机械工程控制基础

吴波、熊良才、陈良才

华中科技大学

第四章　频率特性分析

时域分析：重点研究过渡过程，通过阶跃或脉冲输入下系统的瞬态时间响应来研究系统的性能。

频域分析：通过系统在不同频率ω的谐波（正弦）输入作用下的稳态响应来研究系统的性能。

一、频率特性概述

1. 频率响应与频率特性

（1）频率响应：系统对谐波输入的稳态响应

例　设系统的传递函数为 $G(s)=\dfrac{K}{Ts+1}$

若输入信号为 $x_i(t)=X_i\sin\omega t$　　即 $X_i(s)=\dfrac{X_i\omega}{s^2+\omega^2}$

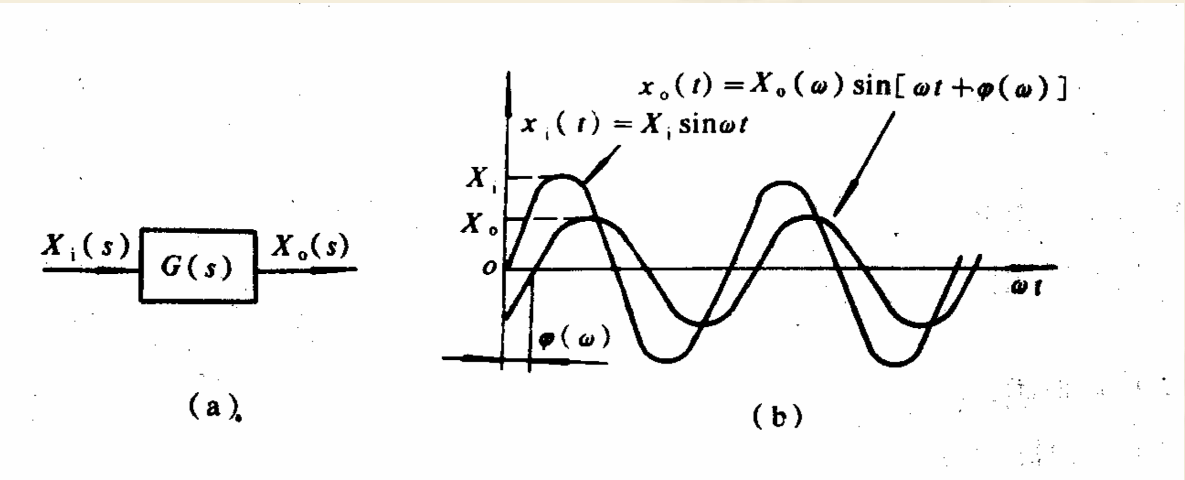
则 $X_o(s)=G(s)X_i(s)=\dfrac{K}{Ts+1}\cdot\dfrac{X_i\omega}{s^2+\omega^2}$

$$x_o(t)=\frac{X_iKT\omega}{1+T^2\omega^2}\cdot e^{-t/T}+\frac{X_iK}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}\sin(\omega t-arctgT\omega)$$

稳态输出（响应）　$x_o(t)=\dfrac{X_iK}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}\sin(\omega t-arctgT\omega)$

与输入信号的幅值成正比

与输入同频率



输入： $x_i(t)=X_i\sin\omega t$

稳态输出（频率响应）： $x_o(t)=X_i A(\omega)\sin[\omega t+\varphi(\omega)]$

- 同频率
- 幅值比 $A(\omega)$
- 相位差 $\varphi(\omega)$

ω的非线性函数
(揭示了系统的频率响应特性)

(2) 频率特性：对系统频率响应特性的描述

$$\left.\begin{array}{l}\text{幅频特性：稳态输出与输入谐波的幅值比，即} \\ \qquad A(\omega)=\dfrac{X_o(\omega)}{X_i} \\ \text{相频特性：稳态输出与输入谐波的相位差 } \varphi(\omega)\end{array}\right\}\text{频率特性}$$

频率特性是ω的复变函数，其幅值为A(ω)，相位为φ(ω)。

记为： $A(\omega)\cdot\angle\varphi(\omega)$

或 $A(\omega)\cdot e^{j\varphi(\omega)}$

2.频率特性与传递函数的关系

设系统的传递函数为：$G(s)=\dfrac{X_o(s)}{X_i(s)}=\dfrac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$

输入信号为 $x_i(t)=X_i\sin\omega t$ 即 $X_i(s)=\dfrac{X_i\omega}{s^2+\omega^2}$

则

$$X_o(s)=G(s)X_i(s)=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}\cdot\frac{X_i\omega}{s^2+\omega^2}$$

若无重极点，则有 $X_o(s)=\sum_{i=1}^{n}\dfrac{A_i}{s-s_i}+\left(\dfrac{B}{s-j\omega}+\dfrac{B^*}{s+j\omega}\right)$

故 $x_o(t)=\sum_{i=1}^{n}A_i e^{s_i t}+(Be^{j\omega t}+B^*e^{j\omega t})$ 若系统稳定，则有 $x_o(t)=Be^{j\omega t}+B^*e^{j\omega t}$

其中 $B=G(s)\dfrac{X_i\omega}{(s-j\omega)(s+j\omega)}(s-j\omega)\Big|_{s=j\omega}=G(s)\dfrac{X_i\omega}{s+j\omega}\Big|_{s=j\omega}$ 同理

$$=G(j\omega)\cdot\frac{X_i}{2j}=|G(j\omega)|e^{j\angle G(j\omega)}\cdot\frac{X_i}{2j}$$

$$B^*=G(-j\omega)\cdot\frac{X_i}{-2j}=|G(j\omega)|e^{-j\angle G(j\omega)}\cdot\frac{X_i}{-2j}$$

所以 $x_o(t)=|G(j\omega)|X_i\dfrac{e^{j[\omega t+\angle G(j\omega)]}-e^{-j[\omega t+\angle G(j\omega)]}}{2j}=|G(j\omega)|X_i\sin[\omega t+\angle G(j\omega)]$

即 $\begin{cases}A(\omega)=\dfrac{X_o(\omega)}{X_i}=|G(j\omega)|\\ \varphi(\omega)=\angle G(j\omega)\end{cases}$

故$G(j\omega)=|G(j\omega)|e^{j\angle G(j\omega)}$
就是系统的频率特性

3.频率特性的求法

(1)频率响应→频率特性

如前例　系统的传递函数 $G(s)=\dfrac{K}{Ts+1}$，　$X_i(s)=\dfrac{X_i\omega}{s^2+\omega^2}$

所以 $x_o(t)=L^{-1}\left[G(s)\dfrac{X_i\omega}{s^2+\omega^2}\right]$

稳态输出（频率响应） $x_o(t)=\dfrac{X_iK}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}\sin(\omega t-arctgT\omega)$

所以系统的频率特性为

$$\begin{cases} A(\omega)=\dfrac{X_o(\omega)}{X_i}=\dfrac{K}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} \\ \varphi(\omega)=-arctgT\omega \end{cases}$$

或 $\dfrac{K}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}e^{-jarctgT\omega}$

(2)传递函数→频率特性 $G(j\omega)=G(s)\big|_{s=j\omega}$

如上例 $G(j\omega)=G(s)\big|_{s=j\omega}=\dfrac{K}{1+jT\omega}=\dfrac{K}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}e^{-jarctgT\omega}$

即

$$\begin{cases} A(\omega)=\left|G(j\omega)\right|=\dfrac{K}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} \\ \varphi(\omega)=\angle G(j\omega)=-arctgT\omega \end{cases}$$

频率响应 $x_o(t)=X_i\left|G(j\omega)\right|\sin[\omega t+\angle G(j\omega)]=\dfrac{X_iK}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}\sin(\omega t-arctgT\omega)$

(3)实验方法

4.频率特性的表示法

(1)解析表示

相频特性

幅频—相频

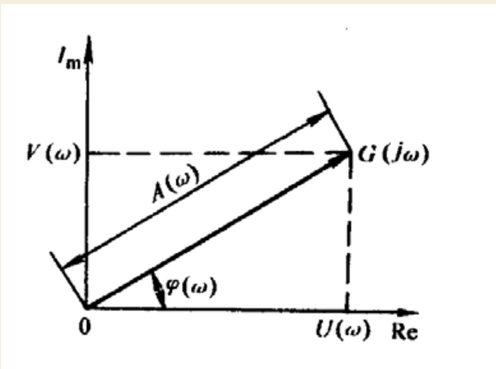
$$G(j\omega)=\frac{X_o(\omega)}{X_i}e^{j\varphi(\omega)}=A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}=\left|G(j\omega)\right|e^{j\angle G(j\omega)}=\left|G(j\omega)\right|\bullet\angle G(j\omega)$$

幅频特性

实频—虚频

$$G(j\omega)=A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}=A(\omega)\left[\cos\varphi(\omega)+j\sin\varphi(\omega)\right]$$
$$=\mathrm{Re}\left[G(j\omega)\right]+j\,\mathrm{Im}\left[G(j\omega)\right]=U(\omega)+jV(\omega)$$

实频特性　　虚频特性



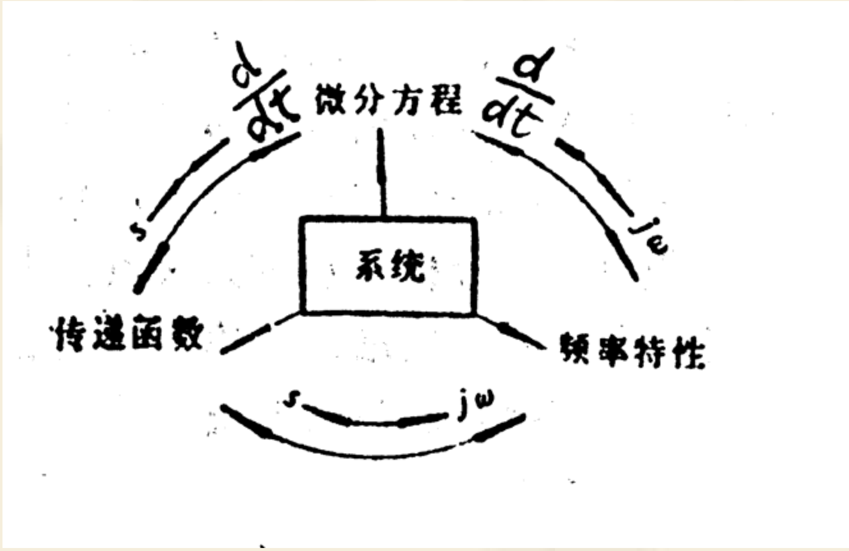
(2)图示方法

Nyquist 图（极坐标图，幅相频率特性图）

Bode 图（对数坐标图，对数频率特性图）

5.频率特性的特点

(1) 频率特性是频域中描述系统动态特性的数学模型



(2)频率特性是系统单位脉冲响应函数ω(t)的Fourier变换

由 $X_o(s)=G(s)X_i(s)$ 有 $X_o(j\omega)=G(j\omega)X_i(j\omega)$

而当 $x_i(t)=\delta(t)$ 时， $x_o(t)=\omega(t)$,

且 $X_i(j\omega)=F[\delta(t)]=1$ 故 $X_o(j\omega)=G(j\omega)$

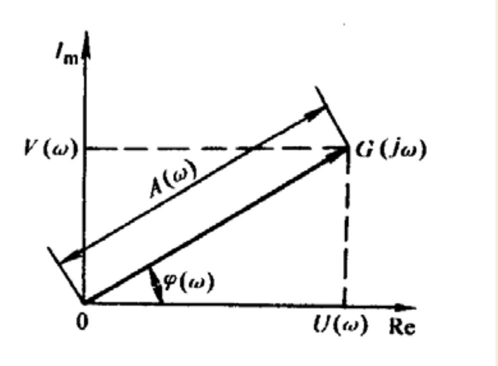
即 $F[\omega(t)]=G(j\omega)$

(3)分析简便

(4)易于实验求取

二、频率特性的极坐标图（*Nyquist*图）

G(jω)：*ω*的复变函数



给定ω，*G(jω)*是复平面上的一矢量

幅值： $A(\omega)=|G(j\omega)|$

相角(与正实轴的夹角，逆时针为正）： $\varphi(\omega)=\angle G(j\omega)$

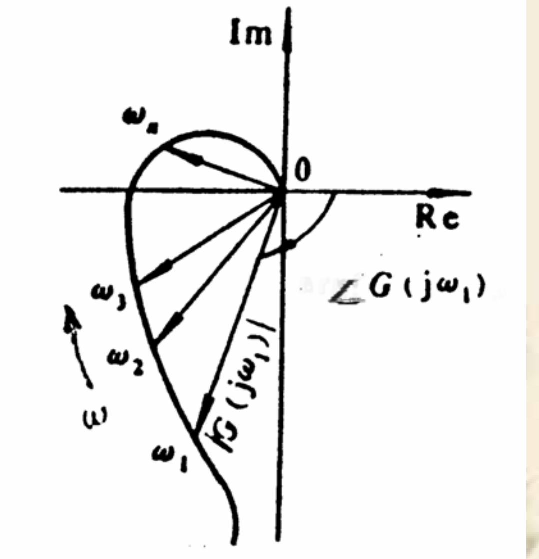
实部：$U(\omega)=A(\omega)\cos\varphi(\omega)$

虚部：$V(\omega)=A(\omega)\sin\varphi(\omega)$

*ω*从 $0\rightarrow\infty$ 时，

*G(jω)*端点的轨迹：频率特性的极坐标图

（*Nyquist*图）



1.典型环节的*Nyquist*图

(1)比例环节

传递函数：$G(s)=K$

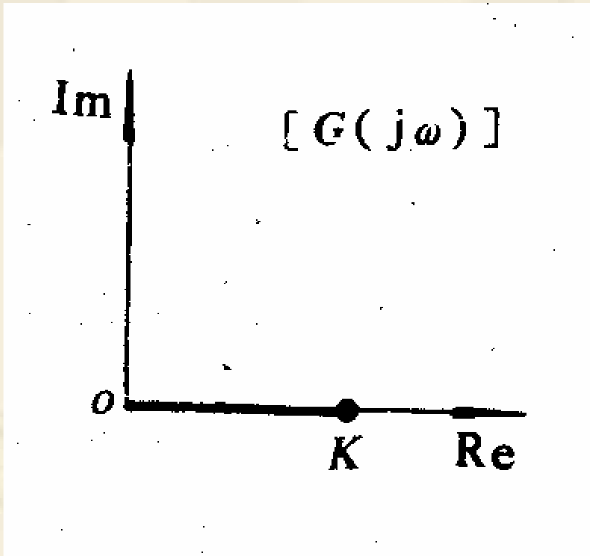
频率特性：$G(j\omega)=K$

幅频：$|G(j\omega)|=K$

相频：$\angle G(j\omega)=0^o$

实频：$U(\omega)=K$

虚频：$V(\omega)=0$



实轴上的一定点，其坐标为(K, $j0$)

1.典型环节的*Nyquist*图

(2)积分环节

传递函数：$G(s)=1/s$

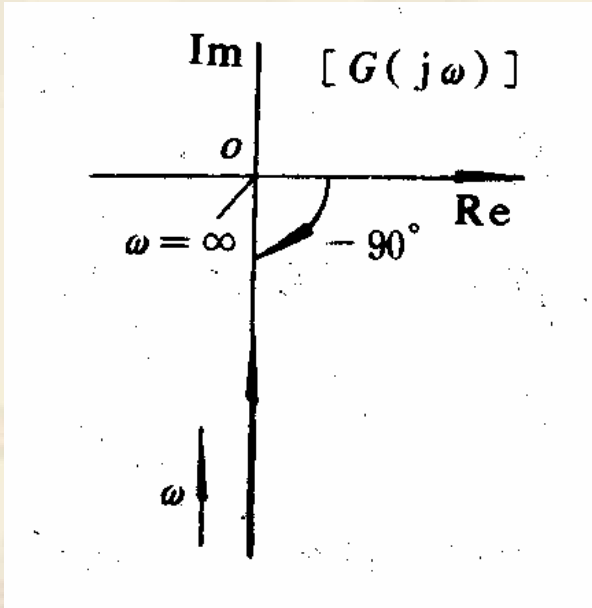
频率特性：$G(j\omega)=1/j\omega$

幅频：$|G(j\omega)|=1/\omega$

相频：$\angle G(j\omega)=-90^o$

实频：$U(\omega)=0$

虚频：$V(\omega)=-1/\omega$



虚轴的下半轴，由无穷远点指向原点

1.典型环节的*Nyquist*图

(3)微分环节

传递函数：$G(s)=s$

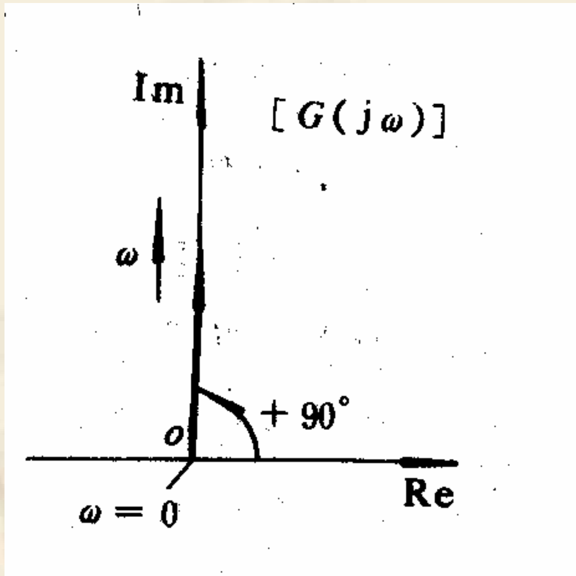
频率特性：$G(j\omega)=j\omega$

幅频：$|G(j\omega)| = \omega$

相频：$\angle G(j\omega)=90^o$

实频：$U(\omega)=0$

虚频：$V(\omega)= \omega$



虚轴的上半轴，由原点指向无穷远点

1.典型环节的*Nyquist*图

(4)惯性环节

传递函数： $G(s)=\dfrac{K}{Ts+1}$

频率特性： $G(j\omega)=\dfrac{K}{jT\omega+1}=\dfrac{K}{1+T^2\omega^2}-j\dfrac{KT\omega}{1+T^2\omega^2}$

幅频： $|G(j\omega)|=\dfrac{K}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}$　　相频： $\angle G(j\omega)=-arctgT\omega$

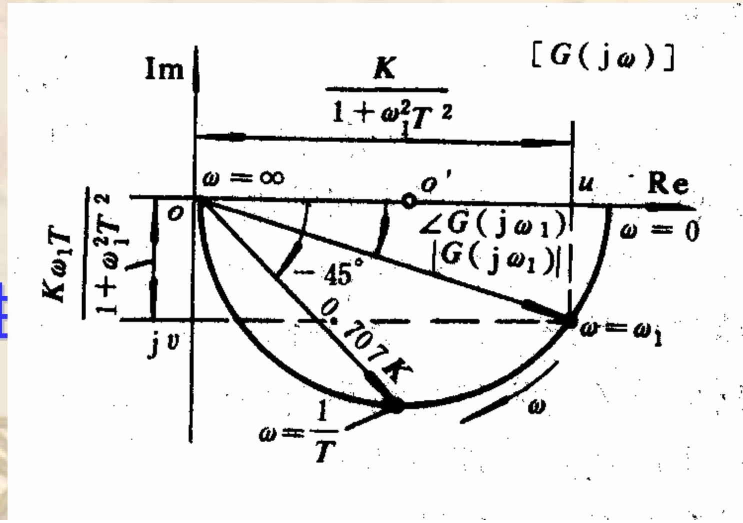
实频：$U(\omega)=\dfrac{K}{1+T^2\omega^2}$　　虚频： $V(\omega)=\dfrac{KT\omega}{1+T^2\omega^2}$

当 $\omega=0$ 时，$|G(j\omega)|=K$，$\angle G(j\omega)=0^o$

当 $\omega=1/T$ 时，$\angle G(j\omega)=-45^o$

当 $\omega=\infty$ 时，$|G(j\omega)|=0$，$\angle G(j\omega)=-90^o$

当ω从0→∞时，其*Nyquist*图为正实轴下的一个半圆，圆心为(*K/2, j0*)，半径为*K/2*。



1.典型环节的*Nyquist*图

(5)一阶微分环节

传递函数：$G(s)=1+Ts$

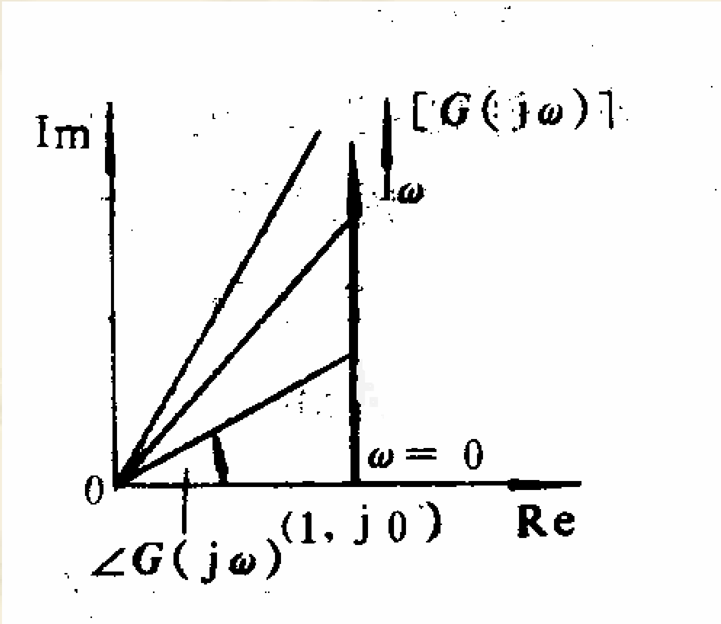
频率特性：$G(j\omega)=1+jT\omega$

幅频：$|G(j\omega)|=\sqrt{1+T^2\omega^2}$

相频：$\angle G(j\omega)=arctgT\omega$

实频：$U(\omega)=1$

虚频：$V(\omega)=T\omega$



始于点(1，j0)，平行于虚轴

1.典型环节的*Nyquist*图

(6)振荡环节

传递函数： $G(s)=\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$

频率特性： $G(j\omega)=\dfrac{\omega_n^2}{-\omega^2+\omega_n^2+j2\xi\omega_n\omega}$ $(0<\xi<1)$

(令 $\lambda=\omega/\omega_n$) ， $G(j\omega)=\dfrac{1}{(1-\lambda^2)+j2\xi\lambda}=\dfrac{1-\lambda^2}{(1-\lambda^2)^2+j4\xi^2\lambda^2}-j\dfrac{2\xi\lambda}{(1-\lambda^2)^2+j4\xi^2\lambda^2}$

幅频： $|G(j\omega)|=\dfrac{1}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2+j4\xi^2\lambda^2}}$ 相频： $\angle G(j\omega)=-arctg\dfrac{2\xi\lambda}{1-\lambda^2}$

实频： $U(\omega)=\dfrac{1-\lambda^2}{(1-\lambda^2)^2+j4\xi^2\lambda^2}$ 虚频 ： $V(\omega)=-\dfrac{2\xi\lambda}{(1-\lambda^2)^2+j4\xi^2\lambda^2}$

当 $\lambda=0$， 即 $\omega=0$时， $|G(j\omega)|=1$，$\angle G(j\omega)=0^o$ ；

当 $\lambda=1$， 即 $\omega=\omega_n$时， $|G(j\omega)|=1/(2\xi)$ ，$\angle G(j\omega)=-90^o$ ；

当 $\lambda=\infty$，即 $\omega=\infty$时， $|G(j\omega)|=0$，$\angle G(j\omega)=-180^o$ ；

1.典型环节的*Nyquist*图

(6)振荡环节

当 ω从$0\to\infty$(即λ由$0\to\infty$)时，$G(j\omega)$的幅值由$1\to0$，其相位由$0^o\to-180^o$。其*Nyquist*图始于点($1, j0$)，而终于点($0, j0$)。

曲线与虚轴的交点的频率就是无阻尼固有频率ω_n，此时的幅值为 $1/(2\xi)$

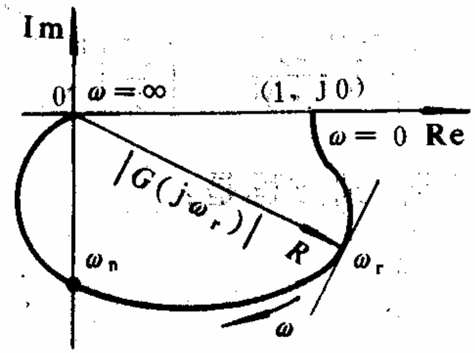
$\xi<0.707$ 时，$|G(j\omega)|$在频率为ω_r 处出现峰值(谐振峰值， ω_r一谐振频率)

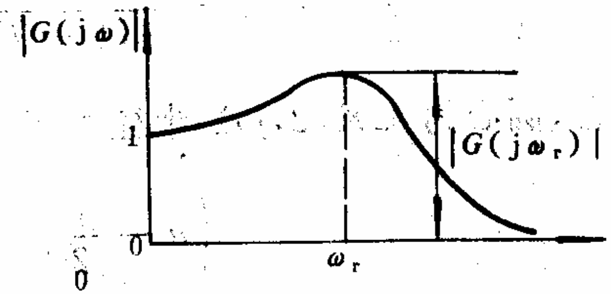
由 $\left.\dfrac{\partial|G(j\omega)|}{\partial\omega}\right|_{\omega=\omega_r}=0$ 有 $\omega_r=\omega_n\sqrt{1-2\xi^2}$ $|G(j\omega_r)|=\dfrac{1}{2\xi\sqrt{1-2\xi^2}}$

显然 $\omega_r<\omega_d<\omega_n$

$$\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

(有阻尼固有频率)



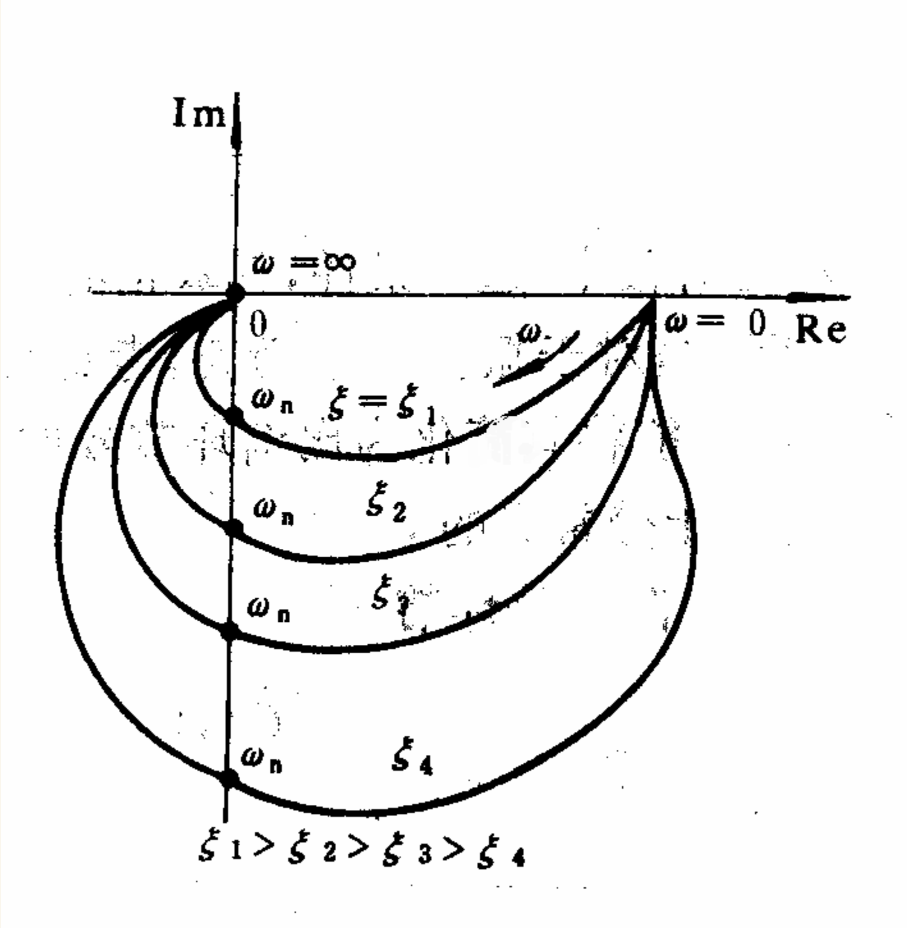


1.典型环节的*Nyquist*图

(6)振荡环节

阻尼比ξ的影响

- $\xi \geq 0.707$，
  无谐振
- $\xi \geq 1$，
  两个一阶环节的组合



1.典型环节的*Nyquist*图

(7)延时环节

传递函数：$G(s)=e^{-\tau s}$

频率特性：$G(j\omega)=e^{-j\tau\omega}=\cos\tau\omega-j\sin\tau\omega$

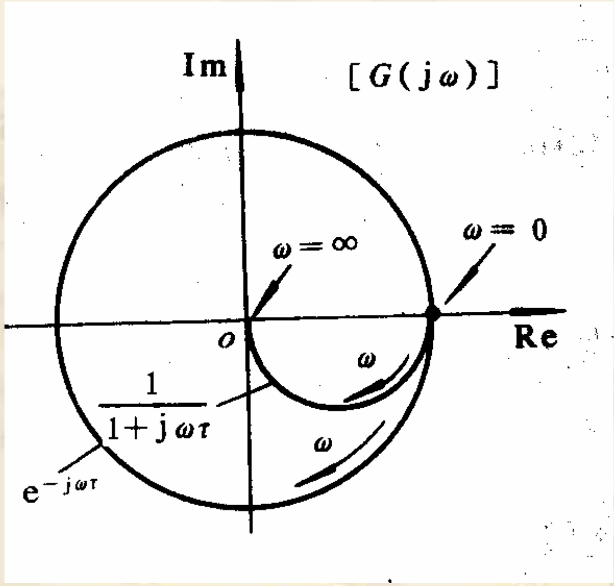
幅频：$|G(j\omega)|=1$

相频：$\angle G(j\omega)=-\tau\omega$

实频：$U(\omega)=\cos\tau\omega$

虚频：$V(\omega)=-\sin\tau\omega$

*Nyquist*图：单位圆



2.绘制*Nyquist*图的一般方法

1) 由$G(j\omega)$求出其实频特性$\mathrm{Re}[G(j\omega)]$、虚频特性$\mathrm{Im}[G(j\omega)]$和幅频特性$|G(j\omega)|$、相频特性$\angle G(j\omega)$的表达式；

2) 求出若干特征点，如起点($\omega=0$)、终点($\omega=\infty$)、与实轴的交点($\mathrm{Im}[G(j\omega)]=0$)、与虚轴的交点($\mathrm{Re}[G(j\omega)]=0$)等，并标注在极坐标图上；

3) 补充必要的几点，根据$|G(j\omega)|$、$\angle G(j\omega)$和$\mathrm{Re}[G(j\omega)]$、$\mathrm{Im}[G(j\omega)]$的变化趋势以及$G(j\omega)$所处的象限，作出Nyquist曲线的大致图形。

例1 系统的传递函数 $G(s)=\dfrac{K}{s(Ts+1)}$

解 系统的频率特性

$$G(j\omega)=\frac{K}{j\omega(1+jT\omega)}=K\cdot\frac{1}{j\omega}\cdot\frac{1}{1+jT\omega}=\frac{-KT}{1+T^2\omega^2}-j\frac{K}{\omega(1+T^2\omega^2)}$$

幅频：$|G(j\omega)|=\dfrac{K}{\omega\sqrt{1+T^2\omega^2}}$ 相频：$\angle G(j\omega)=-90^{\circ}-arctgT\omega$

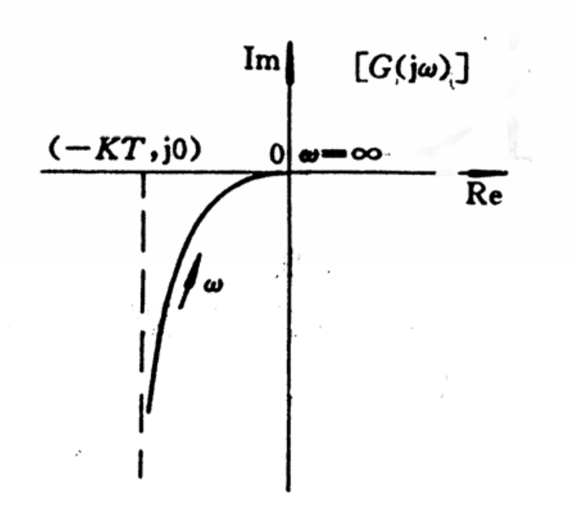
实频：$U(\omega)=\dfrac{-KT}{1+T^2\omega^2}$ 虚频：$V(\omega)=-\dfrac{K}{\omega(1+T^2\omega^2)}$

$\omega=0$，$U(\omega)=-KT$，$V(\omega)=-\infty$，

$|G(j\omega)|=\infty$，$\angle G(j\omega)=-90^{\circ}$

$\omega=\infty$，$U(\omega)=0$，$V(\omega)=0$，

$|G(j\omega)|=0$，$\angle G(j\omega)=-180^{\circ}$



积分环节改变了起始点（低频段）

例2 系统的传递函数 $G(s)=\dfrac{K}{s^2(1+T_1s)(1+T_2s)}$

解 系统的频率特性

$$G(j\omega)=\frac{K}{(j\omega)^2(1+jT_1\omega)(1+jT_2\omega)}=\frac{K(1-T_1T_2\omega^2)}{-\omega^2(1+T_1^2\omega^2)(1+T_2^2\omega^2)}+j\frac{K(T_1+T_2)}{\omega(1+T_1^2\omega^2)(1+T_2^2\omega^2)}$$

幅频：$|G(j\omega)|=\dfrac{K}{\omega^2\sqrt{1+T_1^2\omega^2}\sqrt{1+T_2^2\omega^2}}$ 相频：$\angle G(j\omega)=-180^\circ-arctgT_1\omega-arctgT_2\omega$

实频：$U(\omega)=\dfrac{K(1-T_1T_2\omega^2)}{-\omega^2(1+T_1^2\omega^2)(1+T_2^2\omega^2)}$ 虚频：$V(\omega)=\dfrac{K(T_1+T_2)}{\omega(1+T_1^2\omega^2)(1+T_2^2\omega^2)}$

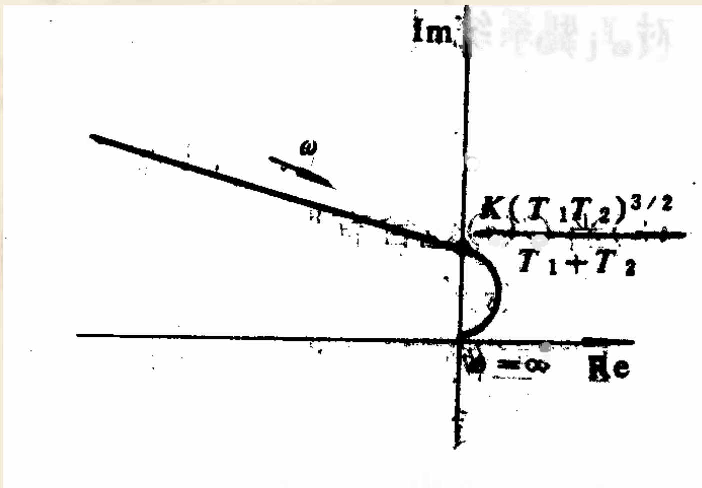
$\omega=0$，$U(\omega)=-\infty$，$V(\omega)=\infty$，

$|G(j\omega)|=\infty$，$\angle G(j\omega)=-180^\circ$

$\omega=\infty$，$U(\omega)=0$，$V(\omega)=0$，

$|G(j\omega)|=0$，$\angle G(j\omega)=-180^\circ$

$\omega=\dfrac{1}{\sqrt{T_1T_2}}$ $U(\omega)=0$ $V(\omega)=\dfrac{K(T_1T_2)^{3/2}}{T_1+T_2}$



3. *Nyquist*图的一般形状

$$G(j\omega)=\frac{K(1+j\tau_1\omega)(1+j\tau_2\omega)\cdots(1+j\tau_m\omega)}{(j\omega)^{\nu}(1+jT_1\omega)(1+jT_2\omega)\cdots(1+jT_n\omega)}\quad(m\le n)$$

1) 当ω＝0时：

对0型系统，$|G(j\omega)|=K$，$\angle G(j\omega)=0°$，*Nyquist*曲线的起始点是一个在正实轴上有有限值的点；

对Ⅰ型系统，$|G(j\omega)|=\infty$，$\angle G(j\omega)=-90°$，在低频段，*Nyquist*曲线渐近于与负虚轴平行的直线；

对Ⅱ型系统，$|G(j\omega)|=\infty$，$\angle G(j\omega)=-180°$，在低频段，$G(j\omega)$负实部是比虚部阶数更高的无穷大。

2) 当ω＝∞时，$|G(j\omega)|=0$，$\angle G(j\omega)=(m-n)\times 90°$。

3) 当$G(s)$包含有导前环节时，若由于相位非单调下降，则*Nyquist*曲线将发生“弯曲”。

三、频率特性的对数坐标图(Bode图)

1.Bode图

分别表示幅频和相频

① 对数幅频特性图

横坐标：ω，对数分度，标注真值；

几何上的等分 → 真值的等比

纵坐标：│G(jω)│的分贝值（dB)，

dB=20lg│G(jω)│；线性分度；

特别：

0dB，│G(jω)│=1，

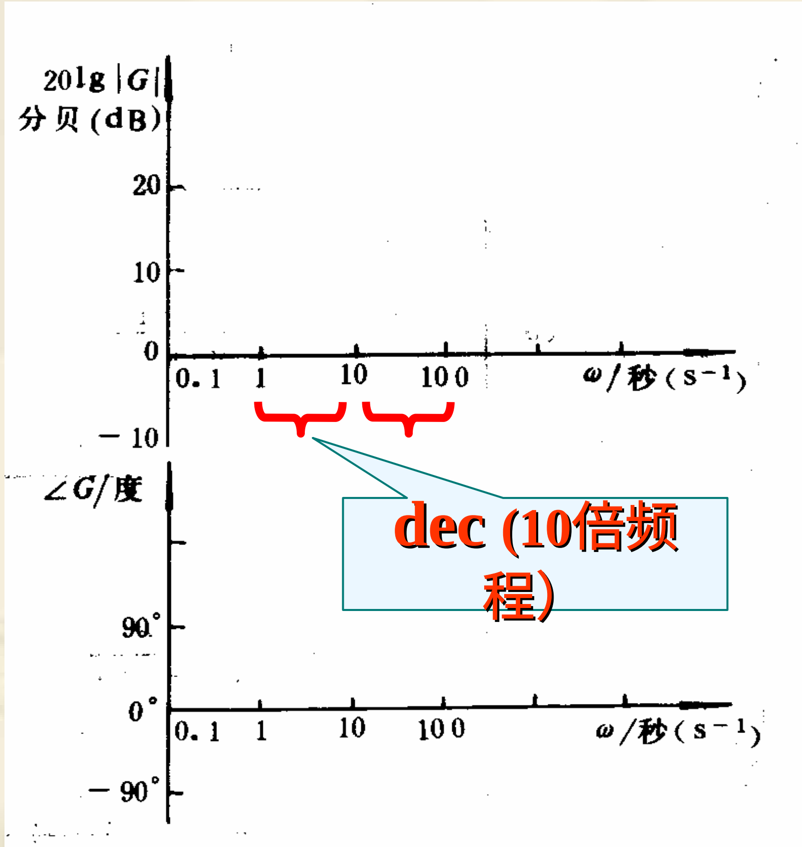
输出幅值=输入幅值

dB>0，│G(jω)│>1，

输出幅值>输入幅值(放大)

dB<0，│G(jω)│<1，

输出幅值<输入幅值(衰减)



② 对数相频特性图

横坐标：同上

纵坐标：∠G(jω)，

线性分度；

Bode图优点

1) 作图简单：① 化乘除为加减，系统的Bode图为各环节的Bode图的线性叠加；②可通过近似方法作图；

2) 便于细化感兴趣的频段；

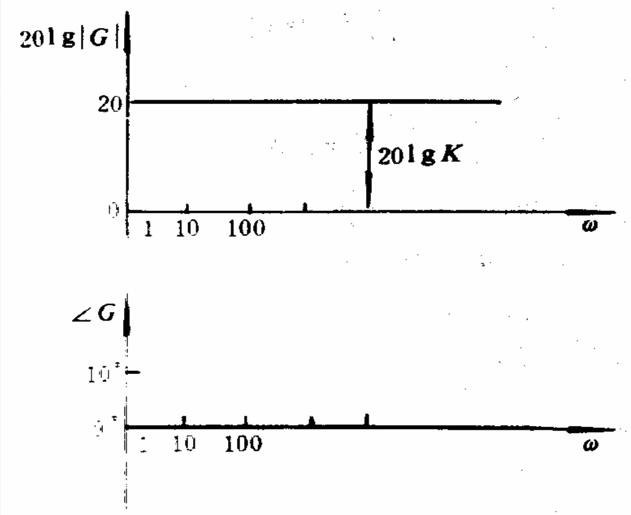
3) 物理意义明显；

4) 环节对系统性能的影响明显；

2.典型环节的*Bode*图

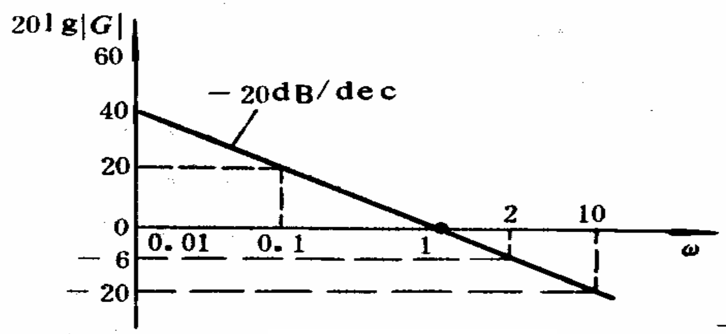
(1)比例环节　　$G(s)=K$　　$G(j\omega)=K$

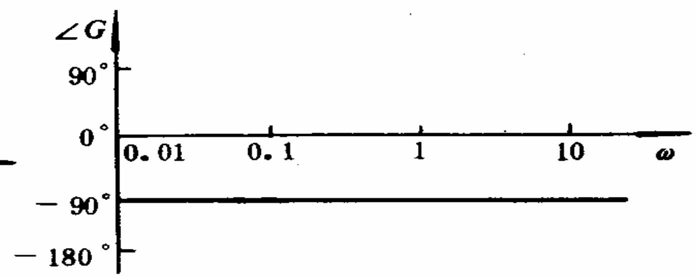
$20\lg|G(j\omega)|=20\lg K$；　$\angle G(j\omega)=0^o$



(2)积分环节　　$G(s)=1/s$　　$G(j\omega)=1/j\omega$

$20\lg|G(j\omega)|=20\lg 1/\omega=-20\lg\omega$　　$\angle G(j\omega)=-90^o$



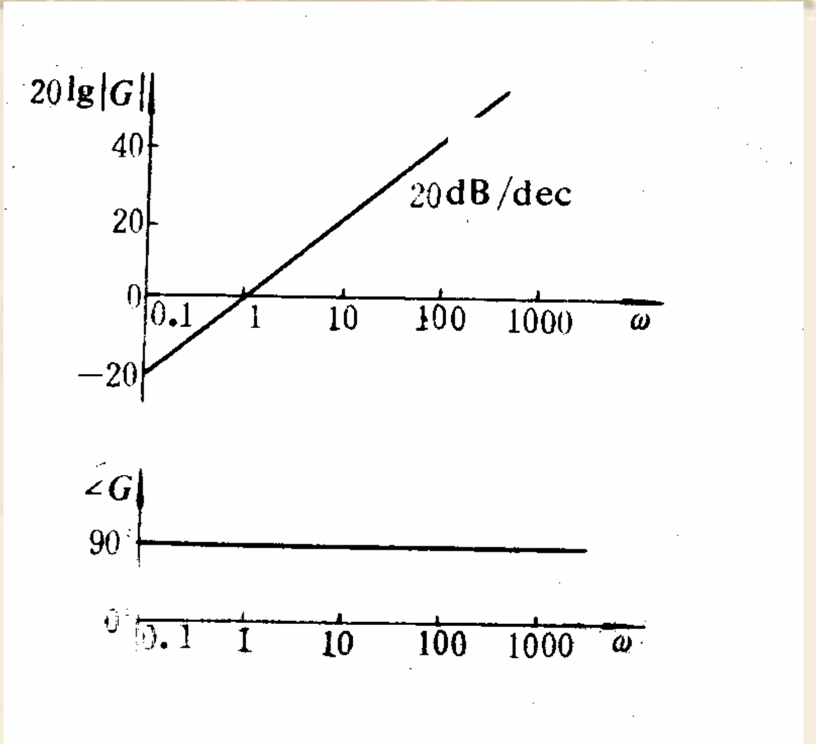


对数幅频特性：过点（1，0）
斜率−20dB/dec的直线

对数相频特性：过点（0，-90^o）
平行于横轴的直线

2.典型环节的*Bode*图

(3)微分环节　　$G(s)=s$　　$G(j\omega)=j\omega$



$$20\lg|G(j\omega)| = 20\lg\omega$$

$$\angle G(j\omega) = 90^o$$

对数幅频特性：过点（1，0）斜率20dB/dec的直线

对数相频特性：过点（0，90^o）平行于横轴的直线

2.典型环节的*Bode*图

(4)惯性环节 $G(s)=\dfrac{1}{Ts+1}$ $G(j\omega)=\dfrac{1}{1+jT\omega}$

令：$\omega_T=\dfrac{1}{T}$ $G(j\omega)=\dfrac{\omega_T}{\omega_T+j\omega}$ 故：$|G(j\omega)|=\dfrac{\omega_T}{\sqrt{\omega_T^2+\omega^2}}$ $\angle G(j\omega)=-arctg\dfrac{\omega}{\omega_T}$

对数幅频特性：$20\lg|G(j\omega)|=20\lg\omega_T-20\lg\sqrt{\omega_T^2+\omega^2}$

低频段（$\omega \ll \omega_T$），

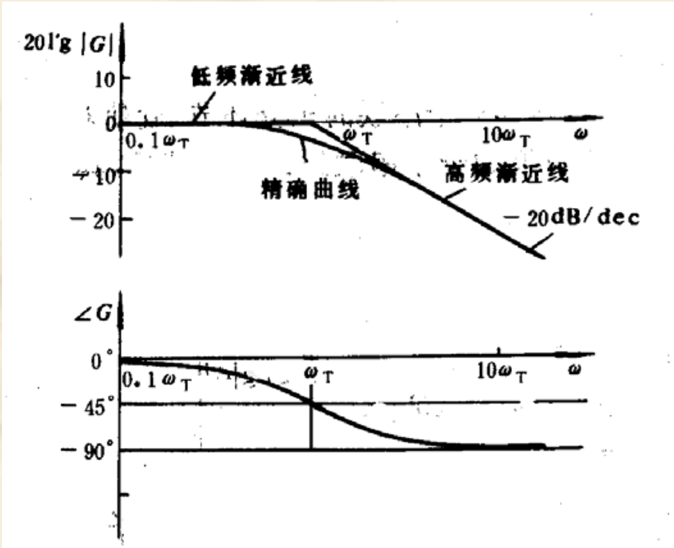
$20lg|G(j\omega)| \approx 20lg\,\omega_T - 20lg\,\omega_T = 0dB$

高频段（$\omega \gg \omega_T$），

$20lg|G(j\omega)| \approx 20lg\,\omega_T - 20lg\,\omega$

始于点（ω_T，0)，斜率－20dB/dec的直线

ω_T：转角频率



$$20\lg|G(j\omega)| = 20\lg\omega_T - 20\lg\sqrt{\omega_T^2+\omega^2}$$

低频段渐近线： $20lg|G(j\omega)| \approx 0dB$

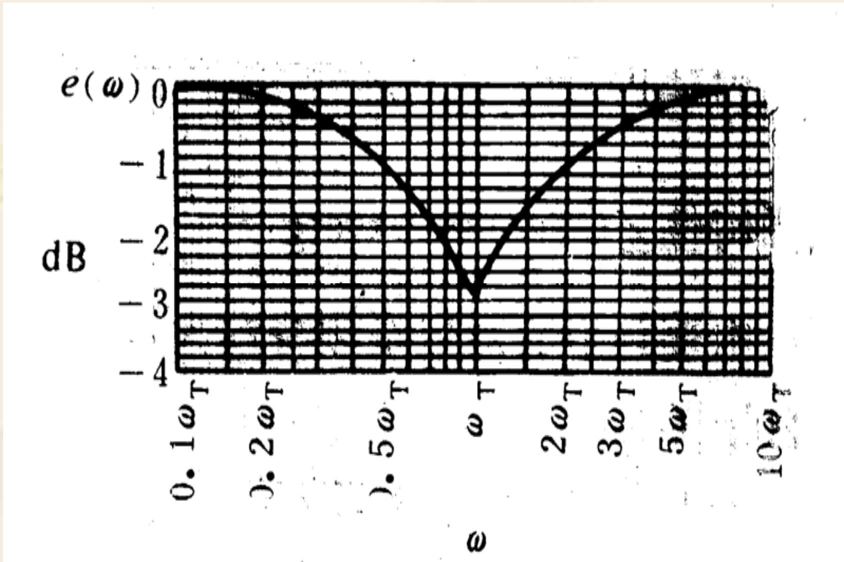
误差： $$e(\omega) = 20\lg\omega_T - 20\lg\sqrt{\omega_T^2+\omega^2}$$

高频段渐近线： $20lg|G(j\omega)| \approx 20lg\omega_T - 20lg\omega$

误差： $$e(\omega) = 20\lg\omega - 20\lg\sqrt{\omega_T^2+\omega^2}$$

对数相频特性：

由： $$\angle G(j\omega) = -arctg\frac{\omega}{\omega_T}$$



$\omega=0$， $\angle G(j\omega)=0°$；

$\omega=\omega_T$， $\angle G(j\omega)=-45°$；

$\omega=\infty$， $\angle G(j\omega)=-90°$；

对数相频特性曲线对称于点 $(\omega_T, -45°)$

$\omega \leq 0.1\omega_T$ 时， $\angle G(j\omega) \to 0°$

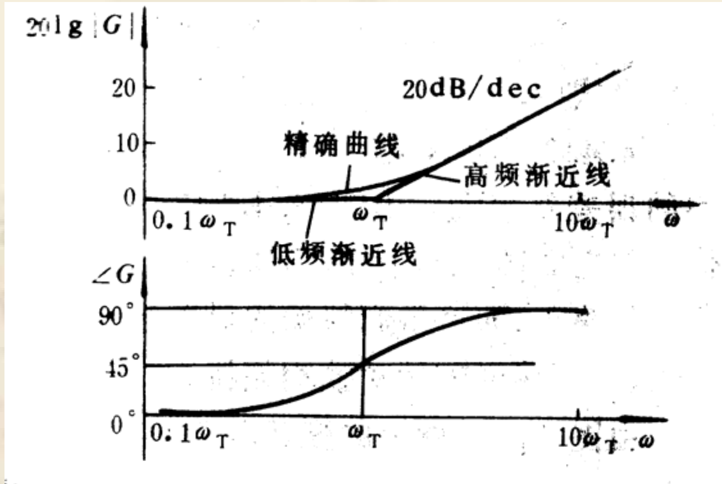
$\omega \geq 10\omega_T$ 时， $\angle G(j\omega) \to 90°$

2.典型环节的*Bode*图

(5)一阶微分环节 $G(s)=1+Ts$ $G(j\omega)=1+jT\omega=\dfrac{\omega_T+j\omega}{\omega_T}$ $(\omega_T=\dfrac{1}{T})$

故：$|G(j\omega)|=\dfrac{\sqrt{\omega_T^2+\omega^2}}{\omega_T}$ $\angle G(j\omega)=arctg\dfrac{\omega_T}{\omega}$ ω_T： 转角频率

对数幅频特性：$20\lg|G(j\omega)|=20\lg\sqrt{\omega_T^2+\omega^2}-20\lg\omega_T$



低频段（$\omega<<\omega_T$），

$20lg|G(j\omega)|\approx 20lg\omega_T - 20lg\omega_T = 0dB$

高频段（$\omega>>\omega_T$），

$20lg|G(j\omega)|\approx 20lg\omega - 20lg\omega_T$

始于点（ω_T，0)，斜率20*dB/dec*的直线

对数相频特性：

$\omega=0$，$\angle G(j\omega)=0°$；$\omega=\omega_T$，$\angle G(j\omega)=45°$；$\omega=\infty$，$\angle G(j\omega)=90°$；

对数相频特性曲线对称于点(ω_T，45°)

2.典型环节的*Bode*图

(6)振荡环节 $$G(s)=\frac{\omega_n}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} \qquad (0\le\xi<1)$$

$$G(j\omega)=\frac{\omega_n^2}{-\omega^2+\omega_n^2+j2\xi\omega_n\omega}=\frac{1}{(1-\lambda^2)+j2\xi\lambda} \qquad (\lambda=\frac{\omega}{\omega_n})$$

$$|G(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2+j4\xi^2\lambda^2}} \qquad \angle G(j\omega)=-arctg\frac{2\xi\lambda}{1-\lambda^2}$$

对数幅频特性： $$20\lg|G(j\omega)|=-20\lg\sqrt{(1-\lambda^2)^2+4\xi^2\lambda^2}$$

低频段（$\omega \ll \omega_n$；$\lambda\approx 0$），

$20lg|G(j\omega)|\approx 0dB$ （0*dB*线）

高频段（$\omega \gg \omega_n$；$\lambda \gg 1$），

$20lg|G(j\omega)|\approx -40lg\lambda=-40lg\omega+40lg\omega_n$

（始于点（ω_n，0)，斜率－40*dB/dec*的直线）

ω_n： 转角频率

2.典型环节的*Bode*图

(6)振荡环节

误差：

低频段

$$e(\lambda,\xi)=-20\lg\sqrt{(1-\lambda^2)^2+4\xi^2\lambda^2}$$

高频段

$$e(\lambda,\xi)=40\lg\lambda-20\lg\sqrt{(1-\lambda^2)^2+4\xi^2\lambda^2}$$

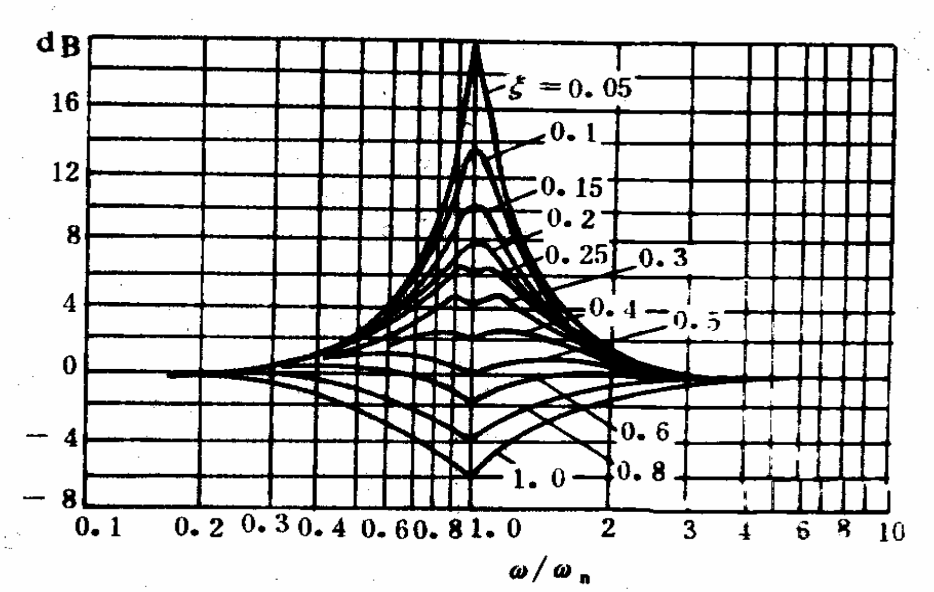
对数相频特性：

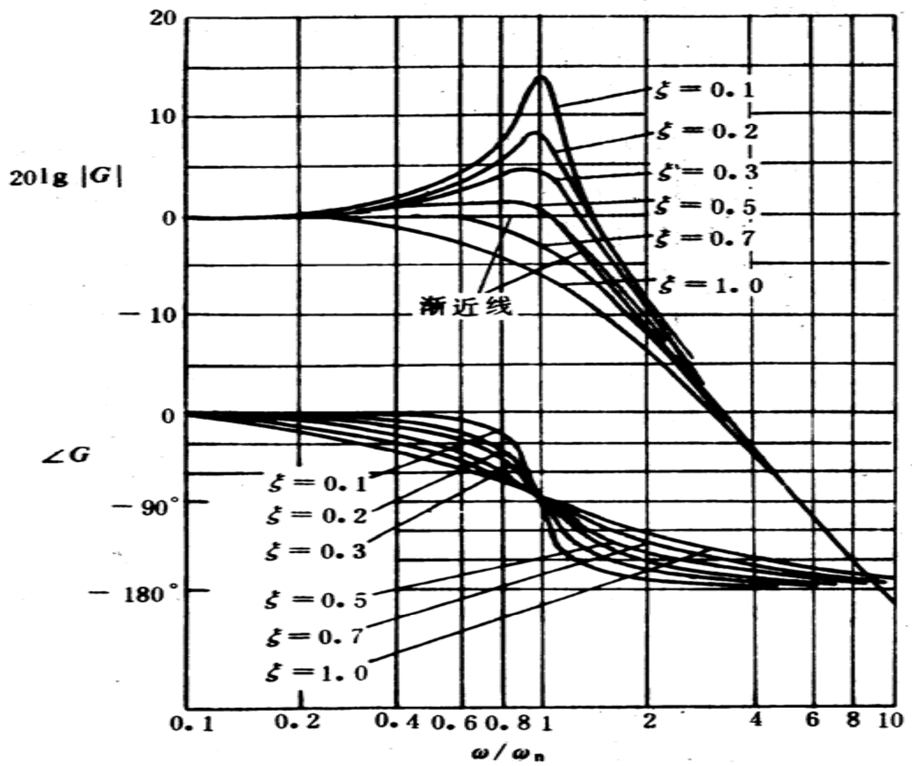
ω=0， ∠G(jω)=0°；

$\omega=\omega_n$， ∠G(jω)=－90°；

ω=∞， ∠G(jω)=－180°；

对数相频特性曲线对称于点（ω_n，－90°）



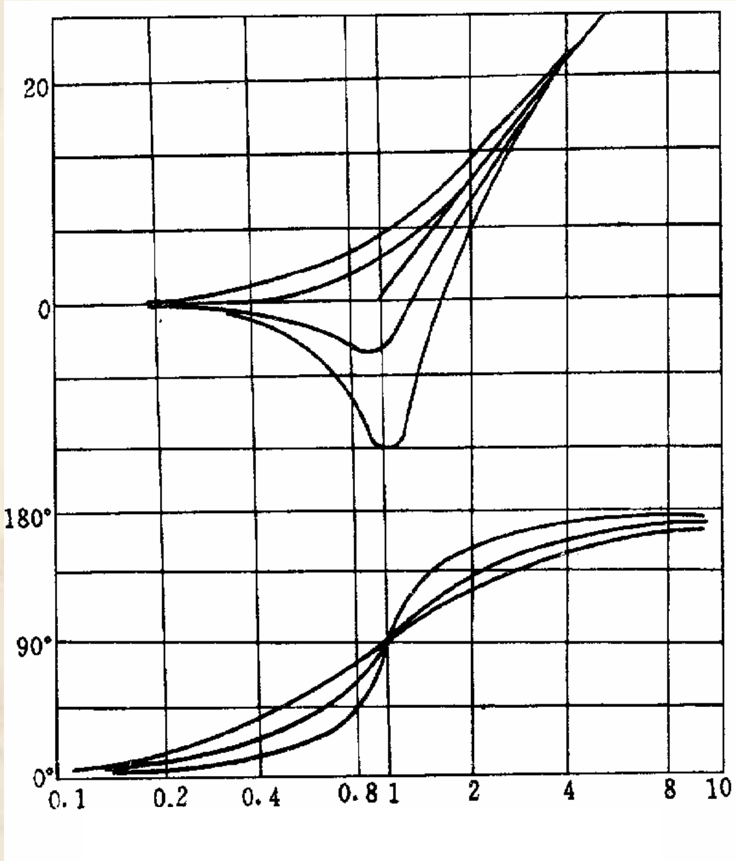


2.典型环节的*Bode*图

(7)二阶微分环节

$$G(s)=\frac{s^2}{\omega_n^2}+\frac{2\xi}{\omega_n}s+1 \qquad G(j\omega)=-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}+j2\xi\frac{\omega}{\omega_n}+1$$

与二阶振荡系统Bode图对称于频率轴。

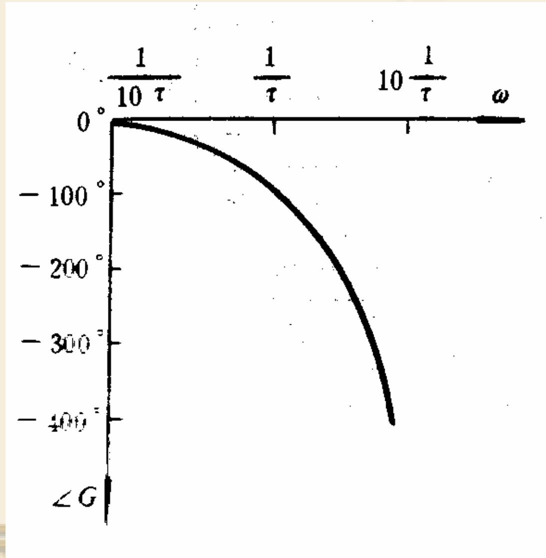


(8)延时环节

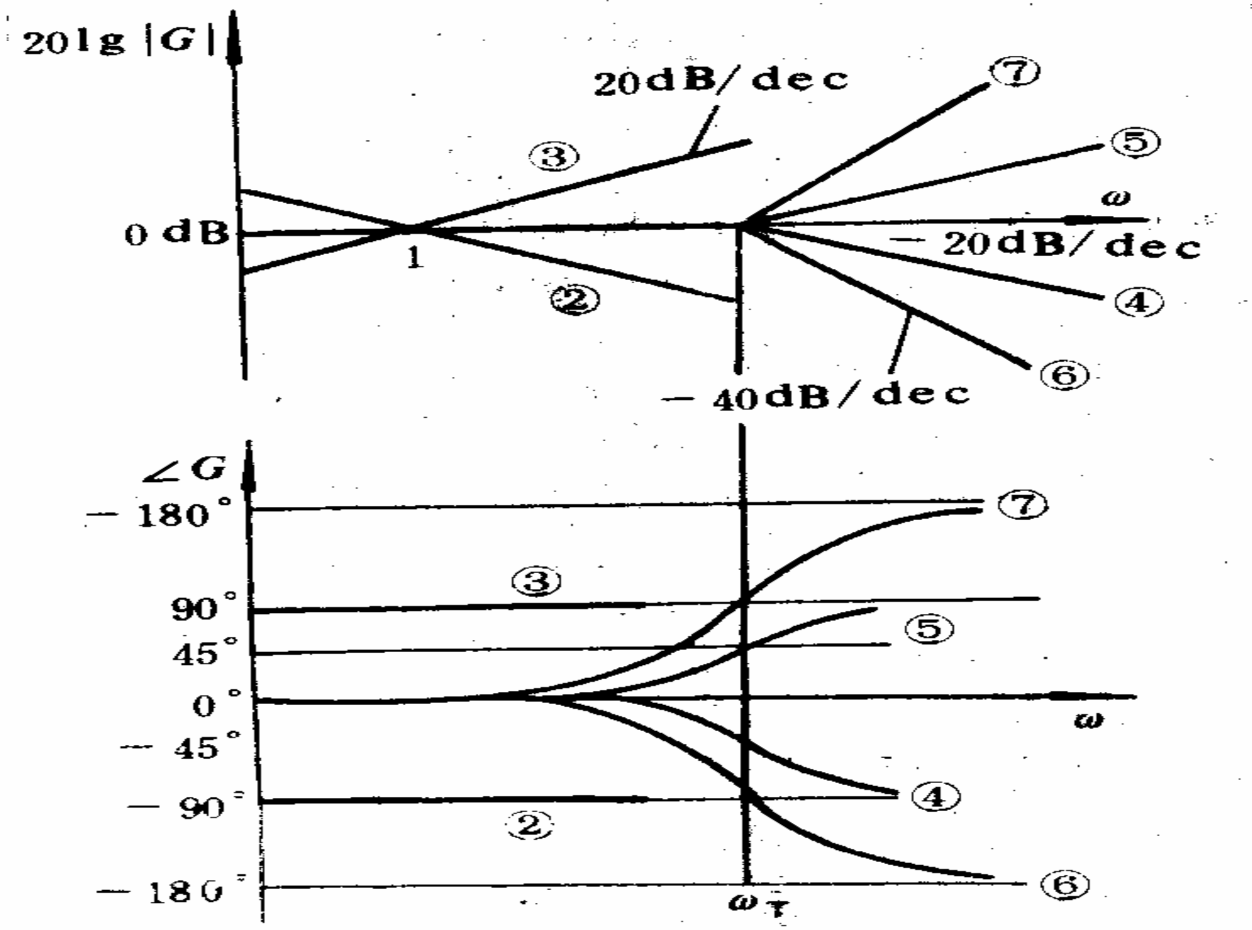
$$G(s)=e^{-\tau s} \qquad G(j\omega)=e^{-j\tau\omega}$$

$$|G(j\omega)|=1 \qquad \angle G(j\omega)=-\tau\omega$$

$$20\lg|G(j\omega)|=0\text{dB}$$



因对数分度，
直线→曲线



② 积分环节　　⑤ 导前环节

③ 微分环节　　⑥ 振荡环节

④ 惯性环节　　⑦ 二阶微分环节

3.系统*Bode*图的绘制

(1) 环节曲线叠加法

1) G(s) →标准形（常数项为1）→G(jω)
2) 求典型环节的转角频率（惯性、一阶微分、振荡和二阶微分环节）
3) 作出各环节的对数幅频特性的渐近线
4) 误差修正（必要时）
5) 将各环节的对数幅频特性叠加(不包括系统总的增益K)
6) 将叠加后的曲线垂直移动20lgK，得到系统的对数幅频特性
7) 作各环节的对数相频特性，然后叠加而得到系统总的对数相频特性
8) 有延时环节时，对数幅频特性不变，对数相频特性则应加上－τω

3.系统Bode图的绘制

(1) 环节曲线叠加法

例 $$G(s)=\frac{24(0.25s+0.5)}{(5s+2)(0.05s+2)}$$

1) G(s) →标准形→G(jω)

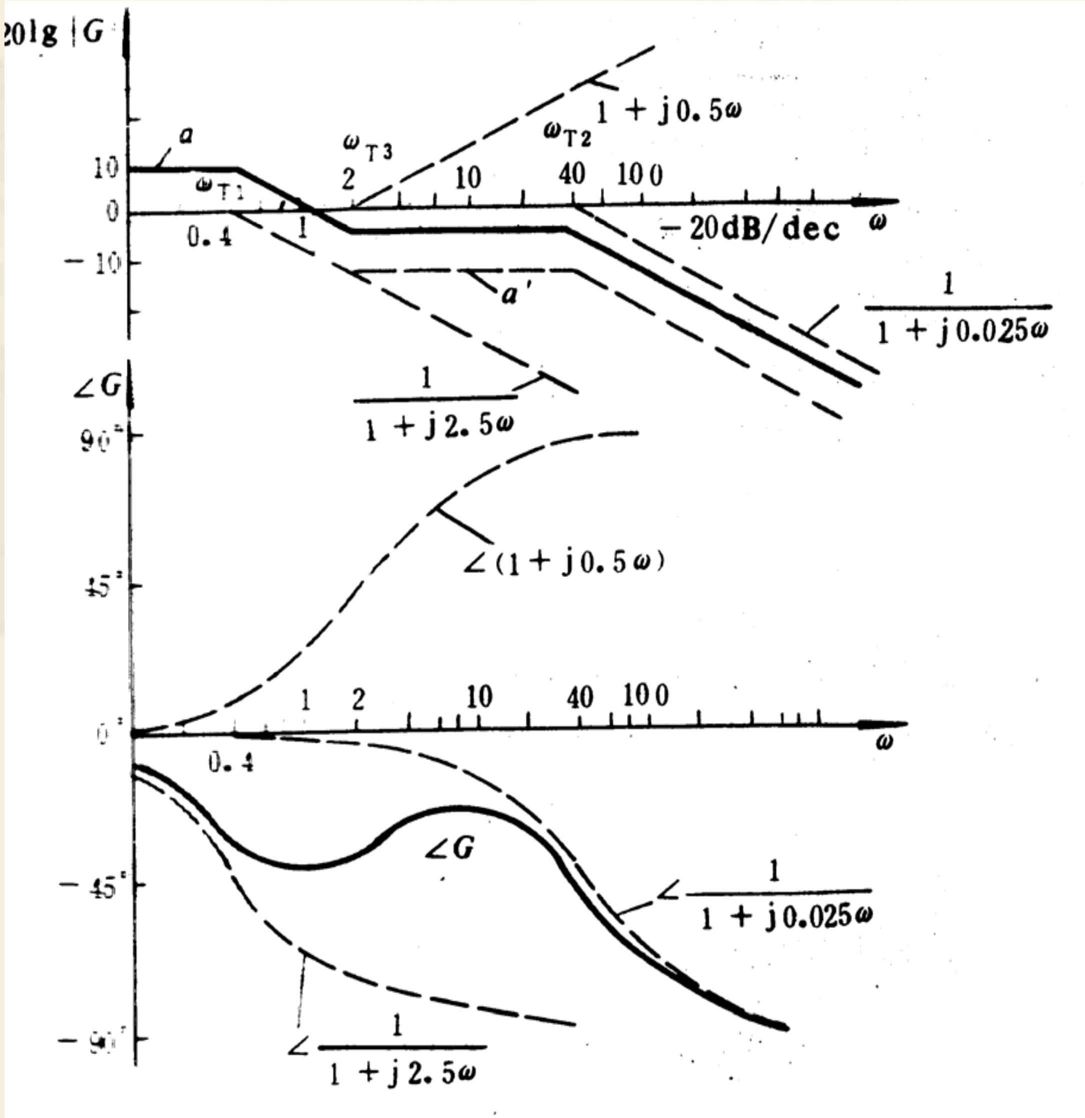
$$G(s)=\frac{3(0.5s+1)}{(2.5s+1)(0.025s+1)}$$

$$G(j\omega)=\frac{3(1+j0.5\omega)}{(1+j2.5\omega)(1+j0.025\omega)}$$

2) 转角频率

$\omega_{T_1}=0.4$ $\omega_{T_2}=40$ $\omega_{T_3}=2$

3) 各环节的对数幅频特性的渐近线，叠加，平移



4) 各环节的对数相频特性曲线,叠加

3.系统Bode图的绘制

(2) 顺序斜率法

$$G(j\omega)=\frac{K(1+j\tau_1\omega)(1+j\tau_2\omega)\cdots(1+j\tau_m\omega)}{(j\omega)^\nu(1+jT_1\omega)(1+jT_2\omega)\cdots(1+jT_{n-\nu}\omega)}$$

- 系统在低频段 $\omega \ll \min\left(\frac{1}{\tau_1},\frac{1}{\tau_2},\cdots,\frac{1}{T_1},\frac{1}{T_2},\cdots\right)$ 的频率特性为 $\frac{K}{(j\omega)^\nu}$

  因此，其对数幅频特性在低频段表现为过点(1，$20lgK$)，斜率为 $-20\nu\, dB/dec$ 的直线

- 在各环节的转角频率处，系统的对数幅频特性渐近线的斜率发生变化，其变化量等于相应的环节在其转角频率处斜率的变化量（即其高频渐近线的斜率）。
- 当$G(j\omega)$包含振荡环节或二阶微分环节时，不改变上述结论。

  根据上述特点，可以直接绘制系统的对数幅频特性

3.系统*Bode*图的绘制

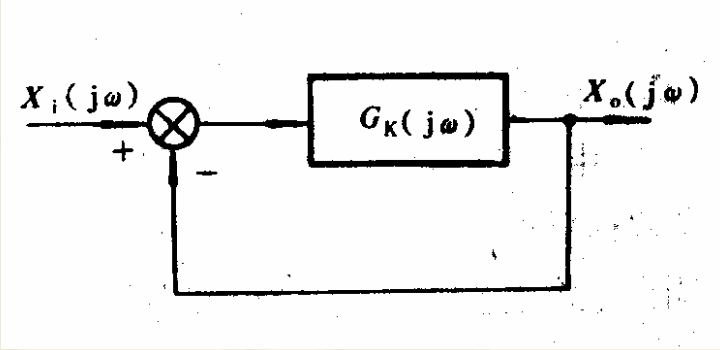
(2) 顺序斜率法

1) G(s) →标准形（常数项为1）→G(jω)；
2) 确定各典型环节的转角频率，并由小到大将其顺序标在横坐标轴上；
3) 过点(1，20lgK)，作斜率为－20ν dB/dec的直线；
4) 延长该直线，并且每遇到一个转角频率便改变一次斜率，其原则是：如遇惯性环节的转角频率则斜率增加-20dB/dec；遇一阶微分环节的转角频率，斜率增加+20dB/dec；如遇振荡环节的转角频率，斜率增加-40dB/dec；二阶微分环节则增加+40dB/dec。
5) 如果需要，可根据误差修正曲线对渐近线进行修正，其办法是在同一频率处将各环节误差值迭加，即可得到精确的对数幅频特性曲线。

四、闭环频率特性与频域特征量

1.闭环频率特性

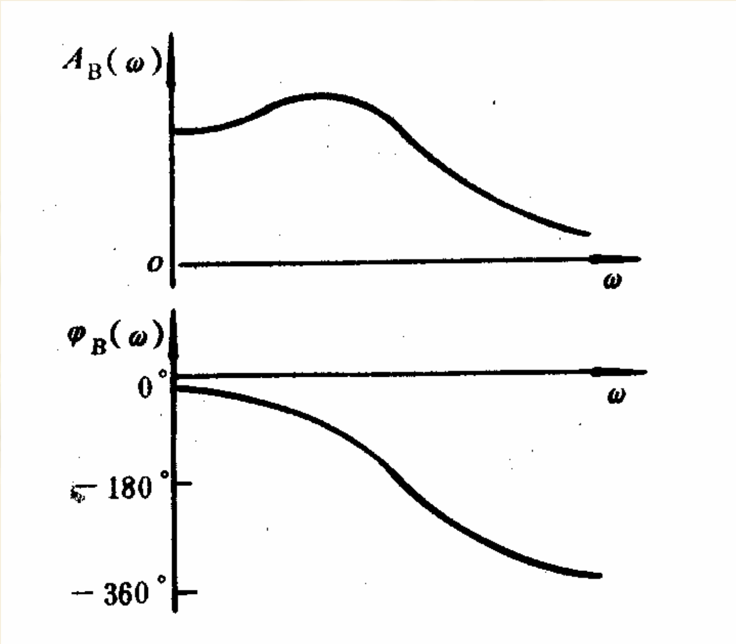
$$\frac{X_o(j\omega)}{X_i(j\omega)}=G_B(j\omega)=\frac{G_K(j\omega)}{1+G_K(j\omega)}$$



$$A_B(\omega)=\left|G_B(j\omega)\right|=\frac{\left|G_K(j\omega)\right|}{\left|1+G_K(j\omega)\right|}$$

$$\varphi_B(\omega)=\angle G_B(j\omega)$$

$$=\angle G_K(j\omega)-\angle\left[1+G_K(j\omega)\right]$$



四、闭环频率特性与频域特征量

2. 系统频域特征量（频域性能指标）

1）零频值A(0)

2) 复现频率ω_M与复现带宽0～ω_M

3) 谐振频率ω_r与相对谐振峰值M_r

$$M_r = \frac{A_{max}}{A(0)}$$

4) 截止频率ω_b与截止带宽0～ω_b

带宽越大，响应的快速性越好

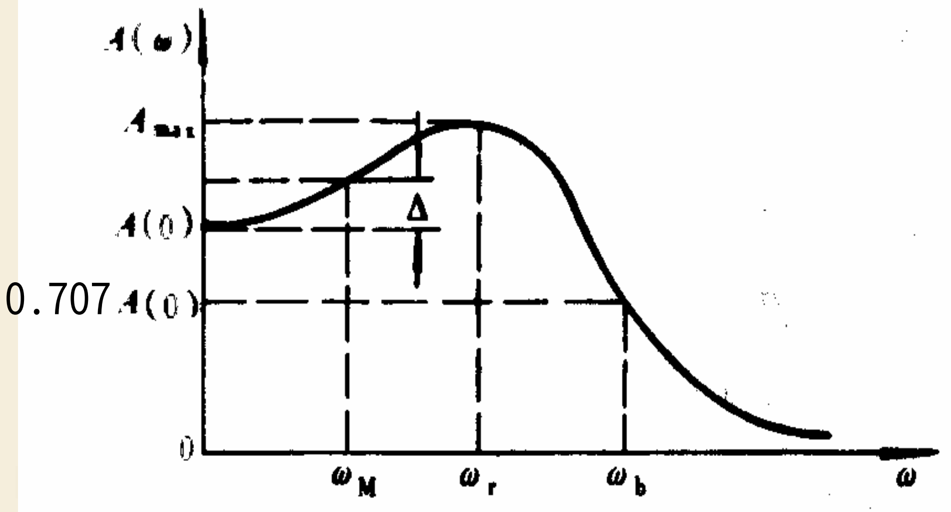


图 4.6.1

五、最小相位系统与非最小相位系统

最小相位系统：所有零点和极点均在[s]平面的坐半平面

与非最小相位系统相比：幅频特性相同，但前者的相位变化范围最小

例

$$G_1(s)=\frac{1+T_1 s}{1+T_2 s}$$

（最小相位系统）

$$G_1(j\omega)=\frac{1+jT_1\omega}{1+jT_2\omega}$$

$$\left|G_1(j\omega)\right|=\frac{\sqrt{1+T_1^2\omega^2}}{\sqrt{1+T_2^2\omega^2}}$$

$$\angle G_1(j\omega)=tg^{-1}T_1\omega-tg^{-1}T_2\omega$$

$$G_2(s)=\frac{1-T_1 s}{1+T_2 s}$$

（非最小相位系统）

$$G_2(j\omega)=\frac{1-jT_1\omega}{1+jT_2\omega}$$

$$\left|G_2(j\omega)\right|=\frac{\sqrt{1+T_1^2\omega^2}}{\sqrt{1+T_2^2\omega^2}}$$

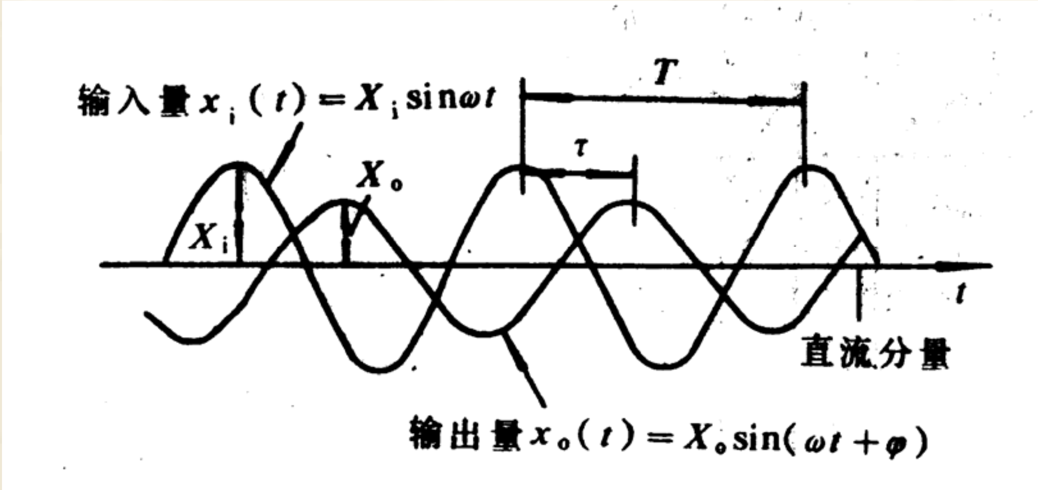
$$\angle G_2(j\omega)=-tg^{-1}T_1\omega-tg^{-1}T_2\omega$$

六、系统传递函数的实验确定法

1. 频率特性实验测试

给定频率 $\omega=1/T$，有

$$|G(j\omega)| = \frac{X_o}{X_i} \qquad \angle G(j\omega) = -\frac{\tau}{T} \times 360^o$$



根据实验得到的各个频率下的幅值比和相位差，就可作出频率特性实验曲线。

2. 频率特性实验曲线→对数幅频特性渐近线

在对数幅频特性图上，用斜率为0，±20，±40，±60dB/dec的渐近线由低频段到高频段逐段逼近实验曲线，得到对数幅频特性渐近线

3. 对数幅频特性渐近线→传递函数（初步估计，最小相位形式）

$$G(j\omega)=\frac{K(1+j\tau_1\omega)(1+j\tau_2\omega)\cdots(1+j\tau_m\omega)}{(j\omega)^\nu(1+jT_1\omega)(1+jT_2\omega)\cdots(1+jT_{n-\nu}\omega)}$$

(1) 确定K和 ν

系统在低频段的频率特性为 $\lim\limits_{\omega\to 0}G(j\omega)=\dfrac{K}{(j\omega)^\nu}$

其对数幅频特性点(1，20lgK)，斜率为－20ν dB/dec的直线

（与零分贝线交点处的频率为 $\omega=\sqrt[\nu]{K}$ ）

由此可确定K和 ν

(2) 确定系统的组成环节

找出对数幅频特性图上的转角频率，并根据各转角频率处斜率的变化确定各组成环节

4. 非最小相位修正

六、系统传递函数的实验确定法

例1

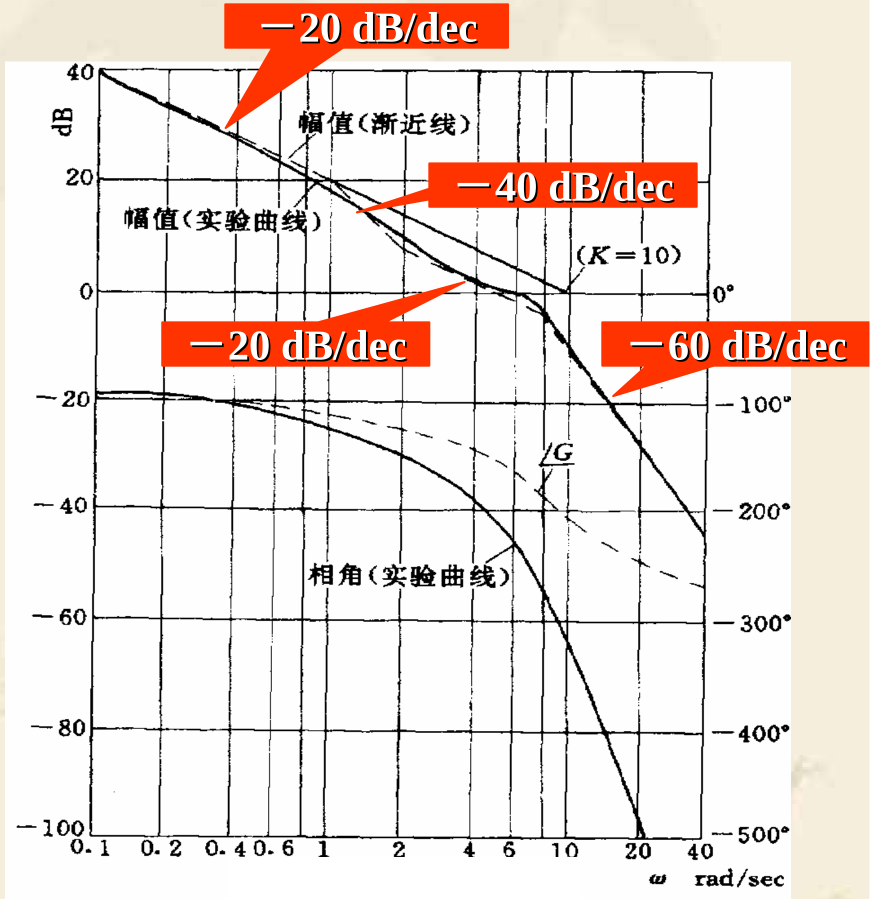
(1)幅频特性实验曲线(实线)

→ 渐近特性曲线(虚线)

(2)由低到高确定转折频率和相应典型环节 $\omega_1=1$；$\omega_2=2$；$\omega_3=8$

(3)确定增益K。作低频段的延长线交 0dB线于ω=10处，确 定K=10。

(4)频率特性初步估计为



$$G(j\omega)=\frac{10(1+0.5j\omega)}{j\omega(1+j\omega)\left[1+j\frac{\omega}{8}+\left(j\frac{\omega}{8}\right)^2\right]}$$

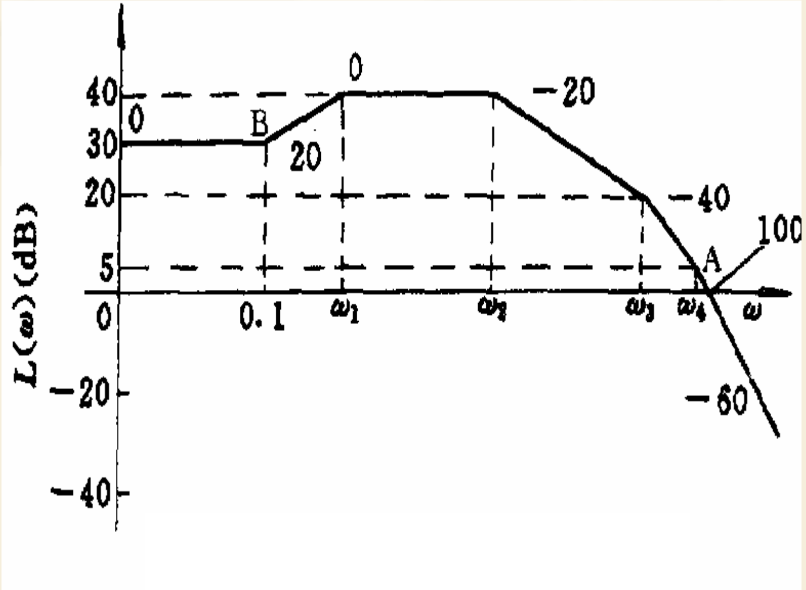
$$G(s)=\frac{320(s+2)}{s(s+1)(s^2+8s+64)}$$

(5)上式的相频曲线∠G与相频实验曲线(实线)有差异，分析表明存在延时环节，且τ=0.2s

$$G(s)=\frac{320(s+2)e^{-0.2s}}{s(s+1)(s^2+8s+64)}$$

六、系统传递函数的实验确定法

例2 最小相位系统对数幅频渐近特性如图4-59所示。试确定系统传递函数。



ω=0.1处,斜率变化+20dB/dec,为一阶微分环节;

ω_1处,斜率变化-20dB/dec,为惯性环节;

ω_2处,斜率变化-20dB/dec,为惯性环节;

ω_3处,斜率变化-20dB/dec,为惯性环节;

ω_4处,斜率变化-20dB/dec,为惯性环节。

可知系统开环传递函数为:

$$G(s)=\frac{K(\frac{s}{0.1}+1)}{(\frac{s}{\omega_1}+1)(\frac{s}{\omega_2}+1)(\frac{s}{\omega_3}+1)(\frac{s}{\omega_4}+1)}$$

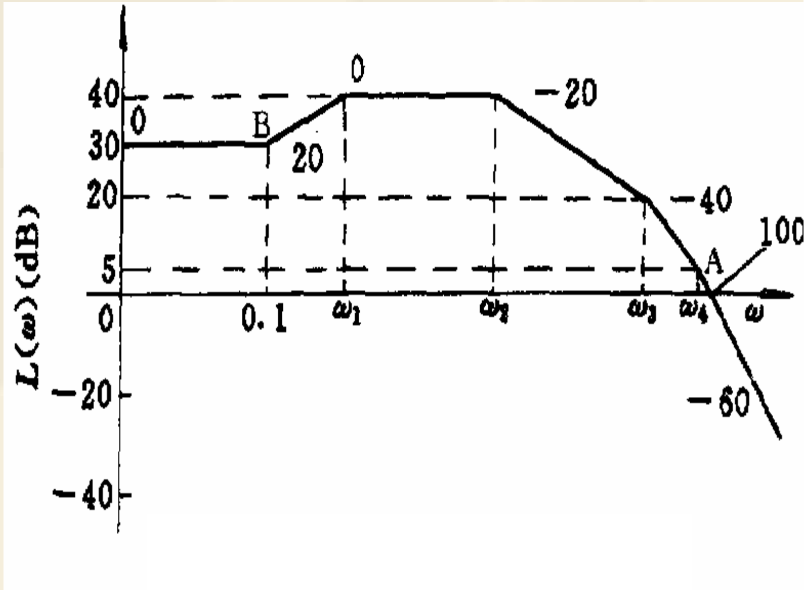
其中,K、ω_1、ω_2、ω_3、ω_4待定。

六、系统传递函数的实验确定法

例2

由20lgK=30dB，可确定K=31.6

设A、B为斜率为K的对数幅频特性直线段上两点，A点的对数幅值为$L(\omega_A)$，B点则为$L(\omega_B)$，则有直线方程



$L(\omega_A)- L(\omega_B)=K[\lg \omega_A -\lg \omega_A]$，则

$$\omega_A = \omega_B 10^{\frac{L(\omega_A)-L(\omega_B)}{K}}$$

从低频段开始，令$\omega_A= \omega_1$，从图中可知 $\omega_B=0.1$、 $L(\omega_A)=40dB$、$L(0.1)=30dB$、 $K=20dB/dec$， 则有

$$\omega_1 = 0.1 \times 10^{\frac{40-30}{20}} = 0.316$$

同理，可分别求出ω_4、 ω_3、ω_2，可写出系统开环传递函数为：

$$G(s)=\frac{31.62(\frac{s}{0.1}+1)}{(\frac{s}{0.316}+1)(\frac{s}{3.481}+1)(\frac{s}{34.81}+1)(\frac{s}{82.54}+1)}$$