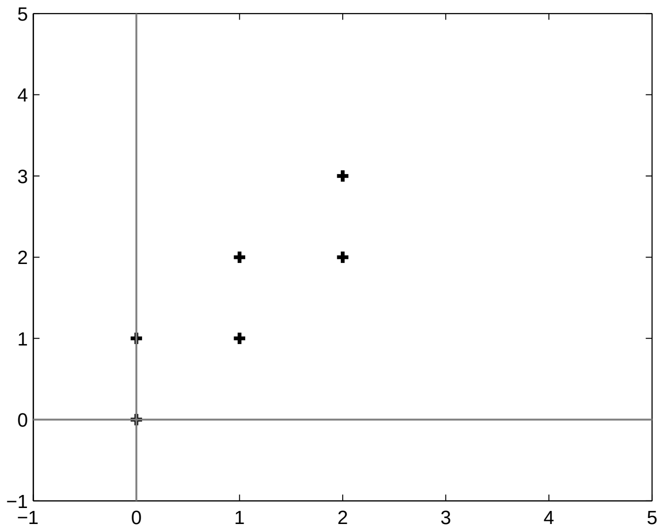
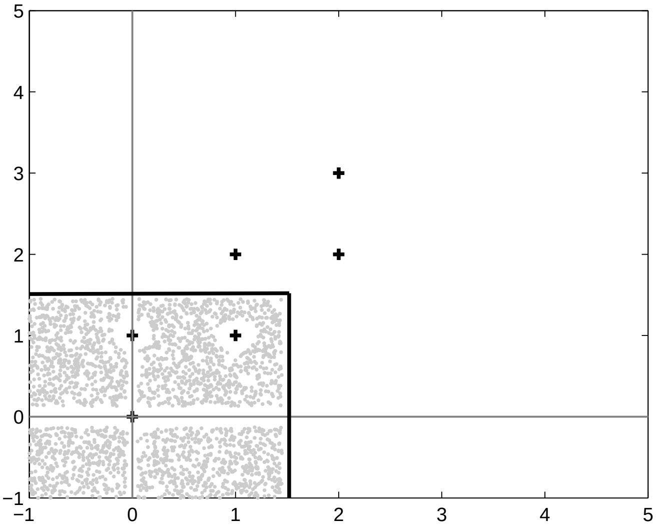
Función de probabilidad puntual

$$p_{XY}(x_i, y_j) \;=\; P\{X = x_i, Y = y_j\}$$



Función de distribución conjunta

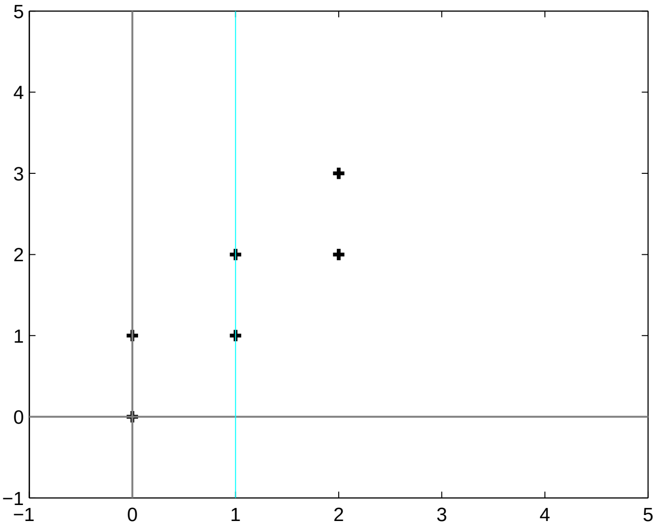
$$F_{XY}(x,y) = P\{X \leq x, Y \leq y\} =$$
$$= \sum_{\{x_i \leq X, y_j \leq y\}} p_{XY}(x_i, y_j)$$



Función de distribución conjunta

Funciones de probabilidad marginales

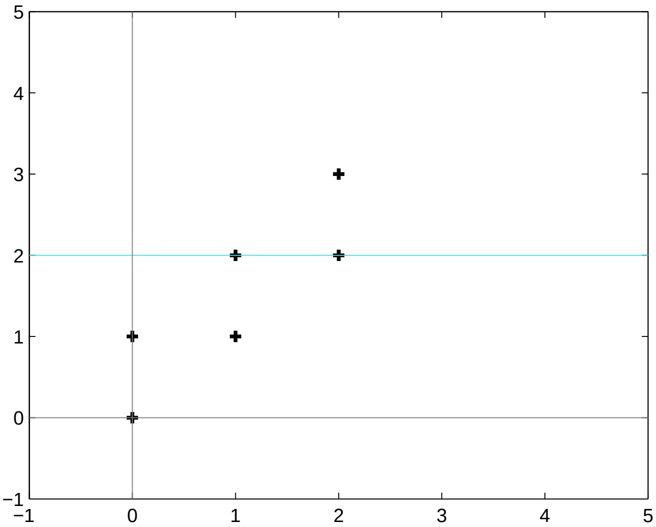
$$p_X(x_i) = \sum_j p_{XY}(x_i, y_j)$$



Función de probabilidad marginal

Funciones de probabilidad marginales

$$p_Y(y_j) = \sum_i p_{XY}(x_i, y_j)$$

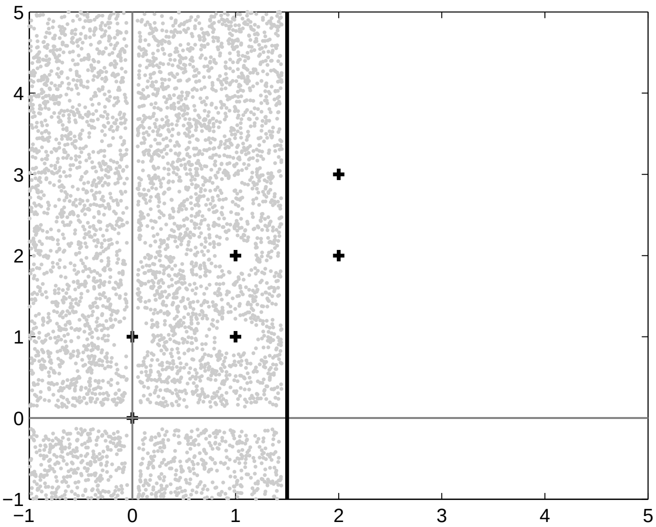


Función de probabilidad marginal

Funciones de distribución marginales

$$F_X(x) = P\{X \leq x\} =$$

$$\sum_{\{x_i \leq X, y_j \in R\}} p_{XY}(x_i, y_j) = \sum_{\{x_i \leq x\}} p_X(x_i)$$

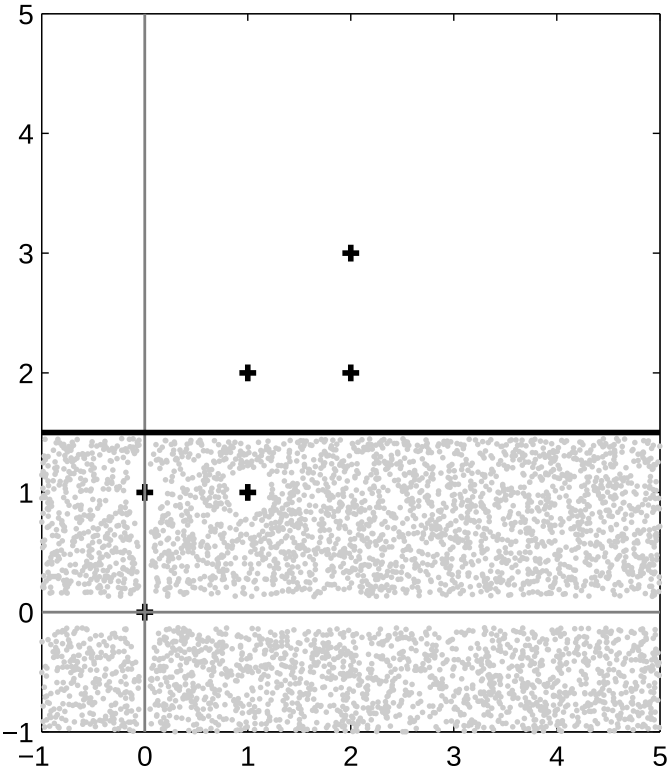


Función de distribución marginal

Funciones de distribución marginales

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} =$$

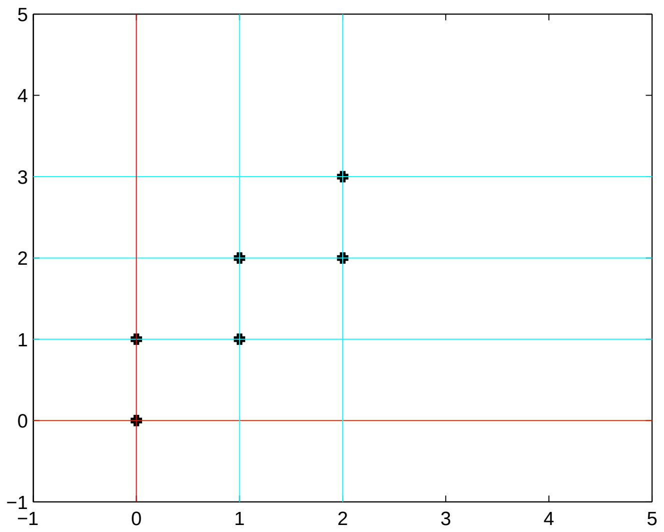
$$\sum_{\{y_j \leq y, x_i \in R\}} p_{XY}(x_i,\, y_j) = \sum_{\{y_j \leq y\}} p_Y(y_j)$$



Función de distribución marginal

Función de distribución conjunta

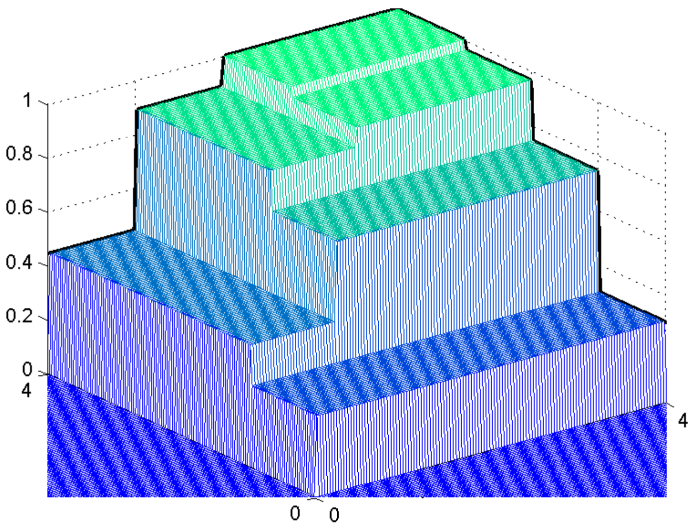
$$F_{XY}(x,y) = \sum_{\{x_i \leq x,\, y_j \leq y\}} p_{XY}(x_i, y_j)$$



Función de distribución conjunta

Función de distribución conjunta

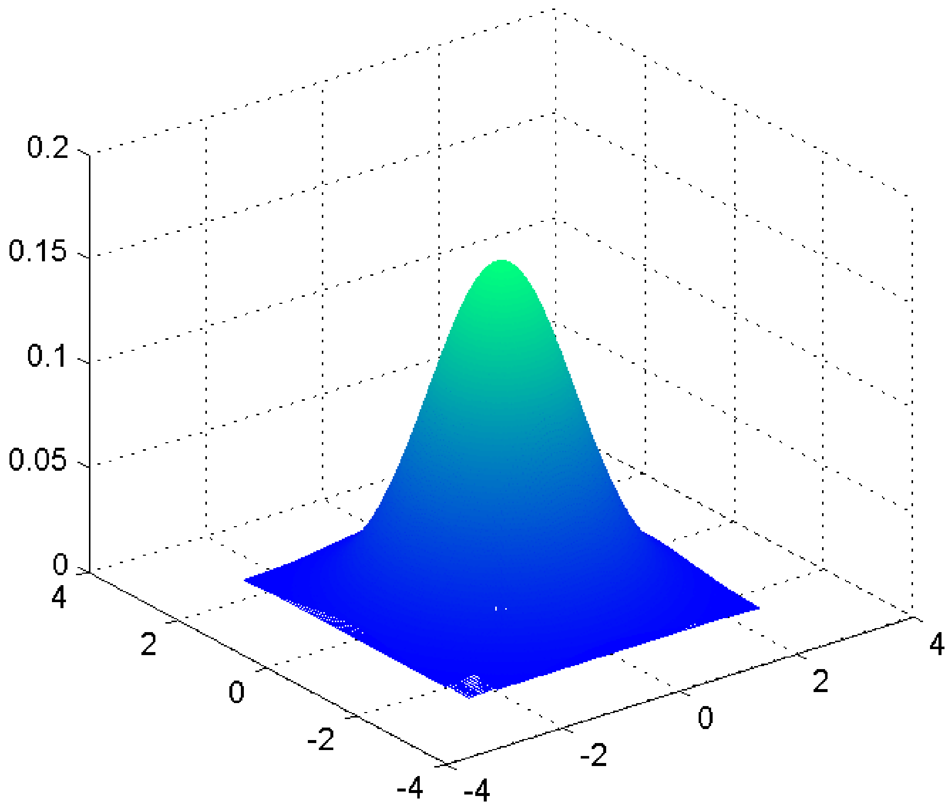
$$F_{XY}(x,y) = \sum_{\{x_i \leq x,\, y_j \leq y\}} p_{XY}(x_i, y_j)$$



Función de distribución conjunta

Función de densidad conjunta (normal típica)

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{1}{2}\,(x^2+y^2)}$$



Función de Densidad: propiedades

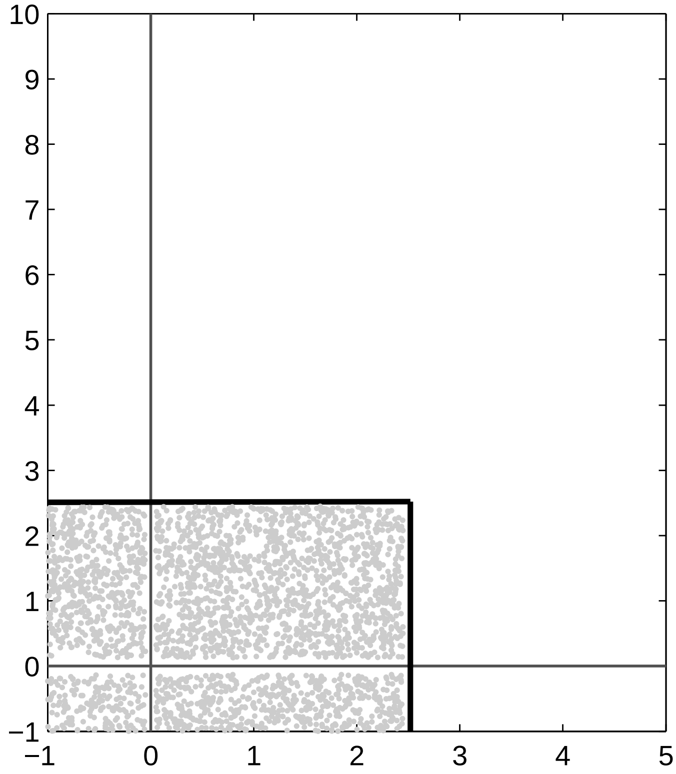
- $f_{XY}(x, y) \geq 0, \ \forall x, y.$

- $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y)\, dxdy = 1$

A partir de la densidad podemos calcular la función de distribución, las densidades marginales y las funciones de distribución marginales.

Función de distribución conjunta

$$F_{XY}(x,y) \;=\; \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f_{XY}(s,t)\,dsdt$$



Funciones de densidad marginales

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dy$$

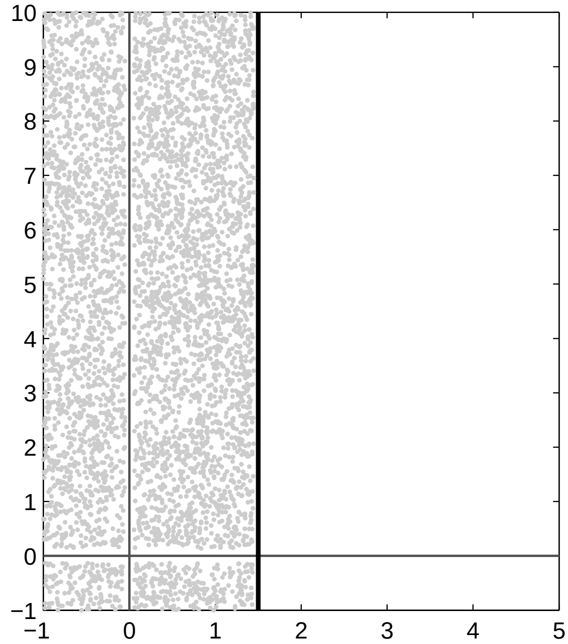
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dx$$

Integrando las funciones de densidad marginales, o equivalentemente, tomando límites con $y \longrightarrow +\infty$ y $x \longrightarrow +\infty$ respectivamente, obtenemos las funciones de distribución marginales.

Funciones de distribución marginales

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(s,t)\, dtds =$$

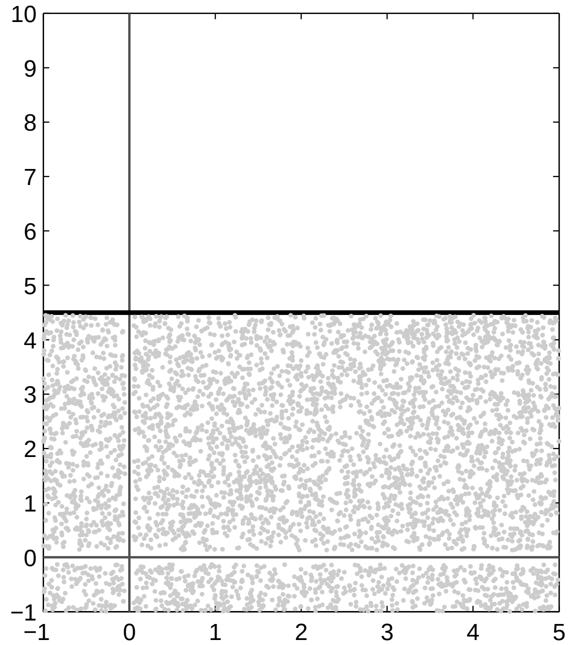
$$\int_{-\infty}^{x} f_X(s)\, ds = lim_{y \longrightarrow +\infty} F_{XY}(x,y).$$



Funciones de distribución marginales

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(s,t)\, ds dt =$$

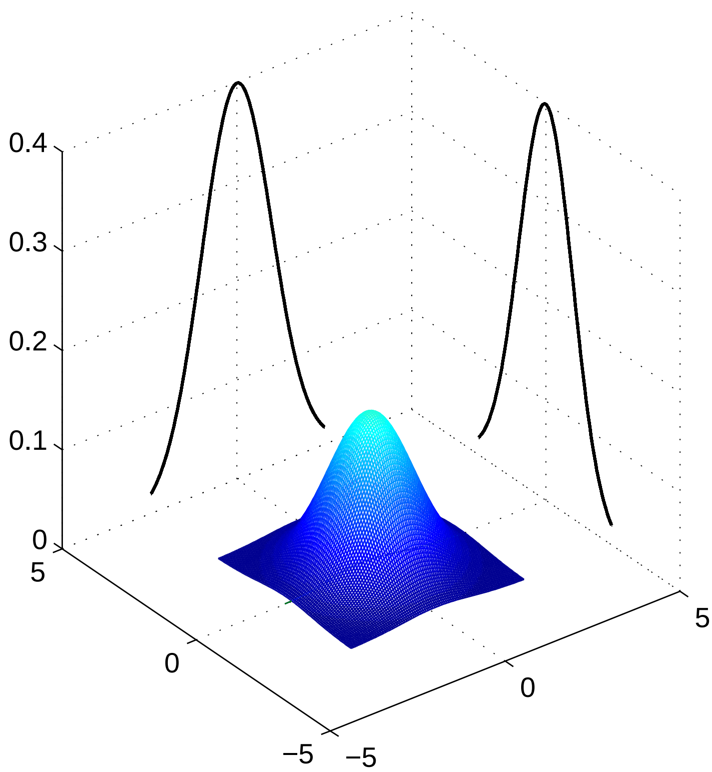
$$\int_{-\infty}^{y} f_Y(t)\, dt = lim_{x \longrightarrow +\infty} F_{XY}(x,y).$$



Densidades conjunta y marginales
Normal bivariada típica

En este caso, las funciones definidas anterioremente son:

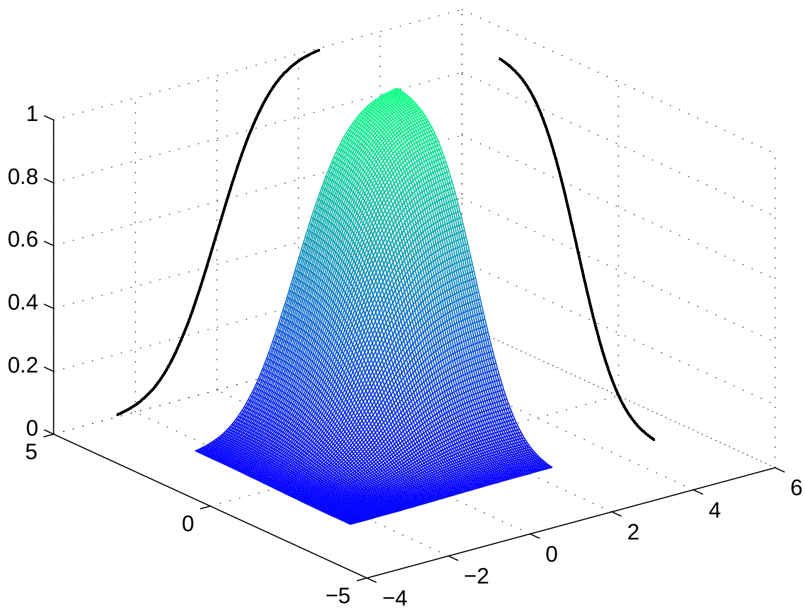
$$f_X(x) = \varphi(x), \quad f_Y(y) = \varphi(y)$$



Funciones de distribución conjunta y marginales (Normal bivariada típica)

$$F_X(x) = \Phi(x)$$

$$F_Y(y) = \Phi(y)$$



Función de Distribución: propiedades generales

- $lim_{x,y \rightarrow +\infty} F_{X,Y}(x,y) = 1$
- $lim_{x \rightarrow -\infty} F_{X,Y}(x,y) = 0$
- $lim_{y \rightarrow -\infty} F_{X,Y}(x,y) = 0$
- $lim_{y \rightarrow +\infty} F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)$
- $lim_{x \rightarrow +\infty} F_{X,Y}(x,y) = F_Y(y)$

Función de distribución conjunta

Nótese que en el caso de la normal bivariada típica se tiene:

$$F_{XY}(x,y) \; = \; \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f_{XY}(s,t) \, dsdt \; =$$

$$\int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} \varphi(s)\varphi(t) \, dsdt \; =$$

$$\int_{-\infty}^{y} \varphi(t) \, dt \; \int_{-\infty}^{x} \varphi(s) \, ds \; = \Phi(x) \, \Phi(y) \, , \, \forall x, y.$$

Se puede demostrar que esta factorización de la función de distribución bivariada implica la aparentemente más general:

$$P\{X \in A, Y \in B\} = P\{X \in A\} P\{Y \in B\}$$

$\forall A, B \in \mathcal{B}$ donde $\mathcal{B}$ es la $\sigma-$álgebra de Borel.

DEFINICIÓN: Cuando para un par de variables aleatorias X e Y cualesquiera se da la factorización anterior se dice que las variables X e Y son *INDEPENDIENTES*.

Se puede demostrar que, en el caso de un vector aleatorio absolutamente continuo (X, Y) la factorización de la densidad conjunta implica la independencia de X e Y:

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_Y(y).$$

para todo punto (x, y) de continuidad de f_{XY}

Análogamente, en el caso de un vector aleatorio discreto (X, Y) la factorización de la función de probabilidad conjunta implica la independencia de X e Y:

$$p_{XY}(x, y) = p_X(x) p_Y(y), \forall x, y$$