Pumping Lemma

Created	@April 22, 2025 4:37 PM
Class	Fondamenti di informatica: linguaggi formali

Il Pumping Lemma è una proprietà sui linguaggi, che ci permette di determinare se un linguaggio non è regolare. Tuttavia dimostrare che un linguaggio soddisfa il Pumping Lemma, non è una condizione sufficiente a determinare la regolarità del linguaggio.

Se L è regolare → L soddisfa le condizioni del Pumping Lemma, si dimostra che le condizioni poste non sono soddisfacibili, e quindi L sarà irregolare, tuttavia ciò non implica che sarà regolare.

Teorema 1 (PUMPING LEMMA) *Per ogni linguaggio regolare L esiste una costante n tale che, se $z \in L$ e $|z| \geq n$, allora possiamo scrivere $z = uvw$, con $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ e ottenere che $uv^iw \in L$ per ogni $i \geq 0$.*

Per ogni linguaggio regolare L, esiste una costante $n \in \mathbb{N}$ (detta "costante di pompaggio") tale che, per ogni stringa $z \in L$ con $|z| \geq n$, possiamo scrivere $z = uvw$, con:

- $|uv| \leq n$
- $|v| \geq 1$
- $uv^iw \in L$ per ogni $i \geq 0$

Dimostrazione (basata su un DFA)

Sia L un linguaggio regolare. Allora esiste un automa a stati finiti deterministico (DFA) $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ che lo riconosce.

- Sia $|Q| = n$, cioè ci sono n stati.
- Sia $z \in L$ con $|z| \geq n$.

Poiché la lunghezza di z è almeno n, la computazione dell'automa su z visiterà almeno $n+1$ stati (compresi gli stati intermedi dopo ogni simbolo).
Quindi, per il **principio del Pigeonhole (dei cassetti)**, almeno uno stato deve essere visitato più di una volta: esistono $r < s \leq n$ tali che:

$$\delta(q_0, z_0 z_1 \dots z_{r-1}) = \delta(q_0, z_0 z_1 \dots z_{s-1})$$

Definiamo:

- $u = z_0 z_1 \dots z_{r-1}$
- $v = z_r z_{r+1} \dots z_{s-1}$
- $w = z_s z_{s+1} \dots z_{k-1}$

Così, $z = uvw$, con:

- $|uv| = s \leq n$
- $|v| = s - r \geq 1$

Poiché v rappresenta un ciclo nell'automa (porta dallo stato q a sé stesso), possiamo "ripetere" o "saltare" v qualsiasi numero di volte, e l'automa arriverà comunque a uno stato accettante.

Per ogni $i \geq 0$, $uv^i w \in L$.

Domanda 1

Nel Pumping Lemma, per dimostrare che
$uv^iw \in L$, per ogni $i \geq 0$,
quale delle seguenti proprietà viene utilizzata nel passo induttivo ?

- ○ $\bar{\delta}(q_0,uv^iw) \notin F$
- ○ $\bar{\delta}(q_0,uv^iw)=\delta(q_0,uv^iw)$
- ● $\bar{\delta}(q_0,uv^iw)=\bar{\delta}(\bar{\delta}(q_0,uv), v^{i-1}w)$
- ○ $\bar{\delta}(q_0,uv^iw)=\bar{\delta}(\bar{\delta}(q_0,uv^{i-1}),vw)$

Per ipotesi induttiva:

$$uv^{i-1}w \in L \Rightarrow \delta(q_0, uv^{i-1}w) \in F$$

Ora si vuole dimostrare:

$$uv^{i}w \in L \Rightarrow \delta(q_0, uv^{i}w) \in F$$

Ma:

$$\delta(q_0, uv^{i}w) = \delta(q_0, uvv^{i-1}w) = \delta(q_r, v^{i-1}w)$$

E dato che $\delta(q_r, v) = q_r$, allora:

$$\delta(q_r, v^{i-1}w) = \delta(q_r, w) \Rightarrow \delta(q_0, uv^{i}w) = \delta(q_r, w) \in F$$

Quindi $uv^{i}w \in L$.

In sintesi:

La proprietà usata è:

- **Determinismo dell'automa**: la funzione δ è deterministica.
- **Ciclo sullo stato**: $\delta(q_r, v) = q_r$, cioè v riporta l'automa nello stesso stato — un **loop**.
- Da ciò segue che puoi ripetere v arbitrariamente senza cambiare il comportamento dell'automa (arriva sempre a uno stato accettante dopo w).

Domanda 2

Sia L ⊆ Σ*. Segnare, fra le affermazioni seguenti, l'unica affermazione esatta:

- ○ Se L soddisfa il Pumping Lemma allora L è regolare
- ○ Se L è finito allora L non soddisfa il Pumping Lemma
- ◉ Se L non soddisfa il Pumping Lemma allora L non è regolare
- ○ L è regolare se e solo se L soddisfa il Pumping Lemma

Esatto: **se un linguaggio L non soddisfa il pumping lemma, allora L non è regolare.**

Spiegazione:

- Il **pumping lemma è una condizione necessaria**, ma **non sufficiente** per la regolarità.
- Significa:
  - **Tutti i linguaggi regolari soddisfano il pumping lemma.**
  - Ma **non tutti i linguaggi che soddisfano il pumping lemma sono regolari** (esistono linguaggi non regolari che "casualmente" soddisfano le condizioni del lemma, quindi il lemma da solo non basta a dimostrare che un linguaggio *è* regolare).

Quindi:

✅ Se un linguaggio **non soddisfa il pumping lemma → non è regolare**
❌ Se un linguaggio **soddisfa il pumping lemma → non possiamo concludere nulla con certezza**

Domanda 4

Supponiamo di utilizzare il Pumping Lemma per dimostrare che il linguaggio $L = \{a^k b^k$ con $k \geq 1\}$ non è regolare. Allora, avendo scelto, al variare di n, $z=a^n b^n \in L$, e avendo scritto $z=uvw$, con $|uv| \leq n$ e $|v| \geq 1$, quale è l'insieme S di TUTTI e SOLI i valori di i per cui la stringa $uv^iw \notin L$?

- ○ $S=\{0\}$
- ● $S=\{0\} \cup \{i \mid i \geq 2\}$
- ○ $S=\{i \mid i \geq 0\}$
- ○ $S=\{i \mid i \geq 2\}$

- Prendiamo una stringa $z = a^n b^n \in L$ per $n \geq p$.
- Dato che $|uv| \leq p$, v contiene **solo** a.
- Pompando v (cioè ripetendola più volte), otterremo **più** a di b, quindi $uv^iw \notin L$ per $i \neq 1$.
  - In particolare:
    - $i = 0$ → togliamo v → meno a
    - $i = 2, 3, \ldots$ → aggiungiamo più a
    - In entrambi i casi, $uv^iw \notin L$

✅ **Risposta corretta:**

$$S = \{0\} \cup \{i \mid i \geq 2\}$$

✔ Questo è esattamente l'insieme di **TUTTI e SOLI** i valori di i per cui $uv^iw \notin L$.