**16.**

(1) 不成立。取解释*I*如下。

， ， ， ， 

则且。这表明。

(2) 不成立。取解释*I*如下。

， ， ， ， 

则且。这表明。

(3) 不成立。取解释*I*如下。

， ， ， 

则且。这表明。

(4) 若解释*I*使得，则有使得，且，，。这表明。

(5) 不成立。取解释*I*如下。

， ， ， 

则且，这表明。

(6) 不成立。取解释*I*如下。

， ， 

则，但。所以。

**17.**

(1) 若解释*I*和*I*中赋值*v*使得，则有使得，，且，。这表明。

(2) 若解释*I*和*I*中赋值*v*使得，则对于每个，，，。这表明。

(3) 若解释*I*和*I*中赋值*v*使得，则有使得，因为，所以，，。这表明。

(4) 若解释*I*和*I*中赋值*v*使得，则对于每个，，且，因此且，。所以。

**18.**设解释*I*和*I*中赋值*v*满足，则，有使得。因为*x*不是公式集中任何公式的自由变元，所以*I*和也满足，*I*和满足。又因为，所以，因为*x*不是*B*中的自由变元，因此。这表明。

**19.**设可满足，解释*I*和*I*中赋值*v*满足，则*I*和*v*满足且，所以。

设，则有解释*I*和*I*中赋值*v*满足且，所以*I*和*v*满足。因此，可满足。

**20.**

(1) 可满足。取解释*I*和*I*中赋值*v*如下。

， ， ，

对每个常元*a*，；

对每个*n*元函数符号*f*，；

对每个变元*x*，。

可归纳证明：对每个项*t*，。

*I*和*v*满足。

(2) 可满足。取解释*I*和*I*中赋值*v*如下。

为自然数集，  当且仅当 

则*I*和*v*满足。

习题四

**3.**

(1)













的斯科伦范式是

。

(2)





的斯科伦范式是

。

(3)







的斯科伦范式是。

(4)











的斯科伦范式是

。

**4.**设是前束范式*A*的无前束范式。

设*A*可满足，即有解释*I*和*I*中赋值*v*使得，我们证明可满足。

对*A*中的出现次数进行归纳。

若*A*中不出现，则与*A*相同，可满足。

设*A*中的出现次数为。

若*A*为，为。因为，故有使得。令解释与*I*的区别仅在于，则



可满足，由归纳假设知，可满足，即可满足。

若*A*为，为。定义上的*n*元运算*g*如下：对于任意，令为集合中的一个元素，这个集合是非空的，因为。令解释与*I*的区别仅在于。对于任意，





所以，，可满足，由归纳假设知，可满足，即可满足。

 我们证明。由谓词逻辑公理系统的可靠性定理知，只需证明。

对*A*中的出现次数进行归纳。

若*A*中不出现，则与*A*相同，。

设*A*中的出现次数为。

若*A*为，为。由第三章习题9（1）知，，故。由归纳假设知，，因此。

若*A*为，为。由归纳假设知，。由第三章习题9（1）知，，再次应用例3.8得到。所以，，即，。若可满足，有解释*I*和*I*中赋值*v*满足，则*I*和*v*满足*A*，*A*可满足。