Auto-Evaluación - Probabilidad y Estadística

Miércoles 10 de abril de 2013

Número de lista	APELLIDO, Nombre	Cédula de identidad

Múltiple Opción

La pregunta múltiple opción correcta vale 2 puntos. El desarrollo vale 3 puntos (uno por parte).
Rellenar con claridad y en mayúscula la opción que considere correcta.
Se permite el uso de cuadernos, textos, calculadora y lápices.

Problema

Suponga que en un país se sabe que:

- La cuarta parte de la población conectada a Internet (llamémosle B_1 a esta parte de la población) no juega nunca a juegos de azar on-line;
- Cinco octavos de la población conectada a Internet (llamémosle B_2 a esta parte de la población) juega al mes un cantidad aleatoria de veces que sigue la distribución de Poisson de parámetro $\lambda_1 = 1$, mientras que
- El restante octavo de la población conectada a Internet juega al mes una cantidad aleatoria de veces que sigue la distribución de Poisson de parámetro $\lambda_2 = 3$.

Se pide:

(1) Si se elige al azar una persona de ese país conectada a Internet, calcular la probabilidad de que juegue al menos una vez.
(2) Si se elige al azar una persona de ese país conectada a Internet, calcular la probabilidad de que juegue exactamente dos veces al mes.
(3) Si elige al azar una persona de ese país conectada a Internet, y se constata que juega exactamente cuatro veces al mes ¿A qué parte de la población es más probable que pertenezca, B_1, B_2 o B_3? Calcular las tres probabilidades.

Múltiple Opción

Sea X una variable aleatoria con distribución $Bin(n, p)$, $n \geq 2$; $0 < p < 1$ e Y una variable aleatoria independiente de X, con distribución $Geo(p)$.

Entonces, $P(Y = X)$ es igual a:

A): 1.
B): np.
C): $np^2(1-p)^{n-1}$.
D): $np^n\{(1-p)^{n-1} - 1\}$.
E): $p(1-p)^{n-1}\{(1+p)^n - 1\}$.
F): Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

Solución de la Auto-evaluación 1
Probabilidad y Estadística

Miércoles 10 de abril de 2013

Múltiple Opción Correcta: E

Problema 1

(1) Se tiene que $P(B_1) = 0,25$; $P(B_2) = 0,625$; $P(B_3) = 0,125$, y es claro que estos tres conjuntos son disjuntos. Llamemos C al suceso "juega al menos una vez al mes". Como evidentemente $C \cap B_1 = \emptyset$, se tiene que

$$P(C) = P(C \cap B_2) + P(C \cap B_3) = P(C/B_2)P(B_2) + P(C/B_3)P(B_3).$$

Como X es Poisson con $\lambda_1 = 1$ e Y es Poisson con $\lambda_2 = 3$, el cálculo anterior se reescribe como:

$$\begin{aligned} P(X \geq 1)0,625 + P(Y \geq 1)0,125 &= (1 - P(X = 0))0,625 + (1 - P(Y = 0))0,125 \\ &= (1 - e^{-1})0,625 + (1 - e^{-3})0,125 \approx 0,51385. \end{aligned}$$

(2) Reiterando el razonamiento anterior, la probabilidad solicitada ahora es igual a

$$P(X = 2)0,625 + P(Y = 2)0,125 = \frac{e^{-1}}{2}0,625 + \frac{3^2e^{-3}}{2}0,125 \approx 0,14297.$$

(3) Aplicando Bayes, si D es el evento "juega exactamente cuatro veces al mes", se tiene:

$$P(B_j/D) = \frac{P(D/B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^{3} P(D/B_i)P(B_i)}, j = 1, 2, 3.$$

Como es claro que $P(D/B_1) = 0$, resulta que $P(B_1/D) = 0$. Luego, llamando X e Y como en la parte anterior:

$$P(B_2/D) = \frac{P(X = 4)0,625}{P(X = 4)0,625 + P(Y = 4)0,125} = \frac{e^{-1}0,625/24}{e^{-1}0,625/24 + (3^4e^{-3}/24)0,125} \approx 0,313241,$$

y entonces $P(B_3/D) \approx 1 - 0,313241 = 0,686759$.
Por ende, lo más probable es que pertenezca a B_3.

Múltiple Opción

$$\begin{aligned} P(Y = X) &= \sum_{i=1}^{n} P(Y = X/X = i)P(X = i) = \sum_{i=0}^{n} P(Y = i/X = i)P(X = i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(Y = i)P(X = i) = \sum_{i=1}^{n} p(1-p)^{i-1}\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i} \\ &= p(1-p)^{n-1}\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}p^i = p(1-p)^{n-1}\{\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}p^i1^{n-i} - 1\} \\ &= p(1-p)^{n-1}\{(1+p)^n - 1\}, \end{aligned}$$

Entonces, la opción correcta es la E.