**第一章 集合**

**习题1.1**

1.

1. {0, 1, 2, 3, 4}
2. {11, 13, 17, 19}
3. {12, 24, 36, 48, 64}

2.

1. {x | x ∈ N 且x ≤ 100}
2. Ev = {x | x ∈ N 且2整除x } Od = {x | x ∈ N 且2不能整除x }
3. {y | 存在x ∈ I 使得 y = 10 • x } 或 {x | x/10 ∈ I }

3. 极小化步骤省略

1. ① {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} ⊆ A ；

② 若α, β ∈ A，则α•β ∈ A 。

或

① {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} ⊆ A ；

② 若α ∈ A 且 a ∈ {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}，则a•α ∈ A 。

或

① {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} ⊆ A ；

② 若α ∈ A 且 a ∈ {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}，则α•a ∈ A 。

① {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} ⊆ A ；

② 若α, β ∈ A 且 α ≠ 0，则 α•β ∈ A 。

c) ① 若a ∈ {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}，则 a. ∈ A ；

② 若α ∈ A 且 a ∈ {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}，则α•a ∈ A ；

若α ∈ A 且 a ∈ {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}，则a•α ∈ A 。

或

① {0., 1., 2., 3., 4., 5., 6., 7., 8., 9.} ⊆ A ；

② 若α ∈ A 且 a ∈ {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}，则α•a ∈ A ；

若α ∈ A 且 a ∈ {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}，则a•α ∈ A 。

d) ① {0, 10} ⊆ A ；

② 若α ∈ A，则1•α ∈ A ；

若α, β ∈ A 且 α ≠ 0，则 α•β ∈ A 。

e) Ev定义如下：

① {0} ⊆ Ev 或0 ∈ Ev ；

② 若α ∈ Ev，则α+2 ∈ Ev 。

Od定义如下：

① {1} ⊆ Od 或1 ∈ Od ；

② 若α ∈ Od，则α+2 ∈ Od 。

f) ① {0} ⊆ A 或 0 ∈ A ；

② 若α ∈ A，则 ∈ A 。

4. A = G；C = F；B = E。

5. 题号 是否正确

a) ✓

b) × （空集不含任何元素）

c) ✓

d) ✓

e) ✓

f) ×

g) ✓

h) ×

6. 题号 是否正确

a) × （ 反例：A = {a}；B = ∅；C = {{a}} ）

b) × （ 反例：A = ∅；B = {∅}；C = {∅} ）

c) × （ 反例：A = ∅；B = {a}；C = {∅} ）

d) × （ 反例：A = ∅；B = {∅}；C = {{∅}} ）

1. 能。例如：B = A ∪ {A} 。

8.

1. ∅；{1}；{2}；{3}；{1, 2}；{1, 3}；{2, 3}；{1, 2, 3}；
2. ∅；{1}；{{2, 3}}；{1, {2, 3}}；
3. ∅；{{1, {2, 3}}}；
4. ∅；{∅}；
5. ∅；{∅}；{{∅}}；{∅, {∅}}；
6. ∅；{{1, 2}}；
7. ∅；{{∅, 2}}；{{2}}；{{∅, 2}, {2}}；

9.

1. {∅，{a}，{{b}}，{a, {b}}}；
2. {∅，{1}，{∅}，{1, ∅}}；
3. {∅，{x}，{y}，{z}，{x, y}，{x, z}，{y, z}，{x, y, z}}；
4. {∅，{∅}，{a}，{{a}}，{∅, a}，{∅, {a}}，{a, {a}}，{∅, a, {a}}}。

**习题1.2**

1.

1. A ∩ ~B = {4}；
2. (A ∩ B) ∪ ~C = {1, 3, 5}；
3. ~ (A ∩ B) = {2, 3, 4, 5}；
4. ~A ∪ ~B = {2, 3, 4, 5}；
5. (A – B) – C = ∅；
6. A – (B – C) = {4}；
7. (A ⊕ B) ⊕ C = {5}；
8. (A ⊕ B) ⊕ (B ⊕ C) = {1, 2}。

2.

1. B ∩ C 或 B – E ；
2. A ∩ D ；
3. (A – B) ∩ C ；
4. C – B 或C – A ；
5. (A ∩ C) ∪ (E – B) 或 (A – E) ∪ (E – B)；

3.

1. 证明：对于任意x ∈ A ∪ C，

因为x ∈ A ∪ C，所以x ∈ A或x ∈ C。

若x ∈ A，则由于A ⊆ B，因此x ∈ B；

若x ∈ C，则由于C ⊆ D，因此x ∈ D。

所以，x ∈ B或x ∈ D，即x ∈ B ∪ D。

所以，A ∪ C ⊆ B ∪ D。

类似可证A ∩ C ⊆ B ∩ D。

d) A – (B ∪ C) = A ∩ ~ (B ∪ C) = A ∩ (~ B ∩ ~C) = (A ∩ A) ∩ (~ B ∩ ~C)

**=** (A ∩ ~B) ∩ (A ∩ ~C) = (A – B) ∩ (A – C)

f) A – (A – B) = A ∩ ~ (A – B) = A ∩ ~ (A ∩ ~B) = A ∩ (~ A ∪ B)

**=** (A ∩ ~A) ∩ (A ∩ B) = ∅ ∩ (A ∩ B) = A ∩ B

4.

1. ⇒) 若A = B，则A ∪ B = A且 A ∩ B = A。

因此，A ⊕ B = (A ∪ B) – (A ∩ B) = A – A = ∅。

⇐) 若A ⊕ B = ∅，则A ∪ B = A ∩ B。

又因为A ∩ B ⊆ A ⊆ A ∪ B且A ∩ B ⊆ B ⊆ A ∪ B，所以

A ∩ B = A = B = A ∪ B。

所以A = B。

1. 证明略。

a) ✓

b) ✓

c) × （反例：A = {a, b}，B = {a}，C = {b}）

d) × （反例：A = {a}，B = {a, b}，C = {a, c}）

e) ✓

f) × （反例：A = {a, b}，B = {a}，C = {b}）

g) × （反例：A = {a}，B = {a, b}，C = {a, c}）

6.

1. B ∩ C ⊆ ~ A；
2. A ⊆ B ∩ C；
3. A ⊆ ~ (B ∪ C)，即B ∪ C ⊆ ~ A；
4. A ⊆ B ∪ C；
5. (A – B) ⊕ (A – C) = (A ∩ ~B) ⊕ (A ∩ ~C) =

((A ∩ ~B) ∪ (A ∩ ~C)) – ((A ∩ ~B) ∩ (A ∩ ~C)) =

((A ∩ ~B) ∪ (A ∩ ~C)) ∩ ~ ((A ∩ ~B) ∩ (A ∩ ~C)) =

((A ∩ ~B) ∪ (A ∩ ~C)) ∩ (~ (A ∩ ~B) ∪ ~ (A ∩ ~C)) =

((A ∩ ~B) ∪ (A ∩ ~C)) ∩ ( (~ A ∪ B) ∪ (~A ∪ C)) =

(A ∩ (~B ∪ ~C)) ∩ ( ~ A ∪ (B ∪ C)) =

(A ∩ (~B ∪ ~C)) ∩ (B ∪ C) =

A ∩ ( (B ∪ C) ∩ ~ (B ∩ C) ) =

A ∩ (B ⊕ C)

因此，若(A – B) ⊕ (A – C) = A，则A ∩ (B ⊕ C) = A。

所以，A ⊆ (B ⊕ C)。

1. 由上题，(A – B) ⊕ (A – C) = A ∩ (B ⊕ C)

因此，若(A – B) ⊕ (A – C) = ∅，则A ∩ (B ⊕ C) = ∅。

1. A = B；
2. A = B = ∅；
3. A = B；
4. B = ∅；
5. B ⊆ A 或 A ⊆ B。

7.

1. 对于任意x ∈℘(A) ∪℘(B)，则x ∈℘(A) 或x ∈℘(B)。

若x ∈℘(A)，则x ⊆ A。因为A ⊆ A ∪ B，所以，x ⊆ A ∪ B。

因此，x ∈℘(A ∪ B)。

若x ∈℘(B)，则x ⊆ B。因为B ⊆ A ∪ B，所以，x ⊆ A ∪ B。

因此，x ∈℘(A ∪ B)。

所以，总有x ∈℘(A ∪ B)。

因此，℘(A) ∪℘(B) ⊆ ℘(A ∪ B)。

1. 对于任意x ∈℘(A) ∩℘(B)，则x ∈℘(A) 且x ∈℘(B)。

x ∈℘(A)，因此x ⊆ A。x ∈℘(B)，因此x ⊆ B。

所以，x ⊆ A ∩ B。

因此，x ∈℘(A ∩ B)。

所以，℘(A) ∩℘(B) ⊆ ℘(A ∩ B)。

8.

1. ∪{{∅}} = {∅}，∩{{∅}} = {∅}；
2. ∪{∅, {∅}} = {∅}，∩{∅, {∅}} = ∅；
3. ∪{{a}, {b}, {a, b}} = {a, b}，∩{{a}, {b}, {a, b}} = ∅。

9. 证明：

1. 若x ∈ R0，则x ∈ R且x ≤ 1。所以对于任意i∈I+均有x < 1+1/i。即对于任意i∈I+均有x ∈ Ri。所以，x∈。
2. 若x ∈ ，则对于任意i∈I+均有x ∈ Ri。所以对于任意i∈I+均有x < 1+1/i。所以，x ≤ 1，故x∈。

10. 因为An+1 ≤ An，所以，。

11. ，。

12.

1. ；
2. 。

**习题1.3**

1.

a) 证明：用第一归纳法

i) 当n = 1 时，左边 = 1/2 = 右边；

ii) 对任意的k ≥ 1，假设当n = k时命题为真，即



因为







即当n = k+1时命题也为真。

由i) ii)可知，对于任意n≥1均有

。

b) 证明：用第一归纳法

i) 当n = 1 时，左边 = 2 = 右边；

ii) 对任意的k ≥ 1，假设当n = k时命题为真，即

*2+22+23++2k = 2k+1-2*

因为

*2+22+23++2k+ 2k+1= 2k+1-2+2k+1 =2k+2-2*

即当n = k+1时命题也为真。

由i) ii)可知，对于任意n≥1均有

*2+22+23++2n = 2n+1-2*。

c) 证明：用第一归纳法

i) 当n = 0 时，左边 = 1 ≥ 0 = 右边；

当n = 1 时，左边 = 2 ≥ 2 = 右边；

ii) 对任意的k ≥ 1，假设当n = k时命题为真，即

*2k ≥ 2k*

因为

*2k+1= 2•2k ≥* *2•2k ≥* *2k+2 =2(k+1)* （因为k ≥ 1）

即当n = k+1时命题也为真。

由i) ii)可知，对于任意n≥1均有

*2n = 2n*。

d) 证明：用第一归纳法

i) 当n = 1 时，左边 = 3 ，右边 = 3，3|3，所以n=1时命题为真；

ii) 对任意的k ≥ 1，假设当n = k时命题为真，即

*3 | k3 +2k*

因为

*(k+1)3 + 2(k+1) = k3 + 3k2 + 3k +1 + 2k +2 = (k3 + 2k) + 3(k2 + k +1)*

由于*3 | k3 +2k*且*3 | 3(k2 + k +1)*，因此，*3 | (k+1)3 +2(k+1)*

即当n = k+1时命题也为真。

由i) ii)可知，对于任意n≥1均有

*3 | n3 +2n*。

e) 证明：用第一归纳法

i) 当n = 1 时，左边 = 6 = 右边 = 3，所以n=1时命题为真；

ii) 对任意的k ≥ 1，假设当n = k时命题为真，即

*1•2•3 + 2•3•4 + + k(k+1)(k+2) = k(k+1)(k+2)(k+3) / 4*

因为

*1•2•3 + 2•3•4 + + k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2)(k+3) =*

*k(k+1)(k+2)(k+3) / 4+ (k+1)(k+2)(k+3) =*

*(k+1)(k+2)(k+3)(k+4) / 4*

即当n = k+1时命题也为真。

由i) ii)可知，对于任意n≥1均有

*1•2•3 + 2•3•4 + + n(n+1)(n+2) = n(n+1)(n+2)(n+3) / 4。*

1. 证明：证明分三部分

①三个相邻整数中最小者 ≥ 0；

②三个相邻整数中最小者 = -1；

③三个相邻整数中最小者 ≤ -2。

对①用第一归纳法，即证9 | n3 + (n+1) 3 + (n+2) 3

i) 当n = 0 时，9 | 9，所以n = 0时命题为真；

ii) 对任意的k ≥ 0，假设当n = k时命题为真，即

9 | k3 + (k+1) 3 + (k+2) 3

因为

(k+1)3 + (k+2) 3 + (k+3) 3 *=*

k3 + 3k2 + 3k +1 + (k+1) 3 + 3(k+1)2 + 3(k+1) +1 + (k+2) 3 + 3(k+2)2 + 3(k+2) +1 =

k3 + (k+1) 3 + (k+2) 3 + 3k2 + 3k +1 + 3(k+1)2 + 3(k+1) +1 + 3(k+2)2 + 3(k+2) +1 =

k3 + (k+1) 3 + (k+2) 3 + 9k2 + 27k +27 =

k3 + (k+1) 3 + (k+2) 3 + 9(k2 + 3k +3)

由于9 | k3 + (k+1) 3 + (k+2) 3且9 | 9(k2 + 3k +3)

所以，9 | (k+1)3 + (k+2) 3 + (k+3) 3，即当n = k+1时命题也为真。

由i) ii)可知，对于任意n ≥ 0均有

9 | n3 + (n+1) 3 + (n+2) 3

对③由于9 | n3 + (n+1) 3 + (n+2) 3，所以，9 | (-n)3 + (-(n+1)) 3 + (-(n+2)) 3。

对②因为9 | 0，所以此时命题也为真。

根据以上证明可知，任意三个相邻整数的立方和能被9整除。

g) 证明：用第一归纳法

i) 当n = 0 时，112 + 121 = 133，133 | 133，所以n = 0时命题为真；

ii) 对任意的k ≥ 0，假设当n = k时命题为真，即

*133 | 11 k+2+122 k+1*

因为

*11 k+3+122 (k+1)+1 = 11•11 k+2+122•122 k + 1 = 11• (11 k+2+122 k + 1) + 133•122 k + 1*

由于 *133 | 11 k+2+122 k+1* 且 *133 | 133•122 k + 1*

因此，*133 | 11• (11 k+2+122 k + 1) + 133•122 k + 1*。

即当n = k+1时命题也为真。

由i) ii)可知，对于任意n≥1均有

*133 | 11 n+2+122 n+1*

3. 证明：用第二归纳法

i) 当n = 1 时，，所以n = 1时命题为真；

当n = 2 时，，所以n = 2时命题为真；

ii) 对任意的k ≥ 2，假设当2 ≤ n ≤ k时命题均为真，

则由 对于任意n∈I+，Fn+1 = Fn + Fn-1 可知

*Fk+1 = Fk + Fk-1 ≤ *

*≤  ≤ *

*≤ *

*Fk+1 = Fk + Fk-1 ≥ *

*≥  ≥ *

*≥ *

即当n = k+1时命题也为真。

由i) ii)可知，对于任意n≥1均有

 。

4. 分析：（证明略）

设n = (m+1) q + r，m ≥ r > 0。

首先，甲扳倒r根，然后每当乙扳倒x（1≤ x ≤ m）根，因为1≤ (m+1) – x ≤ m，所以此时甲可扳倒(m+1) – x根，故甲总能获胜。

证明：对q（即n除以m+1的商）用第一归纳法。

i) 当q = 0时，因为n = r且m ≥ r ≥ 1，所以甲可一次将r根全部扳倒，则甲获胜。

ii) 对任意的k ≥ 0，假设当q = k时命题为真，

则当q = k+1时，即存在r使得n = (m+1) (q+1) + r，m ≥ r > 0 ，由于

此时甲可扳倒r根，然后乙只能扳倒x（1≤ x ≤ m）根，此时剩下n′ = (m+1)q+(m+1)-q根， 因为1≤ (m+1) – x ≤ m，则根据归纳假设可知甲总能获胜。

即当q = k+1时命题也为真。

由i) ii)可知，对于任意q ≥ 0均有甲总能获胜。

1. 证明：用第一归纳法

对于每个i ≥ i0，用Q(i)表示下列命题：

对于任意j ≥ j0，P (i, j)皆真。

下面验证：Q(i)满足第一归纳法的条件。

i) Q(i0)为真， 因为（对j用第一归纳法）：

a) P(i0, j0)为真；

b) 若P(i0, j)为真，则P (i0, j+1)为真；

由归纳法可知，Q(i0)为真。

ii) 若Q(i)为真（i ≥ i0），即对于任意i ≥ i0，j ≥ j0，P (i, j)为真。

则对于任意j ≥ j0，P(i+1, j)为真，即Q (i+1)为真。

由i)和ii)可知，对于任意i ≥ i0，Q (i)皆真。

所以，对于任意i ≥ i0，j ≥ j0，P (i, j)为真。

6. 证明：假设有n ∈ N使n ∈ n ，即 {n} ⊆ n ，故n+ = {n}∪n ⊆ n ，同时n ⊆ n+ ，所以n = n+。矛盾！（与皮亚诺公理矛盾）

1. 证明：假设有m ∈ N使n < m，则由“<”定义可知n ∈ m，所以由习题7有n ⊂ m。因为n ∈ m 且n ⊂ m，所以 n∪{n} ⊆ m，即n+ ⊆ m。

而m < n+，则由“<”定义可知m ∈ n+，由习题7有m ⊂ n+。

n+ ⊆ m与m ⊂ n+矛盾，所以假设不成立，即不可能有m ∈ N使n < m < n+。

**习题1.4**

1.

a) A × {1} × B = {<0, 1, 1>, <0, 1, 2>, <1, 1, 1>, <1, 1, 2> }

b) A2 × B = {<0, 0, 1>, <0, 0, 2>, <0, 1, 1>, <0, 1, 2>, <1, 0, 1>, <1, 0, 2>, <1, 1, 1>, <1, 1, 2> }

1. (B × A)2 = { <1, 0, 1, 0>, <1, 0, 1, 1>, <1, 0, 2, 0>, <1, 0, 2, 1>,

<1, 1, 1, 0>, <1, 1, 1, 1>, <1, 1, 2, 0>, <1, 1, 2, 1>,

<2, 0, 1, 0>, <2, 0, 1, 1>, <2, 0, 2, 0>, <2, 0, 2, 1>,

<2, 1, 1, 0>, <2, 1, 1, 1>, <2, 1, 2, 0>, <2, 1, 2, 1> }

2. 题号 是否正确

a) × （反例：A=D={a}，B=C=∅，则左边={<a,a>}，而右边=∅）

b) ✓

c) × （反例：A=C=D=N，B=∅，则左边=∅，而右边=N×N）

d) × （反例：A=C={1, 2}，B={1}，D={2}，则左边={<2, 1>}，

而右边={<1, 1>, <2, 1>, <2, 2>}）

7. 证明：题目等价于证明：若<a, b> = <c, d>，则a = c且b = d。

设<a, b> = <c, d>，则{{a, A}, {b, B}} = {{c, A}, {d, B}}

① {a, A} = {c, A}且{b, B} = {d, B}

所以，a = c且b = d。

② {a, A} = {d, B}且{b, B} = {c, A}

则因为A≠B，所以a = B, d = A, b = A且c = B。

所以，a = c且b = d。

故总有：a = c且b = d。

**第二章 二元关系**

**习题2.1**

1.

1. R = {<0, 0>, <0, 2>, <2, 0>, <2, 2>}
2. R = {<1, 1>, <4, 2>}

2.

R1 ∪ R2 = {<1, 2>, <2, 4>, <3, 3>, <1, 3>, <4, 2>}

R1 ∩ R2 = {<2, 4>}

dom R1 = {1, 2, 3}

dom R2 = {1, 2, 4}

ran R1 = {2, 3, 4}

ran R2 = {2, 3, 4}

dom (R1 ∪ R2) = {1, 2, 3, 4}

ran (R1 ∩ R2) = {4}

3.

证明：（根据定义域和值域的定义进行证明）

因为

x ∈ dom (R1 ∪ R2) 当且仅当 有y ∈ B使得<x, y> ∈ (R1 ∪ R2)

当且仅当 有y ∈ B使得<x, y> ∈ R1 或 <x, y> ∈ R2

当且仅当 有y ∈ B使得<x, y> ∈ R1 或有y ∈ B使得<x, y> ∈ R2

当且仅当 x ∈ dom (R1) 或 x ∈ dom (R2)

当且仅当 x ∈ dom (R1) ∪ dom (R2)

所以，dom (R1 ∪ R2) = dom (R1) ∪ dom (R2) 。

因为

若x ∈ ran (R1 ∩ R2)，则 有x ∈ A使得<x, y> ∈ (R1 ∩ R2) ；

有x ∈ A使得<x, y> ∈ R1 且 <x, y> ∈ R2 ；

有x ∈ A使得<x, y> ∈ R1 且 有x ∈ A使得<x, y> ∈ R2 ；

x ∈ ran (R1) 且 x ∈ ran (R2)；

x ∈ ran (R1) ∩ ran (R2)。

所以，ran (R1 ∩ R2) ⊆ ran (R1) ∩ ran (R2)。

4.

L = {<1, 2>, <1, 3>, <1, 6>, <2, 3>, <2, 6>, <3, 6> }；

D = {<1, 1>, <1, 2>, <1, 3>, <1, 6>, <2, 2>, <2, 6>, <3, 3>, <3, 6>, <6, 6> }；

L ∩ D = { <1, 2>, <1, 3>, <1, 6>, <2, 6>, <3, 6> }。

5.

1. ∅上的空关系∅；
2. 集合 {1, 2 } 上的二元关系 { <1, 1> }；
3. 集合 {1, 2 } 上的二元关系 { <1, 1> } ；
4. 集合 {1, 2, 3 } 上的二元关系 { <1, 2>, <2, 1>, <1, 3> } ；

6.

若R, S自反， 则R ∩ S , R ∪ S自反，R – S , R ⊕ S必不自反。

若R, S反自反， 则R ∩ S , R ∪ S , R – S , R ⊕ S反自反。

若R, S对称， 则R ∩ S , R ∪ S , R – S , R ⊕ S对称。

若R, S反对称， 则R ∩ S , R – S反对称，R ∪ S , R ⊕ S不一定反对称。

若R, S传递， 则R ∩ S传递，, R – S , R ∪ S , R ⊕ S不一定传递。

1. S是对称的、传递的；
2. S是自反的、对称的；
3. S是反对称的、传递的；
4. S是反自反的、反对称的、传递的；

8.

n ( Am ) = nm ；

n (℘( Am ) ) =  ；

因为R ⊆ Am，所以A上共有个m元关系。

10.

证明： 用反证法。

假设R不是反对称的，即

存在a, b ∈ A，使得<a, b> ∈ A, <b, a> ∈ A 且a ≠ b。

因为R是传递的，所以由<a, b> ∈ A且<b, a> ∈ A可知<a, a> ∈ A。

这与R反自反性质矛盾。

所以假设不成立。即R是反对称的。

11.

证明：因为R = {<x, y> | x, y ∈ A 且<x, y> ∈ R} = {{{x}, {x, y}} | x, y ∈ A 且<x, y> ∈ R }

所以，∪ R = {{x}, {x, y} | x, y ∈ A 且<x, y> ∈ R }。

所以，∪(∪R) = {x | x ∈ A且有y ∈ A使得<x, y> ∈ R }∪{y | y ∈ A且有x ∈ A使得<x, y>∈R }。

= dom R ∪ ran R 。

即：fld R = dom R ∪ ran R 。

12.

证明：因为dom R ⊆ fld R = ∪ ( ∪ R )，ran R ⊆ fld R = ∪ ( ∪ R )，

所以，R ⊆ dom R × ran R ⊆ ∪ ( ∪ R ) × ∪ ( ∪ R ) 。

**习题2.2**

1.

R是自反的、对称的、传递的。

2.

* 1. 自反的；
  2. 反对称的、传递的；
  3. 自反的、对称的、传递的；
  4. 自反的、传递的；
  5. 无；
  6. 对称的；
  7. 自反的、反对称的、传递的；
  8. 对称的；
  9. 对称的；
  10. 反对称的；
  11. 自反的、反对称的；
  12. 反对称的、传递的。

4.

1. A上共有个不相同的自反关系；
2. A上共有个不相同的反自反关系；
3. A上共有个不相同的对称关系；
4. A上共有个不相同的反对称关系；
5. A上共有个不相同的既是对称的又是反对称的关系；

**习题2.3**

1. 最多能有n(A) 个元素为1。

2.

证明：

i) R ∪ R-1为A上包含R的最小对称关系

① R ⊆ R ∪ R-1。所以，R∪R-1包含R。

② 因为对于任意<a, b> ∈ R ∪ R-1，有<a, b> ∈ R或<a, b> ∈ R-1。

若<a, b> ∈ R，则<b, a> ∈ R-1；若<a, b> ∈ R-1，则<b, a> ∈ R。

因此，<b, a> ∈ R ∪ R-1。所以，R∪R-1为A上的对称关系。

③ 设R′为任意的A上包含R的对称关系，则

对于任意<a, b> ∈ R ∪ R-1，有<a, b> ∈ R或<a, b> ∈ R-1。

若<a, b> ∈ R，由于R′包含R，所以<a, b> ∈ R′；

若<a, b> ∈ R-1，则<b, a> ∈ R，由于R′包含R，所以<b, a> ∈ R′，而R′对称，所以<a, b> ∈ R′。

因此，总有<a, b> ∈ R′。所以，R ∪ R-1 ⊆ R′。

由①②③可知，R ∪ R-1为A上包含R的最小对称关系。

ii) R ∩ R-1为A上包含在R中的最大对称关系

① R ∩ R-1 ⊆ R。所以，R ∩ R-1包含在R中。

② 因为对于任意<a, b> ∈ R ∩ R-1，有<a, b> ∈ R且<a, b> ∈ R-1。

<a, b> ∈ R，所以<b, a> ∈ R-1；<a, b> ∈ R-1，所以<b, a> ∈ R。

因此，<b, a> ∈ R ∩ R-1。所以，R ∩ R-1为A上的对称关系。

③ 设R′为任意的A上包含在R中的对称关系，则

对于任意<a, b> ∈ R′，由于R′包含在R中，所以<a, b> ∈ R；

又由于R′对称，所以<b, a> ∈ R′，而R′包含在R中，所以<b, a> ∈ R，因此，<a, b> ∈ R-1；

因此，总有<a, b> ∈ R ∩ R-1。所以，R ⊆ R∪R-1。

由①②③可知，R ∩ R-1为A上包含在R中的最大对称关系。

**习题2.4**

1.

R2 Ο R1 = {<c, d>}； R1 Ο R2 = {<a, d>, <a, c>}；

R12 = {<a, a>, <a, b>, <a, d>}； R22 = {<b, b>, <c, c>}；

2. m = 1, n = 16。

4. A = {1, 2, 3}

令R1 = {<1, 2>, <1, 3>}；R2 = {<2, 2>}；R3 = {<3, 2>}；则

R1 Ο ( R2 ∩ R3 ) = ∅；( R1 Ο R2 ) ∩ ( R1 Ο R3 ) = {<1, 3>}；

所以，R1 Ο ( R2 ∩ R3 ) ⊂ ( R1 Ο R2 ) ∩ ( R1 Ο R3 ) 。

令R2 = {<2, 2>}；R3 = {<2, 3>}；R4 = {<2, 1>, <3, 1>}；则

( R2 ∩ R3 ) Ο R4 = ∅；( R2 Ο R4 ) ∩ ( R3 Ο R4 ) = {<2, 1>}；

所以，( R2 ∩ R3 ) Ο R4 ⊂ ( R2 Ο R4 ) ∩ ( R3 Ο R4 ) ；

5.

1. 正确。
2. 不正确。令A = {1, 2}，则R1 = {<1, 2>}, R2 = {<2, 1>}都是反自反的，但R1 Ο R2 ={<1, 1>}不是反自反的。
3. 不正确。令A = {1, 2, 3}，则R1 = {<1, 2>, <2, 1>}, R2 = {<2, 3>, <3, 2>}都是对称的，但R1 Ο R2 = {<1, 3>}不是对称的。
4. 不正确。令A = {1, 2, 3}，则R1 = {<1, 2>, <3, 1>}, R2 = {<2, 3>, <1, 1>}都是反对称的，但R1 Ο R2 = {<1, 3>, <3, 1>}不是反对称的。
5. 不正确。令A = {1, 2, 3}，则R1 = {<1, 2>, <3, 1>, <3, 2>}, R2 = {<2, 3>, <1, 1>}都是传递的，但R1 Ο R2 = {<1, 3>, <3, 1>, <3, 3>}不是传递的。
6. 证明：

a) 对于任意k ∈ N，因为Rs = Rt ，所以Rs+k = Rs •Rk = Rt •Rk = Rt+k 。

b) 用关于k的归纳法证明。

i) 当k=0时，Rs+i = Rs+i。所以命题成立。

ii) 假设当k=m时命题成立，即Rs + mp + i = Rs + i。

则当k=m+1时，因为Rs + (m+1) p + i=Rs + p + mp+ i=Rt + mp + i=Rt •Rmp+i =Rs •Rmp+i =Rs + mp + i。

由归纳假设，Rs + (m+1) p + i = Rs + mp + i = Rs + i。

由i) ii)可知对于任意k, i ∈ N，均有Rs + kp + i = Rs + i 。

1. 若k ≤ t-1，则Rk ∈ {R0, R1, …, Rt-1}；

若k ≥ t，则k = s + (t-s)q + r，即k = s + pq + r；（其中，q∈ N, 0 ≤ r < t-s = p）

此时，由b)可知Rk = Rs + pq + r = Rs + r ∈ {R0, R1, …, Rt-1}。

所以，若k ∈ N，则Rk ∈ {R0, R1, …, Rt-1}。

**习题2.5**

2.

使t (R1 ∪ R2) ⊃ t ( R1 ) ∪ t ( R2 ) 的R1 和R2 的具体实例如下：

A = {1, 2}，R1 = {<1, 2>}，R1 = {<2, 1>}；

则t ( R1 ) = R1 ，t ( R2 ) = R2 ，t (R1 ∪ R2) = {<1, 2>, <2, 1>, <1, 1>, <2, 2>}，

故真包含。

4.

b) 使s (R1 ∩ R2) ⊂ s ( R1 ) ∩ s ( R2 ) 的R1 和R2 的具体实例如下：

A = {1, 2}，R1 = {<1, 2>}，R1 = {<2, 1>}；

则s ( R1 ) = s ( R2 ) = {<1, 2>, <2, 1>}，s (R1 ∩ R2) = s(∅) = ∅。

故真包含：s (R1 ∩ R2) ⊂ s ( R1 ) ∩ s ( R2 )。

b) 使t (R1 ∩ R2) ⊂ t ( R1 ) ∩ t ( R2 ) 的R1 和R2 的具体实例如下：

A = {1, 2, 3}，R1 = {<1, 2>, <2, 1>}，R1 = {<1, 3>, <3, 1>}；

则t ( R1 ) = {<1, 2>, <2, 1>, <1, 1>, <2, 2>}，t ( R2 ) = {<1, 3>, <3, 1>, <1, 1>, <3, 3>}，

t (R1 ∩ R2) = s(∅) = ∅。

故真包含：t (R1 ∩ R2) ⊂ t ( R1 ) ∩ t ( R2 )。

6. 令A = {1, 2}，R = {<1, 2>}，则

ts(R) = t ({<1, 2>, <2, 1>}) = {<1, 2>, <2, 1>, <1, 1>, <2, 2>}

st(R) = s ({<1, 2>}) = {<1, 2>, <2, 1>}

所以，st(R) ≠ ts(R)。

**习题2.6**

1.

1. 正确；
2. 正确；
3. 不正确；（不自反）
4. 不正确；（不自反）
5. 不正确；（不一定对称）
6. 正确。

2. R的所有极大相容类为：{x1, x2, x3}，{x1, x3, x6}，{x3, x4, x5}，{x3, x5, x6}。

3. A上共有个不相同的相容关系。

**习题2.7**

1.

1. 不正确；（不自反）
2. 不正确；（不自反）
3. 不正确；（不自反）
4. 不正确；（不传递，< -1, 0 > ∈ R, < 0, 1 > ∈ R, 但<-1, 1> ∉ R）
5. 不正确；（不对称）
6. 不正确；（不对称）
7. 不正确；（不传递）
8. 正确；
9. 不正确。（不自反，i = 10k时，<i, i> ∉ R）

2. 不对。

应加上条件：对于任意x∈A，总存在y∈A使得<x, y> ∈ R。

3.

证明：

① 已知条件：若<a, b> ∈ R，<a, c> ∈ R，则<b, c> ∈ R。

先证对称性：若<a, b> ∈ R，则由于R自反，所以<a, a> ∈ R，由上式有<b, a> ∈ R。

所以R对称。

再证传递性：若<a, b> ∈ R，<b, c> ∈ R，则因为R对称，所以<b, a> ∈ R。由已知条件，因为<b, a> ∈ R且<b, c> ∈ R，所以<a, c> ∈ R。

所以R传递。

因此，R时等价关系。

② 已知条件：R是等价关系。

若<a, b> ∈ R，<a, c> ∈ R，则因为R对称，所以<b, a> ∈ R。又由于R传递，所以，<b, c> ∈R。

因此，若<a, b> ∈ R，<a, c> ∈ R，则<b, c> ∈ R。

**习题2.8**

1.

1. 半序；
2. 半序、全序、良序；
3. 无；（不是反对称的）
4. 无；（不是传递的）
5. 半序；
6. 无；（不是传递的）
7. 无；（不是传递的）
8. 拟序。

4. 设R是集合A上的二元关系，证明：

a) R是A上的半序，当且仅当R ∩ R-1 = IIA且R = R\*。

自反、反对称 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_\_\_传递

b) R是A上的拟序，当且仅当R ∩ R-1 = ∅ 且R = R+。

反自反 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_\_\_传递

6.

a) 断言中为真的有：x4Rx1, x1Rx1。

b) P的最小元：无；P的最大元：x1 ；

P的极小元：x4和x5；P的极大元：x1 。

c) {x2, x3, x4}的上界：x1；下界：x4；上确界：x1；下确界：x4。

{x3, x4, x5}的上界：x1, x3；下界：无；上确界：x3；下确界：无。

{x1, x2, x3}的上界：x1；下界：x4；上确界：x1；下确界：x4。

7.

1. < I, ≤ >中的非空子集I无最小元。
2. < I+, |>（“|”为整除关系）中的非空子集{x | x >4}无最大元。
3. <R, ≤>中的非空子集(0, 1)由下确界0，但无最小元。
4. 书上例4中的非空子集{4}有上界8和12，但无上确界。

8. 归纳法。

9. 归纳法。

**第三章 函数**

**习题3.1**

1.

1. 不是部分函数；原因：存在<0, 1>, <0, 2> ∈ f，但1 ≠ 2 。
2. 部分函数；
3. 不是部分函数。原因：存在<4, 2>, <4, -2> ∈ f，但2 ≠ ­-2 。

2.

1. 部分函数；定义域为：{1, 2, 3, 4}，值域为：{<2, 3>, <3, 4>, <1, 4>}。
2. 部分函数；定义域为：{1, 2, 3}，值域为：{<2, 3>, <3, 4>, <3, 2>}。
3. 不是部分函数；
4. 部分函数。定义域为：{1, 2, 3}，值域为：{<2, 3>}。

3.

证明：

证明分两部分：① 部分函数之单值性；② dom f = ℘(A) × ℘(A) 。

5.

1. 证明：

对于任意y ∈ f [A] – f [B]，则y ∈ f [A] 且 y ∉ f [B] 。

因为y ∈ f [A] ，所以存在x ∈ A 使得 f (x) = y 。

又因为y ∉ f [B]，所以x ∉ B。（用反证法，假设x ∈ B，则f (x) ∈ f [B]，而y = f (x)，所以y ∈ f [B]。矛盾）

所以，x ∈ A - B 。因此，y = f (x) ∈ f [A-B]。

于是，f [A-B] ⊇ f [A] – f [B]。

“=”不能代替“⊇”的反例，

令X = { x1, x2 }，Y = { y }，f = { <x1, y>, <x2, y> }。

A = { x1, x2 }，B = { x1 }。

则f [A-B] = {y}，而f [A] – f [B] = ∅。

6.

1. f = { <<-1, -1>, 0>, <<-1, 0>, -1>, <<-1, 1>, -2>, <<0, -1>, 1>, <<0, 0>, 0>, <<0, 1>, -1>, <<1, -1>, 2>, <<1, 0>, 1>, <<1, 1>, 0> }；
2. ran f = {-2, -1, 0, 1, 2}；
3. f ⎡{0, 1}2 = { <<0, 0>, 0>, <<0, 1>, -1>, <<1, 0>, 1>, <<1, 1>, 0> }；
4. 参见下题。

7.

a) ① m ≤ n，个；② m > n，0个。

b) ① m < n，0个；② n = 0且m ≠ 0，0个；③ n = 0且m = 0，1个；

④ m ≥ n ≥ 1，第二类Stirling数。

8.

1. 证明：f (99) = f ( f (110) ) = f (100) = f ( f (111) ) = f (101) = 91。
2. 证明：

① f (100) = f (99) = 91；

② ∀ i ∈ {1, 2, …, 9}，f (89 + i) = f (90 + i)，所以f (89) = f (90) = … = f (99) = 91。

f (89 + i) = f ( f (89 + i + 11) ) = f (90 + i)。

③ 假设当k+1 ≤ x ≤ 100时，f (x)均等于91。(0 ≤ k ≤ 89)

则当x = k ( k ≥ 0 ) 时，则有 f (k) = f ( f (k+11) )。

而0 ≤ k ≤ 89，所以 k+1 ≤ k+11 ≤ 100，由归纳假设有f (k+11) = 91，即f (k) = f (91) = 91。

所以，f (x) = 91对于0 ≤ k ≤ 89也成立。

**习题3.2**

4. 归纳法。

5.

证明：

① 因为f : A→A为满射，所以∀ a ∈ A . ∃ xa ∈ A使得f ( xa ) = a。

又因为f ο f = f，所以f (a) = f ( f ( xa ) ) = f ο f ( xa ) = f ( xa ) = a ，即 f (a) = a。

所以 II A ⊆ f 。

② 对于任意<x, y> ∈ f ，因为II A ⊆ f ，所以<x, x> ∈ f 。

而f为部分函数，即“单值”，于是，x = y 。

所以<x, y> = <x, x> ∈ II A 。

所以f ⊆ II A 。

② 另证

下面要证明II A ⊂ f不可能。用反证法，假设II A ⊂ f，则

存在a′ ≠ a使得f (a′) = a。

因为f为满射，所以必存在x a′ ∈ A使得f (x a′) = a′。

因为f ο f = f，所以a′ = f (x a′) = f ο f (x a′) = f ( f (x a′) ) = f (a′ ) = a ，即 a′ = a。

这与a′ ≠ a矛盾。

所以假设不成立，即II A ⊂ f不可能。

由①②可知II A = f 。

6.

证明：首先，dom (g ο f ) = f -1 [dom g]。

因为ran f ⊆ dom g ，所以dom f = f –1 [ ran f ] ⊆ f –1 [ dom g ]。

又因为dom g ⊆ Y，而f -1 [Y] = domg f，所以f –1 [ dom g ] ⊆ f –1 [ Y ] = dom f。

所以，dom (g ο f ) = dom f 。

8.

1. 因为f ο f = f ，所以对于任意i ∈ A，均有f (f (i) ) = f (i) 。即若f (i) = j ( j ≠ i )，则f (j) = i。设m为集合{ i | i ∈ A且f (i) = i }的元素个数，即m为f中对应到自身的二元序偶个数。则对m求累加和得到满足f ο f = f的函数个数为个。
2. f ο f = II A，所以f为双射，并且对于任意i ∈ A，均有f (f (i) ) = i（即若<i, j>∈f且i≠j，则<j, i>∈f ）。（特征：未对应到自身的二元序偶个数必为偶数个。）设k为集合{ i | i ∈ A且f (i) = i }的元素个数/2，即2k为f中对应到自身的二元序偶个数。则对k求累加和得到满足f ο f = II A的函数个数：

当n为偶数时，有个；

当n为奇数时，有个。

1. f ο f ο f = II A ，所以f为双射，因此满足f ο f ο f = II A的函数个数：

当n = 3k+1 ( k ∈ N ) 时，有个；

当n = 3k+2 ( k ∈ N ) 时，有个；

当n = 3k ( k ∈ N ) 时，有个。

9.

1. 证明：因为g ο f 为满射，所以g为满射。而g又是内射，所以g为双射。

假设f不是满射，则存在y ∈ Y使得 y ∉ ran f。

而g是双射，所以g (y) ∈ Z，又g ο f 为满射，所以ran (g ο f ) = Z。即g (y) ∈ ran (g ο f )。

所以存在x ∈ X使得 g (y) = g ο f (x) = g ( f (x) )。

因为g为内射，所以y = f (x)。因此，y ∈ ran f。这与y ∉ ran f矛盾。

所以假设不成立，即f 是满射。

1. 证明：因为g ο f 为内射，所以f为内射。而f又是满射，所以f为双射。

假设g不是内射，则存在y1, y2 ∈ Y使得 y1 ≠ y2并且 g (y1) = g (y2) 。

因为f为双射，所以存在x1, x2 ∈ X使得 x1 ≠ x2并且 f (x1) = y1，f (x2) = y2 。

而g ο f 为内射，则 g ο f (x1) ≠ g ο f (x2) ，即 g (y1) ≠ g (y2)。

这与g (y1) = g (y2)矛盾。

所以假设不成立，即g 是内射。

**习题3.3**

3.

1. k (x) = ⎣ x / 3 ⎦ ；
2. k (x) = ⎣ (x+1) / 3 ⎦ ；

4. f左可逆，但g不一定左可逆。

证明：因为g ο f左可逆，则g ο f为内射，所以f为内射。

g不一定左可逆，反例如下：

A = {a}， B = {b1, b2}， C = {c}。

f = {<a, b1>}，g = {<b1, c>, <b2, c>}，g ο f = {<a, c>}。

所以，g ο f是内射，即是左可逆的；但g不是内射，即不是左可逆的。

5.

证明：f是可逆的，则易证f又唯一的左（右）逆。

另一边证明以“f有唯一左逆，则f可逆。”为例。

∀a ∈ A，g = f-1 ∪ (( Y – ran f ) × {a})就是f的一个左逆。

而f仅有唯一左逆且n(A)≥2 ，这说明Y – ran f = ∅，即ran f = Y。

所以，f为满射。又因为f左可逆，所以f为内射。

即f为双射。所以f可逆。

**习题3.4**

2.

1. A ∩ B ∩ C = ∅ ；
2. A = B；
3. B = ∅；
4. A = B。

**习题3.5**

1.

b) 

或 

c) f (x) = 1/2 – x/4 或 f (x) = 1/2 cos(πx/3)。

2.

证明：若存在1 ≤ k′ ≤ n使得x1 + … + xk′ 被n整除，则取i = 1, k = k′ 即可。

否则，x1 , x1 + x2 , … , x1 + … + xn共n个数，而它们被n除的余数除0外仅有n-1个。

根据抽屉原则，其中必有两个它们被n除的余数相等。假设它们为：（j1 < j2）

x1 + … + xj1和x1 + … + xj2

则取i = j1+1, k = j2 即可。

4.

证明：共有n组数据。任取n+1个小于等于2n正整数中必有两个数处于同一组，这两个数互素。

6.

证明：一个整数被100除的余数共有100个，可以将它们分成51组。任取52个整数中必有两个数除100后余数同处于一组。这是有两种情况：一是它们除100后余数相同，此时两个数相减即可；一是它们除100后余数不同，此时两个数相加即可。

8.

1. # Σ\* = ℵ0。

其中双射为：f ( ai) = i 。

1. # Q = ℵ0。

正有理数a = m / n，m>0, n>0并且m和n互质，则：

Q+ ~ N×N ~ N。所以 # Q+ = ℵ0。

# Q = 2 × #Q+ + 1 = 1 + ℵ0 + ℵ0 = ℵ0。

1. ℵ0。

10. 。

**第四章 命题逻辑**

**习题4.1**

1. 题号 是否为命题 命题的真值

a) （没有确定的真假）

b) **F**

c) **T**

d) **T**

e) **F**

f) （祈使句）

g) （疑问句）

2.

1. ¬P∧R→Q
2. Q→R
3. ¬P
4. Q R∧¬P （需考虑优先级）



3. （答案不止一种，只要真值表相同即可）

a) **¬P** : P↑P **P∧Q** : (P↑Q)↑(P↑Q)即¬(P↑Q) **P∨Q** : (P↑P)↑(Q↑Q)

**P→Q** : P↑(Q↑Q) **P Q** : (P↑Q)↑((P↑P)↑(Q↑Q))或(P↑(Q↑Q))∧(Q↑(P↑P))



b) **¬P** : P↓P **P∧Q** : (P↓Q)↓(P↓Q)即¬(P↓Q) **P∨Q** : (P↓P)↓(Q↓Q)

**→**和 参考c)或d)定义



c) **P∧Q** : ¬(¬P∨¬Q) **P→Q** : ¬P∨Q

**P Q** : ¬(P∨Q)∨¬(¬P∨¬Q)



d) **P∨Q** : ¬(¬P∧¬Q) **P→Q** : ¬(P∧¬Q)

**P Q** : ¬(P∧¬Q) ∧¬ (Q∧¬P)



e) **P∨Q** : ¬P→Q 其它参考c)

f) 证明：要证明用∧、∨、→、 不能表示¬，只需证明仅用∧、∨、→、 不能表达出含¬的某些公式即可。



因为P∧P⇔P；P∨P⇔P；P→P⇔T；P P ⇔T。



增加T之后，T∧P⇔P∧T⇔P；P∨T ⇔ T∨P⇔T；T→P⇔P；P→T⇔T；

T P ⇔ P T ⇔P。



这也就是说，由∧、∨、→、 只能得出P或T，不能得出¬P。



**习题4.2**

1. a) **T** b) **T** c) **T** d) **F** e) **F** f) **T**

2. 以e)为例

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **P** | **Q** | **P ∧ ¬ Q → ¬ P ∨ ¬ Q** |
| F | F | F F T F T T F T T F |
| F | T | F F F T T T F T F T |
| T | F | T T T F T F T T T F |
| T | T | T F F T T F T F F T |

1. 解释以P、Q、R的顺序排列，则为真的解释如下所示：
2. (F F T)、(F T T)、(T F T)、(T T T)
3. (F F F)、(F T F)

4. a) 是永真的 b) 是永真的 c) 是永真的 d) 是可满足的

e) 是可满足的 f) 是可满足的 g) 是永真的 h) 是永真的

i) 是永假的 j) 是永假的

5. a) (((P→Q)→((P→Q)→R))→(P→Q))→(P→Q) （有的括号可省略）

1. (Q→(P∧¬P))→((P∧¬P)→Q) （有的括号可省略）

6. c)是a)的代换实例（ Q/P，(P→P)/Q ）

d)是a)的代换实例（ (P→(Q→P))/Q ）

e)是b)的代换实例（ R/P，S/Q，Q/R，P/S ）

b)是e)的代换实例（ S/P，R/Q，P/R，Q/S ）

**习题4.3**

1. 以a)为例：

a) P→(Q→P) ¬P→(P→Q)的真值表如下：



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **P** | **Q** | **P → (Q → P) ¬ P → (P → Q)** |
| F | F | F T F T F T T F T F T F |
| F | T | F T T F F T T F T F T T |
| T | F | T T F T T T F T T T F F |
| T | T | T T T T T T F T T T T T |

上述真值表说明P→(Q→P) ¬P→(P→Q)为永真式。



所以，P→(Q→P) ⇔ ¬P→(P→Q)。

2.

1. ¬(¬P∨¬Q)∨¬ (¬P∨Q)

⇔ (¬¬P∧¬¬Q) ∨¬ (¬P∨Q)

⇔ (P∧¬¬Q) ∨¬ (¬P∨Q)

⇔ (P∧Q) ∨¬ (¬P∨Q)

⇔ (P∧Q) ∨ (¬¬P∧¬Q)

⇔ (P∧Q) ∨ (P∧¬Q)

⇔ P∧ (Q ∨ ¬Q)

⇔ P∧T

⇔ P

所以，¬(¬P∨¬Q)∨¬ (¬P∨Q) ⇔ P 。

根据对偶原理得出的新的等价式为：

¬(¬P∧¬Q) ∧¬ (¬P∧Q) ⇔ P 。

1. (P∨¬Q) ∧ (P∨Q) ∧ (¬P∨¬Q)

⇔ (P∨ (¬Q ∧ Q )) ∧ (¬P∨¬Q)

⇔ (P∨ F) ∧ (¬P∨¬Q)

⇔ P ∧ (¬P∨¬Q)

⇔ (P ∧ ¬P ) ∨ ( P ∧ ¬Q )

⇔ F ∨ ( P ∧ ¬Q )

⇔ ( P ∧ ¬Q )

⇔ (¬¬P∧ ¬Q)

⇔ ¬ (¬P ∨ Q )

所以，(P∨¬Q) ∧ (P∨Q) ∧ (¬P∨¬Q) ⇔ ¬ (¬P∨Q) 。

根据对偶原理得出的新的等价式为：

(P∧¬Q) ∨ (P∧Q) ∨ (¬P∧¬Q) ⇔ ¬ (¬P∧Q) 。

4.

1. P∧Q

⇒ Q （I2）

⇒ P→Q （I6）

1. P→Q

⇒ P∧P→ P∧Q （I9）

⇒ P→ P∧Q （I1）

e) (P∨¬P→Q)→(P∨¬P→R)

⇔ (T→Q)→(P∨¬P→R) （E23）

⇔ (T→Q)→(T→R) （E23）

⇔ (¬F∨Q)→(T→R) （E16）

⇔ (¬F∨Q)→(¬F∨R) （E16）

* (T∨Q)→( ¬F∨R)
* (T∨Q)→( T ∨ R)
* (Q∨T)→( R ∨ T) （E3）
* Q→ R （E14）

上述均为等价变换，所以蕴含式也成立。

5. 以b)为例：

b) P∨ (¬Q∧R→P)

⇔ P∨ (¬(¬Q∧R) ∨ P)

⇔ P∨ ((¬¬Q∨¬R) ∨ P)

⇔ P∨ ((Q∨¬R) ∨ P)

⇔ P∨ (P ∨ (Q∨¬R))

⇔ (P∨ P) ∨ (Q∨¬R)

* P∨ Q ∨ ¬R
* ¬(¬P∧ ¬Q ∧ R)

¬(¬P∧ ¬Q ∧ R)为P∨ (¬Q∧R→P)只包含¬和∧的化简式。

**习题4.4**

1.

e) ¬P∨¬Q→(P ¬Q)



* ¬P∨¬Q→((P∧¬Q) ∨ (¬P∧¬¬Q)) （化去 ）



* ¬(¬P∨¬Q) ∨ ((P∧¬Q) ∨ (¬P∧¬¬Q)) （化去→）
* (¬¬P∧¬¬Q) ∨ ((P∧¬Q) ∨ (¬P∧¬¬Q)) （¬内移）
* (P∧Q) ∨ ((P∧¬Q) ∨ (¬P∧Q)) （最多保留一个¬）
* (P∧Q) ∨ (P∧¬Q) ∨ (¬P∧Q)

(P∧Q) ∨ (P∧¬Q) ∨ (¬P∧Q)为¬P∨¬Q→(P ¬Q)的主合取范式。



(P∧Q) ∨ (P∧¬Q) ∨ (¬P∧Q)

* (P∧ (Q ∨ ¬Q)) ∨ (¬P∧Q)
* (P∧ T) ∨ (¬P∧Q)
* P ∨ (¬P∧Q)
* (P ∨ ¬P) ∧ (P ∨Q)
* T∧ (P ∨Q)
* P ∨ Q

P∨ Q为¬P∨¬Q→ (P ¬Q)的主合取范式。



g) (P→Q∧R) ∧ (¬P→¬Q∧¬R)

* (¬P∨ (Q∧R)) ∧ (¬¬P∨ (¬Q∧¬R)) （化去→）
* (¬P∨ (Q∧R)) ∧ (P∨ (¬Q∧¬R)) （最多保留一个¬）
* (¬P∨ Q) ∧ (¬P∨R) ∧ (P∨ ¬Q ) ∧ (P∨¬R) （∨关于∧的分配率）
* (¬P∨ Q ∨ R) ∧ (¬P∨ Q ∨ ¬R) ∧ (¬P∨ Q ∨ R) ∧ (¬P∨¬Q∨R) ∧ (P∨¬Q∨¬R) ∧ (P∨¬Q∨R) ∧ (P∨ Q ∨¬R) ∧ (P∨ ¬Q ∨¬R) （变为极大项）
* (¬P∨ Q ∨ R) ∧ (¬P∨ Q ∨ ¬R) ∧ (¬P∨¬Q∨R) ∧ (P∨¬Q∨¬R) ∧ (P∨¬Q∨R) ∧ (P∨ Q ∨¬R) （合并相同项）

(¬P∨ Q ∨ R) ∧ (¬P∨ Q ∨ ¬R) ∧ (¬P∨¬Q∨R) ∧ (P∨¬Q∨¬R) ∧ (P∨¬Q∨R) ∧ (P∨ Q ∨¬R)为(P→Q∧R) ∧ (¬P→¬Q∧¬R)的主合取范式。

(P→Q∧R) ∧ (¬P→¬Q∧¬R)

* (¬P∨ (Q∧R)) ∧ (¬¬P∨ (¬Q∧¬R)) （化去→）
* (¬P∨ (Q∧R)) ∧ (P∨ (¬Q∧¬R)) （最多保留一个¬）
* (¬P∧ P) ∨ (¬P∧¬Q∧¬R) ∨ (Q∧R∧P) ∨ (Q∧R∧¬Q∧¬R) （∧关于∨的分配率）
* F ∨ (¬P∧¬Q∧¬R) ∨ (Q∧R∧P) ∨ F （化简）
* (¬P∧¬Q∧¬R) ∨ (Q∧R∧P) （化简）

(¬P∧¬Q∧¬R) ∨ (Q∧R∧P)为(P→Q∧R) ∧ (¬P→¬Q∧¬R)的主析取范式。

2.

a) (P→Q) ∧ (P→R)

* (¬P∨ Q) ∧ (¬P∨ R)
* (¬P∨ Q∨ R) ∧ (¬P∨ Q∨ ¬R) ∧ (¬P∨ Q∨ R) ∧ (¬P∨ ¬Q∨ R)
* (¬P∨ Q∨ R) ∧ (¬P∨ Q∨ ¬R) ∧ (¬P∨ ¬Q∨ R)

P→ Q∧ R

* ¬P∨ (Q ∧ R)
* (¬P∨ Q) ∧ (¬P∨ R)
* (¬P∨ Q∨ R) ∧ (¬P∨ Q∨ ¬R) ∧ (¬P∨ ¬Q∨ R)

所以，(P→Q) ∧ (P→R) ⇔ P→ Q∧ R 。

c) P∧Q∧(¬P∨¬Q)

* (P∧Q∧¬P)∨ (P∧Q∧¬Q)
* F∨F
* F

¬P∧¬Q∧ (P∨Q)

* (¬P∧¬Q∧P)∨ (¬P∧¬Q∧Q)
* F∨F
* F

所以，P∧Q∧(¬P∨¬Q) ⇔ ¬P∧¬Q∧ (P∨Q) 。

3. 合式公式P既是主合取范式，又是主析取范式。

4. 求wff A的主析取范式的算法：

1. 利用E16和E22删去→和 在A中的所有出现，得到A1；



1. 利用德•摩尔根律将A1中的¬内移到原子之前，并用E1使每个原子之前至多仅有一个¬；
2. 在用分配律将ii) 的结果化为若干个合取式的析取，其中每个合取式的因子皆为原子或原子的否定；
3. 对于iii) 的结果中的每个合取式B，若命题变元P在B中不出现，利用

(B∧P) ∨ (B∧¬P) ( ⇔ B∧(P∨¬P) ⇔ B∧T ⇔ B)

取代B，直到每个合取式都变为极小项，最后删除相同项。

**第五章 谓词逻辑**

**习题5.1**

1.

1. 每个自然数都有唯一的后继；

**解：**“每个”是全称的概念；“自然数”需引进一个特性谓词；“有”表示存在；“唯一”表示所有具有该性质的元素均相等（即若*x*具有该性质，*y*也具有该性质，则*x*等于*y*）；“后继”用谓词表示。于是，可令：

*N(x)*：*x*是自然数；

*Q(x, y)*：*y*是*x*的后继；

*E(x, y)*：*x*等于*y*；

则上述命题可以符号化为：

*(∀ x) ( N ( x ) → (∃ y) (Q ( x, y ) ∧ (∀ z) (Q ( x, z ) → E ( y, z ) )*

b) 没有以0为后继的自然数；

**解：**“没有”表示不存在；“自然数”用特性谓词表示；“后继”用谓词表示。于是，可令：

*N(x)*：*x*是自然数；

*Q(x, y)*：*y*是*x*的后继；

则上述命题可以符号化为：

*¬ (∃ x)( N ( x ) ∧ Q ( x, 0 ) )*

**注意：①** 对于引进的特性谓词，在全称量词约束下要用逻辑联结词“→”，在存在量词约束下要用逻辑联结词“∧”。

**②** “唯一”概念的符号化。

2.

1. 存在唯一的偶素数；

**解：**“存在”是存在量词的概念；“唯一”可参照上题；“偶数”、“素数”用谓词表示。于是，可令：

*E(x)*：*x*是偶数；

*S(x)*：*x*是素数；

*R(x, y)*：*x*等于*y*；

则上述命题可以符号化为：

*(∃ x) ( E ( x ) ∧ S ( x ) ∧ (∀ y) ( E ( y ) ∧ S ( y ) → R ( x, y ) )*

1. 没有既是奇数又是偶数的数；

**解：**“没有”表示不存在；“奇数”、“偶数”、“数”用谓词表示。于是，可令：

*O(x)*：*x*是奇数；

*E(x)*：*x*是偶数；

Q*(x)*：*x*是数；

则上述命题可以符号化为：

*¬ (∃ x) ( Q ( x ) ∧ O ( x ) ∧ E ( x ) )*

3.

1. 所有可证明的算术命题都是真的；
2. 存在真的但不可证明的算术命题；
3. 对于任意的三个算术命题*x, y, z* ，若*z = x ∨ y*且*z*是可证明的，则*x*是可证明的或*y*是可证明的；
4. 对于任意的三个算术命题*x, y, z* ，若*x*是真的并且*z = x ∨ y*，则*z*是真的；

4.

1. 对任意整数*x, y*和*z*，*x < z*是*x < y*且*y < z*的必要条件；

**解：**“任意”是全称的概念；“整数”需引进一个特性谓词；“<”用谓词表示；“必要条件”用逻辑联结词来表示。于是，可令：

*I(x)*：*x*是整数；

*L(x, y)*：*x < y*；

则上述命题可以符号化为：

*(∀ x) (∀ y) (∀ z) ( I ( x ) ∧ I ( y ) ∧ I ( z ) → ( L ( x, y ) ∧ L ( y, z ) → L ( x, z ) ) )*

b) 对任意整数*x*，若*x = 2*，则*3• x = 6*；反之亦然；

**解：**“任意”是全称的概念；“整数”需引进一个特性谓词；“=”用谓词表示；“*•* ”用函词表示。于是，可令：（2、3、6可以用常元表示）

*I(x)*：*x*是整数；

*E(x, y)*：*x = y*；

*f(x, y)*：*x• y*；

则上述命题可以符号化为：

*(∀ x) ( I ( x ) → ( E ( x, 2 ) → E ( f(3, x), 6 ) ) ∧ ( E ( f(3, x), 6 ) → E ( x, 2 ) ) )*

或 *(∀ x) ( I ( x ) → ( E ( x, 2 ) E ( f(3, x), 6 ) ) )*



**习题5.2**

1.

1. 除了最后一个*x*是自由出现外，其它的6次*x*的出现都是约束出现。

第一个*(∀ x)* 的辖域为下面的划线部分：

*(∀ x) ( P ( x ) → ( ∃ x ) Q ( x ) ) ∨* *( (∀ x) P ( x ) → Q ( x ) )*

第一个*( ∃ x )* 的辖域为下面的划线部分：

*(∀ x) ( P ( x ) → ( ∃ x ) Q ( x ) ) ∨* *( (∀ x) P ( x ) → Q ( x ) )*

第二个*(∀ x)* 的辖域为下面的划线部分：

*(∀ x) ( P ( x ) → ( ∃ x ) Q ( x ) ) ∨* *( (∀ x) P ( x ) → Q ( x ) )*

1. a) **T** ； b) **F** ；c) **F** ；d) **T** ；e) **T** ；f) **T** 。

以a)为例：

**解：**因为 *P ( a , a )* 为**T**，所以 *( ∃ y ) P ( a , y )* 为**T**；

因为 *P ( b , b )* 为**T**，所以 *( ∃ y ) P ( b , y )* 为**T**；

因为*( ∃ y ) P ( a , y )* 和 *( ∃ y ) P ( b , y )* 均为**T**，所以 *( ∀ x ) ( ∃ y ) P ( x , y )* 也为**T**。

3. a) **F** ； b) **T** ；c) **F**。

4. a) **T** ； b) **F** ；c) **T**。

**习题5.3**

1.

1. *(∀ x ) ( P ( x ) →* *Q ( x ) ) → ( (∀ x ) P ( x ) →* *(∀ x ) Q ( x ) )* 为永真式。

**证明**：给定 *(∀ x ) ( P ( x ) →* *Q ( x ) ) → ( (∀ x ) P ( x ) →* *(∀ x ) Q ( x ) )* 在论域*D*上的任意解释***I***，如果 *(∀ x ) P ( x ) →* *( ∀ x ) Q ( x )* 在***I*** 下为假，则

*(∀ x ) P ( x )* 在***I*** 下为真， 并且 *(∀ x ) Q ( x )* 在***I*** 下为假。

因为 *(∀ x ) Q ( x )* 在***I*** 下为假，所以存在c ∈ D使*Q ( c )* 在***I*** 下为假。

因为 *(∀ x ) P ( x )* 在***I*** 下为真，所以 *P ( c )* 在***I*** 下为真。

因此，*P ( c ) →* *Q ( c )* 在***I*** 下为假。

所以，*(∀ x ) ( P ( x ) →* *Q ( x ) )* 在***I*** 下为假。

于是，*(∀ x ) ( P ( x ) →* *Q ( x ) ) → ( (∀ x ) P ( x ) → (∀ x ) Q ( x ) )* 为永真式。

b) *( (∀ x ) P ( x ) → (∀ x )Q ( x ) ) → (∀ x ) ( P ( x ) → Q ( x ) )* 不是永真式。

**解**：取上述合式公式的解释***I*** 如下：

1. 论域D = {a, b}；
2. *P ( a )* *P ( b )* Q *( a )* Q *( b )*

\_\_\_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_\_\_

**F T F F**

则*(∀ x ) ( P ( x ) → Q ( x ) )* 在***I*** 下为假，*( (∀ x ) P ( x ) → (∀ x )Q ( x ) )* 在***I*** 下为真。

所以，*( (∀ x ) P ( x ) → (∀ x )Q ( x ) ) → (∀ x ) ( P ( x ) → Q ( x ) )* 在***I*** 下为假。

1. *( ( ∃ x ) P ( x ) →* *(∀ x ) Q ( x ) ) → (∀ x ) ( P ( x ) →* *Q ( x ) )* 为永真式。

**证明**：给定 *( ( ∃ x ) P ( x ) →* *(∀ x ) Q ( x ) ) → (∀ x ) ( P ( x ) →* *Q ( x ) )* 在论域*D*上的任意解释***I***，如果 *(∀ x ) ( P ( x ) →* *Q ( x ) )* 在***I*** 下为假，则

存在c ∈ D使 *P ( c ) →* *Q ( c )* 在***I*** 下为假。即

*P ( c )* 在***I*** 下为真 并且*Q ( c )* 在***I*** 下为假。

因为*P ( c )* 在***I*** 下为真，所以 *( ∃ x ) P ( x )* 在***I*** 下为真。

因为*Q ( c )* 在***I*** 下为假，所以 *(∀ x ) Q ( x )* 在***I*** 下为假。

所以，*( ∃ x ) P ( x ) →* *(∀ x ) Q ( x )* 在***I*** 下为假。

于是，*( ( ∃ x ) P ( x ) →* *(∀ x ) Q ( x ) ) → (∀ x ) ( P ( x ) →* *Q ( x ) )* 为永真式。

d) *(∀ x ) ( P ( x ) →* *Q ( x ) ) → ( ( ∃ x ) P ( x ) →* *(∀ x ) Q ( x ) )* 不是永真式。

**解**：取上述合式公式的解释***I*** 如下：

1. 论域D = {a, b}；
2. *P ( a )* *P ( b )* Q *( a )* Q *( b )*

\_\_\_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_\_\_

**F T F T**

则*(∀ x ) ( P ( x ) → Q ( x ) )* 在***I*** 下为真，*( ( ∃ x ) P ( x ) →* *(∀ x ) Q ( x ) )* 在***I*** 下为假。

所以，*(∀ x ) ( P ( x ) →* *Q ( x ) ) → ( ( ∃ x ) P ( x ) →* *(∀ x ) Q ( x ) )* 在***I*** 下为假。

2.

*∀∃→¬∧∨*

1. *(∀ x ) (∃ y ) ( P ( x ) ∨ Q ( y ) )*

⇔ *(∀ x ) ( P ( x ) ∨ (∃ y ) Q ( y ) )* （因为*y*在*P ( x )*中没有自由出现）

⇔ *(∀ x ) P ( x ) ∨ (∃ y ) Q ( y )* （因为*x*在 *(∃ y ) Q ( y )* 中没有自由出现）

所以，*(∀ x ) (∃ y ) ( P ( x ) ∨ Q ( y ) )* ⇔ *(∀ x ) P ( x ) ∨ (∃ y ) Q ( y )*。

1. *(∃ x ) (∃ y ) ( P ( x ) ∧ Q ( y ) )*

⇔ *(∃ x ) ( P ( x ) ∧ (∃ y ) Q ( y ) )* （因为*y*在*P ( x )*中没有自由出现）

⇔ *(∃ x ) P ( x ) ∧ (∃ y ) Q ( y )* （因为*x*在 *(∃ y ) Q ( y )* 中没有自由出现）

⇒ *(∃ x ) P ( x )*

所以，*(∃ x ) (∃ y ) ( P ( x ) ∧ Q ( y ) )* ⇒ *(∃ x ) P ( x )* 。

1. *(∀ x ) (∀ y ) ( P ( x ) ∧ Q ( y ) )*

⇔ *(∀ x ) ( P ( x ) ∧ (∀ y ) Q ( y ) )* （因为*y*在*P ( x )*中没有自由出现）

⇔ *(∀ x ) P ( x ) ∧ (∀ y ) Q ( y )* （因为*x*在 *(∀ y ) Q ( y )* 中没有自由出现）

所以，*(∀ x ) (∀ y ) ( P ( x ) ∧ Q ( y ) )* ⇔ *(∀ x ) P ( x ) ∧ (∀ y ) Q ( y )* 。

1. *(∃ x ) (∃ y ) ( P ( x ) → Q ( y ) )*

⇔ *(∃ x ) (∃ y ) ( ¬ P ( x ) ∨ Q ( y ) )*

⇔ *(∃ x ) (¬ P ( x ) ∨ (∃ y ) Q ( y ) )* （因为*y*在*¬ P ( x )*中没有自由出现）

⇔ *(∃ x ) (¬ P ( x ) ) ∨ (∃ y ) Q ( y )* （因为*x*在 *(∃ y ) Q ( y )* 中没有自由出现）

* *¬ (∀ x ) P ( x ) ∨ (∃ y ) Q ( y )*
* *(∀ x ) P ( x ) → (∃ y ) Q ( y )*

所以，*(∃ x ) (∃ y ) ( P ( x ) → Q ( y ) ) ⇔ (∀ x ) P ( x ) → (∃ y ) Q ( y )* 。

1. *(∀ x ) (∀ y ) ( P ( x ) → Q ( y ) )*

⇔ *(∀ x ) (∀ y ) ( ¬ P ( x ) ∨ Q ( y ) )*

⇔ *(∀ x ) (¬ P ( x ) ∨ (∀ y ) Q ( y ) )* （因为*y*在*¬ P ( x )*中没有自由出现）

⇔ *(∀ x ) (¬ P ( x ) ) ∨ (∀ y ) Q ( y )* （因为*x*在 *(∀ y ) Q ( y )* 中没有自由出现）

* *¬ (∃ x ) P ( x ) ∨ (∀ y ) Q ( y )*
* *(∃ x ) P ( x ) → (∀ y ) Q ( y )*

所以，*(∀ x ) (∀ y ) ( P ( x ) → Q ( y ) ) ⇔ (∃ x ) P ( x ) → (∀ y ) Q ( y )* 。

3.

**解**： *¬ ( ∃ x ) (¬ P ( x ) ∧ ¬ Q ( x ) )*

* *¬ ( ( ∃ x ) (¬ P ( x ) ) ∧ ( ∃ x ) ( ¬ Q ( x ) ) )*

\_\_\_\_

上述这一步不正确。

根据书中105页**I 16**：

*( ∃ x ) (¬ P ( x ) ∧ ¬ Q ( x ) )* ⇒ *( ∃ x ) (¬ P ( x ) ) ∧ ( ∃ x ) ( ¬ Q ( x ) )*

可知：

*¬ ( ∃ x ) (¬ P ( x ) ∧ ¬ Q ( x ) )* ⇐ *¬ ( ( ∃ x ) (¬ P ( x ) ) ∧ ( ∃ x ) ( ¬ Q ( x ) ) )*

因此，最后应该证明出：

*( ∀ x ) ( P ( x ) ∨ Q ( x ) ) ⇐ ( ∀ x ) P ( x ) ∨ ( ∀ x ) Q ( x ) )*

这就是书中的**I 15**。

**习题5.4**

1.

a) *(∃ y ) (∀ z ) ( P ( z, y ) ¬ (∃ x ) ( P ( z, x )* *∧ P ( x, z ) ) )*



* *(∃ y ) (∀ z ) ( ( P ( z, y )* *∧ ¬ (∃ x ) ( P ( z, x )* *∧ P ( x, z ) ) )*

*∨* *(¬ P ( z, y )* *∧ ¬ ¬ (∃ x ) ( P ( z, x )* *∧ P ( x, z ) ) ) )* （化去 ）



* *(∃ y ) (∀ z ) ( ( P ( z, y )* *∧ (∀ x ) (¬ P ( z, x )* *∨* *¬ P ( x, z ) ) )*

*∨* *(¬ P ( z, y )* *∧ (∃ x ) ( P ( z, x )* *∧ P ( x, z ) ) ) )* （¬ 内移）

* *(∃ y ) (∀ z ) ( (∀ x ) ( P ( z, y )* *∧ (¬ P ( z, x )* *∨* *¬ P ( x, z ) ) )*

*∨* *(∃ x ) (¬ P ( z, y )* *∧ ( P ( z, x )* *∧ P ( x, z ) ) ) )* （∀、∃前移）

* *(∃ y ) (∀ z ) ( (∀ x ) ( P ( z, y )* *∧ (¬ P ( z, x )* *∨* *¬ P ( x, z ) ) )*

*∨* *(∃ u ) (¬ P ( z, y )* *∧ ( P ( z, u )* *∧ P ( u, z ) ) ) )* （换名）

* *(∃ y ) (∀ z ) (∀ x )* *(∃ u ) ( ( P ( z, y )* *∧ (¬ P ( z, x )* *∨* *¬ P ( x, z ) ) )*

*∨* *(¬ P ( z, y )* *∧ ( P ( z, u )* *∧ P ( u, z ) ) ) )* （∀、∃前移）

上述公式即为原公式的前束范式。

令*f*为二元函词，则原公式的无∃前束范式为：

*(∀ z ) (∀ x ) ( ( P ( z, a )* *∧ (¬ P ( z, x )* *∨* *¬ P ( x, z ) ) ) ∨*

*(¬ P ( z, a )* *∧ ( P ( z, f ( z, x ) )* *∧ P ( f ( z, x ), z ) ) ) )*

1. *¬ (∃ x ) (∃ y ) (∀ z ) ( ( P ( x, y ) → P ( y, z )* *∧ P ( z, z ) ) ∧*

*( P ( x, y ) ∧ Q ( x, y ) → Q ( x, z )* *∧ Q ( z, z ) ) )*

* *¬ (∃ x ) (∃ y ) (∀ z ) ( (¬ P ( x, y ) ∨ ( P ( y, z )* *∧ P ( z, z ) ) ) ∧*

*(¬ ( P ( x, y ) ∧ Q ( x, y ) ) ∨ (Q ( x, z )* *∧ Q ( z, z ) ) ) )* （化去→）

* *(∀ x ) (∀ y ) (∃ z ) ( ( P ( x, y ) ∧ (¬ P ( y, z ) ∨* *¬ P ( z, z ) ) ) ∨*

*( ( P ( x, y ) ∧ Q ( x, y ) ) ∧ (¬ Q ( x, z )* *∨ ¬ Q ( z, z ) ) ) )* （¬ 内移）

上述公式即为原公式的前束范式。

令*g*为二元函词，则原公式的无∃前束范式为：

*(∀ x ) (∀ y ) ( ( P ( x, y ) ∧ (¬ P ( y, g ( x, y ) ) ∨* *¬ P ( g ( x, y ), g ( x, y ) ) ) ) ∨*

*( ( P ( x, y ) ∧ Q ( x, y ) ) ∧ (¬ Q ( x, g ( x, y ) )* *∨ ¬ Q ( g ( x, y ), g ( x, y ) ) ) ) )*

2. 令原公式为*X*，则

*¬ X*

* *(∀ x ) (∀ y ) (¬ P ( x, y ) ∨ P ( y, x ) )* *∧ (∀ x ) (∀ y ) (∀ z ) (¬ P ( x, y ) ∨ ¬ P ( y, z ) ∨ P ( x, z ) ) ∧ (∀ x ) (∃ y ) P ( x, y ) ∧ (∃ x ) (¬ P ( x, x ) )* （¬ 内移）
* *(∀ x ) (∀ y ) (∀ z ) ( (¬ P ( x, y ) ∨ P ( y, x ) )* *∧ (¬ P ( x, y ) ∨ ¬ P ( y, z ) ∨ P ( x, z ) ) ) ∧ (∀ x ) (∃ y ) P ( x, y ) ∧ (∃ x ) (¬ P ( x, x ) )* （∀前移）
* *(∀ x ) (∀ y ) (∀ z ) ( (¬ P ( x, y ) ∨ P ( y, x ) )* *∧ (¬ P ( x, y ) ∨ ¬ P ( y, z ) ∨ P ( x, z ) ) ) ∧ (∀ x ) (∃ u ) P ( x, u ) ∧ (∃ v ) (¬ P ( v, v ) )* （换名）
* *(∃ v ) ( (∀ x ) (∀ y ) (∀ z ) ( (¬ P ( x, y ) ∨ P ( y, x ) )* *∧ (¬ P ( x, y ) ∨ ¬ P ( y, z ) ∨ P ( x, z ) ) ) ∧ (∀ x ) (∃ u ) P ( x, u ) ∧ ¬ P ( v, v ) )* （∃前移）
* *(∃ v ) (∀ x ) ( (∀ y ) (∀ z ) ( (¬ P ( x, y ) ∨ P ( y, x ) )* *∧ (¬ P ( x, y ) ∨ ¬ P ( y, z ) ∨ P ( x, z ) ) ) ∧ (∃ u ) P ( x, u ) ∧ ¬ P ( v, v ) )* （∀前移）
* *(∃ v ) (∀ x ) (∃ u ) ( (∀ y ) (∀ z ) ( (¬ P ( x, y ) ∨ P ( y, x ) )* *∧ (¬ P ( x, y ) ∨ ¬ P ( y, z ) ∨ P ( x, z ) ) ) ∧ P ( x, u ) ∧ ¬ P ( v, v ) )* （∃前移）
* *(∃ v ) (∀ x ) (∃ u ) (∀ y ) (∀ z ) ( (¬ P ( x, y ) ∨ P ( y, x ) )* *∧ (¬ P ( x, y ) ∨ ¬ P ( y, z ) ∨ P ( x, z ) ) ∧ P ( x, u ) ∧ ¬ P ( v, v ) )* （∀前移）

上述公式即为原公式的前束范式。

令*f*为一元函词，则原公式的无∃前束范式为：

*(∀ x ) (∀ y ) (∀ z ) ( (¬ P ( x, y ) ∨ P ( y, x ) )* *∧ (¬ P ( x, y ) ∨ ¬ P ( y, z ) ∨ P ( x, z ) ) ∧*

*P ( x, f ( x ) ) ∧ ¬ P ( a, a ) )*

所以，*H = { a, f (a), f ( f (a) ), … }*

若将*¬ X*的无∃前束范式看成*(∀ x ) (∀ y ) (∀ z ) B( x, y, z )*，则*B( a, f(a), a )*为永假式。根据艾尔布朗定理可知上述原公式的无∃前束范式为永假式，即*¬ X*为永假式。所以，*X*为永真式。

*B( a, f(a), a )* 为

*(¬ P ( a, f ( a ) ) ∨ P ( f ( a ), a ) )* *∧ (¬ P ( a, f ( a ) ) ∨ ¬ P ( f ( a ), a ) ∨ P ( a, a ) ) ∧*

*P ( a, f ( a ) ) ∧ ¬ P ( a, a )*

* *P ( f ( a ), a ) ∧ ( ¬ P ( f ( a ), a ) ∨ P ( a, a ) ) ∧ P ( a, f ( a ) ) ∧ ¬ P ( a, a )*
* *P ( a, a ) ∧ P ( a, f ( a ) ) ∧ ¬ P ( a, a )*
* *F*

**第六章 自然推理系统**

**习题6.1**

1. 不用导出规则证明

1. ⏐— (A→ (B→C)) (B→(A→C))



**证明：**

1. A→ (B→C), B, A ⏐— A (∈)

2. A→ (B→C), B, A ⏐— A→ (B→C) (∈)

3. A→ (B→C), B, A ⏐— B→C (→-) (1, 2)

4. A→ (B→C), B, A ⏐— B (∈)

5. A→ (B→C), B, A ⏐— C (→-) (3, 4)

6. A→ (B→C), B ⏐— A→C (→+) (5)

7. A→ (B→C) ⏐— B→ (A→C) (→+) (6)

8. B→ (A→C) ⏐— A→ (B→C) 同理可证

9. ⏐— (A→ (B→C)) (B→(A→C)) ( +) (7, 8)



1. (A∨ B) ∨ C ⏐—⏐ A ∨ (B∨C)

**证明：**先证 (A∨ B) ∨ C⏐— A ∨ (B∨C)

1. A ⏐— A (∈)

2. A ⏐— A ∨ (B∨C) (∨+) (1)

3. B ⏐— B (∈)

4. B ⏐— B∨C (∨+) (3)

5. B ⏐— A ∨ (B∨C) (∨+) (4)

6. A∨ B ⏐— A ∨ (B∨C) (∨-) (2, 5)

7. C ⏐— C (∈)

8. C ⏐— B∨C (∨+) (7)

9. C ⏐— A ∨ (B∨C) (∨+) (8)

10. (A∨ B) ∨ C ⏐— A ∨ (B∨C) (∨-) (6, 9)

A ∨ (B∨C) ⏐— (A∨ B) ∨ C 证明类似

所以，(A∨ B) ∨ C ⏐—⏐ A ∨ (B∨C)

1. ⏐— (A→B) (¬B→¬A)



**证明：**

1. A→B, ¬B, A ⏐— A (∈)

2. A→B, ¬B, A ⏐— A→B (∈)

3. A→B, ¬B, A ⏐— B (→-) (1, 2)

4. A→B, ¬B, A ⏐— ¬B (∈)

5. A→B, ¬B ⏐— ¬A (¬+) (3, 4)

6. A→B ⏐— ¬B→¬A (→+) (5)

7. ¬B →¬A, A, ¬B ⏐— ¬B (∈)

8. ¬B →¬A, A, ¬B ⏐— ¬B →¬A (∈)

9. ¬B →¬A, A, ¬B ⏐— ¬A (→-) (7, 8)

10. ¬B →¬A, A, ¬B ⏐— A (∈)

11. ¬B →¬A, A ⏐— ¬¬B (¬+) (9, 10)

12. ¬B →¬A, A ⏐— B (¬¬-) (11)

13. ¬B →¬A ⏐— A→B (→+) (12)

14. ⏐— (A→B) (¬B→¬A) ( +) (6, 13)



1. A ∧ ¬A ⏐—⏐ F

**证明：**先证A ∧ ¬A ⏐— F

1. A ∧ ¬A ⏐— A ∧ ¬A (∈)

2. A ∧ ¬A ⏐— A (∧-) (1)

3. A ∧ ¬A ⏐— ¬A (∧-) (1)

4. A ∧ ¬A ⏐— F (¬-) (2, 3)

再证F ⏐— A ∧ ¬A

1. F ⏐— F (∈)

2. F ⏐— ¬F (F规则)

3. F ⏐— A ∧ ¬A (¬-) (1, 2)

所以，A ∧ ¬A ⏐—⏐ F 。

1. A→ (B→C) ⏐—⏐ A∧B→C

**证明：**先证A→ (B→C) ⏐— A∧B→C

1. A→ (B→C), A∧B ⏐— A∧B (∈)

2. A→ (B→C), A∧B ⏐— A (∧-) (1)

3. A→ (B→C), A∧B ⏐— B (∧-) (1)

4. A→ (B→C), A∧B ⏐— A→ (B→C) (∈)

5. A→ (B→C), A∧B ⏐— B→C (→-) (2, 4)

6. A→ (B→C), A∧B ⏐— C (→-) (3, 5)

7. A→ (B→C) ⏐— A∧B→C (→+) (6)

再证A∧B→C ⏐— A→ (B→C)

1. A∧B→C, A, B ⏐— A (∈)

2. A∧B→C, A, B ⏐— B (∈)

3. A∧B→C, A, B ⏐— A∧B (∧+) (1, 2)

4. A∧B→C, A, B ⏐— A∧B→C (∈)

5. A∧B→C, A, B ⏐— C (→-) (3, 4)

6. A∧B→C, A ⏐— B→C (→+) (5)

7. A∧B→C ⏐— A→ (B→C) (→+) (6)

所以，A→ (B→C) ⏐—⏐ A∧B→C 。

2.

1. (∀x) A(x) ⏐— (∃x) A(x)

**证明：**

1. (∀x) A(x) ⏐— (∀x) A(x) (∈)

2. (∀x) A(x) ⏐— A(x) (∀-) (1)

3. (∀x) A(x) ⏐— (∃x) A(x) (∃+) (2)

1. (∃x) (∀y) A(x, y) ⏐— (∀y) (∃x) A(x, y)

**证明：**

1. (∀y) A(x, y) ⏐— (∀y) A(x, y) (∈)

2. (∀y) A(x, y) ⏐— A(x, y) (∀-) (1)

3. (∀y) A(x, y) ⏐— (∃x) A(x, y) (∃+) (2)

4. (∀y) A(x, y) ⏐— (∀y) (∃x) A(x, y) (∀+) (3)

5. (∃x) (∀y) A(x, y) ⏐— (∀y) (∃x) A(x, y) (左∃+) (4)

1. (∀x) A(x) ∨ (∀x) B(x) ⏐— (∀x) (A(x) ∨ B(x))

**证明：**

1. (∀x) A(x) ⏐— (∀x) A(x) (∈)

2. (∀x) A(x) ⏐— A(x) (∀-) (1)

3. (∀x) A(x) ⏐— A(x) ∨ B(x) (∨+) (2)

4. (∀x) A(x) ⏐— (∀x) (A(x) ∨ B(x)) (∀+) (3)

5. (∀x) B(x) ⏐— (∀x) (A(x) ∨ B(x)) 同理可证

6. (∀x) A(x) ∨ (∀x) B(x) ⏐— (∀x) (A(x) ∨ B(x)) (∨-) (4, 5)

1. (∀x) (A→ B(x)) ⏐—⏐ A→(∀x) B(x)，其中x不是A中的自由变元。

**证明：**先证 (∀x) (A→ B(x)) ⏐— A→(∀x) B(x)

1. (∀x) (A→ B(x)), A ⏐— A (∈)

2. (∀x) (A→ B(x)), A ⏐— (∀x) (A→ B(x)) (∈)

3. (∀x) (A→ B(x)), A ⏐— A→ B(x) (∀-) (2)

4. (∀x) (A→ B(x)), A ⏐— B(x) (→-) (1, 3)

5. (∀x) (A→ B(x)), A ⏐— (∀x)B(x) (∀+) (4)

6. (∀x) (A→ B(x)) ⏐— A→ (∀x)B(x) (→+) (5)

再证A→(∀x)B(x) ⏐— (∀x) (A→ B(x))

1. A→(∀x)B(x), A ⏐— A (∈)

2. A→(∀x)B(x), A ⏐— A→(∀x)B(x) (∈)

3. A→(∀x)B(x), A ⏐— (∀x)B(x) (→-) (1, 2)

4. A→(∀x)B(x), A ⏐— B(x) (∀-) (3)

5. A→(∀x)B(x) ⏐— A→B(x) (→+) (4)

6. A→(∀x)B(x) ⏐— (∀x) (A→ B(x)) (∀+) (5)

所以，(∀x) (A→ B(x)) ⏐—⏐ A→(∀x) B(x) 。

1. (∃x) (A(x)∨B(x)) ⏐—⏐ (∃x)A(x)∨ (∃x)B(x)

**证明：**先证 (∃x) (A(x)∨B(x)) ⏐— (∃x)A(x)∨ (∃x)B(x)

1. A(x) ⏐— A(x) (∈)

2. A(x) ⏐— (∃x) A(x) (∃+) (1)

3. A(x) ⏐— (∃x) A(x) ∨ (∃x)B(x) (∨+) (2)

4. B(x) ⏐— (∃x) A(x) ∨ (∃x)B(x) 同理可证

5. A(x)∨B(x) ⏐— (∃x) A(x) ∨ (∃x)B(x) (∨-) (4)

6. (∃x) (A(x)∨B(x)) ⏐— (∃x) A(x) ∨ (∃x)B(x) (左∃+) (5)

再证 (∃x)A(x)∨ (∃x)B(x) ⏐— (∃x) (A(x)∨B(x))

1. A(x) ⏐— A(x) (∈)

2. A(x) ⏐— A(x)∨B(x) (∨+) (1)

3. A(x) ⏐— (∃x) (A(x)∨B(x)) (∃+) (2)

4. (∃x) A(x) ⏐— (∃x) (A(x)∨B(x)) (左∃+) (3)

5. (∃x) B(x) ⏐— (∃x) (A(x)∨B(x)) 同理可证

6. (∃x) A(x) ∨ (∃x)B(x) ⏐— (∃x) (A(x)∨B(x)) (∨-) (4, 5)

所以，(∃x) (A(x)∨B(x)) ⏐—⏐ (∃x)A(x)∨ (∃x)B(x) 。

1. (∀x) (A(x)∧B(x)) ⏐—⏐ (∀x)A(x) ∧ (∀x)B(x)

**证明：**先证 (∀x) (A(x)∧B(x)) ⏐— (∀x)A(x) ∧ (∀x)B(x)

1. (∀x) (A(x)∧B(x)) ⏐— (∀x) (A(x)∧B(x)) (∈)

2. (∀x) (A(x)∧B(x)) ⏐— A(x)∧B(x) (∀-) (1)

3. (∀x) (A(x)∧B(x)) ⏐— A(x) (∧-) (2)

4. (∀x) (A(x)∧B(x)) ⏐— (∀x) A(x) (∀+) (3)

5. (∀x) (A(x)∧B(x)) ⏐— B(x) (∧-) (2)

6. (∀x) (A(x)∧B(x)) ⏐— (∀x) B(x) (∀+) (5)

7. (∀x) (A(x)∧B(x)) ⏐— (∀x)A(x) ∧ (∀x) B(x) (∧+) (4, 6)

再证 (∀x)A(x) ∧ (∀x)B(x) ⏐— (∀x) (A(x)∧B(x))

1. (∀x)A(x) ∧ (∀x)B(x) ⏐— (∀x)A(x) ∧ (∀x)B(x) (∈)

2. (∀x)A(x) ∧ (∀x)B(x) ⏐— (∀x)A(x) (∧-) (1)

3. (∀x)A(x) ∧ (∀x)B(x) ⏐— A(x) (∀-) (2)

4. (∀x)A(x) ∧ (∀x)B(x) ⏐— (∀x)B(x) (∧-) (1)

5. (∀x)A(x) ∧ (∀x)B(x) ⏐— B(x) (∀-) (4)

6. (∀x)A(x) ∧ (∀x)B(x) ⏐— A(x)∧B(x) (∧+) (3, 5)

7. (∀x)A(x) ∧ (∀x)B(x) ⏐— (∀x) (A(x)∧B(x)) (∀+) (6)

所以，(∀x) (A(x)∧B(x)) ⏐—⏐ (∀x)A(x) ∧ (∀x)B(x) 。

1. (∃x) A(x) → (∀x) B(x) ⏐— (∀x) (A(x) → B(x))

**证明：**

1. (∃x) A(x) → (∀x) B(x), A(x) ⏐— A(x) (∈)

2. (∃x) A(x) → (∀x) B(x), A(x) ⏐— (∃x) A(x) (∃+) (1)

3. (∃x) A(x) → (∀x) B(x), A(x) ⏐— (∃x) A(x) → (∀x) B(x) (∈)

4. (∃x) A(x) → (∀x) B(x), A(x) ⏐— (∀x) B(x) (→-) (2, 3)

5. (∃x) A(x) → (∀x) B(x), A(x) ⏐— B(x) (∀-) (4)

6. (∃x) A(x) → (∀x) B(x) ⏐— A(x) →B(x) (→+) (5)

7. (∃x) A(x) → (∀x) B(x) ⏐— (∀x) (A(x) →B(x)) (∀+) (6)

1. (∀x) (A(x) → B(x)) ⏐— (∀x) A(x) → (∀x) B(x)

**证明：**

1. (∀x) (A(x) → B(x)), (∀x) A(x) ⏐— (∀x) A(x) (∈)

2. (∀x) (A(x) → B(x)), (∀x) A(x) ⏐— A(x) (∀-) (1)

3. (∀x) (A(x) → B(x)), (∀x) A(x) ⏐— (∀x) (A(x) → B(x)) (∈)

4. (∀x) (A(x) → B(x)), (∀x) A(x) ⏐— A(x) → B(x) (∀-) (3)

5. (∀x) (A(x) → B(x)), (∀x) A(x) ⏐— B(x) (→-) (2, 4)

6. (∀x) (A(x) → B(x)), (∀x) A(x) ⏐— (∀x) B(x) (∀+) (5)

7. (∀x) (A(x) → B(x)) ⏐— (∀x) A(x) → (∀x) B(x) (→+) (6)

3.

**解：**令R(x, y)为x和y之间具有关系R，则

“对称”可符号化为：(∀x) (∀y) (R(x, y) → R(y, x))；

“传递”可符号化为：(∀x) (∀y) (∀z) (R(x, y) ∧ R(y, z)→ R(x, z))；

“定义域是全域”可符号化为：(∀x) (∃y) R(x, y)；

“自反”可符号化为：(∀x) R(x, x)。

因此，定理可描述为：

(∀x) (∀y) (R(x, y) → R(y, x)), (∀x) (∀y) (∀z) (R(x, y) ∧ R(y, z)→ R(x, z)), (∀x) (∃y) R(x, y) ⏐— (∀x) R(x, x)

令 X = (∀x) (∀y) (R(x, y) → R(y, x))；

Y = (∀x) (∀y) (∀z) (R(x, y) ∧ R(y, z)→ R(x, z))；

Z = (∀x) (∃y) R(x, y)。

则

1. X, Y, Z ⏐— (∀x) (∃y) R(x, y) (∈)

2. X, Y, Z ⏐— (∃y) R(x, y) (∀-) (1)

3. X, Y, Z, R(x, a) ⏐— R(x, a) (∈)

4. X, Y, Z, R(x, a) ⏐— (∀x) (∀y) (R(x, y) → R(y, x)) (∈)

5. X, Y, Z, R(x, a) ⏐— (∀y) (R(x, y) → R(y, x)) (∀-) (4)

6. X, Y, Z, R(x, a) ⏐— (R(x, a) → R(a, x)) (∀-) (5)

7. X, Y, Z, R(x, a) ⏐— R(a, x)) (→-) (6)

8. X, Y, Z, R(x, a) ⏐— (∀x) (∀y) (∀z) (R(x, y) ∧ R(y, z)→ R(x, z)) (∈)

9. X, Y, Z, R(x, a) ⏐— (∀y) (∀z) (R(x, y) ∧ R(y, z)→ R(x, z)) (∀-) (8)

10. X, Y, Z, R(x, a) ⏐— (∀z) (R(x, a) ∧ R(a, z)→ R(x, z)) (∀-) (9)

11. X, Y, Z, R(x, a) ⏐— (R(x, a) ∧ R(a, x)→ R(x, x)) (∀-) (10)

12. X, Y, Z, R(x, a) ⏐— (R(x, a) ∧ R(a, x) (∧+) (3, 7)

13. X, Y, Z, R(x, a) ⏐— R(x, x)) (→-) (11,12)

14. X, Y, Z ⏐— R(x, x)) (∃-) (2, 13)

15. X, Y, Z ⏐— (∀x)R(x, x) (∀+) (14)

**习题6.2**

1.

1. ⏐— ¬ (A∧B) ¬A∨¬B



**证明：**

1. ¬ (A∧B), A, B ⏐— A (∈)

2. ¬ (A∧B), A, B ⏐— B (∈)

3. ¬ (A∧B), A, B ⏐— A∧B (∧+) (1, 2)

4. ¬ (A∧B), A, B ⏐— ¬ (A∧B) (∈)

5. ¬ (A∧B), A ⏐— ¬ B (¬+) (4)

6. ¬ (A∧B), A ⏐— ¬A∨¬ B (∨+) (5)

7. ¬ (A∧B), ¬A ⏐— ¬ A (∈)

8. ¬ (A∧B), ¬A ⏐— ¬A∨¬ B (∨+) (7)

9. ¬ (A∧B) ⏐— ¬A∨¬ B (∈-) (6, 8)

10. ¬A, A∧B ⏐— ¬ A (∈)

11. ¬A, A∧B ⏐— A∧B (∈)

12. ¬A, A∧B ⏐— A (∧-) (11)

13. ¬A, A∧B ⏐— F (¬-) (10, 12)

14. ¬B, A∧B ⏐— ¬ B (∈)

15. ¬B, A∧B ⏐— A∧B (∈)

16. ¬B, A∧B ⏐— B (∧-) (15)

17. ¬B, A∧B ⏐— F (¬-) (14, 16)

18. ¬A∨¬ B, A∧B ⏐— F (∨-) (13, 17)

19. ¬A∨¬ B, A∧B ⏐— ¬ F (F规则)

20. ¬A∨¬ B ⏐— ¬ (A∧B) (¬+) (18, 19)

21. ⏐— ¬ (A∧B) ¬A∨¬B ( +) (9, 20)



f) ⏐— (A→B) ¬A∨B



**证明：**

1. A→B, A, ¬B ⏐— A (∈)

2. A→B, A, ¬B ⏐— A→B (∈)

3. A→B, A, ¬B ⏐— B (→-) (1, 2)

4. A→B, A, ¬B ⏐— ¬B (∈)

5. A→B, A ⏐— ¬¬B (¬+) (4)

6. A→B, A ⏐— B (¬¬-) (5)

7. A→B, A ⏐— ¬A∨B (∨+) (6)

8. A→B, ¬A ⏐— ¬A (∈)

9. A→B, ¬A ⏐— ¬A∨B (∨+) (8)

10. A→B ⏐— ¬A∨B (∈-) (7, 9)

11. ¬A, A ⏐— A (∈)

12. ¬A, A ⏐— ¬A (∈)

13. ¬A, A ⏐— B (¬-) (11, 12)

14. ¬A ⏐— A→B (→+) (13)

15. B, A ⏐— B (∈)

16. B ⏐— A→B (→+) (15)

17. ¬A∨B ⏐— A→B (∨-) (14, 16)

18. ⏐— (A→B) ¬A∨B ( +) (10, 17)



g) ¬ (A→B)⏐— A

**证明：**

1. ¬ (A→B), ¬A, A ⏐— A (∈)

2. ¬ (A→B), ¬A, A ⏐— ¬A (∈)

3. ¬ (A→B), ¬A, A ⏐— B (¬-) (1, 2)

4. ¬ (A→B), ¬A ⏐— A→B (→+) (3)

5. ¬ (A→B), ¬A ⏐— ¬ (A→B) (∈)

6. ¬ (A→B) ⏐— ¬¬A (¬+) (4, 5)

7. ¬ (A→B) ⏐— A (¬¬-) (6)

a) ⏐— (∃x) (C→A(x)) (C→(∃x)A(x))



**证明：**

1. C→A(x), C ⏐— C (∈)

2. C→A(x), C ⏐— C→A(x) (∈)

3. C→A(x), C ⏐— A(x) (→-) (1, 2)

4. C→A(x), C ⏐— (∃x)A(x) (∃+) (3)

5. (∃x) (C→A(x)), C ⏐— (∃x)A(x) (左∃+) (4)

6. (∃x) (C→A(x)) ⏐— C→ (∃x)A(x) (→+) (5)

1. ¬ (∃x) (C→A(x)) ⏐— (∀x) (¬ (C→A(x))) (可证¬(∃x)A(x)) ⏐— (∀x) (¬A(x)) )

8. ⏐— ¬(∃x) (C→A(x)) → (∀x) (¬ (C→A(x))) (→+) (7)

9. C→(∃x)A(x), ¬ (∃x) (C→A(x)) ⏐— ¬ (∃x) (C→A(x)) (∈)

10. C→(∃x)A(x), ¬ (∃x) (C→A(x)) ⏐— ¬(∃x) (C→A(x)) → (∀x) (¬ (C→A(x)))

(∈+) (8)

11. C→(∃x)A(x), ¬ (∃x) (C→A(x)) ⏐— (∀x) (¬ (C→A(x))) (→-) (9, 10)

12. C→(∃x)A(x), ¬ (∃x) (C→A(x)) ⏐— ¬ (C→A(x)) (∀-) (11)

1. ¬ (C→A(x))⏐— C, ¬A(x)) (可证¬(A→B) ⏐— A, ¬B)
2. ⏐— ¬ (C→A(x)) → C (→+) (13)

15. C→(∃x)A(x), ¬ (∃x) (C→A(x)) ⏐— ¬ (C→A(x)) → C (∈+) (14)

16. C→(∃x)A(x), ¬ (∃x) (C→A(x)) ⏐— C (→-) (12, 15)

17. C→(∃x)A(x), ¬ (∃x) (C→A(x)) ⏐— C→(∃x)A(x) (∈)

18. C→(∃x)A(x), ¬ (∃x) (C→A(x)) ⏐— (∃x)A(x) (→-) (16, 17)

17. ⏐— ¬ (C→A(x)) → ¬A(x) (→+) (13)

18. C→(∃x)A(x), ¬ (∃x) (C→A(x)) ⏐— ¬(C→A(x))→¬A(x) (∈+) (17)

19. C→(∃x)A(x), ¬ (∃x) (C→A(x)) ⏐— ¬A(x) (→-) (12, 18)

20. C→(∃x)A(x), ¬ (∃x) (C→A(x)) ⏐— (∀x)(¬A(x)) (∀+) (19)

21. (∀x)(¬A(x)) ⏐— ¬ (∃x) A(x) (易证)

22. ⏐— (∀x)(¬A(x)) → ¬ (∃x) A(x) (→+) (21)

23. C→(∃x)A(x), ¬ (∃x) (C→A(x)) ⏐— (∀x)(¬A(x)) → ¬ (∃x) A(x)

(∈+) (22)

24. C→(∃x)A(x), ¬ (∃x) (C→A(x)) ⏐— ¬ (∃x) A(x) (→-) (20, 23)

25. C→(∃x)A(x) ⏐— ¬ ¬ (∃x) (C→A(x)) (¬+) (18, 24)

26. C→(∃x)A(x) ⏐— (∃x) (C→A(x)) (¬¬-) (25)

27. ⏐— (∃x) (C→A(x)) (C→(∃x)A(x)) ( +) (6, 26)



e) ¬(∀x)A(x) ⏐—⏐ (∃x) (¬A(x))

**证明：**⏐— )

1. ¬(∀x)A(x), ¬(∃x) (¬A(x)), ¬A(x) ⏐— ¬A(x) (∈)

2. ¬(∀x)A(x), ¬(∃x) (¬A(x)), ¬A(x) ⏐— (∃x)¬A(x) (∃+) (1)

3. ¬(∀x)A(x), ¬(∃x) (¬A(x)) , ¬A(x) ⏐— ¬(∃x) (¬A(x)) (∈)

4. ¬(∀x)A(x), ¬(∃x) (¬A(x)) ⏐— ¬¬A(x) (¬+) (3)

5. ¬(∀x)A(x), ¬(∃x) (¬A(x)) ⏐— A(x) (¬¬-) (4)

6. ¬(∀x)A(x), ¬(∃x) (¬A(x)) ⏐— (∀x)A(x) (∀+) (5)

7. ¬(∀x)A(x), ¬(∃x) (¬A(x)) ⏐— ¬(∀x)A(x) (∈)

8. ¬(∀x)A(x) ⏐— ¬¬(∃x) (¬A(x)) (¬+) (6, 7)

9. ¬(∀x)A(x) ⏐— (∃x) (¬A(x)) (¬¬-) (8)

—⏐ ) 1. (∃x) (¬A(x)), (∀x)A(x) ⏐— (∃x) (¬A(x)) (∈)

2. (∃x) (¬A(x)), (∀x)A(x), ¬A(a) ⏐— ¬A(a) (∈)

3. (∃x) (¬A(x)), (∀x)A(x), ¬A(a) ⏐— (∀x)A(x) (∈)

4. (∃x) (¬A(x)), (∀x)A(x), ¬A(a) ⏐— A(a) (∀-) (3)

5. (∃x) (¬A(x)), (∀x)A(x), ¬A(a) ⏐— F (¬-) (2, 4)

6. (∃x) (¬A(x)), (∀x)A(x) ⏐— F (∃-) (1, 5)

7. (∃x) (¬A(x)), (∀x)A(x) ⏐— ¬F (F规则)

8. (∃x) (¬A(x)) ⏐— ¬(∀x)A(x) (¬+) (6, 7)

所以，¬(∀x)A(x) ⏐—⏐ (∃x) (¬A(x)) 。

f) (∃x) (A(x)∧B(x)) ⏐— (∃x) A(x) ∧ (∃x) B(x)

**证明：**

1. A(x)∧B(x) ⏐— A(x)∧B(x) (∈)

2. A(x)∧B(x) ⏐— A(x) (∧-) (1)

3. A(x)∧B(x) ⏐— (∃x) A(x) (∃+) (2)

4. A(x)∧B(x) ⏐— B(x) (∧-) (1)

5. A(x)∧B(x) ⏐— (∃x) B(x) (∃+) (4)

6. A(x)∧B(x) ⏐— (∃x) A(x) ∧ (∃x) B(x) (∧+) (3, 5)

7. (∃x) (A(x)∧B(x)) ⏐— (∃x) A(x) ∧ (∃x) B(x) (左∃+) (6)

**第七章 图 论**

**习题7.1**

1.

1. 非简单图；（有自圈）
2. 非简单图；（有自圈）
3. 简单图。

3.

**证明：**因为n个顶点的有向简单图中，每两个不同顶点之间最多有两条边，因此其边数最多为：。

4. 利用定理7.1.3

**证明：**因为任何图均有偶数个奇结点，而3度正则图的所有结点度数均为3，即均为偶结点。所以，3度正则图必有偶数个奇结点。

5. 利用定理7.1.3

6.

证明：假设六个人分别为：a, b, c, d, e, f。则分两种情况讨论。

① 若a认识的人大于等于3个，即b, c, d, e, f中至少有3个与a认识。不妨设c, d, e与a认识，则c, d, e必定互相不认识。（否则，c, d, e中互相认识的两人与a就构成三个人互相都认识。产生矛盾。）

② 若a认识的人小于3个，即b, c, d, e, f中至少有3个与a不认识。不妨设b, c, d与a均不认识。则因为没有3个人彼此都认识，所以b, c, d中必有两个人互相不认识。假设c, d互相不认识，则a, c, d三个人彼此都不认识。

1. a ) 图中有一个与两个度数为3的结点邻接的结点，其度数也为3。

而b ) 图中没有任何一个度数为3的结点与两个度数为3的结点邻接。

所以，a ) 与b ) 不同构。

9. b ) 图的中心结点其入度为0，而a ) 图中没有入度为0 的结点。所以两图不同构。

10. n阶简单无向图的结点度数不可能超过n-1，即取值范围为：{0, 1, 2, … , n-1}。

证明n（n>1）阶图中必有两个结点度数相等，抽屉原则应该可以使用，但n个结点，n种度数可能，抽屉原则似乎用不上。但我们发现，若图中有孤立点，则所有结点的度数只可能从0到n-2中取值，即只有n-1种可能性。于是分两种情况：

① 若G中无孤立点（度数为0的结点），则G中n个结点的度数只能从1到n-1中取值。n个结点，n-1种可能的度数取值，由抽屉原则，G中必有两个结点的度数相等。

② 若G中有孤立点，则G中n个结点的度数只能从0到n-2中取值。n个结点，n-1种可能的度数取值，由抽屉原则，G中必有两个结点的度数相等。

11. 根据定理7.1.1可知无向图中所有结点的度数和是边数的两倍。所以，

，即。

**习题7.2**

2. 显然G[V′]重任意两点之间必定互有有向边，并且无自圈、无平行边。

4.

* 1. 自反的；
  2. 反对称的、传递的；
  3. 自反的、对称的、传递的；
  4. 自反的、传递的；
  5. 无；
  6. 对称的；
  7. 自反的、反对称的、传递的；
  8. 对称的；
  9. 对称的；
  10. 反对称的；
  11. 自反的、反对称的；
  12. 反对称的、传递的。

4.

1. A上共有个不相同的自反关系；
2. A上共有个不相同的反自反关系；
3. A上共有个不相同的对称关系；
4. A上共有个不相同的反对称关系；
5. A上共有个不相同的既是对称的又是反对称的关系；

**习题2.3**

1. 最多能有n(A) 个元素为1。

2.

证明：

i) R ∪ R-1为A上包含R的最小对称关系

① R ⊆ R ∪ R-1。所以，R∪R-1包含R。

② 因为对于任意<a, b> ∈ R ∪ R-1，有<a, b> ∈ R或<a, b> ∈ R-1。

若<a, b> ∈ R，则<b, a> ∈ R-1；若<a, b> ∈ R-1，则<b, a> ∈ R。

因此，<b, a> ∈ R ∪ R-1。所以，R∪R-1为A上的对称关系。

③ 设R′为任意的A上包含R的对称关系，则

对于任意<a, b> ∈ R ∪ R-1，有<a, b> ∈ R或<a, b> ∈ R-1。

若<a, b> ∈ R，由于R′包含R，所以<a, b> ∈ R′；

若<a, b> ∈ R-1，则<b, a> ∈ R，由于R′包含R，所以<b, a> ∈ R′，而R′对称，所以<a, b> ∈ R′。

因此，总有<a, b> ∈ R′。所以，R ∪ R-1 ⊆ R′。

由①②③可知，R ∪ R-1为A上包含R的最小对称关系。

ii) R ∩ R-1为A上包含在R中的最大对称关系

① R ∩ R-1 ⊆ R。所以，R ∩ R-1包含在R中。

② 因为对于任意<a, b> ∈ R ∩ R-1，有<a, b> ∈ R且<a, b> ∈ R-1。

<a, b> ∈ R，所以<b, a> ∈ R-1；<a, b> ∈ R-1，所以<b, a> ∈ R。

因此，<b, a> ∈ R ∩ R-1。所以，R ∩ R-1为A上的对称关系。

③ 设R′为任意的A上包含在R中的对称关系，则

对于任意<a, b> ∈ R′，由于R′包含在R中，所以<a, b> ∈ R；

又由于R′对称，所以<b, a> ∈ R′，而R′包含在R中，所以<b, a> ∈ R，因此，<a, b> ∈ R-1；

因此，总有<a, b> ∈ R ∩ R-1。所以，R ⊆ R∪R-1。

由①②③可知，R ∩ R-1为A上包含在R中的最大对称关系。

**习题2.4**

1.

R2 Ο R1 = {<c, d>}； R1 Ο R2 = {<a, d>, <a, c>}；

R12 = {<a, a>, <a, b>, <a, d>}； R22 = {<b, b>, <c, c>}；

2. m = 1, n = 16。

4. A = {1, 2, 3}

令R1 = {<1, 2>, <1, 3>}；R2 = {<2, 2>}；R3 = {<3, 2>}；则

R1 Ο ( R2 ∩ R3 ) = ∅；( R1 Ο R2 ) ∩ ( R1 Ο R3 ) = {<1, 3>}；

所以，R1 Ο ( R2 ∩ R3 ) ⊂ ( R1 Ο R2 ) ∩ ( R1 Ο R3 ) 。

令R2 = {<2, 2>}；R3 = {<2, 3>}；R4 = {<2, 1>, <3, 1>}；则

( R2 ∩ R3 ) Ο R4 = ∅；( R2 Ο R4 ) ∩ ( R3 Ο R4 ) = {<2, 1>}；

所以，( R2 ∩ R3 ) Ο R4 ⊂ ( R2 Ο R4 ) ∩ ( R3 Ο R4 ) ；

5.

1. 正确。
2. 不正确。令A = {1, 2}，则R1 = {<1, 2>}, R2 = {<2, 1>}都是反自反的，但R1 Ο R2 ={<1, 1>}不是反自反的。
3. 不正确。令A = {1, 2, 3}，则R1 = {<1, 2>, <2, 1>}, R2 = {<2, 3>, <3, 2>}都是对称的，但R1 Ο R2 = {<1, 3>}不是对称的。
4. 不正确。令A = {1, 2, 3}，则R1 = {<1, 2>, <3, 1>}, R2 = {<2, 3>, <1, 1>}都是反对称的，但R1 Ο R2 = {<1, 3>, <3, 1>}不是反对称的。
5. 不正确。令A = {1, 2, 3}，则R1 = {<1, 2>, <3, 1>, <3, 2>}, R2 = {<2, 3>, <1, 1>}都是传递的，但R1 Ο R2 = {<1, 3>, <3, 1>, <3, 3>}不是传递的。
6. 证明：

a) 对于任意k ∈ N，因为Rs = Rt ，所以Rs+k = Rs •Rk = Rt •Rk = Rt+k 。

b) 用关于k的归纳法证明。

i) 当k=0时，Rs+i = Rs+i。所以命题成立。

ii) 假设当k=m时命题成立，即Rs + mp + i = Rs + i。

则当k=m+1时，因为Rs + (m+1) p + i=Rs + p + mp+ i=Rt + mp + i=Rt •Rmp+i =Rs •Rmp+i =Rs + mp + i。

由归纳假设，Rs + (m+1) p + i = Rs + mp + i = Rs + i。

由i) ii)可知对于任意k, i ∈ N，均有Rs + kp + i = Rs + i 。

1. 若k ≤ t-1，则Rk ∈ {R0, R1, …, Rt-1}；

若k ≥ t，则k = s + (t-s)q + r，即k = s + pq + r；（其中，q∈ N, 0 ≤ r < t-s = p）

此时，由b)可知Rk = Rs + pq + r = Rs + r ∈ {R0, R1, …, Rt-1}。

所以，若k ∈ N，则Rk ∈ {R0, R1, …, Rt-1}。

**习题2.5**

2.

使t (R1 ∪ R2) ⊃ t ( R1 ) ∪ t ( R2 ) 的R1 和R2 的具体实例如下：

A = {1, 2}，R1 = {<1, 2>}，R1 = {<2, 1>}；

则t ( R1 ) = R1 ，t ( R2 ) = R2 ，t (R1 ∪ R2) = {<1, 2>, <2, 1>, <1, 1>, <2, 2>}，

故真包含。

4.

b) 使s (R1 ∩ R2) ⊂ s ( R1 ) ∩ s ( R2 ) 的R1 和R2 的具体实例如下：

A = {1, 2}，R1 = {<1, 2>}，R1 = {<2, 1>}；

则s ( R1 ) = s ( R2 ) = {<1, 2>, <2, 1>}，s (R1 ∩ R2) = s(∅) = ∅。

故真包含：s (R1 ∩ R2) ⊂ s ( R1 ) ∩ s ( R2 )。

b) 使t (R1 ∩ R2) ⊂ t ( R1 ) ∩ t ( R2 ) 的R1 和R2 的具体实例如下：

A = {1, 2, 3}，R1 = {<1, 2>, <2, 1>}，R1 = {<1, 3>, <3, 1>}；

则t ( R1 ) = {<1, 2>, <2, 1>, <1, 1>, <2, 2>}，t ( R2 ) = {<1, 3>, <3, 1>, <1, 1>, <3, 3>}，

t (R1 ∩ R2) = s(∅) = ∅。

故真包含：t (R1 ∩ R2) ⊂ t ( R1 ) ∩ t ( R2 )。

6. 令A = {1, 2}，R = {<1, 2>}，则

ts(R) = t ({<1, 2>, <2, 1>}) = {<1, 2>, <2, 1>, <1, 1>, <2, 2>}

st(R) = s ({<1, 2>}) = {<1, 2>, <2, 1>}

所以，st(R) ≠ ts(R)。

**习题2.6**

1.

1. 正确；
2. 正确；
3. 不正确；（不自反）
4. 不正确；（不自反）
5. 不正确；（不一定对称）
6. 正确。

2. R的所有极大相容类为：{x1, x2, x3}，{x1, x3, x6}，{x3, x4, x5}，{x3, x5, x6}。

3. A上共有个不相同的相容关系。

**习题2.7**

1.

1. 不正确；（不自反）
2. 不正确；（不自反）
3. 不正确；（不自反）
4. 不正确；（不传递，< -1, 0 > ∈ R, < 0, 1 > ∈ R, 但<-1, 1> ∉ R）
5. 不正确；（不对称）
6. 不正确；（不对称）
7. 不正确；（不传递）
8. 正确；
9. 不正确。（不自反，i = 10k时，<i, i> ∉ R）

2. 不对。

应加上条件：对于任意x∈A，总存在y∈A使得<x, y> ∈ R。

3.

证明：

① 已知条件：若<a, b> ∈ R，<a, c> ∈ R，则<b, c> ∈ R。

先证对称性：若<a, b> ∈ R，则由于R自反，所以<a, a> ∈ R，由上式有<b, a> ∈ R。

所以R对称。

再证传递性：若<a, b> ∈ R，<b, c> ∈ R，则因为R对称，所以<b, a> ∈ R。由已知条件，因为<b, a> ∈ R且<b, c> ∈ R，所以<a, c> ∈ R。

所以R传递。

因此，R时等价关系。

② 已知条件：R是等价关系。

若<a, b> ∈ R，<a, c> ∈ R，则因为R对称，所以<b, a> ∈ R。又由于R传递，所以，<b, c> ∈R。

因此，若<a, b> ∈ R，<a, c> ∈ R，则<b, c> ∈ R。

**习题2.8**

1.

1. 半序；
2. 半序、全序、良序；
3. 无；（不是反对称的）
4. 无；（不是传递的）
5. 半序；
6. 无；（不是传递的）
7. 无；（不是传递的）
8. 拟序。

4. 设R是集合A上的二元关系，证明：

a) R是A上的半序，当且仅当R ∩ R-1 = IIA且R = R\*。

自反、反对称 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_\_\_传递

b) R是A上的拟序，当且仅当R ∩ R-1 = ∅ 且R = R+。

反自反 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_\_\_传递

6.

a) 断言中为真的有：x4Rx1, x1Rx1。

b) P的最小元：无；P的最大元：x1 ；

P的极小元：x4和x5；P的极大元：x1 。

c) {x2, x3, x4}的上界：x1；下界：x4；上确界：x1；下确界：x4。

{x3, x4, x5}的上界：x1, x3；下界：无；上确界：x3；下确界：无。

{x1, x2, x3}的上界：x1；下界：x4；上确界：x1；下确界：x4。

7.

1. < I, ≤ >中的非空子集I无最小元。
2. < I+, |>（“|”为整除关系）中的非空子集{x | x >4}无最大元。
3. <R, ≤>中的非空子集(0, 1)由下确界0，但无最小元。
4. 书上例4中的非空子集{4}有上界8和12，但无上确界。

8. 归纳法。

9. 归纳法。