

Prueba Suplementaria - Probabilidad y Estadística

Miércoles 17 de abril de 2013

Número de lista	APELLIDO, Nombre	Cédula de identidad

Múltiple Opción

*La pregunta múltiple opción correcta vale 2 puntos. El desarrollo vale 3 puntos (uno por parte).
Rellenar con claridad y en mayúscula la opción que considere correcta.
Se permite el uso de cuadernos, textos, calculadora y lápices.*

Problema

En un juego el participante tira secuencialmente tres dados hasta que los tres quedan en el valor 4. Lanza el primer dado X_1 veces hasta obtener un 4, luego X_2 el segundo dado hasta obtener otro 4 y finalmente el tercero X_3 veces hasta obtener el último 4.

- (1) Hallar la distribución de X_1 , y calcular $P\{X_1 \leq 2\}$.
- (2) El número de tiradas hasta que se termine el juego es $Y = X_1 + X_2 + X_3$. Se sabe que X_1 , X_2 y X_3 son independientes. Hallar la distribución de Y , y calcular $P\{Y = 5\}$.
- (3) En OTRO juego se comienza tirando los tres dados a la vez y en cada instancia se vuelven a tirar sólo los que no cayeron en 4 y no se tocan los en los que ya salió el 4. Si llamamos Z a la cantidad de tiradas en ese juego (tiradas que podían ser de 3, 2 o 1 dado, según los resultados, pero siempre se consideran como una). Calcular $P\{Z \leq 2\}$.
Sugerencia: observar que $Z = \max\{X_1, X_2, X_3\}$.

Múltiple Opción

Se consideran dos variables independientes X e Y con distribución de Poisson de parámetro $\lambda = 5$. Sea $p = P(\max(X, Y) \leq 2)$

Dicha probabilidad es:

- A):** $p = e^{-10}(18.5)^2$.
B): $p = e^{-5}(18.5)^2$.
C): $p = e^{-10}(18.5)$.
D): $p = e^{-5}(55)^2$.
E): $p = e^{-25}(55)^2$.
F): Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

Solución

Problema

Por definición, como la probabilidad de sacar un 4 es $\frac{1}{6}$ se tiene que

$$X_i \sim Geo\left(\frac{1}{6}\right), i = 1, 2, 3, Y \sim BN\left(3, \frac{1}{6}\right)$$

Esto contesta las partes de (1) y (2) que refieren a la distribuciones. Para el resto se tiene:

- (1) $P(X_1 \leq 2) = P(X_1 = 1) + P(X_1 = 2) = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \frac{1}{6} = \frac{11}{36} \cong 0.30555$.
- (2) $P(Y = 5) = C_2^4 \left(\frac{5}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^3 = 6 \frac{25}{6^5} = \frac{25}{6^4} \cong 0.01929$.
- (3) Si observa que se hace una tirada nueva si en al menos un dado aún no salió 4 se concluye que $Z = \max(X_1, X_2, X_3)$, y por ende:

$$P(Z \leq 2) = P(\max(X_1, X_2, X_3) \leq 2) = P(X_1 \leq 2)^3 = \left(\frac{11}{36}\right)^3 \cong 0.02853$$

Múltiple Opción

Utilizando independencia y las propiedades de una distribución:

$$P(\max(X, Y) \leq 2) = P(X \leq 2)^2 = [e^{-5}(1 + 5 + \frac{25}{2})]^2 = e^{-10}(18.5)^2,$$

Por lo tanto la respuesta correcta es la A.