7. (1) $I(P(a,f(x))\wedge P(x,f(b))\wedge P(f(y),x))(v)$

$= P^I(a^I, f^I(v(x)))\wedge P^I(v(x), f^I(b^I))\wedge P^I(f^I(v(y)),v(x))$

$= P^I(1, f^I(1))\wedge P^I(1, f^I(2))\wedge P^I(f^I(1),1)$

$= P^I(1,2)\wedge P^I(1,1)\wedge P^I(2,1)=1\wedge 1\wedge 0=0$

(2) $I(\forall x\exists yP(y,x))(v)$

$= I(\exists yP(y,x))(v[x/1])\wedge I(\exists yP(y,x))(v[x/2])$

$= (I(P(y,x))(v[x/1][y/1])\vee I(P(y,x))(v[x/1][y/2]))$

$\wedge (I(P(y,x))(v[x/2][y/1])\vee I(P(y,x))(v[x/2][y/2]))$

$= (P^I(1,1)\vee P^I(2,1))\wedge (P^I(1,2)\vee P^I(2,2))$

$= (1\vee 0)\wedge(1\vee 0)=1$

(3) $I(\forall x\forall y(P(x,y)\to P(f(x),f(y))))(v)$

$= (P^I(1,1)\to P^I(f^I(1), f^I(1)))\wedge(P^I(1,2)\to P^I(f^I(1), f^I(2)))$

$\wedge(P^I(2,1)\to P^I(f^I(2), f^I(1)))\wedge(P^I(2,2)\to P^I(f^I(2), f^I(2)))$

$= (P^I(1,1)\to P^I(2,2))\wedge(P^I(1,2)\to P^I(2,1))\wedge(P^I(2,1)\to P^I(1,2))\wedge(P^I(2,2)\to P^I(1,1))$

$= (1\to 0)\wedge(1\to 0)\wedge(0\to 1)\wedge(0\to 1)=0\wedge 0\wedge 1\wedge 1=0$

8. (1) $I(\forall x\exists yP(x,y))$

$= (P^I(a,a)\vee P^I(a,b))\wedge(P^I(b,a)\vee P^I(b,b))=(1\vee 0)\wedge(0\vee 1)=1$

(2) $I(\forall x\forall yP(x,y))$

$= P^I(a,a)\wedge P^I(a,b)\wedge P^I(b,a)\wedge P^I(b,b)=1\wedge 0\wedge 0\wedge 1=0$

(3) $I(\exists x\forall yP(x,y))$

$= (P^I(a,a)\wedge P^I(a,b))\vee(P^I(b,a)\wedge P^I(b,b))=(1\wedge 0)\vee(0\wedge 1)=0$

(4) $I(\exists x\exists y\neg P(x,y))$

$= \neg P^I(a,a)\vee\neg P^I(a,b)\vee\neg P^I(b,a)\vee\neg P^I(b,b)=0\vee 1\vee 1\vee 0=1$

(5) $I(\forall x\forall y(P(x,y)\to P(y,x)))$

$= (P^I(a,a)\to P^I(a,a))\wedge(P^I(a,b)\to P^I(b,a))$

$\wedge(P^I(b,a)\to P^I(a,b))\wedge(P^I(b,b)\to P^I(b,b))$

$= (1\to 1)\wedge(0\to 0)\wedge(0\to 0)\wedge(1\to 1)=1$

(6) $I(\forall xP(x,x))=P^I(a,a)\wedge P^I(b,b)=1\wedge 1=1$

9. 语句 $A$ 为 $\forall x\neg P(x,x)\wedge P(a,b)\wedge P(b,c)\wedge P(c,a)$。给定解释 $I'$ 如下。

$D_{I'}$ 为自然数集合， $P^{I'}(x,y)=1$ 当且仅当 $x<y$， $a^{I'}=1$，$b^{I'}=2$，$c^{I'}=3$

则 $I'$ 是 $A$ 的模型，$A$ 有模型。

任取满足语句 $A$ 的解释 $I$，则 $P^I(a^I,b^I)=P^I(b^I,c^I)=P^I(c^I,a^I)=1$，又因为 $I(\forall x\neg P(x,x))=1$，所以 $a^I$，$b^I$，$c^I$ 是论域 $D_I$ 中三个不同元素，论域 $D_I$ 中至少有三个元素。

10. 语句 $A$ 为 $\forall x\neg P(x,x)\wedge\forall x\forall y(P(x,y)\wedge P(y,z)\rightarrow P(x,z))\wedge\forall x\exists yP(x,y)$。给定解释 $I'$ 如下。

$D_{I'}$ 为自然数集合， $P^{I'}(x,y)=1$ 当且仅当 $x<y$

则 $I'$ 是 $A$ 的模型，$A$ 有模型。

任取满足语句 $A$ 的解释 $I$，取 $d_1\in D_I$，因为 $I(\forall x\exists yP(x,y))=1$，所以有 $d_2\in D_I$ 使得 $P^I(d_1,d_2)=1$，又因为 $I(\forall x\neg P(x,x))=1$，故 $d_1\neq d_2$。因为 $I(\forall x\exists yP(x,y))=1$，所以有 $d_3\in D_I$ 使得 $P^I(d_2,d_3)=1$，又因为 $I(\forall x\neg P(x,x))=1$，故 $d_3\neq d_2$。因为 $I(\forall x\forall y(P(x,y)\wedge P(y,z)\rightarrow P(x,z)))=1$，所以 $P^I(d_1,d_3)=1$，故 $d_3\neq d_1$。因此，$d_1$，$d_2$，$d_3$ 是论域中的三个不同元素。这个过程可以永远进行下去，得到 $d_1,d_2,d_3,\cdots$ 因此，论域中必然有无穷多个元素。