Semantica in P_0

Materia	Fondamenti di Informatica: Logica
Data	@April 3, 2024

Dare una semantica ad un sistema formale significa definire cosa si intende per validità, ossia dare un modo per discriminare formule ben formate valide e non valide. Per la logica proposizionale, il concetto di validità viene indicato con il termine **tautologia**: **le formule valide sono le tautologie**.

Il problema è che per dire che una formula ben formata è una tautologia richiede:

- la definizione di “sempre”;
- la definizione di “verità”.

Una proposizione è una **tautologia** se la **sua verità non dipende da elementi esterni, ma se dipende esclusivamente dalla sua struttura**. Il concetto di validità, nella logica proposizionale, diventa **concetto di verità in tutti i mondi possibili** (il “sempre” che consideriamo). Le variabili infatti possono essere vere o false a seconda del contesto, e le formule dipendono dalla interpretazione delle variabili.

Una formula ben formata per essere vera dipende da due aspetti:

- il significato della formula;
- il mondo in cui mi trovo.

Il concetto di validità invece è sganciato dal mondo in cui mi trovo e da quali sono le variabili proposizionali.

Ad esempio, $r \implies r$ è sempre vera in ogni mondo possibile, ma $p \implies s$ non è una tautologia, perché in qualche mondo non è vera.

Mondo possibile

Un **mondo** è caratterizzato dal fatto che un insieme di affermazioni è vero. Ma come possiamo formalizzare tale mondo?

Per formalizzare il mondo dobbiamo utilizzare l’**assegnamento proposizionale**, ossia una funzione B che ha come dominio l’insieme delle variabili proposizionali e come codominio i **valori di verità**:

$$B : VarProp \to \{\, 0, 1 \,\}$$

Effettivamente non abbiamo definito il concetto di verità, ma nella realtà dei fatti ci interessa sapere che **ci sono due oggetti diversi, "vero" e "falso"**. Il mondo è quindi la **funzione B.**

Preso un mondo B, costruisco una funzione $\overline{B}$ tale che:

$$\overline{B} : FBF \to \{\, 0, 1 \,\}$$

Essenzialmente **stiamo definendo in modo preciso cosa significa che la formula ben formata è vera**. Bisogna definire però formalmente $\overline{B}(p), \overline{B}(\alpha \implies \beta), \overline{B}(\neg\alpha)$;

$$\overline{B}(p) =_{def} B(p)$$
$$\overline{B}(\alpha \implies \beta) =_{def} \begin{cases} 0 & se\ \overline{B}(\alpha) = 1\ e\ \overline{B}(\beta) = 0 \\ 1 & altrimenti \end{cases}$$
$$\overline{B}(\neg\alpha) =_{def} \begin{cases} 0 & se\ \overline{B}(\alpha) = 1 \\ 1 & se\ \overline{B}(\alpha) = 0 \end{cases}$$

Alternativamente possiamo definire $\overline{B}(\neg\alpha) =_{def} 1 - \overline{B}(\alpha)$.

Allora possiamo formalmente definire la **tautologia**. Una formula proposizionale α è tautologia se $\forall B, \overline{B}(\alpha) = 1$. Una formula α invece è **insoddisfacibile** o **contraddittoria** se $\forall B, \overline{B}(\alpha) = 0$

In P_0 non c'è la disgiunzione, pertanto si usa $\neg\alpha \implies \beta$. Se ci fosse, dovremmo definire anche $\overline{B}(\alpha \vee \beta)$, ma non abbiamo bisogno di definirla perché possiamo benissimo evitare di definire $\vee$ utilizzando la formula equivalente con l'implicazione.

Tavola di verità

Vale il seguente lemma: il valore di $\overline{B}(\alpha)$ in un mondo possibile B bisogna controllare il valore di verità solo di un numero finito di variabili proposizionali, ossia quelle contenute in α.

Ora che sappiamo cos'è una tautologia, dobbiamo capire quale sia il procedimento per capire se la formula è una tautologia o meno. Ci dev'essere

un procedimento che concluda in tempo finito.
La definizione di tautologia è
$\forall B, \overline{B}(\alpha) = 1$, ma è impossibile considerare ogni mondo possibile, in quanto le variabili proposizionali sono infinite.

Dato che ogni formula contiene un numero finito di variabili proposizionali, possiamo utilizzare la **tavola di verità**, ossia una **partizione di tutti i mondi possibili**. Costruire la tavola di verità significa analizzare **gruppi di mondi possibili**, in cui in ogni gruppo ci sono **tutti i mondi possibili in cui determinate variabili proposizionali assumono un determinato valore di verità.**

Generalmente un sistema logico è corretto se **le regole di inferenza concludono verità a partire da premesse vere**. P_0 è **sia corretto che completo rispetto alla sua semantica,** ossia tutte le tautologie sono teoremi, o meglio se una formula α è vera in tutti i mondi possibili è derivabile.

Relazione di conseguenza tautologica

La relazione $\vDash$ ci dice che se $\Gamma \vdash \alpha$, allora α è **conseguenza tautologica di** Γ e si indica con $\Gamma \vDash \alpha$. Il fatto che il sistema sia corretto permette di dire che $\Gamma \vdash \alpha \implies \Gamma \vDash \alpha$, mentre il fatto che il sistema sia completo ci dice che $\Gamma \vDash \alpha \implies \Gamma \vdash \alpha$. Il fatto che un sistema sia completo e corretto implica che $\vdash = \vDash$.

Una derivazione nasconde sempre una computazione, mentre la matematica si concentra maggiormente sul significato e quindi sulla semantica.

Consistenza di P_0

Ricordiamo che un sistema formale è consistente se $\exists \alpha \in W : \nvdash \alpha$. Se abbiamo la derivabilità e la conseguenza tautologica coincidenti, allora significa che dobbiamo vedere se $\nvDash \alpha$, ossia verificare che non sia una tautologia. In effetti possiamo prendere una singola variabile proposizionale p: può mai essere che p è tautologia? Naturalmente no, in quanto esiste almeno un mondo possibile in cui $B(p) = 0$. Se non è una tautologia, vuol dire che non è derivabile e quindi P_0 è consistente

Derivabilità in P_0

Una regola di inferenza è derivabile in P_0 se $\{ \alpha_1 .... \alpha_n \} \vdash \alpha$, ma sapendo che conseguenza tautologica e derivabilità coincidono, possiamo semplicemente verificare che la conclusione della regola è conseguenza tautologica delle premesse.

Possiamo ad esempio dimostrare che se $\Gamma \cup \{\alpha\}$ è contraddittorio, allora $\Gamma \vdash \neg\alpha$ utilizzando la conseguenza tautologica. Infatti significa che $\Gamma \vDash \neg\alpha$. Dire che $\Gamma \cup \{\alpha\}$ è contraddittorio significa dire che almeno una proposizione in $\Gamma \cup \{\alpha\}$ ha assegnamento proposizionale pari a 0. Ma se ogni proposizione di Γ è vera allora è α ad essere falsa, pertanto $\Gamma \vDash \neg\alpha$.