Facultad de Ingeniería
IMERL
PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA
Curso 2013
Práctico 1

Elementos de conteo

Ejercicio 1
En cierta ciudad las matrículas de los autos se forman con 2 vocales diferentes seguidas de 5 dígitos todos diferentes.

1. Calcular la cantidad de matrículas que pueden hacerse.
2. Calcular cuántas de ellas comienzan con A y terminan con 89.

Ejercicio 2
De un grupo formado por 3 ingenieros, 5 economistas y 4 arquitectos deben seleccionarse 4 para formar una comisión.

1. Calcular cuántas comisiones diferentes podrían formarse.
2. Calcular cuántas de esas comisiones estarían integradas por un ingeniero, dos economistas y un arquitecto.
3. Calcular en cuántas configuraciones hay por lo menos dos arquitectos.

Ejercicio 3
Usted dispone de una caja fuerte que se abre mediante una clave de 5 dígitos (pueden ser repetidos). Un intruso puede deducir, mediante análisis de humedad de los botones, los dígitos que usted presiona (pero no si fueron repetidos).

1. Calcular la cantidad de claves posibles.
2. ¿Usted repetiría algún dígito en su clave? Explicar.

Ejercicio 4
Se juega a un juego del tipo 5 de Oro: hay que acertar 5 números, elegidos dentro de 44 posibilidades.

1. ¿Cuántas jugadas posibles hay?
2. Si se eligen 5 números a priori, ¿cuántas jugadas posibles hay que contengan exactamente uno de los números elegidos?
3. Si se eligen 5 números a priori, ¿cuántas jugadas posibles hay que contengan por lo menos 2 de los números elegidos?

Ejercicio 5
* Usted va a la panadería a comprar una docena de bizcochos. En la panadería sólo quedan croissants, margaritas y galletas en cantidades suficientes.

1. ¿Cuántas elecciones distintas puede hacer?
2. Usted llega a la facultad con α croissants, β margaritas y γ galletas ($\alpha+\beta+\gamma = 12$) y los reparte entre usted y 11 amigos. ¿De cuántas formas los puede repartir? (Calcular en función de α, β y γ).
3. ¿Cuánto deben valer α, β y γ para que dicha cantidad sea máxima?

Ejercicio 6
* Sean $A_1, \ldots, A_n$ conjuntos finitos cualesquiera dentro de X, con $n \geq 3$.

1. Probar que $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$.
2. Probar que $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$.
3. Generalizar la igualdad anterior para todo $n \geq 3$.

Ejercicio 7
Contar la cantidad de maneras de desordenar el número 123456789, de modo que ningún dígito quede ubicado en su posición original.

Propiedades de la Probabilidad

Ejercicio 8
"Lenguaje natural y sucesos" Sean $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad, A, B y C sucesos.
Expresar mediante operaciones con conjuntos los sucesos que corresponden a:

1. Ocurren A y B.
2. Ocurre A u ocurre B.
3. Ocurren los tres sucesos.
4. Ocurre por lo menos uno de los tres sucesos.
5. Ocurre A u ocurre B pero no los dos simultáneamente.
6. No ocurre B.
7. No ocurre ni A ni B.
8. No ocurre ninguno de los tres sucesos.
9. Ocurre A y no ocurre B.
10. Ocurre exactamente uno de los tres sucesos.
11. Ocurren por lo menos dos de los tres sucesos.

Ejercicio 9
Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad, A y B sucesos. Demostrar que:

1. Si $A \subset B$ entonces $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$. Deducir que $P(A) \leq P(B)$.
2. $P(A \cup B) \geq \text{máx}\{P(A), P(B)\}$ y $P(A \cap B) \leq \text{mín}\{P(A), P(B)\}$.

Ejercicio 10
Sean $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad, A y B sucesos tales que $P(A) = 1/3$ y $P(B) = 1/2$. Determinar el valor de $P\left(A^C \cap B\right)$ en los siguientes casos:

1. A y B incompatibles ($A \cap B = \emptyset$).
2. $A \subset B$.
3. $P(A \cap B) = 1/8$.

Ejercicio 11
Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad.
Se consideran los sucesos A y B con: $P(A) = 3/8$, $P(B) = 1/2$, $P(A \cap B) = 1/4$. Calcular:

1. $P\left(A^C\right)$ y $P\left(B^C\right)$.
2. $P(A \cup B)$.
3. $P\left(A^C \cap B^C\right)$.
4. $P\left(A^C \cap B\right)$ y $P\left(A \cap B^C\right)$.

Ejercicio 12
Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad. Demostrar que:

1. Si A, B y C son sucesos entonces se cumple que: $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.
2. * Si $A_1, \ldots, A_n$ son sucesos probar que:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{1 \leq i \leq n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap \ldots \cap A_n)$$

Ejercicio 13
* Un secretario o secretaria coloca aleatoriamente n cartas diferentes en sobres. En cada uno de los sobres está escrito el nombre del destinatario en cada una de las n cartas, de modo que lo único que debe hacer es acertar cada carta en el sobre que le corresponde.

1. Calcular la probabilidad p_n de que al menos una carta vaya a parar al sobre que le toca. *Sugerencia: considere el suceso* $A_i =$ *"la carta i va a al sobre i" y calcular la probabilidad de la unión.*
2. Calcular $\text{lím}_n \, p_n$.

Ejercicio 14
Un sistema de canalización de agua tiene 4 compuertas, dispuestas como en la figura . Cada compuerta se abre y cierra al azar, dejando pasar agua (si está abierta) o impidiéndolo. Supongamos las probabilidades siguientes:

$P\,(\text{I abierta}) = P\,(\text{II abierta}) = P\,(\text{IV abierta}) = 0,55,$

$P\,(\text{III abierta}) = 0,36.$

$P\,(\text{I cerrada,II abierta}) = P\,(\text{I abierta,IV cerrada}) = P\,(\text{I cerrada,III abierta}) = 0,2,$

$P\,(\text{II abierta, IV abierta}) = 0,35,$

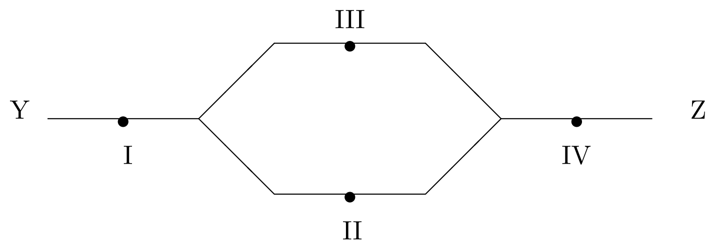
$P\,(\text{III abierta, IV cerrada}) = 0,26,$

$P\,(\text{II abierta, III abierta}) = 0,$

$P\,(\text{I o II o IV abierta}) = 0,85,$

$P\,(\text{I o III o IV abierta}) = 0,87.$

Calcular la probabilidad de que un torrente de agua lanzado en el punto Y llegue a Z.



Ejercicio 15
Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad.

1. Mostrar que si A y B son sucesos entonces:

$$P\,(A \cup B) \leq P\,(A) + P\,(B)$$

2. Deducir que si $A_1, A_2, \ldots, A_m$ son sucesos entonces:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{m} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{m} P\,(A_n)$$

3. * Demostrar que si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una colección de sucesos se cumplen:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{N} P\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right)$$
$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{N} P\left(\bigcap_{n=1}^{N} A_n\right)$$

   Sugerencia: aplicar el teorema de continuidad de la probabilidad.

4. * Deducir que si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una colección de sucesos entonces:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P\left(A_n\right).$$

5. * Deducir que si $P\left(A_n\right) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ entonces $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$.

Cálculo de probabilidades

Ejercicio 16

Determinar el espacio muestral asociado a cada uno de los siguientes experimentos aleatorios, y en el caso que sea finito, indicar su cardinal. [1]

1. Lanzar al aire una moneda tres veces
2. Extraer dos fichas sucesivamente y sin reposición de una bolsa que contiene fichas numeradas con los 5 dígitos pares.
3. Lanzar una moneda finalizando el experimento si sale número; si sale cara, tirar además un dado.
4. Seleccionar al azar dos alumnos de una clase de 30.
5. Valor de la tasa de inflación para este año.

Ejercicio 17

1. Se juega a un juego del tipo 5 de Oro: hay que acertar 5 números, elegidos dentro de 44 posibilidades.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de ganar?

   b) ¿Cuál es la probabilidad de acertar en al menos 3 números (es decir, acertar exactamente 3, exactamente 4, o exactamente 5 números)?

   c) Construir un espacio muestral para este experimento.

[1] El cardinal de un conjunto finito es su cantidad de elementos, se denota por $\text{card}(A)$, $\#A$, $|A|$.

2. Se juega a la baraja con 40 cartas, 10 de cada palo. Si uno toma 3 cartas, ¿cuál es la probabilidad de elegirlas todas del mismo palo?

Ejercicio 18
Si a un ómnibus con n asientos suben i personas con $i \leq n$.

1. ¿De cuántas maneras pueden elegirse los asientos en los que se sentará la gente?
2. ¿De cuántas maneras distintas puede disponerse la gente en el ómnibus?
3. Asumamos ahora que la gente se dispone al azar y que cada disposición particular tiene la misma probabilidad (equiprobabilidad). Supongamos que el ómnibus tiene un pasillo en el medio; y que a cada costado del pasillo hay m filas de 2 asientos. Para darle un toque romántico, suponga ahora que sube al ómnibus Brad Pitt o Angelina Jolie (según la opción de cada uno), ¿qué probabilidad tiene Ud. de quedar sentado al lado del personaje en cuestión?

Ejercicio 19

1. Calcular la probabilidad de obtener una suma de puntos menor que 18 al tirar 3 dados.
2. Se elige un grupo de n personas al azar. Descartando los años bisiestos y suponiendo por lo tanto años de 365 días, ¿cuál es la probabilidad de que al menos dos personas cumplan el mismo día? ¿Cuánto tiene que ser n para que dicha probabilidad supere a 0.5?

Ejercicio 20
Si un dado está cargado de modo tal que $P(\{i\}) = \alpha i$, $\forall i = 1, 2, \ldots, 6$.

1. Determinar el valor de α
2. ¿Cuál es la probabilidad de sacar 5?
3. ¿Cuál es la probabilidad de sacar par?

Ejercicio 21
** Simular 100 tiradas de un dado equilibrado y calcular la frecuencia de cada valor. Graficar. Estudiar qué ocurre al aumentar la cantidad de tiradas.

Ejercicio 22
** Simular los cumpleaños del Ejercicio 17 para diferentes cantidades de personas. Comparar con los valores calculados.

Ejercicio 23
** Simular 100 tiradas de un dado cargado como en el Ejercicio 18 y calcular la frecuencia de cada valor. Graficar. Estudiar que ocurre al aumentar la cantidad de tiradas.