Facultad de Ingeniería
IMERL
PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA
Curso 2013
Práctico 10

Pruebas de hipótesis paramétricas

Ejercicio 1

Un medicamento para los síntomas de determinada alergia es eficaz en el 50 % de los pacientes. Para determinar si un nuevo medicamento es mejor se les administra el medicamento a 20 personas afectadas por alergia. Si 15 o más personas no presentan síntomas después del tratamiento se considera que el nuevo medicamento es mejor.

1. Considere el test de hipótesis con hipótesis nula $p = 0,5$ e hipótesis alternativa $p > 0,5$, donde p es la probabilidad de que una persona no presente más síntomas de alergia luego del tratamiento, con el criterio de decisión anterior.
   a) Calcular la probabilidad α de decidir que el medicamento nuevo es mejor, cuando en realidad no lo es (error de tipo I).
   b) Calcular la probabilidad β de quedarse con el medicamento viejo cuando el nuevo es mejor y es eficaz en el 70 % de los casos (error de tipo II, con la hipótesis alternativa $p = 0,7$).
2. Considere como criterio de decisión una región crítica del tipo $\mathcal{R} = \{X > c\}$, siendo X la cantidad de personas, dentro de la muestra de 20, para las cuales el tratamiento es eficaz. (Es decir que si $X > c$ se decide que el nuevo medicamento es mejor).
   a) Construya una región crítica para que $\alpha = 0,01$.
   b) Calcular β en este caso.

Ejercicio 2

Para probar la hipótesis nula de que la resistencia media de determinado plástico es $\mu_0 = 10\text{lb/pulg}^2$ contra la posibilidad de que sea $\mu_1 = 10,3\text{lb/pulg}^2$ (hipótesis alternativa) se realizaron las siguientes mediciones de la resistencia de este plástico:

9,8	10,4	10,6	9,6	9,7	9,9	10,9	11,1	9,6	9,9	11,2	10,6	9,8	10,5	10,1	9,7

Las mediciones son independientes, con distribución normal con $\sigma = 0,6$.

1. Se decide según el siguiente criterio: si el promedio de las mediciones es menor que 10,15 consideramos que la resistencia es 10, y de lo contrario consideramos que la resistencia es 10,3. ¿Qué decisión tomaría para los datos anteriores? Calcular α y β.
2. Se usa la siguiente región crítica para testear al nivel α: $\mathcal{R}_\alpha = \left\{ \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu_0)}{\sigma} \geq z_\alpha \right\}$.
   a) Decidir si se puede rechazar la hipótesis nula para los siguientes niveles $\alpha_1 = 0,01$, $\alpha_2 = 0,05$ y $\alpha_3 = 0,1$.
   b) Calcular β en cada caso. Observar que a medida que crece α, β. (La región crítica utilizada en esta parte corresponde a un test sobre la media para datos normales.)

Ejercicio 3

Se dispone de muestras $X_1, \ldots, X_n$ iid poissonianas de parámetro $\lambda > 0$, y se consideran las siguientes hipótesis:

$$\begin{cases} H_0 : \lambda = \lambda_0 \\ H_1 : \lambda = \lambda_1 > \lambda_0, \end{cases}$$

Calcular la región crítica de máxima potencia a nivel α.

Ejercicio 4
Se dispone de muestras $X_1, \ldots, X_n$ iid exponenciales de parámetro λ. Se propone la región crítica $\mathcal{R} = \{\text{mín}\{X_1, \ldots, X_n\} \geq K_\alpha\}$ para el test:

$$\begin{cases} H_0 : \lambda = \lambda_0 \\ H_1 : \lambda = \lambda_1 > \lambda_0. \end{cases}$$

Se elige K_α para tener una probabilidad α de error tipo I.

a) Calcular K_α para tener una probabilidad de tipo I igual a α.

b) ¿ La región $\mathcal{R}$ es de máxima potencia? Justificar.

Ejercicio 5
Supongamos que X_1, X_2, X_3, X_4 iid, con densidad $f(x) = \frac{ae^{-a|x|}}{2}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

1. Para testear
$$\begin{cases} H_0 : a = 1 \\ H_1 : a = 2 \end{cases}$$
se utiliza la región crítica $\mathcal{R} = \{M < 3\}$, siendo $M = \text{máx}\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$. Hallar α y β.
2. Idem si se utiliza la región crítica $\mathcal{R}' = \{m > 1\}$, donde $m = \text{mín}\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$.
3. Considere ahora regiones críticas del tipo $\mathcal{R} = \{M < c\}$.
    a) Hallar α y β en función de c. Graficar.
    b) Hallar el p-valor para los siguientes datos: 2.2, 2.5, 1.8, 1.3. ¿Cuál es la decisión?

Ejercicio 6
Se consideran 16 mediciones de una cierta concentración. Puede suponerse que las mediciones $X_1, \ldots, X_{16}$ siguen el modelo: $X_i = \mu + e_i$, donde $e_1, \ldots, e_{16}$ $iid \sim N(0, \sigma^2)$.

1. Hallar un intervalo de confianza 95 % para μ, sabiendo que la muestra es:

0.50	0.38	0.61	0.44	0.53	0.42	0.43	0.47	0.58	0.36	0.55	0.51	0.57	0.59	0.46	0.48

2. Se quiere probar la hipótesis que $\mu = 0{,}50$ ¿Cuál es su decisión para $\alpha = 0{,}05$?

Ejercicio 7
En 10 vacas afectadas por la tuberculosis se determinó el porcentaje de un cierto nutriente en la leche.
Los resultados fueron los siguientes:

$$5,9 \quad 6,5 \quad 5,1 \quad 5,2 \quad 6{,}3 \quad 6{,}1 \quad 6{,}6 \quad 6{,}4 \quad 4{,}8 \quad 5{,}7$$

Si el porcentaje medio del nutriente en las vacas sanas es 6, asumiendo que los datos son normales, haga una prueba de hipótesis para estudiar si el porcentaje medio del nutriente en las vacas enfermas es más bajo que las vacas sanas.

Ejercicio 8
Se debe reparar una máquina en una fábrica cuando produce más de 10 % de piezas defectuosas en un lote grande de artículos producido diariamente. Una muestra aleatoria de 100 artículos de la producción del día contiene 15 piezas defectuosas y el supervisor dice que se debe reparar la máquina. Contrastar la hipótesis nula "la proporción de piezas defectuosas es menor o igual al 10 %" contra la hipótesis alternativa "la proporción de piezas defectuosas es mayor que el 10 %".

Ejercicio 9
Se toma una muestra aleatoria de n habitantes de una ciudad muy grande, en la que una proporción p de personas padecen cierta enfermedad.

1. Si n = 400 y se encuentran 165 personas enfermas, estimar p y construir un intervalo de confianza 95 % para p.
2. Hacer una prueba de hipótesis para decidir si $p = 0{,}40$