**Facultad de Ingeniería**
**IMERL**
**PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA**
**Curso 2013**
**Práctico 3**

## Variable aleatoria y función de distribución

**Ejercicio 1**
Sea $X$ una variable aleatoria (v.a.) con recorrido $R_X = \{-2, -1, 1, 3/2, 5\}$ con respectivas probabilidades $\left\{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right\}$. Graficar su función de distribución.

**Ejercicio 2**
Se consideran las funciones $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que:

1.
$$F(x) = \begin{cases} \beta e^x & \text{si } x < 0 \\ \beta & \text{si } x = 0 \\ 1/4 & \text{si } 0 < x < 1 \\ \alpha \frac{x}{1+x} & \text{si } 1 \leqslant x \end{cases}$$
Hallar $\alpha$ y $\beta$ para que $F$ sea una función de distribución.

2.
$$F(x) = \begin{cases} \alpha + e^x & \text{si } x \leqslant -1 \\ \beta x + \gamma & \text{si } -1 < x \leqslant 1 \\ \delta + \varepsilon x & \text{si } 1 < x \end{cases}$$
Hallar $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$ para que $F$ sea una función de distribución.

**Ejercicio 3**
Se considera las función de distribución $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la variable aleatoria $X$. Probar que:

1. $P(a < X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a)$
2. $P(X = a) = F_X(a) - \lim\limits_{x \to a^-} F_X(x)$
3. $P(a \leqslant X \leqslant b) = F_X(b) - \lim\limits_{x \to a^-} F_X(x)$
4. $P(a < X < b) = \lim\limits_{x \to b^-} F_X(x) - F_X(a)$
5. $P(a \leqslant X < b) = \lim\limits_{x \to b^-} F_X(x) - \lim\limits_{x \to a^-} F_X(x)$
6. $P(X > a) = 1 - F_X(a)$
7. $P(X \geqslant a) = 1 - \lim\limits_{x \to a^-} F_X(x)$

**Ejercicio 4**
Se considera una variable aleatoria $X$ cuya función de distribución es:

1. $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -3 \\ 1/4 & \text{si } -3 \leqslant x < 1 \\ 3/4 & \text{si } 1 \leqslant x < 2 \\ 1 & \text{si } 2 \leqslant x \end{cases}$

Calcular:

a) $P(-3 \leqslant X \leqslant 1)$
b) $P(-3 < X \leqslant 1)$
c) $P(-3 \leqslant X < 1)$
d) $P(-3 < X < 1)$
e) $P(-2 < X < 2)$
f) $P(-1 < X < 0)$

2. $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1/4 & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 1/3 & \text{si } 1 \leqslant x < 2 \\ x/6 & \text{si } 2 \leqslant x < 4 \\ x/8 + 1/4 & \text{si } 4 \leqslant x < 6 \\ 1 & \text{si } 6 \leqslant x \end{cases}$

Calcular:

a) $P(1 \leqslant X \leqslant 5)$
b) $P(2 < X \leqslant 4)$
c) $P(0 < X < 1)$
d) $P(4 \leqslant X < 6)$

**Ejercicio 5**
De un grupo de 16 estudiantes de los cuales 5 estudian economía, 4 contabilidad y 7 administración se eligen 3 al azar para formar una comisión.

1. Hallar la probabilidad de que los 3 estudien economía.
2. Hallar la probabilidad de que al menos 2 estudien economía.
3. Sea $X$ la variable aleatoria que cuenta la cantidad de estudiantes de economía que integran la comisión. Hallar y graficar la función de distribución $F_X$.

**Ejercicio 6**
Se presentan para un cargo de gerente 5 personas de las cuales 3 son contadores. Luego de estudiar los correspondientes antecedentes, se determina que los méritos son similares y por lo tanto la elección se hará teniendo en cuenta solamente el carácter de contador. El jefe de personal comienza a llamar al azar a los 5 involucrados. Si la primera persona cumple el requisito lo elige, de lo contrario llama al siguiente. De esa manera procede hasta conseguir el candidato contador. Sea $X$ la variable aleatoria que cuenta la cantidad de entrevistas efectuadas.

1. Hallar y graficar la función de distribución $F_X$.
2. Hallar la probabilidad que se hagan al menos 2 entrevistas.

**Ejercicio 7 ***
Dadas $n$ variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ independientes y con la misma distribución $F$ se define la distribución empírica mediante

$$F_n(t) = \frac{1}{n}|\{i : X_i \leq t,\ 1 \leq i \leq n\}| = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{\{X_i \leq t\}}.$$

1. Verificar que $F_n$ cumple las propiedades de una función de distribución.
2. * Simular $n$ tiradas de un dado equilibrado y graficar la función de distribución empírica para diferentes valores de $n$ (por ejemplo $n = 10$, $n = 100$, $n = 1000$). Comparar con la función de distribución (teórica) del dado equilibrado.