

Pruebas de hipótesis no paramétricas

Pruebas de Aleatoriedad

**Ejercicio 1**

Un corredor observó la siguiente venta de bonos a lo largo de un año:

enero	19	julio	22
febrero	23	agosto	24
marzo	20	setiembre	25
abril	17	octubre	28
mayo	18	noviembre	30
junio	20	diciembre	21

1. Aplique la prueba de rachas hacia arriba y hacia abajo para decidir si los datos pueden considerarse *iid*.
2. Utilizando la prueba de correlación de rangos de Spearman analice posibles tendencias en la venta de bonos.

**Ejercicio 2**

Al realizar pruebas de torsión con un determinado tipo de alambre de acero se obtuvieron los siguientes resultados. Estudie su aleatoriedad.

$x_1 = 2,5$	$x_6 = 3,79$	$x_{11} = 4,98$	$x_{16} = 3,36$	$x_{21} = 3,38$	$x_{26} = 4,04$	$x_{31} = 4,68$
$x_2 = 4,15$	$x_7 = 4,85$	$x_{12} = 2,57$	$x_{17} = 3,54$	$x_{22} = 4,07$	$x_{27} = 4,16$	$x_{32} = 3,88$
$x_3 = 2,72$	$x_8 = 2,87$	$x_{13} = 2,97$	$x_{18} = 3,89$	$x_{23} = 2,7$	$x_{28} = 4,71$	$x_{33} = 4,19$
$x_4 = 2,63$	$x_9 = 3,47$	$x_{14} = 4,5$	$x_{19} = 3,03$	$x_{24} = 2,82$	$x_{29} = 2,96$	$x_{34} = 2,52$
$x_5 = 3,69$	$x_{10} = 4,13$	$x_{15} = 4,95$	$x_{20} = 3,98$	$x_{25} = 3,29$	$x_{30} = 3,97$	$x_{35} = 2,8$

**Ejercicio 3**

Se consideraron 14 muestras de un cierto mineral para determinar su contenido de hierro, obteniéndose los siguientes datos:

74,3	74,1	75,4	67,4	69,3	70,5	70,1	69,9	68,7	70,3	70,7	71,1	74,4	70,2
------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

Estudiar la aleatoriedad de la muestra.

**Ejercicio 4**

Las siguientes son mediciones de temperatura tomadas a la misma hora durante 20 días:

1	22,67	6	17,88	11	21,21	16	22,54
2	21,66	7	23,17	12	20,60	17	21,60
3	16,31	8	24,85	13	17,44	18	17,14
4	15,95	9	15,17	14	23,33	19	21,02
5	15,15	10	23,19	15	17,63	20	21,05

Aplique pruebas de aleatoriedad para determinar si la muestra puede considerarse aleatoria.

### Ejercicio 5

Los siguientes datos corresponden a porcentaje de divorcios en los Estados Unidos:

Año	Porcentaje
1945	3,5 %
1950	2,6 %
1955	2,3 %
1960	2,2 %
1965	2,5 %
1970	3,5 %
1975	4,8 %
1980	5,2 %
1985	5,0 %

Establezca si existe una tendencia en los datos.

### Pruebas de Ajuste

#### Ejercicio 6

Los siguientes datos son mediciones *iid* de la concentración de hierro en una aleación. Usar la prueba de Kolmogorov-Smirnov para ajustar a una distribución de Cauchy con parámetros  $M = 50$  y  $b = 2$  ( $\mathcal{C}(50, 2^2)$ ).

$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$	$X_8$	$X_9$	$X_{10}$	$X_{11}$	$X_{12}$	$X_{13}$	$X_{14}$	$X_{15}$
62	47	50	49	55	52	49	15	53	49	50	52	57	51	46

#### Ejercicio 7

Simular una muestra de 100 datos *iid* con distribución uniforme en el intervalo  $[-1, 1]$ .

1. Usar una prueba de de Kolmogorov-Smirnov para ajustar la muestra a una distribución uniforme en el intervalo  $[-1, 1]$  ( $\mathcal{U}[-1, 1]$ ).
2. Suponga que quiere ajustar la misma muestra a una distribución uniforme pero no conoce los parámetros. Utilizando una parte de la muestra para estimar y otra para hacer la prueba use Kolmogorov-Smirnov para ajustar a una distribución uniforme con los parámetros estimados. Compare los resultados que obtiene estimando parámetros por el método de máxima verosimilitud y por el método de los momentos.

#### Ejercicio 8

Se tienen las siguientes mediciones *iid* del punto de ebullición de un compuesto de silicio (en grados Celsius).

$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$	$X_8$
99.78	99.17	100.06	100.14	99.43	100.60	100.59	99.98
$X_9$	$X_{10}$	$X_{11}$	$X_{12}$	$X_{13}$	$X_{14}$	$X_{15}$	$X_{16}$
100.16	100.09	99.91	100.36	99.71	101.09	99.93	100.06

Realizar una prueba de D'Agostino para la muestra. ¿Puede asumir que los datos son normales?

#### Ejercicio 9

Se tienen los siguientes tiempos de falla *iid* (en minutos) de ciertos componentes electrónicos.

$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$	$X_8$	$X_9$	$X_{10}$
1.75	0.13	1.63	0.56	18.45	7.95	0.80	3.37	0.46	1.23
$X_{11}$	$X_{12}$	$X_{13}$	$X_{14}$	$X_{15}$	$X_{16}$	$X_{17}$	$X_{18}$	$X_{19}$	$X_{20}$
1.50	4.24	7.18	7.44	6.62	3.45	0.62	2.85	0.81	3.10

1. Estudiar si puede considerarse que los datos son exponenciales de parámetro  $\lambda = 0,25$  realizando una prueba de Kolmogorov-Smirnov.
2. Estudiar si puede considerarse que los datos son exponenciales.

### Ejercicio 10 (Examen Febrero de 2011)

Se considera  $F_1$  la función de distribución de una variable aleatoria  $N(1, 1)$  (media 1 y varianza 1) y  $F_2$  la función de distribución de una variable aleatoria  $N(2, 4)$  (media 2 y varianza 4). Se define la función  $F$  como:

$$F(t) = 0,2F_1(t) + 0,8F_2(t).$$

1. Pruebe que  $F$  es una función de distribución.
2. Escriba la función  $F$  en función de la función  $\Phi$ , siendo  $\Phi$  la función de distribución de una variable aleatoria  $N(0, 1)$ .
3. Además se considera el siguiente experimento. En una planilla  $A$  se tiene una lista de datos iid que se sabe siguen una distribución  $N(1, 1)$ . En otra planilla  $B$  se tiene otra lista de datos iid que se sabe siguen una distribución  $N(2, 4)$ . Se sabe además que los datos de la planilla  $A$  y de la planilla  $B$  son independientes entre sí. Se sortea al azar, de manera independiente,  $n$  veces, un número de dos posibles (1 y 2), con probabilidad 0,2 de que salga el 1 y 0,8 de que salga el 2. Si sale el número 1, se toma un dato de la planilla  $A$  y si sale el 2, se toma de la planilla  $B$ . Justifique que la muestra de  $n$  datos así obtenida sigue la distribución  $F$ .
4. Se considera la siguiente muestra:

4,87	7,82	1,86	1,82	4,44	3,03	4,72	2,06	0,4	0,29	5,93	-0,69
------	------	------	------	------	------	------	------	-----	------	------	-------

Indique si la muestra se ajusta a la distribución  $F$  definida antes (realice una prueba de hipótesis).

## Pruebas de Comparación

### Ejercicio 11

Los datos siguientes representan las variaciones de población (en porcentajes) entre 1970 y 1980 en regiones. Aplicar la prueba de Kolmogorov-Smirnov para ver si las variaciones son iguales.

rural	1.1	-21.7	-16.3	-11.3	-10.4	-7	-2	1.9	6.2
-------	-----	-------	-------	-------	-------	----	----	-----	-----

no rurales	-2.4	9.9	14.2	18.4	20.1	23.1	70.4
------------	------	-----	------	------	------	------	------

### Ejercicio 12

Sean las siguientes muestras *iid* independientes. La muestra  $A$  tiene distribución  $F$  y la muestra  $B$  tiene distribución  $G$ .

A	79	13	138	129	59	76	75	53
B	96	141	133	107	102	128	110	104

Aplicar la prueba de comparación de Kolmogorov-Smirnov para ver si ambas muestras tienen la misma distribución.

## Pruebas de Independencia

### Ejercicio 13

Un grupo de investigadores desea evaluar si un nuevo equipo de tratamiento de aguas residuales es efectivo para reducir los niveles de contaminantes de las aguas vertidas a un río por 10 curtiembres. A tales efectos se midió el nivel de contaminantes antes (A) y después (B) del tratamiento, los resultados fueron los siguientes:

Muestra A

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1.52	2.92	4.44	4.24	1.72	3.70	3.64	4.82	2.12	2.08

Muestra B

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2.08	3.03	0.80	0.96	2.71	2.39	3.07	2.87	0.33	1.76

Utilizando pruebas de hipótesis:

1. Estudiar la aleatoriedad de ambas muestras.
2. ¿Hay independencia entre los datos de una muestra y otra? Justifique su respuesta.