Prueba Suplementaria 2 - Probabilidad y Estadística

Miércoles 12 de junio del 2013

Número de lista	APELLIDO, Nombre	Cédula de identidad

Múltiple Opción

La pregunta múltiple opción correcta vale 2 puntos. El desarrollo vale 3 puntos (uno por parte). Rellenar con claridad y en mayúscula la opción que considere correcta. Se permite el uso de cuadernos, textos, calculadora y lápices.

Problema

Sea U una variable con distribución doble exponencial de parámetro λ, (Notación:$U \sim DE(\lambda)$) lo cual significa que tiene densidad

$$f(x) = \frac{\lambda}{2} \exp(-\lambda|x|) \ \forall x \in \mathbb{R}$$

(1) Calcular $E(U)$ y $E(U^2)$.

(2) Si $U_1, ..., U_n$ iid con distribución $\sim DE(\lambda)$ hallar el estimador de λ por el método de los momentos.

(3) En el contexto de la parte anterior hallar el estimador de λ por el método de máxima verosimilitud.

Múltiple Opción

En la población del Uruguay un 8 por ciento de los habitantes son portadores de cierta patología. Se hace un muestreo aleatorio de 500 personas, en las que se determina si portan o no la patología. Entonces la probabilidad de hallar a lo sumo 45 portadores en la muestra es aproximadamente igual a

A): $0,255$
B): $0,355$
C): $0,545$
D): $0,795$
E): $0,955$
F): Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

Solución

Problema

(1) La densidad f_U es simétrica, por lo que $E(U) = 0$.
Por otra parte: $E(U^2) = \int_0^{+\infty} \lambda x^2 e^{-x} dx = \frac{1}{\lambda^2} + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{2}{\lambda^2}$, donde se ha reutilizado el cálculo de la varianza y esperanza de una variable exponencial.

(2) Por LFGN tenemos que $\overline{U^2}_n \xrightarrow[cs]{n} \frac{2}{\lambda^2}$, por lo que un estimador consistente para λ es $\overline{\lambda} = \sqrt{\frac{2}{\overline{U^2}_n}}$.

(3) El logaritmo de la verosimilitud es $f(\lambda) = n \ln(\frac{\lambda}{2}) - \lambda \sum_{i=1}^{n} |U_i|$. El máximo de la verosimilitud se consigue en la abscisa que anula la derivada de f, y es $\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} |U_i|}$.

Múltiple Opción

Se pide $P(X \leq 45)$, siendo $X \sim Bin(500; 0.08)$. Descomponiendo X en suma de VA de Bernoulli i.i.d $Y_1, \ldots, Y_{500}$ con $p = 0,08$ y aplicando el TCL:

$$P(X \leq 45) = P(\overline{Y}_{500} \leq \frac{45}{500}) = P\left(\frac{\overline{Y}_{500} - E(\overline{Y}_{500})}{\sqrt{Var(\overline{Y}_{500})}} \leq \frac{(\frac{45}{500} - p)}{\sqrt{p(1-p)}} \times \sqrt{500}\right)$$

$$\approx P(Z \leq \sqrt{\frac{500}{736}}) = 0.795,$$

Por lo tanto la respuesta correcta es la D