[Büten Zar]
B.Sz

Comentarios

Büten Zar

FB

Letra

Ejercicio 1

Ejercicio 2

Ejercicio 3

Ejercicio 4

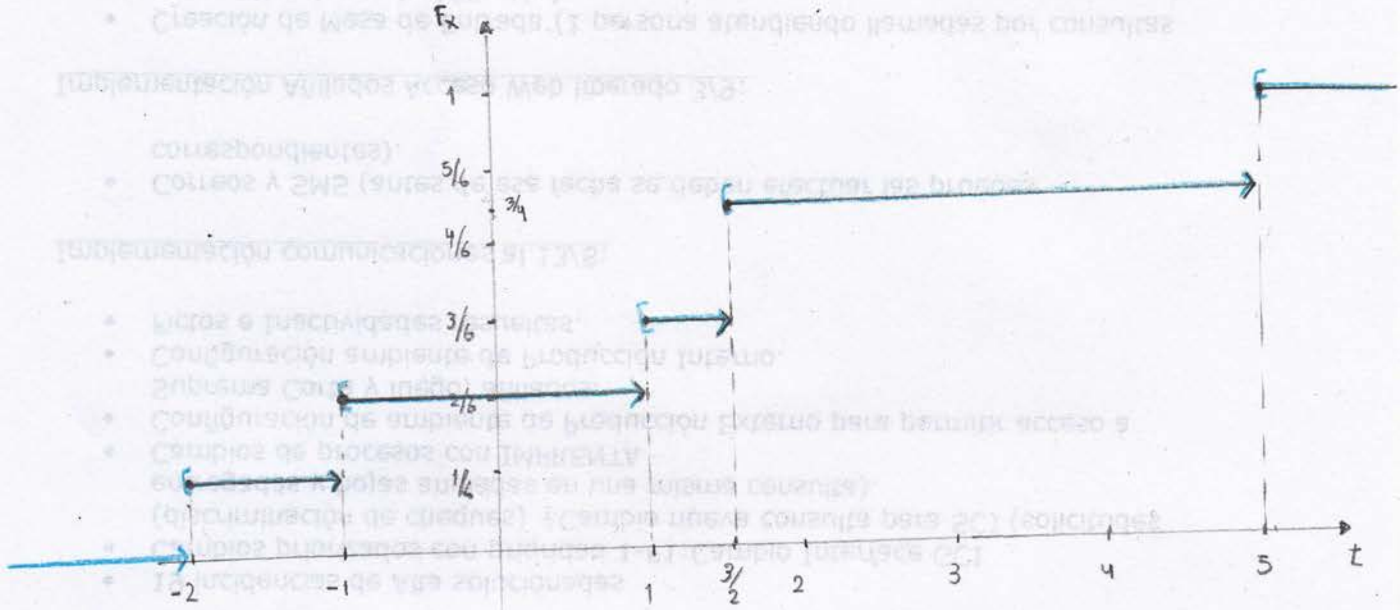
Ejercicio 5

Ejercicio 6

Menú

Ejercicio 1

Sea X una variable aleatoria (v.a.) con recorrido $R_x = \{-2, -1, 1, 3/2, 5\}$ con respectivas probabilidades $\{1/6, 1/6, 1/6, 1/4, 1/4\}$ Graficar F_x



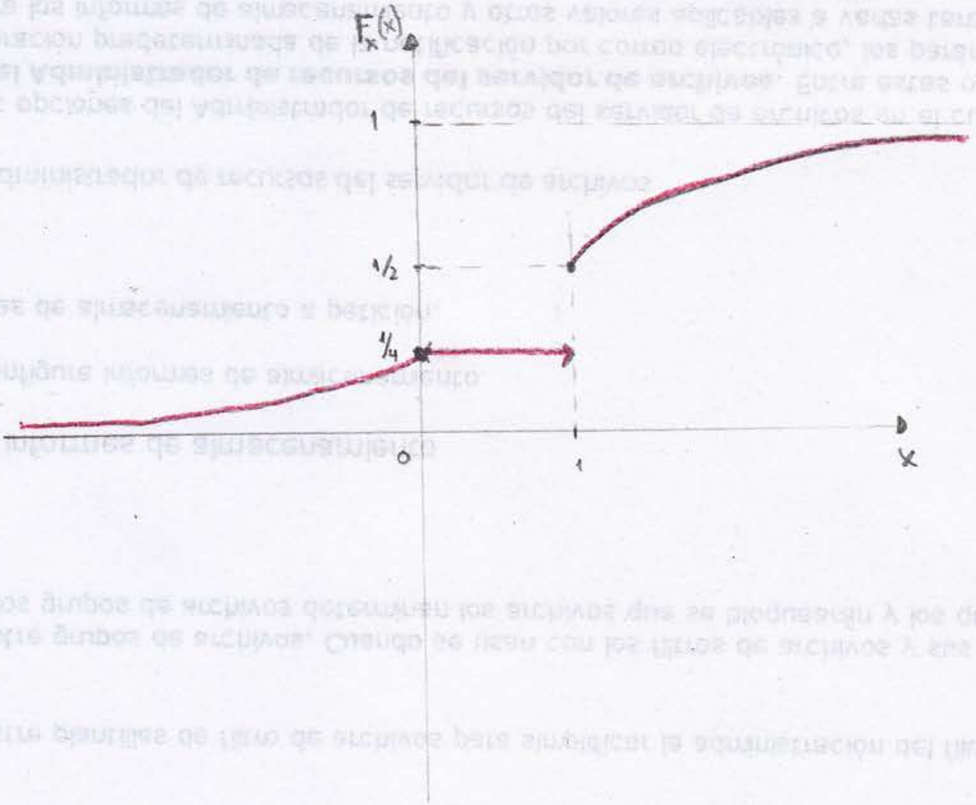
$$F_x(t) = P(X \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < -2 \\ 1/6 & \text{si} \quad -2 \leq t < -1 \\ 2/6 & \text{si} \quad -1 \leq t < 1 \\ 3/6 & \text{si} \quad 1 \leq t < \frac{3}{2} \\ 3/4 & \text{si} \quad \frac{3}{2} \leq t < 5 \\ 1 & \text{si} \quad 5 \leq t \end{cases}$$

Menú

Ejercicio 2

1

$$F(x) = \begin{cases} \beta e^{x} & \text{si } x < 0 \\ \beta & \text{si } x = 0 \\ 1/4 & \text{si } 0 < x < 1 \\ \alpha \dfrac{x}{x+1} & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$



$\frac{1}{4}$ si $0 < x < 1$,

$F(x)$ tiene que ser continua por la derecha

$$\Rightarrow F(0) = \boxed{\frac{1}{4} = \beta}$$

$\frac{1}{4} e^{x}$ si $x < 0$

$$\lim_{x \to +\infty} F_x(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \alpha \frac{x}{x+1} = 1 \Rightarrow \boxed{\alpha = 1}$$

$$\boxed{F(1) = \frac{1}{2}}$$

(2)

$$F(x) = \begin{cases} \alpha + e^{x} & \text{si } x \leq -1 \\ \beta x + \gamma & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ \delta + \varepsilon x & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} \alpha + e^{x} = 0 \Longleftrightarrow \boxed{\alpha = 0} \qquad F(-1) = \frac{1}{e}$$

$$F(x) \text{ es continua en } -1 \Longrightarrow \lim_{x\to-1^-} \beta x + \gamma = \frac{1}{e} \Longleftrightarrow \lim_{x\to-1^-} \beta x + \lim_{x\to-1^-} \gamma = \frac{1}{e}$$

$$\beta \lim_{x\to-1^-} x + \gamma = \frac{1}{e}$$

$$\gamma - \beta = \frac{1}{e} \Longrightarrow \boxed{\gamma = \frac{1}{e} + \beta}$$

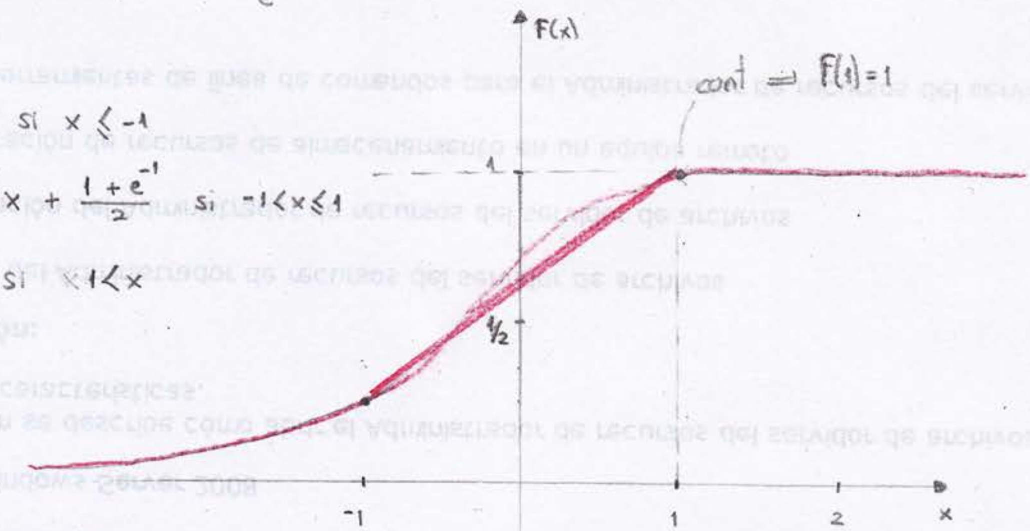
$$\lim_{x\to+\infty} \delta + \varepsilon x = 1 \Longleftrightarrow \lim_{x\to+\infty} \delta + \varepsilon \lim_{x\to+\infty} x = 1 \Longleftrightarrow \delta + \varepsilon \lim_{x\to+\infty} x = 1$$

$$\boxed{\begin{matrix}\delta = 1 \\ \varepsilon = 0\end{matrix}}$$

$$F(1) = 1 \Longleftrightarrow \beta(1) + \frac{1}{e} + \beta = 1$$

$$2\beta = 1 - \frac{1}{e} \Longrightarrow \boxed{\beta = \frac{e-1}{2e}} \quad \boxed{\gamma = \frac{e+1}{2e}}$$

$$F(x) = \begin{cases} e^{x} & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{1-e^{-1}}{2} x + \frac{1+e^{-1}}{2} & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$



Menú

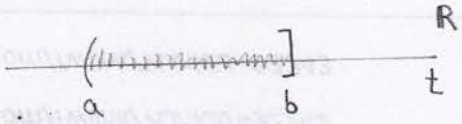
Ejercicio 3

Se consideran la función de distribución $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la variable aleatoria X. Probar que:

$$B \subset A \Rightarrow P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$$

1. $$\boxed{P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)}$$

Demostración:

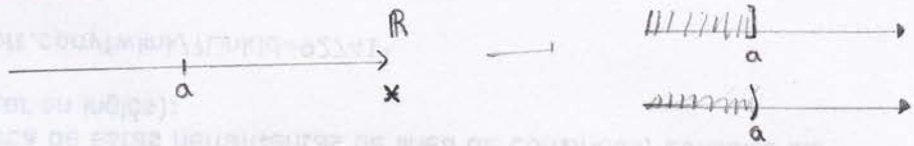


$$P(a < X \leq b) = P(X \in (a,b]) = P(X \in (-\infty, b] \setminus (-\infty, a])$$

$$\overset{prop}{=} P(X \in (-\infty, b]) - P(X \in (-\infty, a]) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$$

$$\overset{def}{=} F_X(b) - F_X(a)$$

2. $$\boxed{P(X = a) = F_X(a) - \lim_{x \to a^-} F_X(x)}$$



$$P(X = a) = P(X \in (-\infty, a] / (-\infty, a))$$

$$\overset{prop}{=} P(X \in (-\infty, a]) - P(X \in (-\infty, a)) = P(X \leq a) - P(X < a)$$

$$\overset{def}{=} F_X(a) - \lim_{x \to a^-} F_X(x)$$

3. $$\boxed{P(a \le X \le b) = F_X(b) - \lim_{x\to a^-} F_X(x)}$$

Demostración:

$$P(a\le X\le b) = P(\{X=a\}\,\dot\cup\,\{a<X\le b\}) = P(X=a)+P(a<X\le b)$$

$$\overset{\text{parte 1 y 2}}{=} F_X(a) - \lim_{x\to a^-}F_X(x) + F_X(b) - F_X(a) = F_X(b) - \lim_{x\to a^-}F_X(x)$$

4. $$\boxed{P(a<X<b) = \lim_{x\to b^-}F_X(x) - F_X(a)}$$

Demostración:

$$P(a<X<b) = P(X\in(a,b)) = P(X\in(a,b]\setminus\{b\})$$

$$P(X\in(a,b]) - P(X=b) \overset{\text{parte 1, 2}}{=} F_X(b)-F_X(a) - F_X(b) + \lim_{x\to b^-}F_X(x)$$

$$= \lim_{x\to b^-}F_X(x) - F_X(a)$$

5. $$\boxed{P(a\le X<b) = \lim_{x\to b^-}F_X(x) - \lim_{x\to a^-}F_X(x)}$$

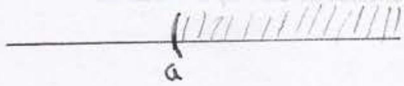
Demostración:

$$P(a\le X<b) = P(X\in[a,b)) = P(X\in[a,b]\setminus\{b\}) = P(X\in[a,b]) - P(X=b)$$

$$\overset{\text{parte 3, 2}}{=} F_X(b) - \lim_{x\to a^-}F_X(x) - F_X(b) + \lim_{x\to b^-}F_X(x) = \lim_{x\to b^-}F_X(x) - \lim_{x\to a^-}F_X(x)$$

6 $\boxed{P(X > a) = 1 - F_X(a)}$

Demostración :



$$P(X > a) = P(X \in (a, +\infty)) = P(X \in (-\infty, +\infty) \setminus (-\infty, a])$$

$$= P(X \in (-\infty, +\infty)) - P(X \in (-\infty, a]) = 1 - P(X \leq a) \overset{\text{def}}{=} 1 - F_X(a)$$

7 $\boxed{P(X \geq a) = 1 - \lim_{x \to a^-} F_X(x)}$

$$P(X \geq a) = P(X \in [a, +\infty)) = P(\{X = a\} \dot{\cup} \{X > a\}) = P(X = a) + P(X > a)$$

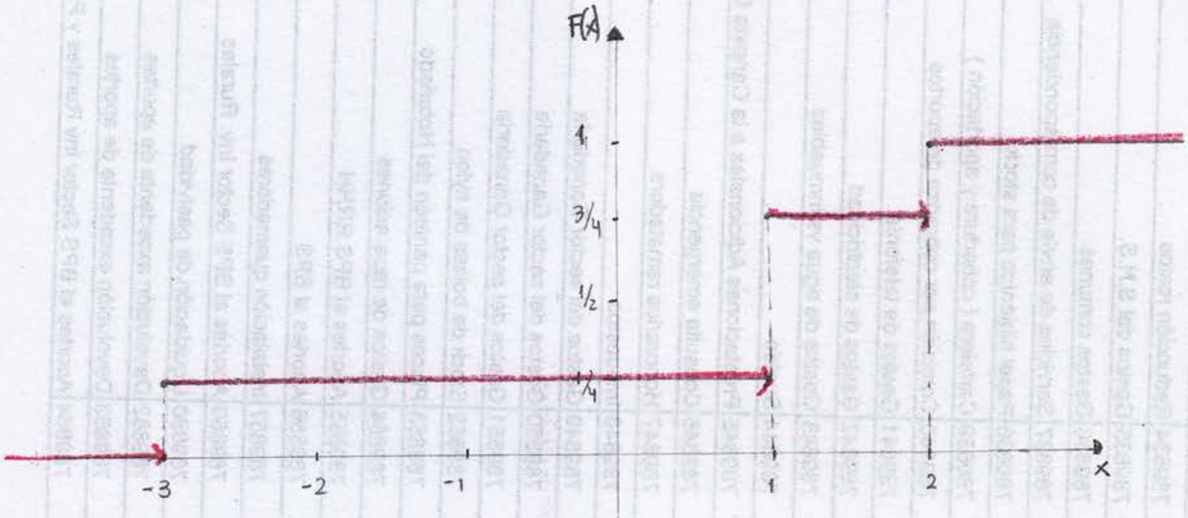
$$\overset{\text{partes anteriores}}{=} F_X(a) - \lim_{x \to a^-} F_X(x) + 1 - F_X(a) = 1 - \lim_{x \to a^-} F_X(x)$$

Menú

Ejercicio 4

[Büten Zar]
B.Sz

① $F_x(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -3 \\ 1/4 & \text{si} \quad -3 \leq x < 1 \\ 3/4 & \text{si} \quad 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si} \quad 2 \leq x \end{cases}$



ⓐ $P(-3 \leq x \leq 1) = F_x(1) - \lim\limits_{x \to -3^-} F_x(x) = 3/4 - 0 = \boxed{3/4}$

ⓑ $P(-3 < x \leq 1) = F_x(1) - F_x(-3) = 3/4 - 1/4 = \boxed{1/2}$

ⓒ $P(-3 \leq x < 1) = \lim\limits_{x \to 1^-} F(x) - \lim\limits_{x \to -3^-} F_x(x) = \frac{1}{4} - 0 = \boxed{1/4}$

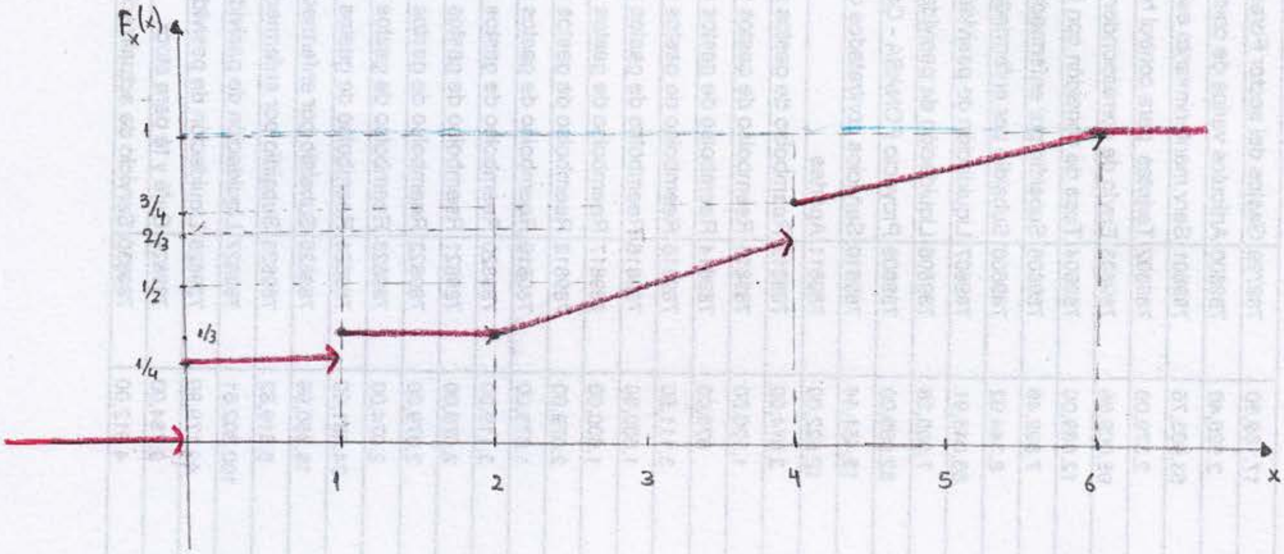
ⓓ $P(-3 < x < 1) = \lim\limits_{x \to 1^-} F_x(x) - F_x(-3) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \boxed{0}$

ⓔ $P(-2 < x < 2) = \lim\limits_{x \to 2^-} F_x(x) - F_x(-2) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}$

ⓕ $P(-1 < x < 0) = \lim\limits_{x \to 0^-} F_x(x) - F_x(-1) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \boxed{0}$

(2)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1/4 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ 1/3 & \text{si} \quad 1 \leq x < 2 \\ x/6 & \text{si} \quad 2 \leq x < 4 \\ x/8 + 1/4 & \text{si} \quad 4 \leq x < 6 \\ 1 & \text{si} \quad 6 \leq x \end{cases}$$



a) $P(1 \leq X \leq 5) = F_X(5) - \lim\limits_{x \to 1^-} F_X(x) = \frac{5}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{5}{8}}$

b) $P(2 < X \leq 4) = F_X(4) - F_X(2) = \frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{5}{12}}$

c) $P(0 < X < 1) = \lim\limits_{x \to 1^-} F_X(x) - F_X(0) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \boxed{0}$

d) $P(4 \leq X < 6) = \lim\limits_{x \to 6^-} F_X(x) - \lim\limits_{x \to 4^-} F_X(x) = 1 - \frac{2}{3} = \boxed{\frac{1}{3}}$

Menú

Ejercicio 5

16 estudiantes → 5 economía; 4 contabilidad; 7 administración

Se eligen 3 al azar para formar comisión.

① Hallar la probabilidad de que los 3 estudien economía.

A_1 = "El primer estudiante elegido estudia economía"

A_2 = "El segundo " " "

A_3 = "El tercer " " "

E = "Los 3 estudiantes estudian economía"

$$P(E) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdot P(A_1 \cap A_2) = P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_1)$$

$$= \frac{\cancel{3}}{14} \cdot \frac{\cancel{4}}{\cancel{15}_{3}} \cdot \frac{\cancel{5}}{\cancel{16}_{4}} = \boxed{\frac{1}{56}}$$

Otra Forma:

$$P(E) = \frac{C^5_3\, C^{11}_0}{C^{16}_3} = \frac{\frac{5!}{2!\,\cancel{3!}}}{\frac{16!}{13!\,\cancel{3!}}} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{16 \cdot 15 \cdot 14} = \boxed{\frac{1}{56}}$$

② Hallar la probabilidad de que al menos dos estudien economía.

$$P(\text{"Al menos dos estudian economía"}) = \frac{C^5_2\, C^{11}_1 + C^5_3\, C^{11}_0}{C^{16}_3} = \frac{\frac{5}{3!\,2!} \cdot \frac{11!}{10!} + \frac{5}{3!\,2!}}{\frac{16 \cdot 15 \cdot 14}{3!}}$$

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3\,(11 + 1)}{16 \cdot 15 \cdot 14} = \frac{\cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{12}^{3}}{\cancel{16}_{4} \cdot \cancel{15} \cdot 14} = \boxed{\frac{3}{14}}$$

(3) Sea X la variable aleatoria que cuenta la cantidad de estudiantes de economía que integran la comisión. Hallar y graficar la F_X

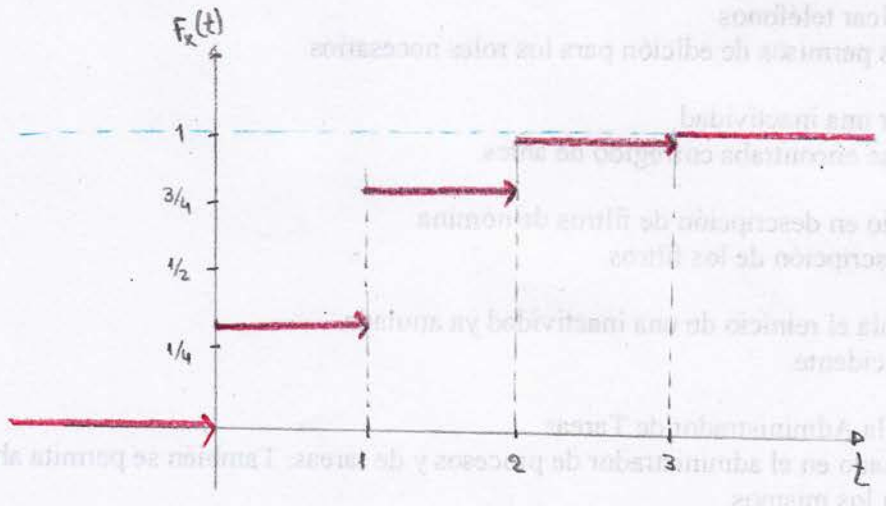
$$P(X=0) = \frac{C^5_0\, C^{11}_3}{C^{16}_3} = \frac{\frac{11!}{8!\,3!}}{\frac{16!}{13!\,3!}} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{16 \cdot 15 \cdot 14} = \frac{33}{112}$$

$$P(X=1) = \frac{C^5_1\, C^{11}_2}{C^{16}_3} = \frac{\frac{5!}{4!}\;\frac{11!}{9!\,2!}}{\frac{16!}{13!\,3!}} = \frac{5 \cdot 11 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2}{16 \cdot 15 \cdot 14} = \frac{55}{112}$$

$$P(x=2) = \frac{C^5_2\, C^{11}_1}{C^{16}_3} = \frac{\frac{5!}{3!\,2!}\;11}{\frac{16!}{13!\,3!}} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 11}{16 \cdot 15 \cdot 14} = \frac{11}{56}$$

$$P(x=3) = \frac{1}{56}$$

$$F_x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ \frac{33}{112} & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ \frac{88}{112} & \text{si } 1 \leq t < 2 \\ \frac{110}{112} & \text{si } 2 \leq t < 3 \\ 1 & \text{si } 3 \leq t \end{cases}$$



Menú

Ejercicio 6

Cargo de Gerente

5 personas : 3 contadores

2 no - contadores

X es v.a que cuenta la cantidad de entrevistas efectuadas.

① Hallar y graficar F_x.

$$P(x=1) = \boxed{\frac{3}{5}}$$

$$P(x=2) = P(\text{"El segundo entrevistado era contador"} \cap \text{"El primero no era contador"})$$

$$= P(\text{"El } 2^{\circ} \text{ es"} \mid \text{"El } 1^{\circ} \text{ no fue"}) \cdot P(\text{"El } 1^{\circ} \text{ no es"})$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \boxed{\frac{3}{10}}$$

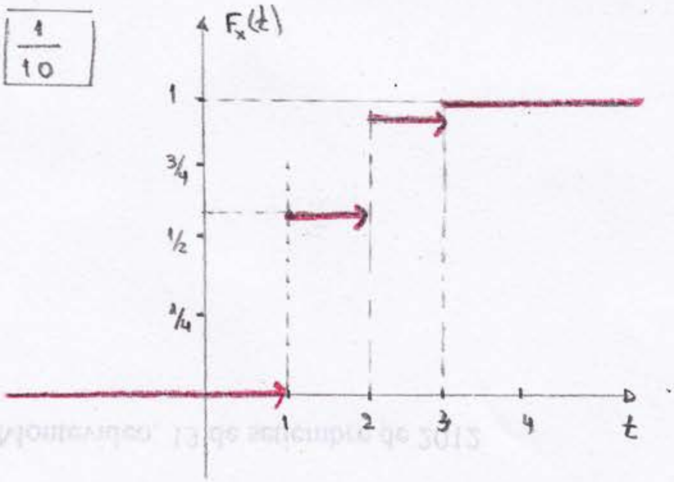
$$P(x=3) = P(\text{"El tercero es"} \cap \text{"El segundo no fue"} \cap \text{"El primero no fue"})$$

$$= P(\text{"El tercero es"} \mid \text{"El segundo no fue"} \cap \text{"El primero no fue"}) \cdot$$

$$\cdot P(\text{"El segundo no fue"} \mid \text{"El primero no fue"}) \cdot P(\text{"El primero no es"})$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} = \boxed{\frac{1}{10}}$$

$$F_x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \frac{3}{5} & \text{si } 1 \leq t < 2 \\ \frac{9}{10} & \text{si } 2 \leq t < 3 \\ 1 & \text{si } 3 \leq t \end{cases}$$



2. Hallar la probabilidad que se hagan al menos dos entrevistas.

$$P(X \geq 2) = 1 - \lim_{x \to 2^-} F_X(x) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

Facultad de Ingeniería
IMERL
PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA
Curso 2013
Práctico 3

Variable aleatoria y función de distribución

Ejercicio 1
Sea X una variable aleatoria (v.a.) con recorrido $R_X = \{-2, -1, 1, 3/2, 5\}$ con respectivas probabilidades $\{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\}$. Graficar su función de distribución.

Ejercicio 2
Se consideran las funciones $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que:

1. $$F(x) = \begin{cases} \beta e^x & \text{si } x < 0 \\ \beta & \text{si } x = 0 \\ 1/4 & \text{si } 0 < x < 1 \\ \alpha \frac{x}{1+x} & \text{si } 1 \leqslant x \end{cases}$$

   Hallar α y β para que F sea una función de distribución.

2. $$F(x) = \begin{cases} \alpha + e^x & \text{si } x \leqslant -1 \\ \beta x + \gamma & \text{si } -1 < x \leqslant 1 \\ \delta + \varepsilon x & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

   Hallar α, β, γ, δ, ε para que F sea una función de distribución.

Ejercicio 3
Se considera las función de distribución $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la variable aleatoria X. Probar que:

1. $P(a < X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a)$
2. $P(X = a) = F_X(a) - \lim\limits_{x \to a^-} F_X(x)$
3. $P(a \leqslant X \leqslant b) = F_X(b) - \lim\limits_{x \to a^-} F_X(x)$
4. $P(a < X < b) = \lim\limits_{x \to b^-} F_X(x) - F_X(a)$
5. $P(a \leqslant X < b) = \lim\limits_{x \to b^-} F_X(x) - \lim\limits_{x \to a^-} F_X(x)$
6. $P(X > a) = 1 - F_X(a)$
7. $P(X \geqslant a) = 1 - \lim\limits_{x \to a^-} F_X(x)$

Ejercicio 4
Se considera una variable aleatoria X cuya función de distribución es:

1. $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -3 \\ 1/4 & \text{si } -3 \leqslant x < 1 \\ 3/4 & \text{si } 1 \leqslant x < 2 \\ 1 & \text{si } 2 \leqslant x \end{cases}$

Calcular:

a) $P(-3 \leqslant X \leqslant 1)$
b) $P(-3 < X \leqslant 1)$
c) $P(-3 \leqslant X < 1)$
d) $P(-3 < X < 1)$
e) $P(-2 < X < 2)$
f) $P(-1 < X < 0)$

2. $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1/4 & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 1/3 & \text{si } 1 \leqslant x < 2 \\ x/6 & \text{si } 2 \leqslant x < 4 \\ x/8 + 1/4 & \text{si } 4 \leqslant x < 6 \\ 1 & \text{si } 6 \leqslant x \end{cases}$

Calcular:

a) $P(1 \leqslant X \leqslant 5)$
b) $P(2 < X \leqslant 4)$
c) $P(0 < X < 1)$
d) $P(4 \leqslant X < 6)$

Ejercicio 5
De un grupo de 16 estudiantes de los cuales 5 estudian economía, 4 contabilidad y 7 administración se eligen 3 al azar para formar una comisión.

1. Hallar la probabilidad de que los 3 estudien economía.
2. Hallar la probabilidad de que al menos 2 estudien economía.
3. Sea X la variable aleatoria que cuenta la cantidad de estudiantes de economía que integran la comisión. Hallar y graficar la función de distribución F_X.

Ejercicio 6
Se presentan para un cargo de gerente 5 personas de las cuales 3 son contadores. Luego de estudiar los correspondientes antecedentes, se determina que los méritos son similares y por lo tanto la elección se hará teniendo en cuenta solamente el carácter de contador. El jefe de personal comienza a llamar al azar a los 5 involucrados. Si la primera persona cumple el requisito lo elige, de lo contrario llama al siguiente. De esa manera procede hasta conseguir el candidato contador. Sea X la variable aleatoria que cuenta la cantidad de entrevistas efectuadas.

1. Hallar y graficar la función de distribución F_X.
2. Hallar la probabilidad que se hagan al menos 2 entrevistas.

Ejercicio 7 *
Dadas n variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ independientes y con la misma distribución F se define la distribución empírica mediante

$$F_n(t) = \frac{1}{n}|\{i : X_i \leq t,\ 1 \leq i \leq n\}| = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{\{X_i \leq t\}}.$$

1. Verificar que F_n cumple las propiedades de una función de distribución.
2. * Simular n tiradas de un dado equilibrado y graficar la función de distribución empírica para diferentes valores de n (por ejemplo $n = 10$, $n = 100$, $n = 1000$). Comparar con la función de distribución (teórica) del dado equilibrado.