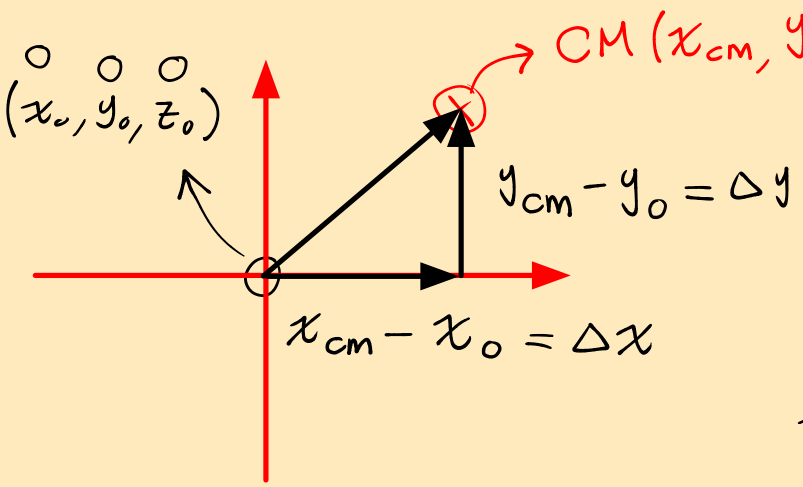
Centro de Masa

$$\frac{m_1 r_1 + m_2 r_2 + \cdots + m_n r_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} = CM$$

Esto puede calcularse como un produto punto

$$m \cdot r$$



$$y_{cm} = y_0 + \Delta y$$

$$\downarrow$$

$$x_0 = x_{cm} - (x_{cm} - x_0)$$

$$y_0 = y_{cm} - (y_{cm} - y_0)$$

$$z_0 = z_{cm} - (z_{cm} - z_0)$$

como $x_0 = y_0 = z_0$

$$\rightarrow \; x_f = x_i - x_{cm}$$

$$y_f = y_j - y_{cm}$$

$$z_f = z_K - z_{cm}$$

Pues claro, si le resto las coordenadas del cm a cualcier particula, la galaxia va para el centro ya que el que el CM no coincida con el origen de coordenadas es como ya haber desplazado la galaxia a dicho punto.

Momento lineal (Vector Ortogonal a la galaxia)

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} = \vec{r} \times m\vec{v} = m(\vec{r} \times \vec{v})$$

$$m \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = m\left[(yV_z - zV_y)\hat{i} - (xV_z - zV_x)\hat{j} + (xV_y - yV_x)\hat{k}\right]$$

Pues no se... yo solo necesito un vector ortogonal a la galaxia... que necesidad hay de multiplicar por m si este solo va a escalar el vector $\vec{r} \times \vec{v}$... eso es más costo computacional.

$$L_x = \sum y_i V_{z_i} - z_i V_{y_i}$$
$$L_y = \sum z_j V_{x_j} - x_j V_{z_j}$$
$$L_z = \sum x_k V_{y_k} - y_k V_{x_k}$$

$$(y_1 V_{z_1} - z_1 V_{y_1}) + (y_2 V_{z_2} - z_2 V_{y_2})$$
$$(y_1 V_{z_1} + y_2 V_{z_2}) - (z_1 V_{y_1} + z_2 V_{y_2})$$

↳ Esto es componente a componente aunque solo con la componente en x.

Desde el punto de vista de Python

↓

$$L_x = (y \cdot V_z) - (z \cdot V_y)$$
$$L_y = (z \cdot V_x) - (x \cdot V_z)$$
$$L_z = (x \cdot V_y) - (y \cdot V_x)$$

Si el profe dice que si hay que multiplicar por la masa →

$$L_x = \sum m_i (y_i V_{z_i} - z_i V_{y_i})$$
$$L_y = \sum m_j (z_j V_{x_j} - x_j V_{z_j})$$
$$L_z = \sum m_k (x_k V_{y_k} - y_k V_{x_k})$$

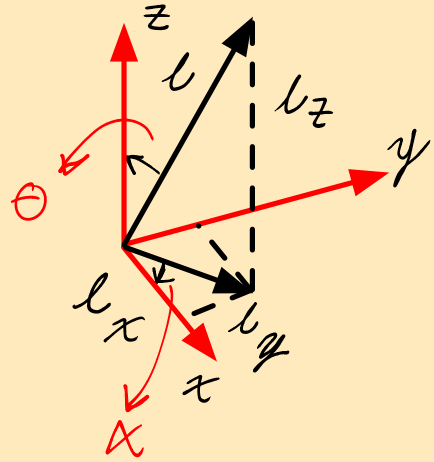
Matriz de Rotación

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \rightarrow R(-\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta \\ -x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$x_r = x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta$$
$$y_r = -x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta$$

$$\boxed{\cos\theta = \frac{l_z}{|l|} \qquad \tan(\alpha) = \frac{l_y}{l_x}}$$



$$R_y(\theta)\,R_z(-\alpha)$$
$$\cancel{R_z(-\alpha)\,R_y(\theta)}$$

$$\begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & -\operatorname{sen}(-\alpha) & 0 \\ \operatorname{sen}(-\alpha) & \cos(-\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = R_z(-\alpha)$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} = R_y(\theta)$$

$$R_z(-\alpha)\,R_y(\theta)\,\vec{r} = \vec{r}_f$$

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$R_{11} = \cos\alpha\cos\theta - \cancel{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta}$

$R_{12} = \operatorname{sen}\alpha$

$R_{13} = \cos\alpha\operatorname{sen}\theta$

$R_{21} = -\operatorname{sen}\alpha\cos\theta$

$R_{22} = \cos\alpha$

$R_{23} = -\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta$

$R_{31} = -\operatorname{sen}\theta$

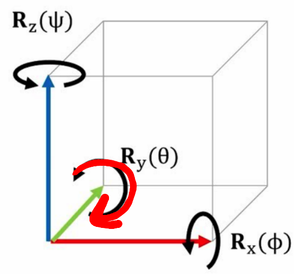
$R_{32} = 0$

$R_{33} = \cos\theta$

$$\mathbf{R}_x(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_z(\psi) = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$R = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\theta - \cancel{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta} & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha\operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\alpha\cos\theta & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\theta - \cancel{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta} & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha\operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\alpha\cos\theta & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} = M_f$$

$$x_f = x_i(\cos\alpha\cos\theta) + y_i(\operatorname{sen}\alpha) + z_i(\cos\alpha\operatorname{sen}\theta)$$

$$\cancel{x_f} = \cancel{x_i}(\cos\cancel{\alpha}\cancel{\cos\theta} - \operatorname{sen}\cancel{\alpha\operatorname{sen}}\theta) + y_i(\cancel{\operatorname{sen}}\alpha) + z_i(\cos\cancel{\alpha}\operatorname{sen}\theta)$$

$$y_f = x_i(-\operatorname{sen}\alpha\cos\theta) + y_i(\cos\alpha) + z_i(-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta)$$

$$z_f = x_i(-\operatorname{sen}\theta) + y_i(0) + z_i(\cos\theta) = x_i(-\operatorname{sen}\theta) + z_i(\cos\theta)$$

$$[x, y, z] = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} = M \rightarrow$$

si transpongo M puedo hacer la multiplicación de matrices

$$RM^T = M_f$$

Si hago lo de la transpuesta tendría que escribir más codigo, creo...
hay que ensayar a ver que pasa

Me equivoque, vamos a ver si rotando alrededor de x y y se logra alinear $\vec{L}$ con $\vec{K}$

$$\left.\begin{array}{l} R_y(\theta)\,R_z(-\alpha) \\ \cancel{R_z(-\alpha)\,R_y(\theta)} \end{array}\right\}$$ Este fue el error

$$\underset{R_y(\theta)}{\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}} \underset{R_z(-\alpha)}{\begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

$R_{11} = \cos\theta\cos\alpha$ | $R_{21} = -\operatorname{sen}\alpha$ | $R_{31} = -\operatorname{sen}\theta\cos\alpha$

$R_{12} = \cos\theta\operatorname{sen}\alpha$ | $R_{22} = \cos\alpha$ | $R_{32} = -\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\alpha$

$R_{13} = \operatorname{sen}\theta$ | $R_{23} = 0$ | $R_{33} = \cos\theta$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta\cos\alpha & \cos\theta\operatorname{sen}\alpha & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta\cos\alpha & -\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\alpha & \cos\theta \end{bmatrix} = R_y(\theta)\,R_z(-\alpha)$$

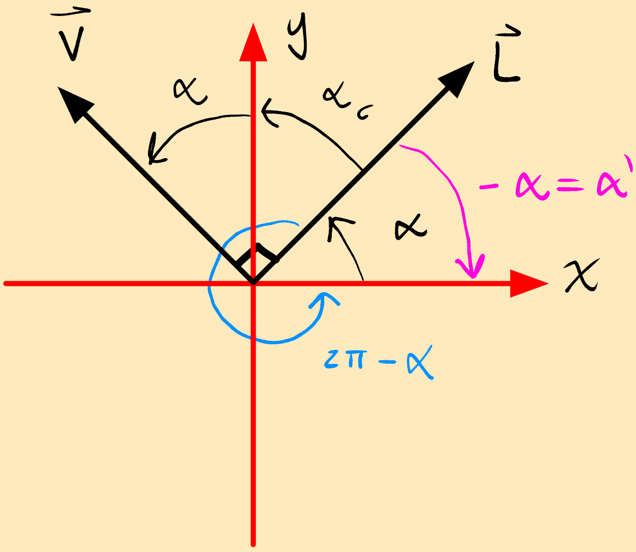
angulo_z = α   angulo_y = θ

$$\boxed{\tan\theta = \frac{L_y}{L_x} \rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{L_y}{L_x}\right)} \qquad \boxed{\cos\alpha = \frac{L_z}{|L|} \rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{L_z}{|L|}\right)}$$

$$x_f = x_i(\cos\theta\cos\alpha) + y_i(\cos\theta\operatorname{sen}\alpha) + z_i(\operatorname{sen}\theta) \quad (1)$$

$$y_f = x_i(-\operatorname{sen}\alpha) + y_i(\cos\alpha) + z_i(0) = x_i(-\operatorname{sen}\alpha) + y_i(\cos\alpha) \quad (2)$$

$$z_f = x_i(-\operatorname{sen}\theta\cos\alpha) + y_i(-\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\alpha) + z_i(\cos\theta) \quad (3)$$



Si tomo los ∡s de rotación positivos

$$\alpha + \alpha' = 2\pi$$

$$\underline{\alpha' = 2\pi - \alpha}$$

Si tomo los ∡s de rotación negativos

$$\alpha + \alpha' = 0 \rightarrow \underline{\alpha' = -\alpha}$$

$$\vec{L}\cdot\vec{V} = 0 \quad (1)$$

$$\cancel{|\vec{V}| = |\vec{L}| \rightarrow |\vec{V}|^2 = |\vec{L}|^2 \quad (2)}$$

$$\underline{V_x = L_x} \qquad \underline{V_y = L_y} \quad (3)$$

$$\underline{V_z = -\frac{L_x^2 + L_y^2}{L_z}}$$

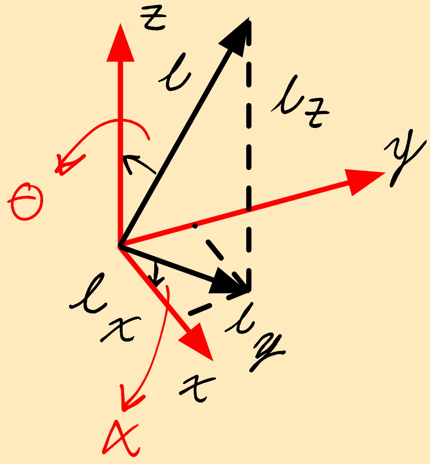
De (1)

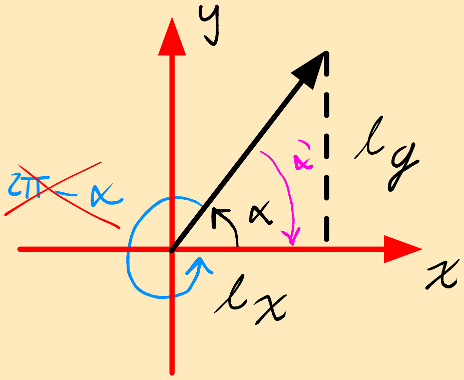
$$L_x V_x + L_y V_y + L_z V_z = 0$$

Reemplazando (3) en (1)

$$L_x^2 + L_y^2 + L_z V_z = 0$$

Estas ecuaciones son importantes para la simulación en desmos





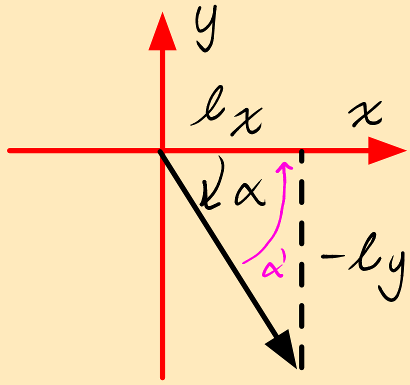
$l_x > 0$

$l_y > 0$ $\rightarrow$ $\alpha > 0$

$\alpha + \alpha' = 0$

$\alpha = -\alpha'$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{l_y}{l_x}\right)$$



$l_x > 0$

$l_y < 0$ $\rightarrow$ $\alpha < 0$ $\rightarrow$ Esto es pensando en el resultado de $\tan^{-1}$

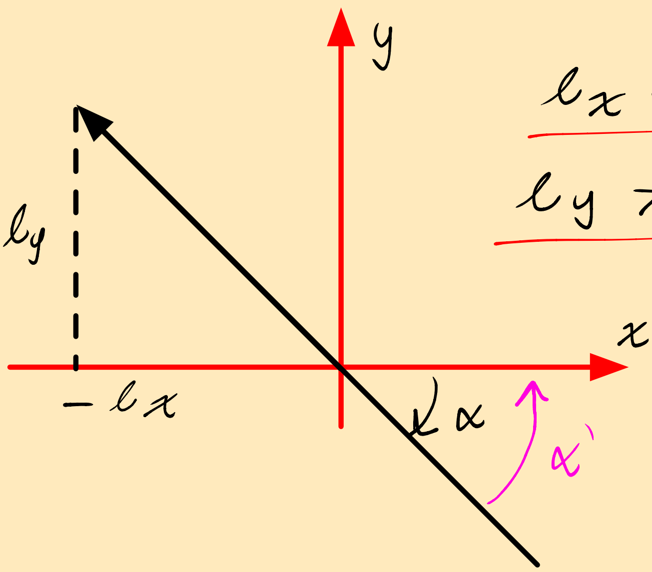
$\alpha + \alpha' = 0$

$\alpha' = -\alpha$

~~$\alpha + \alpha' = 2\pi$~~

~~$\alpha' = 2\pi - \alpha$~~

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{l_y}{l_x}\right)$$



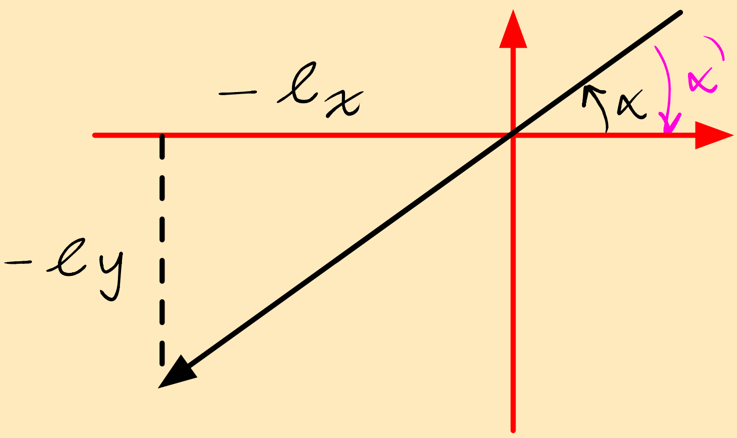
$l_x < 0$

$l_y > 0$ $\rightarrow$ $\alpha < 0$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{l_y}{l_x}\right)$$

$\alpha + \alpha' = 0$

$\alpha' = -\alpha$



$l_x < 0$

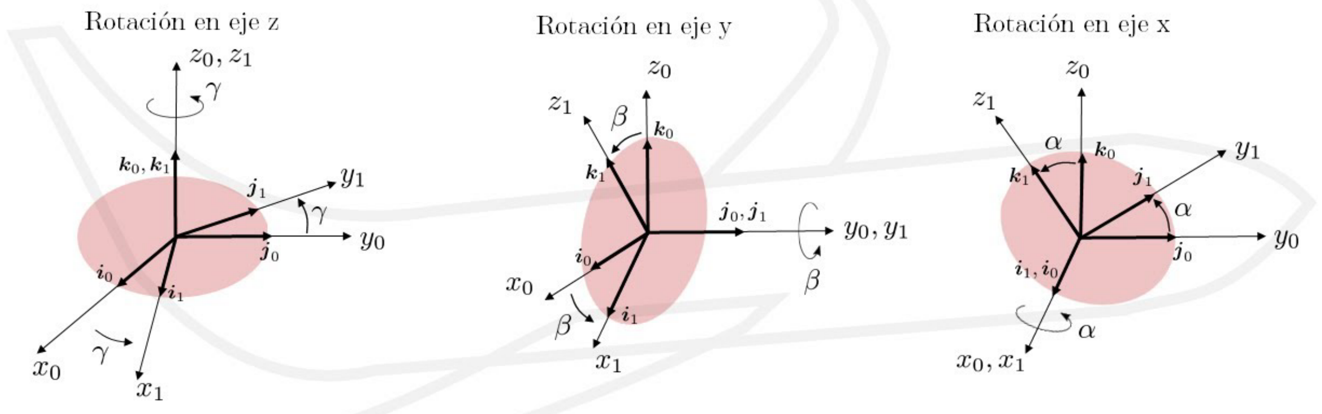
$l_y < 0$ $\rightarrow$ $\alpha > 0$

$\alpha + \alpha' = 0$

$\alpha = -\alpha'$

Hay que corregir las matrices de rotación otra vez !!
la regla de la mano derecha tenía un error

ROTACIONES COMPUESTAS



$$R_{z,\gamma} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_{y,\beta} = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \quad R_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$R_y(-\theta)\,R_z(-\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_{11} = \cos\theta\cos\alpha$ $\quad R_{12} = \cos\theta\operatorname{sen}\alpha$ $\quad R_{13} = -\operatorname{sen}\theta$

$R_{21} = -\operatorname{sen}\alpha$ $\quad R_{22} = \cos\alpha$ $\quad R_{23} = 0$

$R_{31} = \operatorname{sen}\theta\cos\alpha$ $\quad R_{32} = \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\alpha$ $\quad R_{33} = \cos\theta$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta\cos\alpha & \cos\theta\operatorname{sen}\alpha & -\operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \operatorname{sen}\theta\cos\alpha & \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\alpha & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}$$

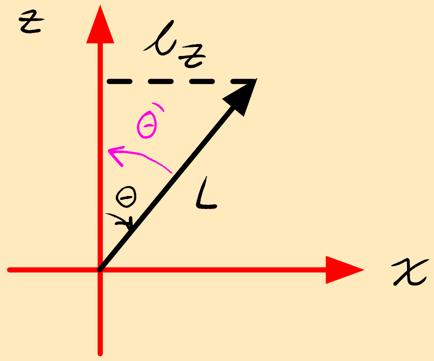
angulo_y = θ

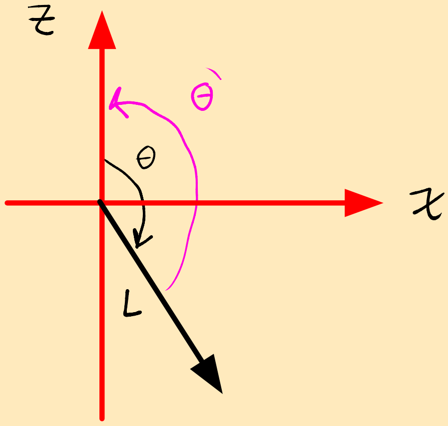
angulo_z = α

$$x_f = x_i(\cos\theta\cos\alpha) + y_i(\cos\theta\operatorname{sen}\alpha) + z_i(-\operatorname{sen}\theta)$$

$$y_f = x_i(-\operatorname{sen}\alpha) + y_i(\cos\alpha)$$

$$z_f = x_i(\operatorname{sen}\theta\cos\alpha) + y_i(\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\alpha) + z_i(\cos\theta)$$



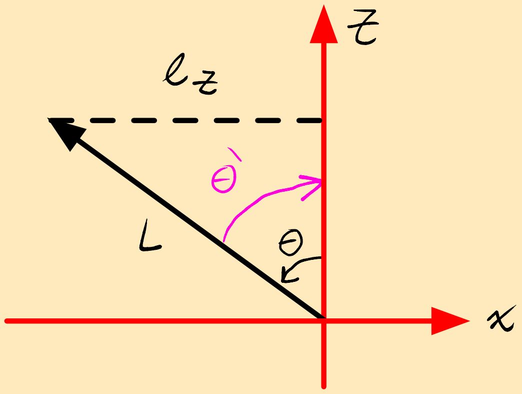


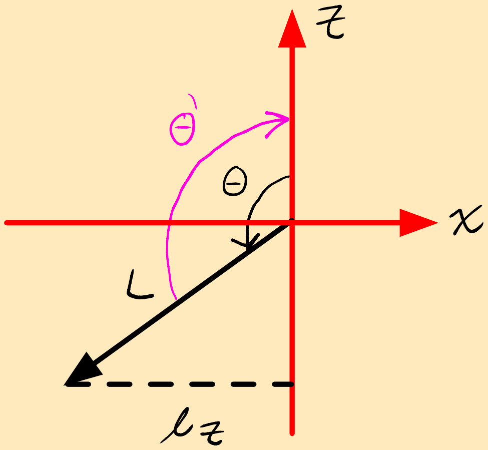
$$l_z > 0 \rightarrow \theta > 0$$

$$\theta + \theta' = 0$$

$$\theta' = -\theta$$

$$\cos\theta = \frac{l_z}{|l|}$$





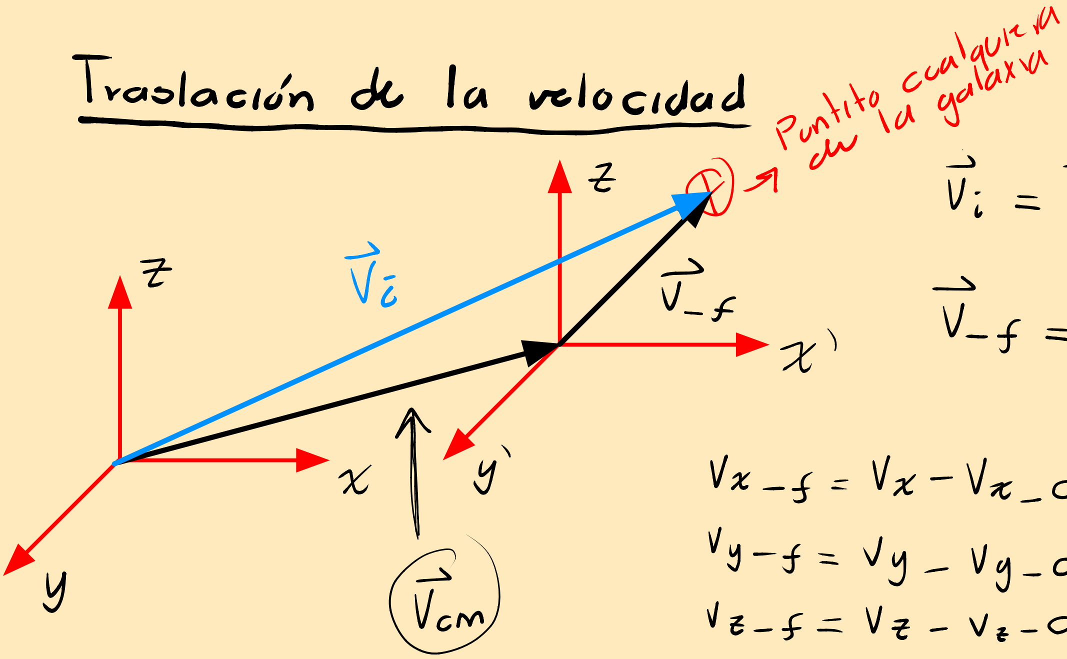
$$l_z < 0 \rightarrow \theta < 0$$

$$\theta + \theta' = 0$$

$$\theta' = -\theta$$

Bueno, la verdad no se... esos calculos ya los he revisado hasta el cansancio y parece que funcionan, no me mato más con eso. Que más que en desmos queda alineado el maldito vector.

Traslación de la velocidad



$$\vec{V}_i = \vec{V}_{cm} + \vec{V}_{-f}$$

$$\vec{V}_{-f} = \vec{V}_i - \vec{V}_{cm}$$

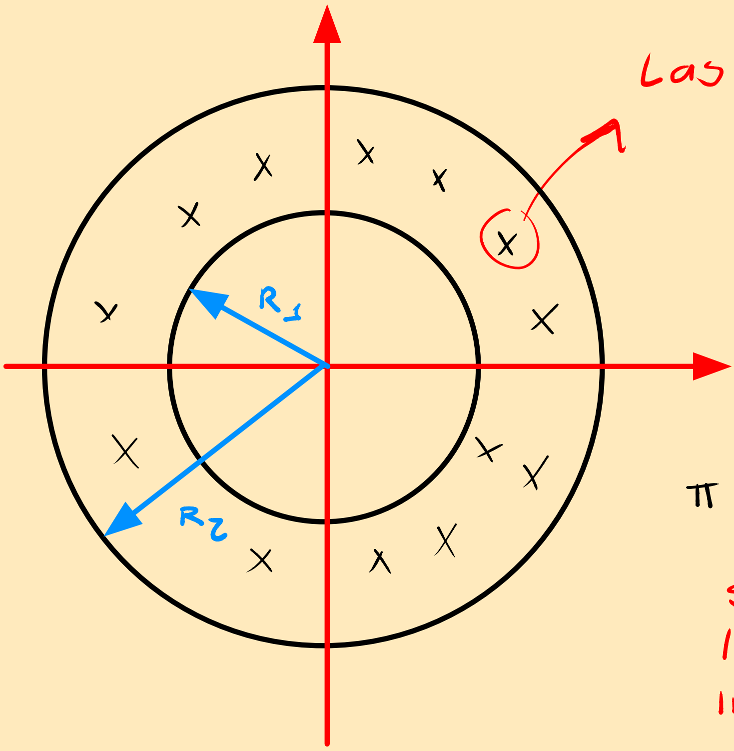
$$V_{x-f} = V_x - V_{x-cm}$$

$$V_{y-f} = V_y - V_{y-cm}$$

$$V_{z-f} = V_z - V_{z-cm}$$

$$\vec{V}_{cm} = \frac{1}{M}\left(\sum m_i \vec{V}_i\right) \rightarrow \begin{aligned} V_{x-cm} &= M^{-1}(m_i \cdot V_{x_i}) \\ V_{y-cm} &= M^{-1}(m_i \cdot V_{y_i}) \\ V_{z-cm} &= M^{-1}(m_i \cdot V_{z_i}) \end{aligned}$$

Perfil de densidad superficial



Las X son masas

σ: Densidad superficial

$$\boxed{\sigma = \frac{m}{A} \qquad A = \pi\left(R_2^2 - R_1^2\right)}$$

$$\pi\underbrace{\left(R_2 + R_1\right)}_{\text{suma de los lim del intervalo}}\underbrace{\left(R_2 - R_1\right)}_{\text{Largo del intervalo}} = A$$

La segunda forma sale mejor porque el largo del intervalo es fijo $\rightarrow$ $A = \underbrace{(\pi)(\Delta R)}_{\text{Estos 2 son fijos !!}}(R_2 + R_1)$

Perfil de densidad Volumetrico

Se hace igual que el de la esfera pero en 3D

$$\rho = \frac{m}{V} \qquad V = \frac{4}{3}\pi\left(R_2^3 - R_1^3\right) = \frac{4}{3}\pi\left(R_2 - R_1\right)\left(R_2^2 + R_1R_2 + R_2^2\right)$$

$$= \left(\frac{4}{3}\right)(\pi)(\Delta R)\left(R_2^2 + R_1R_2 + R_2^2\right)$$

Ambas verciones del volumen tienen la misma cantidad de operaciones pero la larga tiene menos error porque hay más terminos fijos.

Mi intervalo es $[x_0, x_f]$ y mis subintervalos son

$$Int_1 = [x_0, x_0 + \Delta x] \rightarrow n = 1$$

$$Int_2 = [x_0 + \Delta x, x_0 + 2\Delta x] \rightarrow n = 2$$

$$Int_3 = [x_0 + 2\Delta x, x_0 + 3\Delta x] \rightarrow n = 3$$

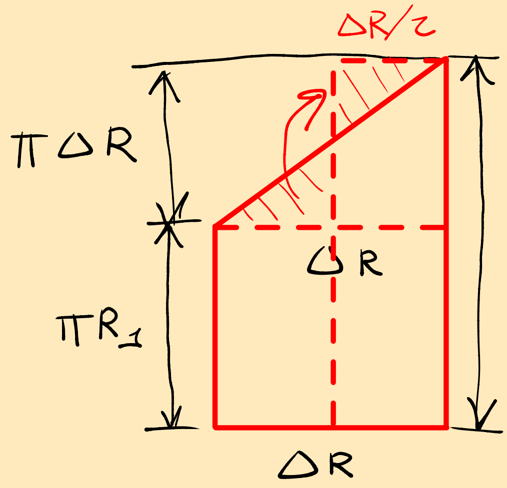
$$Int_n = [x_0 + (i-1)\Delta x, x_0 + i\Delta x] \rightarrow n = i$$

$$r_1 = x_0$$

$$r_2 = x_0 + \Delta x$$

$$r_3 = x_0 + 2\Delta x$$

$$r_n = x_0 + (i-1)\Delta x$$



$$\frac{1}{2}\pi \Delta R^2 + \pi \Delta R R_1$$

$$\pi \Delta R\left[\left(\frac{\Delta R}{2}\right) + R_1\right]$$

$$\pi \Delta R\left[\frac{2R_1 + \Delta R}{2}\right]$$

Si uso esta ecuación para calcular el area de las aradelas, puede que se deje vectorizar el calculo del perfil de densidad

$$\boxed{A = \frac{\pi}{2}\Delta R\,(2R_1 + \Delta R)}$$

$$\Delta x = \Delta R \qquad R_1 = r_n = x_0 + (i-1)\Delta x$$

$$A = \frac{\pi}{2}\Delta x\left(2\left(x_0 + (i-1)\Delta x\right) + \Delta x\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}\Delta x\left(2x_0 + [2(i-1) + 1]\Delta x\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}\Delta x\left(2x_0 + [2i - 2 + 1]\Delta x\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}\Delta x\left(2x_0 + (2i-1)\Delta x\right)$$

No esta tan bueno este lado, depronto

$$r_n = x_0 + (i-1)\Delta x$$

sea mejor.

* Aunque, con $A = \pi(R_2^2 - R_1^2)$ creo que se puede vectorizar más facil.

$$A = \pi\left((x_{i+1})^2 - (x_i)^2\right)$$

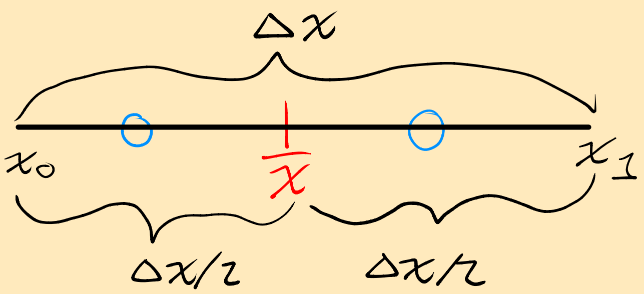
$$\bar{x}_i = \frac{1}{2}\left(x_0 + (i-1)\Delta x + x_0 + i\Delta x\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(x_0 + i\Delta x - \Delta x + x_0 + i\Delta x\right) = \frac{1}{2}\left(2x_0 + 2i\Delta x - \Delta x\right)$$

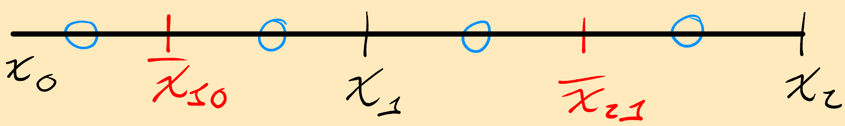
$$= \underbrace{x_0 + i\Delta x}_{} - \frac{\Delta x}{2} = \bar{x}_i$$

* Esto lo puedo sacar como los indices impares del linspaces y le resto $\frac{\Delta x}{2}$ que sería una constante

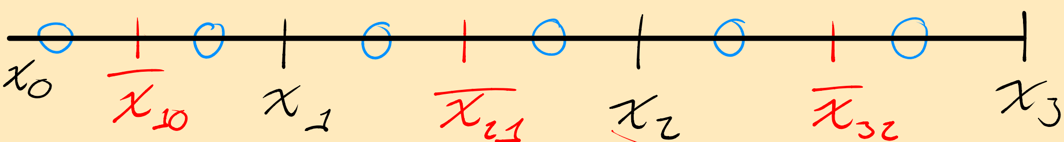
* Creo que lo de los intervalos $[x_0 + (i-1)\Delta x, x_0 + n\Delta x)$ va a servir para usar esos for que van dentro de las listas que se me acaba de olvidar como se llamán.



$n=1$



$n=2$



$n=3$

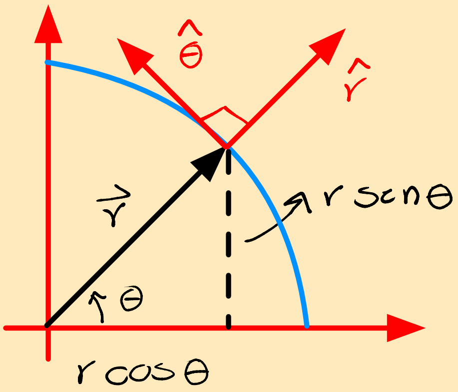
$$\cancel{\frac{x_1 - x_0}{x_1 - x_0} = 1} \qquad n=1$$

$$\frac{x_2 - x_0}{x_1 - x_0} = \cancel{\frac{x_0 + (x_1 - x_0) - x_0}{x_1 - x_0}}$$

Perfil de densidad lineal

Es igual a los otros dos perfil pero tomanto lineas en z

Transformar las velocidades a coordenadas polares



$$\vec{r} = r\hat{r} = r(\cos\theta\,\hat{\imath} + \text{sen}\,\theta\,\hat{\jmath})$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = r\frac{d\hat{r}}{dt} + \hat{r}\frac{dr}{dt}$$

$$= r\omega\hat{\theta} + \hat{r}\dot{r} = \dot{r}\hat{r} + r\omega\hat{\theta}$$

$$= \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\omega\hat{\theta}$$

$$\hat{r} = \cos\theta\,\hat{\imath} + \text{sen}\,\theta\,\hat{\jmath}$$

$$\hat{\theta} = -\text{sen}\,\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega$$

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \dot{\theta}\hat{\theta} = \omega\hat{\theta}$$

Como las velocidades son constantes

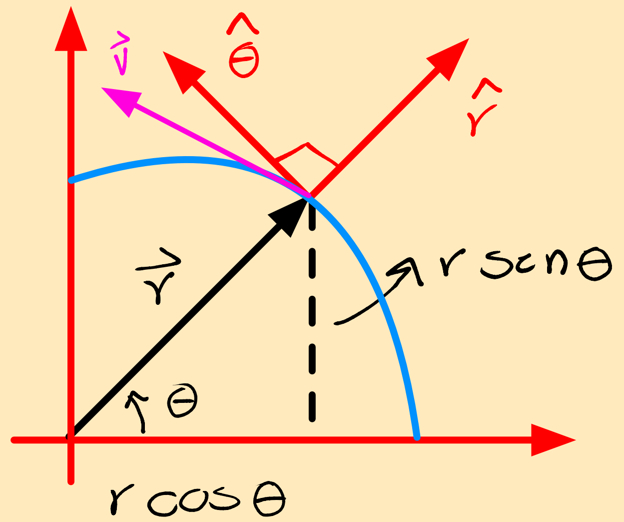
$$x_i(t) = V_{x_i}t \qquad r^2 = (V_{x_i}^2 + V_{y_i}^2)t^2$$
$$y_i(t) = V_{y_i}t$$

$$\frac{d}{dt}[r^2] = \frac{d}{dt}\left[(V_{x_i}^2 + V_{y_i}^2)t^2\right] \rightarrow \cancel{2}r\frac{dr}{dt} = (V_{x_i}^2 + V_{y_i}^2)\cancel{2}t$$

$$\frac{dr}{dt} = \left(\frac{V_{x_i}^2}{r} + \frac{V_{y_i}^2}{r}\right)t$$

$$\text{Proy}_{\hat{r}}(\vec{v}) = (\vec{v}\cdot\hat{r})\hat{r}$$

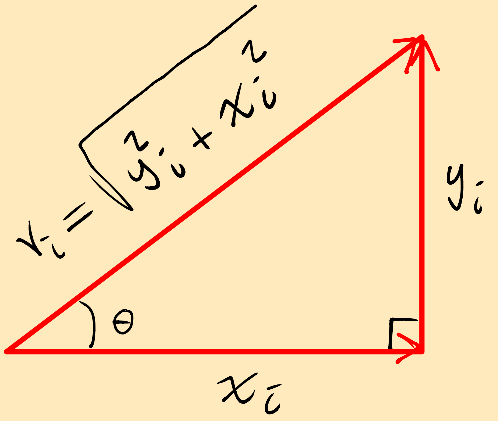
$$\text{Proy}_{\hat{\theta}}(\vec{v}) = \frac{\vec{v}\cdot\hat{\theta}}{|\hat{\theta}|^2}\hat{\theta} = (\vec{v}\cdot\hat{\theta})\hat{\theta}$$



$$\boxed{\begin{array}{l}\vec{V}_\theta = (-V_x\,\text{sen}\,\theta + V_y\cos\theta)\hat{\theta} \\ \hline \vec{V}_r = (V_x\cos\theta + V_y\,\text{sen}\,\theta)\hat{r}\end{array}}$$

Como no tengo forma de conocer $r(t)$ ni $\theta(t)$, lo que puedo hacer es proyectar $\vec{v}$ sobre $\hat{\theta}$ y $\hat{r}$ para pasar el vector velocidad de coordenadas cartecianas a polares.

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y_i}{x_i}\right)$$



$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y_i}{\sqrt{y_i^2 + x_i^2}} = \frac{y_i}{r_i}$$

$$\cos\theta = \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2}} = \frac{x_i}{r_i}$$

$$\vec{V}_r = \left(\frac{V_{x_i} x_i}{r_i} + \frac{V_{y_i} y_i}{r_i}\right)\hat{r} \qquad \vec{V}_\theta = \left(\frac{V_{y_i} x_i}{r_i} - \frac{V_{x_i} y_i}{r_i}\right)\hat{\theta}$$

$$\boxed{\vec{V}_r = \left(V_{x_i} x_i + V_{y_i} y_i\right)\frac{1}{r_i}\,\hat{r} \quad \Big| \quad \vec{V}_\theta = \left(V_{y_i} x_i - V_{x_i} y_i\right)\frac{1}{r_i}\,\hat{\theta}}$$

* Estas ecuaciones de V_r y V_θ son para usarce en los intervalos de las arandelas.