Prueba Suplementaria 2 - Probabilidad y Estadística

Viernes 14 de junio del 2013

Número de lista	APELLIDO, Nombre	Cédula de identidad

Múltiple Opción

La pregunta múltiple opción correcta vale 2 puntos. El desarrollo vale 3 puntos (uno por parte).
Rellenar con claridad y en mayúscula la opción que considere correcta.
Se permite el uso de cuadernos, textos, calculadora y lápices.

Problema

(1) Si U es una variable con distribución $N(0,1)$, calcular $E(U^4)$ y $Var(U^2)$.
(2) Probar que si Z es una variable aleatoria con distribución $\chi^2(n)$ y n es muy grande, entonces la distribución de

$$\frac{Z}{\sqrt{2n}} - \sqrt{\frac{n}{2}}$$

puede aproximarse por una $N(0,1)$

(**Sugerencia:** recordar la definición de la distribución $\chi^2(n)$)

Múltiple Opción

En un lote industrial de tamaño muy grande se toma un muestra aleatoria de 144 artículos de los cuales 7 resultan defectuosos. Si p es el porcentaje de artículos defectuosos en todo el lote, indicar cuál de las siguientes afirmaciones es correcta al nivel $0,95$ y falsa al nivel $0,99$

A): $p < 0,9$
B): $p < 0,7$
C): $p > 0,5$
D): $p > 0,4$
E): $0,3 < p < 0,8$
F): Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

Solución

Problema

(1) $E(U^4) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-x^2/2} dx$. Integrando por partes dos veces ($g(x) = x^3$ y $f'(x) = xe^{-x^2/2}$ la primera vez, y $g(x) = x$, $f'(x) = e^{-x^2/2}$ la segunda), obtenemos que $E(U^4) = 3$. Como $Var(U^2) = E((U^2)^2) - (E(U^2))^2$ falta calcular $E(U^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2} dx = 1$. Luego, $Var(U^2) = 3 - 1 = 2$.

(2) $Z \sim \chi^2(n)$ se descompone así: $Z = U_1^2 + \cdots + U_n^2$, donde $U_1, \ldots, U_n$ iid $\sim N(0,1)$. Como $Var(U_i^2) = 2$ es finita y n es grande, el TCL asegura que la distribución de $Y_n = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}(\overline{U_n} - 1)$ se aproxima a la distribución $N(0,1)$.
Utilizando que $\overline{U_n} \sim \frac{Z}{n}$ y operando, vemos que $Y_n = \frac{Z}{\sqrt{2n}} - \sqrt{\frac{n}{2}}$.

Múltiple Opción

Tenemos una variable Binomial con $n = 144$ y p desconocido. Dada una muestra $X_1, \ldots, X_n$ iid$\sim Bin(n,p)$ y fijado α (media y varianza ligadas), podemos hallar un IC de nivel α para p centrado en $\overline{X}_n$ de radio $r_{\alpha/2} = \dfrac{z_{\alpha/2}\sqrt{\overline{X}_n(1-\overline{X}_n)}}{\sqrt{n}}$. Además $IC_{0.95} \subseteq IC_{0.99}$. Como tenemos 7 defecutosos en 144, el porcentaje es $\overline{X}_n = 7/144 \simeq 0.0486$. Para $\alpha = 0.05$ tenemos que $z_{\alpha/2} = 1.959$ que aproximaremos a 1.96. Esto nos da el intervalo $IC_{0.95} = [0.0134, 0.0837]$. Para $\alpha = 0.01$ tenemos que $z_{\alpha/2} = 2.575$ y el intervalo es $IC_{0.99} = [0.002, 0.094]$. Se trata de ver cual afirmación es correcta al nivel 0.95 y falsa al nivel 0.99. La afirmación A) es correcta en ambos niveles, ya que el extremo derecho de ambos intervalos es menor que 0.9, por lo que descartamos A). De modo similar la afirmación B) es correcta en ambos niveles, también se descarta. La afirmación C) es incorrecta en ambos niveles, ya que los extremos derechos de ambos intervalos son menores que 0.5. Por este mismo motivo se descartan también las opciones D) y E). ***Por lo tanto la respuesta correcta es la F***.