机械工程控制基础

熊良才、吴波、陈良才

华中科技大学

第三章 时间响应分析

一、时间响应及其组成

1.时间响应

时间响应：系统的响应（输出）在时域上的表现形式，即系统微分方程在一定初始条件下的解。

系统在外界（输入或扰动）的作用下，从一定的初始状态出发，所经历的由其固有特性所决定的动态历程。亦即系统微分方程在一定初始条件下的解。

研究时间响应的目的在于分析系统的稳定性、响应的快速性与响应的准确性等系统的动态性能。

2.时间响应的组成

求 $y''+7y'+12y=6r'+12r$ (其中， $r(t), y(t)$分别为系统的输入和输出)在$r(0_-), y(0_-), y'(0_-)$时的解。

解：在初始条件下，对 微分方程两边分别进行 *Laplace*变化得：

$$[s^2Y(s)-sy(0_-)-y'(0_-)]+7[sY(s)-y(0_-)]+12Y(s)=6[sR(s)-r(0_-)]+12R(s)$$

$$Y(s)=\frac{6(s+2)}{s^2+7s+12}R(s)+\frac{(s+7)y(0_-)+y'(0_-)-6r(0_-)}{s^2+7s+12}$$

$$y(t)=L^{-1}[Y(s)]=L^{-1}[\frac{6(s+2)}{s^2+7s+12}R(s)]+L^{-1}[\frac{(s+7)y(0_-)+y'(0_-)-6r(0_-)}{s^2+7s+12}]$$

$$=L^{-1}[G(s)R(s)]+L^{-1}[\frac{(s+7)y(0_-)+y'(0_-)-6r(0_-)}{s^2+7s+12}]$$

零状态响应（零初始状态下，完全由输入所引起）。

零输入响应（系统无输入，完全由初始状态所决定）。

$$y(t)=L^{-1}[\frac{6(s+2)}{s^2+7s+12}R(s)]+L^{-1}[\frac{(s+7)y(0_-)+y'(0_-)-6r(0_-)}{s^2+7s+12}]$$

若$r(t)=u(t), r(0_-)=0, y(0_-)=1, y'(0_-)=1$,此时，$R(s)=\frac{1}{s}$

$$y(t)=L^{-1}[\frac{6(s+2)}{s^2+7s+12}.\frac{1}{s}]+L^{-1}[\frac{(s+7)+1}{s^2+7s+12}]$$

$$=L^{-1}[\frac{1}{s}+\frac{2}{s+3}+\frac{-3}{s+4}]+L^{-1}[\frac{5}{s+3}+\frac{-4}{s+4}]$$

$$=\underbrace{\boxed{1+2e^{-3t}-3e^{-4t}}}_{\text{零状态响应}}+\underbrace{\boxed{5e^{-3t}-4e^{-4t}}}_{\text{零输入响应}}=\underbrace{\boxed{u(t)}}_{\text{强迫响应}}+\underbrace{\boxed{7e^{-3t}-7e^{-4t}}}_{\text{自由响应}}$$

-3，-4是系统传递函数的极点（特征根）

零状态响应项：$B(t)+\sum_{i=1}^{2}A_{1i}e^{s_it}$　　零输入响应项：$\sum_{i=1}^{2}A_{2i}e^{s_it}$

$$y(t)=B(t)+\sum_{i=1}^{2}A_{1i}e^{s_it}+\sum_{i=1}^{2}A_{2i}e^{s_it}$$

对于一个n阶系统，其微分方程为

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_m x^{(m)} + b_{m-1} x^{(m-1)} + \dots + b_1 \dot{x} + b_0 x$$

零状态响应项：$B(t) + \sum_{i=1}^{n} A_{1i} e^{s_i t}$　　零输入响应项：$\sum_{i=1}^{n} A_{2i} e^{s_i t}$

$$y(t) = B(t) + \sum_{i=1}^{n} A_{1i} e^{s_i t} + \sum_{i=1}^{n} A_{2i} e^{s_i t}$$

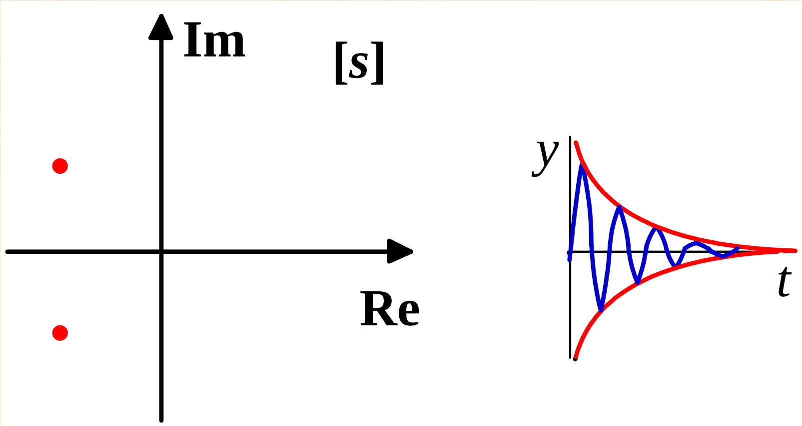
若无特殊说明，通常所述时间响应仅指零状态响应

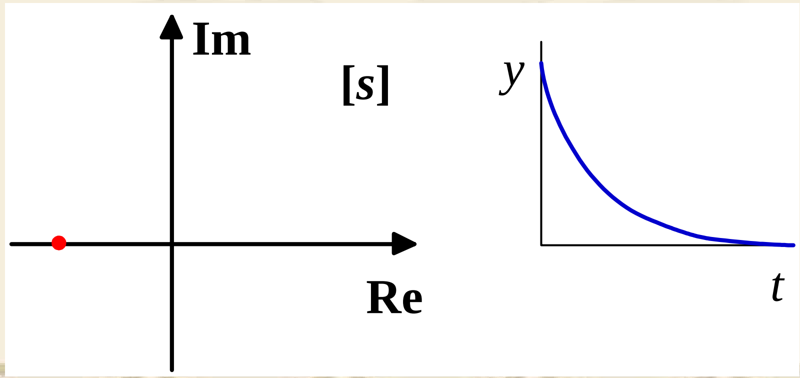
3. 系统特征根与自由响应的关系

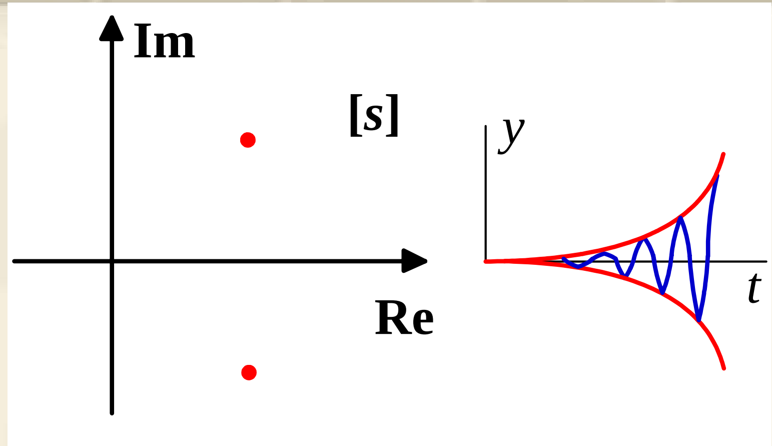
$$y(t)=\sum_{i=1}^{n}A_{1i}e^{s_i t}+\sum_{i=1}^{n}A_{2i}e^{s_i t}$$

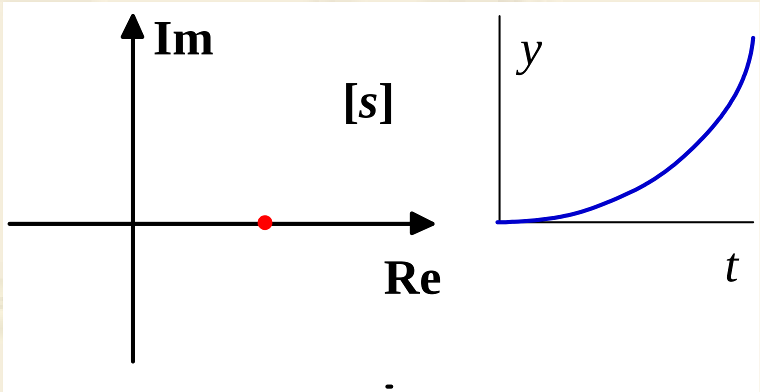
$$e^{s_i t}=e^{\mathrm{Re}[s_i]t}e^{jI_m[s_i]t}$$

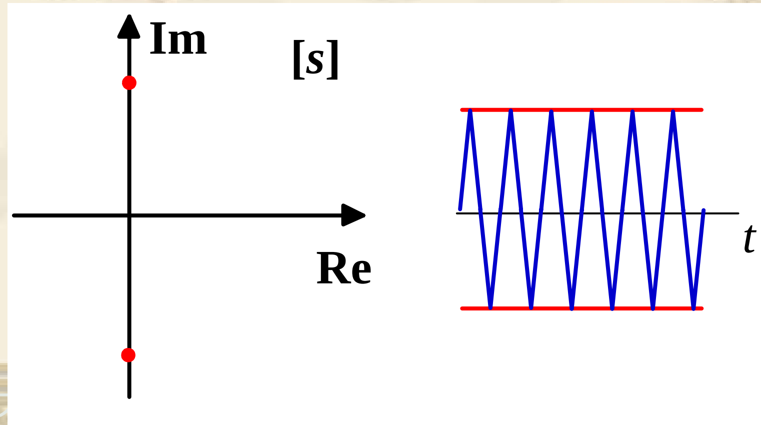
$$e^{s_i t}+e^{s_i^{*}t}=2\cos(I_m[s_i]t)e^{\mathrm{Re}[s_i]t}$$

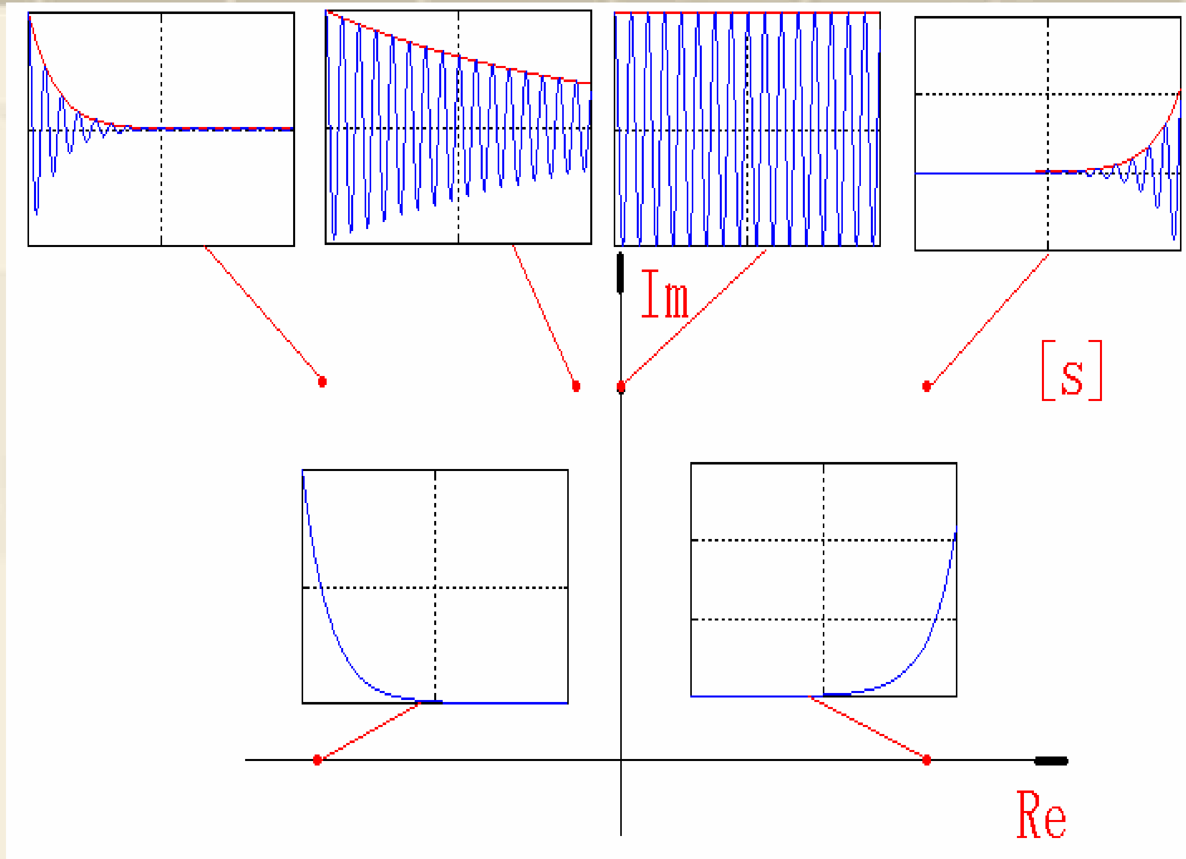






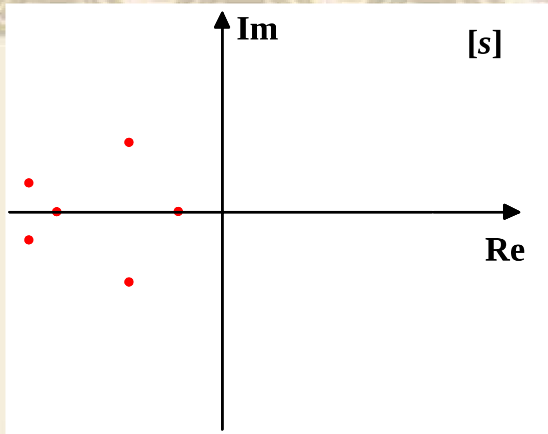






特征根实部$R_e[s_i]$的正负决定自由响应的收敛性.$R_e[s_i]<0$,自由响应收敛，绝对值越大收敛越快；$R_e[s_i]>0$,自由响应发散，绝对值越大发散越快。

特征根实部$I_m[s_i]$的大小决定自由响应的振荡频率

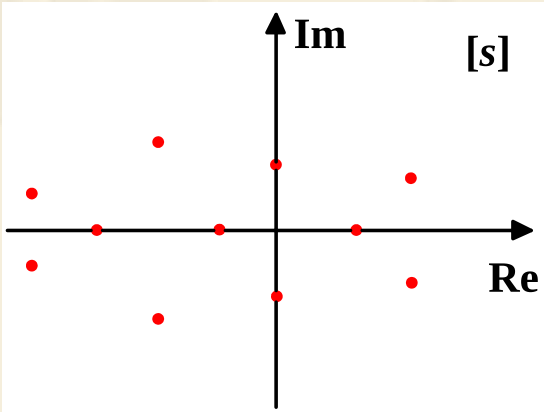


若所有特征根具有负实部

系统自由响应收敛　　系统稳定

自由响应称为瞬态响应

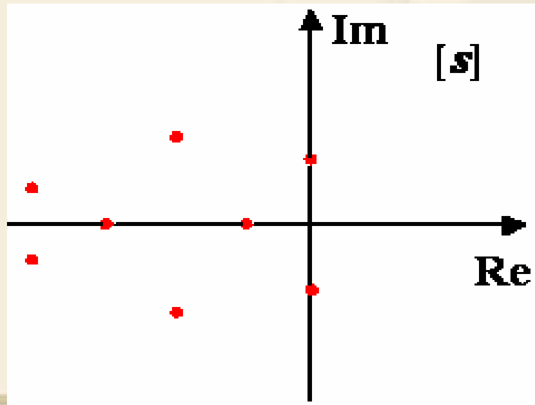
强迫响应称为稳态响应



若存在特征根的实部大于零

系统自由响应发散

系统不稳定



若有一对特征根的实部为零

其余特征根均小于零

系统自由响应最终为等幅振荡

系统临界稳定

结论：

1.若所有特征根实部均为负值（所有极点均位于[s]平面左半平面），系统自由响应收敛。系统稳定。

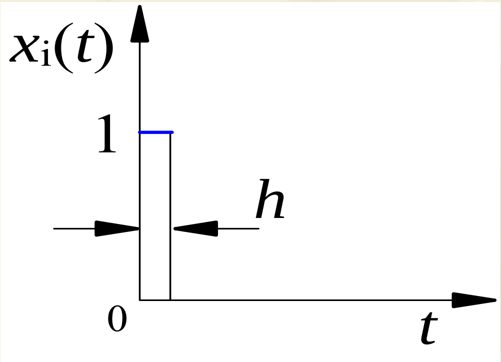
2.若存在特征根实部负值（[s]平面右半平面存在极点），系统自由响应发散。系统不稳定。

3.若存在一对特征根实部为零，而其余特征根实部均为负值（[s]平面虚轴上存在一对极点，其余极点位于左半平面），系统自由最终为等幅振荡。系统临界稳定。

系统稳定性判据

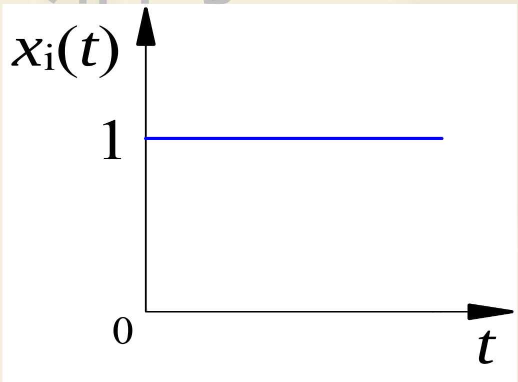
4.特征根实部$I_m[s_i]$的大小决定自由响应的振荡频率

二、典型的输入信号



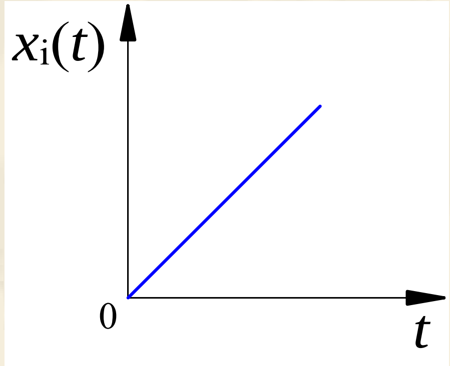
$$x_i(t)=\delta(t)=\begin{cases}\infty & (t=0)\\ 0 & (t\neq 0)\end{cases}$$

$$X_i(s)=1$$



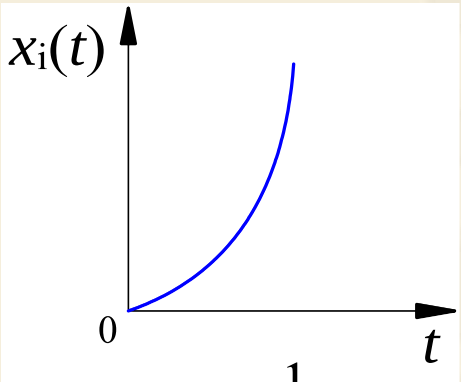
$$x_i(t)=u(t)=1$$

$$X_i(s)=1/s$$



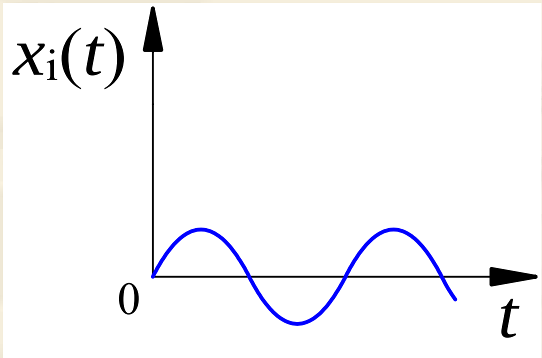
$$x_i(t)=r(t)=t$$

$$X_i(s)=1/s^2$$



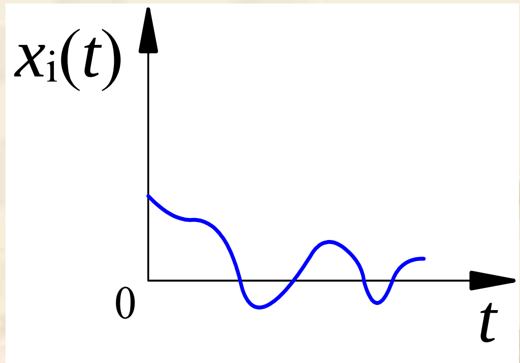
$$x_i(t)=\frac{1}{2}t^2$$

$$X_i(s)=1/s^3$$



$$x_i(t)=\sin\omega t$$

$$X_i(s)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$



三、一阶系统的时间响应

微分方程 $$T\frac{\mathrm{d}x_{\mathrm{o}}(t)}{\mathrm{d}t}+x_{\mathrm{o}}(t)=x_{\mathrm{i}}(t)$$

T为时间常数

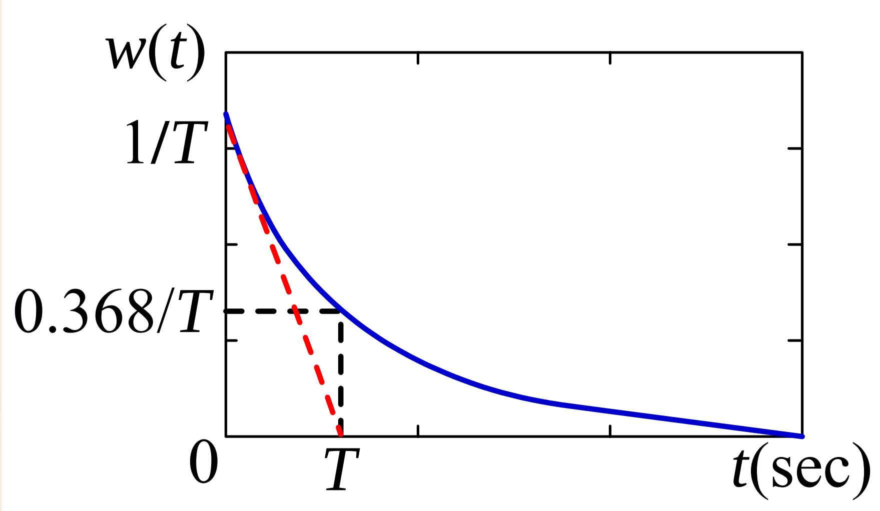
传递函数 $$G(s)=\frac{1}{Ts+1}$$

1.一阶系统单位脉冲响应

$$x_{\mathrm{i}}(t)=\delta(t)$$

$$X_{\mathrm{i}}(s)=1$$

$$X_{\mathrm{o}}(s)=G(s)X_{\mathrm{i}}(s)=\frac{1}{Ts+1}$$



$$w(t)=L^{-1}[X_{\mathrm{o}}(s)]=L^{-1}[\frac{1}{Ts+1}]=\frac{1}{T}\mathrm{e}^{-t/T}$$

单位脉冲响应函数与传递函数为*Laplace*变换对

瞬态响应 $\frac{1}{T}\mathrm{e}^{-t/T}$ 稳态响应 0

三、一阶系统的时间响应

2. 一阶系统单位阶跃响应

$$x_{\mathrm{i}}(t)=u(t)=1$$

$$X_{\mathrm{i}}(s)=1/s$$

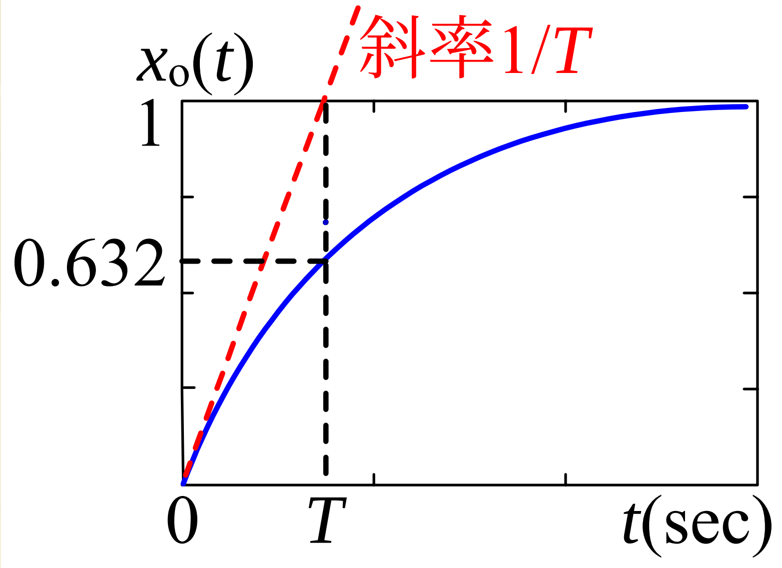
$$X_{\mathrm{o}}(s)=G(s)X_{\mathrm{i}}(s)=\frac{1}{Ts+1}\cdot\frac{1}{s}$$

$$x_{\mathrm{o}}(t)=L^{-1}[X_{\mathrm{o}}(s)]=L^{-1}[\frac{1}{Ts+1}\cdot\frac{1}{s}]$$

$$=1-\mathrm{e}^{-t/T}$$

瞬态响应：$-\mathrm{e}^{-t/T}$

稳态响应：　1



3. 一阶系统单位斜坡响应

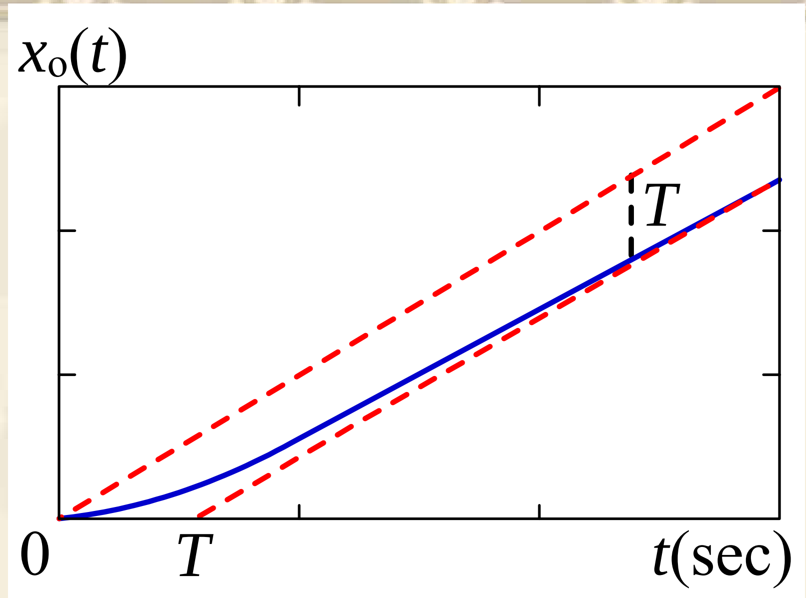
$$x_i(t) = r(t) = t$$

$$X_i(s) = 1/s^2$$

$$X_o(s) = G(s)X_i(s) = G(s)\cdot\frac{1}{s^2}$$

$$x_o(t) = L^{-1}[X_o(s)] = L^{-1}[G(s)\cdot\frac{1}{s^2}]$$

$$= L^{-1}[\frac{1}{Ts+1}\cdot\frac{1}{s^2}] \quad = L^{-1}[\frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T}{s+\frac{1}{T}}]$$



$$x_o(t) = t - T + Te^{-t/T} \quad (t \geq 0)$$

瞬态响应：$Te^{-t/T}$

稳态响应：$t - T$

输入	输出
$\delta(t)$	$\frac{1}{T}e^{-t/T}$
1	$1-e^{-t/T}$
t	$t-T+Te^{-t/T}$

结论1：

如果输入函数等于某个函数的导数，则该输入函数所引起的输出等于这个函数所引起的输出的导函数。

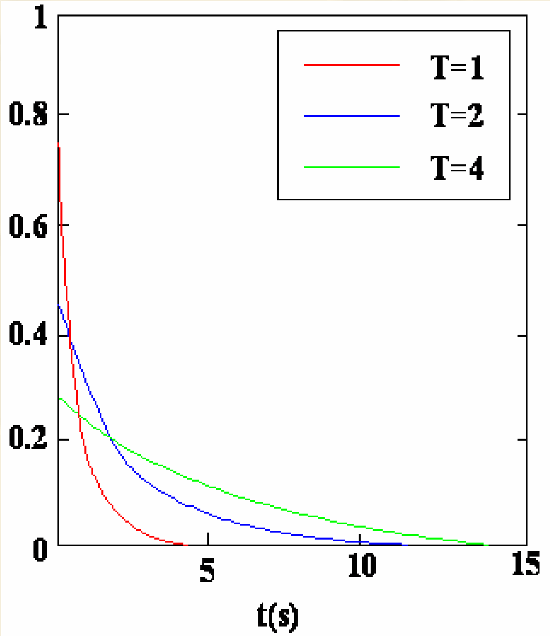
例：已知 $x_i(t)=t,\ x_{or}(t)=t-0.85(1-e^{-\frac{t}{0.85}})$，求其脉冲响应函数。

解：$\delta(t)=t''$;

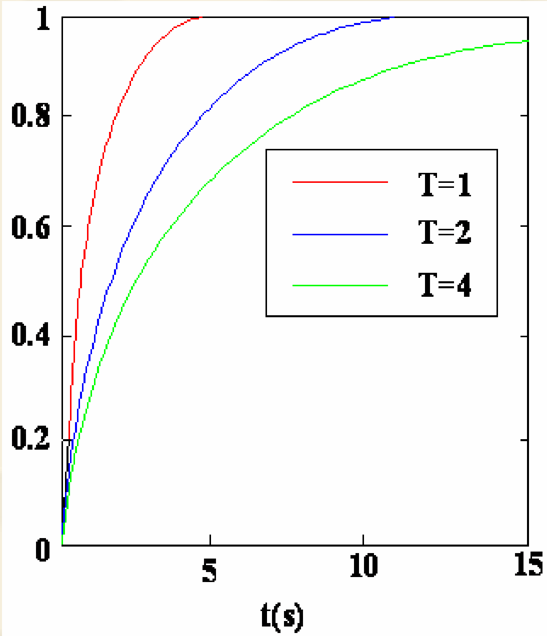
$$w(t)=x_{or}''(t)=[t-0.85(1-e^{-\frac{t}{0.85}})]''=(1-e^{-\frac{t}{0.85}})'$$

$$=\frac{1}{0.85}.e^{-\frac{t}{0.85}}$$

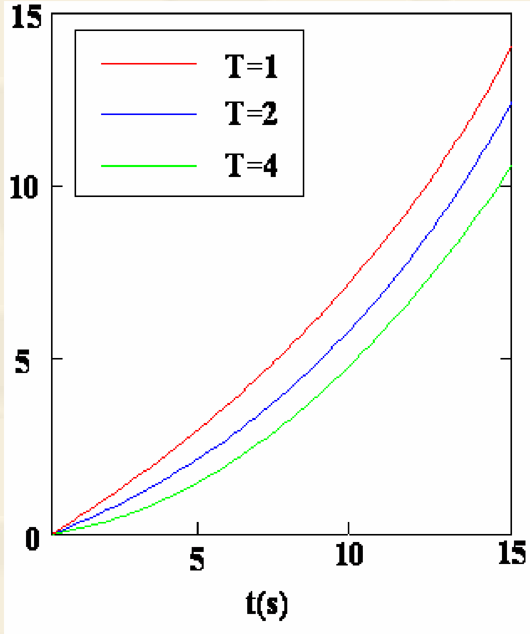
4.时间常数对时间响应的影响



单位脉冲响应



单位阶跃响应



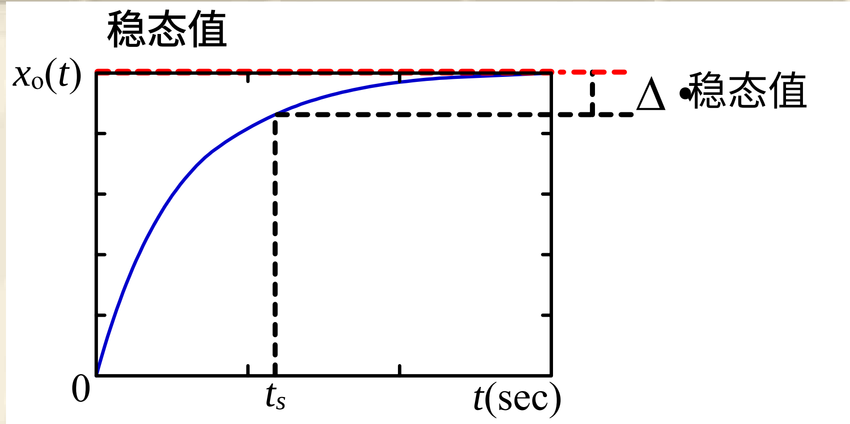
单位斜坡响应

结论1：

时间常数T 越小，系统惯性越小，系统响应越快；

时间常数T 越大，系统惯性越大，系统响应越慢。

5.一阶系统性能指标——调整时间t_s



单位阶跃输入作用下，其响应与稳态值相差等于容许误差所需要的时间。

设相对容许误差 Δ

由$x_{ou}(t)=1-e^{-t/T}$　　$x_{ou}(t_s)=1-e^{-t_s/T}$

$1-(1-e^{-t_s/T})=\Delta.1$　　有$e^{-t_s/T}=\Delta.1$　　$t_s=-T\ln\Delta$

$\Delta=2\%$时，$t_s=4T$；　　$\Delta=5\%$时，$t_s=3T$。

Δ 越小，精度要求越高，调整时间t_s越长；

T 越大，系统惯性越大，调整时间t_s越长。

调整时间反映系统响应的快速性

四、二阶系统的时间响应

传递函数：$G(s)=\dfrac{X_o(s)}{X_i(s)}=\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$

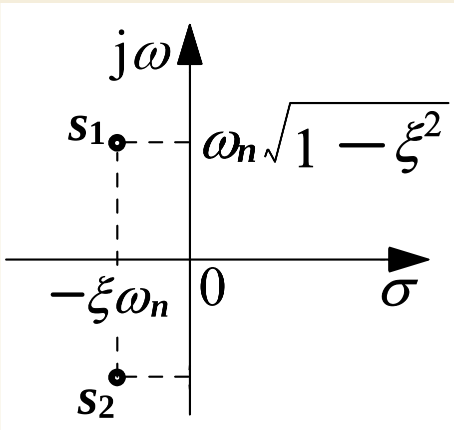
ω_n ——无阻尼固有频率

ξ ——阻尼比

特征方程：$s^2+2\xi\omega_\mathrm{n}s+\omega_\mathrm{n}^2=0$

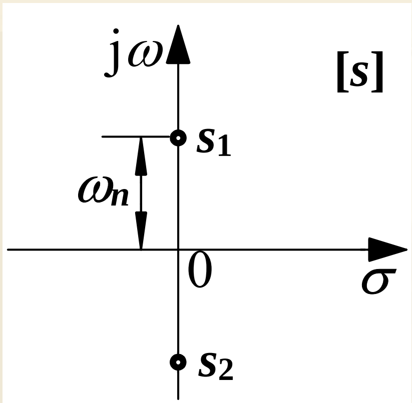
特征根：$s_{1,2}=-\xi\omega_\mathrm{n}\pm\omega_\mathrm{n}\sqrt{\xi^2-1}$

$0<\xi<1$



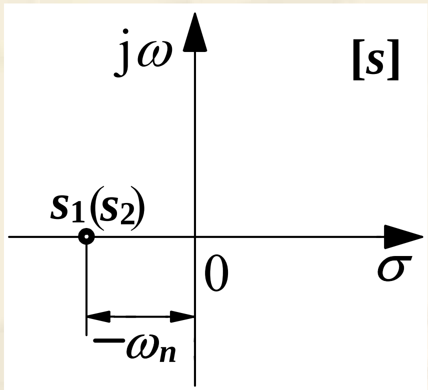
欠阻尼系统

$\xi=0$



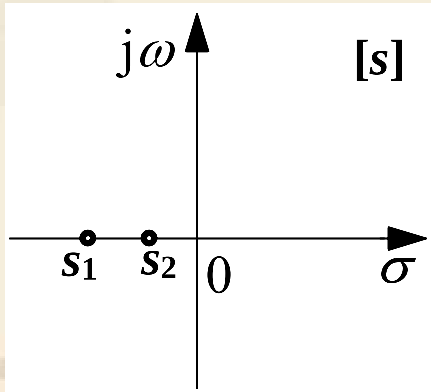
无阻尼系统

$\xi=1$



临界阻尼系统

$\xi>1$



过阻尼系统

1. 二阶系统的单位脉冲响应

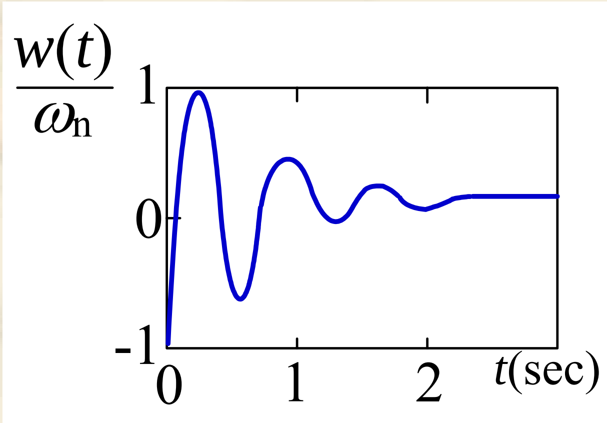
$$w(t) = L^{-1}[G(s)X_i(s)] = L^{-1}[G(s)]$$

$$= L^{-1}\left[\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}\right] = L^{-1}\left[\frac{\omega_n^2}{(s+\xi\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1-\xi^2})^2}\right]$$

1) 0<ξ<1时：

$$w(t) = L^{-1}\left[\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \frac{\omega_n \cdot \sqrt{1-\xi^2}}{(s+\xi\omega_n)^2 + (\omega_n\sqrt{1-\xi^2})^2}\right]$$

$$w(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin \omega_d t$$



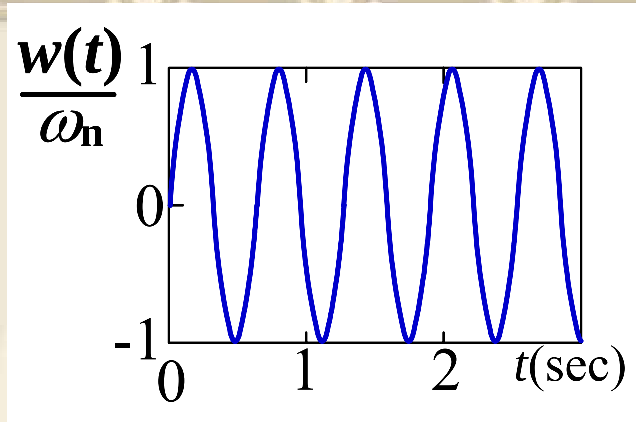
$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$ ——有阻尼固有频率

角频率为有阻尼固有频率的减幅振荡

2) ξ=0时：

$$w(t)=L^{-1}[\omega_n\cdot\frac{\omega_n}{s^2+\omega_n^2}]=\omega_n\sin\omega_n t$$

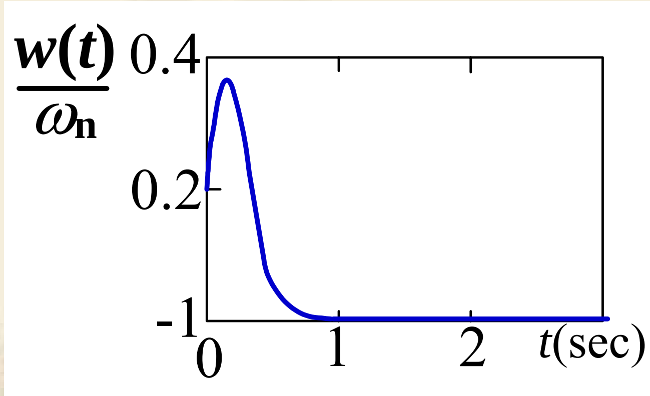
角频率为无阻尼固有频率的等幅振荡



3) ξ=1时：

$$w(t)=L^{-1}[\frac{\omega_n}{(s+\omega_n)^2}]=\omega_n^2 t\cdot e^{-\omega_n t}$$

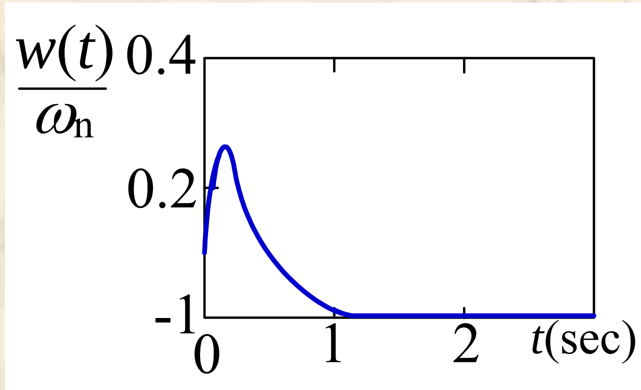
无振荡,先上升后急速衰减



4) ξ>1时：无振荡

$$w(t)=\frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2-1}}\{L^{-1}[\frac{1}{s+(\xi-\sqrt{\xi^2-1})\omega_n}]$$

$$=\frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2-1}}[e^{-(\xi-\sqrt{\xi^2-1})\omega_n t}-e^{-(\xi+\sqrt{\xi^2-1})\omega_n t}]$$

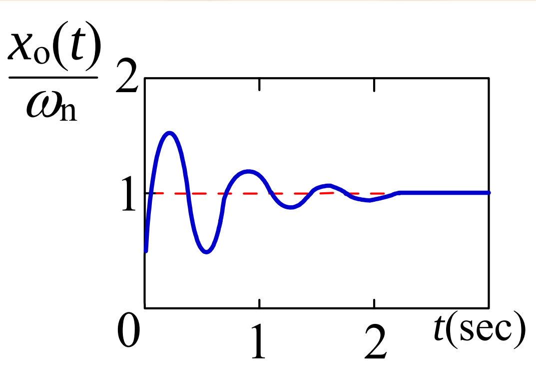


2. 二阶系统的单位阶跃响应

$$x_i(t)=u(t) \qquad L[u(t)]=\frac{1}{s}$$

$$X_o(s)=G(s)\cdot\frac{1}{s}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}\cdot\frac{1}{s}$$

$$=\frac{1}{s}-\frac{s+2\xi\omega_n}{(s+\xi\omega_n+j\omega_d)(s+\xi\omega_n-j\omega_d)}$$



1) 0<ξ<1时：

$$x_o(t)=L^{-1}[\frac{1}{s}]-L^{-1}[\frac{s+\xi\omega_n}{(s+\xi\omega_n)^2+\omega_d^2}]-L^{-1}[\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\cdot\frac{\omega_d}{(s+\xi\omega_n)^2+\omega_d^2}]$$

$$x_o(t)=1-e^{-\xi\omega_n t}(\cos\omega_d t+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\omega_d t)$$

$$=1-\frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\cdot\sin(\omega_d t+\arctan\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi})$$

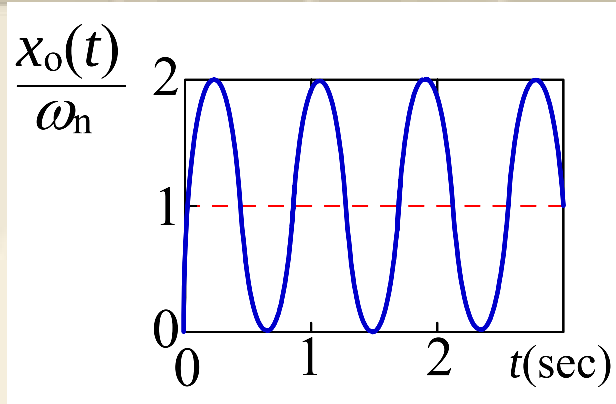
角频率为有阻尼固有频率的减幅振荡

2) ξ=0时：

$$X_o(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+\omega_n^2}\cdot\frac{1}{s}=\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+\omega_n^2}$$

$$x_o(t)=1-\cos\omega_n t$$

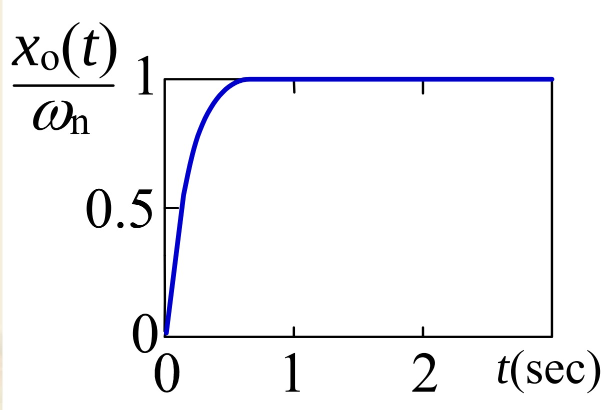
角频率为无阻尼固有频率的等幅振荡



3) ξ=1时：

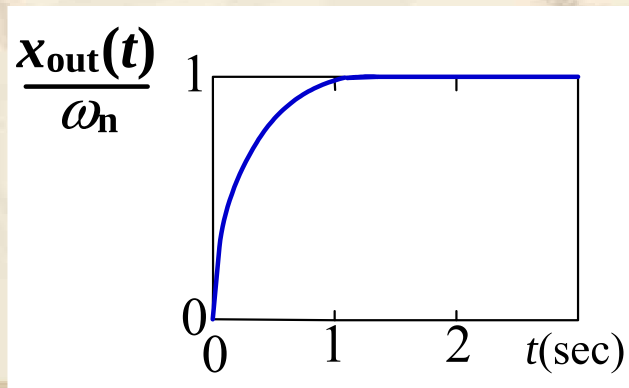
$$x_o(t)=L^{-1}[X_o(s)]=1-(1+\omega_n t)e^{-\omega_n t}$$

无振荡

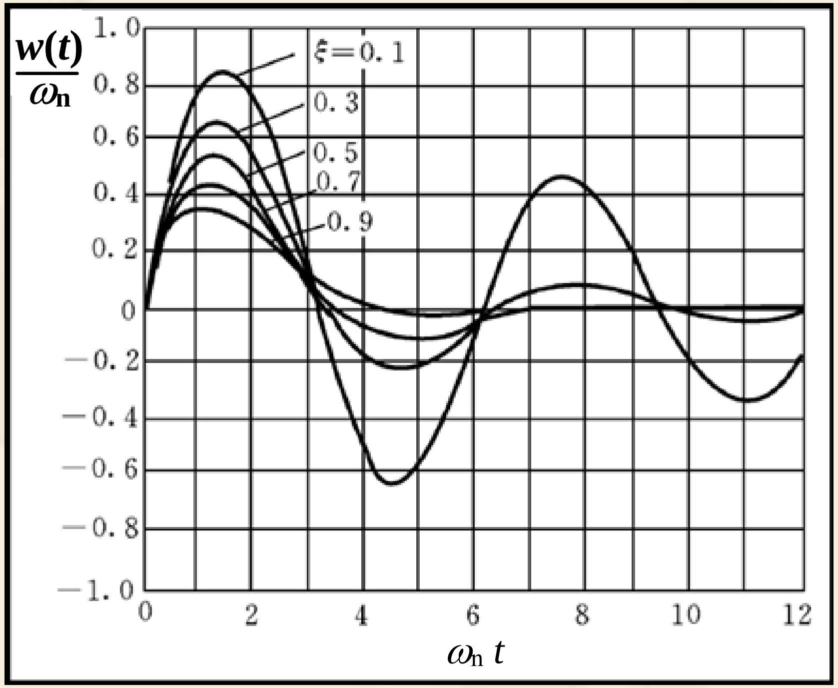


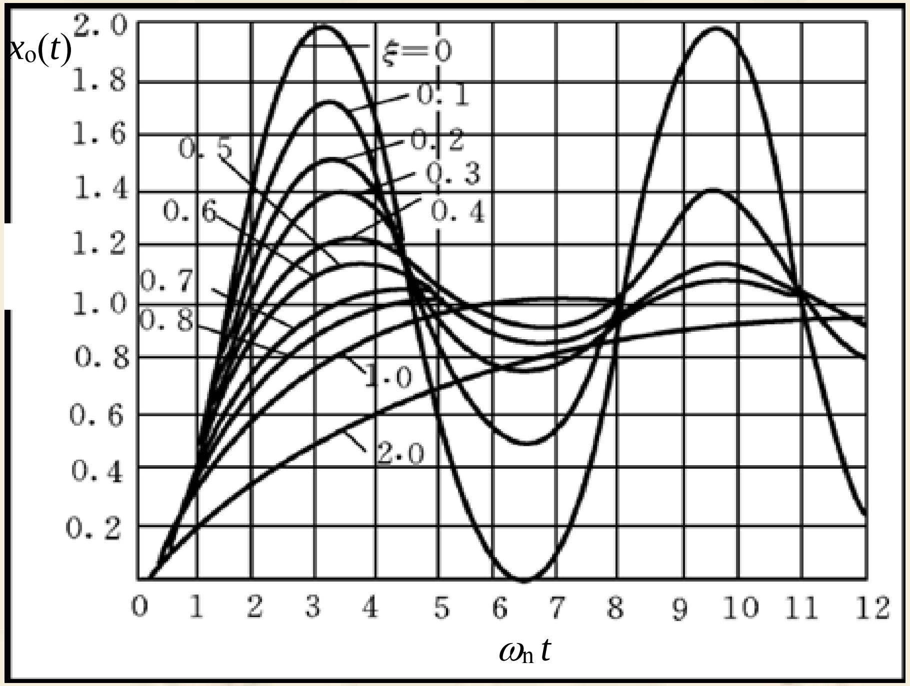
4) ξ>1时：

$$x_{ou}(t)=1+\frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2-1}}\left\{\frac{\exp[-(\xi+\sqrt{\xi^2-1})\omega_n t]}{(\xi+\sqrt{\xi^2-1})\omega_n}-\frac{\exp[-(\xi-\sqrt{\xi^2-1})\omega_n t]}{(\xi-\sqrt{\xi^2-1})\omega_n}\right\}\quad (t\ge 0)$$



二阶系统单位脉冲响应　　二阶系统单位阶跃响应





$0<\xi<1$ 时，ξ越小，振荡衰减越慢，振荡越剧烈；

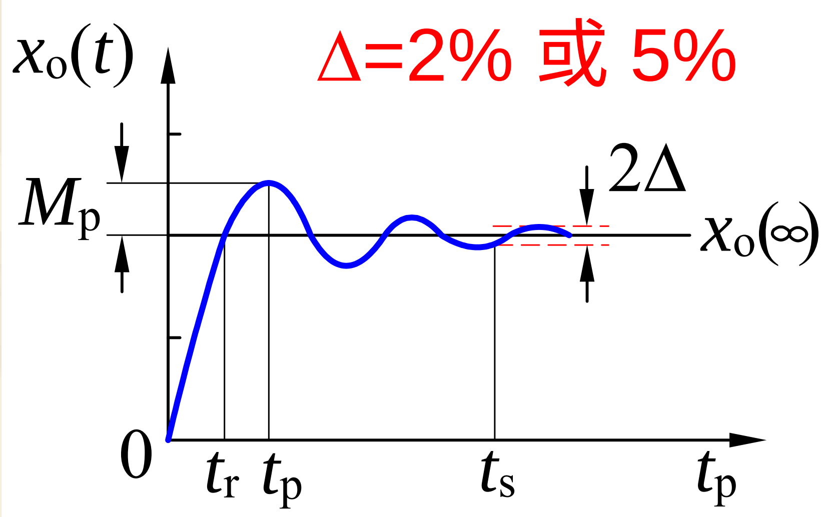
$\xi=0$ 时，振荡无衰减，为等幅振荡；

$\xi=1$ 时，无振荡；

$\xi>1$ 时，无振荡.

五、二阶系统的性能指标

二阶欠阻尼系统单位阶跃响应



$$x_o(t)=1-\frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega_d t+\mathrm{tg}^{-1}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi})$$

性能指标 t_r、t_p、M_p、t_s、N

1. 上升时间 t_r

$$1=1-\frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega_d t+\mathrm{tg}^{-1}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi})$$

$$\sin(\omega_d t_r+\mathrm{tg}^{-1}(\sqrt{1-\xi^2}/\xi))=0$$

$$t_r=\frac{\pi-\mathrm{tg}^{-1}(\sqrt{1-\xi^2}/\xi)}{\omega_d}$$

ξ一定，增大ω_n，上升时间减小
ω_n 一定，减小ξ，上升时间减小

2. 峰值时间 t_p

$$\dot{x}_{ou}(t)\Big|_{t=t_d}=0$$

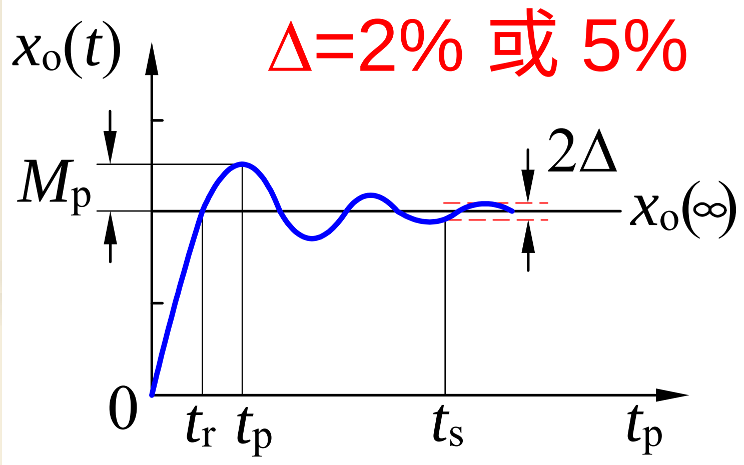
$$\sin(\omega_d t_p)=0$$

$$\omega_d t_p=\pi$$

$$t_p=\frac{\pi}{\omega_d}$$

峰值时间为振荡周期之半

ξ一定，增大ω_n，
或
ω_n 一定，减小ξ，
峰值时间减小



3. 最大超调量 M_p

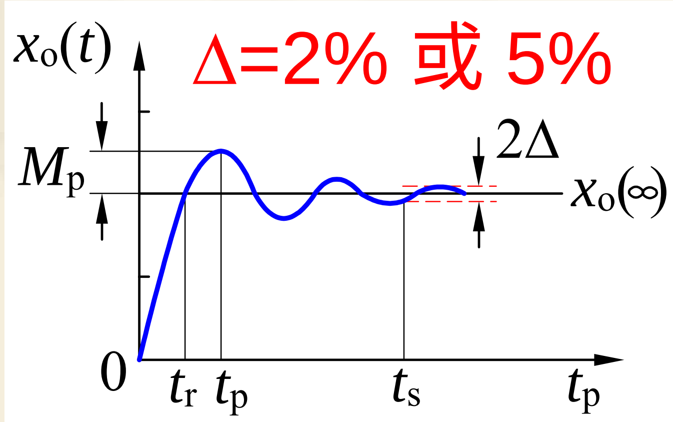
$$M_p=\frac{x_o(t_p)-x_o(\infty)}{x_o(\infty)}\times100\%=e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}\times100\%$$

M_p 只与ξ有关，与ω_n无关

增大ξ，
最大超调量减小

4.调整时间 t_s

$$|x_o(t)-1| \le \Delta \qquad (t \ge t_s)$$



$$\left|\frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\right| \sin(\omega_d t + \arctan\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}) \le \Delta \qquad (t \ge t_s)$$

$$\left|\frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\right| \le \Delta \qquad (t \ge t_s) \qquad\qquad t_s \ge \frac{1}{\xi\omega_n}\ln\frac{1}{\Delta\sqrt{1-\xi^2}}$$

当$0<\xi<0.7$时, $t_s \approx \dfrac{4}{\xi\omega_n}$, $(\Delta = 2\%)$; $t_s \approx \dfrac{3}{\xi\omega_n}$, $(\Delta = 5\%)$

Δ , ω_n一定, 增大ξ, t_s减小

Δ , ξ一定, 增大ω_n , t_s减小

5.振荡次数 N

$$N = \frac{t_s}{T} = \frac{t_s}{2\pi/\omega_d}$$

讨论：

$$M_{\mathrm{p}} = \mathrm{e}^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} \times 100\%$$

ξ大，则M_p小

$$t_s \geq \frac{1}{\xi\omega_{\mathrm{n}}} \ln \frac{1}{\Delta\sqrt{1-\xi^2}}$$

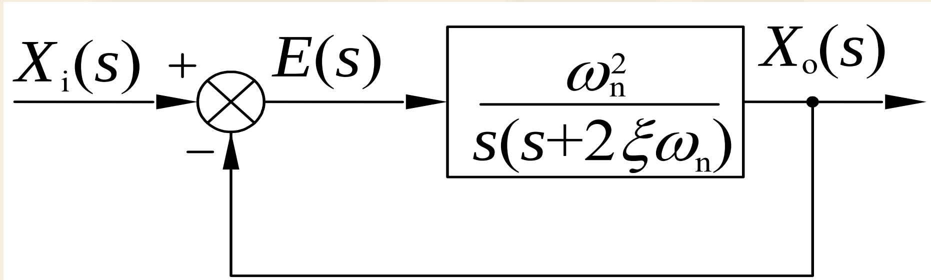
$\xi \approx$ **0.7**时，t_s较小

ω_n大，则t_s小

- 要使二阶系统动态特性好，选择合适的ω_n和ξ($\approx$ **0.7**)
- 通常根据允许的超调量M_p来选择阻尼比ξ

例1　如图所示系统中，ξ=0.6，ωn=0.5/sec ,求其瞬态性能指标。

解：系统传递函数为



$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

且ξ=0.6, $\omega_n=5/\sec$，则$\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\xi^2}=4/\sec$

1) $$t_r=\frac{\pi-\mathrm{tg}^{-1}(\sqrt{1-\xi^2}/\xi)}{\omega_d}=0.55\sec$$

2) $$t_p=\frac{\pi}{\omega_d}=0.785\sec$$

3) $$M_p=\exp(-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2})\times100\%=9.5\%$$

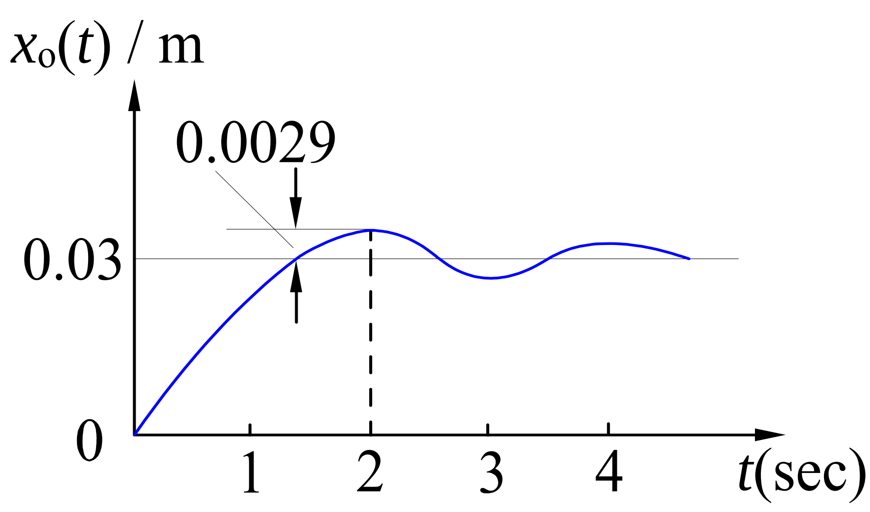
4) $$t_s=\frac{4}{\xi\omega_n}=1.33\sec，(\Delta=2\%)$$

$$t_s=\frac{3}{\xi\omega_n}=1\sec,(\Delta=5\%)$$

$$N=\frac{t_s}{(2\pi/\omega_d)}=0.63\approx1\ \ (\Delta=5\%)$$

5) $$N=\frac{t_s}{(2\pi/\omega_d)}=0.85\approx1\quad(\Delta=2\%)$$

例2　图示机械系统，在质块*m*上施加$x_i(t)$=8.9N阶跃力后，质块的时间响应$x_o(t)$如图所示，求*m,k,c*.



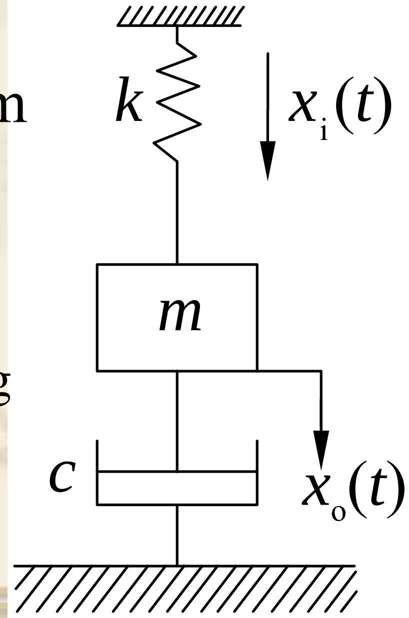
解：$x_i(t) = 8.9N,\ \ x_o(\infty) = 0.03\text{m},$

$$x_o(t_p) - x_o(\infty) = 0.0029\text{m},\ t_p = 2\text{sec}$$

$$G(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k} \qquad X_i(s) = \frac{8.9}{s}\text{N}$$

1)求*k*　$x_o(\infty) = \lim_{t\to\infty} x_o(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot X_o(s)$

$$= \lim_{s\to 0} s\frac{1}{ms^2 + cs + k} \cdot \frac{8.9}{s}\text{N} = \frac{8.9}{k}\text{N} \quad 故k = 297\,\text{N/m}$$



2)求*m*

$$M_p = e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{0.0029}{0.03} = 9.6\% \qquad 得\ \xi = 0.6$$

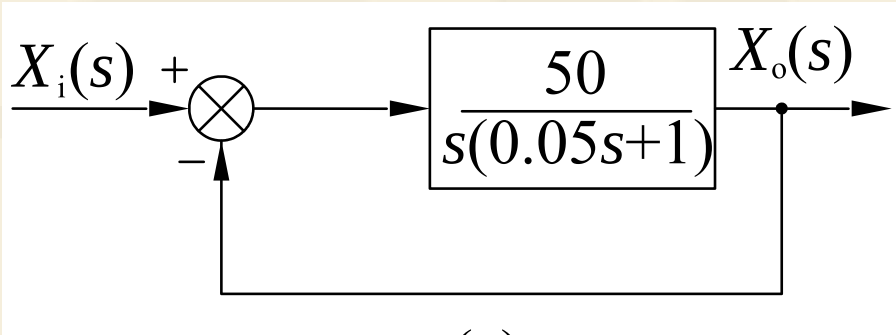
$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} = 2,\ 得\omega_n = 1.96/\text{sec},\ \omega_n^2 = \frac{k}{m}\ ,得\ m = 77.3\text{kg}$$

3)求 *c*　由$2\xi\omega_n = c/m$,　得$c = 181.8\,\text{N}\cdot\text{s/m}$

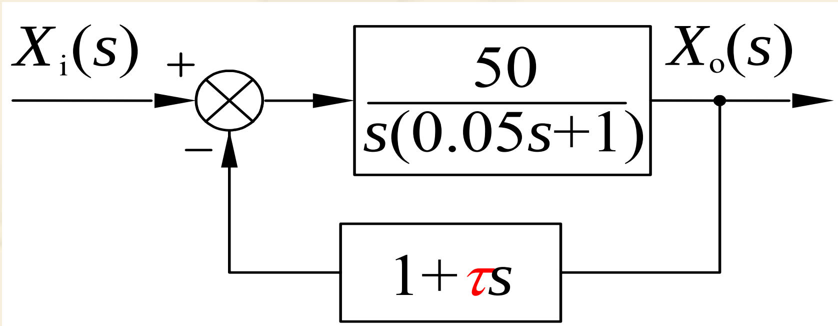
例3 图a所示位置随动系统，单位阶跃输入时，要求 $M_{\mathrm{p}} \le 5\%$

1）系统是否满足要求？

2）增加微分负反馈，如图b所示，求满足要求时的 τ 值。



(a)



解： 系统a: $G_{\mathrm{B}}(s) = \dfrac{50}{0.05s^2 + s + 50}$

可知 $\xi = 0.316$; $\omega_n = 31.62$

故 $M_{\mathrm{p}} = \mathrm{e}^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}} = 0.35 > 5\%$

不满足要求

系统b： $G_{\mathrm{B}}(s) = \dfrac{50}{0.05s^2 + (1+50\tau)s + 50}$ 可知 $\omega_n = 31.62$ $\xi = \dfrac{20(1+50\tau)}{2\omega_n}$

欲满足要求，须满足 $M_{\mathrm{p}} = \mathrm{e}^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}} = 0.05$ 得 $\xi = 0.69$

τ=0.0236 sec

六、高阶系统的时间响应

$$G(s)=\frac{b_{\mathrm{m}}s^{\mathrm{m}}+b_{\mathrm{m-1}}s^{\mathrm{m-1}}+\ldots+b_0}{a_{\mathrm{n}}s^{\mathrm{n}}+a_{\mathrm{n-1}}s^{\mathrm{n-1}}+\ldots+a_0} \Longleftrightarrow G(s)=\frac{K\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{n_1}(s+p_j)\prod_{k=1}^{n_2}(s^2+2\xi_k\omega_{\mathrm{n}k}s+\omega_{\mathrm{n}k}^2)}$$

单位阶跃作用下

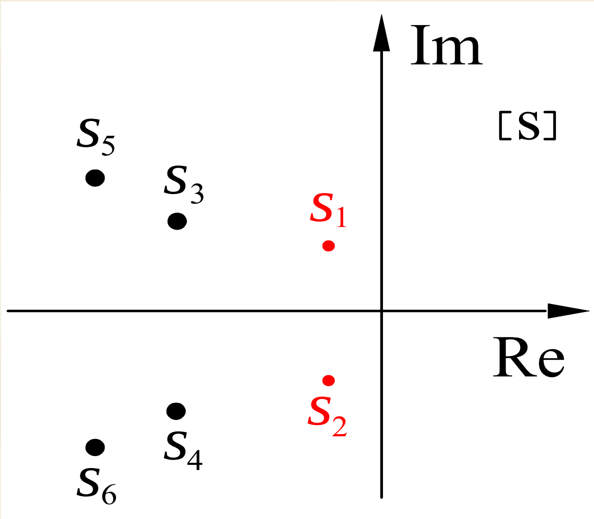
$$X_{\mathrm{o}}(s)=G(s)\cdot\frac{1}{s}=\frac{K\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{s\prod_{j=1}^{n_1}(s+p_j)\prod_{k=1}^{n_2}(s^2+2\xi_k\omega_{\mathrm{n}k}s+\omega_{\mathrm{n}k}^2)}$$

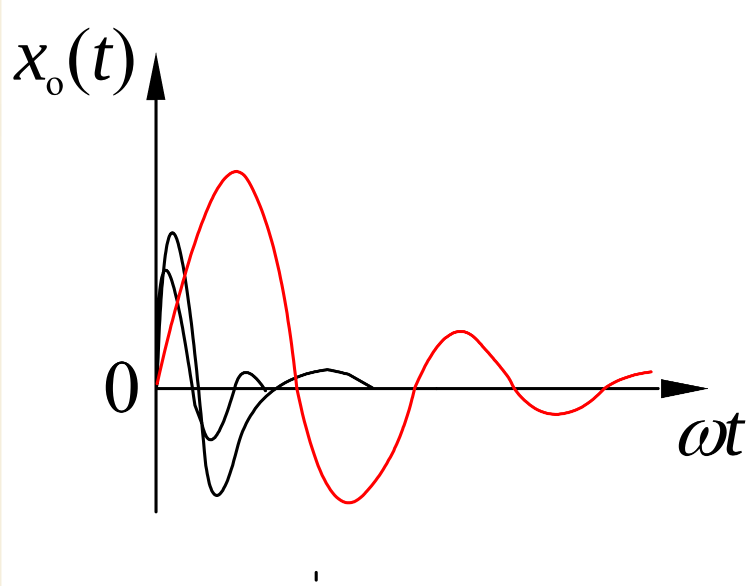
$$X_{\mathrm{o}}(s)=\frac{A_{\mathrm{o}}}{s}+\sum_{j=1}^{n_1}\frac{A_j}{s+p_j}+\sum_{k=1}^{n_2}\frac{B_k s+C_k}{s^2+2\xi_k\omega_{\mathrm{n}k}s+\omega_{\mathrm{n}k}^2}$$

$$x_{\mathrm{o}}(t)=A_{\mathrm{o}}+\sum_{j=1}^{n_1}A_j\mathrm{e}^{-p_j t}+\sum_{k=1}^{n_2}D_k\mathrm{e}^{-\xi_k\omega_{\mathrm{n}k}t}\sin(\omega_{\mathrm{d}k}t+\beta_k)$$

多个一阶环节响应和二阶环节响应的叠加

稳定系统中，离虚轴越远的极点对应的自由响应衰减越快。





记离虚轴最近的极点 $s_n=\alpha_n+j\beta_n$, 其它极点 $s_i=\alpha_i+j\beta_i$

若$\alpha_i \geq 5\alpha_n$， s_n称为主导极点

系统的响应特性主要由主导极点决定

高阶系统可近似为由主导极点所对应的低阶系统

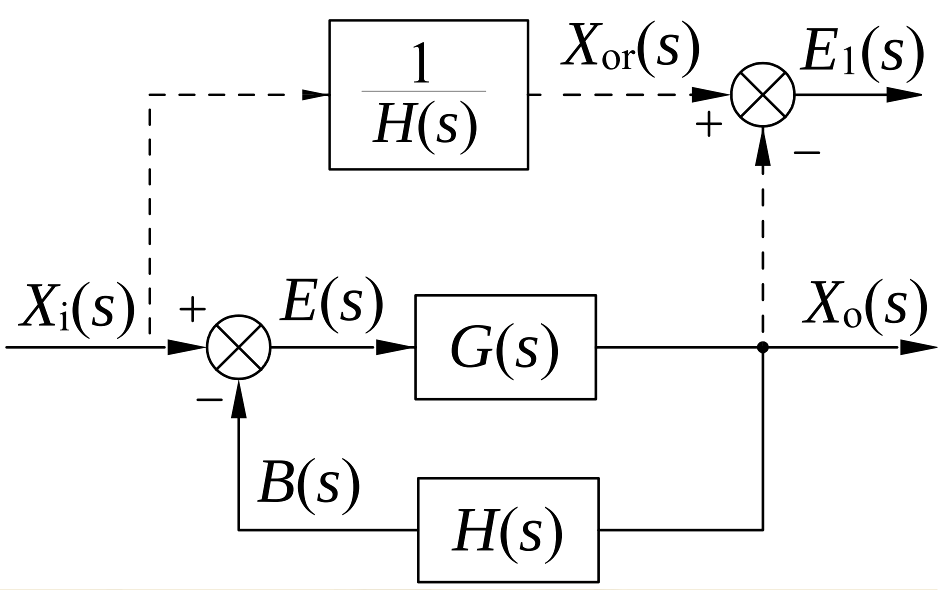
七、系统误差分析与计算

误差 e ：$e(t)=x_{or}(t)-x_o(t)$

在输出端　　理想输出　　实际输出

偏差 ε ：$\varepsilon(t)=x_i(t)-b(t)$

在输入端



$$E_1(s)=X_{or}(s)-X_o(s);E(s)=X_i(s)-B(s)$$

$$E_1(s)=0\text{时，希望}E(s)=0$$

$$\text{而}E(s)=X_i(s)-B(s)=X_i(s)-X_o(s)H(s)=0\text{时}$$

$$X_i(s)-X_{or}(s)H(s)=0.$$

$$X_{or}(s)=\frac{1}{H(s)}X_i(s)$$

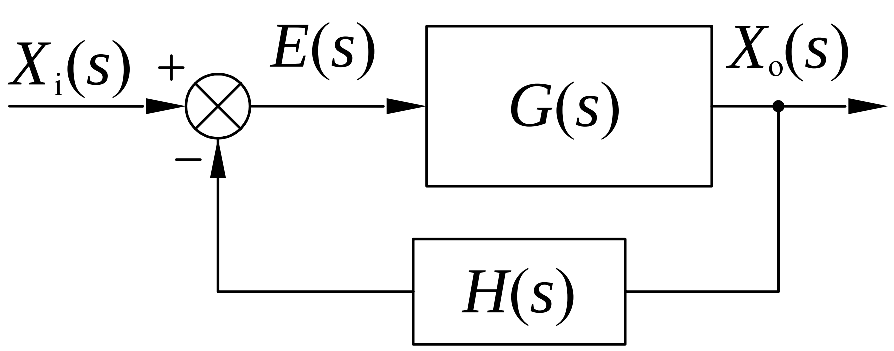
$$E_1(s)=X_{or}(s)-X_o(s)=\frac{1}{H(s)}[X_i(s)-H(s)X_o(s)]=\frac{1}{H(s)}E(s)$$

只有单位反馈系统，偏差才等于误差

当$H(s)=1$时
$E(s)=E_1(s)$

稳态误差

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE_1(s)$$



稳态偏差

$$\varepsilon_{ss} = \lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{s\to 0} sE(s)$$

$$E(s) = X_i(s) - H(s)X_o(s) = X_i(s) - H(s)G(s)E(s)$$

$$E(s) = \frac{X_i(s)}{1+G(s)H(s)}$$

$$\varepsilon_{ss} = \lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{s\to 0} sE(s)$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{s\ X_i(s)}{1+G(s)H(s)}$$

稳态偏差与输入有关；
稳态偏差与系统开环有关

1. 单位阶跃输入 $X_{\mathrm{i}}(s)=1/s$

$$\varepsilon_{ss}=\lim_{s\to 0}\frac{sX_{\mathrm{i}}(s)}{1+G(s)H(s)}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{1+G(s)H(s)}=\frac{1}{1+K_{\mathrm{p}}}$$

$\leftarrow$ 位置无偏系数

2. 单位斜坡信号输入 $X_{\mathrm{i}}(s)=1/s^2$

$$\varepsilon_{ss}=\lim_{s\to 0}\frac{sX_{\mathrm{i}}(s)}{1+G(s)H(s)}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s+sG(s)H(s)}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{sG(s)H(s)}$$

$$=\frac{1}{\mathrm{const}}=\frac{1}{K_v}$$

$\leftarrow$ 速度无偏系数

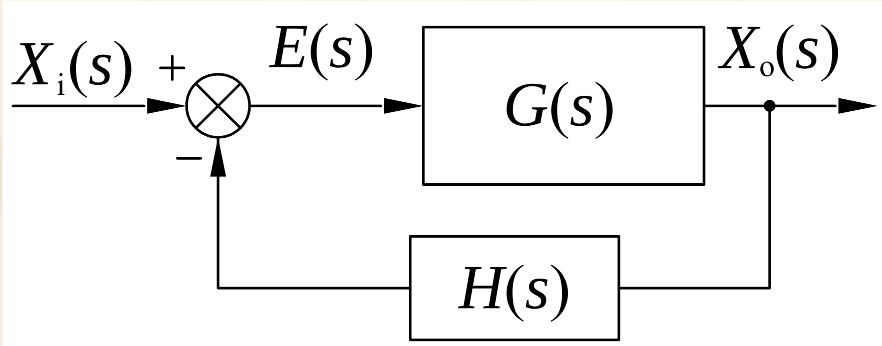
3. 单位加速度信号输入 $X_{\mathrm{i}}(s)=1/s^3$

$$\varepsilon_{ss}=\lim_{s\to 0}\frac{sX_{\mathrm{i}}(s)}{1+G(s)H(s)}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s^2+s^2G(s)H(s)}$$

$$=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s^2G(s)H(s)}=\frac{1}{\mathrm{const}}=\frac{1}{K_a}$$

$\leftarrow$ 加速度无偏系数

与输入有关的稳态偏差：



$$\varepsilon_{ss}=\lim_{t\to\infty}\varepsilon(t)=\lim_{s\to 0}sE(s)$$

$$=\lim_{s\to 0}\frac{s}{1+G(s)H(s)}X_i(s)$$

系统的型次

设系统开环传递函数：

$$G(s)H(s)=\frac{K\prod_{i=1}^{m}(T_i s+1)}{s^{v}\prod_{j=1}^{n-v}(T_j s+1)}$$

则ν =0,1,2时，分别称为0型， I 型， II 型系统。

无积分

一个积分环节

两个积分环节

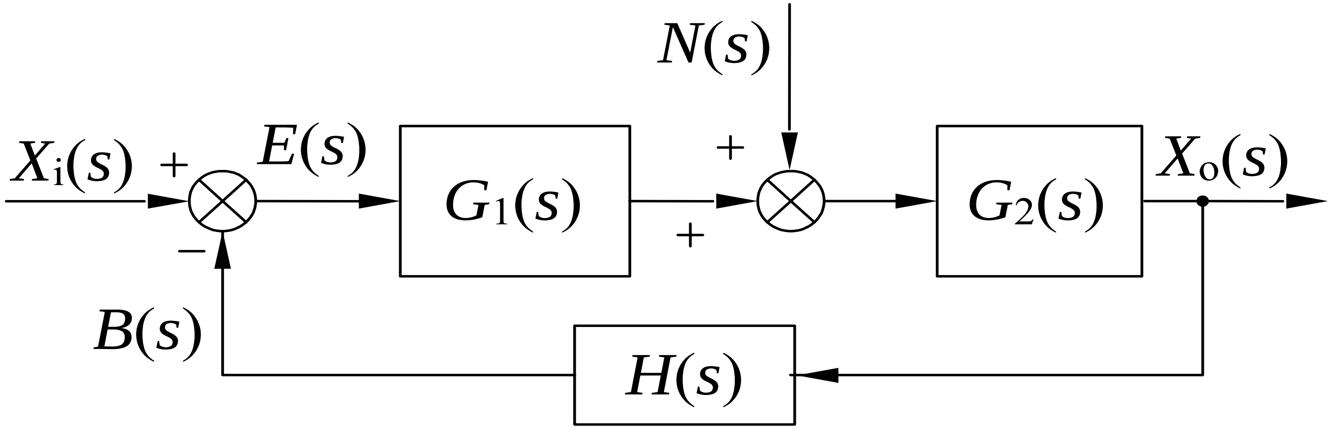
K: 开环增益

不同输入下，0, I, II型系统的稳态偏差表

系统输入	单位阶跃 $1/s$	单位速度 $1/s^2$	单位加速度 $1/s^3$
	$\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{1}{1+G(s)H(s)}$	$\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{1}{sG(s)H(s)}$	$\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{1}{s^2G(s)H(s)}$
0型	$\dfrac{1}{1+K}$	∞	∞
I型	0	$\dfrac{1}{K}$	∞
II型	0	0	$\dfrac{1}{K}$

系统型次越高，稳态偏差越小
开环增益越大，稳态偏差越小

有干扰作用下的偏差和误差



$$X_o(s)=\frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}X_i(s)+\frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}N(s)$$

$$=G_{Xi}(s)X_i(s)+G_N(s)N(s)$$

增加G_1增益, 抗干扰

$$E_1(s)=X_{or}(s)-X_o(s)=\frac{1}{H(s)}X_i(s)-[G_{Xi}(s)X_i(s)+G_N(s)N(s)]$$

$$=[\frac{1}{H(s)}-G_{Xi}(s)]X_i(s)+[-G_N(s)]N(s)$$

结论：

1）稳态误差$e(t)$与输入信号 $x_i(t)$ 有关。

2）稳态偏差$\varepsilon(t)$与系统型次 v 有关；
型次v越高，稳态偏差$\varepsilon(t)$ 越小。

3）稳态偏差$\varepsilon(t)$与系统开环增益 k 有关；
开环增益k越大，稳态偏差$\varepsilon(t)$越小。

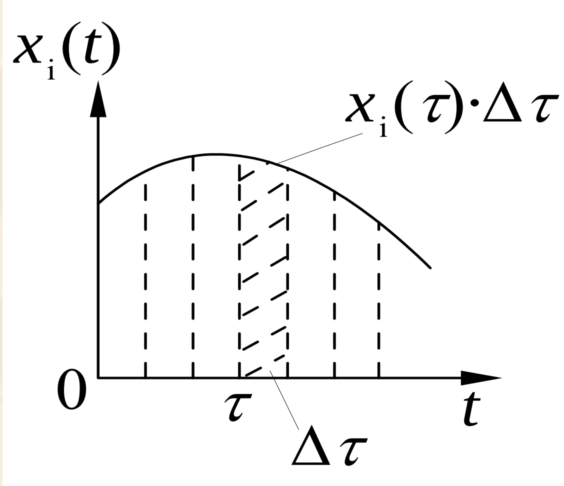
4）多输入作用或有干扰作用时，按叠加原理计算。

5）单位反馈系统的稳态误差$e(t)$与稳态偏差$\varepsilon(t)$相同。
单位反馈系统$H(s)=1$

八、单位脉冲响应函数在时间响应中的作用

$$1\cdot\delta(t) \longrightarrow w(t)\,,\qquad k\cdot\delta(t-\tau) \longrightarrow k\cdot w(t-\tau)$$

$$x_i(\tau)\cdot\Delta\tau\cdot\delta(t-\tau) \longrightarrow x_i(\tau)\cdot\Delta\tau\cdot w(t-\tau)$$



$$x_o(t)=\sum_{\tau=0}^{t-\Delta\tau} x_i(\tau)\cdot\Delta\tau\cdot w(t-\tau)$$

当$\Delta\tau\to 0$时, $x_o(t)=\int_0^t x_i(\tau)w(t-\tau)d\tau$

即：$x_o(t)=x_i(t)*w(t)$