Prueba Suplementaria 2 - Probabilidad y Estadística

Miércoles 12 de junio del 2013

Número de lista	APELLIDO, Nombre	Cédula de identidad

Múltiple Opción

La pregunta múltiple opción correcta vale 2 puntos. El desarrollo vale 3 puntos (uno por parte).
Rellenar con claridad y en mayúscula la opción que considere correcta.
Se permite el uso de cuadernos, textos, calculadora y lápices.

Problema

Si $U \sim Ber(p), V \sim Ber(q),\ p < q \in (0,1)$ y U, V independientes, llamaremos F a la distribución de $U + V$

(1) Si $X \sim F$ calcular $E(X)$ y $E(X^2)$

(2) Si $X_1, ..., X_n$ iid con la distribución F, estimar p y q por el método de momentos. *Sugerencia: en caso de ser necesario puede asumir que* $(\overline{X}_n)^2 - 2\overline{X^2}_n + 2\overline{X}_n > 0$

Múltiple Opción

Se tienen 8 mediciones de temperaturas de un reactor cuya temperatura de funcionamiento debe ser inferior a los 80 grados Celsius. Las 8 mediciones pueden suponerse *iid* y gaussianas. Supongamos que $s_8 = 2$, donde, como es usual

$$s_n = \left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X_n})^2\right)^{1/2}$$

Determinar en cuál de las situaciones siguientes puede asegurarse al nivel $0,95$ que el reactor está funcionando correctamente, pero no puede asegurarse lo mismo al nivel $0,99$.

A): $\overline{X_8} = 70$
B): $\overline{X_8} = 72$
C): $\overline{X_8} = 74$
D): $\overline{X_8} = 76$
E): $\overline{X_8} = 78$
F): Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

Solución

Problema

(1) $E(U+V) = E(U) + E(V) = p + q$. Usando que $U = U^2$, $V = V^2$ e independencia, tenemos que:

$$E((U+V)^2) = E(U^2) + E(V^2) + E(2UV) = E(U) + E(V) + 2E(U)E(V) = p + q + 2pq.$$

(2) Por LFGN tenemos que $\overline{X}_n \xrightarrow[n]{cs} p+q$, y $\overline{X^2}_n \xrightarrow[n]{cs} p+q+2pq$. Entonces, el método de los momentos sugiere los estimadores $\hat{p}$ y $\hat{q}$ que verifican el siguiente sistema:

$$\hat{p} + \hat{q} = \overline{X}_n$$
$$\hat{p} + \hat{q} + 2\hat{p}\hat{q} = \overline{X^2}_n.$$

Resolviendo el sistema y recordando que $p < q$, tenemos que:

$$\hat{p} = \frac{\overline{X}_n - \sqrt{(\overline{X}_n)^2 - 2\overline{X^2}_n + 2\overline{X}_n}}{2},$$
$$\hat{q} = \frac{\overline{X}_n + \sqrt{(\overline{X}_n)^2 - 2\overline{X^2}_n + 2\overline{X}_n}}{2}.$$

Múltiple Opción

Estamos en el caso normal con σ^2 desconocido, por lo que el intervalo para μ es $\overline{X}_n \pm \epsilon$, donde $\epsilon = \frac{t_{\alpha/2,n-1}s_n}{\sqrt{n}}$. De la Tabla t de Student tenemos que $t_{0.025,7} = 2,365$, mientras que $t_{0.005,7} = 3,499$. Si $\overline{X}_8 = 78$ se tiene que $\overline{X}_8 + \epsilon < 80$ cuando $\alpha = 0,05$, mientras que $\overline{X}_8 + \epsilon > 80$ cuando $\alpha = 0,01$. ***Por lo tanto la respuesta correcta es la E.***