[Büten Zar]
B.Sz

Comentarios

Büten Zar

FB

Letra

Ejercicio 1

Ejercicio 2

Ejercicio 3

Ejercicio 4

Ejercicio 5

Ejercicio 6

Ejercicio 7

Ejercicio 8

Ejercicio 9

Ejercicio 10

Ejercicio 11

Ejercicio 12

Ejercicio 13

Ejercicio 14

Ejercicio 15

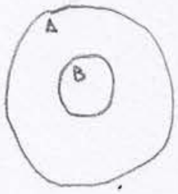
Ejercicio 16

Ejercicio 17

Ejercicio 1

Sean A y B sucesos. Calcular $P(A|B)$ en los siguientes casos:

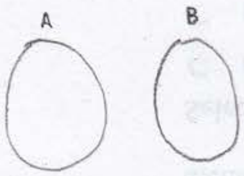
① $B \subseteq A$



$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

Si ocurre B $\Rightarrow$ necesariamente ocurre A.

② $A \cap B = \emptyset$



$P(A|B) = 0$ Si se da B es imposible que se de A.

③ ¿ Qué pasa si $P(B) = 0$?

Si $P(B) = 0$

Entonces puede pasar cualquier cosa

Ejercicio 2

Menu

Si A y B son sucesos independientes, B y C también.

¿Puede afirmarse que A y C son independientes? En caso afirmativo, demostrar.

$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A)$

$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$

(dado equilibrado)

A = "Saco un 6 en el dado rojo" $P(A) = \frac{1}{6}$

B = "Saco un 1 en el dado azul" $P(B) = \frac{1}{6}$

C = "Saco un 4 en el dado rojo" $P(C) = \frac{1}{6}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{36} = P(A) \cdot P(B)$

$P(B \cap C) = \frac{1}{36} = P(B) \cdot P(C)$

$P(A \cap C) = 0 \neq P(A) \cdot P(C)$

Entonces A y C no son independientes.

Ejercicio 3

Demostrar: A es independiente de $A \iff P(A)=0$ ó $P(A)=1$

Dem: A es independiente de $A \iff P(A\cap A) = P(A).P(A) \underset{P(A\cap A)=A}{\iff} P(A) - P(A).P(A) = 0$

$\iff P(A)\left[1 - P(A)\right] = 0 \iff P(A)=0$ ó $P(A)=1$

Ejercicio 4

Menu

Sean A y B sucesos / $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(A \cup B) = \frac{1}{3}$. Calcular $P(B)$.

① Si A y B son independientes.

$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$ (por ser independientes)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \implies \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$

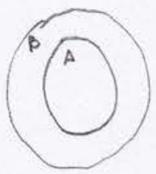
$$\frac{1}{12} = \frac{3}{4} P(B) \longrightarrow \boxed{P(B) = \frac{1}{9}}$$

② Si A y B son disjuntos

$\boxed{P(A \cap B) = 0}$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \implies \boxed{\frac{1}{12} = P(B)}$$

③ Si A es un subconjunto de B



$\boxed{P(A \cup B) = P(B)}$

$$P(B) = 1/3$$

Ejercicio 5

Menu

[Büten Zar]
B.Sz

Sean A y B sucesos tales que $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$

① $\boxed{P(A|B)}$

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$$

② $\boxed{P(B|A)}$

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

③ $\boxed{P(A^c|B)}$

$$P(A^c|B) = 1 - P(A|B) = \frac{1}{4}$$

④ $\boxed{P(B^c|A)}$

$$P(B^c|A) = 1 - P(B|A) = \frac{1}{2}$$

$A = A/B \overset{+}{\cup} B\cap A$

$P(A) - P(B\cap A) = P(A/B)$

⑤ $\boxed{P(A^c|B^c)}$

$$P(A^c|B^c) = 1 - P(A|B^c) = 1 - \frac{P(A\cap B^c)}{P(B^c)} = 1 - \frac{P(A/B)}{1-P(B)}$$

$$= 1 - \frac{P(A) - P(A\cap B)}{1 - P(B)} = 1 - \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{3}} = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

⑥ $\boxed{P(B^c|A^c)}$

$$P(B^c|A^c) = 1 - P(B|A^c) = 1 - \frac{P(B\cap A^c)}{P(A^c)} = 1 - \frac{P(B/A)}{1-P(A)} = 1 - \frac{P(B) - P(A\cap B)}{1-P(A)}$$

$$= 1 - \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

Ejercicio 6

1. Una caja contiene 12 lámparas de las cuales 4 son defectuosas.
Se toman 3 lámparas al azar, una tras otra.
Hallar la Prob de que ninguna de las 3 sea defectuosa.

Consideremos los sucesos:

A_1 = "La primer lámpara tomada no es defectuosa"

A_2 = "La segunda lámpara tomada no es defectuosa"

A_3 = "La tercer lámpara tomada no es defectuosa"

Quiero calcular $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$

Comencemos calculando: $P(A_1) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

$$P(A_2 | A_1) = \frac{7}{11}$$

$$P(A_3 | A_1 \cap A_2) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$\Rightarrow P(A_3 | A_1 \cap A_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)}$ y $P(A_2 | A_1) = \frac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)}$

$$\Rightarrow P(A_3 | A_1 \cap A_2) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_1) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{2}{3} = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

$$\boxed{\frac{14}{55} = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}$$

2 Se consideran ahora 3 cajas con lámparas:

La caja 1 $\longrightarrow$ 10 lámparas / 4 defectuosas

La caja 2 $\longrightarrow$ 6 lámparas / 1 defectuosa

La caja 3 $\longrightarrow$ 8 Lámparas / 3 defectuosas

Escogemos al azar una caja y luego sacamos una lámpara al azar

¿ Cuál es la probabilidad de que la lámpara sea defectuosa?

C_1 = "Elegir caja 1" $\quad$ C_3 = "Elegir caja 3"

A = "Lámpara defectuosa" $\quad$ C_2 = "Elegir caja 2"

$$P(A) = P(A\cap\Omega) = P(A\cap(C_1\cup C_2\cup C_3)) = P((A\cap C_1)\cup(A\cap C_2)\cup(A\cap C_3))$$

$$= P(A\cap C_1) + P(A\cap C_2) + P(A\cap C_3) = \underbrace{P(C_1)\cdot P(A|C_1) + P(C_2)\cdot P(A|C_2) + P(C_3)\,P(A|C_3)}_{\text{prob condicional}}$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{10} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8} = \frac{4}{30} + \frac{1}{18} + \frac{1}{8} = \frac{288+120+270}{2160} = \frac{678}{2160}$$

$$= \frac{113}{360}$$

Ejercicio 7

Una caja tiene dos canicas rojas, una blanca y una negra.

Una persona extrae de la caja dos canicas y asegura que tiene una roja.

¿Cuál es la probabilidad de que la otra canica también sea roja?

C_1 = roja

C_2 = roja

C_3 = blanca

C_4 = negra

$$\Omega = \{ \{c_1, c_2\}, \{c_1, c_3\}, \{c_1, c_4\}, \{c_2, c_3\}, \{c_2, c_4\}, \{c_3, c_4\} \}$$

resultados equiprobables.

A_1 = "Sacar al menos 1 roja"

A_2 = "Tener las dos canicas rojas"

$$P(A_2 | A_1) = \frac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)} = \frac{P(A_2)}{P(A_1)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{6}} = \boxed{\frac{1}{5}}$$

Ejercicio 8

1

6 bolillas rojas
4 " blancas
5 " azules

se extraen 3 (sin reposición)

Calcular la prob de que la primera sea roja, la segunda blanca y la tercera azol.

B_1 : "Bolilla 1 es roja"

B_2 = "Bolilla 2 es blanca"

B_3 = "Bolilla 3 es azul"

necesito $P(B_1 \cap B_2 \cap B_3)$

$P(B_1) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

$P(B_2 | B_1) = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$

$P(B_3 | B_1 \cap B_2) = \frac{5}{13}$

$P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = P(B_1) . P(B_2 | B_1) . P(B_3 | B_1 \cap B_2)$

$= \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{13} = \frac{4}{91}$

$P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \frac{4}{91} \cong 0,043$

2) Caja 1 : 3 rojas, 2 azules   caja 2 : 2 rojas, 8 azules

Se lanza una moneda, cara $\longrightarrow$ bola caja 1

cruz $\longrightarrow$ bola caja 2

a) Hallar la probabilidad que la bola extraída sea roja.

A = "La bola extraída es roja" C_1 = "Se extrae bola de Caja 1"

C_2 = "Se extrae bola de Caja 2"

$P(A) = P(A \cap \Omega) = P(A \cap (C_1 \dot{\cup} C_2)) =$

$P((A \cap C_1) \dot{\cup} (A \cap C_2)) = P(A \cap C_1) + P(A \cap C_2) = P(C_1)\,P(A|C_1) + P(C_2)\,P(A|C_2)$

$$P(A) = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{5} + \frac{2}{10}\right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{10} = \boxed{\frac{2}{5}} \cong 0{,}4$$

b) Si se sabe que la bola extraída es roja ¿Cuál es la probabilidad que provenga de la caja 1?

¿$P(C_1|A)$?

$$P(A|C_1) = \frac{3}{5}$$

bayes,

$$P(C_1|A) = \frac{P(A|C_1) \cdot P(C_1)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{2}{5}} = \frac{3}{4} \cong 0{,}75$$

Ejercicio 9

Tres jugadores tiran al blanco. $P_1 = 1/6$ $P_2 = 1/4$ $P_3 = 1/3$ prob de acierto de cada jugador.

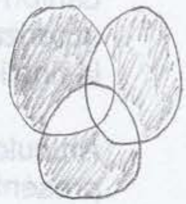
ⓐ Sabiendo que cada jugador realiza un lanzamiento, calcular las prob de que el blanco sea alcanzado 1 sola vez.

E = "El blanco es alcanzado 1 sola vez"

A_1 = "El jugador 1 acierta al blanco", $P(A_1) = \frac{1}{6}$

A_2 = "El jugador 2 acierta al blanco", $P(A_2) = 1/4$

A_3 = "El jugador 3 acierta al blanco", $P(A_3) = \frac{1}{3}$



$$E = (A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c) \dot{\cup} (A_2 \cap A_1^c \cap A_3^c) \dot{\cup} (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3)$$

$$P(E) = P(A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c) + P(A_2 \cap A_1^c \cap A_3^c) + P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3)$$

Suponemos que A_1, A_2^c, A_3^c son independientes $\Rightarrow P(A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c) = P(A_1) . P(A_2^c) . P(A_3^c)$

Suponemos que A_2, A_1^c, A_3^c son independientes $\Rightarrow P(A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c) = P(A_1^c) . P(A_2) . P(A_3^c)$

Suponemos que A_3, A_1^c, A_2^c son independientes $\Rightarrow P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3) = P(A_1^c) . P(A_2^c) . P(A_3)$

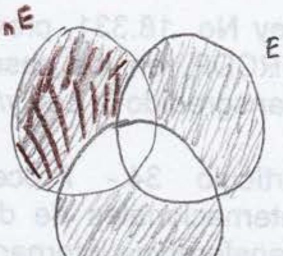
$$P(E) = P(A_1)(1 - P(A_2)).(1 - P(A_3)) + P(A_2)(1 - P(A_1))(1 - P(A_3)) + P(A_3)(1 - P(A_1))(1 - P(A_2))$$

$$P(E) = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{12} + \frac{5}{36} + \frac{5}{24} = \frac{6+10+15}{72} = \boxed{\frac{31}{72}}$$

$$\boxed{P(E) = \frac{31}{72} \cong 0{,}43}$$

(b) Si solo 1 da en el blanco, ¿Cuál es la probabilidad que haya sido el Jugador 1?

$$¿P(A_1|E)?$$



$$P(A_1|E) = \frac{P(A_1 \cap E)}{P(E)}$$

$$P(A_1|E) = \frac{P(A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{31}{72}} = \boxed{\frac{6}{31}}$$

(c) Si cada uno lanza 2 veces.

$p_1 = \frac{1}{4}$ $p_2 = \frac{1}{3}$ $p_3 = \frac{1}{3}$ Hallar probabilidad de que el blanco sea alcanzado al menos 1 vez.

A_1 = "Jugador 1 acierta la primera vez"

A_2 = "Jugador 1 acierta la segunda vez"

B_1 = "Jugador 2 acierta la primera vez"

B_2 = "Jugador 2 acierta la segunda vez"

C_1 = "Jugador 3 acierta la primera vez"

C_2 = "Jugador 3 acierta la segunda vez"

$$P(A_1 \cup A_2 \cup B_1 \cup B_2 \cup C_1 \cup C_2) = 1 - P\left((A_1 \cup A_2 \cup B_1 \cup B_2 \cup C_1 \cup C_2)^c\right) = 1 - P(A_1^c \cap A_2^c \cap B_1^c \cap B_2^c \cap C_1^c \cap C_2^c)$$

asumimos independencia

$$= 1 - \left[P(A_1^c) \cdot P(A_2^c) \cdot P(B_1^c) \cdot P(B_2^c) \cdot P(C_1^c) \cdot P(C_2^c)\right]$$

$$= 1 - \left[(1 - P(A_1))^2 (1 - P(B_1))^2 (1 - P(C_1))^2\right] = 1 - \left[\frac{49}{64} \cdot \frac{25}{36} \cdot \frac{25}{36}\right] = \frac{8}{9}$$

$P(A_1) = P(A_2)$

(d) Si ahora cada uno dispara una vez. Sabiendo que el blanco fue alcanzado solamente una vez. Hallar la probabilidad que haya sido el J_1.

$$P_1 = \frac{1}{4} \qquad P_2 = P_3 = \frac{1}{3}$$

de parte A

$$P(E) = P(A_1).(1-P(A_2)).(1-P(A_3)) + (1-P(A_1))\,P(A_2).(1-P(A_3)) + (1-P(A_1))(1-P(A_2))\,P(A_3)$$

$$P(E) = \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{9} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{9} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{9}$$

$$P(A_1|E) = \frac{P(A_1 \cap E)}{P(E)} = \frac{P(A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{4}{9}} = \frac{1}{4}$$

Ejercicio 10

70 % mujeres reacciona positivo

40 % hombres reacciona positivo

20 personas $\begin{cases} 15 \text{ mujeres} \\ 5 \text{ hombres} \end{cases}$

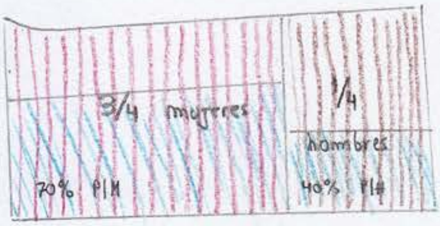
Se tomo 1 persona al azar de 20 y la prueba resultó negativa.

¿ Prob de que fuera un hombre ?

P = "reaccionar positivamente"

N = "reaccionar negativamente"

$$\boxed{\begin{array}{l} P(P|M) = 0{,}7 \\ P(P|H) = 0{,}4 \end{array}}$$



Ω conjunto
20 personas

$$P(N) = P(N \cap \Omega) = P(N \cap (M \dot{\cup} H)) = P((N \cap M) \dot{\cup} (N \cap H)) = P(N \cap M) + P(N \cap H)$$

$$= P(N|H) . P(H) + P(N|M) . P(M)$$

Yo busco saber $P(H|N)$

$$P(H|N) = \frac{P(N|H) . P(H)}{P(N)} = \frac{0{,}6 \,.\, 0{,}25}{P(N|H).P(H) + P(N|M).P(M)} = \frac{0{,}6 \,.\, 0{,}25}{0{,}6 \,.\, 0{,}25 + 0{,}75 \,.\, 0{,}3} = \frac{0{,}15}{0{,}375} = \boxed{0{,}4}$$

Menu

Ejercicio 11

(1) Sea $B_1, B_2, \ldots, B_n$ una partición de Ω y A otro suceso cualquiera, probar que

$$P(B_J \mid A) = \frac{P(A \mid B_J)\, P(B_J)}{\sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i)\, P(B_i)} \qquad \text{para todo } J = 1, \ldots, n.$$

Demostración:

$$P(B_J \mid A) = \frac{P(B_J \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \mid B_J) \cdot P(B_J)}{P(A)}$$

Luego $P(A) = P(A \cap \Omega) \underset{\text{Letra}}{=} P(A \cap (B_1 \dot\cup B_2 \dot\cup \ldots \dot\cup B_n)) = P((A \cap B_1) \dot\cup (A \cap B_2) \dot\cup \ldots \dot\cup (A \cap B_n))$

$$= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \ldots + P(A \cap B_n) \underset{\substack{\text{prob}\\ \text{cond}}}{=} P(A \mid B_1) P(B_1) + \ldots + P(A \mid B_n) P(B_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i)\, P(B_i)$$

$$P(B_J \mid A) = \frac{P(A \mid B_J) \cdot P(B_J)}{\sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i)\, P(B_i)}$$

②

35 % Población pertenece Partido I

31 % Población pertenece Partido II

28 % Población pertenece Partido III

6 % " pertenece Partido IV

Adherentes al PI, 36 % personas ingresos inferiores a 2 salarios mínimos.

" PII, 52 %

" PIII, 42 %

" PIV, 11 %

Si se elige una persona al azar y resulta tener ingresos inferiores a dos salarios mínimos. Calcular prob de que sea de PI, PII, PIII, y PIV

B_i = "Persona adherida al partido i"

A = "Persona con ingresos inferiores a 2 sueldos mínimos"

Por letra

$P(B_1) = 0{,}35 \qquad P(B_3) = 0{,}28$

$P(B_2) = 0{,}31 \qquad P(B_4) = 0{,}06$

$P(A|B_1) = 0{,}36 \qquad P(A|B_3) = 0{,}42$

$P(A|B_2) = 0{,}52 \qquad P(A|B_4) = 0{,}11$

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1) \cdot P(B_1)}{\sum_{i=1}^{4} P(A|B_i) \cdot P(B_i)} = \frac{0{,}36 \times 0{,}35}{0{,}36 \times 0{,}35 + 0{,}52 \times 0{,}31 + 0{,}42 \times 0{,}28 + 0{,}11 \times 0{,}06} = \frac{0{,}126}{0{,}126 + 0{,}161 + 0{,}117 + 0{,}006}$$

$$\cong \frac{0{,}126}{0{,}41} \cong 0{,}31$$

La prop de que la persona de bajos ingresos sea del partido I es de 0,31

$$P(B_2|A) = \frac{P(A|B_2) \cdot P(B_1)}{0{,}41} = 0{,}39$$

$$P(B_3|A) = \frac{P(A|B_3) \cdot P(B_3)}{0{,}41} = 0{,}28$$

$$P(B_4|A) = \frac{P(A|B_4) \cdot P(B_4)}{0{,}41} = 0{,}01$$

③ A produce 50 % ⟶ 3% defectuosos

B " 30 % ⟶ 4 % defectuosos

C " 20 % ⟶ 5 % defectuosos

Se toma al azar un artículo de la producción total. Si el artículo es defectuoso hallar la probabilidad de que haya sido producido por la máquina A.

B_1 = "El artículo es producido por máquina A"

B_2 = "El artículo es producido por máquina B"

B_3 = "El artículo es producido por máquina C"

A = "El artículo es defectuoso"

Letra:

$P(B_1) = 0,5$ $\quad P(A|B_1) = 0,03$

$P(B_2) = 0,3$ $\quad P(A|B_2) = 0,04$

$P(B_3) = 0,2$ $\quad P(A|B_3) = 0,05$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(A|B_i)\,P(B_i) = 0,015 + 0,012 + 0,01$$

$$= 0,037$$

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1) . P(B_1)}{P(A)} = \frac{0,015}{0,037} \cong 0,40$$

Ejercicio 12

$D = \{$ La empresa de seguridad responde a una señal de alarma a tiempo evitando el robo $\}$

$A = \{$ La empresa es advertida por la señal sonora de la sirena de la alarma colocada en el domicilio $\}$

$B = \{$ La empresa es advertida por una alerta transmitida por la línea de telefonía fija de la casa $\}$

$C = \{$ La empresa es advertida por una alerta transmitida por GPRS/EDGE a través de un chip y emisor celular que contiene la alarma $\}$

A, B, C son independientes entre sí.

$P(A) = 0{,}25 \qquad P(B) = 0{,}5 \qquad P(C) = 0{,}95$

$P(D \mid A \cup B \cup C) = 0{,}90$

$P(D \mid (A \cup B \cup C)^c) = 0$

Calcular la probabilidad de que se active alguna de las alarmas y que la empresa detenga el robo.

¿ $P((A \cup B \cup C) \cap D)$?

$$P(D \mid A \cup B \cup C) = \frac{P(D \cap (A \cup B \cup C))}{P(A \cup B \cup C)} \Longrightarrow P(D \cap (A \cup B \cup C)) = P(D \mid A \cup B \cup C) \cdot P(A \cup B \cup C)$$

$$P(D \cap (A \cup B \cup C)) = 0{,}90 \cdot [P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)]$$

$$= 0{,}90 \cdot [1{,}7 - P(A) \cdot P(C) - P(A) \cdot P(B) - P(B) \cdot P(C) + P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)]$$

$$= 0{,}90 \cdot [1{,}7 - 0{,}2375 - 0{,}125 - 0{,}475 + 0{,}11875] \cong 0{,}88$$

$$\boxed{P(D \cap (A \cup B \cup C)) \cong 0{,}88}$$

Menu

Ejercicio 13

[Büten Zar]
B.Sz

40 % habilitados pertenece partido A

35 % " pertenece partido B

25 % " " " C

Entre los adherentes de A, 10 % votó en la elección interna de otro partido.

" B, 15 % votó en la interna de A

" C, 5 % votó en la interna de A.

1. ¿ Cuál fue el porcentaje de votos obtenidos por el partido A en las internas?

$A = \{$ persona pertenece al partido A $\}$ $\qquad V_A = \{$ Persona vota interna A $\}$

$B = \{$ persona " " B $\}$

$C = \{$ persona " " C $\}$

$$P(V_A) = P(V_A \mid A) . P(A) + P(V_A \mid B) P(B) + P(V_A \mid C) P(C) = 0{,}90 . 0{,}40 + 0{,}15 . 0{,}35 + 0{,}05 . 0{,}25$$

prob tot

$$= 0{,}36 + 0{,}0525 + 0{,}0125 = 0{,}425$$

El porcentaje es 42,5 %

2. Si se elige una persona al azar dentro de las que votaron en A

a. ¿ Cuál es la probabilidad de que sea adherente de B?

$$P(B \mid V_A) = \frac{P(V_A \mid B) . P(B)}{P(V_A)} = \frac{0{,}0525}{0{,}425} \cong 0{,}123$$

b. ¿ Cuál es la probabilidad de que sea adherente de C?

$$P(C \mid V_A) = \frac{P(V_A \mid C) \ P(C)}{P(V_A)} = \frac{0{,}0125}{0{,}425} \cong 0{,}029$$

3) Si 400000 personas votaron en la interna de A:

a) ¿En cuánto estimaría la cantidad de votantes de A que son adherentes a B?

$P(B|V_A) \cong 0,1235$

$400000 \cdot 0,1235 = \boxed{49400}$

b) ¿En cuánto estimaría la cantidad de votantes de A que son adherentes a C?

$P(C|V_a) \cong 0,0294$

$400000 \cdot 0,0294 = \boxed{11760}$

Ejercicio 14

5% consume.

$A_1 = \{$El resultado de la primera submuestra es positivo$\}$

$A_2 = \{$El resultado de la segunda submuestra es positivo$\}$

$B = \{$El jugador es sancionado$\}$

$D = \{$El jugador consumio$\}$

$$P(A_1 \cap A_2 | D) = P(A_1|D) \cdot P(A_2|D)$$

$$P(A_1 \cap A_2 | D^c) = P(A_1|D^c) \cdot P(A_2|D^c)$$

$P(A_i|D) = 0{,}90 \quad i = 1,2$

$P(A_i|D^c) = 0{,}02 \quad i = 1,2$

$P(D) = 0{,}05$

① Calcule $P(D|A_1)$

$$P(D|A_1) = \frac{P(D \cap A_1)}{P(A_1)} = \frac{P(D) \cdot P(A_1|D)}{P(A_1)} = \frac{P(D) \cdot P(A_1|D)}{P(A_1 \cap \Omega)} = \frac{P(D) \cdot P(A_1|D)}{P(A_1 \cap (D \dot{\cup} D^c))}$$

$$= \frac{P(D) \cdot P(A_1|D)}{P((A_1 \cap D) \dot{\cup} (A_1 \cap D^c))} = \frac{P(D) \cdot P(A_1|D)}{P(A_1 \cap D) + P(A_1 \cap D^c)} = \frac{P(D) \cdot P(A_1|D)}{P(D) \cdot P(A_1|D) + P(D^c) \cdot P(A_1|D^c)}$$

$$= \frac{0{,}05 \cdot 0{,}90}{0{,}05 \cdot 0{,}90 + 0{,}95 \cdot 0{,}02} = \frac{0{,}045}{0{,}045 + 0{,}019} = \frac{0{,}045}{0{,}064} \cong 0{,}703$$

② Calcule $P(B)$ ¿Son A_1 y A_2 eventos independientes?

$$P(B) = P(A_1 \cap A_2) \underset{\text{prob totales}}{=} P(A_1 \cap A_2 | D)\, P(D) + P(A_1 \cap A_2 | D^c)\, P(D^c) = P(A_1|D)\, P(A_2|D)\, P(D) + P(A_1|D^c)\, P(A_2|D^c)\, P(D^c)$$

$$= (0{,}90)^2 \cdot 0{,}05 + (0{,}02)^2 \cdot 0{,}95 \cong 0{,}0405 + 0{,}0003 \cong 0{,}0408$$

$P(A_1) = P(A_2)$

¿Son independientes?

$$P(A_1 \cap A_2) = 0{,}0408 \neq P(A_1)^2 = 0{,}0409$$

No son independientes.

3 Calcular $P(D|B)$ $(P(D|A_1 \cap A_2))$

$$P(D|A_1 \cap A_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2|D) \cdot P(D)}{P(A_1 \cap A_2)} = \frac{(0{,}90)^2 \cdot 0{,}05}{0{,}0408} = \frac{0{,}0405}{0{,}0408} \simeq 0{,}99$$

Ejercicio 15

caja 1 = 3 bolas rojas
2 bolas azules

caja 2 = 2 bolas rojas
4 bolas azules

Se extrae una bola al azar de Caja 1 y se coloca en caja 2

Luego se extrae bola de caja 2.

① ¿Cuál es la probabilidad de que se extraiga la misma bola que se extrajo de la primera caja?

C = "La bola extraída de la segunda caja es la misma que de la primera"

$$P(C) = \frac{1}{7} \cong 0{,}14$$

② ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea roja?

A = "Sale bola roja en caja 1"

B = "Sale bola azul en caja 1"

C = "Se extrae bola roja de caja 2"

$$P(C) = P(C \cap \Omega) = P(C \cap (A \dot{\cup} B)) = P((C \cap A) \dot{\cup} (C \cap B))$$

$$= P(C \cap A) + P(C \cap B) = P(C|A) \cdot P(A) + P(C|B) \cdot P(B) = \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{5} = \frac{9+4}{35}$$

$$= \frac{13}{35} \cong 0{,}37$$

③ Si la bola extraída de la segunda caja es roja, ¿Cuál es la probabilidad de que sea la misma bola que se extrajo de la primera caja?

E = "Misma bola que la extraída en caja 1"

C = "Bola extraída de la segunda caja es roja"

$$P(E|C) = \frac{P(C|E) \cdot P(E)}{P(C)}$$

$$P(E|C) = \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{7}}{\frac{13}{35}} = \frac{3}{13}$$

miro pos extraer roja de caja 1

Menu

[Büten Zar]
B.Sz

Ejercicio 16

Se tira una moneda dos veces y se consideran los sucesos:

$A = \{$En la primera tirada sale cara$\}$

$B = \{$En la segunda tirada sale cara$\}$

$C = \{$En las dos tiradas salen un número y una cara, en cualquier orden$\}$

① Estudiar independencia de a pares.

$$\Omega = \{(C,C), (C,N), (N,C), (N,N)\}$$

¿A y B son independientes?

$P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ $P(A) = \frac{1}{2}$ $P(B) = \frac{1}{2}$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \checkmark$$

¿A y C son independientes?

$P(A \cap C) = \frac{1}{4}$ $P(A) = \frac{1}{2}$ $P(C) = \frac{1}{2}$

$$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C) \checkmark$$

¿B y C son independientes?

$P(B \cap C) = \frac{1}{4}$ $P(B) = \frac{1}{2}$ $P(C) = \frac{1}{2}$ $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C) \checkmark$

② ¿Son A, B, C independientes?

$P(A \cap B \cap C) = 0$ $P(A) = \frac{1}{2}$ $P(B) = \frac{1}{2}$ $P(C) = \frac{1}{2}$

$$P(A \cap B \cap C) \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

A, B, C no son independientes.

Ejercicio 17

Se tira una moneda 3 veces y se consideran los sucesos:

$$A=\{(c,c,c),(c,c,N),(c,N,c),(N,c,c)\}$$

$$B=\{(c,c,c),(N,N,c),(N,c,N),(c,N,N)\}$$

$$C=\{(c,c,c),(c,c,N),(c,N,c),(N,N,N)\}$$

① Verificar que se cumple $P(A\cap B\cap C) = P(B).P(A).P(c)$

$$\Omega=\{(c,c,c),(N,c,c),(c,N,c),(N,N,c)(c,c,N),(N,c,N),(c,N,N),(N,N,N)\}$$

$$P(A) = \sum_{w\in A} P(w) = \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{1}{2}$$

$$P(c) = \frac{1}{2}$$

$$A\cap B\cap C = \{(c,c,c)\} \qquad P(A\cap B\cap C) = \frac{1}{8}$$

$$P(A\cap B\cap C) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} \quad \checkmark$$

② Estudiar la independencia de a pares

A y B

$P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$

A y B no son independientes

$P(A\cap B) = \frac{1}{8}$

A y C

$P(A) = P(c) = \frac{1}{2}$

A y C no son independientes

$P(A\cap c) = \frac{3}{8}$

B y C

$P(B) = P(c) = \frac{1}{2}$ $\qquad P(B\cap c) = \frac{1}{8}$ $\qquad$ B y C no son independientes.

[Büten Zar]
B.Sz

3 ¿ Son A, B, C independientes?

No, porque no se cumple la independencia de a pares.

Facultad de Ingeniería
IMERL
PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA
Curso 2013
Práctico 2

Menu

Probabilidad Condicional e Independencia

Ejercicio 1
Sean A y B sucesos. Calcular $P(A|B)$ en los siguientes casos.

1. $B \subseteq A$
2. $A \cap B = \emptyset$
3. ¿Qué pasa si $P(B) = 0$?

Ejercicio 2
Si A y B son sucesos independientes y B y C también son sucesos independientes. ¿Puede afirmarse que A y C son independientes? En caso afirmativo demostrarlo, en caso contrario dar un contraejemplo.

Ejercicio 3
Demostrar que A es independiente de A si y sólo si $P(A) = 0$ ó $P(A) = 1$.

Ejercicio 4
Sean A y B sucesos tales que $P(A) = \frac{1}{4}$ y $P(A \cup B) = \frac{1}{3}$. Calcular $P(B)$ en los siguientes casos:

1. Si A y B son independientes
2. Si A y B son disjuntos (o excluyentes)
3. Si A es un subconjunto de B

Ejercicio 5
Sean A y B sucesos tales que $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ y $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$. Calcular:

1. $P(A|B)$
2. $P(B|A)$
3. $P(A^C|B)$
4. $P(B^C|A)$
5. $P(A^C|B^C)$
6. $P(B^C|A^C)$

Ejercicio 6

1. Una caja contiene 12 lámparas de las cuales 4 son defectuosas. Se toman al azar tres lámparas del lote una tras otra. Hallar la probabilidad de que las tres lámparas no sean defectuosas.
2. Se consideran ahora tres cajas con lámparas:

   La caja 1 contiene 10 lámparas de las cuales 4 son defectuosas

   La caja 2 contiene 6 lámparas de las cuales 1 es defectuosa

La caja 3 contiene 8 lámparas de las cuales 3 son defectuosas

Escogemos al azar una caja y luego sacamos una lámpara al azar ¿Cuál es la probabilidad de que la lámpara sea defectuosa?

Ejercicio 7
Una caja tiene dos canicas rojas, una blanca y una negra. Una persona extrae de la caja dos canicas, y asegura que tiene una roja. ¿Cuál es la probabilidad de que la otra canica también sea roja?

Ejercicio 8

1. Se considera una caja que contiene 6 bolillas rojas, 4 blancas y 5 azules. Se extraen tres bolillas en forma sucesiva (sin reposición). Calcular la probabilidad que la primera sea roja, la segunda blanca y la tercera azul
2. Se consideran dos cajas con bolas. La caja 1 contiene 3 bolas rojas y 2 azules, la caja 2 contiene 2 bolas rojas y 8 azules. Se lanza una moneda, si se obtiene cara se saca una bola de la caja 1, y si se obtiene cruz se saca una bola de la caja 2.
   a) Hallar la probabilidad que la bola extraída sea roja.
   b) Si se sabe que la bola extraída es roja, ¿cuál es la probabilidad que provenga de la caja 1?

Ejercicio 9

1. Tres jugadores tiran al blanco. Sean $p_1 = \frac{1}{6}, p_2 = \frac{1}{4}, p_3 = \frac{1}{3}$ las probabilidades de acierto al blanco de los respectivos jugadores.
2. Sabiendo que cada jugador realiza un lanzamiento, calcular la probabilidad de que el blanco sea alcanzado solamente una vez.
3. Sabiendo que sólo uno da en el blanco, calcular la probabilidad que haya sido el jugador 1.
4. Ahora cada jugador lanza dos veces, $p_1 = \frac{1}{4}, p_2 = \frac{1}{3}$ y $p_3 = \frac{1}{3}$. Hallar la probabilidad de que el blanco sea alcanzado por lo menos una vez.
5. Si ahora cada uno dispara una vez. Sabiendo que el blanco fue alcanzado solamente una vez, hallar la probabilidad que haya sido el jugador 1 (las probabilidad de la parte anterior).

Ejercicio 10
Se ha observado que los hombres y las mujeres reaccionan de forma diferente en determinada circunstancia; el 70 % de las mujeres reacciona positivamente, mientras sólo el 40 % de los hombres reacciona positivamente ante la misma circunstancia. Se sometió a una prueba a un grupo de 20 personas, 15 mujeres y 5 hombres para descubrir sus reacciones. Una prueba escogida al azar de las 20 resultó negativa. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido realizada por un hombre?

Ejercicio 11
Este ejercicio consiste en demostrar y aplicar una *generalización de la Fórmula de Bayes*.

1. Sea $B_1, B_2, \ldots, B_n$ una partición de Ω (es decir $B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_n$ incompatibles y $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$) y sea A otro suceso cualquiera, probar que

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)}$$

para todo $j = 1, \ldots, n$.

2. En un país hay cuatro partidos políticos. Se sabe que:

   El 35 % de la población pertenece al partido I

   El 31 % pertenece al partido II

   El 28 % pertenece al partido III

   El 6 % pertenece al partido IV

   Entre los adherentes al partido I, un 36 % corresponde a personas con ingresos inferiores a dos salarios mínimos

   Entre los adherentes al partido II, esa proporción es del 52 %

   Para el partido III, es un 42 %

   Para el partido IV, 11 %

   Si se elige una persona al azar y resulta tener ingresos inferiores a dos salarios mínimos. Calcular la probabilidad de que sea un adherente al partido I; al partido II; al partido III y al partido IV.

3. Tres máquinas A, B y C producen respectivamente 50 %, 30 % y 20 % del número total de artículos de una fábrica. Los porcentajes de producción de defectuosos de cada máquina son 3 %, 4 % y 5 % respectivamente. Se toma al azar un artículo de la producción total. Si el artículo seleccionado es defectuoso, hallar la probabilidad de que haya sido producido por la máquina A.

Ejercicio 12
En un sistema de alarmas de un domicilio, llamemos D al evento "la empresa de seguridad responde a una señal de alarma a tiempo evitando robo". El sistema de alarma puede hacer llegar la señal por tres vías que actúan en paralelo:

1. A = "la empresa es advertida por la señal sonora de la sirena de la alarma colocada en el domicilio".
2. B = "la empresa es advertida por una alerta transmitida por la línea de telefonía fija de la casa".
3. C = "la empresa es advertida por un alerta transmitida por GPRS/EDGE a través de un chip y emisor celular que contiene la alarma".

Supongamos que:

1. A, B y C son independientes entre sí.
2. $P(A) = 0,25,\ P(B) = 0,5,\ P(C) = 0,95$
3. $P(D/A \cup B \cup C) = 0,90$
4. $P(D/(A \cup B \cup C)^C) = 0$

Calcular la probabilidad de que se active alguna de las tres alarmas en el domicilio y que la empresa evite el robo.

Ejercicio 13 Primer parcial, mayo de 1999

Supongamos que en un país el 40 % de los ciudadanos habilitados para votar pertenece al partido A, el 35 % al partido B y el 25 % al partido C.

Se realiza de manera simultánea una elección interna en los tres partidos, pero como no se requiere acreditar la adhesión a cada partido, el voto "extrapartidario" es posible: un votante de un partido puede, si quiere, participar en la interna de otro partido.

Supongamos que Ud. sabe que:

Entre los adherentes de A, un 10 % votó en la elección interna de otro partido

Entre los adherentes de B, un 15 % votó en la interna de A

Entre los adherentes de C, un 5 % votó en la interna de A

1. ¿Cuál fue el porcentaje de votos obtenidos por el partido A en las internas?

2. Si se elige al azar una persona dentro de todas las que en las votaron a A,

   a) ¿Cuál es la probabilidad que sea un adherente de B?

   b) ¿Cuál es la probabilidad que sea un adherente de C?

3. Si 400.000 personas votaron en la interna de A,

   a) ¿En cuánto estimaría la cantidad de votantes de A que son adherentes de B?

   b) ¿En cuánto estimaría la cantidad de votantes de A que son adherentes de C?

Ejercicio 14 Examen, marzo de 2003
Se admite que entre los jugadores profesionales de ping pong un 5 % consume anfetaminas antes de cada partido. Durante un campeonato se les toma una muestra de orina a todos los jugadores. La muestra de cada jugador se divide en dos submuestras iguales a las que se les aplica un análisis clínico: si el resultado de aplicar el análisis a las dos submuestras da positivo, el jugador es sancionado; en cualquier otro caso el jugador no es sancionado.

Considere los eventos:

$A_1 = \{$ el resultado de la primera submuestra es positivo $\}$

$A_2 = \{$ el resultado de la segunda submuestra es positivo $\}$

$B = \{$ el jugador es sancionado$\}$

$D = \{$ el jugador consumió anfetaminas $\}$

Se asume que los eventos A_1 y A_2 *condicionados* a los eventos D y a D^c son independientes, esto es: $P(A_1 \cap A_2|D) = P(A_1|D)P(A_2|D)$ y $P(A_1 \cap A_2|D^c) = P(A_1|D^c)P(A_2|D^c)$.

Se sabe además que $P(A_i|D) = 0{,}90$ y $P(A_i|D^c) = 0{,}02$ para $i = 1, 2$.

1. Calcule $P(D|A_1)$, esto es, la probabilidad de que un jugador haya consumido anfetaminas dado que el resultado de la primera submuestra es positivo.

2. Calcule $P(B)$, esto es, la probabilidad de que un jugador sea sancionado. ¿Son A_1 y A_2 eventos independientes?

3. Calcule $P(D|B)$, esto es, la probabilidad de que un jugador sancionado haya consumido anfetaminas.

Ejercicio 15 Examen, febrero 2004
De una caja que contiene 3 bolas rojas y 2 azules se extrae una bola al azar y se la coloca en una segunda caja que contiene 4 bolas azules y 2 rojas. **A continuación** se extrae una bola al azar de la segunda caja.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que se extraiga la misma bola que se extrajo de la primera caja?

2. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída de la segunda caja sea roja?

3. Si la bola extraída de la segunda caja es roja, ¿cuál es la probabilidad de que sea la misma bola que se extrajo de la primera caja?

Ejercicio 16
Se tira una moneda dos veces y se consideran los sucesos:

$A = \{$ en la primera tirada sale cara $\}$,

$B = \{$ en la segunda tirada sale cara $\}$,

$C = \{$ en las dos tiradas salen un número y una cara, en cualquier orden $\}$.

1. Estudiar la independencia de a pares.
2. ¿Son A, B y C independientes?

Ejercicio 17
Se tira una moneda tres veces y se consideran los sucesos:

$$A = \{(C, C, C), (C, C, N), (C, N, C), (N, C, C)\},$$

$$B = \{(C, C, C), (N, N, C), (N, C, N), (C, N, N)\},$$

$$C = \{(C, C, C), (C, C, N), (C, N, C), (N, N, N)\},$$

1. Verificar que se cumple $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$.
2. Estudiar la independencia de a pares.
3. ¿Son A, B y C independientes?