机械工程控制基础

熊良才、吴波、陈良才

华中科技大学

第二章 系统的数学模型

一、引言

数学模型:描述系统动态特性的数学表达式

时域数学模型： 微分方程(连续系统)

差分方程(离散系统)

状态方程

复域数学模型： 传递函数(连续系统)

z传递函数(离散系统)

频域数学模型： 频率特性

数学建模的一般方法：

1.分析法： 根据系统或元件所遵循的有关定律来建模

2.实验法： 根据实验数据整理拟合数模

连续系统的微分方程的一般形式：

$$a_n x_o^{(n)}(t) + a_{n-1} x_o^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 \dot{x}_o(t) + a_0 x_o(t)$$
$$= b_m x_i^{(m)}(t) + b_{m-1} x_i^{(m-1)}(t) + \dots + b_1 \dot{x}_i(t) + b_0 x_i(t)$$

$x_o(t)$、$x_i(t)$ 分别为系统输出和输入；$a_i(i = 0,1,2,\dots,n)$、$b_j(j = 0,1,2,\dots,m)$ 为微分方程系数

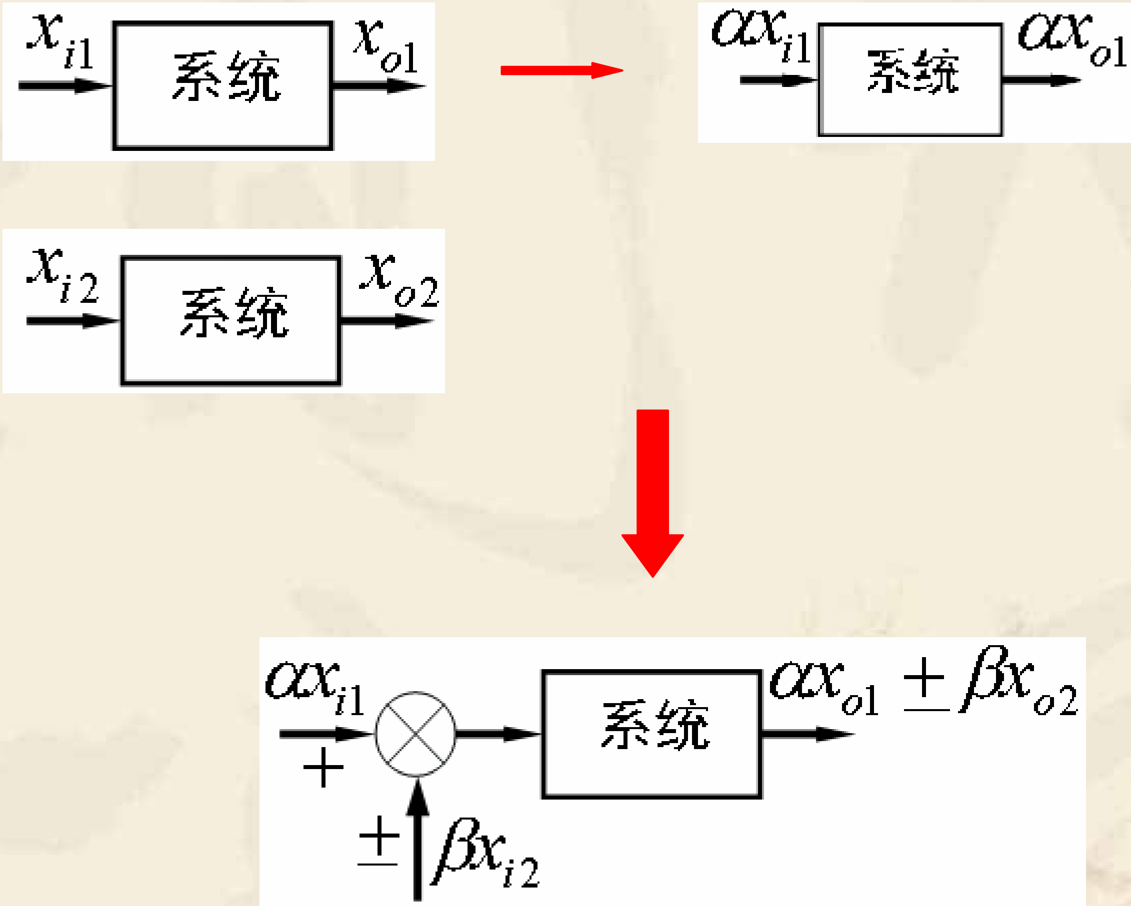
若所有系数都不是输入、输出及其各阶导数的函数，则微分方程表示的系统为线性系统；否则，系统为非线性系统。对线性系统，若系数为常数则为线性定常系统。

$\ddot{x}_o(t)+3\dot{x}_o(t)+7x_o(t)=4\dot{x}_i(t)+5x_i(t)$ 线性定常系统

$\ddot{x}_o(t)+3\dot{x}_o(t)+7x_o(t)=4t^2\dot{x}_i(t)+5x_i(t)$ 线性时变系统

$\ddot{x}_o(t)+3x_o\dot{x}_o(t)+7x_o(t)=4t^2\dot{x}_i(t)+5x_i(t)$ 非线性系统

线性系统的叠加原理



x_{i1}
系统
x_{o1}
αx_{i1}
系统
αx_{o1}
x_{i2}
系统
x_{o2}
αx_{i1}
+
$\pm\beta x_{i2}$
系统
$\alpha x_{o1}\pm\beta x_{o2}$

二、系统微分方程

列写微分方程的一般方法：

1. 确定系统的输入量和输出量。
   注意：输入量包括给定输入量和扰动量

2. 按信息传递顺序，从系统输入端出发，根据各变量所遵循的物理定律，列写系统中各环节的动态微分方程。

   注意：负载效应，非线性项的线性化。

3. 消除中间变量，得到只包含输入量和输出量的微分方程。

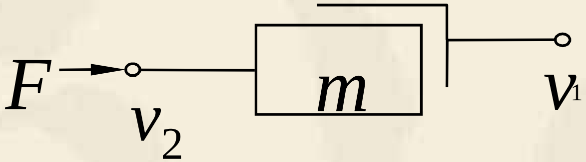
4. 整理微分方程。输出有关项放在方程左侧，输入有关项放在方程右侧，各阶导数项降阶排列。

$$a_n x_o^{(n)}(t) + a_{n-1} x_o^{(n-1)}(t) + \cdots a_1 \dot{x}_o(t) + a_0 x_o(t) =$$

$$b_m x_i^{(m)}(t) + b_{m-1} x_i^{(m-1)}(t) + \cdots b_1 \dot{x}_i(t) + b_0 x_i(t)$$

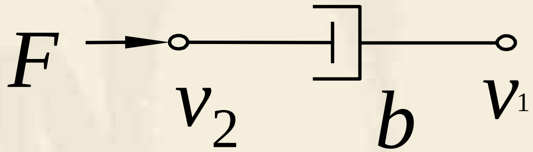
一）机械系统　　两端相对速度v_{21}

质量



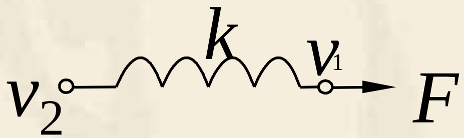
$$F = m\frac{\mathrm{d}v_{21}}{\mathrm{d}t}$$

阻尼



$$F = b v_{21}$$

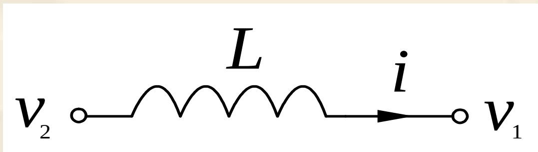
弹簧



$$F = k\int v_{21}\mathrm{d}t$$

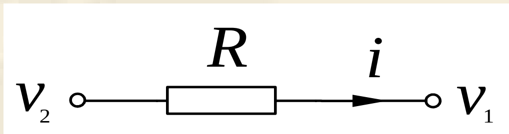
二）电网络　　电路元件两端电位差v_{21}

电感



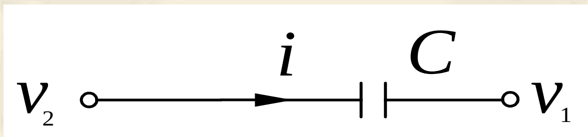
$$v_{21} = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

电阻



$$v_{21} = Ri$$

电容



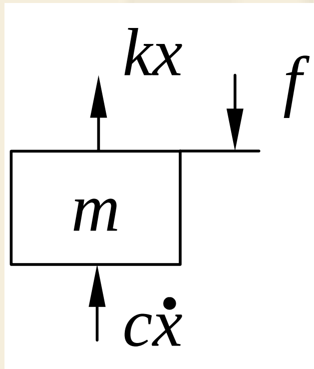
$$v_{21} = \frac{1}{C}\int i\mathrm{d}t$$

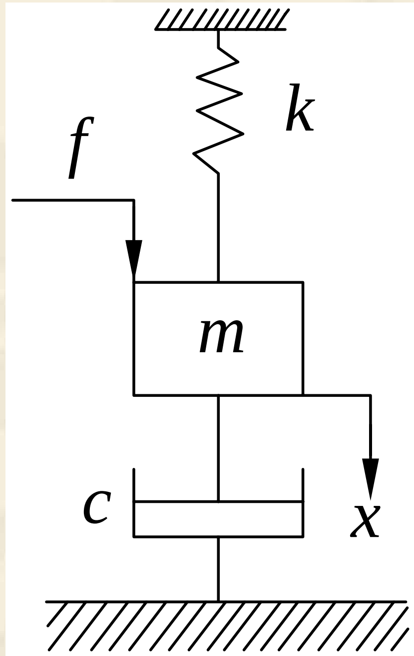
例1：图示机械系统 *m-c-k*，列写微分方程。

1. 明确：

   系统输入 $f(t)$

   系统输出 $x(t)$





2. 牛顿第二定律
   列写原始微分方程：

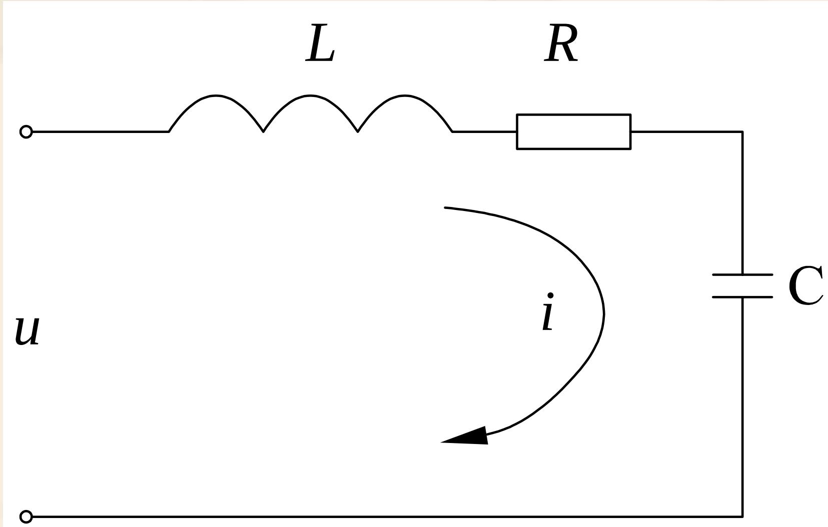
$$f - kx - c\dot{x} = m\ddot{x}$$

3. 整理： $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f$

例2：图示电网络，列写微分方程。

1. 明确系统的输入与输出：

输入$u(t)$，输出电量q



2. 列写原始微分方程：

$$u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + iR + \frac{1}{C}\int i\mathrm{d}t$$

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

3. 消除中间变量，并整理

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = u$$

例3：列写微分方程

1. 明确：输入***T***，输出***x(t)***

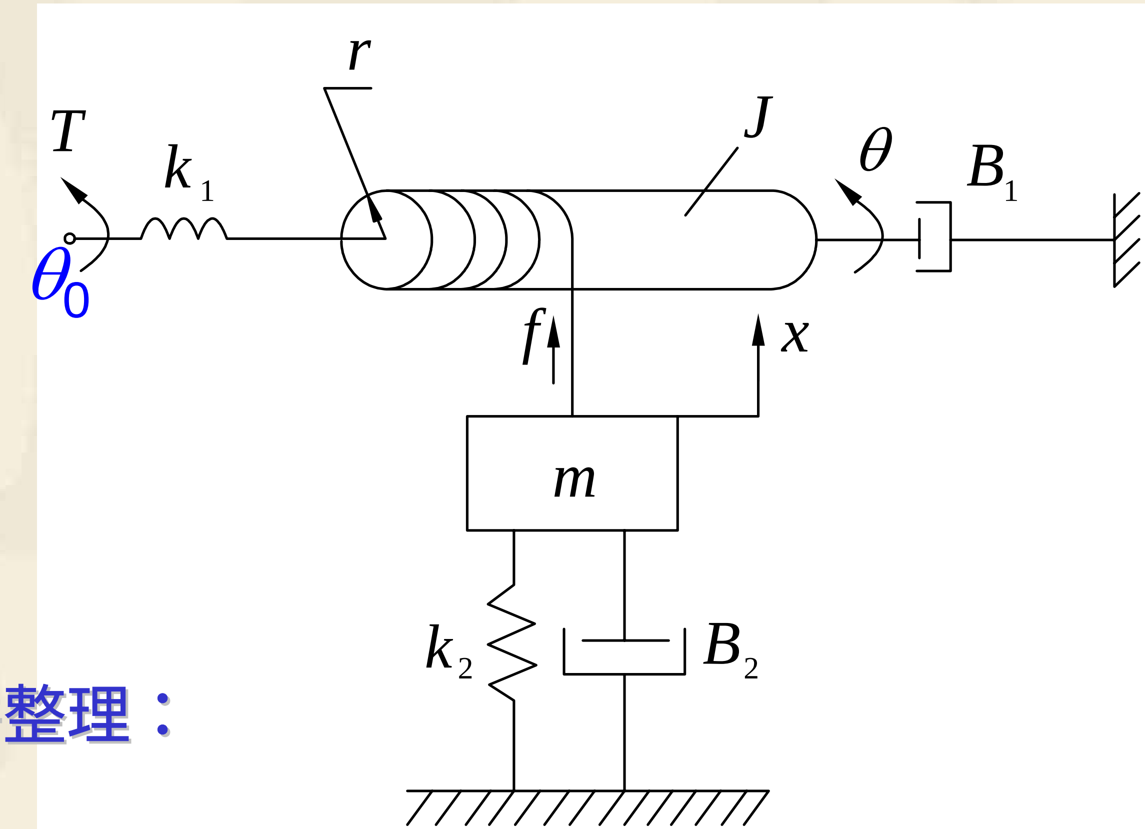
2. 微分方程：

$$T = k_1(\theta_0 - \theta)$$

$$f = m\ddot{x} + B_2\dot{x} + k_2 x$$

$$k_1(\theta_0 - \theta) = J\ddot{\theta} + B_1\dot{\theta} + rf$$

$$x = \theta r$$



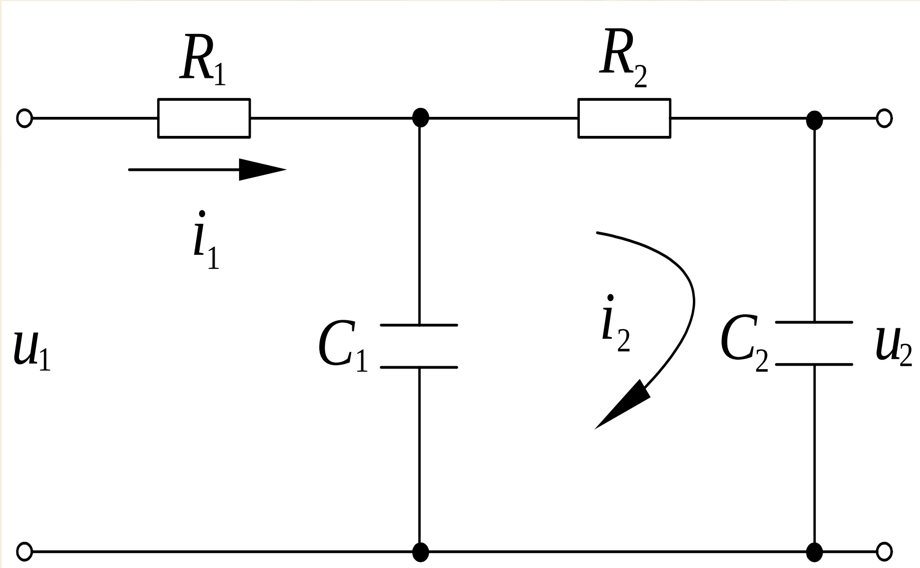
3. 消除中间变量 ***f***、***q***，并整理：

$$(J + mr^2)\ddot{x} + (B_1 + B_2 r^2)\dot{x} + k_2 r^2 x = rT$$

例4：图示电网络，列写微分方程。

1. 明确系统的输入与输出：

输入u_1，输出u_2



2. 列写微分方程：

$$i_1 R_1 + \frac{1}{C_1}\int (i_1 - i_2)\mathrm{d}t = u_1$$

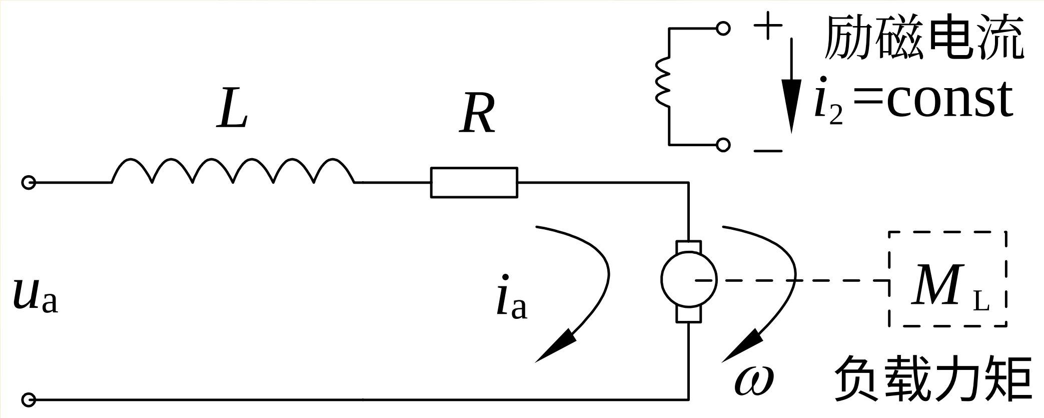
$$i_2 R_2 + \frac{1}{C_2}\int i_2 \mathrm{d}t = \frac{1}{C_1}\int (i_1 - i_2)\mathrm{d}t$$

$$\frac{1}{C_2}\int i_2 \mathrm{d}t = u_2$$

3. 消除中间变量 i_1、i_2，并整理：

$$R_1 C_1 R_2 C_2 \frac{\mathrm{d}^2 u_2}{\mathrm{d}t^2} + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2)\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} + u_2 = u_1$$

例5 直流电动机



1. 明确输入与输出：

输入u_a 和M_L，输出ω

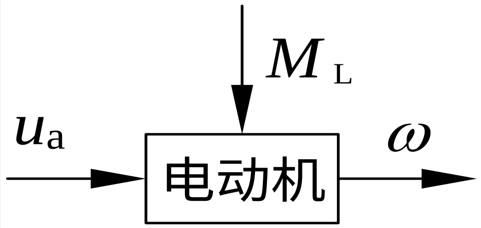
2. 列写原始微分方程：

$$L\frac{\mathrm{d}i_a}{\mathrm{d}t}+i_aR+e_d=u_a$$

$$e_d=k_d\omega$$

$$J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=M-M_L$$

$$M=k_mi_a$$



电机的反电势e_d

反电势常数k_d

电磁力矩M

电磁力矩常数k_m

3.消除中间变量，并整理：

令 $T_a=\dfrac{L}{R},T_m=\dfrac{RJ}{k_dk_m},C_d=\dfrac{1}{k_d},C_m=\dfrac{T_m}{J}$

得 $$T_aT_m\frac{\mathrm{d}^2\omega}{\mathrm{d}t^2}+T_m\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}+\omega=C_du_a-C_mT_a\frac{\mathrm{d}M_L}{\mathrm{d}t}-C_mM_L$$

$$T_a T_m \frac{d^2\omega}{dt^2} + T_m \frac{d\omega}{dt} + \omega = C_d u_a - C_m T_a \frac{dM_L}{dt} - C_m M_L$$

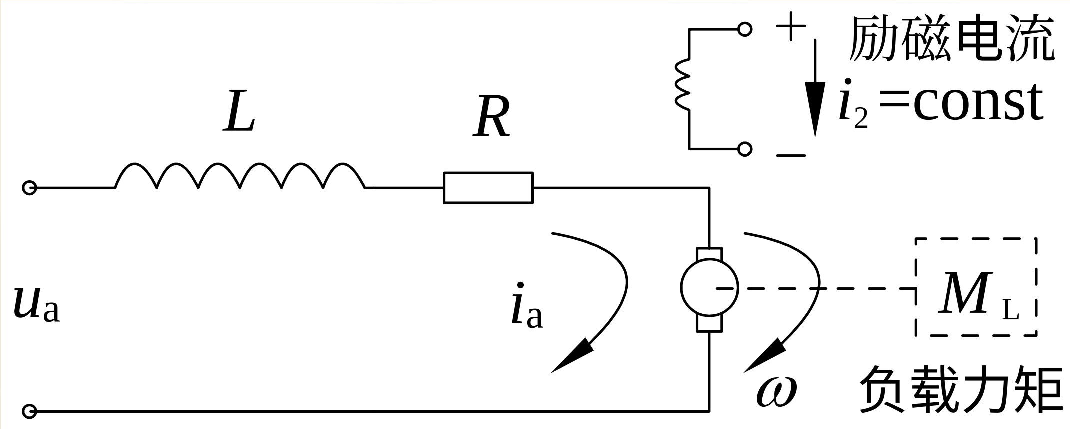
设电动机处于平衡态，导数为零，静态模型

$$\omega = C_d u_a - C_m M_L$$

设平衡点（u_{a0}, M_{L0}, ω_0）

即有 $\omega_0 = C_d u_{a0} - C_m M_{L0}$

当偏离平衡点时，有



$$u_a = u_{a0} + \Delta u_a \qquad M_L = M_{L0} + \Delta M_L \qquad \omega = \omega_0 + \Delta\omega$$

则 $T_a T_m(\omega_0 + \Delta\omega)'' + T_m(\omega_0 + \Delta\omega)' + (\omega_0 + \Delta\omega) =$

$$C_d(u_{a0} + \Delta u_a) - C_m T_a (M_{L0} + \Delta M_L)' - C_m (M_{L0} + \Delta M_L)$$

$$T_a T_m (\Delta\omega)'' + T_m (\Delta\omega)' + \Delta\omega = C_d \Delta u_a - C_m T_a (\Delta M_L)' - C_m \Delta M_L$$ 增量化

1. 增量化方程与实际坐标方程形式相同

2. 当平衡点为坐标原点时，二者等价；否则，二者不等价。

非线性方程的线性化

线性化的条件：

1. 非线性函数是连续函数(即不是本质非线性)。
2. 系统在预定工作点附近作小偏差运动

线性化的方法：

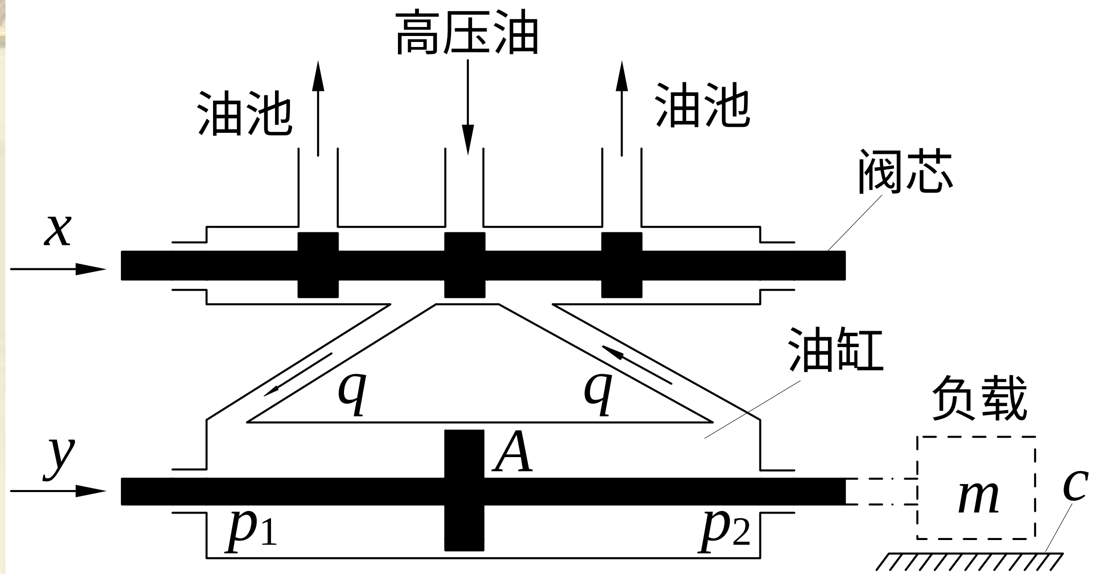
1. 确定预定工作点。
2. 在工作点附近将非线性方程展开成Taylor级数形式。
3. 忽略高阶小项。
4. 表示成增量化方程的形式。

例6 液压伺服机构

1. 明确 输入 x，输出y

2. 列写原始微分方程

设 $p = p_1 - p_2$



$$my'' + cy' = Ap$$

$$q = Ay'$$ 液压油流量

$$q = f(p,\rho) = c_d \dot{x} x \sqrt{p/\rho}$$ 滑阀特性

3. 非线性函数线性化：

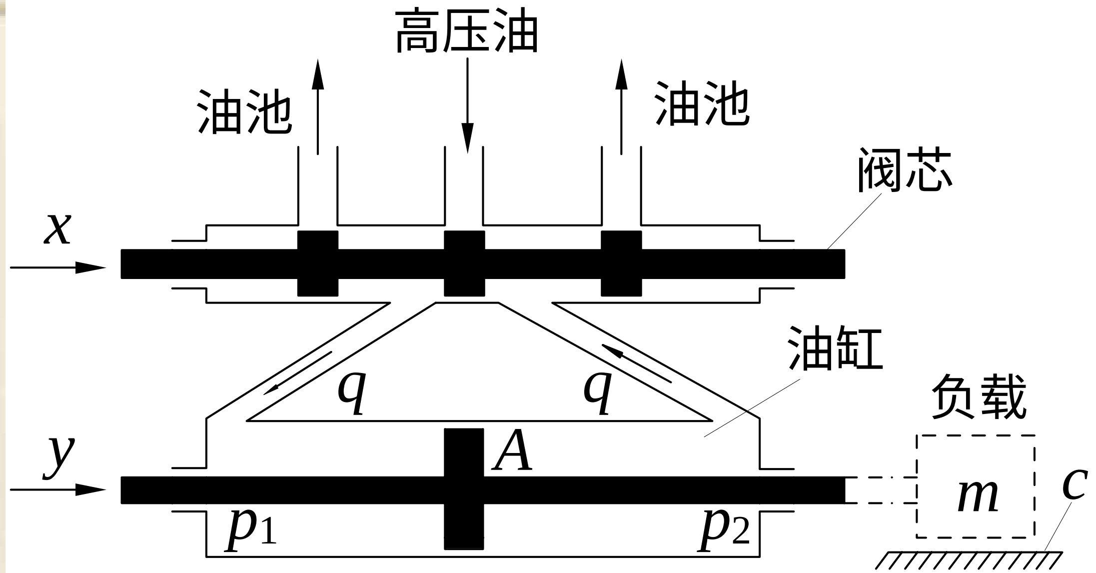
(1) 确定系统预定工作点 $q_0 = q(x_0, p_0)$

(2) 二元泰勒公式展开

$$q(x,p) \approx q(x_0,p_0) + \left.\frac{\partial q}{\partial x}\right|_{x_0,p_0} \cdot \Delta x + \left.\frac{\partial q}{\partial p}\right|_{x_0,p_0} \cdot \Delta p$$

已略去高阶小量

例6 液压伺服机构



$$my''+cy'=Ap$$

$$q=Ay'$$

$$q=f(p,\rho)=c_d\dot{x}x\sqrt{p/\rho}$$

3. 非线性函数线性化：

(1) 确定系统预定工作点

$$q_0=q(x_0,p_0)$$

(2) 二元泰勒公式展开

$$q(x,p)\approx q(x_0,p_0)+\left.\frac{\partial q}{\partial x}\right|_{x_0,p_0}\cdot\Delta x+\left.\frac{\partial q}{\partial p}\right|_{x_0,p_0}\cdot\Delta p$$

(3) 增量方程

$$p=\frac{1}{K_c}(K_q x-q)=\frac{K_q}{K_c}x-\frac{A}{K_c}y'$$

4. 代入原方程

$$my''+cy'=Ap$$

整理得

$$my''+(c+A^2/K_c)y'=(AK_q/K_c)x$$

线性化特点：

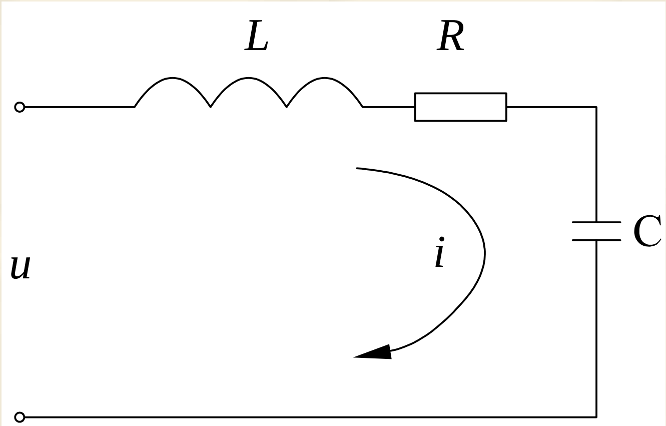
1. 非线性项线性化后微分方程是增量形式的微分方程。

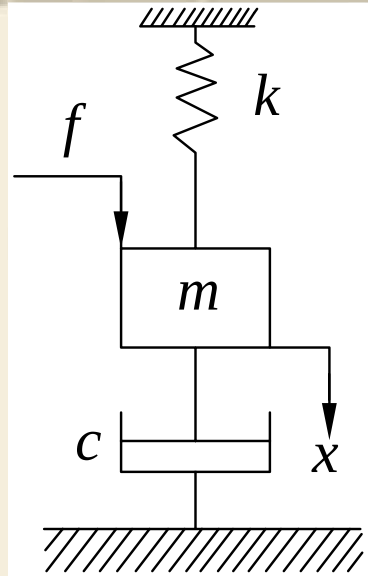
2. 线性化的结果与系统的预定工作点有关。

如：本例中，不同预定点的k_q、k_c不同

3. 非线性项线性化必须满足连续性和小偏差条件。

三、相似系统





组成系统的
物理元件不同

$$L\ddot{q}+R\dot{q}+\frac{1}{C}q=u$$

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=f$$

数学模型形式相同

相似系统：具有相同形式数学模型的不同物理构成的系统。

相似量：

质量元件	$F=m\dfrac{\mathrm{d}v_{21}}{\mathrm{d}t}$	电感元件	$v_{21}=L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$
阻尼元件	$F=bv_{21}$	电阻元件	$v_{21}=Ri$
弹簧元件	$F=k\int v_{21}\mathrm{d}t$	电容元件	$v_{21}=\dfrac{1}{C}\int i\mathrm{d}t$

四、系统传递函数

连续系统的微分方程的一般形式：

$$a_n x_o^{(n)}(t) + a_{n-1} x_o^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 \dot{x}_o(t) + a_0 x_o(t)$$
$$= b_m x_i^{(m)}(t) + b_{m-1} x_i^{(m-1)}(t) + \dots + b_1 \dot{x}_i(t) + b_0 x_i(t) \qquad (n \ge m)$$

在零初始条件下，对方程两边拉氏变换，得：

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0) X_o(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0) X_i(s)$$

$$\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \qquad (n \ge m)$$

系统与外界联系

系统固有特性

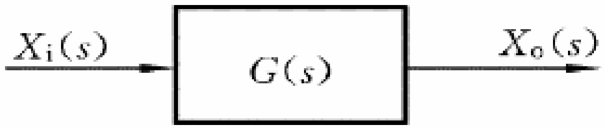
$$G(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \qquad (n \ge m)$$ 传递函数

传递函数定义：

零初始条件下，线性定常系统输出的拉氏变换与输入的拉氏变换之比。

传递函数 $G(s)=\dfrac{X_o(s)}{X_i(s)}=\dfrac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0} \quad (n\ge m)$

或 $X_o(s)=G(s)X_i(s)$



传递函数方框

传递函数特点：

1.传递函数是关于复变量s的复变函数，为复域数学模型；

2.传递函数的分母反映系统本身与外界无关的固有特性，传递函数的分子反映系统与外界的联系；

3. 在零初始条件下，当输入确定时，系统的输出完全取决于系统的传递函数

$$x_o(t)=L^{-1}[X_o(s)]=L^{-1}[G(s)X_i(s)]$$

4.物理性质不同的系统，可以具有相同的传递函数(相似系统)

传递函数 $G(s)=\dfrac{X_o(s)}{X_i(s)}=\dfrac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}\quad (n\geq m)$

传递函数的零极点模型 $G(s)=\dfrac{K(s-z_1)(s-z_2)\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)}$

极点：$p_1,p_2,\ldots,p_n$ 微分方程的特征根

决定系统瞬态响应的收敛性，决定稳定性。

零点：$z_1,z_2,\ldots,z_m$ 影响瞬态响应曲线的形状，不影响稳定性。

放大系数(增益)： $G(0)=K\dfrac{(-z_1)(-z_2)\ldots(-z_m)}{(-p_1)(-p_2)\ldots(-p_n)}=\dfrac{b_0}{a_0}$

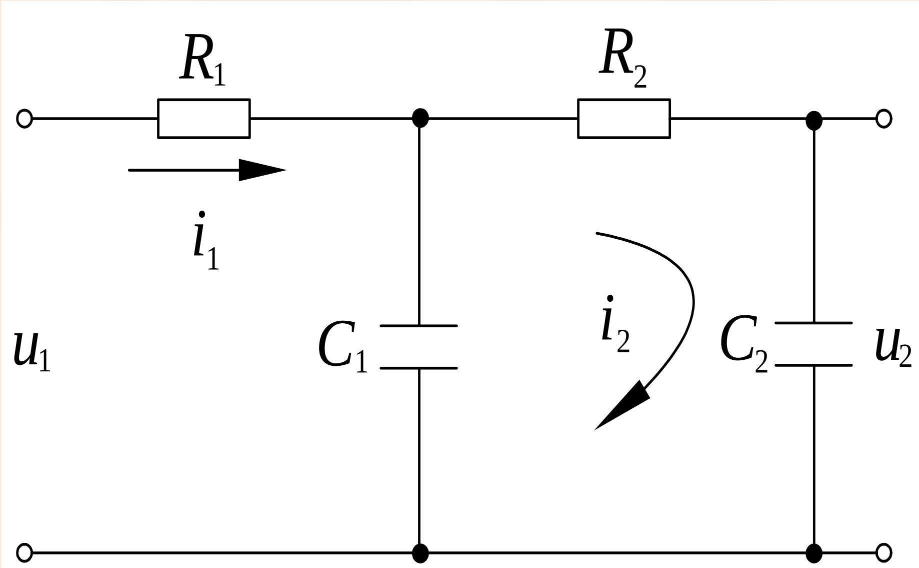
设阶跃信号输入 $x_i(t)=k$ ， $X_i(s)=k/s$

系统的稳态输出 $\lim\limits_{t\to\infty}x_o(t)=\lim\limits_{s\to 0}sX_o(s)$

$=\lim\limits_{s\to 0}sG(s)X_i(s)=\lim\limits_{s\to 0}sG(s)k/s=G(0)\cdot k$

对系统的研究可以转化为对系统传递函数零点、极点、放大系数的研究。

例1：求图示系统的传递函数



1.确定系统输入与输出：u_1 u_2

2.列写原始微分方程：

$$i_1R_1+\frac{1}{C_1}\int(i_1-i_2)\mathrm{d}t=u_1$$

$$i_2R_2+\frac{1}{C_2}\int i_2\mathrm{d}t=\frac{1}{C_1}\int(i_1-i_2)\mathrm{d}t$$

$$\frac{1}{C_2}\int i_2\mathrm{d}t=u_2$$

3.在零初始条件下，进行拉氏变换：

$$R_1I_1+\frac{I_1-I_2}{C_1s}=U_1$$

$$R_2I_2+\frac{I_2}{C_2s}=\frac{I_1-I_2}{C_1s}$$

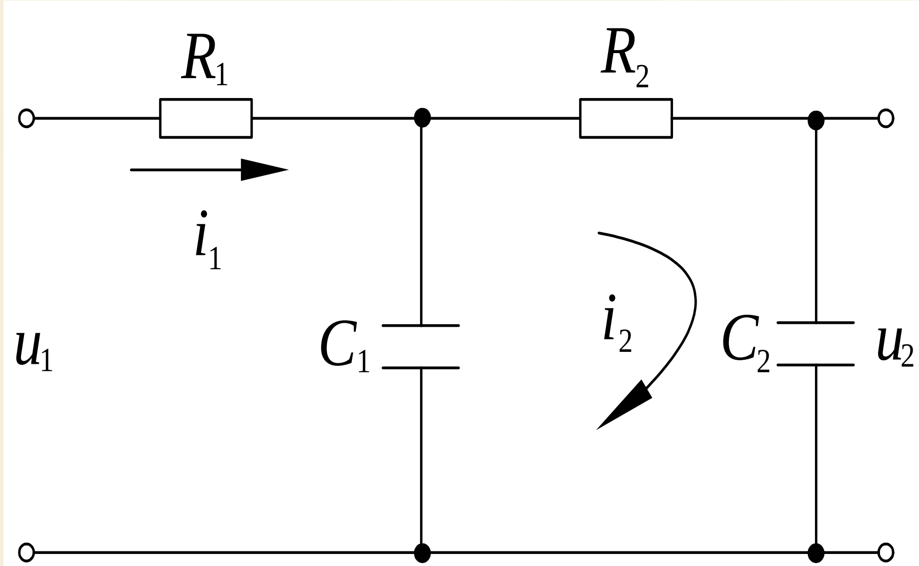
$$\frac{I_2}{C_2s}=U_2$$

3.在零初始条件下，进行拉氏变换：

$$R_1 I_1 + \frac{I_1 - I_2}{C_1 s} = U_1$$

$$R_2 I_2 + \frac{I_2}{C_2 s} = \frac{I_1 - I_2}{C_1 s}$$

$$\frac{I_2}{C_2 s} = U_2$$



4.消除中间变量，并整理得：

$$[R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2) s + 1] U_2 = U_1$$

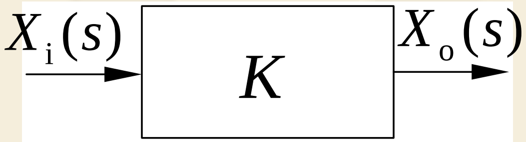
5.传递函数

$$G(s) = \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2) s + 1}$$

五、典型环节传递函数

系统传递函数往往是高阶的，高阶传递函数可化为比例、惯性、积分、微分、振荡等低阶典型环节传递函数的组合

1. 比例环节 ——输出正比于输入

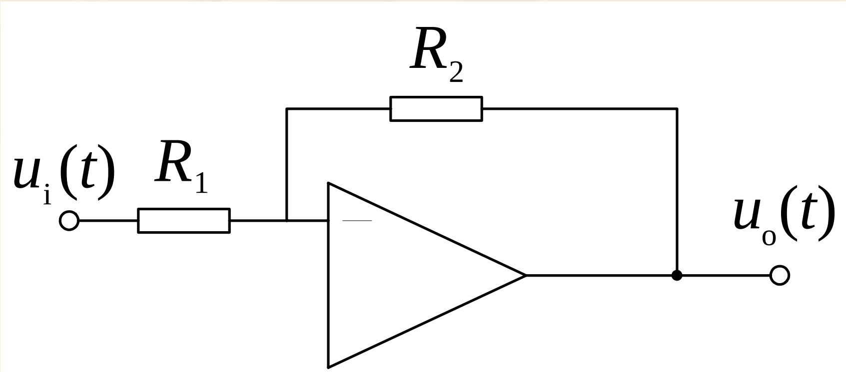


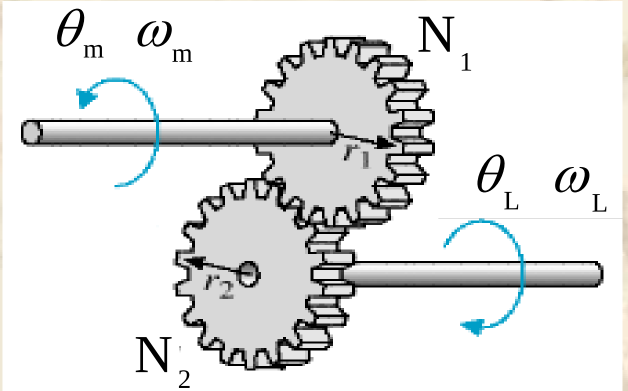
动力学方程： $x_o(t) = Kx_i(t)$

传递函数： $G(s) = K$

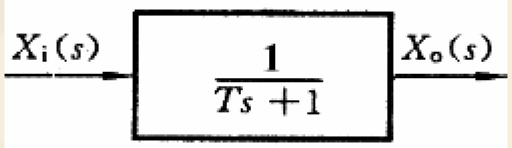
特点：输出量与输入量成正比；不失真，不延迟。

例：





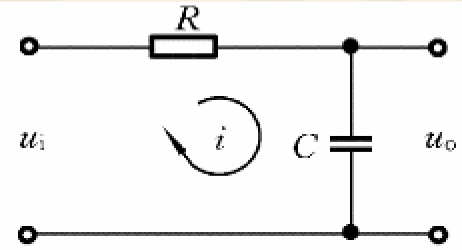
2. 惯性环节 ——输出的导数与输出之和正比于输入



动力学方程：$$T\frac{\mathrm{d}x_o(t)}{\mathrm{d}t}+x_o(t)=Kx_i(t)$$

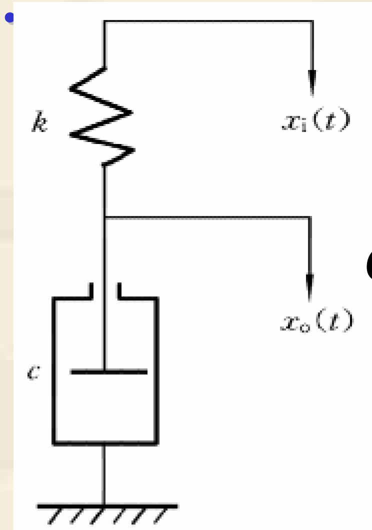
传递函数：$$G(s)=\frac{K}{Ts+1}$$

例1：



$$G(s)=\frac{1}{RCs+1}$$

例2：



$$k(x_i-x_o)=c\dot{x}_o$$

$$c\dot{x}_o+kx_o=kx_i$$

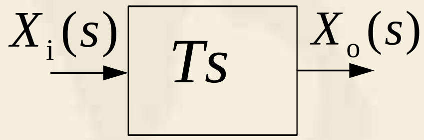
$$G(s)=\frac{X_o}{X_i}=\frac{k}{cs+k}=\frac{1}{\frac{c}{k}s+1}=\frac{1}{Ts+1}$$

特点：

存在储能元件和耗能元件。

阶跃输入时，输出经过一段时间才到稳态值。

3. 微分环节 ——输出正比于输入的变化率



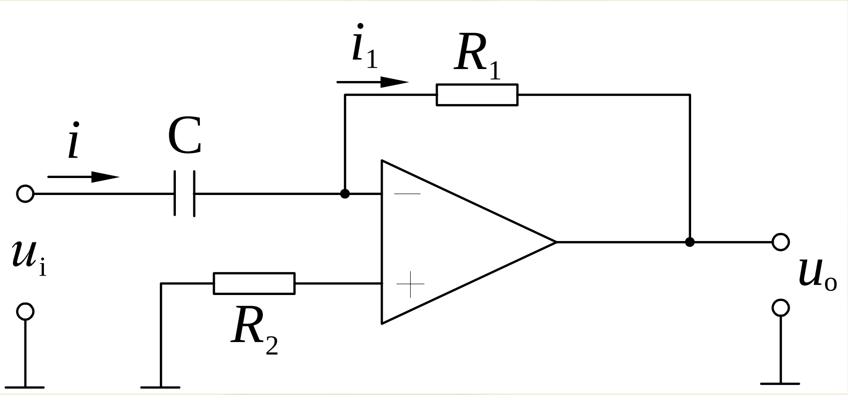
动力学方程： $x_o(t) = T\,\dot{x}_i(t)$

传递函数： $G(s) = Ts$

特点：

- 一般不能单独存在
- 增加阻尼；
- 强化噪声。

例1：微分运算电路



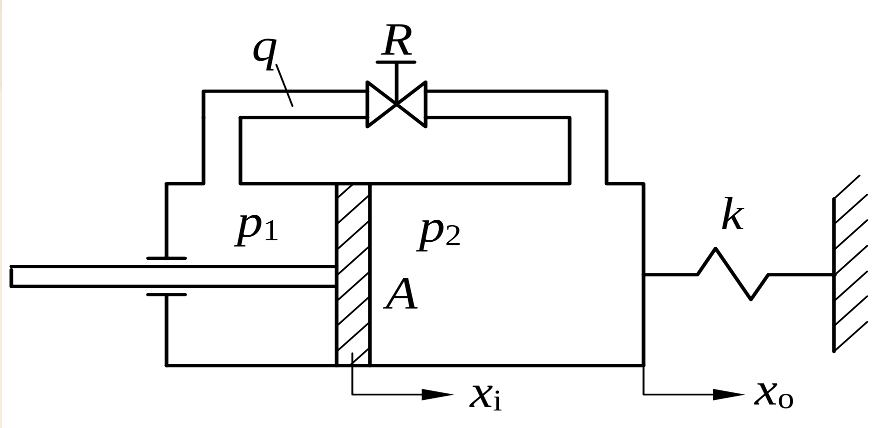
$$i = C\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} = \frac{0-u_o}{R_1}$$

$$u_o = -R_1 C\dot{u}_i$$

$$G(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = -R_1 Cs$$

例2：机械液压阻尼器 ——缓冲，减小偏移幅度

油缸力平衡 $A(p_2 - p_1) = kx_o$



节流阀流量

$$q = A(\dot{x}_i - \dot{x}_o) = \frac{p_2 - p_1}{R}$$

$$\dot{x}_i - \dot{x}_o = \frac{k}{A^2 R} x_o$$

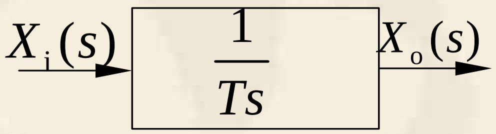
$$\frac{k}{A^2 R} X_o(s) + sX_o(s) = sX_i(s)$$

$$G(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{s}{s + \frac{k}{A^2 R}} = \frac{s}{s + \frac{1}{T}} = \frac{Ts}{Ts + 1} = \frac{1}{Ts + 1} \cdot Ts$$

若 $T>>1$ $\qquad G(s) \approx Ts$

4. 积分环节　——输出正比于输入的累积量

动力学方程： $x_o(t)=\dfrac{1}{T}\int x_i(t)\,\mathrm{d}t$



传递函数： $G(s)=\dfrac{1}{Ts}$

若输入单位阶跃信号 $x_i(t)=1$，$X_i(s)=1/s$

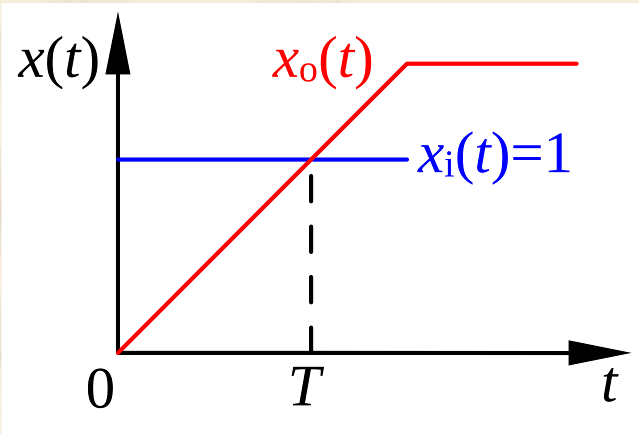
则输出为 $X_o(s)=\dfrac{1}{Ts}\cdot\dfrac{1}{s}=\dfrac{1}{Ts^2}$　　$x_o(t)=L^{-1}[X_o(s)]=\dfrac{1}{T}t$

特点：

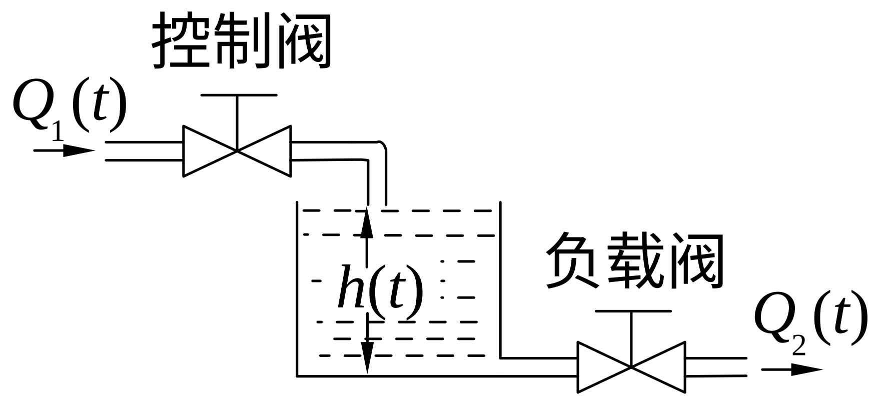
1). 输出反映输入量的累积

2). 输出滞后于输入,
经过时间 T，输出才等于输入

3). 输出具有记忆功能
经过一段时间后，输入变为0，输出稳定不变



例1：

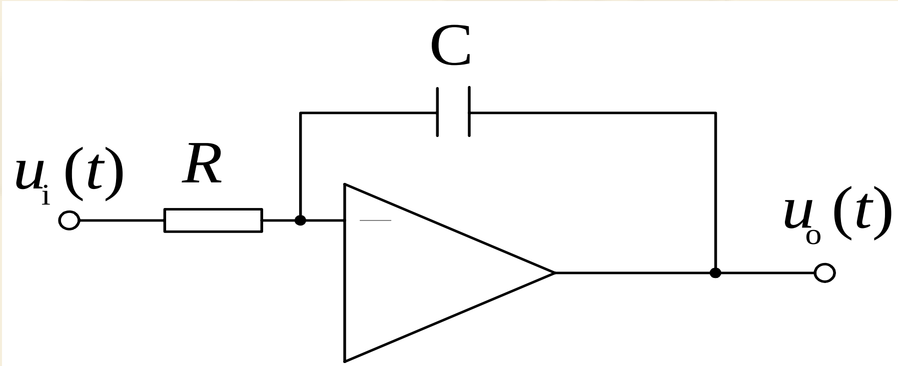


$$Q(t)=Q_1(t)-Q_2(t)$$

$$\int Q(t)dt = Ah(t)$$

$$G(s)=\frac{H(s)}{Q(s)}=\frac{1}{As}$$

例2：积分运算电路



$$\frac{u_i(t)}{R}=-C\frac{du_o(t)}{dt}$$

$$G(s)=\frac{U_o(s)}{U_i(s)}=-\frac{1}{RCs}=\frac{1}{Ts}$$

式中，$T=-RC$

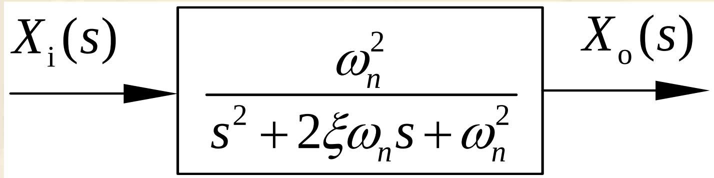
凡有储存或积累特点的元件、环节、系统都有积分特性

如：水库、植物、水垢、黄土高原、海洋盐分

5. 振荡环节

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} \qquad (0\le\xi\le1)$$

$$或G(s)=\frac{1}{T^2s^2+2\xi Ts+1}$$



无阻尼固有频率ω_n，时间常数$T=1/\omega_n$，阻尼比ξ

特点:

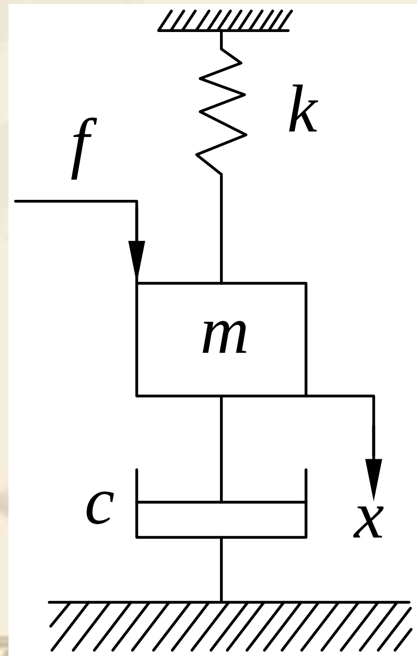
(1) $0\le\xi<1$ 时，输出振荡。且ξ越小，振荡越剧烈

(2) $\xi\ge1$时，输出无振荡,不是振荡环节

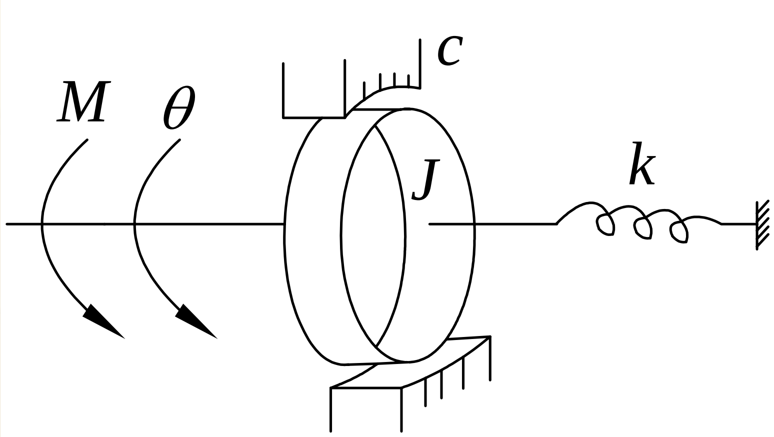
(3) 振荡环节一般含有两个储能元件和一个耗能元件

例1: $m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=f \Rightarrow G(s)=\frac{1}{ms^2+cs+k}$

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} \qquad \omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \xi=\frac{c}{2\sqrt{mk}}$$



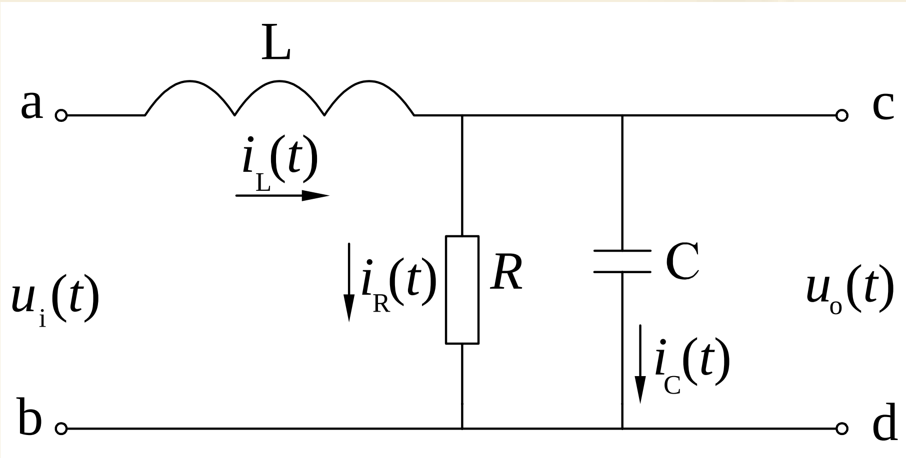
例2 旋转运动的*J-c-k*系统



$$J\ddot{\theta}+c\dot{\theta}+k\theta=M$$

$$G(s)=\frac{\Theta(s)}{M(s)}=\frac{1}{Js^2+cs+k}$$

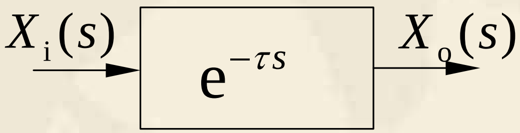
例3 *L-R-C*电路



$$G(s)=\frac{1}{LCs^2+\frac{L}{R}s+1}$$

6. 延时环节

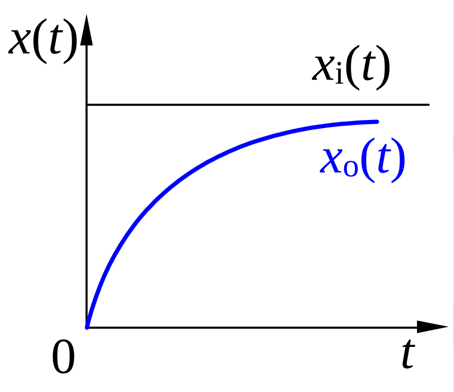
动力学方程：$x_o(t) = x_i(t-\tau)$



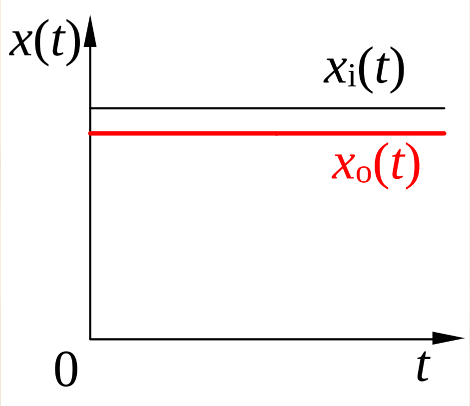
传递函数：$G(s) = e^{-\tau s}$

特点：输出滞后于输入，但不失真

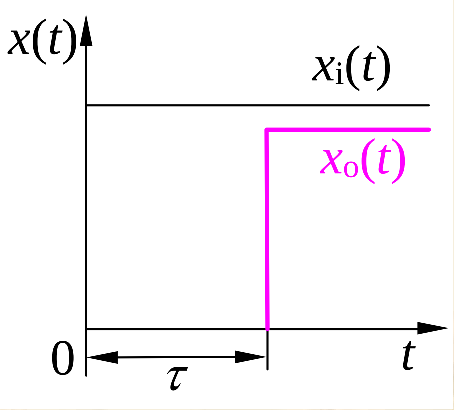
延时环节与惯性环节和比例环节有区别



惯性环节



比例环节

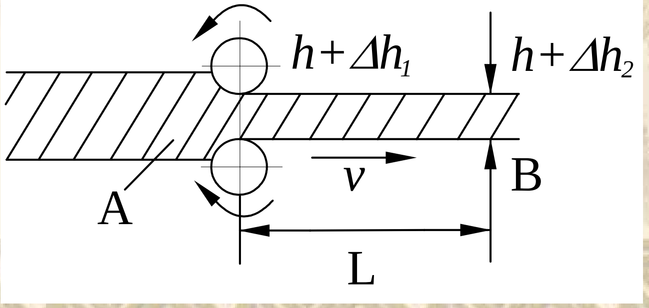


延时环节

例：轧钢厂钢板厚度检测

$$\Delta h_2 = \Delta h_1(t-\tau)$$

$$G(s) = e^{-\tau s}$$



典型环节传递函数小结

1. 物理元件个数不一定等于系统的环节个数

一个元件——几种环节作用
几个元件——一个环节的作用

2. 物理框图：说明物理过程和原理，
框图中，元器件或零部件

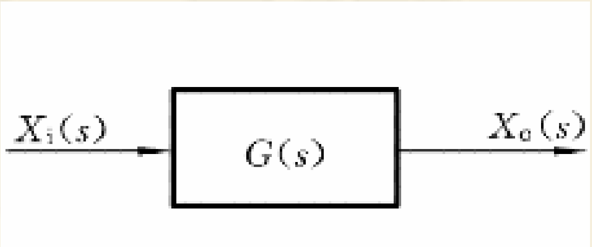
传函框图：表示信息传递关系框图中，各环节传递函数

3. 同一物理元件在不同系统中，可能作用不同，其传递函数也不同,可能充当不同典型环节。

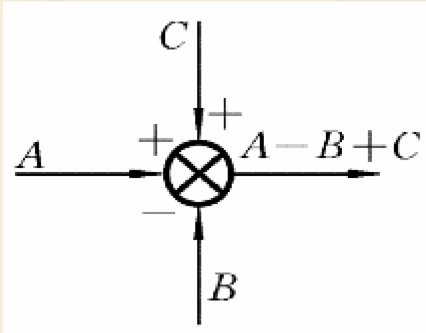
六、系统传递函数方框图

传递函数方框图将组成系统的各个环节用传递函数方框表示，并将相应的变量按信息流动的方向连接起来构成的图形。

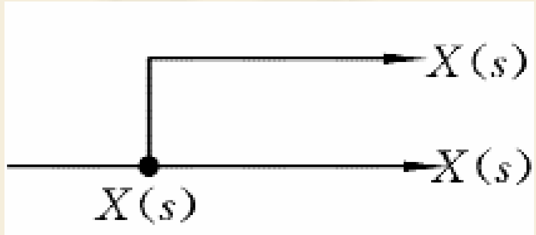
传递函数方框图三要素



传递函数方框



相加点



分支点

建立传递函数方框图的步骤

(1) 列写各元件微分方程

(2) 在零初始条件下，对上述微分方程进行拉氏变换

(3) 按因果关系，绘制各环节框图

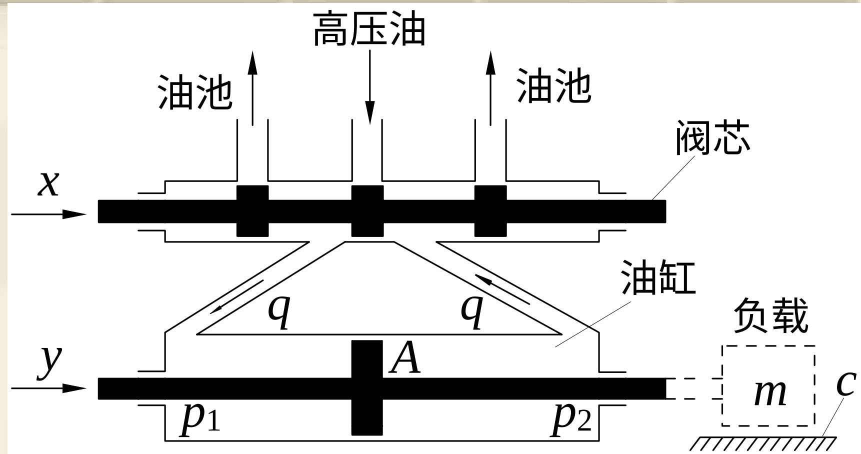
(4) 按信号流向，依次连接各环节框图
左边输入，右边输出，反馈则“ 倒流 ”

例1：

1. 列写微分方程：

$$m\ddot{y}+c\dot{y}=Ap \qquad q=A\dot{y}$$

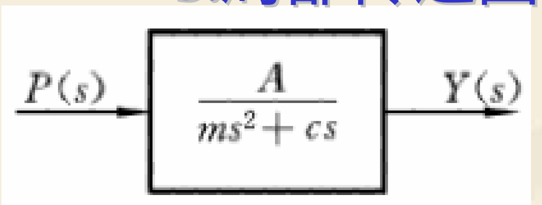
$$p=\frac{1}{K_c}(K_q x-q)$$

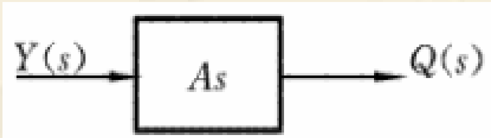


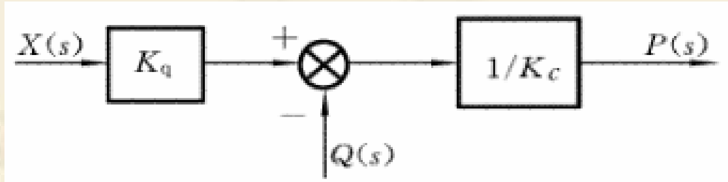
2.Laplace变换：

$$(ms^2+cs)Y=AP\,,\quad Q=AsY\,,\quad P=\frac{1}{K_c}(K_q X-Q)$$

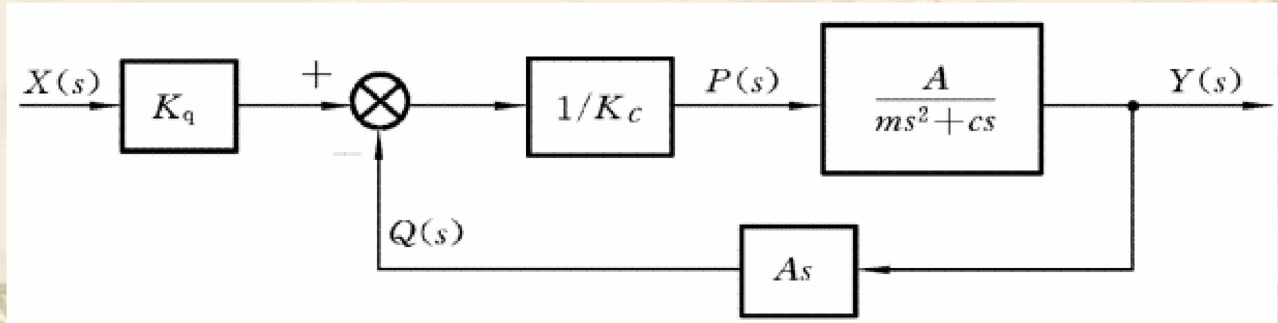
3.局部传递函数框图：







4. 系统传递函数框图：



例2：

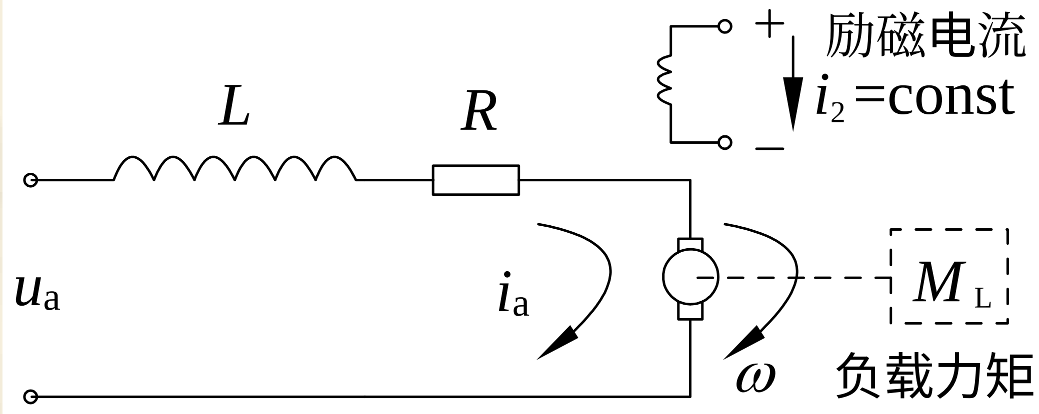
1. 列写微分方程：

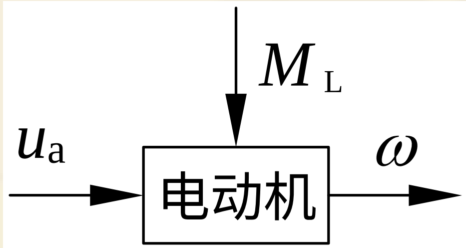
$$L\frac{di_a}{dt}+i_aR+e_d=u_a$$

$$e_d=k_d\omega$$

$$J\frac{d\omega}{dt}=M-M_L$$

$$M=k_mi_a$$





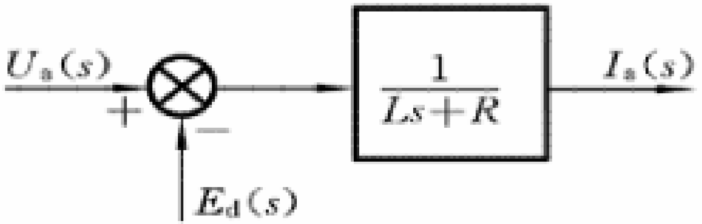
2.Laplace变换：

$$(Ls+R)I_a+E_d=U_a\ ,\ \ M=k_mI_a$$

$$Js\Omega=M-M_L\ \ ,\ E_d=k_d\Omega$$

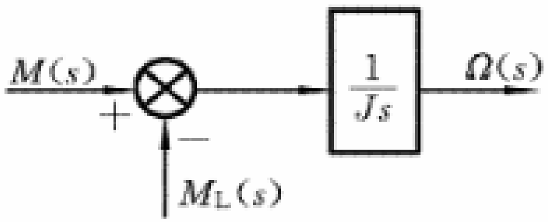
3.局部传递函数框图：

$$(Ls+R)I_a + E_d = U_a$$

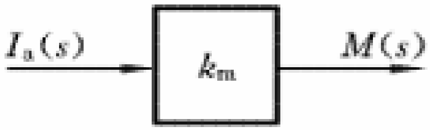


$$E_d = k_d\Omega$$

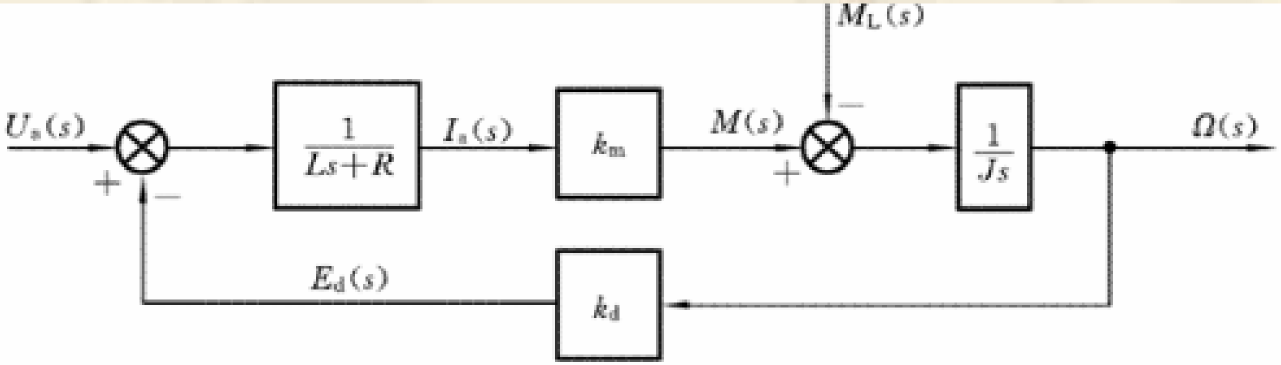
$$Js\Omega = M - M_L$$



$$M = k_m I_a$$



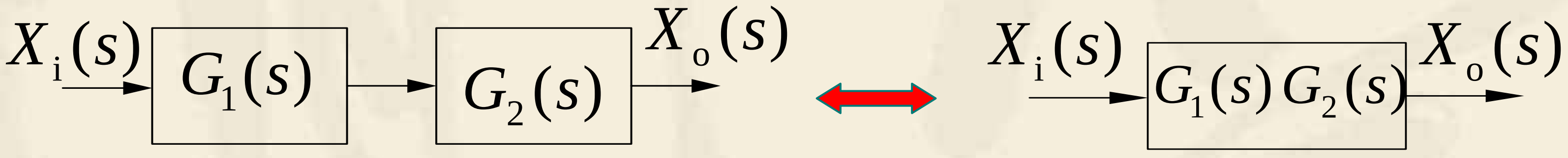
4. 系统传递函数框图：



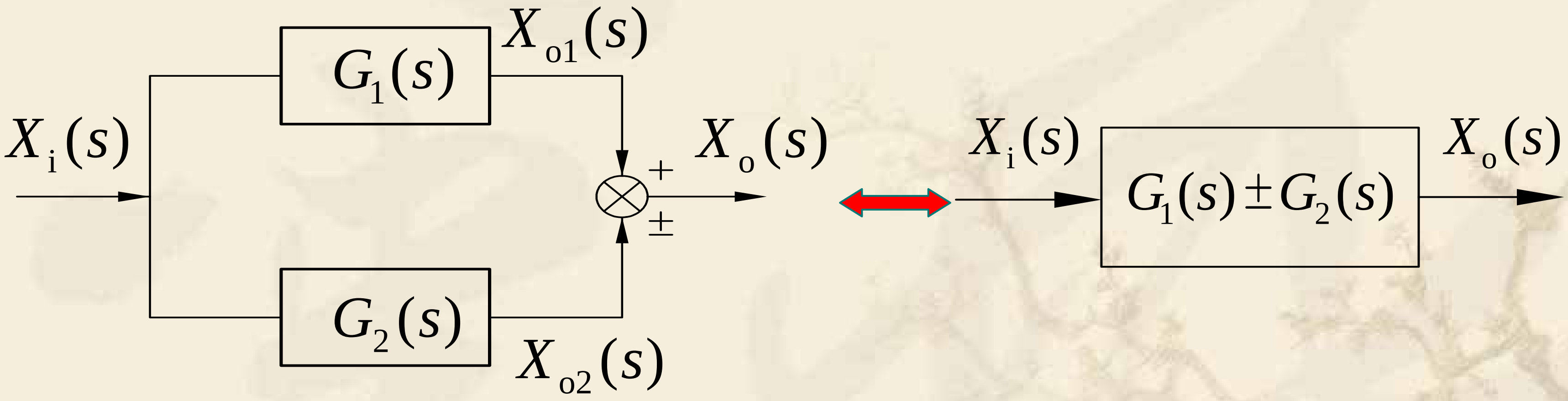
七、传递函数方框图的等效简化

变换前后输入输出间的数学关系保持不变

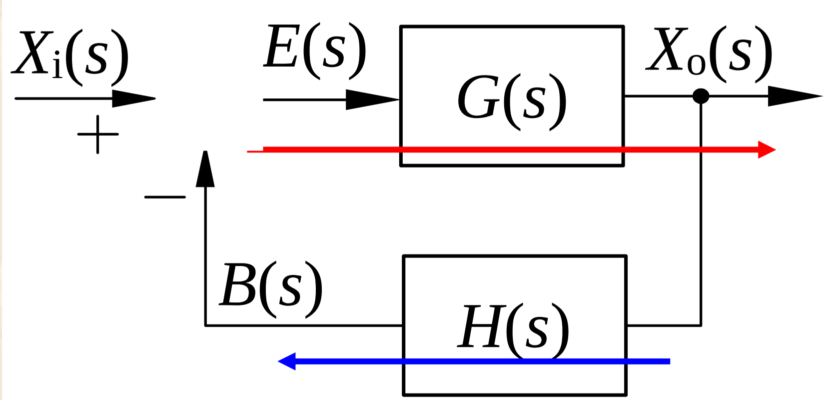
1.串联环节的等效规则：



2.并联环节的等效规则：



3. 反馈连接及其等效规则



前向通道传递函数

$$G(s)=X_o(s)/E(s)$$

反馈通道传递函数

$$H(s)=B(s)/X_o(s)$$

以反馈量$B(s)$为输出的开环传递函数

$$G_k(s)=G(s)H(s)=B(s)/E(s)$$

反馈回路闭合后

$$E(s)=X_i(s)-B(s)=X_i(s)-X_o(s)H(s)$$

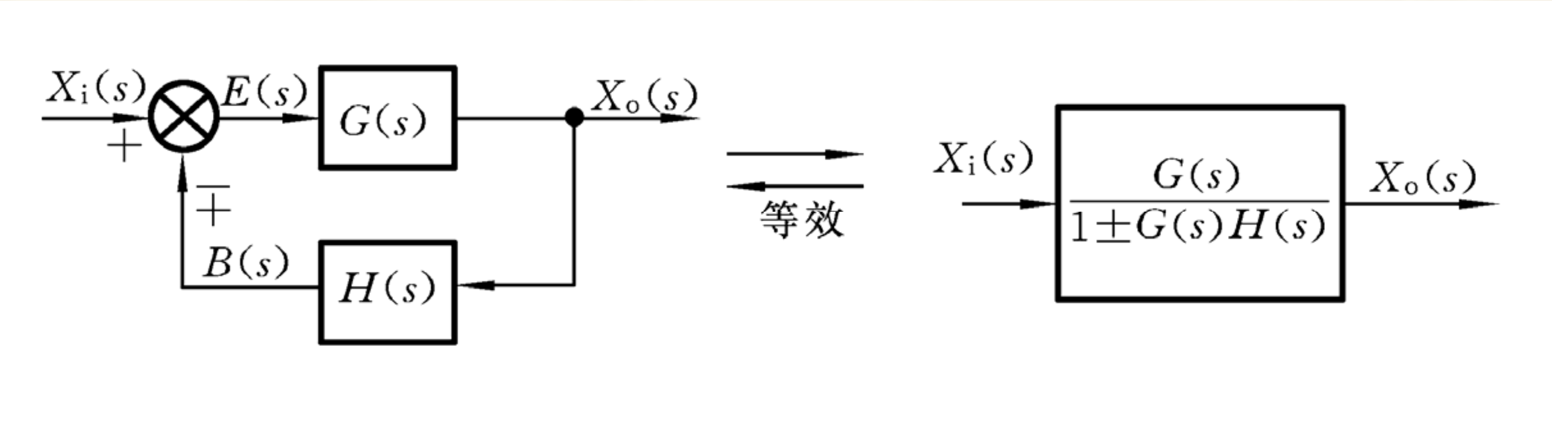
$$X_o(s)=G(s)E(s)=G(s)[X_i(s)-X_o(s)H(s)]$$

$$X_o(s)=G(s)X_i(s)-G(s)X_o(s)H(s)$$

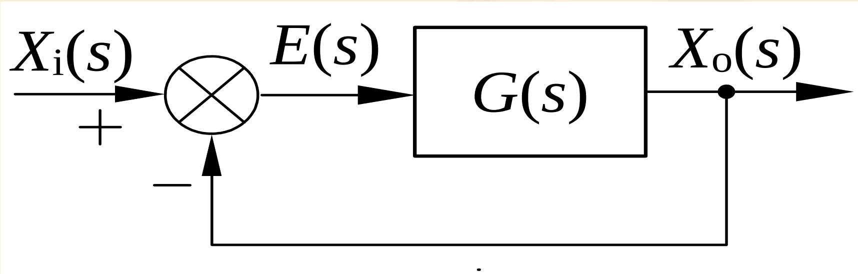
闭环传递函数

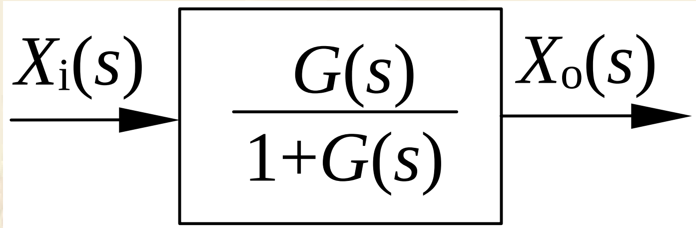
$$G_B(s)=\frac{X_o(s)}{X_i(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

3. 反馈连接及其等效规则



特别地，若***H*(*s*)=1**，则为单位反馈

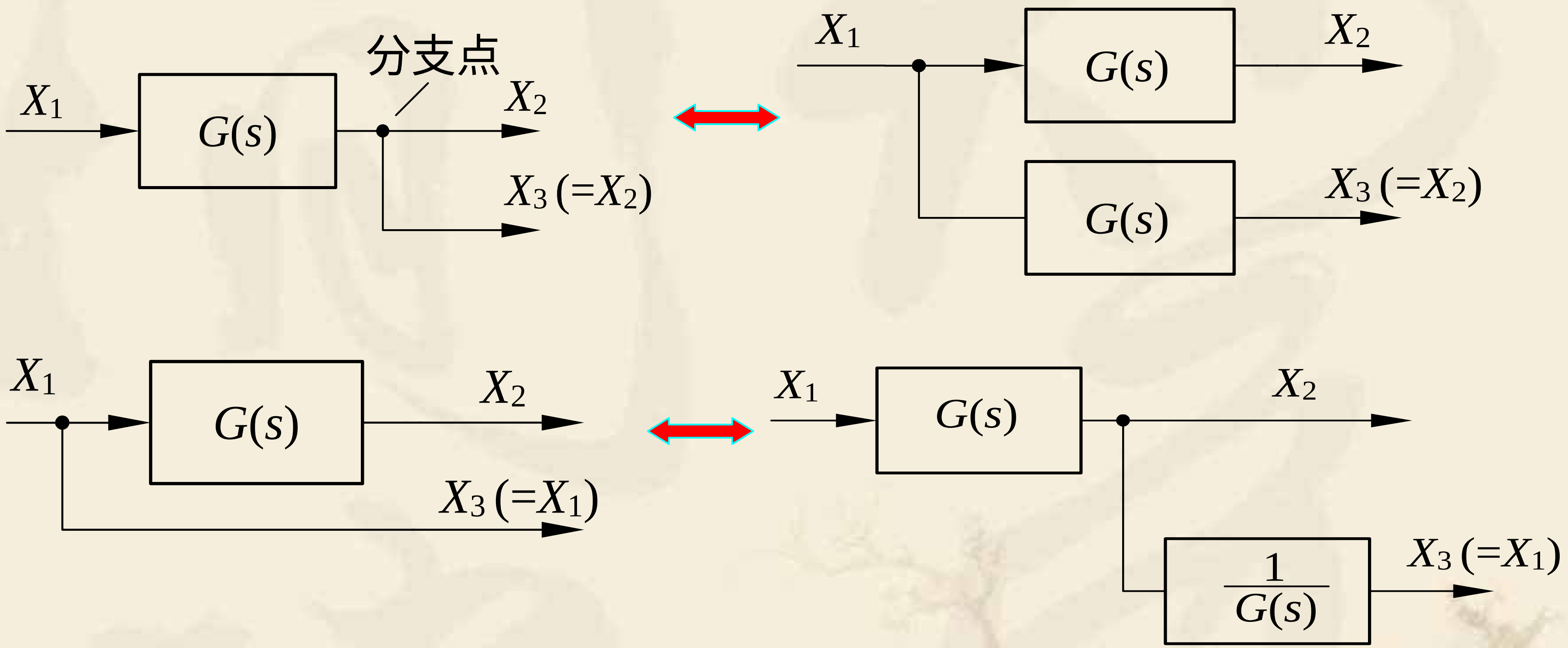




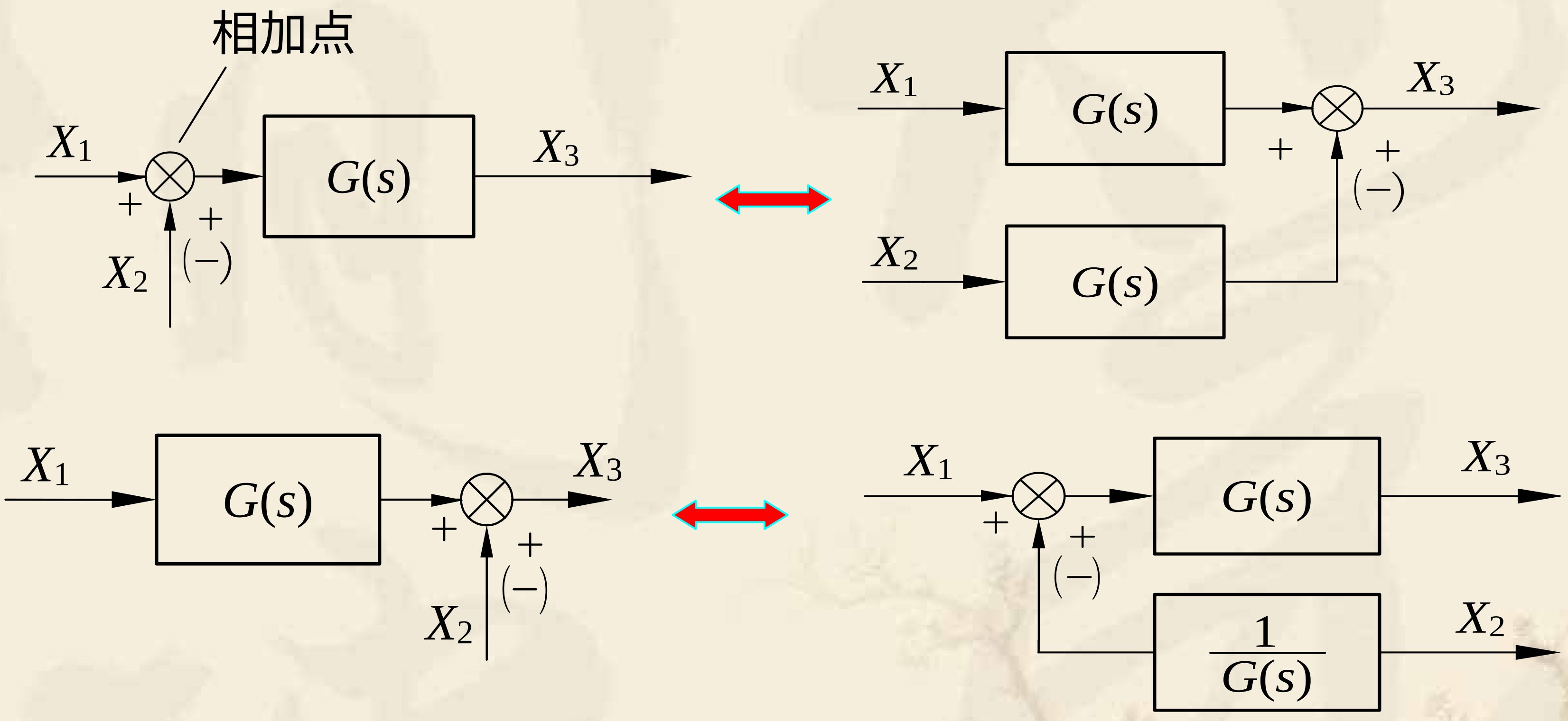
注意：

前向通道传递函数、反馈通道传递函数、开环传递函数均为局部传递函数；闭环传递函数才是系统传递函数

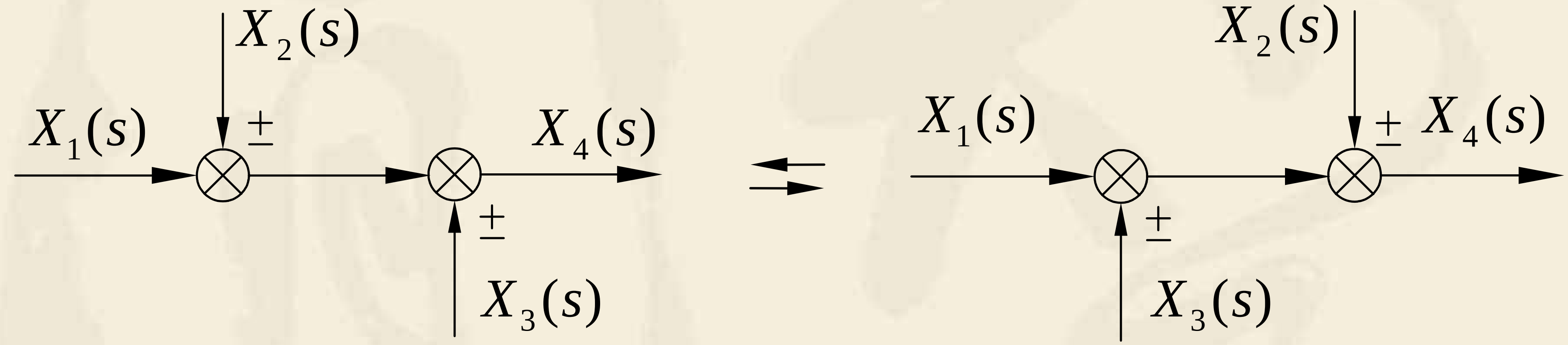
4. 分支点的移动规则



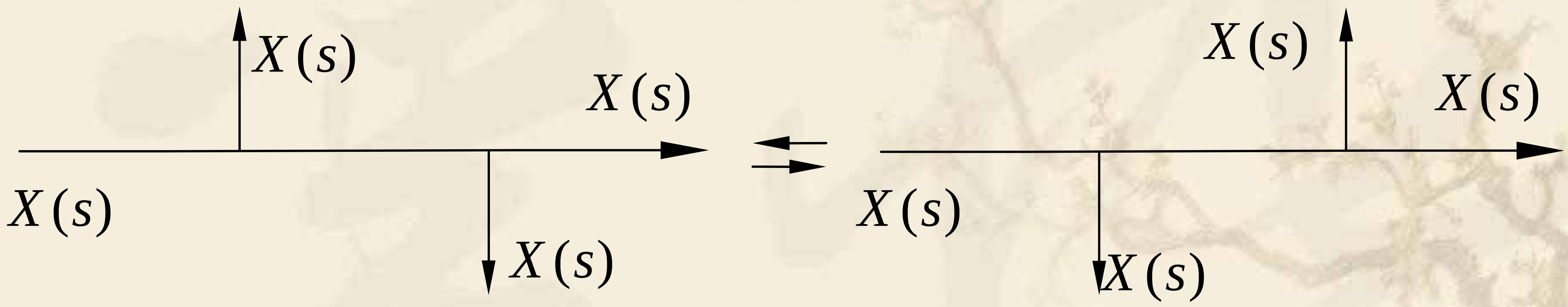
5. 相加点的移动规则



6.相邻相加点的移动规则：

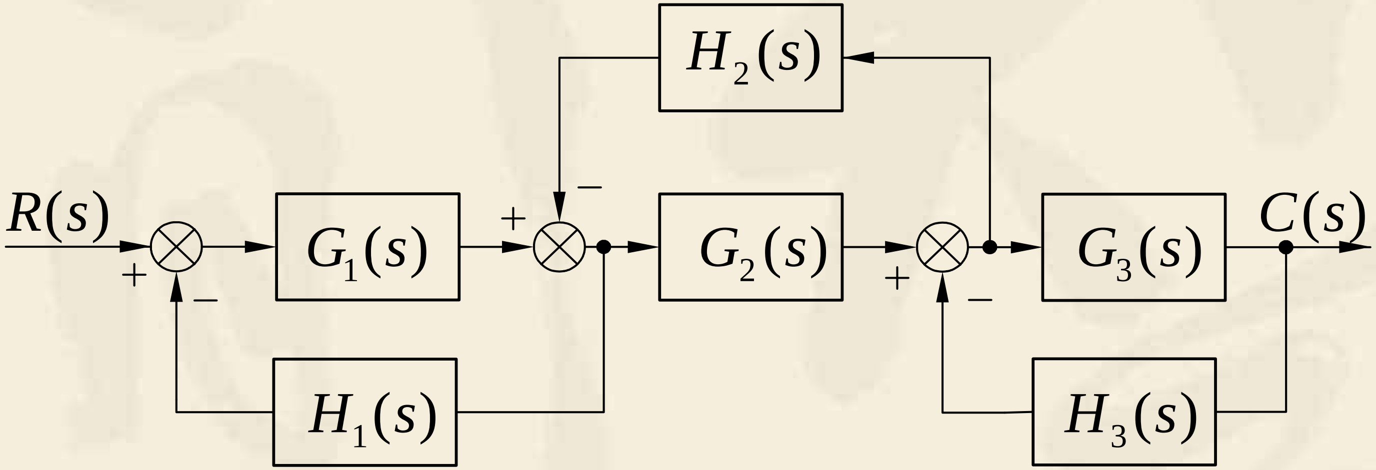


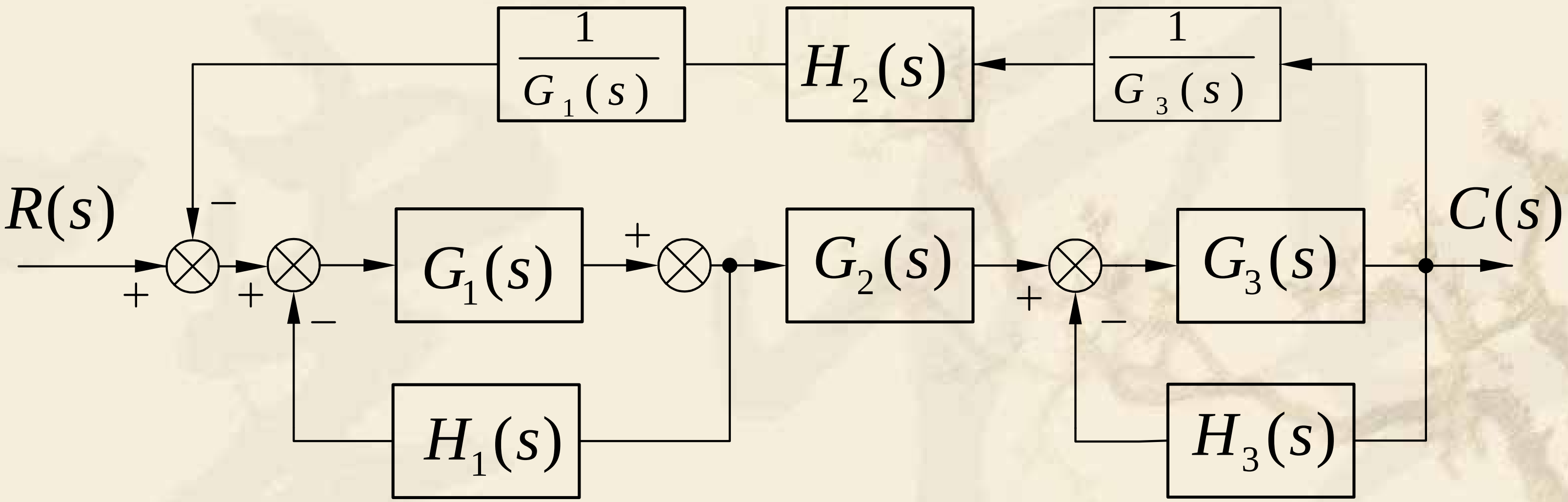
7.相邻分支点的移动规则：

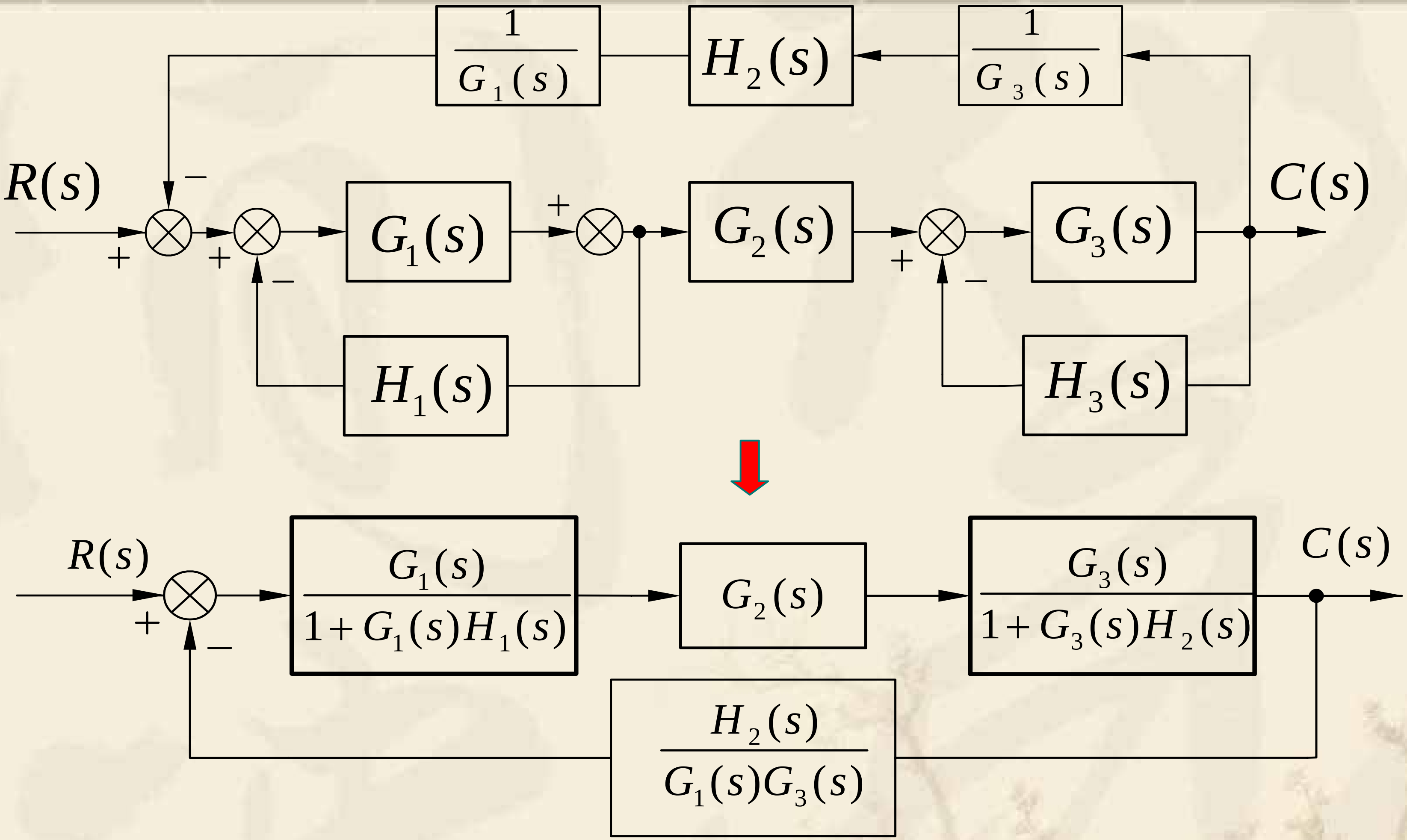


简化步骤：消除交叉回路，对嵌套回路，从里到外逐步化简

例1：

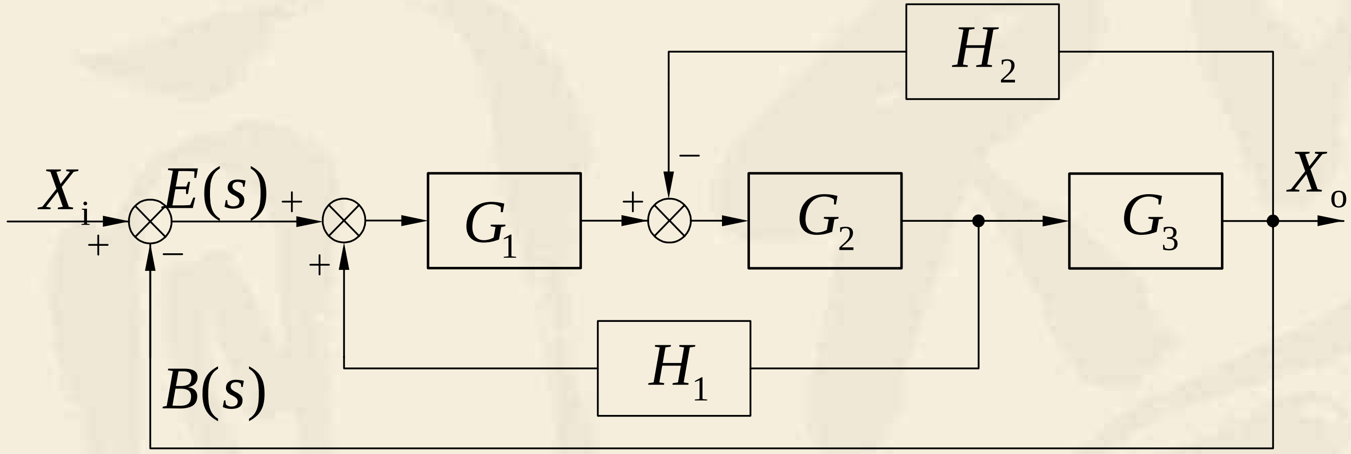


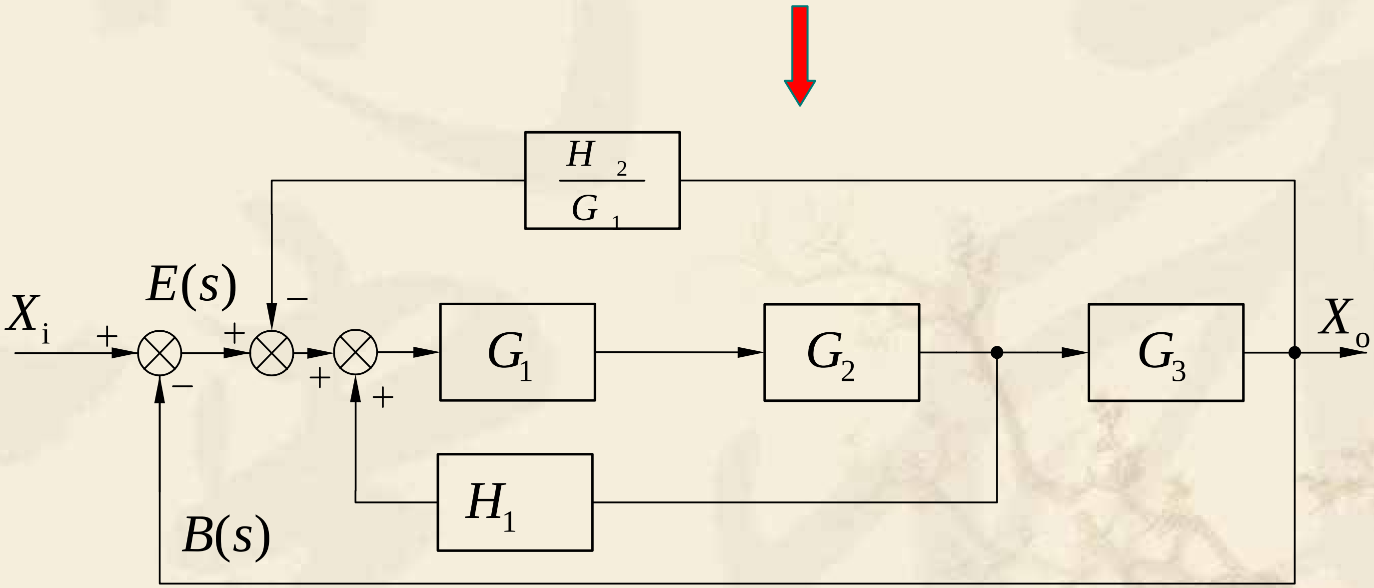


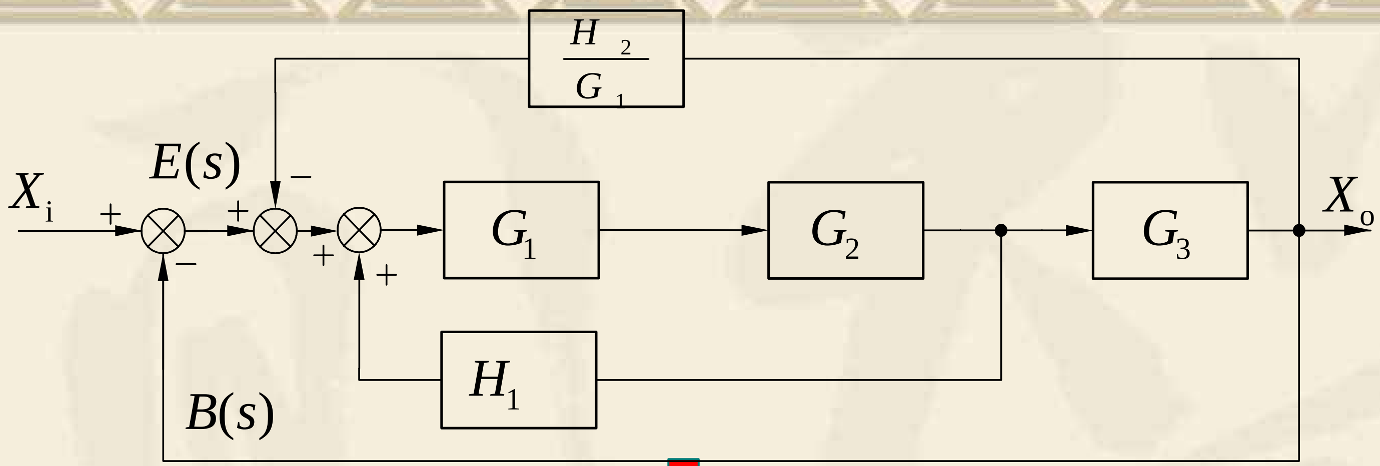


$$G(s)=\frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)}{1+G_1(s)H_1(s)+G_2(s)H_2(s)+G_3(s)H_3(s)+G_1(s)H_1(s)G_3(s)H_3(s)}$$

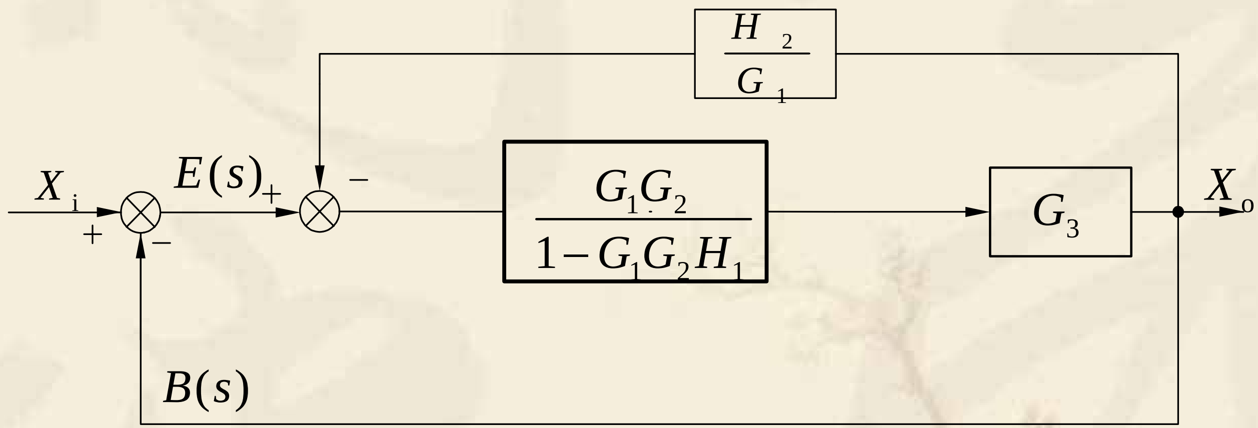
例2：



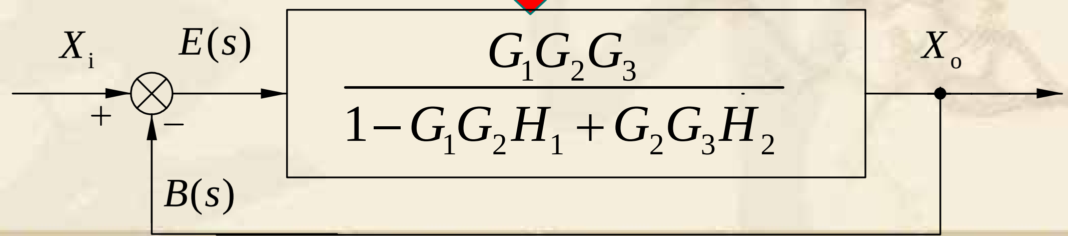




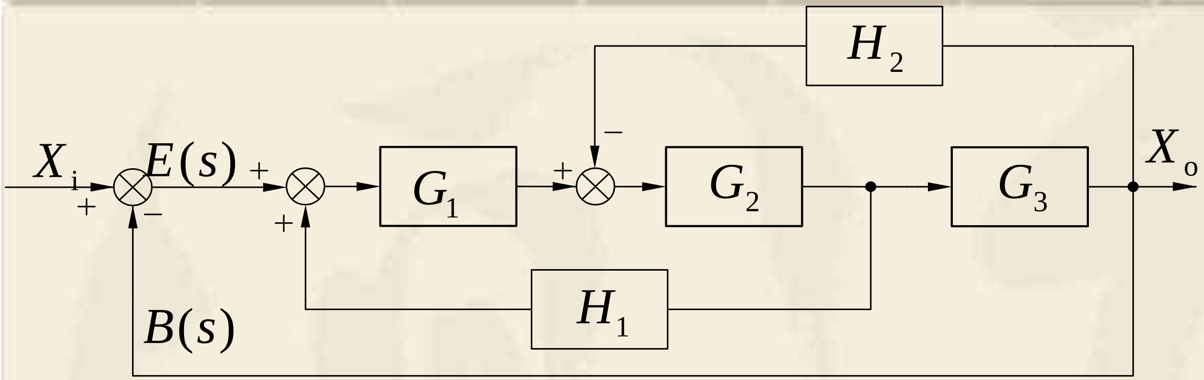
H2/G1
E(s)
Xi
+
−
+
+
+
G1
G2
G3
Xo
H1
B(s)

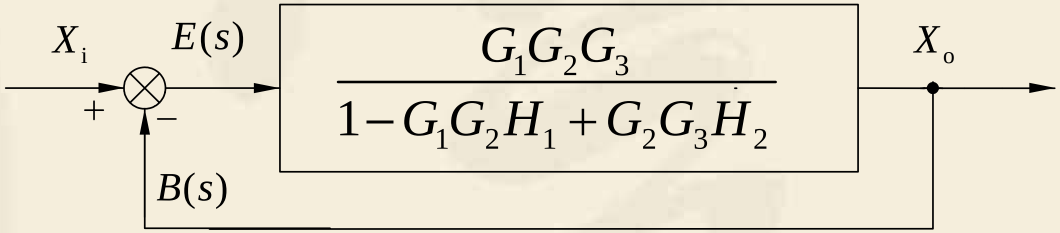


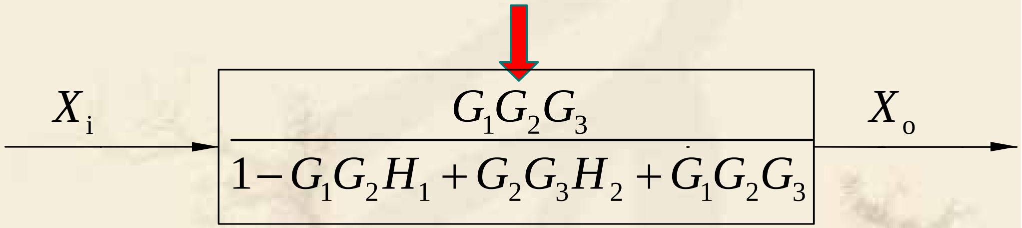
H2/G1
Xi
E(s)
+
−
+
−
G1G2/(1−G1G2H1)
G3
Xo
B(s)



Xi
E(s)
G1G2G3/(1−G1G2H1+G2G3H2)
Xo
+
−
B(s)





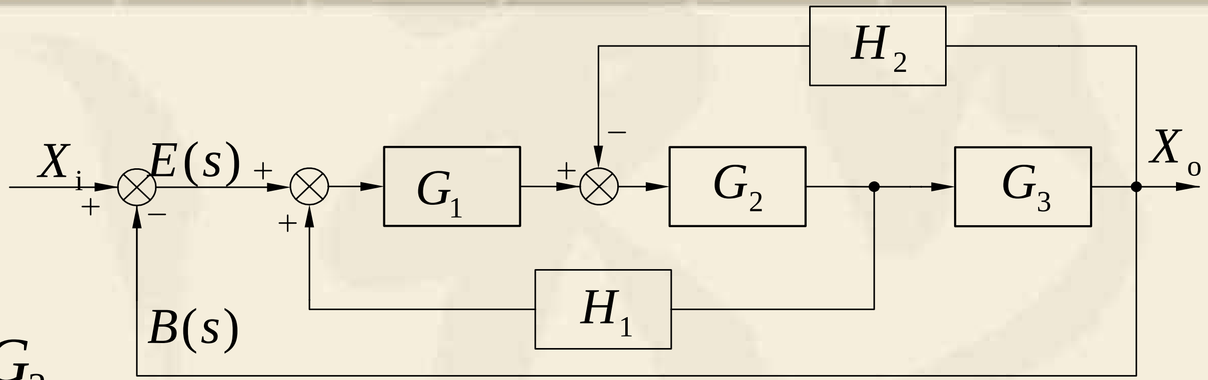


一条前向通道： $G_1G_2G_3$

反馈回路

- L1: G_1、G_2、G_3 相加点处“ – ”
- L2: G_1、G_2、H_1 相加点处“ + ”
- L3: G_2、G_3、H_2 相加点处“ – ”

各反馈回路有公共传递函数方框 G_2



一条前向通道：$G_1G_2G_3$

反馈回路

- L1: G_1、G_2、G_3 相加点处“ – ”
- L2: G_1、G_2、H_1 相加点处“ +
- L3: G_2、G_3、H_2 相加点处“ – ”

各反馈回路有公共传递函数方框 G_2

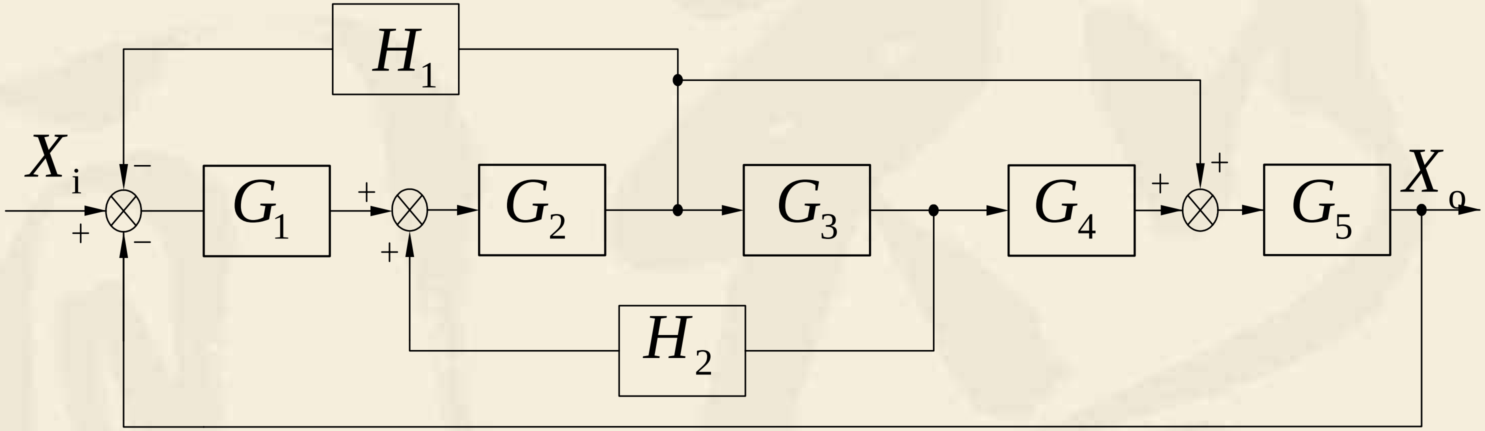
一般地，当一个系统传递函数方框图满足如下两个条件：

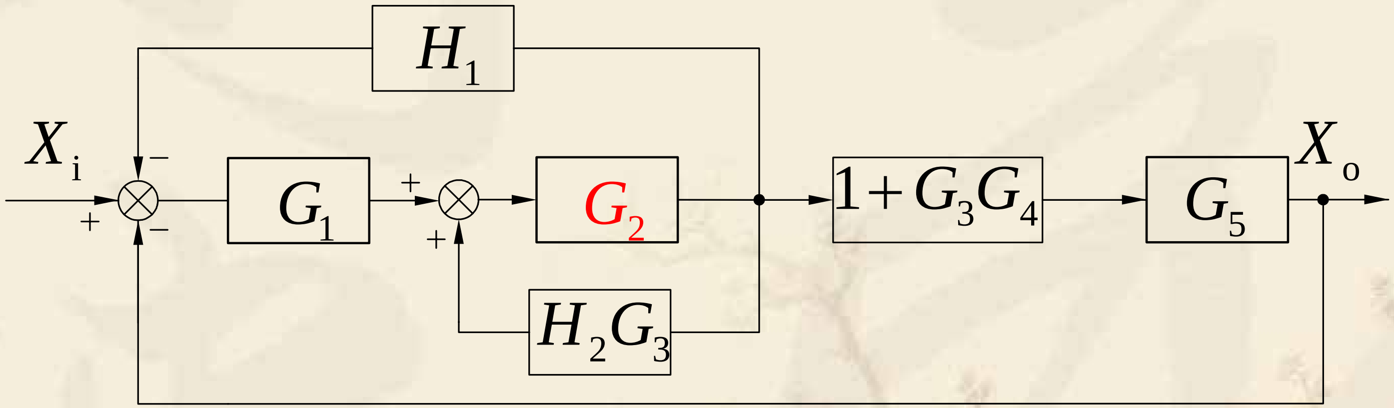
1)只有一条前向通道；2)各局部反馈回路中包含公共传递函数方框

则：系统传递函数可简化成

$$G_B(s)=\frac{\text{前向通道的传递函数之积}}{1+\sum[\text{每一反馈回路开环传递函数}]}$$

例3：





$$G_B(s)=\frac{G_1G_2G_5(1+G_3G_4)}{1+G_1G_2H_1+(1+G_3G_4)\quad G_1G_2G_5-G_2G_3H_2}$$

八、考虑扰动的反馈控制系统的传递函数

只考虑给定输入时：

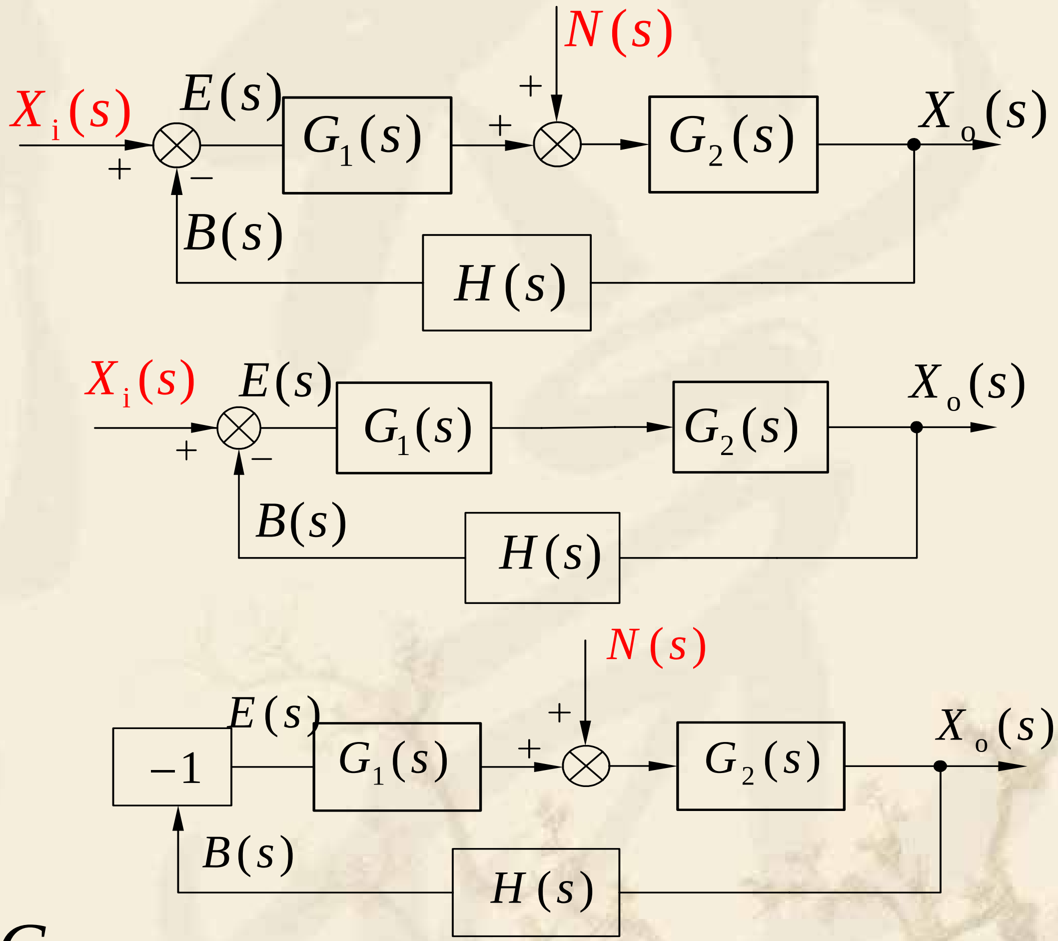
$$G_{xB}=\frac{G_1G_2}{1+G_1G_2H}$$

只考虑干扰输入时：

$$G_{NB}=\frac{G_2}{1+G_1G_2H}$$

线性系统总的输出量：

$$X_o=\frac{G_1G_2}{1+G_1G_2H}X_i+\frac{G_2}{1+G_1G_2H}N$$



系统总的输出量：

$$X_o = \frac{G_1G_2}{1+G_1G_2H}X_i + \frac{G_2}{1+G_1G_2H}N$$

若$|G_1G_2H| >> 1$

$$X_o \approx \frac{1}{H}X_i + \frac{1}{G_1H}N$$

若$|G_1G_2H| >> 1$，且$|G_1H| \gg 1$

$$X_o \approx \frac{1}{H}X_i + \delta N$$

极小值

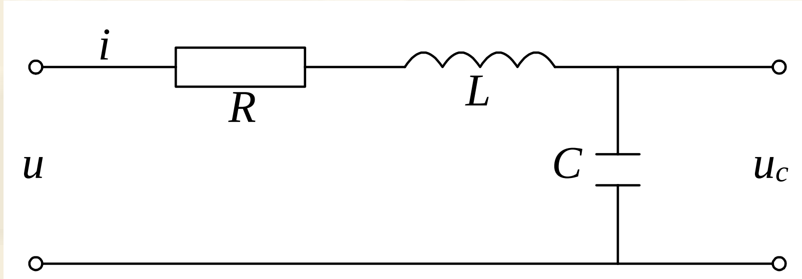
结论：

1. 闭环系统可抑制干扰的幅度。

2. 闭环系统输入、输出取法不同，则传函不同，但传函分母不变——反映系统本身固有特性；而开环系统却不然。

九、状态空间模型

例1 已知RLC电路，确定电路的状态变量和状态方程



解：微分方程 模型

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+Ri+\frac{1}{C}\int i\mathrm{d}t=u$$

选i和u_c为状态变量

$$\begin{cases} x_1=i=C\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} \\ x_2=u_c \end{cases}$$

$$L\dot{x}_1+Rx_1+x_2=u$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1&=-\frac{R}{L}x_1-\frac{1}{L}x_2+\frac{u}{L} \\ \dot{x}_2&=\frac{1}{C}x_1 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{R}{L} & -\dfrac{1}{L}\\ -\dfrac{1}{C} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{1}{L}\\ 0\end{bmatrix}u$$

状态方程，一阶导形式

状态方程，矩阵形式

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\frac{R}{L}x_1 - \frac{1}{L}x_2 + \frac{u}{L} \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{C}x_1\end{aligned}\right\} \qquad \begin{bmatrix}\dot{x}_1 \\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\frac{1}{L} \\ 0\end{bmatrix}u$$

状态方程，一阶导形式　　　　状态方程，矩阵形式

$\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{AX} + \boldsymbol{B}u$　　状态向量 $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix}$

状态空间：由x_1轴、 x_2轴…… x_n轴组成的n维空间。

系统任一时刻状态可用状态空间中的一点表示。

输出方程

$y = x_2 \xrightarrow{\text{矩阵形式}} y = [0 \quad 1]\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix} \longrightarrow \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{X}$

状态向量$\boldsymbol{Y}$

系统矩阵$n \times n$

控制矩阵$n \times 1$

n维状态向量X

输入量 u

$$\dot{X} = AX + Bu$$

$$Y = C^T X + Du$$

输出向量 Y

输出矩阵$1 \times n$

传递矩阵1×1

描述系统的数学模型

- 微分方程
- 传递函数
- 状态空间

必有内在的一致性

必可相互转换

$$G(s)=\frac{\boldsymbol{Y}(s)}{\boldsymbol{U}(s)}=\boldsymbol{C}^{T}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}$$

单位矩阵