

**Московский авиационный институт
(государственный технический университет)**

Факультет прикладной математики и физики
Кафедра вычислительной математики и программирования

**Курсовой проект по курсу
«Концепции Современного Естествознания»**

Выполнил: Лобанов Сергей
Группа: 08-408
Дата:
Оценка:

Москва, 2012

Общие положения

Каждое дифференциальное уравнение отражает какой-либо закон сохранения. В качестве зависимой переменной используется некоторая физическая величина и характеризует баланс между различными факторами, влияющими на эту переменную. Чаще всего зависимыми переменными являются удельные свойства (свойства, отнесенные к единице массы).

Обобщенное дифференциальное уравнение

Рассматривая различные задачи теплообмена и гидродинамики, можно отметить, что независимые переменные подчиняются обобщенному закону сохранения. Если обозначить зависимую переменную Φ , то обобщенное дифференциальное уравнение примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\Phi) + \nabla(\rho u\Phi) - \nabla(\Gamma\nabla\Phi) = S$$

- $\frac{\partial}{\partial t}(\rho\Phi)$ - изменение некоторой физической величины Φ
- $\nabla(\rho u\Phi)$ - конвективное слагаемое в абстрактном законе сохранения физической величины Φ
- $\nabla(\Gamma\nabla\Phi)$ - диффузное слагаемое в абстрактном законе сохранения физической величины Φ (Γ – коэффициент диффузии)
- S - источниковое слагаемое в абстрактном законе сохранения физической величины Φ

Зависимая переменная Φ обозначает различные величины, такие, как массовая концентрация химической компоненты, температура, составляющая скорости, и др. При этом коэффициенту диффузии Γ и источниковому слагаемому S следует придать соответствующий каждой из этих переменных смысл.

Не все диффузионные потоки определяются через градиент соответствующей переменной. В случае, если часть уравнения нельзя выразить в градиентном виде, то её всегда можно записать как часть источникового слагаемого.

Методы дискретизации уравнений

Метод взвешенных невязок

Представим дифференциальное уравнение в виде

$$L(\Phi) = 0$$

Предположим, что приближенное решение $\bar{\Phi}$ имеет вид

$$\bar{\Phi} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m,$$

Где a_i – неизвестные параметры. Подставим $\bar{\Phi}$ дифференциальное уравнение, и получим невязку R , которая равна:

$$R = L(\bar{\Phi})$$

Чтобы минимизировать невязку, предположим, что

$$\int WRdx = 0,$$

где W – весовая функция: интеграл берется по всей расчетной области. Выбирая последовательность весовых функций, можно получить количество уравнений, достаточное для нахождения параметров. Решая полученную систему алгебраических уравнений, получим приближенное решение дифференциального уравнения. Различные методы взвешенных невязок различаются классами весовых функций.

Простейшей весовой функцией является $W = 1$. Для такой функции можно в рамках данного метода построить систему уравнений, разбивая расчетную область на подобласти или контрольные объемы и выбирая в качестве весовых функции, равные одновременно 1 в одной из подобластей и нулю в остальных. Этот вариант метода взвешенных невязок называется *методом контрольных объемов*. В нём предполагается, что интеграл от невязки по каждому контрольному объему равен 0.

Метод контрольных объемов

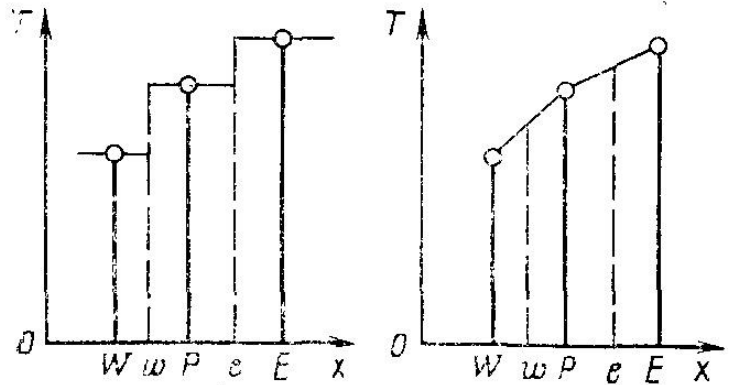
Разобьем расчетную область на некоторое количество непересекающихся контрольных объемов таким образом, что каждая узловая точка содержится в одном контрольном объёме:

$$G = \bigcup_{i=1}^n V_i, \quad \Phi_p \in V_i \rightarrow \{j \neq i \mid \Phi_p \notin V_j\}$$

Дифференциальное уравнение интегрируют по каждому контрольному объёму.

$$\int_{V_i} L(\Phi)d\Phi = 0$$

Для вычисления интегралов используют кусочные профили, которые описывают изменение Φ между узловыми точками.



В результате находят дискретный аналог дифференциального уравнения, в который входят значения Φ в нескольких узловых точках.

Полученный подобным образом дискретный аналог выражает закон сохранения Φ для конечного контрольного объема точно так же, как дифференциальное уравнение выражает закон сохранения для бесконечно малого контрольного объема. Одним из важных свойств метода контрольного объема является то, что в нем заложено точное интегральное сохранение таких величин, как масса, количество движения и энергия па любой группе контрольных объемов и, следовательно, на всей расчетной области. Это свойство проявляется при любом числе узловых точек, а не только в предельном случае очень большого их числа. Таким образом, даже решение на грубой сетке удовлетворяет точным интегральным балансам.

Следует отметить, что в отличие от методов конечных элементов и большинства методов невязок, в которых используется интерполяционные функции (профили) для получения значений между узлами сетки, в методе конечных объемов принимаются во внимание лишь значения в узловых точках.

примечания:

1. Для различных величин можно применять различные кусочные профили. (Например, для S и t из обобщенного дифференциального уравнения)
2. Нет необходимости использовать одинаковые профили для всех элементов одного уравнения.

Основные принципы выбора интерполяционных функций и профилей.

Потребуем, чтобы решение, полученное даже на грубой сетке, во-первых, всегда имело физически правдоподобный характер и, во-вторых, сохраняло полный баланс. Правдоподобное решение должно иметь такой же качественный характер, что и точное решение. В задаче теплопроводности без источников никакой профиль температуры не может выходить за пределы температур границ тела. При охлаждении нагретого твердого тела окружающей его жидкостью температура тела не может стать ниже температуры жидкости.

Основные правила построения дискретных схем

1. *Соответствие потоков на границах контрольного объема.*

Выражение потока через границу, общую для двух прилегающих контрольных объемов, при записи дискретных аналогов уравнения для этих объемов должно быть одним и тем же. Очевидно, что тепловой поток, покидающий один контрольный объем через его границу, должен быть равен потоку, входящему через эту границу в соседний контрольный объем. В противном случае не будет сохраняться полный баланс теплоты.

2. *Знакопостоянность коэффициентов.*

В большинстве задач влияние значений зависимой переменной в точках, соседних с некоторой узловой, на значение в этой узловой точке обусловлено процессами конвекции и диффузии. Следовательно, увеличение значения в одной узловой точке должно, при прочих равных условиях, привести к увеличению (а не уменьшению) значения в соседней узловой точке. Тогда коэффициенты должны иметь одинаковый знак. Другими словами, в общем случае, знаки коэффициентов перед значениями зависимой переменной в соседних точках и коэффициента перед ее значением в центральной точке должны быть одинаковыми. Можно, конечно, выбрать их так, чтобы они все были положительными или отрицательными.

Договоримся записывать разностный аналог с

3. *Отрицательность коэффициента при линеаризации источникового слагаемого.*

Коэффициент при зависимой переменной может стать отрицательным за счет источникового слагаемого (S). Этого можно полностью избежать, потребовав, чтобы S не был положительным: при линеаризации источникового слагаемого коэффициент S всегда должен быть отрицателен или равен нулю.

4. *Сумма соседних коэффициентов.*

Часто в рассматриваемое уравнение входят только производные зависимой переменной. При этом функции t и $t + c$ (t – зависимая переменная данного уравнения, c – произвольная постоянная) удовлетворяют дифференциальному уравнению. Это свойство дифференциального уравнения также должно отразиться в его дискретном аналоге. Следовательно, уравнение должно быть удовлетворено и случае, если t увеличить на постоянную. Из этого требования следует равенство коэффициента в узле сумме соседних коэффициентов.

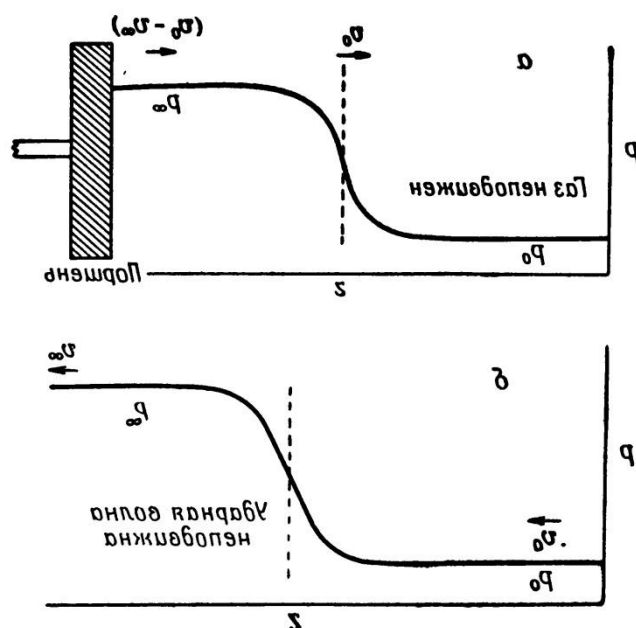
Распространение ударных волн

Ударная волна — это такая волна, в которой на небольшом расстоянии резко меняются свойства газа. Если в гидродинамических уравнениях пренебречь членами, включающими вязкость, теплопроводность и диффузию, то ударные волны проявляются как математическая разрывность решений. Когда учитываются эти диссипативные процессы, то разрыв превращается в несколько более постепенный переход, имеющий место на расстоянии нескольких длин свободного пробега (например, приблизительно 10~5 см в газе при 1 атм и комнатной температуре). Вследствие наличия в ударной волне очень сильных градиентов макроскопических величин, часто уравнений Навье - Стокса недостаточно для описания структуры и толщины ударной волны.

Рассмотрим *плоские ударные волны*. В системе координат, движущейся с ударной волной так, (как показано на рис.) распределение параметров получается из установившегося решения гидродинамических уравнений. Условия, связывающие значения параметров газа по обе стороны ударного разрыва, можно легко получить из гидродинамических уравнений. Предполагается, что не только в пределе для $x \rightarrow \infty$, но и для предельных условий при $x \rightarrow -\infty$ все производные равны нулю. Скорость ударной волны по отношению к газу при $-\infty$ тогда будет равна v_0 . В этом случае уравнения переноса дают соотношения между значениями параметров по обе стороны ударного разрыва.

$$\begin{aligned}\rho_1 u_1 &= \rho_2 u_2 \\ p_1 + \rho_1 u_1^2 &= p_2 + \rho_2 u_2^2 \\ h_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} u_1^2 &= h_2 + \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{1}{2} u_2^2\end{aligned}$$

Эти соотношения, известные как *соотношения Гюгонио*, связывают восемь величин. Однако если мы используем термодинамическую зависимость h от ρ и p , то число переменных может быть сведено к шести. Следовательно, этих соотношений достаточно для определения трех переменных через остающиеся три. Обычно задается плотность и давление в газе низкого давления (ρ_1, p_1), а также дополнительный параметр, характеризующий силу ударного разрыва, например давление p_2 в газе высокого давления. Для нахождения значений оставшихся величин решаются соотношения Гюгонио. Значение u_1 соответствует скорости притока холодного газа к ударному разрыву или скорости распространения ударной волны в неподвижном газе, находящемся под низким давлением. Величина u_2 является скоростью движения горячих газов от фронта ударной волны.



Метод решения

Система уравнений плоской газовой динамики имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + p)}{\partial x} + \frac{\partial \rho u v}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho u v}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v^2 + p)}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u E + p u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v E + p v)}{\partial y} = 0 \end{array} \right.$$

Здесь ε – удельная внутренняя энергия газа, γ - постоянная адиабаты.

Для численного решения данной системы будем использовать метод контрольного объёма (интегро-интерполяционный метод). Разобьём область на прямоугольные ячейки.

Рассматриваются ячейки с порядковым номером i по оси Ox и j по оси OY . Использована явная схема: в момент времени n параметры известны, из уравнений определяются параметры в момент времени $n + 1$.

Дифференциальные уравнения запишутся приблизительно в следующем виде.

$$1. \frac{\rho_{ij}^{n+1} - \rho_{ij}^n}{\Delta t} + \frac{Q \rho u_{i+1/2j} - Q \rho u_{i-1/2j}}{\Delta x} + \frac{Q \rho v_{ij+1/2} - Q \rho v_{ij-1/2}}{\Delta y} = 0$$

$$Q \rho u_{i+1/2j} = \frac{\rho u_{i+1j}^n + \rho u_{ij}^n}{2} - D_{i+1/2j} \frac{\rho_{i+1j}^n - \rho_{ij}^n}{2}$$

$$Q \rho u_{i-1/2j} = \frac{\rho u_{ij}^n + \rho u_{i-1j}^n}{2} - D_{i-1/2j} \frac{\rho_{ij}^n - \rho_{i-1j}^n}{2}$$

$$Q \rho v_{ij+1/2} = \frac{\rho v_{ij+1}^n + \rho v_{ij}^n}{2} - D_{ij+1/2} \frac{\rho_{ij+1}^n - \rho_{ij}^n}{2}$$

$$Q \rho v_{ij-1/2} = \frac{\rho v_{ij}^n + \rho v_{ij-1}^n}{2} - D_{ij-1/2} \frac{\rho_{ij}^n - \rho_{ij-1}^n}{2}$$

$$2. \frac{\rho u_{ij}^{n+1} - \rho u_{ij}^n}{\Delta t} + \frac{Q(\rho u^2 + p)_{i+1/2j} - Q(\rho u^2 + p)_{i-1/2j}}{\Delta x} + \frac{Q \rho u v_{ij+1/2} - Q \rho u v_{ij-1/2}}{\Delta y} = 0$$

$$Q(\rho u^2 + p)_{i+1/2j} = \frac{(\rho u^2 + p)_{i+1j}^n + (\rho u^2 + p)_{ij}^n}{2} - D_{i+1/2j} \frac{\rho_{i+1j}^n - \rho_{ij}^n}{2}$$

$$Q(\rho u^2 + p)_{i-1/2j} = \frac{(\rho u^2 + p)_{ij}^n + (\rho u^2 + p)_{i-1j}^n}{2} - D_{i-1/2j} \frac{\rho_{ij}^n - \rho_{i-1j}^n}{2}$$

$$Q \rho u v_{ij+1/2} = \frac{\rho u v_{ij+1}^n + \rho u v_{ij}^n}{2} - D_{ij+1/2} \frac{\rho_{ij+1}^n - \rho_{ij}^n}{2}$$

$$Q \rho u v_{ij-1/2} = \frac{\rho u v_{ij}^n + \rho u v_{ij-1}^n}{2} - D_{ij-1/2} \frac{\rho_{ij}^n - \rho_{ij-1}^n}{2}$$

$$\begin{aligned}
3. \quad & \frac{\rho v_{ij}^{n+1} - \rho v_{ij}^n}{\Delta t} + \frac{Q(\rho v^2 + p)_{i+1/2j} - Q(\rho v^2 + p)_{i-1/2j}}{\Delta x} + \frac{Q\rho uv_{i+1/2j} - Q\rho uv_{i-1/2j}}{\Delta y} = 0 \\
& Q(\rho v^2 + p)_{i+1/2j} = \frac{(\rho v^2 + p)_{ij+1}^n + (\rho v^2 + p)_{ij}^n}{2} - D_{i+1/2j} \frac{\rho_{ij+1}^n - \rho_{ij}^n}{2} \\
& Q(\rho v^2 + p)_{i-1/2j} = \frac{(\rho v^2 + p)_{ij}^n + (\rho v^2 + p)_{ij-1}^n}{2} - D_{i-1/2j} \frac{\rho_{ij}^n - \rho_{ij-1}^n}{2} \\
& Q\rho uv_{i+1/2j} = \frac{\rho uv_{ij}^n + \rho uv_{i+1j}^n}{2} - D_{i+1/2j} \frac{\rho_{i+1j}^n - \rho_{ij}^n}{2} \\
& Q\rho uv_{i-1/2j} = \frac{\rho uv_{ij}^n + \rho uv_{i-1j}^n}{2} - D_{i-1/2j} \frac{\rho_{ij}^n - \rho_{i-1j}^n}{2} \\
4. \quad & \frac{\rho E_{ij}^{n+1} - \rho E_{ij}^n}{\Delta t} + \frac{Q(\rho uE + pu)_{i+1/2j} - Q(\rho uE + pu)_{i-1/2j}}{\Delta x} + \\
& \frac{Q(\rho vE + pv)_{i+1/2j} - Q(\rho vE + pv)_{i-1/2j}}{\Delta y} = 0 \\
& Q(\rho uE + pu)_{i+1/2j} = \frac{(\rho uE + pu)_{i+1j}^n + (\rho uE + pu)_{ij}^n}{2} - D_{i+1/2j} \frac{\rho E_{i+1j}^n - \rho E_{ij}^n}{2} \\
& Q(\rho uE + pu)_{i-1/2j} = \frac{(\rho uE + pu)_{ij}^n + (\rho uE + pu)_{i-1j}^n}{2} - D_{i-1/2j} \frac{\rho E_{ij}^n - \rho E_{i-1j}^n}{2} \\
& Q(\rho vE + pv)_{i+1/2j} = \frac{(\rho vE + pv)_{ij+1}^n + (\rho vE + pv)_{ij}^n}{2} - D_{i+1/2j} \frac{\rho E_{ij+1}^n - \rho E_{ij}^n}{2} \\
& Q(\rho vE + pv)_{i-1/2j} = \frac{(\rho vE + pv)_{ij}^n + (\rho vE + pv)_{ij-1}^n}{2} - D_{i-1/2j} \frac{\rho E_{ij}^n - \rho E_{ij-1}^n}{2} \\
& E_{ij}^n = \varepsilon_{ij}^n \frac{(u_{ij}^n)^2 + (v_{ij}^n)^2}{2} \\
& p_{ij}^n = (\gamma - 1) \rho_{ij}^n \varepsilon_{ij}^n \\
& D_{i+1/2j} = \max(\sqrt{\gamma(\gamma - 1)\varepsilon_{ij}^n} + \sqrt{(u_{ij}^n)^2 + (v_{ij}^n)^2}, \sqrt{\gamma(\gamma - 1)\varepsilon_{i+1j}^n} + \sqrt{(u_{i+1j}^n)^2 + (v_{i+1j}^n)^2}) \\
& D_{i-1/2j} = \max(\sqrt{\gamma(\gamma - 1)\varepsilon_{ij}^n} + \sqrt{(u_{ij}^n)^2 + (v_{ij}^n)^2}, \sqrt{\gamma(\gamma - 1)\varepsilon_{i-1j}^n} + \sqrt{(u_{i-1j}^n)^2 + (v_{i-1j}^n)^2}) \\
& D_{i+1/2j} = \max(\sqrt{\gamma(\gamma - 1)\varepsilon_{ij}^n} + \sqrt{(u_{ij}^n)^2 + (v_{ij}^n)^2}, \sqrt{\gamma(\gamma - 1)\varepsilon_{ij+1}^n} + \sqrt{(u_{ij+1}^n)^2 + (v_{ij+1}^n)^2}) \\
& D_{i-1/2j} = \max(\sqrt{\gamma(\gamma - 1)\varepsilon_{ij}^n} + \sqrt{(u_{ij}^n)^2 + (v_{ij}^n)^2}, \sqrt{\gamma(\gamma - 1)\varepsilon_{ij-1}^n} + \sqrt{(u_{ij-1}^n)^2 + (v_{ij-1}^n)^2})
\end{aligned}$$

Данная схема, являясь явной, не является абсолютно устойчивой, поэтому, измельчая шаг по пространству, мы должны уменьшать шаг по времени. Схема консервативна, так как она сконструирована на основе интегро-интерполяционного метода.

Параметры газа в первой области находятся из соотношений Гюгоннио для ударной волны:

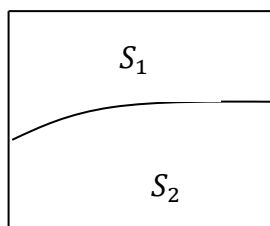
$$\begin{cases} \rho(D - v)|_I = \rho(D - v)|_{I^*} \\ (\rho(D - v)^2 + p)|_I = (\rho(D - v)^2 + p)|_{I^*} \\ \left(\varepsilon + \frac{p}{\rho} + \frac{(D - v)^2}{2} \right) \Big|_I = \left(\varepsilon + \frac{p}{\rho} + \frac{(D - v)^2}{2} \right) \Big|_{I^*} \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} D &= M \sqrt{\gamma(\gamma - 1)\varepsilon_{I^*}} \\ p_I &= (\gamma - 1)\rho_I \varepsilon_I \end{aligned}$$

Параметры в ячейках, которые пересекает кривая $\varphi(x)$, будем искать, усредняя по площади. К примеру, плотность газа можем найти из соотношения:

$$\rho = \frac{\rho_1 S_1 + \rho_2 S_2}{S_1 + S_2}$$



Обоснование метода

Рассмотрим подробнее систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + p)}{\partial x} + \frac{\partial \rho uv}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho uv}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v^2 + p)}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u E + p u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v E + p v)}{\partial y} = 0 \end{array} \right.$$

В данном случае эти четыре уравнения описывают законы сохранения для плоского двумерного равномерного течения газа (со скоростями u и v соответственно). Мы рассматриваем систему уравнений в декартовых (эйлеровых) координатах, т.е. законы сохранения выполняются применительно к ограниченному объему в (физическом) пространстве. Рассматриваемая система не испытывает внешних воздействий (внешней силы), движение газа рассматривается в замкнутом объеме, т.е. не принимается во внимание влияние окружающей массы газа, трение внутренних слоев газа с внешними отсутствует и поэтому движение газа является невязким, а также отсутствует влияние внешних источников энергии.

В результате мы получили адиабатическое плоское течение газа. Это значит, что изменение энтропии газа со временем

$$\frac{\partial S}{\partial t} = 0,$$

Мы рассматриваем идеальный газ. Зависимость внутренней энергии от давления и плотности принимает след. вид

$$\varepsilon = \frac{1}{\gamma - 1} \ln \frac{p}{\rho}.$$

Кроме того, для каждой точки пространства

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{const.}$$

и значение энтропии

$$S = \frac{R}{\gamma - 1} \ln \frac{p}{\rho}$$

Заметим также, что для изотермического случая

$$\frac{p}{\rho} = \text{const.}$$

И, следовательно, $\gamma = 1$.

Для численного решения представленной системы используется метод конечных объемов, или интегро-интерполяционный метод. Его сущность заключается в построении разностных уравнений на основе интегральных соотношений, выражающих законы сохранения для элементарной ячейки сетки. При этом на сетке вводится определенная интерполяция искомого решения и коэффициентов уравнения, изменяя которые можно получить различные сетки.

Рассмотрим первое уравнение системы:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0.$$

Это уравнение описывает закон сохранения количества вещества. Его разностный аналог имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{ij}^{n+1} - \rho_{ij}^n}{\Delta t} + \frac{Q\rho u_{i+1/2j} - Q\rho u_{i-1/2j}}{\Delta x} + \frac{Q\rho v_{ij+1/2} - Q\rho v_{ij-1/2}}{\Delta y} &= 0 \\ Q\rho u_{i+1/2j} &= \frac{\rho u_{i+1j}^n + \rho u_{ij}^n}{2} - D_{i+1/2j} \frac{\rho_{i+1j}^n - \rho_{ij}^n}{2} \\ Q\rho u_{i-1/2j} &= \frac{\rho u_{ij}^n + \rho u_{i-1j}^n}{2} - D_{i-1/2j} \frac{\rho_{ij}^n - \rho_{i-1j}^n}{2} \\ Q\rho v_{ij+1/2} &= \frac{\rho v_{ij+1}^n + \rho v_{ij}^n}{2} - D_{ij+1/2} \frac{\rho_{ij+1}^n - \rho_{ij}^n}{2} \\ Q\rho v_{ij-1/2} &= \frac{\rho v_{ij}^n + \rho v_{ij-1}^n}{2} - D_{ij-1/2} \frac{\rho_{ij}^n - \rho_{ij-1}^n}{2} \end{aligned}$$

И выражает разностный закон сохранения кол-ва вещества для одного элементарного объема $\Delta x \times \Delta y$ на одном шаге по времени. При этом значения вычисляются с использованием значений интегральных средних ρu и ρv в ячейках, прилегающих к соответствующей потоковой точке. Наиболее простыми будут схемы, в которых используются два таких значения: $\rho u_{i+/-1/2j} = h(\rho u_{ij}^n, \rho u_{i+1j}^n)$.

Для выполнения условий аппроксимации и монотонности расчетного алгоритма на потоковую функцию $h(a, b)$ следует наложить условия:

1. $h(a, a) = \rho u(a)$.
2. $h(a, b)$ не убывает по первому аргументу и не возрастает по второму.
3. $h(a, b)$ является непрерывной по Липшицу по обоим аргументам.

Для данной схемы в качестве такой функции выбран поток Лакса-Фридрихса:

$$h(a, b) = \frac{1}{2} [\rho u(a) + \rho u(b) - \alpha(b - a)], \text{ где } \alpha = \max_u |\rho u'(u)|.$$

Использование трехточечных схем, однако, может обеспечить лишь первый порядок точности разностной схемы.

В качестве критерия устойчивости выбран критерий Куранта – Фридрихса – Леви:

$$C_{2d} = (v + c)\Delta t \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\Delta x \Delta y} \leq 1,$$

где c – скорость звука (для идеального газа $c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$).

В качестве начальных условий используется соотношение (неконтактного разрыва) фронта ударной волны Гюгонио:

$$\begin{cases} \rho(D-v)|_I = \rho(D-v)|_{II^*} \\ (\rho(D-v)^2 + p)|_I = (\rho(D-v)^2 + p)|_{II^*} \\ \left(\varepsilon + \frac{p}{\rho} + \frac{(D-v)^2}{2} \right) \Big|_I = \left(\varepsilon + \frac{p}{\rho} + \frac{(D-v)^2}{2} \right) \Big|_{II^*} \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} D &= M\sqrt{\gamma(\gamma-1)\varepsilon_{II^*}} \\ p_I &= (\gamma-1)\rho_I\varepsilon_I. \end{aligned}$$

Приводя упрощения для случая с идеальным газом, получим следующие условия для ударной Адиабаты:

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{(\gamma+1)\frac{1}{\rho_0} - (\gamma-1)\frac{1}{\rho_1}}{(\gamma+1)\frac{1}{\rho_1} - (\gamma-1)\frac{1}{\rho_0}},$$

или

$$\frac{\rho_0}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1)p_0 - (\gamma-1)p_1}{(\gamma+1)p_1 - (\gamma-1)p_0}.$$

Окончательно, после серии приведений, можно прийти к следующему:

$$\frac{u_0^2}{c_0^2} = \frac{p_1 - p_0}{\gamma p_0 \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_1}\right)},$$

и, в итоге

$$\frac{u_0^2}{c_0^2} = \frac{1}{2\gamma} \left[(\gamma-1) + (\gamma+1) \frac{p_1}{p_0} \right],$$

и

$$\frac{u_1^2}{c_1^2} = \frac{1}{2\gamma} \left[(\gamma-1) + (\gamma+1) \frac{p_0}{p_1} \right].$$

Таким образом, мы получили систему с четырьмя независимыми параметрами, зная любые три из которых, мы можем определить любые параметры газа.

Тестовый Пример

Начальные значения, которые задавались для каждого узла сетки (включая границу):

-

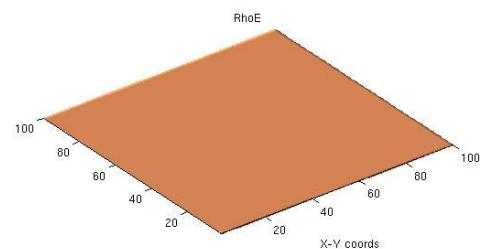
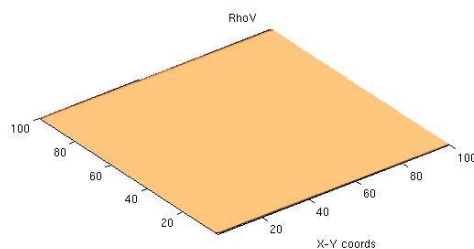
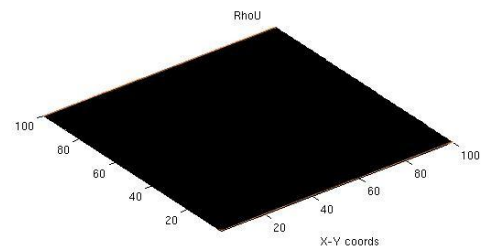
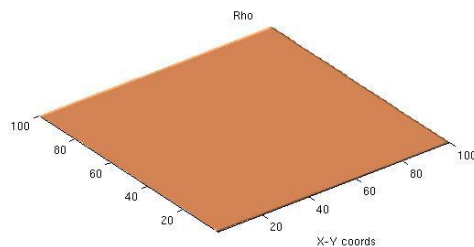
- $u = 0$
- $v = 1$
- $\rho = 1$
- $E = 1$

Соотношения, которые использовались при определении скоростей и энергии из консервативных переменных:

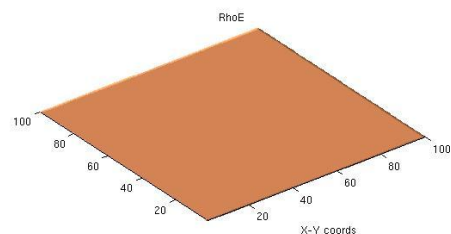
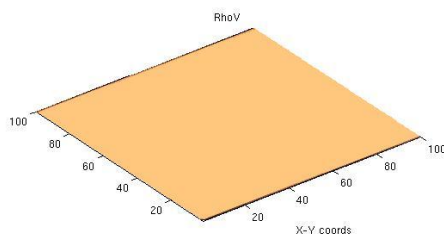
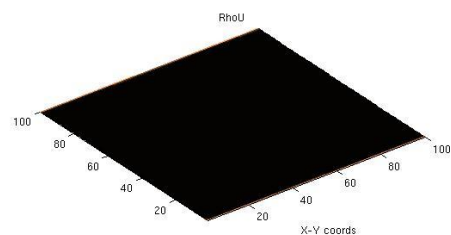
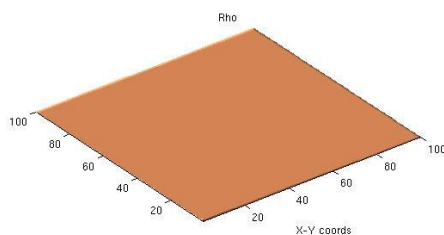
- $u = \frac{\rho u}{\rho}$
- $v = \frac{\rho v}{\rho}$
- $E = \frac{\rho E}{\rho}$
- $\rho u^2 + p = \rho u \times u + p$
- $\rho v^2 + p = \rho v \times v + p$
- $\rho uv + p = \rho u \times v + p$
- $\rho vE + pv = \rho E \times v + p \times v$
- $\rho uE + pu = \rho E \times u + p \times u$

После реализации численной схемы решение системы на мы можем наблюдать следующие результаты:

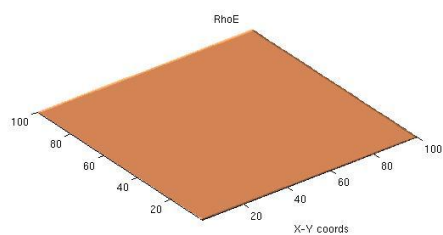
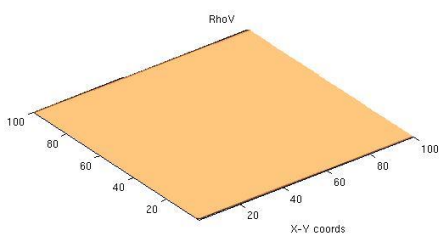
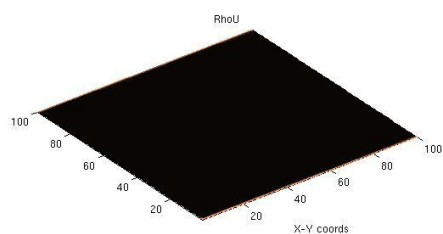
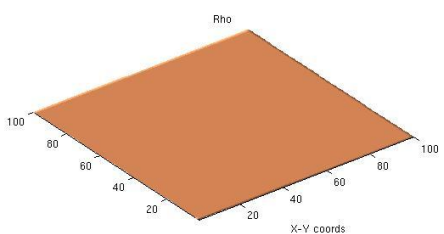
При $nx = 100, ny = 100, nt = 10$:



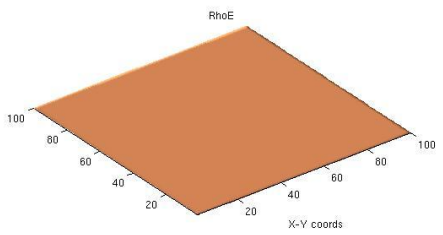
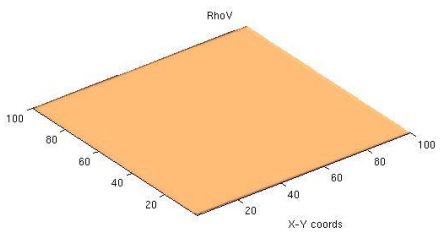
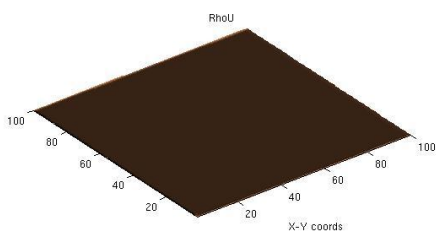
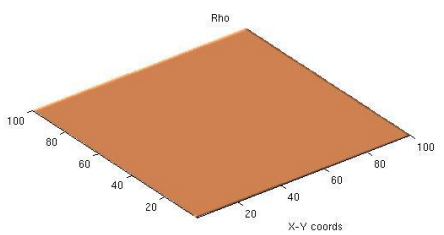
При $nx = 100, ny = 100, nt = 50$:



При $nx = 100, ny = 100, nt = 100$:



При $nx = 100, ny = 100, nt = 50$:



Вывод

Как видно из результатов, наши тестовые вычисления никак не меняют изначально заданные значения. Проводя вычисления на равномерно заполненной сетке без начальных (ударных) условий, спустя 1000 итераций мы получаем те же данные. Как упоминалось выше, для достижения устойчивости использовалось двумерное условие Куранта.

Стоит отметить, что алгоритм, являясь явным методом, хорошо распараллеливается. Действительно, чтобы определить значение некоторой характеристики в точке, нам достаточно посчитать поток через смежные с ним четыре узла. Это приводит к достаточно простой схеме поочередного взаимодействия для обмена значений пограничных узлов между блоками, на которые мы разбиваем исходную сетку узлов. Такую схему можно реализовать с применением стандарта MPI (2.0 в нашем случае).

Другое достоинство метода контрольного объема состоит в том, что он основан на интегральных соотношениях законов сохранения, что в отличие от конечно разностных методов, где приближение рассматривается на бесконечно-малом промежутке, в данном случае требуется равенство потоков по обоим сторонам границ узла, что гарантирует точность решения.