足 A'，则 I 和 v 满足 A，A 可满足。