Facultad de Ingeniería
IMERL
PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA
Curso 2013
Práctico 4

Distribuciones discretas

Ejercicio 1
La distribución introducida en este ejercicio se denomina *distribución binomial.*

1. Se considera el natural $n \geq 1$, $0 < p < 1$ y el conjunto $A = \{0, 1, ..., n\}$. Probar que la función $p : A \to \mathbb{R}$ tal que $p(k) = C_k^n p^k (1-p)^{n-k}$ con $k \in A$ define una probabilidad en A. *Sugerencia: utilizar el binomio de Newton.*
2. La probabilidad de que una cierta clase de componente pase con éxito una determinada prueba de impacto es 3/4. Hallar la probabilidad de que exactamente 2 de los siguientes 4 componentes que se prueban pasen la prueba.
3. El sistema electrónico de dirección de un cohete funciona correctamente con una probabilidad p cuando se pone a funcionar. Se quiere instalar n sistemas de respaldo independientes, pero idénticas, en el cohete de modo que la probabilidad de que al menos un sistema trabaje en forma correcta no sea menor que 0,99. Hallar la cantidad n de sistemas electrónicos de dirección que se necesitan para satisfacer los requerimientos si $p = 0{,}9$ y si $p = 0{,}8$.

Ejercicio 2
Graficar la función de distribución y la función de probabilidad de $X \sim Bin\left(6, \frac{1}{4}\right)$.

Ejercicio 3 *
Diremos que θ es una *moda* de la variable aleatoria discreta X si y sólo si se cumple que:

$$P(X = \theta) = p_X(\theta) \geq p_X(x) = P(X = x) \quad \forall x \in R_X$$

1. Sea $X \sim Bin(n, p)$. Probar que:
$$\frac{p_X(k)}{p_X(k-1)} = 1 + \frac{(n+1)p - k}{(1-p)k} \quad k = 1, \ldots, n$$
2. Calcular la(s) moda(s) de X discutiendo según p.

   Sugerencia: estudiar el cociente de la parte anterior y compararlo con 1.

Ejercicio 4
La distribución introducida en este ejercicio se denomina *distribución hipergeométrica.*

1. Se consideran los números naturales N, D y n tales que $N \geq D$. Sea también $A = \{0, 1, \ldots, n\}$. Para $r > 0$, se define $C_s^r = 0$ si $s < 0$ o si $s > r$.
   a) Probar que $\sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^{N-D} C_k^D = C_n^N$. *Sugerencia: observe que* $(1+x)^N = (1+x)^{N-D}(1+x)^D$ *y utilice el Binomio de Newton* $(1+x)^N = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^N x^n$ *para hallar el coeficiente de* x^n *a ambos lados de la igualdad.*
   b) Probar que $p : A \to \mathbb{R}$ tal que $p(k) = \dfrac{C_{n-k}^{N-D} C_k^D}{C_n^N}$ con $k \in A$ define una probabilidad en A.
2. Una empresa quiere comprar cajas que contienen 40 herramientas cada una. El procedimiento de control de calidad de cada caja consiste en tomar una muestra de 5 herramientas al azar de dicha caja y rechazarla si se encuentra una herramienta defectuosa. Si la caja a inspeccionar tiene 3 defectuosas, ¿cuál es la probabilidad de rechazar la caja?

3. Ahora de un lote de 10 herramientas se seleccionan 4 al azar. Si el lote contiene 3 herramientas con defectos de fabricación, calcular la probabilidad de que:

   a) las 4 funcionen.

   b) al menos 2 no funcionen.

   c) sólo una funciona.

   d) por lo menos una funciona.

Ejercicio 5
En los siguientes ejercicios se asume que los fenómenos se comportan según la *distribución de Poisson*:

$$X \sim \mathcal{P}(\lambda) \Leftrightarrow p_X(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \quad k = 0, 1, \ldots$$

1. El número promedio de partículas radiactivas que pasan a través de un contador durante un milisegundo en un experimento de laboratorio es 4. ¿Cuál es la probabilidad de que entren 6 partículas al contador en un milisegundo determinado?

2. Se sabe que 10 es el número promedio de camiones-tanque de aceite que llegan por día a una cierta ciudad portuaria. Las instalaciones del puerto pueden atender cuando mucho a 15 camiones-tanque en un día. ¿Cuál es la probabilidad de que en un determinado día se tengan que regresar algunos de los camiones-tanque?

3. Se certifica la calidad de discos de computadora pasándolos por un certificador que cuenta el número de sectores defectuosos. Una determinada marca de discos tiene un promedio de $0,1$ sectores defectuosos por disco. Calcular la probabilidad de que::

   a) un disco que se inspeccione no tenga sectores defectuosos.

   b) un disco que se inspeccione tenga más de un sector defectuoso.

   c) dos discos que se inspeccionen no tengan sectores defectuosos.

Ejercicio 6
Sean $0 < p < 1$ y R_X el conjunto de enteros positivos.

1. Probar que $p_X : R_X \to [0, 1]$ dada por $p_X(k) = (1-p)^{k-1}\, p$ es una función de probabilidad. Si una variable aleatoria discreta X tiene por función de probabilidad p_X como antes se dice que X tiene *distribución Geométrica* de parámetro p y se denota $X \sim Geo\,(p)$.

2. Consideramos un experimento aleatorio donde nos interesa estudiar la ocurrencia o no de un suceso A con probabilidad p $(0 < p < 1)$. Cada vez que ocurre A diremos que hay éxito y cada vez que ocurre A^c diremos que hay fracaso. Repetimos el experimento en forma independiente (es decir lo que ocurre en una repetición no influye en las otras) hasta obtener éxito (ocurre A). Sea X una variable aleatoria que cuenta la cantidad de repeticiones. Calcular $P(X = n)$ con $n \in \mathbb{N}$ (la probabilidad de tener que realizar n repeticiones para obtener un éxito) y deducir que $X \sim Geo\,(p)$.

3. El tablero de un conmutador telefónico es de muy poca capacidad en cuanto al tiempo de ocupado se refiere, de tal forma que las personas no pueden encontrar una línea desocupada para sus llamadas.

   Puede ser de interés saber el número de intentos necesarios que se requieren para tener una línea disponible. Suponga que $p = 0{,}05$ es la probabilidad de tener línea durante la mayor congestión de llamadas. Se tiene el interés particular de saber la probabilidad de que sean necesarios 5 intentos para lograr una comunicación.

Ejercicio 7
Sea X el número de intentos independientes (de un experimento aleatorio) que hay que realizar para observar por k-ésima vez $(k \geq 1)$ el suceso A, con $P(A) = p$.

1. Hallar la distribución de X. Esta distribución se llama *Binomial Negativa* de parámetros k y p y se escribe $X \sim BN\,(k, p)$.
2. En una población con 100000 personas donde 1800 son portadores de una enfermedad, se realiza un muestreo con reposición donde se puede suponer equiprobabilidad. ¿Cuál es la probabilidad de obtener una muestra con 4 enfermos sin tener que seleccionar más de 8 personas?
3. Hallar la probabilidad de que una persona que lanza al aire tres monedas obtenga ya sea sólo caras o sólo cruces por segunda ocasión en el quinto lanzamiento.
4. Si $X_1, X_2, \ldots X_k iid \sim Geo\,(p)$, hallar la distribución de $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_k$.

Ejercicio 8
** La distribución introducida en este ejercicio se denomina *distribución multinomial.*

1. Sean $p_1, \ldots, p_k \geq 0$ tales que $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$ y $R_X = \{(x_1, \ldots, x_k) : x_i \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^{k} x_i = n\}$. Probar que $p_X : R_X \to [0,1]$ tal que $p_X(x_1, \ldots, x_k) = \frac{n!}{x_1! \ldots x_k!} {p_1}^{x_1} \ldots {p_k}^{x_k}$ define una función de probabilidad. Si una variable aleatoria discreta $X = (X_1, X_2, \ldots, X_k)$ tiene por función de probabilidad p_X como antes se dice que X tiene *distribución Multinomial* de parámetros $p_1, p_2, \ldots, p_k$ y n, y se denota $X \sim M\,(p_1, \ldots, p_k, n)$. *Sugerencia: usar el Multinomio de Newton:* $(a_1 + \ldots + a_k)^n = \sum_{x_1 + \ldots + x_k = n} \frac{n!}{x_1! \ldots x_k!} {a_1}^{x_1} \ldots {a_k}^{x_k}$, $\forall a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$.
2. Se lanzan n bolas en k recipientes tal que la probabilidad de que cada bola entre al recipiente i es igual a p_i. Sea X_i la cantidad de bolas que finalmente ingresaron al recipiente i.
Mostrar que $X_i \sim Bin(n, p_i)$ y que $X = (X_1, \ldots, X_k) \sim M(p_1, \ldots, p_k, n)$.

Ejercicio 9 Primer parcial, 9 mayo de 1998
Se sabe que en una población muy numerosa (prácticamente puede pensarse infinita), un 2 % de la población es portadora de un cierto tipo de quistes. Dentro de los portadores de quistes (conjunto que también es muy numeroso) un 30 % presenta los quistes sólo en los pulmones, un 60 % sólo en el hígado y un 10 % en ambos órganos.

1. Si se eligen 10 individuos al azar dentro de toda la población y X es el número de personas afectadas de quistes de cualquier tipo, ¿cuál es la probabilidad de elegir al menos dos personas afectadas de quistes?
2. Si se eligen 10 personas al azar dentro de los portadores de quistes e Y es el número de individuos con quistes hepáticos (que tiene quistes sólo en el hígado o en el hígado y pulmones), ¿cuál es la cantidad de portadores de quistes hepáticos más probable? (o sea, ¿cuál es la moda de Y?)
3. Si se elige al azar una cantidad Z de individuos de manera que en dicha muestra haya exactamente 10 portadores de quistes (es decir, el Z-ésimo individuo seleccionado es el décimo portador que se encuentra) y sea W la cantidad de portadores de quistes hepáticos dentro de los Z individuos, ¿cuál es la probabilidad de que $Z = 11$ y $W = 4$?

Ejercicio 10
* Graficar la función de probabilidad de una variable aleatoria con distribución $Bin(n, p)$ para diferentes valores de n y p. Observar la moda. Para $n = 10$ y $p = 0,25$ simular 100 realizaciones, calcular la frecuencia y comparar con los valores teóricos.

Ejercicio 11
* Graficar las funciones de probabilidad para las distribuciones Hipergeométrica, Binomial y Poisson para distintos parámetros. Observar que es posible aproximar la distribución Hipergeométrica por la Binomial y la Binomial por la Poisson para ciertos parámetros.

Ejercicio 12
** Simular 1000 realizaciones de un variable aletoria con distribución $Geo(p)$ para algún p.
Sean s y t enteros positivos. Calcular las frecuencias y observar la propiedad de pérdida de memoria $P(X > s+t|X > s) = P(X > t)$ estimando $P(X > t)$ y $P(X > s+t|X > s) = \dfrac{P(X > s+t)}{P(X > s)}$ a partir de las frecuencias.