Probabilidad & Estadística

Büten Zar

Práctico 1

Transcripción LaTeX:
Bruno Szilagyi

Resolución y recopilación de Problemas:
Bruno Szilagyi

Letra ejercicios:
Facultad de Ingeniería(Udelar)
Imerl 2013

17 de enero de 2014

Índice

1. Elementos de conteo

1.1. Definiciones importantes

- **Regla de la suma:** Si una primera tarea puede realizarse de m formas mientras que una segunda puede con n, y no es posible realizar ambas tareas de forma simultánea, entonces, para llevar a cabo cualquiera de ellas puede utilizarse cualquiera de las $m + n$ formas.

- **Regla del producto:** Si un procedimiento se puede descomponer en las etapas primera y segunda, y existen m resultados posibles de la primera etapa y si, para cada uno de estos resultados, existen n resultados posibles para la segunda etapa. Entonces el procedimiento total se puede realizar en el orden dado de $m \times n$ formas.

- **Factorial :** Para un número entero $n \geq 0$ se define su factorial como:

$$n! = \begin{cases} (n) \times (n-1) \times \cdots \times (1) & \text{si } n > 0 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

- **Permutaciones sin Repetición:** Número de diferentes maneras en las que podemos ordenar n elementos distintos, se calcula de la siguiente manera:

$$P_n = n!$$

- **Permutaciones con Repetición:** En general, si existen n objetos con n_1 de un primer tipo, n_2 de un segundo tipo, ... , y n_r de un r-ésimo tipo, donde $n_1 + n_2 + ... + n_r = n$. Entonces número de diferentes dispocisiones lineales formadas a partir de esos n elementos es :

$$P_n^{n_1 n_2 n_3 \ldots n_r} = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \cdots \times n_r!}$$

- **Arreglos sin repetición:** Número de conjuntos ordenados de r elementos distintos , con $1 \leq r \leq n$, formadas a partir de n elementos distintos. Este número se calcula de la siguiente manera:

$$A_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

- **Arreglos con repetición:** Número de conjuntos ordenados de r elementos, con $1 \leq r \leq n$, formadas a partir de n elementos distintos. Este número se calcula de la siguiente manera:

$$AR_r^n = n^r$$

- **Combinaciones:** Número de conjuntos de n elementos distintos que podemos formar a partir de m elementos distintos dados, donde no importa el orden y se calcula como:

$$C_n^m = \frac{m!}{(m-n)! \times n!}$$

- **Combinaciones con repetición:** Número de conjuntos de n elementos que podemos formar a partir de m elementos distintos dados, donde no importa el orden y se calcula como:

$$CR_n^m = C_n^{m+n-1}$$

Propiedades:

- $C_k^n = C_{n-k}^n$
- Stiffel: $C_k^n = C_k^{n-1} + C_{k-1}^{n-1}$
- Binomio de Newton: $\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad (a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_i^n \times a^i \times b^{n-i}$

Propiedades y definiciones de conjuntos:

- $A^c = \{w \in \Omega : w \notin A\}$
- $A - B = A \cap B^c = \{w \in \Omega : w \in A \ y \ w \notin B\}$
- $A \nabla B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = \{w \in \Omega : w \in A \text{ ó } w \in B\} = (A \cup B) - (A \cap B)$
- Leyes de De Morgan :
  - $(\bigcap_{i=1}^{i=n} A_i)^c = \bigcup_{i=1}^{i=n} (A_i^c)$
  - $(\bigcup_{i=1}^{i=n} A_i)^c = \bigcap_{i=1}^{i=n} (A_i^c)$
- Distributividad:
  - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
  - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- Asociatividad:
  - $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
  - $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- Conmutatividad:
  - $A \cup B = B \cup A$
  - $A \cap B = B \cap A$

1.2. Ejercicio 1 - Cantidad matrículas

En cierta ciudad las matrículas de los autos se forman con 2 vocales diferentes seguidas de 5 dígitos todos diferentes.

- Calcular la cantiad de matrículas que pueden hacerse.
- Calcular cuántas de ellas comienzan con A y terminan con 89.

1) El procedimiento de formar una matrícula se puede dividir en dos etapas, la elección de las dos vocales y las de los 5 dígitos. Hay A_2^5 formas de elegir esas vocales y A_5^{10} para los digítos. Entonces, por regla del producto, habrán $A_2^5 \times A_5^{10}$ matrículas posibles.

$$A_2^5 \times A_5^{10} = \frac{5!}{(5-2)!} \times \frac{10!}{(10-5)!} = 5 \times 4 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 604800$$

2) Ahora, se debe elegir solo 1 vocal, entonces hay 4 posibilidades. Para los dígitos solo se deben elegir 3 y ya hay 2 tomados, entonces A_3^8.

$$4 \times A_3^8 = 4 \times \frac{8!}{(8-3)!} = 4 \times 8 \times 7 \times 6 = 1344$$

1.3. Ejercicio 2 - Selección de comisión

De un grupo formado por 3 ingenieros, 5 economistas y 4 arquitectos deben seleccionarse 4 para formar una comisión.

- Calcular cuántas comisiones diferentes podrían formarse.
- Calcular cuántas de esas comisiones estarían integradas por un ingeniero, dos economistas y un arquitecto.
- Calcular en cuántas configuraciones hay por lo menos dos arquitectos.

1) Hay 12 personas en total, el problema se traduce en cuántos conjuntos de 4 personas distintos es posible formar. El orden en el cual se eligen los integrantes no es importante, no pueden repetirse elementos.

$$C_4^{12} = \frac{12!}{(12-4)!4!} = 11 \times 5 \times 9 = 45 \times 11 = 495$$

2) Se divide en 3 etapas:

- Elegir ingeniero : $C_1^3 = 3$
- Elegir 2 economistas : $C_2^5 = 10$
- Elegir arquitecto : $C_1^4 = 4$

Entonces, por regla del producto, hay $3 \times 10 \times 4 = 120$ comisiones.

3)Los arquitectos pasan a ser distinguibles. Hay 3 tipos de comisiones posibles que contienen 2 o más arquitectos.

- Comisión con 2 arquitectos: $C_2^4 \times C_2^8 = \frac{4!}{2! \times 2!} \times \frac{8!}{6! \times 2!} = 168$
- Comisión con 3 arquitectos: $C_3^4 \times C_1^8 = 4 \times 8 = 32$
- Comisión con 4 arquitectos: $C_4^4 = 1$

Por regla de la suma, el total de las configuraciones es : $1 + 32 + 168 = 201$.

1.4. Ejercicio 3 - Claves

Usted dispone de una caja fuerte que se abre mediante una clave de 5 dígitos(pueden ser repetidos). Un intruso puede deducir, mediante análisis de humedad de los botones, los dígitos que usted presiona(pero no si fueron repetidos).

- Calcular la cantidad de claves posibles.
- ¿Usted repetiría algún dígito en su clave? Explicar.

1) La cantidad de claves posibles es $AR_5^{10} = 10^5$.

2) Veamos si conviene o no discutiendo según la cantidad de dígitos repetidos:

- Todos los dígitos son distintos : Debería probar con $P_5 = 5! = 120$ claves.
- Dos dígitos iguales : Primero adivinar cuál de todos los botones es el que se apreta 2 veces. Esto es $C_1^4 = 4$, luego para cada una de esas posibilidades, $P_5^2 = \frac{5!}{2!} = 60$ permutaciones. Entonces por regla del producto hay $4 \times 60 = 240$ claves posibles.
- Tres dígitos iguales: Primero adivinar cuál de todos los botones es el que se apreta 3 veces. Esto es $C_1^3 = 3$, luego para cada una de esas posibilidades, $P_5^3 = \frac{5!}{3!} = 20$ permutaciones. Entonces por la regla del producto hay 3×20 claves posibles.
- Dos pares dígitos iguales: Primero adivinar cuáles de todos los botonos son los que se apretaron 2 veces. Esto es $C_2^3 = 3$ y para cada una de esas posibilidades $P_5^{2,2} = \frac{5!}{2! \times 2!} = 30$. Entonces por la regla del producto hay $3 \times 30 = 90$ claves posibles.
- Cuatro dígitos iguales: Primero adivinar cuál de todos los botones es el que se apreta 4 veces. Esto es $C_1^2 = 2$, luego para cada una de esas posibilidades, $P_5^4 = \frac{5!}{4!} = 5$. Entonces por la regla del producto hay $2 \times 5 = 10$ claves posibles.

En conclusión, lo más conveniente es que la clave contenga 2 dígitos iguales.

1.5. Ejercicio 4 - 5 de oro

Se juega a un juego del tipo 5 de Oro: hay que acertar 5 números, elegidos dentro de 44 posibilidades.

- ¿Cuántas jugadas posibles hay?
- Si se eligen 5 números a priori, ¿cuántas jugadas posibles hay que contengan exactamente uno de los números elegidos?
- Si se eligen 5 números a priori, ¿cuántas jugadas posibles hay que contengan por lo menos 2 de los número elegidos?

1) Hay que elegir 5 números, sin repetir y el orden no importa.

$$\text{Se calcula } C_5^{44} = \tfrac{44!}{39! \times 5!} = 1086008 \text{ jugadas.}$$

2) Se separan los números en dos conjuntos, uno con los 5 números elegidos a priori y otro con los restantes 39. Dados los 5 números, se requiere 1. Esto se puede hacer de $C_1^5 = 5$ maneras. Luego elijo 4 de los restantes 39. Hay $C_4^{39} = 82251$ maneras.
Por lo tanto, por regla del producto, la cantidad de jugadas sería $C_1^5 \times C_4^{39} = 411255$

3) Se separan los números en dos conjuntos, uno con los 5 números elegidos a priori y otro con los restantes 39. Ahora, hay que seperar en casos, según se consigan 2, 3, 4, o 5 aciertos.

- 2 aciertos: Dados los 5 números, se requieren 2. Esto se puede hacer de $C_2^5 = 10$ maneras.
  Luego elijo 3 de los restantes 39. Hay $C_3^{39} = 9139$ maneras.
  Por lo tanto, por regla del producto, $C_2^5 \times C_3^{39} = 91390$ jugadas.
- 3 aciertos: Dados los 5 números, se requieren 3. Esto se puede hacer de $C_3^5 = 10$ maneras.
  Luego elijo 2 de los restantes 39. Hay $C_2^{39} = 741$ maneras.
  Por lo tanto, por regla del producto, $C_3^5 \times C_2^{39} = 7410$ jugadas.
- 4 aciertos: Dados los 5 números, se requieren 4. Esto se puede hacer de $C_4^5 = 5$ maneras.
  Luego elijo 1 de los restantes 39. Hay $C_1^{39} = 39$ maneras.
  Por lo tanto, por regla del producto, $C_4^5 \times C_1^{39} = 195$ jugadas.
- 5 aciertos: Dados los 5 números, se requieren 5. Esto se puede hacer de $C_5^5 = 1$ manera.
  Por lo tanto, hay 1 jugada.

Por regla de la suma, la cantidad de jugadas posibles con 2 o más aciertos es de : $91390 + 7410 + 195 + 1 = 98996$

1.6. Ejercicio 5 - Compra bizcochos

Usted va a la panadería a comprar una docena de bizcochos. En la panadería sólo quedan croissants, margaritas y galletas en cantidades suficientes.

- ¿Cúantas elecciones distintas puede hacer?
- Usted llega a la facultad con α croissants, β margaritas y γ galletas ($\alpha + \beta + \gamma = 12$) y los reparte entre usted y 11 amigos. ¿De cuántas formas los puede repartir? (Calcular en función de los parámetros)
- ¿Cuánto deben valer α, β, y γ para que dicha cantidad sea máxima?

1) En la panadería existen 3 tipos de bizcochos : croissants, margaritas y galletas. Necesitamos elegir 12 de ellos, no nos importa el orden en el cual son elegidos y podemos repetir. Entonces podemos calcular :

$$CR_{12}^{3} = C_{12}^{3+12-1} = C_{12}^{14} = \frac{14!}{2! \times 12!} = 91 \text{ elecciones.}$$

2) Por letra α = #croissants, β = #margaritas y γ = #galletas. Tal que $\alpha + \beta + \gamma = 12$
Supongo que se reparte 1 bizcocho a cada estudiante.

- Reparto los crossaints : De los 12 estudiantes, elijo α, sin importar el orden de elección y sin repetir estudiante, para entregarle los crossaints. Esto se puede hacer de C_{α}^{12} maneras.
- Reparto las margaritas : De los 12 - α estudiantes, elijo β, sin importar el orden de elección y sin repetir estudiante, para entregarle las margaritas. Esto se puede hacer de $C_{\beta}^{12-\alpha}$ maneras.
- Reparto las galletas : De los 12 - α - β estudiantes, elijo γ, sin importar el orden de elección y sin repetir estudiante, para entregarle las galletas. Esto se puede hacer de $C_{\gamma}^{12-\alpha-\beta}$ maneras.

Por lo tanto, por regla del producto, la cantidad de formas de repartirlos es:

$$C_{\alpha}^{12} \times C_{\beta}^{12-\alpha} \times C_{\gamma}^{\overbrace{12-\alpha-\beta}^{\gamma}} = C_{\alpha}^{12} \times C_{\beta}^{12-\alpha} \times \underbrace{C_{\gamma}^{\gamma}}_{1} = \frac{12!}{(12-\alpha)! \times \alpha!} \times \frac{(12-\alpha)!}{\underbrace{(12-\alpha-\beta)}_{\gamma}! \times \beta!} = \frac{12!}{\alpha! \times \beta! \times \gamma!}$$

3) Para que la cantidad $\frac{12!}{\alpha!\times\beta!\times\gamma!}$ sea máxima hay que obtener los valores de α, β y γ restricto a $\alpha+\beta+\gamma=12$ tal que $\alpha!\times\beta!\times\gamma!$ sea mínimo. Se hace con la siguiente tablita.

α	10	9	8	8	7	7	6	6	6	5	5	4
β	1	2	3	2	4	3	5	4	3	5	4	4
γ	1	1	1	2	1	2	1	2	3	2	3	4
	10!	9! 2	8! 3!	8! 4	7! 4!	7! 3! 2	6! 5!	6! 4! 2	6! 3! 3!	5! 5! 2!	5! 4! 3!	4! 4! 4!
	3628800	725760	241920	161280	120960	60480	86400	34560	25920	28800	17280	13824

Cuando α=β=γ=4 el valor llega a su máximo y es $\frac{12!}{4!4!4!}=34650$ maneras de repartir.

1.7. Ejercicio 6 - Propiedades del cardinal de conjuntos

Sean $A_1, \dots, A_n$ conjuntos finitos cualesquiera dentro de X, con $n \geq 3$.

- Probar que $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$.
- Probar que $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$.
- Generalizar la igualdad anterior para todo $n \geq 3$.

1) Demostración 1: Para contar los elementos de $A_1 \cup A_2$ primero contamos los de A_1 y luego los de A_2, sumando finalmente esos resultados. Resulta que los elementos de la intersección se sumaron dos veces, por eso hay que restar los elementos de $A_1 \cap A_2$.

Demostración 2: $$A_1 \cup A_2 = \overbrace{(A_1 \backslash A_2) \cup (A_2 \backslash A_1) \cup (A_1 \cap A_2)}^{\text{Conjuntos disjuntos}}$$

$$|(A_1 \backslash A_2) \cup (A_2 \backslash A_1) \cup (A_1 \cap A_2)| = |A_1 \backslash A_2| + |A_2 \backslash A_1| + |A_1 \cap A_2| =$$
$$|A_1| - |A_1 \cap A_2| + |A_2| - |A_2 \cap A_1| + |A_2 \cap A_1| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

2) $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |(A_1 \cup A_2) \cup A_3|$ por asociativa.

$$|(A_1 \cup A_2) \cup A_3| \underbrace{=}_{1)} |A_1 \cup A_2| + |A_3| - |(A_1 \cup A_2) \cap A_3|$$

$$|A_1 \cup A_2| + |A_3| - |(A_1 \cup A_2) \cap A_3| \underbrace{=}_{1)} |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| + |A_3| - |(A_1 \cup A_2) \cap A_3|$$

$$|(A_1 \cup A_2) \cap A_3| = |(A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)| \text{ por distributividad.}$$

Entonces :$|A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| + |A_3| - |(A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)| \underbrace{=}_{1)} |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$.

Por lo tanto, queda demostrado.

3) La fórmula generalizada es la siguiente :

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| =$$
$$\sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \cdots + (-1)^{r-1} \times \sum_{i_1<\ldots<i_r} |A_{i_1} \cap \ldots A_{i_r}| + \cdots + (-1)^{n-1} \times |A_1 \cap \cdots \cap A_n|$$

Demostración: Solo es preciso comprobar que cada elemento de la unión se cuenta una sola vez en la expresión de la derecha de la igualdad.

Supongamos que $x \in (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)$ es un elemento que está exactamente en $p \leq n$ de los n conjuntos, $x \in (A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_p})$.
Entonces x está contado $p = C_1^p$ veces en el primer sumando $\sum_{i=1}^{n} |A_i|$.
En el segundo sumando $\sum_{i<j} |A_i \cap A_j|$, está contado una vez para cada eleción de dos de los subconjuntos $A_{i_1}, \ldots, A_{i_p}$, es decir, C_2^p veces.
En general, en el sumando r-ésimo el elemento x está contado C_r^p veces mientras $r \leq p$ y ninguna vez si r >p.
Por lo tanto, el elemento está contado:

$$C_1^p - C_2^p + \cdots + (-1)^{r-1} \times C_r^p + \cdots + (-1)^{p-1} \times C_p^p = C_0^p = 1$$

1.8. Ejercicio 7 - Desordenes

Contar la cantidad de maneras de desordenar el número 123456789, de modo que ningún dígito quede ubicado en su posición original.

Utilizando la fórmula de desordenes:
$D(9) = \frac{9!}{2!} - \frac{9!}{3!} + \frac{9!}{4!} - \frac{9!}{5!} + \frac{9!}{6!} - \frac{9!}{7!} + \frac{9!}{8!} - \frac{9!}{9!} = 181440 - 60480 + 15120 - 3024 + 504 - 72 + 9 - 1 = 133496$

2. Propiedades de la Probabilidad

2.1. Definiciones importantes

- **Experimento Aleatorio :** es aquel que, por su grado de complejidad, no podemos predecir exactamente su resultado, sino que sólo podemos predecir con qué frecuencia se obbtienen los distintos resultados en un gran número de intentos.

- **Espacio Muestral:** Lo llamaremos Ω y es el conjunto de resultados posibles de un experimento aleatorio.

- **Suceso o evento:** Se le llama así a cualquier subconjunto de Ω.

- **P(w) :** La probabilidad de un resultado puntual $w \in \Omega$ es el valor al cual se aproxima la *frecuencia* de ocurrencia de w cuando el número de experimentos es muy grande y ls mismos se realizan siempre en iguales condiciones e independientemente de la historia previa.

- **P(A) siendo A un suceso :** De manera general se calcula como,

  $$P(A) = \sum_{w \in A} P(w) \quad \forall A \subset \Omega$$

  Si los resultados son equiprobables entonces : $P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\#\text{Casos favorables}}{\#\text{Casos posibles}}$

- **Función probabilidad:** $P : \{Sucesos\} \to [0,1]$ es tal que se cumplen:

  - $0 \leq P(A) \leq 1 \quad \forall A \subset \Omega$
  - $P(\Omega) = 1$
  - $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ colección de sucesos incompatibles $(A_i \cap A_j = \varnothing \forall i \neq j)$:

    $$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

- **Propiedades:**

  - P($A \cup B$) = P(A) + P(B) - P($A \cap B$) $\quad \forall A, B$.
  - $P(A^c) = 1 - P(A)$
  - $Si \quad A \subset B \Rightarrow P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$. Además $P(A) \leq P(B)$.

2.2. Ejercicio 8 - Lenguaje natural y sucesos

Sean (Ω, A, P) un espacio de probabilidad, A, B y C sucesos. Expresar mediante operaciones con conjuntos los sucesos que corresponden a:

- Ocurren A y B
- Ocurre A u ocurre B.
- Ocurren los tres sucesos.
- Ocurre por lo menos uno de los tres sucesos.
- Ocurre A u ocurre B pero no los dos simultáneamente.
- No ocurre B.
- No ocurre ni A ni B.
- No ocurre ninguno de los tres sucesos.
- Ocurre A y no ocurre B.
- Ocurre exactemente uno de los tres sucesos.
- Ocurren por lo menos dos de los tres sucesos.

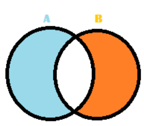
1) $A \cap B = \{w \in \Omega : w \in A \ y \ w \in B\}$

2) $A \cup B = \{w \in \Omega : w \in A \ u \ w \in B\}$

3) $A \cap B \cap C = \{w \in \Omega : w \in A \ y \ w \in B \ y \ w \in C\}$

4) $A \cup B \cup C = \{w \in \Omega : w \in A \ u \ w \in B \ u \ w \in C\}$

5) diferecia simétrica



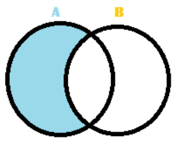
$$\begin{aligned} A \nabla B &= \{w \in \Omega : (w \in A \ y \ w \notin B) \ u \ (w \in B \ y \ w \notin A)\} \\ &= (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \\ &= (A \cup B) - (A \cap B) \end{aligned}$$

6) $B^c = \{w \in \Omega : w \notin B\}$

7) $(A \cup B)^c = \{w \in \Omega : w \notin A \ y \ w \notin B\}$

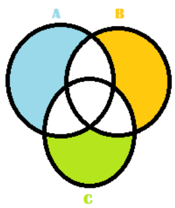
8) $(A \cup B \cup C)^c = \{w \in \Omega : w \notin A \ y \ w \notin B \ y \ w \notin C\}$

9)



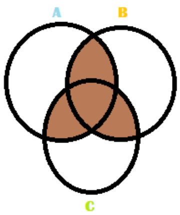
$$(A \cap B)^c \quad = \quad \{w \in \Omega : w \in A \ y \ w \notin B\}$$

10)



$A \nabla B \nabla C = \{w \in \Omega : (w \in A \ y \ w \notin B \ y \ \notin C)u(w \notin A \ y \ w \in B \ y \ \notin C)u(w \notin A \ y \ w \notin B \ y \ \in C)\}$
$= (A \cap (C \cup B)^c) \cup (B \cap (C \cup A)^c) \cup (C \cap (A \cup B)^c)$
$= (A \cap C^c \cap B^c) \cup (B \cap C^c \cap A^c) \cup (C \cap A^c \cap B^c)$

11)



$(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)$

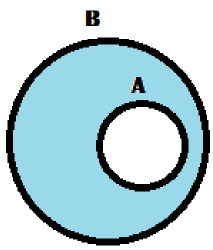
2.3. Ejercicio 9 - Propiedades de prob

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad, A y B sucesos. Demostrar que:

- Si $A \subset B \Rightarrow P(B \backslash A) = P(B) - P(A)$. Deducir que $P(A) \leq P(B)$.
- $P(A \cup B) \geq \max\{P(A), P(B)\}$
- $P(A \cap B) \leq \min\{P(A), P(B)\}$

1) $B = A \overbrace{\cup^{+}}^{\text{Unión disjunta}} B \backslash A \quad \Rightarrow \quad P(B) = P(A) + P(B \backslash A) \quad \Rightarrow \quad P(B) - P(A) = P(B \backslash A)$

Por ser una probabilidad se tiene que : $P(B \backslash A) \geq 0 \Leftrightarrow P(B) - P(A) \geq 0 \Leftrightarrow P(B) \geq P(A)$



2)

- $A \subset (A \cup B)$, usando parte anterior, $P((A \cup B) \backslash A) = P(A \cup B) - P(A)$ y $P(A \cup B) \geq P(A)$.
- $B \subset (A \cup B)$, usando parte anterior, $P((A \cup B) \backslash B) = P(A \cup B) - P(B)$ y $P(A \cup B) \geq P(B)$.

Por lo tanto $P(A \cup B) \geq \max\{P(A), P(B)\}$

3)

- $(A \cap B) \subset A$, usando parte anterior, $P(A \backslash (A \cap B)) = P(A) - P(A \cap B)$ y $P(A) \geq P(A \cap B)$.
- $(A \cap B) \subset B$, usando parte anterior, $P(B \backslash (A \cap B)) = P(B) - P(A \cap B)$ y $P(B) \geq P(A \cap B)$.

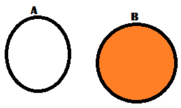
Por lo tanto $\min\{P(A), P(B)\} \geq P(A \cap B)$

2.4. Ejercicio 10 - Calcular probs

Sea (Ω, A, P) un espacio de probabilidad, A y B sucesos tales que $P(A) = \frac{1}{3}$ y $P(B) = \frac{1}{2}$ Determinar el valor de $P(A^c \cap B)$ en los siguientes casos:

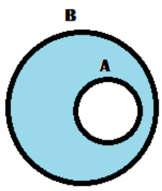
- A y B incompatibles ($A \cap B = \varnothing$)
- $A \subset B$
- $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$

1)



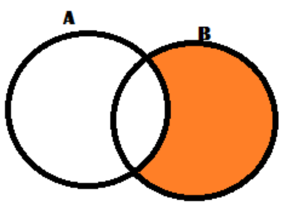
$$\begin{array}{rcl} (A^c \cap B) & = & B \\ P(A^c \cap B) & = & P(B) \\ P(B) & = & \frac{1}{2} \end{array}$$

2)



$$(A^c \cap B) \quad = \quad P(B \backslash A) \quad = \quad P(B) - P(A) \quad = \quad \frac{1}{6}$$

3)



$$(B \cap A) \subset B \Rightarrow P(B \backslash (B \cap A)) \quad = \quad P(B) - P(B \cap A) \quad = \quad \frac{3}{8}$$

$A^c \cap B = B \backslash (B \cap A)$

2.5. Ejercicio 11 - Calcular probs

Sea (Ω, A, P) un espacio de probabilidad. Se consideran los sucesos A y B con: $P(A) = \frac{3}{8}$ y $P(B) = \frac{1}{2}$ y $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$
Calcular:

- $P(A^c)$ y$P(B^c)$
- $P(A \cup B)$
- $P(A^c \cap B^c)$
- $P(A^c \cap B)$ y $P(A \cap B^c)$

1)

- $P(A^c) = 1 - P(A) = \frac{5}{8}$
- $P(B^c) = 1 - P(A) = \frac{1}{2}$

2)

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$

3)

$$\begin{array}{rcl} A^c \cap B^c & = & (A \cup B)^c \quad \text{Por De Morgan} \\ P(A^c \cap B^c) & = & P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = \frac{3}{8} \end{array}$$

4)

$$A^c \cap B = B \backslash A \quad y \; B \cup A = A \cup^+ B \backslash A \quad \text{entonces,}$$

$$P(B \cup A) = P(A) + P(B \backslash A) \Rightarrow \quad P(B \cup A) - P(A) = P(B \backslash A) = \frac{1}{4} = P(A^c \cap B)$$

$$A \cap B^c = A \backslash B \quad y \; B \cup A = B \cup^+ A \backslash B \quad \text{entonces,}$$

$$P(B \cup A) = P(B) + P(A \backslash B) \Rightarrow \quad P(B \cup A) - P(B) = P(A \backslash B) = \frac{1}{8} = P(A \cap B^c)$$

2.6. Ejercicio 12 - Propiedades de probabilidad

Sea (Ω, A, P) un espacio de probabilidad. Demostrar que:

- Si A, B y C son sucesos entonces se cumple que:
  $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$
- Si $A_1, \ldots, A_n$ son sucesos probar que:
  $P\left(\bigcup_{i=1}^{i=n} A_i\right) = \sum_{1 \le i \le n} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_i \cap A_j) + \cdots + (-1)^{n-1} \times P(A_1 \cap ... \cap A_n)$

1) Primero vamos a probar que : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$\begin{array}{rcl} A & = & A \backslash B \cup^{+} A \cap B \quad \Rightarrow \quad P(A) = P(A \backslash B) + P(A \cap B) \\ B & = & B \backslash A \cup^{+} A \cap B \quad \Rightarrow \quad P(B) = P(B \backslash A) + P(A \cap B) \end{array}$$

Sumando las dos ecuaciones resulta : $P(A) + P(B) = P(A \backslash B) + P(B \backslash A) + 2 \times P(A \cap B)$
Reordenando : $P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \underbrace{P(A \backslash B) + P(B \backslash A) + P(A \cap B)}_{\text{Son 3 zonas disjuntas}}$
Por propiedad : $P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A \backslash B \cup^{+} B \backslash A \cup^{+} A \cap B)$
Entonces : $P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A \cup B)$

Ahora demostremos la propiedad de interés:
$P((A \cup B) \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P((A \cap C) \cup (B \cap C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

② Si $A_1, \ldots, A_n$ son sucesos probar que:

$$\boxed{Q(n): P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{1\leq i\leq n} P(A_i) - \sum_{1\leq i<j\leq n} P(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \ldots \cap A_n)}$$

Demostración por Ic:

Paso base:

T) $Q(1)$ se cumple   demostrado en parte ①

Paso inductivo:

Ⓗ $Q(n)$ es verdadera   Ⓣ $Q(n+1)$ es Verdadera

Demostración:

$$P(n+1) \equiv P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = \sum_{1\leq i\leq n+1} P(A_i) - \sum_{1\leq i<j\leq n+1} P(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{n+2} P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n+1})$$

$$P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cup A_{n+1}\right) = \ldots\ldots$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + P(A_{n+1}) - P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1}\right) = \sum_{1\leq i\leq n+1} P(A_i) - \sum_{1\leq i<j\leq n+1} P(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{n+2} P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n+1})$$

por Ⓗ

$$\sum_{1\leq i\leq n} P(A_i) - \sum_{1\leq i<j\leq n} P(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) + P(A_{n+1}) - P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1}\right) = \ldots$$

morgan

$$-\sum_{1\leq i<j\leq n} P(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) - P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{i+1})\right) = \sum_{1\leq i<j\leq n+1} P(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{n+2} P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n+1})$$

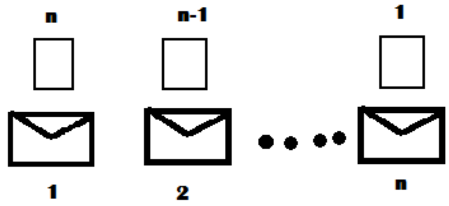
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} (A_i \cap A_{i+1}) \cup (A_n \cap A_{n+1})\right)$$

prop $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

así sigue ....

2.7. Ejercicio 13 - Aplicación de prop anterior

Un secretario o secretaria coloca aleatoriamente n cartas diferentes en sobres. En cada uno de los sobres está escrito el nombre del destinatario en cada una de las n cartas, de modo que lo único que debe hacer es acertar cada carta en el sobre que le corresponde.



- Calcular la probabilidad p_n de que al menos una carta vaya a parar al sobre que le toca.
- Calcular $\lim_{n\to+\infty} p_n$.

1) Considero A_i = La carta i va al sobre i.

$$p_n = P\left(\bigcup_{i=1}^{i=n} A_i\right) = \sum_{1\le i\le n} P(A_i) - \sum_{1\le i<j\le n} P(A_i\cap A_j) + \cdots + (-1)^{n-1}\times P(A_1\cap ...\cap A_n)$$

$P(A_i) = \frac{1}{n}$ esto es pues dada 1 carta solo hay 1 caso favorable (sobre correspondiente) de n sobres. Hay equiprobabilidad.
$\underbrace{P(A_i\cap A_j)}_{\forall i,j:1\le i<j\le n} = \frac{1}{n\times(n-1)}$ esto es pues dadas 2 cartas solo hay 1 caso favorable (sobres correspondiente) de A_2^n posibles asignaciones a las cartas.
$P(A_i\cap A_j\cap A_h) = \frac{1}{n\times(n-1)\times(n-2)}$ esto es pues dadas 3 cartas solo hay 1 caso favorable (sobres correspondiente) de A_3^n posibles asignaciones a las cartas.
$P(A_i\cap A_j\cap\cdots\cap A_n) = \frac{1}{n!}$

Por lo tanto:
$$p_n = P\left(\bigcup_{i=1}^{i=n} A_i\right) = C_1^n\times\frac{1}{n} - C_2^n\times\frac{1}{n\times(n-1)} + C_3^n\times\frac{1}{n\times(n-1)\times(n-2)} + \cdots + (-1)^{n-1}\times\frac{1}{n!}$$

$$p_n = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!} = \sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i-1}}{i!}$$

2) Hay que calcular : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{i!}$

Primero veamos si la siguiente serie $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i!}$ converge.

Notemos que es una serie alternada, por lo tanto si converge absolutamente $\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\frac{(-1)^{i-1}}{i!}|\right)$ entonces lo hace también $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i!}$.

Utilizando el ratio test : $\lim\limits_{i\to+\infty} \frac{(i+1)!}{i!} = i \ y \ i > 0$ entonces converge absolutamente.

Se concluye que la serie $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i!}$ converge a un valor L.

Por lo tanto, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{i!} = L$

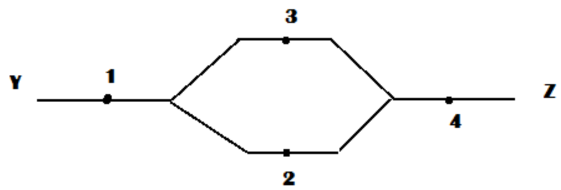
Se puede aproximar L : $L \in \left\{ \sum\limits_{i=1}^{N} \frac{(-1)^{i-1}}{i!}, \sum\limits_{i=1}^{N+1} \frac{(-1)^{i-1}}{i!} \right\}$

Si tomamos N = 100 entonces : $L \in \{\approx 0{,}632120, \approx 0{,}632120\}$ y $0{,}632120 \approx (1 - e^{-1})$

2.8. Ejercicio 14 - Compuerta de agua

Un sistema de canalización de agua tiene 4 compuertas, dispuestas como en la figura. Cada compuerta se abre y cierra al azar, dejando pasar agua (si está abierta) o impidiéndolo. Supongamos las probabilidades siguientes:

Sea A_i = " La compuerta i está abierta "

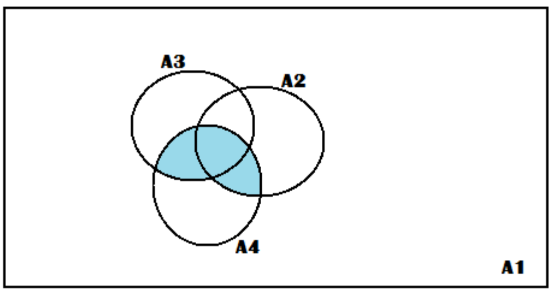


$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_4) = 0{,}55$$
$$P(A_3) = 0{,}36$$

$$P(A_1^c \cap A_2) = P(A_1^c \cap A_3) = P(A_1 \cap A_4^c) = 0{,}2$$
$$P(A_2 \cap A_4) = 0{,}35$$
$$P(A_3 \cap A_4^c) = 0{,}26 \qquad P(A_2 \cap A_3) = 0$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_4) = 0{,}85$$
$$P(A_1 \cup A_3 \cup A_4) = 0{,}87$$

Calcular a probabilidad de que un torrente de agya lanzado en el punto Y llegue a Z.



Podemos calcular : $P(A_1 \cap (A_4 \cap (A_3 \cup A_2)))$

$$P\left(A_1 \cap (A_4 \cap (A_3 \cup A_2))\right) = P\left(A_1 \cap [(A_4 \cup A_3) \cap (A_4 \cap A_2)]\right) = P\left((A_1 \cap A_4 \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_4 \cap A_2)\right)$$
$$= \underbrace{P(A_1 \cap A_3 \cap A_4)}_{A)} + \underbrace{P(A_1 \cap A_4 \cap A_2)}_{B)} - \underbrace{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)}_{\text{0 pues por letra A2 y A3 son disjuntos}}$$

A) Propiedad a tener en cuenta : $P(B) = P(B \cap A^c) + P(A \cap B)$

$$P(A_1 \cup A_3 \cup A_4) = P(A_1) + P(A_3) + P(A_4) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_4) - P(A_3 \cap A_4) + P(A_1 \cap A_3 \cap A_4)$$

$$0{,}87 = 0{,}55 + 0{,}36 + 0{,}55 - P(A_3) + P(A_3 \cap A_1^c) - P(A_1) + P(A_1 \cap A_4^c) - P(A_3) + P(A_3 \cap A_4^c) + P(A_1 \cap A_3 \cap A_4)$$

$$0{,}87 = 0{,}55 - 0{,}36 + 0{,}2 + 0{,}2 + 0{,}26 + P(A_1 \cap A_3 \cap A_4)$$
$$0{,}02 = P(A_1 \cap A_3 \cap A_4)$$

B) Propiedad a tener en cuenta : $P(B) = P(B \cap A^c) + P(A \cap B)$

$P(A_1 \cup A_2 \cup A_4) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_4) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_4) - P(A_2 \cap A_4) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_4)$

$0{,}87 = 0{,}55 + 0{,}55 + 0{,}55 - P(A_2) + P(A_2 \cap A_1^c) - P(A_1) + P(A_1 \cap A_4^c) + P(A_2 \cap A_4) +$
$P(A_1 \cap A_2 \cap A_4)$

$0{,}87 = 0{,}55 + 0{,}2 + 0{,}2 - 0{,}35 + P(A_1 \cap A_2 \cap A_4)$
$0{,}25 = P(A_1 \cap A_2 \cap A_4)$

Entonces la probabilidad de que un torrente de agua lanzado desde Y llegue a Z es :
$P(A_1 \cap (A_4 \cap (A_3 \cup A_2))) = 0{,}25 + 0{,}02 = 0{,}27$

2.9. Ejercicio 15 - Propiedades de prob.

Sea (Ω, A, P) un espacio de probabilidad.

- Mostrar qe si A y B son sucesos entonces :

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

- Deducir que si $A_1, A_2, \ldots, A_m$ son sucesos entonces:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{m} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{m} P(A_n)$$

- Demostrar que si $\{A_n\}_{n \in N}$ es una colección de sucesos, se cumplen:
    - $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_N P\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right)$
    - $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_N P\left(\bigcap_{n=1}^{N} A_n\right)$

  Sugerencia : Aplicar el teorema de continuidad de la probabilidad.

- Deducir que si $\{A_n\}_{n \in N}$ es una colección de sucesos entonces :

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

- Deducir que si $P(A_n) = 0$, $\forall n \in N$ entonces $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$

1) Hay dos casos posibles:

- Si A y B son incompatibles entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Demostrado.
- Si A y B son compatibles entonces:

$$P(A \cap B) > 0 \Rightarrow \underbrace{P(A) + P(B) - P(A \cap B)}_{P(A \cup B)} < P(A) + P(B)$$

2) La propiedad a demostrar es $\boxed{Q(m) \equiv P\left(\bigcup_{n=1}^{m} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{m} P(A_n)}$

<u>Paso base:</u>
T) Q(2) es verdadera $Q(2) \equiv P(A_1 \cup A_2) \leq P(A_1) + P(A_2)$ demostrado

<u>Paso Inductivo:</u>
H) Q(m) es verdadera T) Q(m+1) es verdadera
<u>Demostración:</u>

$$Q(m+1) \equiv P\left(\bigcup_{n=1}^{m+1} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{m+1} P(A_n)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{m} A_n \cup A_{m+1}\right) \leq \sum_{n=1}^{m+1} P(A_n)$$

$$\Leftrightarrow C = \bigcup_{n=1}^{m} A_n \text{y 1) y HI}$$

$$P(C \cup A_{m+1}) \leq P(C) + P(A_{m+1}) \leq \sum_{n=1}^{m} P(A_n) + P(A_{m+1})$$

$$\Leftrightarrow$$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{m} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{m} P(A_n)$$

3) Considero las sucesiones $B_N = \bigcup_{n=1}^{N} A_n$ y $D_N = \bigcap_{n=1}^{N} A_n$

Se observa que B_N es monótona creciente y D_N monótona decreciente. Por lo tanto, podemos aplicar el teorema de continuidad de la probabilidad y resulta:

$$P\left(\bigcup_{N=1}^{\infty} B_N\right) = \lim_N P(B_N) \quad \Rrightarrow \underbrace{P\left(\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right)}_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} = \lim_N P\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right)$$

$$\Rrightarrow P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_N P\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right)$$

Análogamente,

$$P\left(\bigcap_{N=1}^{\infty} D_N\right) = \lim_N P(D_N) \quad \Rrightarrow \underbrace{P\left(\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=1}^{N} A_n\right)}_{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n} = \lim_N P\left(\bigcap_{n=1}^{N} A_n\right)$$

$$\Rrightarrow P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_N P\left(\bigcap_{n=1}^{N} A_n\right)$$

4) $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \underbrace{=}_{3} \lim_N P\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) \underbrace{\leq}_{2} \lim_N \sum_{n=1}^{N} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

5)

$$\text{Por ser una probabilidad se tiene que : } 0 \leq P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq 1$$

$$\text{Por parte 4) se tiene : } P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \underbrace{=}_{letra} \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$$

$$\text{Entonces, } 0 \leq P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq 0 \text{ con lo cual } P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \text{ debe ser 0.}$$

3. Cálculo de probabilidades

3.1. Definiciones importantes

- **Teorema, Contiuidad de la probabilidad:** Si P es una probabilidad en Ω , entonces:
  - Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ colección creciente de sucesos, es decir $A_n \subset A_{n+1} \forall n$:
  $$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$$
  - Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ colección decreciente de sucesos, es decir $A_{n+1} \subset A_n \forall n$:
  $$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$$

3.2. Ejercicio 16 - Determinar espacios muestrales

Determinar el espacio muestral asociado a cada uno de los siguientes experimentos aleatorios, y en el caso que sea finito, indicar su cardinal.

- Lanzar al aire una moneda tres veces.
- Extraer dos fichas sucesivamente y sin reposición de una bolsa que contiene fichas numeradas con los 5 dígitos pares.
- Lanzar una moneda finalizando el experimento si sale número; si sale cara, tirar además un dado.
- Seleccionar al azar dos alumnos de una clase de 30.
- Valor de la tasa de inflación para este año.

1) Tomemos la siguiente convención : c = cara y n = número.

- Si importa el orden de los resultados :

$$\Omega = \{(c,c,c);(c,n,c);(n,c,c);(c,n,n);(n,n,c);(n,n,n);(n,c,n);(c,c,n)\} \quad y \quad |\Omega| = 8$$

  Los resultados son equiprobables.

- Si no importa el orden de los resultados :

$$\Omega = \{(c,c,c);(c,n,c);(c,n,n);(n,n,n)\} \quad y \quad |\Omega| = 4$$

  Los resultados son no equiprobables.

2)
Si importa el orden de los resultados :

$$\Omega = \{(0,2);(0,4);(0,6);(0,8);(2,0);(2,4);(2,6);(2,8);(4,0);$$
$$(4,2);(4,6);(4,8);(6,0);(6,2);(6,4);(6,8);(8,0);(8,2);(8,4);(8,6)\} \quad y \quad |\Omega| = 20$$

Los resultados son equiprobables.

Si no importa el orden de los resultados :

$$\Omega = \{\{0,2\};\{0,4\};\{0,6\};\{0,8\};\{2,4\};\{2,6\};\{2,8\};\{4,6\};\{4,8\};\{6,8\}\} \quad y \quad |\Omega| = 10$$

Los resultados no son equiprobables.

3)

$$\Omega = \{N; (C,1); (C,2); (C,3); (C,4); (C,5); (C,6)\} \quad y \quad |\Omega| = 7$$

Los resultados no son equiprobables.

4)

$$\Omega = \{\{A_i, A_j\}/i \neq j,\ i,j = 1,\ldots,30\}$$

$|\Omega| = C_2^{30} = 15 \times 19 = 435$

5)

$$\Omega = \mathbb{R} \text{ y } |\Omega| = \infty$$

3.3. Ejercicio 17 - Juegos de azar

- Se juega a un juego del tipo 5 de Oro: hay que acertar 5 números, elegidos dentro de 44 posibilidades.
    - ¿Cuál es la probabilidad de ganar?
    - ¿Cuál es la probabilidad de acertar en al menos 3 números(es decir, acertar exactamente 3, exactamente 4, o exactamente 5 números)?
    - Construir un espacio muestral para este experimento.
- Se juega a la baraja con 40 cartas, 10 de cada palo. Si uno toma 3 cartas, ¿cuál es la probabilidad de elegirlas todas del mismo palo?

A1) Si tomamos $\Omega = \left\{ \underbrace{\{N_1, N_2, N_3, N_4, N_5\}, \ldots, \{N_5, N_6, N_8, N_{10}, N_{44}\}}_{C_5^{44}} \right\}$ tenemos que los resultados son equiprobables.

$$P(ganar) = \frac{1}{C_5^{44}} = \frac{1}{1086008} = 0,000001$$

A2) Usando el mismo Ω :

- Resultados en los que se acierta 3 veces : $C_3^5 \times C39_2$
- Resultados en los que se acierta 4 veces : $C_4^5 \times C39_1$
- Resultados en los que se acierta 5 veces : $C_5^5 \times C39_0$

Por regla de la suma, la cantidad de casos favorables es : $C_3^5 \times C39_2 + C_4^5 \times C39_1 + C_5^5 \times C39_0$

$$\text{P(Acertar)} = \frac{C_3^5 \times C39_2 + C_4^5 \times C39_1 + C_5^5 \times C39_0}{C_5^{44}} = \frac{7410+195+1}{1086008} \approx 0{,}007$$

A3) $\Omega = \{\{N_1, N_2, N_3, N_4, N_5\} \subset \{1, 2, \ldots, 44\}\}$

$$|\Omega| = C_5^{44} = 1086008$$

B1) Tomamos $\Omega = \underbrace{\{\{C_1, C_2, C_3\} \subset \{1, \ldots, 40\}\}}_{\text{Todos los resultados son equiprobables}}$

$$\left.\begin{array}{c}\text{Formas de elegir 3 cartas de un mismo palo : } C_3^{10} = 120 \\ \text{Hay 4 palos distintos y cualquiera de los 4 sirve}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{hay } 4 \times 120 \text{ resultados favorables.}$$

$$\text{P(Tomar 3 mismo palo)} = \frac{4 \times 120}{|\Omega|} = \frac{480}{9880} \approx 0{,}048$$

3.4. Ejercicio 18 - Cálculo ómnibus

Si a un ómnibus con n asientos suben i personas con $i \leq n$.

- ¿De cuántas maneras pueden elegirse los asientos en los que se sentará la gente?
- ¿De cuántas maneras distintas puede disponerse la gente en el ómnibus?
- Asumamos ahora que la gente se dispone al azar y que cada disposición particular tiene la misma probabilidad (equiprobabilidad). Supongamos que el ómnibus tiene un pasillo en el medio; y que a cada costado del pasillo hay m filas de 2 asientos. Para darle un toque romántico, suponga ahora que sube al ómnibus Brad Pitt o Angelina Jolie, ¿qué probabilidad tiene Ud. de quedar sentado al lado del personaje en cuestión?

1) Los asientos no pueden repetirse y no importa el orden en que son elegidos, entonces :

$C_i^n = \frac{n!}{(n-i)!n!}$ es el número de distintas elecciones posibles.

2) Los asientos no se repiten pero si interesa el orden.

$A_i^n = \frac{n!}{(n-i)!}$ es la cantidad de disposiciones.

3) Sea $\Omega = \{\{P_1, \ldots, P_i\}, \ldots\}$ Cada P_i = k/ k = 1, ..., n. (A cada persona le toca 1 asiento.)

$|\Omega| = A_i^n$

Supongamos que $n > i$. Quiero las disposiciones que puede tomar la gente del bus tal que el asiento de mi acompañante quede libre. Yo me quedo fijo en un lugar al azar.
$C_1^n \times A_{i-1}^{n-2} = n \times \frac{(n-2)!}{(n-2-i+1)!}$

Asientos libres hay $n - i \Rightarrow$ la frecuencia con la que eligirá el asiento de mi acompañante será $\frac{1}{n-i}$

Por lo tanto, P("Quede asiento de acompañante vacío" y "Angelina sea mi acompañante") $= \frac{n \times A_{i-1}^{n-2}}{A_i^n} \times \frac{1}{n-i} = \frac{1}{n-1}$

3.5. Ejercicio 19 - Cálculo

- Calcular la probabilidad de obtener una suma de puntos menor que 18 al tirar 3 dados.
- Se elige un grupo de n personas al azar. Descartando los años bisiestos y suponiendo por lo tanto años de 365 días, ¿cuál es la probabilidad de que al menos dos personas cumplan el mismo día? ¿Cuánto tiene que ser n para que dicha probabilidad supere a 0.5?

1) $\Omega = \{(1,1,1);(1,2,1);\ldots;(6,6,6)\}$ Resultados equiprobables. $|\Omega| = 6^3 = 216$

$P((6,6,6)) = \frac{1}{216}$ (6,6,6) es el único resultado que no sirve.

$$\text{P(“Lo que piden”)} = P(\{6,6,6\}^c) = 1 - P((6,6,6)) = \frac{215}{216}$$

2) Tomando $\Omega = \{\{P_1,\ldots,P_n\};\ldots\}$ $\underbrace{P_1}_{\text{cumpleaños de la persona 1}}, \ldots, \underbrace{P_n}_{\text{cumpleaños de la persona n}}$

$|\Omega| = AR_n^{365} = 365^n$

P(“Ninguna cumpla el mismo día”) $= \frac{A_n^{365}}{AR_n^{365}} = \frac{\frac{365!}{(365-n)!}}{(365)^n} = \frac{365!}{(365)^n \times (365-n)!}$

P(“Dos o más cumplan el mismo día”) = 1 - P(“Ninguna cumple el mismo día”)
$=1 - \frac{365!}{(365)^n \times (365-n)!}$

Luego se tiene : $0{,}5 \leq 1 - \frac{365!}{(365)^n \times (365-n)!} \Rightarrow 0{,}5 \geq \frac{365!}{(365)^n \times (365-n)!} \Rightarrow \frac{(365)^n \times (365-n)!}{2} - 365! \geq 0$

Por tanteo se encuentra que el menor entero que lo cumple es n=23.

3.6. Ejercicio 20 - Dado cargado

Si un dado está cargado de modo tal que $P(\{i\}) = \alpha \times i, \ \forall i = 1, 2, \ldots, 6$.

- Determinar el valor de α.
- ¿Cuál es la probabilidad de sacar 5?
- ¿Cuál es la probabilidad de sacar par?

1) Recordando que $P(A) = \sum_{w \in A} P(w) \quad \forall A \subset \Omega$

Sea $\Omega = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}\}$

$P(\Omega) = 1 = \sum_{i=1}^{6} P(\{i\}) = \alpha + 2\alpha + 3\alpha + 4\alpha + 5\alpha + 6\alpha = 21\alpha$
$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{21}$

2) $P(\{5\}) = \frac{1}{21} \times 5 = \frac{5}{21}$

3) Sea $A = \{\{2\}; \{4\}, \{6\}\}$

$$P(A) = \sum_{w \in A} P(w) = \frac{1}{21} \times (2 + 4 + 6) = \frac{12}{21}$$

3.7. Ejercicio 21 - Simulación

Simular 100 tiradas de un dado equilirado y calcular la frecuencia de cada valor. Graficar. Estudiar qué ocurre al aumentar la cantidad de tiradas.

3.8. Ejercicio 22 - Simulación

Simular los cumpleaños del ejerccio 17 para diferentes cantidades de personas. Comparar con los valores calculados.

3.9. Ejercicio 23 - Simulación

Simular 100 tiradas de un dado cargado como en el ejercicio 18 y calcular la frecuencia de cada valor. Graficar. Estudiar que ocurre al aumentar la cantidad de tiradas.