Macchine di Turing

Created	@May 26, 2025 10:34 AM
Class	Fondamenti di informatica: linguaggi formali

Tesi di Church-Turing

Ogni funzione calcolabile è anche Turing-calcolabile.

Definizione 5.1 *Una macchina di Turing deterministica (MTD) è una sestupla* $\mathcal{M} = \langle \Gamma, \not b, Q, q_0, F, \delta \rangle$, *dove* Γ *è l'*alfabeto dei simboli di nastro, $\not b \notin \Gamma$ *è un carattere speciale denominato* blank, Q *è un insieme finito e non vuoto di* stati, $q_0 \in Q$ *è lo* stato iniziale, $F \subseteq Q$ *è l'insieme degli* stati finali *e* δ *è la* funzione (parziale) di transizione, *definita come*

$$\delta : (Q - F) \times (\Gamma \cup \{\not b\}) \mapsto Q \times (\Gamma \cup \{\not b\}) \times \{d, s, i\}$$

in cui d, s *e* i *indicano, rispettivamente, lo spostamento a destra, lo spostamento a sinistra e l'assenza di spostamento della testina.*

L'insieme dei simboli che possiamo trovare sul nastro è Gamma, mentre l'insieme dei caratteri delle stringhe accettate invece è Sigma, Sigma è sottoinsieme di Gamma. Blank è simbolo speciale sul nastro che indica cella vuota, e non appartiene Gamma. La testina può spostarsi a destra o sinistra su di un nastro infinito in entrambe le direzioni. Lo spostamento equivale alla funzione di transizione.

La funzione di transizione è cosi definita:

$$\delta : (Q - F) \times (\Gamma \cup \{\not b\}) \mapsto Q \times (\Gamma \cup \{\not b\}) \times \{d, s, i\}$$

Gamma segnato = Gamma unito Blank.

L'accettazione di un linguaggio L da parte di una Macchina di Turing, può essere vista come una funzione, chiamata funzione caratteristica, e restituisce 0 nel caso in cui il linguaggio non sia accettato, e 1 se invece è accettato.

Macchine di tipo trasduttore → calcolano funzioni.

Macchine di tipo riconoscitore → riconoscono stringhe.

possibile domanda nelle itinere su linguaggio riconosciuto da un automa, definizione come configurazioni.

Definizione di funzione di transizione per una MDT, come configurazioni. Servono tre variabili, stringa totale di caratteri diversi da blank, stato di controllo Q, e carattere letto dalla testina.

Definizione 5.2 *Si definisce* configurazione istantanea *o* configurazione *di una macchina di Turing con alfabeto di nastro* Γ *ed insieme degli stati* Q*, una stringa* $c = xqy$*, con:*

1. $x \in \Gamma\bar{\Gamma}^* \cup \{\varepsilon\}$;
2. $q \in Q$;
3. $y \in \bar{\Gamma}^*\Gamma \cup \{\rlap{/}b\}$.

L'interpretazione data ad una stringa xqy è che xy rappresenti il contenuto della sezione non vuota del nastro, che lo stato attuale sia q e che la testina sia posizionata sul primo carattere di y. Nel caso in cui $x = \varepsilon$ abbiamo che a sinistra della testina compaiono solo simboli $\rlap{/}b$, mentre se $y = \rlap{/}b$ sulla cella attuale e a destra della testina compaiono soltanto simboli $\rlap{/}b$.

Nel seguito, per brevità, indicheremo con $\mathcal{L}_\Gamma$ il linguaggio $\Gamma\bar{\Gamma}^* \cup \{\varepsilon\}$ delle stringhe che possono comparire a sinistra del simbolo di stato in una configurazione, e con $\mathcal{R}_\Gamma$ il linguaggio $\bar{\Gamma}^*\Gamma \cup \{\rlap{/}b\}$ delle stringhe che possono comparire alla sua destra.

La computazione di una macchina di Turing può essere potenzialmente infinita, dal momento che la funzione di transizione relativa al carattere di Blank, può essere definita in maniera tale da andare in una configurazione "ricorsiva" in un certo senso.

Questa è la differenza fondamentale nella definizione di linguaggio accettato da una MDT, dal momento che se da una coppia stato-carattere si passa in uno stato finale, allora la computazione si blocca e il linguaggio verrà riconosciuto.

Configurazione iniziale

Definizione 5.3 *Una configurazione $c = xqy$ si dice* iniziale *se $x = \varepsilon$, $q = q_0$, $y \in \Gamma^+ \cup \{\not{b}\}$.*

Configurazione finale

Altro tipo di configurazione di interesse è quella *finale*.

Definizione 5.4 *Una configurazione $c = xqy$, con $x \in \mathcal{L}_\Gamma$, $y \in \mathcal{R}_\Gamma$ si dice* finale *se $q \in F$.*

- $x \in \Gamma\bar{\Gamma}^*$
$\cup \{\varepsilon\}$
e $y \in \bar{\Gamma}^*\Gamma$
$\cup \{B\}$
e $q \in F$

Lo stesso della istantanea, ma con lo stato che sia finale.

Una **configurazione** di una MDT è una tripla implicita:

$$c = xqay$$

dove:

- x: parte **a sinistra della testina**.
- q: **stato attuale** della macchina.
- a: **simbolo attualmente letto** dalla testina.
- y: parte **a destra della testina**.
- $\delta(q, a) = (q', a', d)$: transizione (nuovo stato, simbolo da scrivere, direzione: sinistra, destra o invariato).

esempio di matrice di transizione

	0	1	$*$	$\$$	$\not b$
q_0	$(q_1, *, d)$	$(q_2, \$, d)$	-	-	$(q_F, \not b, i)$
q_1	$(q_1, 0, d)$	$(q_1, 1, d)$	-	-	$(q_3, \not b, d)$
q_2	$(q_2, 0, d)$	$(q_2, 1, d)$	-	-	$(q_4, \not b, d)$
q_3	$(q_3, 0, d)$	$(q_3, 1, d)$	-	-	$(q_5, 0, s)$
q_4	$(q_4, 0, d)$	$(q_4, 1, d)$	-	-	$(q_6, 1, s)$
q_5	$(q_5, 0, s)$	$(q_5, 1, s)$	$(q_0, 0, d)$	-	$(q_5, \not b, s)$
q_6	$(q_6, 0, s)$	$(q_6, 1, s)$	-	$(q_0, 1, d)$	$(q_6, \not b, s)$
q_F	-	-	-	-	-

Tabella 5.1 Matrice di transizione.

Linguaggio riconosciuto da una MDT

Definizione 5.7 *Sia* $\mathcal{M} = \langle \Gamma, \not b, Q, q_0, F, \delta \rangle$ *una macchina di Turing deterministica. Diciamo che* $\mathcal{M}$ accetta *un linguaggio* $L \in \Sigma^*$ *(dove* $\Sigma \subseteq \Gamma$*) se e solo se* $L = \{x \in \Sigma^* \mid q_0 x \overset{*}{\underset{\mathcal{M}}{\vdash}} wqz\}$, *con* $w \in \Gamma\bar{\Gamma}^* \cup \{\varepsilon\}$, $z \in \bar{\Gamma}^*\Gamma \cup \{\not b\}$, *e* $q \in F$.