[Büten Zar]
B.Sz

Comentarios

Büten Zar

FB

Letra

Ejercicio 1

Ejercicio 2

Ejercicio 3

Ejercicio 4

Ejercicio 5

Ejercicio 6

Ejercicio 7

Ejercicio 8

Ejercicio 9

Ejercicio 10

Ejercicio 1

Menú

Sea X una variable aleatoria real continua, $a<b \in \mathbb{R}$.

① Demostrar: $\boxed{P(a<X\leq b) = P(a\leq X\leq b) = P(a<X<b) = F_X(b) - F_X(a)}$

X es una VA contínua $\overset{def}{\Longrightarrow}$ $F_X(x)$ es contínua $\lim_{x\to\alpha} F_X(x) = F_X(\alpha)$

Usando las propiedades demostradas anteriormente

$$P(a<X\leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

$$P(a\leq X\leq b) = F_X(b) - \lim_{x\to a^-} F_X(x) \overset{X\text{ cont}}{=} F_X(b) - F_X(a)$$

$$P(a<X<b) = \lim_{x\to b} F_X(x) - F_X(a) \overset{X\text{ cont}}{=} F_X(b) - F_X(a)$$

Entonces queda demostrada la igualdad

② Si además X es absolutamente contínua con densidad f_X deducir que:

$$P(a<X\leq b) = P(a\leq X\leq b) = P(a<X<b) = \int_a^b f_X(x)\,dx$$

como X es AC $\Longrightarrow$ $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = P(X\leq x)$

$$F_X(b) - F_X(a) = \int_{-\infty}^{b} f_X(t)\,dt - \int_{-\infty}^{a} f_X(t)\,dt = \int_a^b f_X(t)\,dt$$

Y usando la parte anterior se deduce lo buscado.

Ejercicio 2

Menú

X es VA AC con densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ bx & \text{si } x \in (0,1] \\ ae^{-x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Hallar a y b sabiendo que

$$P(X \in [0,2]) = 2P(X \in [2,4])$$

$f_X(x)$ es función de densidad $\Longrightarrow \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1 = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} f_X(x)\,dx}_{0} + \int_0^1 f_X(x)\,dx + \int_1^{+\infty} f_X(x)\,dx$

$$1 = \int_0^1 f_X(t)\,dt + \int_1^{+\infty} f_X(t)\,dt \Longrightarrow 1 = \int_0^1 bt\,dt + \int_1^{+\infty} ae^{-t}\,dt$$

$$1 = \frac{bt^2}{2}\Big|_0^1 + a\left(\lim_{n\to+\infty} -e^{-n} + e^{-1}\right) \Longrightarrow \boxed{1 = \frac{b}{2} + \frac{a}{e}}$$

$$2P(2 \leq X \leq 4) \overset{ej\,1.b}{=} 2\int_2^4 ae^{-x}\,dx = 2a\left(-e^{-x}\Big|_2^4\right) = \boxed{2a\left(-\frac{1}{e^4} + \frac{1}{e^2}\right)}$$

$$P(0 \leq X \leq 2) = \int_0^2 f_X(x)\,dx = \int_0^1 f_X(x)\,dx + \int_1^2 f_X(x)\,dx = \boxed{\frac{b}{2} + \frac{a}{e} - \frac{a}{e^2}}$$

$$P(X \in [0,2]) = 2P(X \in [2,4]) \iff \frac{b}{2} + \frac{a}{e} - \frac{a}{e^2} = \frac{2a}{e^2} - \frac{2a}{e^4}$$

$$\frac{b}{2} = \frac{3a}{e^2} - \frac{2a}{e^4} - \frac{a}{e}$$

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{b}{2} + \dfrac{a}{e} \\ \dfrac{b}{2} = \dfrac{3a}{e^2} - \dfrac{2a}{e^4} - \dfrac{a}{e} \end{cases} \Longrightarrow 1 = \frac{3a}{e^2} - \frac{2a}{e^4} \Longrightarrow 1 = \left(\frac{3e^2 - 2}{e^4}\right)a$$

$$\boxed{\frac{e^4}{3e^2 - 2} = a}$$

$$2\left(1 + \frac{\frac{-e^4}{3e^2-2}}{e}\right) = b$$

$$2 + \frac{-e^3}{3e^2 - 2} = b \Longrightarrow \boxed{b = \frac{-2e^3 + 6e^2 - 4}{3e^2 - 2}}$$

Ejercicio 3

Menú

1

$$f_1(x) = \begin{cases} c_1\sqrt{x} & \text{si } x \in (0,1) \\ 0 & \text{si } x \notin (0,1) \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ c_2 x^2 & \text{si } x \in [1,2] \\ c_2 x & \text{si } x \in (2,3) \\ 0 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Hallar c_i para que f_i sea de densidad.

Se tiene que cumplir que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\,dx = 1$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{0} f_1(x)\,dx}_{0} + \int_0^1 f_1(x)\,dx + \underbrace{\int_1^{+\infty} f_1(x)\,dx}_{0} = 1 \iff \int_0^1 f_1(x)\,dx = 1 \iff c_1 \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = 1$$

$$\iff c_1 \cdot \frac{2}{3} = 1 \iff \boxed{c_1 = \frac{3}{2}}$$

$f_1(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \implies f_1(x)$ resulta una densidad

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x)\,dx = 1$$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{1} f_2(x)\,dx}_{0} + \int_1^2 f_2(x)\,dx + \int_2^3 f_2(x)\,dx + \underbrace{\int_3^{+\infty} f_2(x)\,dx}_{0} = 1 \iff \int_1^2 c_2 x^2\,dx + \int_2^3 c_2 x\,dx = 1$$

$$c_2 \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 + c_2 \frac{x^2}{2}\Big|_2^3 = 1 \iff \frac{8}{3}c_2 - \frac{1}{3}c_2 + \frac{9}{2}c_2 - 2c_2 = 1$$

$$\frac{14c_2 + 27c_2 - 12c_2}{6} = 1$$

$$29c_2 = 6 \implies \boxed{c_2 = \frac{6}{29}}$$

$f_2(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \implies f_2(x)$ resulta una densidad

(2) Se considera ahora una variable aleatoria X con densidad f_i:

(a) Calcular $P(0,3 < X < 0,6)$, $P(X>2)$, $P(1/2 < X < 3/2)$

para f_1

$$P(0,3<X<0,6) = \int_{0,3}^{0,6} \frac{2}{3}\sqrt{x}\,dx = x^{3/2}\Big|_{0,3}^{0,6} = (0,6)^{3/2} - (0,3)^{3/2}$$

$$P(X>2) = \int_{2}^{+\infty} 0\,dx = 0$$

$$P\left(\tfrac{1}{2}<X<\tfrac{3}{2}\right) = \int_{1/2}^{3/2} \frac{2}{3}\sqrt{x}\,dx = \int_{1/2}^{1} \frac{3}{2}\sqrt{x}\,dx + \underbrace{\int_{1}^{3/2} \frac{3}{2}\sqrt{x}\,dx}_{0} = \int_{1/2}^{1} \frac{3}{2}\sqrt{x}\,dx = x^{3/2}\Big|_{1/2}^{1}$$

$$= 1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{3/2}$$

Para f_2

$$P(0,3<X<0,6) = \int_{0,3}^{0,6} 0\,dx = 0$$

$$P(x>2) = \int_{2}^{+\infty} f_2(x)\,dx = \int_{2}^{3} f_2(x)\,dx + \underbrace{\int_{3}^{+\infty} f_2(x)\,dx}_{0} = \int_{2}^{3} \frac{6}{29}\,x\,dx = \frac{3}{29}x^2\Big|_{2}^{3}$$

$$= \frac{27}{29} - \frac{12}{29} = \frac{15}{29}$$

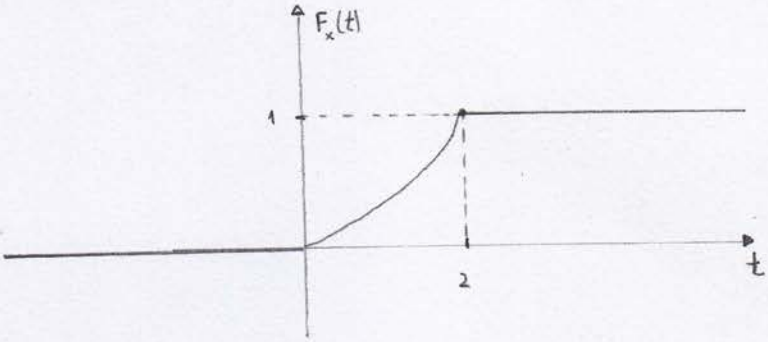
$$P\left(\tfrac{1}{2}<x<\tfrac{3}{2}\right) = \int_{1/2}^{3/2} f_2(x)\,dx = \int_{1/2}^{1} f_2(x)\,dx + \int_{1}^{3/2} f_2(x)\,dx = \int_{1}^{3/2} \frac{6}{29}x^2\,dx$$

$$= \frac{2}{29}x^3\Big|_{1}^{3/2} = \frac{27}{29 \cdot 4} - \frac{2}{29} = \frac{19}{116}$$

(b) Hallar la función de distribución de F_X para cada densidad y graficar.

Para f_1: $\quad F_X(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f_1(x)\,dx$

$$\int_0^t \frac{3}{2}\sqrt{x}\,dx = x^{3/2}\Big|_0^t = t^{3/2} \implies F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t^{3/2} & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

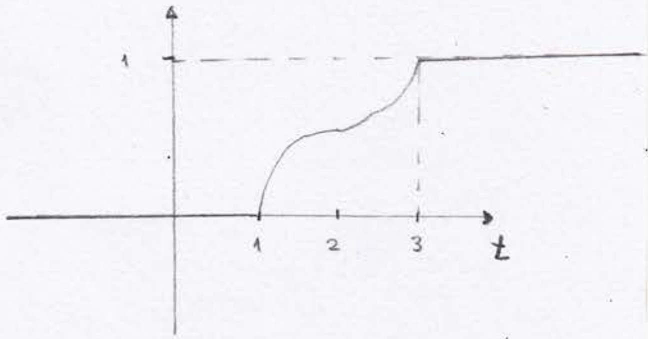


Para f_2:

$$\int_1^t \frac{6}{29}x^2\,dx = \frac{2}{29}x^3\Big|_1^t = \frac{2}{29}t^3 - \frac{2}{29} \qquad t \in [1,2]$$

$$\int_2^t \frac{6}{29}x\,dx = \frac{3}{29}x^2\Big|_2^t = \frac{3}{29}t^2 - \frac{12}{29} = \frac{6}{29}\left(\frac{t^2}{2} - 2\right) \qquad t \in (2,3)$$

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \frac{2}{29}(t^3 - 1) & \text{si } t \in [1,2) \\ \frac{6}{29}\left(\frac{t^2}{2} - 2\right) + \frac{7}{29} & \text{si } t \in [2,3) \\ 1 & \text{si } t \geq 3 \end{cases}$$

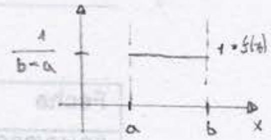


Menú

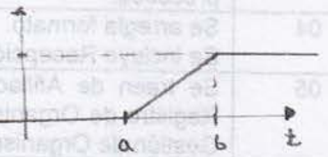
Ejercicio 4

Diremos que una VA X tiene distribución uniforme en el intervalo $[a,b]$ $\left(X \sim \mathcal{U}[a,b]\right)$ si X es AC y su densidad es:

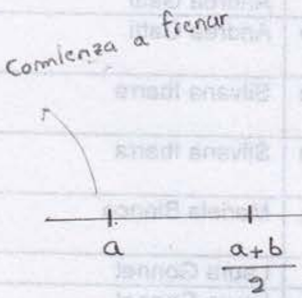
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{si } x \notin [a,b] \end{cases}$$



Se deduce que



$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ \frac{t-a}{b-a} & \text{si } t \in [a,b) \\ 1 & \text{si } t \geq b \end{cases}$$



① Se detenga más cerca de a que de b.

X = posición en la que se detiene el auto. $X \sim \mathcal{U}[a,b]$

$$P\left(a \leq X \leq \frac{a+b}{2}\right) = \int_a^{\frac{a+b}{2}} f_X(x)\,dx = \int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{1}{b-a}\,dx$$

$$= \frac{1}{b-a}\, x \Big|_a^{\frac{a+b}{2}} = \frac{a+b}{(b-a)2} - \frac{a}{b-a} = \frac{b-a}{2(b-a)} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

② Se detenga de tal modo que la distancia a a sea por lo menos 3 veces mayor que la distancia a b.

$$\text{dist}(x,a) > 3\,\text{dist}(x,b) \Rightarrow P(X-a > 3b-3X) \Leftrightarrow P\left(X > \frac{3b+a}{4}\right)$$

$$= 1 - F_X\left(\frac{3b+a}{4}\right) \qquad \left(a < \frac{a+3b}{4} < b\right)$$

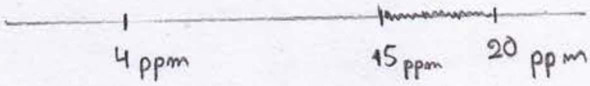
$$\Rightarrow F_X\left(\frac{3b+a}{4}\right) = \frac{\frac{3b+a-4a}{4}}{b-a} = \frac{3b-3a}{4b-4a} = 3/4$$

$$P\left(X > \frac{3b+a}{4}\right) = 1 - 3/4 = \boxed{\frac{1}{4}}$$

Ejercicio 5

X = nivel de concentración del contaminante

$X \sim U[4, 20]$



$$P(15 \leq X \leq 20) = \int_{15}^{20} \frac{1}{20-4}\, dt = \frac{1}{16}\left[20 - 15\right] = \frac{5}{16}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{si } x \notin [a,b] \end{cases}$$

(Densidad)

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ \dfrac{t-a}{b-a} & \text{si } t \in [a,b] \\ 1 & \text{si } t > b \end{cases}$$

Otra forma:

$$P(X \geq 15) = 1 - P(X \leq 15) = 1 - F_X(15) = 1 - \frac{15-4}{20-4} = 1 - \frac{11}{16}$$

$$= \boxed{\frac{5}{16}}$$

Ejercicio 6

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \ / \ f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } x\geq 0\end{cases} \qquad \lambda>0$$

① Demostrar que f es una función de densidad $\forall \lambda > 0$.

punto 1: $f(x)\geq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

si $x<0 \Rightarrow f(x)=0$

si $x\geq 0 \Rightarrow f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$; $\lambda > 0$; $e^{-\lambda x} > 0$

Se cumple $f(x)\geq 0 \ \forall x\in\mathbb{R}$

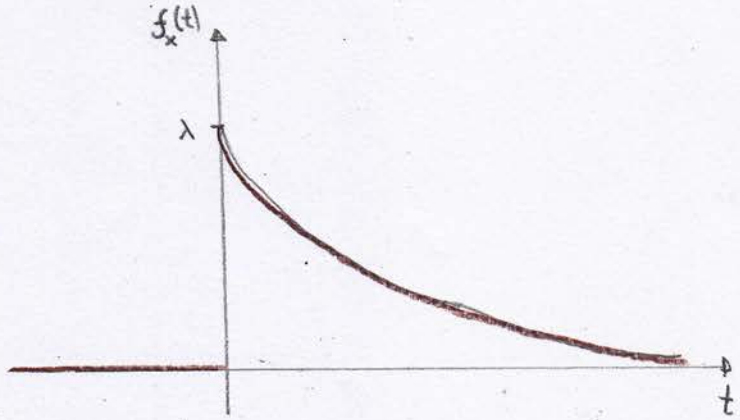
punto 2: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} 0\,dx}_{0} + \int_{0}^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}\,dx = -\int_{0}^{+\infty} -\lambda e^{-\lambda x}\,dx$$

cv
$u=-\lambda x$
$du=-\lambda\,dx$

$$= -\int_{0}^{-\infty} e^{u}\,du = \int_{-\infty}^{0} e^{u}\,du = \lim_{n\to-\infty} 1-e^{n} = 1$$

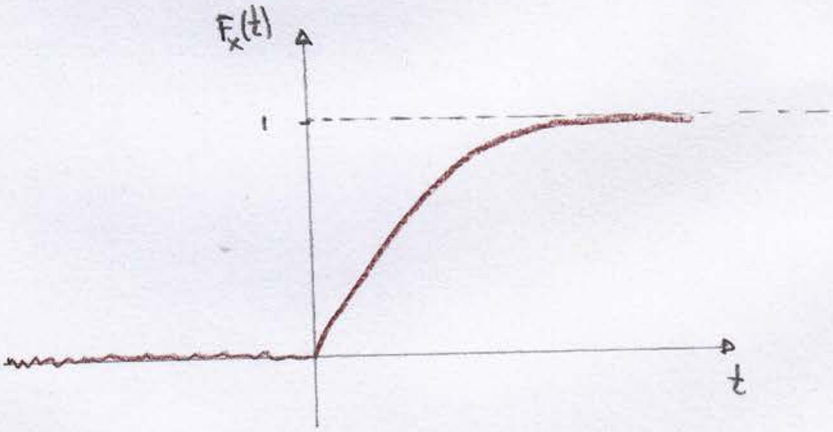
$\Rightarrow f$ es una función de densidad $\forall \lambda>0$.



(2) Si $X \sim \exp(\lambda)$ Hallar y graficar la función de distribución de F_X

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)\, dx = \begin{cases} \int_{-\infty}^{t} 0 \, dx = 0 & \text{si } t < 0 \\ \int_{-\infty}^{0} 0 \, dx + \int_{0}^{t} \lambda e^{-\lambda x} \, dx = 1 - e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

$$\boxed{F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}}$$



Ejercicio 7

1

X va que mide el tiempo de vida de cierto aparato.

$P(X \geq x_0) = 0{,}90$ si $X \sim \exp(0{,}01)$ determinar x_0

$\lambda = 0{,}01$

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (0{,}01)\, e^{-0{,}01 x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-(0{,}01)x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$P(X \geq x_0) \overset{X \text{ abs cont}}{=} 1 - P(X \leq x_0) = 1 - F_X(x_0)$$

$$0{,}90 = 1 - F_X(x_0) \Rightarrow F_X(x_0) = 0{,}10 \Leftrightarrow 1 - e^{-(0{,}01)x_0} = 0{,}10$$

$$\Leftrightarrow e^{-(0{,}01)x_0} = 0{,}90 \Leftrightarrow -(0{,}01)x_0 = \mathrm{Ln}(0{,}9)$$

$$x_0 = \frac{\mathrm{Ln}(0{,}9)}{-0{,}01} \simeq \boxed{10{,}53}$$

La menor cantidad de años enteros que vive el objeto tal que se cumpla la prob. 0,90 es 10 años

9 $T \sim \exp(\frac{1}{8})$ T mide tiempo de vida.

5 componentes se instalan en sistemas diferentes.

¿Cuál es la prob de que al menos 2 continuen funcionando después de 8 años?

$$P(T \geq 8) = 1 - P(T \leq 8) = 1 - (1 - e^{-1/8 \cdot 8}) = \boxed{e^{-1}}$$

Sea X va mide cantidad componentes funcionando

$$X \sim Bin(5, e^{-1})$$

$$P(x \geq 2) = 1 - P(x=0) - P(x=1) = 1 - C_0^5 (e^{-1})^0 (1-e^{-1})^5 - C_1^5 (e^{-1})^1 (1-e^{-1})^4$$

$$= 1 - 0,1001 - 0,29368 \cong 0,6062$$

La probabilidad de que dos o mas componentes continuen funcionando después de 8 anos es de 0,6062

Menú

Ejercicio 8

[Büten Zar]
B.Sz

$X \sim N(40, 6^2)$ y $Z \sim N(0,1)$

① $\boxed{P(Z > 1{,}84)}$

$$1 - P(Z \leqslant 1{,}84) \overset{tabla}{=} 1 - 0{,}9671 = 0{,}0329$$

② $\boxed{P(-1{,}97 < Z < 0{,}86)}$

Z es AC $\Longrightarrow$ necesita $\int_{-1,97}^{0,86} f_z(t)\, dt$

$$\int_{-1,97}^{0} f_z(t)\, dt + \int_{0}^{0,86} f_z(t)\, dt = -F_z(-1{,}97) + F_z(0{,}86) \overset{tabla}{=} -(1 - F_z(1{,}97)) + 0{,}8051$$

$$= -(1 - 0{,}9756) + 0{,}8051 = 0{,}8051 - 0{,}0244 = 0{,}7807$$

③ $\boxed{\text{Hallar } k \;/\; P(Z > k) = 0{,}3015}$

$$P(Z > k) = 1 - P(Z \leqslant k) \Longrightarrow P(Z \leqslant k) = 0{,}6985 \overset{tabla}{\Longleftrightarrow} k = 0{,}52$$

④ $\boxed{\text{Hallar } k \;/\; P(k < Z < -0{,}18) = 0{,}4197}$

necesita $\int_{k}^{-0,18} f_z(t)\, dt = 0{,}4197 \Longrightarrow F_z(-0{,}18) - F_z(k) = 0{,}4197$

$$1 - F_z(0{,}18) - 0{,}4197 = F_z(k)$$

$$1 - 0{,}5714 - 0{,}4197 = F_z(k)$$

$$0{,}0089 = F_z(k)$$

$$F_z(k) = 1 - F_z(-k)$$

$$F_z(-k) = 0{,}9911$$

$$\boxed{k = -2{,}37}$$

(5) $\boxed{k \;/\; P(X < k) = 0{,}45}$

$$P(X<k) = P\Big(\underbrace{\frac{X-40}{6}}_{\sim N(0,1)} < \frac{k-40}{6}\Big) = 0{,}45$$

$$P\Big(\frac{X-40}{6} \leqslant \frac{k-40}{6}\Big) = 0{,}45 = \Phi\Big(\frac{k-40}{6}\Big) = 0{,}45$$

$$\overset{\text{tabla}}{\Longrightarrow} 1 - \Phi\Big(\frac{k-40}{6}\Big) = 1 - 0{,}45$$

$$\Phi\Big(\frac{40-k}{6}\Big) = 0{,}55 \quad \overset{\text{tabla}}{\Longrightarrow} \quad \frac{40-k}{6} = 0{,}13$$

$$k = -0{,}13 \cdot 6 + 40$$

$$\boxed{k = 39{,}22}$$

(6) $\boxed{k \;/\; P(X > k) = 0{,}14}$

$$P\Big(\frac{X-40}{6} > \frac{k-40}{6}\Big) = 1 - P\Big(\frac{X-40}{6} \leqslant \frac{k-40}{6}\Big) = 1 - \Phi\Big(\frac{k-40}{6}\Big) = 0{,}14$$

$$\Phi\Big(\frac{k-40}{6}\Big) = 0{,}86$$

$$\frac{k-40}{6} = 1{,}08 \iff k = (1{,}08)6 + 40 = \boxed{46{,}48}$$

Ejercicio 9

X va que mide el diámetro del balero $\qquad X \sim (3{,}0,\ (0{,}005)^2)$

Se aceptan solo los baleros con $\quad 2{,}99 \leq X \leq 3{,}01$

$$P(2{,}99 \leq X \leq 3{,}01) = F_X(3{,}01) - F_X(2{,}99) = F_{\frac{X-3}{0{,}005}}\left(\frac{3{,}01-3}{0{,}005}\right) - F_{\frac{X-3}{0{,}005}}\left(\frac{2{,}99-3}{0{,}005}\right)$$

$\frac{X-3}{0{,}005} \sim N(0,1)$

$$F_{\frac{X-3}{0{,}005}}(2) - F_{\frac{X-3}{0{,}005}}(-2) = F_{\frac{X-3}{0{,}005}}(2) - \left(1 - F_{\frac{X-3}{0{,}005}}(2)\right) = 2\,F_{\frac{X-3}{0{,}005}}(2) - 1 = 2 \cdot 0{,}9772 - 1$$

$$= 0{,}9544$$

$\Rightarrow$ La prob de rechazar un balero es $1 - 0{,}9544 = 0{,}0456$

Se descartan 4,56 % de baleros

Menú

Ejercicio 10

[Büten Zar]
B.Sz

X va que mide el valor de resistencias $X \sim N(40, 2^2)$

① ¿Qué porcentaje de las resistencias tendrán un valor que exceda de 43 Ω?

$$P(X > 43) = 1 - P(X \leq 43) = 1 - \Phi_{\frac{X-40}{2}}\left(\frac{43-40}{2}\right) = 1 - \Phi_{\frac{X-40}{2}}\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$= 1 - 0,9332 = 0,0668$$

Un 6,68 % excederán los 43 Ω

② $$P(X > 43,5) = 1 - P(X \leq 43,5) = 1 - \Phi_{\frac{X-40}{2}}\left(\frac{43,5-40}{2}\right) = 1 - \Phi_{\frac{X-40}{2}}\left(\frac{3,5}{2}\right)$$

$$P(X > 43,5) = 1 - 0,9599 = 0,0401$$

Un 4,01 % de las resistencias son consideradas mayores a 43 Ω

Facultad de Ingeniería
IMERL
PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA
Curso 2013
Práctico 5

Menú

Distribuciones continuas y absolutamente continuas

Ejercicio 1
Sea X una variable aleatoria real continua y $a < b$ reales.

1. Demostrar que:
$$\mathbf{P}(a < X \leqslant b) = \mathbf{P}(a \leqslant X \leqslant b) = \mathbf{P}(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a)$$

2. Si además X es absolutamente continua con densidad f_X deducir que:
$$\mathbf{P}(a < X \leqslant b) = \mathbf{P}(a \leqslant X \leqslant b) = \mathbf{P}(a < X < b) = \int_a^b f_X(x)\,dx$$

Ejercicio 2
Se considera la variable aleatoria X absolutamente continua con densidad:
$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ bx & \text{si } x \in (0,1] \\ ae^{-x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$
Hallar a y b sabiendo que $\mathbf{P}(X \in [0,2]) = 2\mathbf{P}(X \in [2,4])$.

Ejercicio 3
Se consideran las siguientes funciones reales:
$$f_1(x) = \begin{cases} c_1\sqrt{x} & \text{si } x \in (0,1) \\ 0 & \text{si } x \notin (0,1) \end{cases}$$
$$f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ c_2x^2 & \text{si } x \in [1,2] \\ c_2x & \text{si } x \in (2,3) \\ 0 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

1. En cada caso, hallar c_i para que f_i sea una densidad.
2. Se considera ahora una variable aleatoria X con densidad f_i (con el c_i hallado).
   a) Calcular $\mathbf{P}(0{,}3 < X < 0{,}6)$, $\mathbf{P}(X > 2)$ y $\mathbf{P}\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right)$.
   b) Hallar la función de distribución de F_X para cada densidad y graficar.

Ejercicio 4
En pruebas de medición de distancia de frenado de automóviles, los vehículos que viajan a determinada velocidad tienden a recorrer distancias de frenado que están distribuidas uniformemente entre dos puntos a y b. Calcular la probabilidad de que uno de estos automóviles:

1. se detenga más cerca de a que de b.
2. se detenga de tal modo que la distancia a a sea por lo menos 3 veces mayor que la distancia a b.

Ejercicio 5
Suponga que la concentración de cierto contaminante se encuentra distribuida uniformemente en el intervalo de 4 a 20 *ppm* (partes por millón). Si se considera tóxica una concentración de 15 *ppm* o más, ¿cuál es la probabilidad de que al tomar una muestra la concentración sea tóxica?

Ejercicio 6
Considere la siguiente función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \qquad \lambda > 0$$

1. Demuestre que f es una función de densidad para cualquier valor de $\lambda > 0$. Si una variable aleatoria X absolutamente continua tiene una densidad de esta forma se dice que X tiene *distribución exponencial* de parámetro λ ($X \sim \exp(\lambda)$).

2. Si $X \sim \exp(\lambda)$ hallar y graficar la función de distribución F_X.

Ejercicio 7

1. Sea X una variable aleatoria que mide el tiempo de vida (en años) de un cierto aparato electrónico. El fabricante desea garantizar que la duración de estos aparatos supera los x_0 años con una probabilidad de 0,90. Si se sabe que $X \sim \exp(0{,}01)$, determinar x_0. Halle también la menor cantidad de años enteros que cumple con la condición.

2. Un sistema contiene cierto tipo de componente cuyo tiempo de vida en años está dado por la variable aleatoria $T \sim \exp\left(\frac{1}{8}\right)$. Si 5 de estos componentes se instalan en diferentes sistemas, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 2 continúen funcionando después de 8 años?

Ejercicio 8
Decimos que una variable aleatoria X es normal con media μ y varianza σ^2 si su densidad es:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}.$$

Demotamos $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Una variable aleatoria Z es normal estándar o típica cuando $Z \sim N(0, 1)$. Sean $X \sim N(40, 6^2)$ y Z normal estándar. Hallar:

1. $P(Z > z = 1{,}84)$.
2. $P(-1{,}97 < Z < z = 0{,}86$.
3. $k : P(Z > k) = 0{,}3015$.
4. $k : P(k < Z < -0{,}18) = 0{,}4197$.
5. $k : P(X < k) = 0,45$.
6. $k : P(X > k) = 0,14$.

Ejercicio 9
En un proceso industrial el diámetro de un balero es parte importante de un componente. El comprador establece en sus especificaciones que el diámetro debe ser $3{,}0 \pm 0{,}01$ *cm*. Por lo tanto, no se acepta ningún balero que se salga de esa especificación. Se sabe que en el proceso de producción, el diámetro de un balero tiene una distribución normal con media $\mu = 3{,}0$ *cm* y desviación estándar $\sigma = 0{,}005$ *cm*. En promedio, ¿qué porcentaje de baleros fabricados se descartarán?

Ejercicio 10
Una cierta máquina produce resistencias eléctricas que tienen un valor medio de 40Ω y una desviación estándar de 2Ω. Suponga que los valores de las resistencias siguen una distribución normal.

1. ¿Qué porcentaje de las resistencias tendrán un valor que exceda de 43Ω?
2. Si al medir el valor de las resistencias, el medidor redondea la medida al valor entero más cercano (en Ω), ¿qué porcentaje de las resistencias será considerada como mayores de 43Ω?

Ejercicio 11 Examen, febrero de 2000
El consumo máximo de agua potable de una ciudad en un día cualquiera es una variable aleatoria X (en miles de m^3) con densidad:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ kxe^{-\frac{x}{3}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. Determine el valor de k para que f sea una densidad (de ahora en adelante se trabaja con ese valor).
2. Si la capacidad máxima de suministro de agua es de 27.000 m^3, hallar la probabilidad de que en un día determinado no se pueda satisfacer la demanda de agua potable (y por lo tanto haya corte de suministro).
3. Hallar la probabilidad de que en dos días cualesquiera de la próxima semana haya corte de suministro.
4. Hallar la probabilidad de que por lo menos en un día de la próxima semana haya corte de suministro.

Ejercicio 12 Primer parcial 2001

1. Sea X una variable aleatoria real absolutamente continua con densidad f, siendo f una función par (es decir, $f(x) = f(-x)\ \forall x \in \mathbb{R}$). Sea F_X su función de distribución. Probar que $F_X(-x) = 1 - F_X(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$.
2. La intensidad relativa de una señal de sonido se puede modelar como una variable aleatoria X absolutamente continua con densidad $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}\ \forall x \in \mathbb{R}$ (conocida como distribución de Laplace). Se sabe además que una cierta señal de sonido es claramente perceptible para el oído humano medio si la intensidad relativa medida por X está entre $-2{,}1$ y $2{,}1$ ¿Cuál es la probabilidad de que al enviar una señal, ésta no sea percibida claramente por los destinatarios, suponiendo que los mismos son personas con capacidad auditiva media?
3. Se emiten señales de sonido en forma independiente hasta que se reciben 2 señales con claridad. Hallar la probabilidad de tener que enviar exactamente 5 señales.

Ejercicio 13 Fundamento de la Simulación de Variables
Sea U una variable aleatoria tal que $U \sim \mathcal{U}[0,1]$ y sea F una función de distribución continua y estrictamente creciente.

1. Hallar la distribución de $X = F^{-1}(U)$.
2. Aceptando que la computadora retorna variables independientes con distribución uniforme entre 0 y 1, generar una muestra de la variable $X \sim N(40, 6^2)$.
3. Estimar $k : P(X < k) = 0,45$ numéricamente, utilizando 100 y 1000 iteraciones.
4. (*) Si F es una distribución arbitraria (no necesariamente estrictamente creciente), se define $G(x) = \text{mín}\{t : F(t) \geq x\}$. Probar que si $U \sim \mathcal{U}(0,1)$ entonces la variable aleatoria $Y = G(U)$ tiene distribución F. *Sugerencia: probar que* $G(U) \leq y$ *sii* $U \leq F(y)$.