Facultad de Ingeniería
IMERL
PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA
Curso 2013
Práctico 7

Esperanza, Varianza y LFGN

Ejercicio 1
Al invertir en la bolsa de valores, una persona puede lograr una ganancia de 4000 dólares en un año con una probabilidad de 0,3 o bien tener una pérdida de 1000 dólares con probabilidad 0,7. ¿Cuál sería la ganancia esperada de esta persona?

Ejercicio 2
La función de probabilidad de una variable aleatoria discreta X está dada por:

$$p_X(x) = KC_x^3 \left(\frac{1}{4}\right)^x \left(\frac{3}{4}\right)^{3-x} \quad \text{con } x \in \{1, 2, 3\}.$$

Hallar K y la esperanza de X.

Ejercicio 3
La función de densidad de la variable aleatoria X está dada por: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi\left(1+x^2\right)} & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}$

1. ¿Cuál es el valor esperado de X?
2. Si ahora definimos una variable aleatoria Y tal que $Y = 3X + 1$, ¿cuál es el valor esperado de Y?

Ejercicio 4
Una variable aleatoria continua X tiene densidad dada por:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}.$$

¿Cuál es el valor esperado de $g(X) = e^{\frac{2X}{3}}$?

Ejercicio 5
Sea $U \sim \mathcal{U}[0,1]$. Hallar la función de distribución de la variable aleatoria $X = \frac{1}{\sqrt{U}}$, su densidad y su esperanza. Verificar que la esperanza coincide con el valor hallado mediante la fórmula $E(g(U)) = \int g(t) f_U(t) dt$.

Ejercicio 6
Si a ud. le dicen que el 12% de la población está desempleada, el 48% tiene un solo empleo, el 35% tiene dos empleos y el 5% tiene tres, y por otra parte en una muestra tomada al azar, de manera independiente, de 1400 personas resulta que el promedio de empleos por persona es 2.04. ¿Usted qué diría? ¿Le parece que algún dato puede estar mal, o no? Si algún dato puede estar mal, ¿de cuáles sospecharía? ¿Qué tipos de errores podría contener la información? Si además, entre esas 1400 personas hay 312 desempleados: ¿Qué respondería a las preguntas anteriores?

Ejercicio 7
Calcular la esperanza y la varianza de las siguientes distribuciones:

1. $\mathcal{U}\{1, ..., n\}$
2. $\mathcal{U}[a, b]$
3. $\mathcal{P}(\lambda)$
4. $\exp(\lambda)$
5. $\mathrm{Geo}(p)$
6. $\mathrm{BN}(k, p)$
7. $\mathrm{Ber}(p)$
8. $\mathrm{Bin}(n, p)$

Ejercicio 8
En este ejercicio se demostrarán las *Desigualdades de Tchebychev.*

1. Demostrar la siguiente desigualdad. Sean $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, X v.a. real y $a > 0$, entonces
$$P(g(X) \geqslant a) \leqslant \frac{E(g(X))}{a}.$$
Sugerencia: demostrar que la desigualdad $g(X) \geqslant a\mathbf{1}_{\{g(X) \geqslant a\}}$ se verifica para todo $a \geq 0$.
2. Demostrar la Desigualdad de Tchebychev. Si X v.a. real tal que $E(X^2) < \infty$, entonces
$$P(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{Var(X)}{\varepsilon^2} \ \forall \varepsilon > 0.$$
3. La producción diaria de motores eléctricos en una fábrica es (en promedio) $\mu = 120$ con una desviación estándar de $\sigma = 10$. Hallar un intervalo que contenga por lo menos el 90% de la cantidad diaria de motores producidos.
4. El costo diario por conectarse a un servidor de internet tiene una media $\mu = 13$U$ con una desviación estándar de $\sigma = 6.4$U$. Acotar la probabilidad de que el costo sea mayor que 30 U$.
5. Una empresa de electrónica se encarga de suministrar tarjetas de impresoras a una fábrica de montaje de microcomputadoras. Se estudió la demanda mensual de tarjetas durante algunos meses y se vio que el promedio era $\mu = 280$ con una desviación estándar de $\sigma = 4$. ¿Cuál es la cantidad de tarjetas que debe tener la empresa de electrónica al principio de cada mes para que la demanda sea mayor que la oferta con una probabilidad menor o igual que 0,10?

Ejercicio 9 Primer parcial, Mayo de 1999
Se ponen a funcionar en un mismo momento (que tomamos como tiempo 0) dos lamparitas de dos marcas distintas, A y B, que se dejan prendidas hasta que se rompan. Llamemos X al tiempo de duración de la lamparita A e Y al tiempo de duración de la lamparita B. Admitamos que X e Y son independientes, que X sigue una distribución exponencial de parámetro $\lambda_1 > 0$ y que Y sigue una distribución exponencial de parámetro $\lambda_2 > 0$. Llamemos S al tiempo en que ocurre la primera rotura de alguna de las dos lamparitas y T al tiempo en que se rompe la restante lamparita.

1. Calcular las funciones de distribución de S y T.
2. Calcular $E(S)$, $E(T)$.
3. Calcular $E(ST)$. ¿Son S y T independientes? Justifique la respuesta.
4. Calcular $P(S = T)$.

Ejercicio 10 Primer parcial, mayo de 1999
Supongamos que un bolillero contiene N bolillas que pueden ser rojas, blancas o azules. Supongamos que hay r bolillas rojas y b blancas (y por lo tanto $N-(r+b)$ azules), con $r \geqslant 1,\ b \geqslant 1$. Tomamos una muestra de n bolillas elegidas al azar con reposición. Se definen:

1. $X =$ número de bolillas rojas observadas en la muestra,
2. $Y =$ número de bolillas blancas observadas en la muestra,
3. $Z =$ número de bolillas azules observadas en al muestra.

1. Calcular las funciones de probabilidad de X, de Y y de Z
2. Calcular $\mathbf{E}(X)$, $\mathbf{Var}(X)$, $\mathbf{E}(Y)$, $\mathbf{Var}(Y)$.
3. Hallar la función de probabilidad de $X+Y$. Calcular $\mathbf{E}(X+Y)$, $\mathbf{Var}(X+Y)$.
4. ¿Son X e Y independientes? Justifique la respuesta.
5. Supongamos que $N = 2000$. Si se repite 2500 veces de manera independiente la experiencia de muestrear 10 bolillas con reposición y se obtiene una cantidad promedio de 3,2 bolillas rojas y 4,6 bolillas blancas, ¿le parece creíble que en el bolillero haya más de 1250 bolillas azules?

Ejercicio 11
Una pieza de una máquina se verifica al final de cada hora de producción y se cambia por una nueva en caso de encontrarse rota. El tiempo de vida en horas de la pieza se puede modelar con una variable aleatoria T con distribución exponencial de parámetro λ ($T \sim \exp(\lambda)$), por lo tanto el tiempo en horas que transcurre hasta el recambio de la pieza se puede modelar con una variable aleatoria $X = [T]+1$, donde $[T]$ es la parte entera de T (esto es, $X = n$ si y sólo si $n-1 \leq T < n$).

1. Hallar la función de probabilidad de la variable aleatoria X y probar que tiene distribución geométrica de parámetro $1-e^{-\lambda}$ ($X \sim \text{Geo}(1-e^{-\lambda})$).
2. A partir de los tiempos en los que se realiza el recambio de las piezas se desea estimar el parámetro λ del tiempo de vida de dichas piezas.
   (a) Calcular λ en función de μ siendo $\mu = \mathbf{E}(X)$.
   (b) ¿Cómo estimaría μ a partir de las observaciones $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de los tiempos de recambio de las piezas?
   (c) Se observan 10 tiempos de recambio de piezas y se obtienen lo siguientes datos:
   $$10, 21, 34, 41, 50, 59, 70, 77, 87, 98.$$
   Estimar el valor de λ.

Ejercicio 12
Nos envían cada día un pronóstico del tiempo elemental, que indica una de las tres siguientes predicciones: "lluvia", "nublado" o "soleado". Se estima por el clima local que $P(nublado) = 1/2$, $P(lluvia) = 1/4$ y $P(soleado) = 1/4$. Se quiere transmitir la predicción de cada día usando la menor cantidad de símbolos posibles. A tales efectos, se diseñan dos códigos llamados C_1 y C_2.

Con el código C_1 se sustituye nublado por un 0, lluvia por 10 y soleado por 11. Por ejemplo, con el código C_1 una racha de días nublado-nublado-lluvia-soleado-soleado-nublado-nublado-lluvia se representa mediante la palabra binaria 001011110010.

Con el código C_2 se traduce nublado por 00, lluvia por 1 y soleado por 01 (la racha anterior se representa mediante 00001010100001). Sean l_1 y l_2 los largos medios de bits a enviar por día, para los respectivos códigos C_1 y C_2.

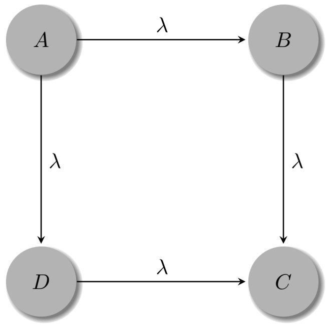
1. Calcular l_1 y l_2. ¿Qué código comprime mejor?
2. ¿Podremos hacer un código que comprima más la información?

Ejercicio 13
Se desea establecer comunicación entre dos terminales, ubicados en vértices opuestos de un cuadrado. Cada segmento tiene un tiempo de vida exponencial independiente de parámetro λ. La comunicación entre los terminales durará mientras exista algún camino dirigido entre ellos. La red se ilustra en la Figura . Sea T la variable aleatoria que representa el tiempo de conexión entre tales puntos.

1. Calcular la distribución de la variable T.
   Sugerencia: expresar T mediante máximos y mínimos de variables aleatorias exponenciales.

2. Estimar el parámetro λ utilizando la parte anterior, sabiendo que un 60% de las llamadas entre ambos terminales duraron menos de 125 segundos.

3. Hallar $E(T)$, la esperanza de T.



Ejercicio 14
* Un satélite está equipado con 5 paneles solares, y requiere al menos del correcto funcionamiento de 2 de ellos para captar energía solar satisfactoriamente. Se sabe que el tiempo de vida de cada panel solar es independiente, y se distribuye uniformemente entre 0 y 1 siglo. Calcular el tiempo medio de vida del satélite, medido en siglos.

Ejercicio 15
* Sea a un número positivo arbitrario y $X_1, \ldots, X_n$ iid $Exp(\lambda)$. Hallar, en función de los parámetros a y λ a qué tiende la raíz enésima del resultado de multiplicar las variables a^{X_i} para i de 1 a n, cuando n tiende a infinito.

Ejercicio 16
** Se tiene un lote con N objetos diferentes (por ejemplo, las figuritas de un álbum), de los cuales se extrae una muestra de tamaño M con reposición (por ejemplo, la cantidad de figuritas que se compran, suponiendo que se compran de una y no hay "difíciles"). ¿Cuánto debe ser M en media (aproximadamente) para que la muestra de tamaño M tenga al menos uno de cada uno de los N objetos diferentes?