

p/117

정리 2-5

$${}_n P_r = \binom{n-1}{r-1} P_r + \left(r \times {}_{n-1} P_{r-1} \right)$$

$${}_n P_r = n \times {}_{n-1} P_{r-1}$$

Pf)

$$\textcircled{1} \quad {}_{n-1} P_r + r \times {}_{n-1} P_{r-1}$$

$$= \frac{(n-1)!}{(n-r-1)!} + r \cdot \frac{(n-1)!}{(n-r)!} = (n-1)! \left[\frac{(n-r) + r}{(n-r)!} \right]$$

$$= (n-1)! \cdot \frac{n}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!} \equiv {}_n P_r$$



$$\textcircled{2} \quad n \times {}_{n-1} P_{r-1}$$

$$= n \cdot \frac{(n-1)!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!} \equiv {}_n P_r$$



P/118

[해석] 2-11

$${}_n P_2 = 90 \quad \text{일 때 } n = ?$$

Pf ${}_n P_2 = \frac{n!}{(n-2)!} = n(n-1) = 90$

$$n^2 - n - 90 = 0$$

$$(n-10)(n+9) = 0$$

$$\therefore n=10, \cancel{-9}$$

$$\therefore \text{결과 } n=10$$

[해석] 2-12

$${}_4 P_r \times 5! = 2880 \quad (r < 4) \text{ 일 때 } r = ?$$

$${}_4 P_r \times 5! = \frac{4!}{(4-r)!} \times 5! = 2880$$

$$\frac{4!}{(4-r)!} = 24$$

$$(4-r)! = 1 \Rightarrow r = \cancel{4} \text{ or } 3$$

$$\therefore (r < 4) \Rightarrow r = 3.$$

P/119

예제 2-13

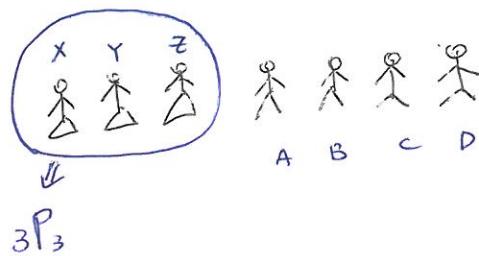
14

여학생 = 3명, 남학생 4명이 일렬로 선다

- ① 여학생끼리 이웃하게 하는 경우의 수?

여학생 3명을 한정하여

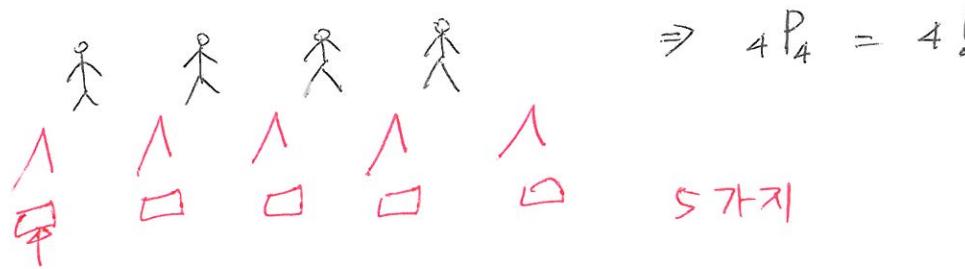
방법 1



$$\Rightarrow {}_5P_5 \times {}_3P_3 = 5! \times 3! = 120 \times 6 = 720$$

방법 2

먼저 남자만 나열



여자 3명을 한정하여

$$\text{일렬로 나열} = {}_3P_3 = 3!$$

$$\Rightarrow 5 \times {}_3P_3 \times {}_4P_4 = 5 \times 3! \times 4! = 3! \times 5! = 720$$

- ② 사건 A = 여학생끼리 이웃하게 하는 경우,

사건 A가 발생할 확률?

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{720}{n P_n} = \frac{3! \times 5!}{7!} = \frac{1}{7}$$

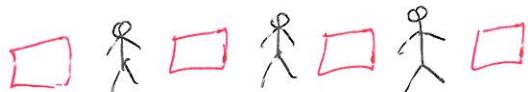
ex)

남자 3명, 여자 3명을 일렬로 세울 때

① 여자 3명이 모두 이웃하지 않아야 하는 경우의 수?

pt)

남자를 일렬로 세우는 경우의 수 = ${}_3P_3 = 3!$



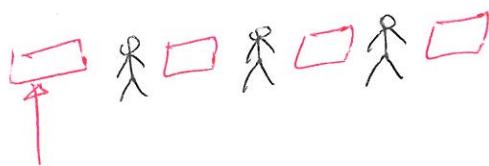
$$\text{여자를 넣는 경우의 수} = {}_4P_3 = 4! = 4 \times 3 \times 2$$

↗
 1번 자리 아래 선택 가능
 ↗
 2번 자리 아래 선택 가능
 ↗
 3번 자리 여자 선택 가능

$$\Rightarrow 3! \times 4! = 144 \times$$

② 여자 3명이 모두 이웃하는 경우의 수?

pt) 남자를 일렬로 세우는 경우의 수 = ${}_3P_3 = 3!$



$\Rightarrow 4\text{가지}$

여자들이 이웃하게

$$4\text{열} = {}_3P_3 = 3!$$

$$\Rightarrow 4 \times {}_3P_3 \times {}_3P_3 = 4 \times 3! \times 3!$$

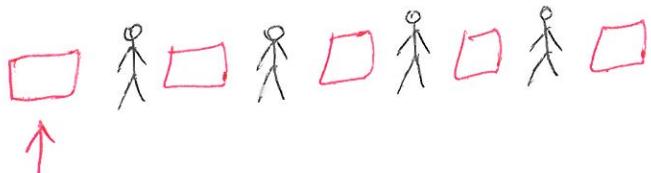
$$= 4! \times 3! = 24 \times 6 = 144 \times$$

① 여학생 3명과 남학생 4명이 일렬로 앉을 때, 여학생이 이웃하지 않는 경우의 수?

PF)

사건 A = 여학생이 이웃하지 않는 경우

남학생을 일렬로 세우는 경우의 수 = ${}_4P_4 = 4!$



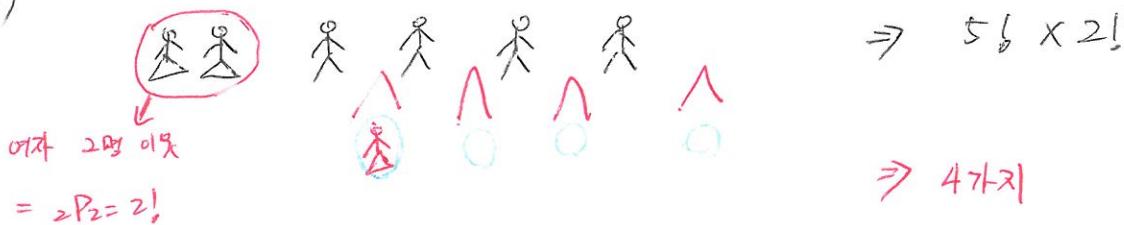
$$\text{여자를 놓는 경우의 수} = {}_5P_3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

$\therefore n(A) = 4! \times 60 = 1440$ X

$\therefore P(A) = \frac{n(A)}{{}_7P_7} = \frac{n(A)}{7!} = \frac{1440}{7!} = \frac{60}{7 \times 6 \times 5} = \frac{2}{7}$

② 사건 B = 여학생 2명은 이웃하고 한명은 이웃하지 않는 사건

PF)



$\therefore n(B) = 5! \times 2! \times 4 \times 3 = 2880$ X

$$\{(XYZ), (XYZ), (YZX)\} = (\text{둘+하나}) \text{로 가르는 } 3 \text{ 가지 수}$$

$$= \frac{3!}{2! 1!} = 3 \text{ 가지}$$

$\therefore P(B) = \frac{n(B)}{{}_7P_7} = \frac{2880}{7!} = \frac{5! \times 4!}{7!} = \frac{4}{7}$



중복 되는 대상 : n

선택하여 들어가는 대상 : r

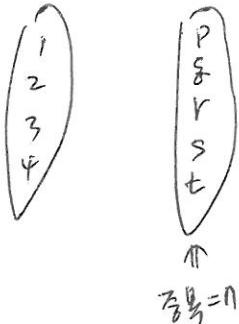
$$n^{\text{Tr}} = n^r$$

$$\textcircled{1} \quad \begin{array}{c} \text{要 4} \\ \{A, B, C, D\} \end{array} \rightarrow \frac{\text{要 3}}{\text{否 4} = n} \Rightarrow {}_3 \pi_4 = 3^4$$

$$\textcircled{2} \quad \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \square \square \square : 3자리 수 \Rightarrow 5^{\text{자리수}} = 5^3$$

$$\textcircled{3} \quad \begin{array}{c} \text{별, 파랑} \\ \text{중복} = n \end{array} \quad \text{두 깃 별} \quad \begin{array}{c} \text{4번 들어온 레} \\ \square \quad \square \quad \square \quad \square \end{array} \quad \text{만드는 신호수} \Rightarrow 2^{\lceil \frac{n}{4} \rceil} = 2^4$$

$$\textcircled{A} \quad A \rightarrow B : \text{若 } \forall \quad \Rightarrow \quad \exists \pi_4 = 5^4$$



서로 다른 n 개에서 중복을 허락하여 r 개를 선택하여 배열하는
 (중복되는 대상 = n , 선택하여 들어가는 대상 = r)

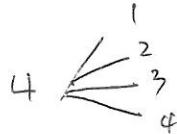
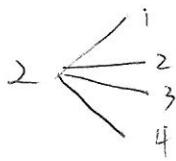
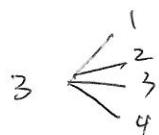
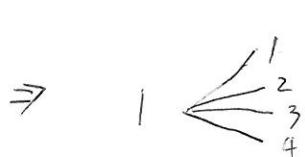
ex) $\{1, 2, 3, 4\}$ 에서 중복을 허락하여 2개를 선택하는 경우의 수?

$$\Rightarrow \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,3), (2,4) \\ (3,1), (3,2), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3) \end{array} \right\}$$

$$= 4 + {}_4P_2 = 4 + \frac{4!}{(4-2)!} = 4 + \frac{4!}{2!} = 4 + 12 = 16$$

$$= {}_4\pi_2 = 4^2 = 16 \quad \times$$



(f) 중복을 허락하지 않고 2개를 선택하여 나열하는 순열 (순서가 있음)

$${}_nPr = {}_4P_2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = 12$$

P/20

정리 2-6

중복 순열

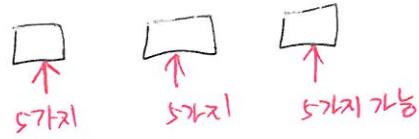
서로 다른 n 개에서 중복을 허락하여 r 개를 선택하여 배열하는 방법 수:

$$n \pi_r = n^r$$

예제 2-5

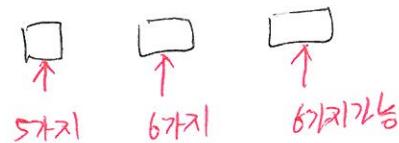
① $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 를 써서 만들 수 있는 세자리수가 몇 개?

$$\text{pf)} \quad {}_5 \pi_3 = 5^3 = 125$$

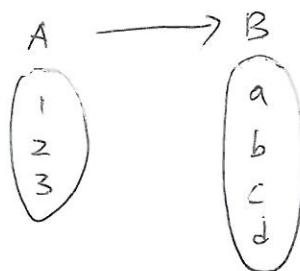


② $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 로 세자리수가 몇 개?

$$\text{pf)} \quad 5 \times 6 \times 6 = 180$$



ex)



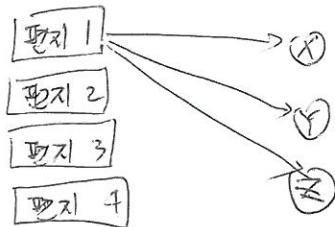
① $A \rightarrow B$ 로의 함수의 개수 = ${}_4 \pi_3 = 4^3 = 64$

② $A \rightarrow B$ 로의 일대일 함수의 개수 = ${}_4 P_3 = \frac{4 \times 3 \times 2}{(4-3)!} = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$

↑ ↑ ↓
1이 될 확률 2가 될 확률 3이 될 확률
1 2 3
→ → →

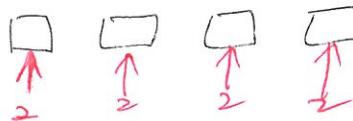
① 죄통의 평지를 3개의 위치에 넣는 방법의 가지수?

$$\Rightarrow {}_3\pi_4 = 3^4 = 81$$



② 빨간색, 파란색 두 깃발을 비번 둘려서 만들 수 있는 신호수?

$$\Rightarrow {}_2\pi_4 = 2^4 = 16$$



③ 빨간색, 파란색 두 깃발을 비번 둘려서 만들 수 있는 신호수?

$$\Rightarrow \frac{8!}{4!4!} \xrightarrow{\text{8개가 다 다른 경우}}$$

④ 빨간색, 파란색 두 깃발을 두번씩 둘려서 만들 수 있는 신호수?

처음

$$R \Rightarrow \{RBB, BRB, BBR\}$$

$$B \Rightarrow \{BRR, RBR, RRB\}$$

$$\Rightarrow 3+3=6 = \frac{4!}{2!2!} \xrightarrow{\text{4개가 다 다른 경우}}$$

P/j21 | 예제 2-19

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \quad B = \{p, q, r, s, t\} \quad \text{의 교집합}$$

① A에서 B로 가는 함수의 개수?

$$\text{Pf}) \quad A \rightarrow B \Rightarrow {}_5\pi_4 = {}_5^4 = b^{25}$$



② A와 B로 가는 유클리드의 합수의 개수?

$${}^5P_4 = \frac{5!}{(5-4)!} = 5! = 120$$

↗ 1) 같은
 ↗ 2) 가능한
 ↗ 3) 같은 있는
 ↗ 4) 같은 있는
 ↗ 5) 같은 있는
 ↗ 6) 같은 있는
 ↗ 7) 같은 있는
 ↗ 8) 같은 있는
 ↗ 9) 같은 있는
 ↗ 10) 같은 있는
 ↗ 11) 같은 있는
 ↗ 12) 같은 있는
 ↗ 13) 같은 있는
 ↗ 14) 같은 있는
 ↗ 15) 같은 있는
 ↗ 16) 같은 있는
 ↗ 17) 같은 있는
 ↗ 18) 같은 있는
 ↗ 19) 같은 있는
 ↗ 20) 같은 있는
 ↗ 21) 같은 있는
 ↗ 22) 같은 있는
 ↗ 23) 같은 있는
 ↗ 24) 같은 있는
 ↗ 25) 같은 있는
 ↗ 26) 같은 있는
 ↗ 27) 같은 있는
 ↗ 28) 같은 있는
 ↗ 29) 같은 있는
 ↗ 30) 같은 있는
 ↗ 31) 같은 있는
 ↗ 32) 같은 있는
 ↗ 33) 같은 있는
 ↗ 34) 같은 있는
 ↗ 35) 같은 있는
 ↗ 36) 같은 있는
 ↗ 37) 같은 있는
 ↗ 38) 같은 있는
 ↗ 39) 같은 있는
 ↗ 40) 같은 있는
 ↗ 41) 같은 있는
 ↗ 42) 같은 있는
 ↗ 43) 같은 있는
 ↗ 44) 같은 있는
 ↗ 45) 같은 있는
 ↗ 46) 같은 있는
 ↗ 47) 같은 있는
 ↗ 48) 같은 있는
 ↗ 49) 같은 있는
 ↗ 50) 같은 있는
 ↗ 51) 같은 있는
 ↗ 52) 같은 있는
 ↗ 53) 같은 있는
 ↗ 54) 같은 있는
 ↗ 55) 같은 있는
 ↗ 56) 같은 있는
 ↗ 57) 같은 있는
 ↗ 58) 같은 있는
 ↗ 59) 같은 있는
 ↗ 60) 같은 있는
 ↗ 61) 같은 있는
 ↗ 62) 같은 있는
 ↗ 63) 같은 있는
 ↗ 64) 같은 있는
 ↗ 65) 같은 있는
 ↗ 66) 같은 있는
 ↗ 67) 같은 있는
 ↗ 68) 같은 있는
 ↗ 69) 같은 있는
 ↗ 70) 같은 있는
 ↗ 71) 같은 있는
 ↗ 72) 같은 있는
 ↗ 73) 같은 있는
 ↗ 74) 같은 있는
 ↗ 75) 같은 있는
 ↗ 76) 같은 있는
 ↗ 77) 같은 있는
 ↗ 78) 같은 있는
 ↗ 79) 같은 있는
 ↗ 80) 같은 있는
 ↗ 81) 같은 있는
 ↗ 82) 같은 있는
 ↗ 83) 같은 있는
 ↗ 84) 같은 있는
 ↗ 85) 같은 있는
 ↗ 86) 같은 있는
 ↗ 87) 같은 있는
 ↗ 88) 같은 있는
 ↗ 89) 같은 있는
 ↗ 90) 같은 있는
 ↗ 91) 같은 있는
 ↗ 92) 같은 있는
 ↗ 93) 같은 있는
 ↗ 94) 같은 있는
 ↗ 95) 같은 있는
 ↗ 96) 같은 있는
 ↗ 97) 같은 있는
 ↗ 98) 같은 있는
 ↗ 99) 같은 있는
 ↗ 100) 같은 있는
 ↗ 101) 같은 있는
 ↗ 102) 같은 있는
 ↗ 103) 같은 있는
 ↗ 104) 같은 있는
 ↗ 105) 같은 있는
 ↗ 106) 같은 있는
 ↗ 107) 같은 있는
 ↗ 108) 같은 있는
 ↗ 109) 같은 있는
 ↗ 110) 같은 있는
 ↗ 111) 같은 있는
 ↗ 112) 같은 있는
 ↗ 113) 같은 있는
 ↗ 114) 같은 있는
 ↗ 115) 같은 있는
 ↗ 116) 같은 있는
 ↗ 117) 같은 있는
 ↗ 118) 같은 있는
 ↗ 119) 같은 있는
 ↗ 120) 같은 있는

P/123

정리 2-7

같은 것이 있는 순열

8)

n개 중에서 같은것이 p개, q개, r개, ..., s개가 있을 때,

n개를 모두 선택하여 일렬로 배열하는 방법수

$$= \frac{n!}{p! \times q! \times r! \times \cdots \times s!}$$

(단, $n = p+q+r+\cdots+s$)

ex) a, a, b로 나열되는 경우의 수

$$= \{ (aab), (aba), (baa) \} = 3\text{ 가지}$$

$$\Rightarrow \frac{3!}{2! 1!} = 3\text{ 가지}$$

ex) a, a, a, b, b, c로 나열되는 경우의 수

$$\Rightarrow \frac{6!}{3! \times 2! \times 1!} = \frac{6!}{3! 2!} = 60\text{ 가지}$$

125

정리 2-8

원순열

서로 다른 n 개를 원형으로 배열하는 순열의 수

$$= \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

이전 방정식과 같은 것이 n 개

정리 2-9

염주순열

서로 다른 n 개의 구슬을 서로 페어서 배열하는 방법 수

$$= \frac{(n-1)!}{2}$$

원순열에서 뒤집어 놓은 것
같은 것의 개수

* 염주 순열 : 원순열에서 뒤집어 놓을 수 있는 순열

\checkmark 구슬 n 개를 서로 다른 방법으로 배열하는 경우의 수 :

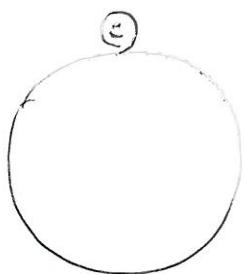
① 일렬로 배열하는 경우의 수 = $n P_n = n!$

② 원형으로 배열하는 경우의 수 = $(n-1)!$

③ 염주로 만드는 경우의 수 = $\frac{1}{2} (n-1)!$

ex) $\{a, a, a, b, b, c\}$ 을 몇 가지로 나누는가?

pt)



* C는 대칭성을 깨울 수 있다.

$\{a, a, a, b, b\}$ 을 일렬로 배열하는 수:

$$\Rightarrow \frac{5!}{3! \times 2!} = 10 \text{ 가지.}$$

P/125

[예제 2-2]

탁자에 서로 다른 5개가 있다 $\{A, B, C, D, E\}$.

① 일직선으로 배열하는 경우의 수 = ${}_5P_5 = 5! = 120$

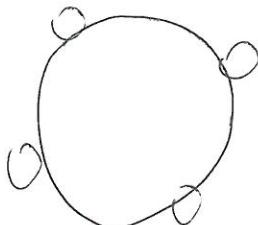
② 원형으로 배열하는 경우의 수 = $\frac{5!}{5} = 4! = 24$

↳ 회전방향이 같아지는 것 5개씩.

③ 영주(목걸이)로 만드는 경우의 수 = $\frac{4!}{2} = 12$

↳ 앞 뒤 뒤집었을 때 고려해 같다.

ex) $\{a, a, b, b\}$ 로 원탁 배열 가지수?



$$\left\{ \begin{array}{l} aabb = abba = bbaa = baab \\ abab = ba ba \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{4!}{2+2} = 6 \\ \frac{4!}{2+2} = 6 \end{array} \right. \rightarrow 6 + 6 = 12$$

∴ 2가지; 원탁 배열 가지수.

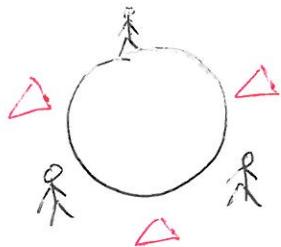
7/26

[예제 2-22]

86

남학생 3명, 여학생 3명이 원탁에 둘러 앉을 때

① 남녀가 교대로 앉는 경우의 수?



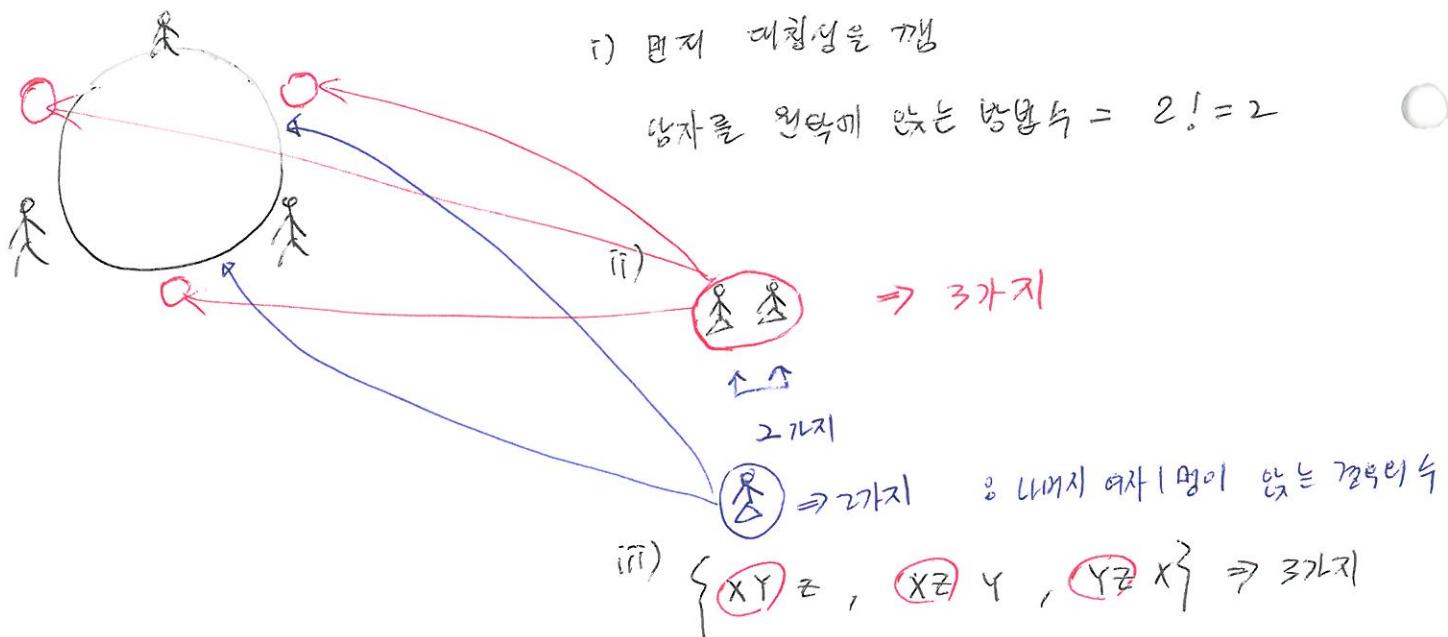
i) 먼저 대칭성을 깬다.

남자를 먼저 배울 하는 가지수 = $2! = 2$
원탁

ii) 여자를 배울하는 경우수 = $3P_3 = 3! = 6$

$$\Rightarrow 2! \times 3! = 12 \quad \times$$

② 여자 두명을 이웃하게하고 한명은 이웃하지 않게 앉는 방법수?



$$\Rightarrow 2! \times 3 \times 2 \times 3 \times 2 = 72 \quad \times$$