Proprietà dei sistemi formali

Materia	Fondamenti di Informatica: Logica
Data	@March 13, 2024

Insieme delle conseguenze

Si definisce **insieme delle conseguenze di $\Gamma \subseteq W$ del sistema D** è la formalizzazione di **tutto ciò che possiamo sapere da Γ**. Quindi è definito come l'**insieme di tutte le formule ben formate α tali che a partire da Γ possiamo concludere α:**

$$Con_D(\Gamma) = \{\, \alpha \in W : \Gamma \vdash_D \alpha \,\}$$

Sistema consistente

Abbiamo detto che un sistema consistente è tale che $\exists \alpha \in W : \nvdash_D \alpha$, ossia un sistema in cui non è possibile affermare che qualsiasi cosa è un teorema. Il concetto di consistenza è un concetto di consistenza assoluta, ma possiamo anche parlare di **consistenza relativa rispetto a $\Gamma \subseteq W$**.
Un insieme di formule ben formate
$\Gamma \subseteq W$ è **consistente** se e solo se l'insieme delle conseguenze di Γ è diverso dall'insieme di tutte le formule ben formate W, ossia:

$$Con_D(\Gamma) \neq W$$

Si dice invece **inconsistente** o **contraddittorio** se e solo se Γ è inconsistente, quindi se:

$$Con_D(\Gamma) = W$$

Per l'**aritmetica di Peano (PA)**, se consideriamo $\Gamma = \{\, 0 = 1 \,\}$, tale insieme di formule ben formate è **inconsistente**, in quanto possiamo dimostrare ogni proprietà a partire da tale ipotesi, e quindi avremo che l'insieme delle conseguenze è uguale a W_{PA}.

Possiamo anche affermare che $\Gamma \subseteq Con_D(\Gamma)$. Può anche accadere che $Con_D(\Gamma) = Con_D(\mathrm{T}')$.

Teoria

Possiamo ora definire il concetto di **teoria**. Tale concetto formalizza l'**insieme di conoscenze che non può essere ampliato utilizzando i ragionamenti che posso fare in un sistema formale.**

Γ si dice **teoria** quando $\Gamma = Con_D(\Gamma)$, ossia se partendo dalle ipotesi di Γ posso solamente "scoprire", quindi derivare, ciò che abbiamo in Γ.

Si chiama **teoria pura** in un sistema formale D un insieme Γ quando $\Gamma = Con_D(\emptyset)$. In realtà esiste un solo Γ che ha tale condizione, quindi dovremmo dire che la **teoria pura di D è l'insieme $Con_D(\emptyset) = \{ \alpha \in W : \vdash_D \alpha \}$, ossia un insieme dei teoremi di D.**

Una teoria pura è una teoria, ossia vale $Con_D(\emptyset) = Con_D(Con_D(\emptyset))$. Quindi dobbiamo prima dimostrare $\subseteq$ e $\supseteq$.

Semantica

Abbiamo visto i giudizi a livello sintattico, ma **qual è il significato di un dato processo di derivazione?**

La **semantica** di un sistema formale significa **definire un criterio** (anche non decidibile, univoco) **che permette di distinguere anche in maniera non effettiva le formule ben formate valide da quelle non valide**. Bisogna, quindi, anche **fornire una definizione di validità**.

Prendiamo ad esempio la Logica di Hoare. La logica di Hoare è caratterizzata dai giudizi $\{ A \}P\{ B \}$, dove A, B sono **proprietà identificate da una sequenza di stringhe** e P è un **programma**. Un giudizio del genere è valido se prendendo un programma P e prima del suo runtime la memoria soddisfa la condizione A, allora P termina e alla fine della condizione soddisfa la proprietà B.

La logica proposizionale implicitamente ha una nozione di validità, in particolare una formula ben formata è valida se **è una tautologia**.

Correttezza e completezza

Correttezza e **completezza** sono due proprietà fondamentali dei sistemi formali.

Un sistema formale **è corretto rispetto alla propria semantica** se le derivazioni all'interno del sistema formale D permettono di concludere **solo formule ben**

formate valide, ossia se partendo da un insieme di ipotesi valide, la conclusione della derivazione è valida. Quindi se ciò che è derivabile è valido. Se un sistema formale ha una sintassi e una semantica, è necessario che la conclusione di un ragionamento sia valida. Quindi qualsiasi sistema formale che ha un minimo di senso dev'essere corretto.

Un sistema formale **è completo se tutto ciò che è valido è derivabile**. Non tutti i sistemi formali sono completi. La logica proposizionale, ad esempio, è completa: qualsiasi tautologia infatti è derivabile come teorema della logica proposizionale.

Il fatto che la logica proposizionale sia corretta e completa permette di far coincidere **derivazione e validità**. Un sistema formale dev'essere almeno corretto ma non obbligatoriamente completo.

La nozione di consistenza non è strettamente connessa a correttezza e completezza. Un sistema corretto e completo può anche essere inconsistente, ma nel momento in cui esiste una formula ben formata che è invalida, allora non esiste la derivazione per essa e quindi il sistema è consistente.

Godel

Godel scoprì una limitazione che riguarda i ragionamenti. Considerando la logica di Peano PA, il sistema è corretto ma non è completo. Non è vero, quindi, che tutto ciò che è valido è derivabile.

Qualsiasi sistema formale che contiene l'aritmetica di Peano non è completa.

Semantica di CL

Il sistema formale CL ha un insieme dei termini τ che può presentare **computazioni su oggetti**, cioè possiamo costruire su τ un oggetto che rappresenta una funzione. I giudizi con forma $P = Q$ rappresentano **uguaglianza di contenuto computazionale**: se riesco a derivare $P = Q$, se P rappresenta un programma, Q rappresenta un programma diverso con implementazione differente. Si tratta quindi di un sistema formale che permette di parlare di equivalenza di programmi all'interno del sistema computazionale chiamato **Combinatory Logic**.

Il calcolo proposizionale P_0

Definiamo il sistema formale del calcolo proposizionale:

- $\Sigma = \{ \implies, \neg, \wedge, \vee, p, q.... \}$. Possiamo anche usare solo $\implies, \neg$, in quanto $a \vee b = \neg a \implies b$.
- $W \subseteq \Sigma^*$ non è propriamente un linguaggio in quanto è su un insieme **infinito** di simboli. L'insieme è così definito:
  - ogni variabile proposizionale è una formula ben formata;
  - se α, β sono formule ben formate, allora lo sono anche $a \implies \beta$ e $\neg a$.
  - nient'altro è una formula ben formata.
- Ax:
  - $\alpha \implies (\beta \implies \alpha)$ Ak;
  - $(\alpha \implies (\beta \implies \gamma)) \implies ((\alpha \implies \beta \implies (\alpha \implies \gamma))$ AS;
  - $(\neg\beta \implies \neg\alpha) \implies ((\beta \implies \alpha) \implies \beta)$.
- L'insieme delle regole di inferenza è costituito solo da una regola, il **modus ponens:**

$$MP = \{ (\alpha, \alpha \implies \beta, \beta) \subseteq W^3 \}$$
$$\frac{\alpha \;\; \alpha \implies \beta}{\beta}$$

Esempi di derivazione nel pdf.

Teorema di deduzione e le sue conseguenze

Il **teorma di Herbrand** o **teorema di deduzione** afferma che dato un insieme di formule ben formate Γ, $\Gamma \vdash_{P_0} \alpha \implies \beta$ se e solo se $\Gamma, \alpha \vdash_{P_0} \beta$.

fare teoremi del pdf.

Consistenza di P_0

Dal teorema 3.2 ne deduciamo che P_0 è inconsistente $\iff$ esiste una formula che è un teorema e allo stesso tempo la sua negata è un teorema. Infatti se fosse inconsistente avremo α e $\neg\alpha$ teoremi, ed una formula tautologica che è valida non può avere la sua negazione valida.