Primer Parcial de Probabilidad y Estadística - Soluciones

Lunes 6 de mayo del 2013

MO1	MO2	MO3	MO4
C	A	D	B

Problema 1

(1) Al seleccionar al azar a una persona, consideramos los siguientes sucesos: "J: la persona es joven", "M: madura" y "V: veterana", y abreviamos Rock & Pop, Tecno & Dance y Tropicales mediante $R\&P$, $T\&D$ y T respectivamente, entonces:

$$\begin{aligned} P(J) &= P(J/R\&P)P(R\&P) + P(J/T\&D)P(T\&D) + P(J/T)P(T) \\ &= 0,25 \times 0,2 + 0,45 \times 0,3 + 0,35 \times 0,5 = 0,36. \end{aligned}$$

Análogamente se calculan $P(M) = 0,325$, y $P(V) = 1 - P(J) - P(M) = 0,315$.

(2) $P(T\&D/M) = \frac{P(M/T\&D)P(T\&D)}{P(M)} = \frac{0,35\times 0,3}{0,325} \approx 0,323$

(3) Se asume el modelo de selección con reposición como válido (dentro de la pista de Rock). Puesto que hay tres clases de individuos en esta pista, el modelo correcto es el multinomial con $N = 5$ y probabilidades respectivas de joven $p_j = 0,25$, maduro $p_m = 0,35$ y veterano $p_v = 0,4$. Entonces la probabilidad de seleccionar dos veteranos, dos maduros y un joven es $P = \binom{5}{2}\binom{3}{2} p_v^2 p_m^2 p_j = 0,147$.

Problema 2

(1) Sea Y la variable que vale 1 si la persona seleccionada es del Grupo 1 y 0 si la misma es del Grupo 2. Entonces $Y \sim Ber(0.70)$ y $X \sim Exp(\frac{1}{5})$ cuando $Y = 1$, mientras que $X \sim Exp(\frac{1}{10})$ dado que $Y = 0$. Si $t < 0$ claramente $F_X(t) = 0$. En otro caso:

$$\begin{aligned} F_X(t) = P(X \leq t) &= P(X \leq t, Y = 1) + P(X \leq t, Y = 0) \\ &= P(X \leq t/Y = 1) \times 0.70 + P(X \leq t/Y = 0) \times 0,30 \\ &= (1 - \exp(-0,20t)) \times 0,70 + (1 - \exp(-0,10t)) \times 0,30 \\ &= 1 - 0.70 \exp(-0.20t) - 0.30 \exp(-0.10t). \end{aligned}$$

La densidad es nula sobre los negativos, mientras que si $t > 0$:

$$f_X(t) = (0.20\times 0.70)\exp(-0.20t) + (0.10\times 0.30)\exp(-0.10t) = 0.14\exp(-0.20t) + 0.03\exp(-0.10t).$$

(2) $P(X > 15) = 1 - F_X(15) = 0.70\exp(-0.20 \times 15) + 0.30\exp(-0.10 \times 15) = 0.70\exp(-3) + 0.30\exp(-1.5) \cong 0.10179$.

(3) Sean A= "la llamada dura más de 12 minutos ", y B_i="la persona elegida viene del Grupo i"$i = 1, 2$. Se tiene que

$$P(B_1) = 0.70, P(B_2) = 0.30,$$

$$P(A/B_1) = exp(-0.20 \times 12) = exp(-2.4) \cong 0.09072,$$

$$P(A/B_2) = exp(-0.10 \times 12) = exp(-1.2) \cong 0.30119.$$

Aplicando Bayes

$$P(B_1/A) = \frac{P(A/B_1)P(B_1)}{P(A/B_1)P(B_1) + P(A/B_2)P(B_2)} \cong 0.41396,$$

$$P(B_2/A) \cong 0.58604.$$

(4) Por definición

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t f_X(t)dt = \int_{0}^{\infty} t[0.14\exp(-0.20t) + 0.03\exp(-0.10t)]dt = 6.5$$

Múltiple Opción 1

Por inducción se prueba que $P(A_i) \leq \rho^{i-1}P(A_1) \leq \rho^{i-1}; \forall i$. Luego, aplicando el Teorema de Continuidad de la Probabilidad y el hecho que $0 < \rho < 1$: $0 \leq P(A) = \lim_n P(A_n) \leq \lim_n \rho^{n-1} = 0$, por lo cual **la opción correcta es (C)**.

Múltiple Opción 2

Consideremos las aproximaciones $X \sim Poisson(2)$ e $Y \sim Poisson(1)$. Como X, Y independientes y la suma de variables de Poisson independientes es de Poisson con la suma de tasas, $Z \sim Poisson(3)$. Entonces, $P(Z = 0)$ es aproximadamente igual a e^{-3} por lo cual **la opción correcta es (A)**.

Múltiple Opción 3

Se tiene que $X = \frac{B}{A}$ por lo cual, como A y B son estrictamente positivas, se tiene que $C = \{B > A\}$. Pero $(*)P(B > A) + P(A > B) + P(A = B) = 1$, y como (A, B) tiene densidad en el plano, $P(A = B) = 0$.

Por otra parte como A y B independientes y con igual distribución, $(A, B) \sim (B, A)$ y por lo tanto $P(A > B) = P(B > A)$. Sustituyendo en $(*)$ se obtiene que $P(B > A) = \frac{1}{2}$ por lo cual **la opción correcta es (D)**.

Múltiple Opción 4

La variable X tiene distribución de Cauchy estándar: $F_X(x) = \frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{2} + arctg(x))$. Es fácil ver que Y tiene la misma distribución: Si $x < -1$, $F_Y(x) = P\{X > -x\} = P\{X < x\} = F_X(x)$. Si $-1 < x < -1, F_Y(x) = P\{X > 1\} + P\{x > X > -1\} = P\{X < -1\} + P\{x > X > -1\} = F_X(x)$, mientras que si $x > 1$, $F_Y(x) = P\{X > 1\} + P\{1 > X > -1\} + P\{x > Y > 1\} = P\{X < -1\} + P\{1 > X > -1\} + P\{-1 > X > -x\} = P\{X > 1\} + P\{1 > X > -1\} + P\{x > Y > 1\} = P\{X < -1\} + P\{1 > X > -1\} + P\{1 < X < x\} = F_X(x)$ Sin embargo es claro que no son independientes, ya que $P\{X > 1, Y > 1\} = 0 \neq P\{X > 1\}P\{Y > 1\}$.

Por lo tanto, **la opción correcta es (B)**.