Teorema Central del Límite

Ejercicio 1

1. Sea $X \sim Bin(144, 0{,}25)$, calcular $P(X \leq 40)$ utilizando la aproximación normal. Simule 100 variables $Bin(144, 0{,}25)$ y cuente cuántas veces $X \leq 40$. Compare con la probabilidad calculada.
2. Sea $X \sim \mathcal{P}(100)$, calcular $P(X > 90)$ utilizando la aproximación normal.

Ejercicio 2
Los resistores de cierto tipo tienen resistencias que en promedio son de $\mu = 200$ ohms, con una desviación estándar de $\sigma = 10$ ohms. Se toman (al azar) 25 de estos resistores y se conectan (en forma independiente) en un circuito.

1. Calcular la probabilidad (aproximada) de que la resistencia promedio de los 25 resistores este entre 199 y 202 ohms.
2. Calcular la probabilidad (aproximada) de que la resistencia total de los 25 resistores no sea mayor que 5100 ohms.

Ejercicio 3
Si $X_1, \ldots, X_n$ $iid \sim \exp(5)$ y n es muy grande, ¿a qué se aproxima la distribución de $\overline{X}_n$?

Ejercicio 4

1. Si $X \sim \mathrm{BN}(k, p)$, con k muy grande, hallar una aproximación de su distribución. *Sugerencia: Desomponer en suma de geométricas.*
2. Si $X \sim BN(1600, 0{,}25)$, calcular $P(X > 6200)$.

Ejercicio 5
En este ejercicio aplicaremos el Teorema Central del Límite al método de Montecarlo. Sean D una región de $[0,1]^2$,$(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ $iid \sim \mathcal{U}([0,1]^2)$ y $a_n = \dfrac{\{i : 1 \leq i \leqslant n \ y \ U_i \in D\}}{n}$. Mostrar que para n grande

$$\mathbf{P}\left(\frac{\sqrt{n}\,|a_n - \text{área}(D)|}{\sqrt{\text{área}(D)(1-\text{área}(D))}} \geqslant z_{\frac{\alpha}{2}}\right) \cong \alpha.$$

Intervalos de Confianza

Ejercicio 6
Una máquina produce piezas metálicas de forma cilíndrica. Se toma una muestra de piezas cuyos diámetros son 1,01, 0,97, 1,03, 1,04, 0,99, 0,98, 0,99, 1,01 y 1,03 centímetros. Encontrar un intervalo de confianza 0,99 para el diámetro promedio de piezas de esta máquina, si se supone una distribución aproximadamente normal.

Ejercicio 7

1. Una máquina de refrescos está ajustada de tal manera que la cantidad de líquido despachada se distribuye aproximadamente en forma normal con una desviación estándar igual a 0,15 decilitros. Encontrar un intervalo de confianza 0,95 para la media de todos los refrescos que sirve esta máquina si una muestra aleatoria de 36 refrescos tiene un contenido promedio de 2,25 decilitros.
2. ¿Qué tan grande tiene que ser la muestra si se desea tener una confianza del 95 % de que la media muestral no difiera en más de 0,03 decilitros de la media real μ?

Ejercicio 8
Se ha llevado a cabo un experimento para determinar la vida útil de un cierto tipo de mecha (en condiciones extremas). Para esto se tomaron 50 mechas al azar de un stock mayor de mechas, y se les midió el tiempo de vida (en cientos de horas) obteniéndose un promedio muestral $\overline{X}_n = 2{,}266$. Por estudios previos se sabe que el tiempo de vida de las mechas de ese tipo tiene una distribución $N(\mu, \sigma^2)$ con $\sigma = 1{,}935$. Determinar un intervalo de confianza para la vida útil promedio μ de las mechas de ese tipo, con una confianza igual a 0,95.

Ejercicio 9
Los contenidos de 7 recipientes similares de ácido sulfúrico son 9,8, 10,2, 10,4, 9,8, 10,0, 10,2 y 9,6 litros. Encontrar un intervalo de confianza 0,95 para la media de todos los recipientes, suponiendo una distribución normal.

Ejercicio 10
Los siguientes son los pesos, en decagramos, de 10 paquetes de semillas de pasto distribuidos por determinada compañía: 46,4, 46,1, 45,8, 47,0, 46,1, 45,9, 45,8, 46,9, 45,2 y 46,0. Encontrar un intervalo de confianza 0,95 para la varianza de todos los paquetes de semillas de pasto que distribuyó esta compañía, suponiendo una población normal.

Ejercicio 11
Un fabricante de baterías para automóvil asegura que sus baterías duran, en promedio, 3 años con una varianza de un año. Si 5 de estas baterías tienen duraciones de 1,9, 2,4, 3,0, 3,5 y 4,2 años, determine un intervalo de confianza 0,95 para σ^2 e indique si es válida la afirmación del fabricante de que $\sigma^2 = 1$. Se supone que la población de las duraciones de las baterías se distribuye aproximadamente en forma normal.

Ejercicio 12

1. Al probar 100 barras de acero que fabricó la compañía A se encuentra que 12 no cumplieron con las especificaciones.
   a) Determinar un intervalo de confianza 95 % para la proporción verdadera de las barras de acero que no cumplen las especificaciones.
   b) Si se desea estimar la proporción verdadera que no cumple con las especificaciones con una exactitud de 0,05 y una confianza de 0,95. ¿Cuántas barras se deben examinar?
2. *a*) Hallar un intervalo de confianza 98 % para la proporción de artículos defectuosos en un proceso de producción, si se encontraron 8 artículos defectuosos en una muestra de tamaño 100.
   b) ¿Qué tan grande debe ser la muestra para tener una confianza de 98 % de que la proporción estimada no difiera más de 0,05 de la proporción verdadera de defectuosos?
3. Se está considerando un nuevo sistema de montaje industrial. Con el sistema actual, el 80 % de los montajes se considera “perfecto”. Se realiza una muestra de 40 montajes experimentales con el nuevo sistema y 34 de ellos son “perfectos”. Hallar un intervalo de confianza 95 % para la probabilidad de éxito (montaje “perfecto”) del nuevo sistema. ¿Se obtienen grandes mejoras con el nuevo sistema?