P/117 $\boxed{\text{정리 2-5}}$

$$\boxed{\begin{aligned} {}_nP_r &= \left({}_{n-1}P_r\right) + \left(r \times {}_{n-1}P_{r-1}\right) \\ {}_nP_r &= n \times {}_{n-1}P_{r-1} \end{aligned}}$$

Pf)

① ${}_{n-1}P_r + r \times {}_{n-1}P_{r-1}$

$$= \frac{(n-1)!}{(n-r-1)!} + r\frac{(n-1)!}{(n-r)!} = (n-1)!\left[\frac{(n-r)+r}{(n-r)!}\right]$$

$$= (n-1)!\frac{n}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!} \equiv {}_nP_r$$

② $n \times {}_{n-1}P_{r-1}$

$$= n\frac{(n-1)!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!} \equiv {}_nP_r$$

$\boxed{\text{예제 2-11}}$

${}_nP_2 = 90$ 일때 양수 $n = ?$

pf $\quad {}_nP_2 = \frac{n!}{(n-2)!} = n(n-1) = 90$

$n^2 - n - 90 = 0$.

$(n-10)(n+9) = 0 \qquad \therefore n = 10, \cancel{-9}$

$\therefore$ 양수 $n = 10$

$\boxed{\text{예제 2-12}}$

${}_4P_r \times 5! = 2880 \qquad (r<4)$ 일때 $r = ?$

${}_4P_r \times 5! = \frac{4!}{(4-r)!} \times 5! = 2880$

$\frac{4!}{(4-r)!} = 24$

$(4-r)! = 1 \Rightarrow r = \cancel{4}$ or 3

$\therefore (r<4) \Rightarrow r = 3.$

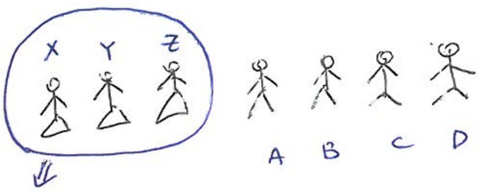
P/119 $\boxed{\text{예제 2-13}}$

여학생 = 3명 , 남학생 4명이 일렬로 설 때

① 여학생끼리 이웃하게 서는 경우의 수?

여학생 3명은 한 덩어리

$\boxed{\text{방법1}}$



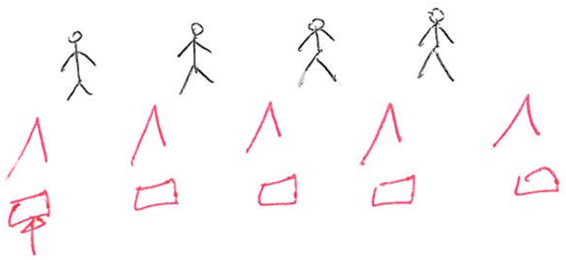
$\Downarrow$

$_3P_3$

$$\Rightarrow \ {}_5P_5 \times {}_3P_3 = 5! \times 3! = 120 \times 6 = 720$$

$\boxed{\text{방법2}}$

먼저 남자만 나열



$\Rightarrow \ {}_4P_4 = 4!$

5가지

여자 3명을 한덩어리로
일렬로 나열 = $_3P_3 = 3!$

$$\Rightarrow 5 \times {}_3P_3 \times {}_4P_4 = 5 \times 3! \times 4! = 3! \times 5! = 720$$

② 사건 A = 여학생끼리 이웃하게 서는 경우,

사건 A가 발생할 확률?

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{720}{{}_7P_7} = \frac{3! \times 5!}{7!} = \frac{1}{7}$$

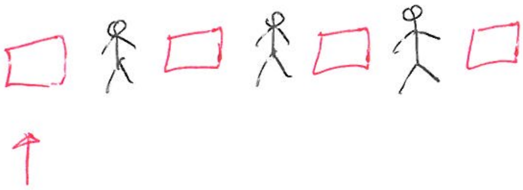
ex)

남자 3명, 여자 3명을 일렬로 세울때

① 여자 3명이 모두 이웃하지 않아야 하는 경우의 수?

pf)

남자를 일렬로 세우는 경우의 수 $= {}_3P_3 = 3!$



여자를 놓는 경우의 수 $= {}_4P_3 = 4! = 4 \times 3 \times 2$

첫번째 여자 선택가능

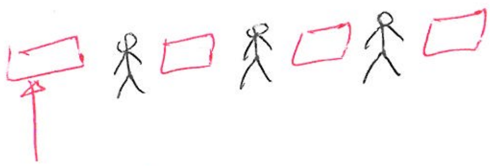
두번째 여자 선택가능

3번째 여자 선택가능

$\Rightarrow 3! \times 4! = 144$ //

② 여자 3명이 모두 이웃하는 경우의 수?

pf) 남자를 일렬로 세우는 경우의 수 $= {}_3P_3 = 3!$



$\Rightarrow$ 4가지

여자들이 이웃하게

4열 $= {}_3P_3 = 3!$

$\Rightarrow 4 \times {}_3P_3 \times {}_3P_3 = 4 \times 3! \times 3!$

$= 4! \times 3! = 24 \times 6 = 144$ //

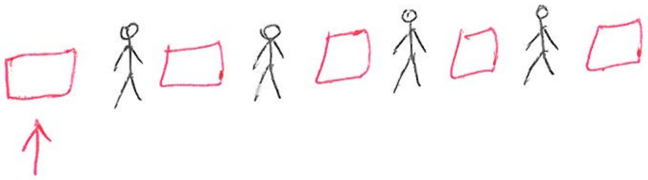
P/119 $\boxed{\text{예제2-14}}$

① 여학생 3명과 남학생 4명이 일렬로 설때, 여학생이 이웃하지 않는경우의 수?

pf)

사건 A = 여학생이 이웃하지 않는 경우

남학생을 일렬로 세우는 경우의 수 = $_4P_4 = 4!$



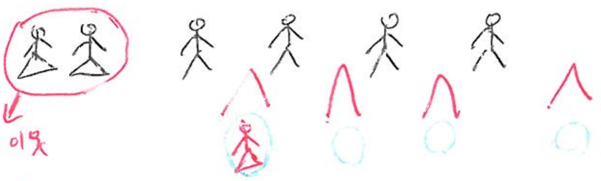
여자를 넣는 경우의수 = $_5P_3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 5\times4\times3 = 60$

$\therefore n(A) = 4! \times 60 = 1440$

$\therefore P(A) = \frac{n(A)}{_7P_7} = \frac{n(A)}{7!} = \frac{1440}{7!} = \frac{60}{7\times6\times5} = \frac{2}{7}$

② 사건 B = 여학생 2명은 이웃하고 한명은 이웃하지 않는 사건

pf)



여자 2명 이웃 = $_2P_2 = 2!$

⇒ $5! \times 2!$

⇒ 4가지

$\therefore n(B) = 5! \times 2! \times 4 \times 3 = 2880$

$\{(XYZ), (XZY), (YZX)\}$ = (둘+하나)로 가르는 가지수

$= \frac{3!}{2!\,1!} = 3$가지

$\therefore P(B) = \frac{n(B)}{_7P_7} = \frac{2880}{7!} = \frac{5!\times4!}{7!} = \frac{4}{7}$

중복 되는 대상 : n
선택하여 들어가는 대상 : r

$$_n\Pi_r = n^r$$

① 빵 4 → 바구니 3 ⇒ $_3\Pi_4 = 3^4$

{A, B, C, D}　　중복=n

② {1, 2, 3, 4, 5} → □ □ □ : 3자리 수 ⇒ $_5\Pi_3 = 5^3$

③ 빨, 파랑 두 깃발 4번 들어올려 만드는 신호 수 ⇒ $_2\Pi_4 = 2^4$

중복=n　　□ □ □ □

④ A → B : 함수 수 ⇒ $_5\Pi_4 = 5^4$

A = {1, 2, 3, 4}　　B = {p, q, r, s, t}

↑ 중복=n

§ 중복 순열

∘ 서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 선택하여 배열하는

(중복되는 대상 $= n$, 선택하여 들어가는 대상 $= r$)

ex) $\{1,2,3,4\}$ 에서 중복을 허락하여 2개를 선택하는 경우의 수?

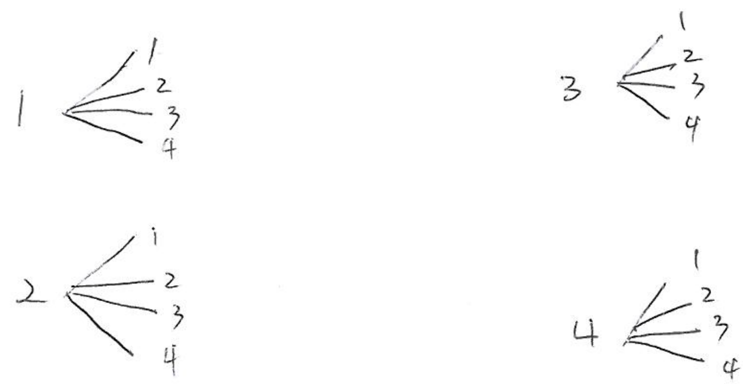
$$\Rightarrow \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$$

$$+ \left\{ \begin{matrix} (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,3), (2,4) \\ (3,1), (3,2), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3) \end{matrix} \right\}$$

$$= 4 + {}_4P_2 = 4 + \frac{4!}{(4-2)!} = 4 + \frac{4!}{2!} = 4 + 12 = 16$$

$$= {}_4\Pi_2 = 4^2 = 16$$

$\Rightarrow$



(cf) 중복을 허락하지 않고 2개를 선택하여 나열하는 순열 (순서에 관계있음)

$${}_nP_r = {}_4P_2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = 12$$

P/120 **정리 2-6** 중복순열

서로 다른 n개에서 중복을 허락하여 r개를 선택하여 배열하는 방법 수:

$$ {}_n\Pi_r = n^r $$

예제 2-15

① {1, 2, 3, 4, 5}를 써서 만들 수 있는 세 자리수가 몇 개?

pf) ${}_5\Pi_3 = 5^3 = 125$

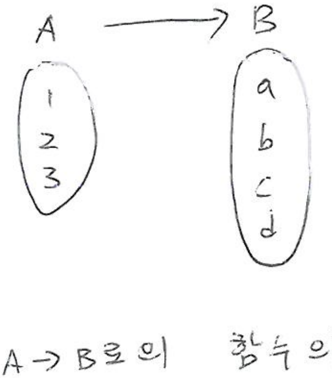
5가지 5가지 5가지 가능

② {0, 1, 2, 3, 4, 5}로 세자리수가 몇 개?

pf) $5 \times 6 \times 6 = 180$

5가지 6가지 6가지 가능

ex)



① A → B로의 함수의 개수 $= {}_4\Pi_3 = 4^3 = 64$

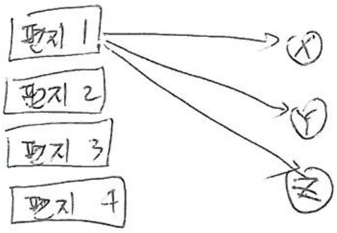
② A → B로의 일대일 함수의 개수 $= {}_4P_3 = 4 \times 3 \times 2 = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$

1이 가능한 4 2가 가능한 3 3이 갈 수 있는 가능한 수

 $\boxed{\text{예제 2-16}}$

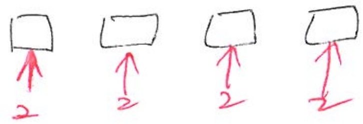
① 4통의 편지를 3개의 우체통에 넣는 방법의 가지수 ?

$$\Rightarrow \ {}_3\Pi_4 = 3^4 = 81$$



② $\underbrace{\text{빨간색}}_{R}$, $\underbrace{\text{파란색}}_{B}$ 두 깃발을 네번 올려서 만들 수 있는 신호수 ?

$$\Rightarrow \ {}_2\Pi_4 = 2^4 = 16$$



③ 빨간색, 파란색 두 깃발을 네번씩 올려서 만들 수 있는 신호수 ?

$$\Rightarrow \ \frac{8!}{4!\,4!}$$

8개가 다 다른 경우

④ 빨간색, 파란색 두 깃발을 두번씩 올려서 만들 수 있는 신호수 ?

처음

R ⇒ {RBB, BRB, BBR}

B ⇒ {BRR, RBR, RRB}

$$\Rightarrow \ 3+3 = 6 = \frac{4!}{2!\,2!}$$

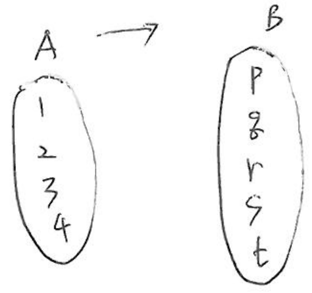
4개가 다 다른 경우

P/121 $\boxed{\text{예제 2-17}}$

$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{p, q, r, s, t\}$ 일 때

① A에서 B로 가는 함수의 개수?

풀)



$\Rightarrow {}_5\Pi_4 = 5^4 = 625$

② A에서 B로가는 일대일 함수의 개수?

$${}_5P_4 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = \frac{5!}{(5-4)!} = 5! = 120$$

1이 갈수 있는 가능한 수

2가 가능한 수 (1이 결정된후)

1,2가 결정된후 3이 갈수있는 가능한 수

1,2,3이 결정된후 4가 갈수있는 가능한 수

P/123 정리 2-7 같은 것이 있는 순열 8)

n개 중에서 같은것이 p개, q개, r개, …, s개가 있을 때,

n개를 모두 선택하여 일렬로 배열하는 방법수

$$= \frac{n!}{p! \times q! \times r! \times \cdots \times s!}$$

(단, $n = p+q+r+\cdots+s$)

ex) a, a, b로 나열되는 경우의 수

$= \{(aab), (aba), (baa)\} = 3$가지

$\Rightarrow \frac{3!}{2!\,1!} = 3$ 가지 //

ex) a, a, a, b, b, c로 나열되는 경우의 수

$\Rightarrow \frac{6!}{3! \times 2! \times 1!} = \frac{6!}{3!\,2!} = 60$ 가지 //

1/25

정리 2-8 원순열

서로 다른 n개를 원형으로 배열하는 순열의 수

n개를 일렬로 배열

$$= \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

회전 방향이 같은 것이 n개

정리 2-9 염주순열

서로 다른 n개의 구슬을 실로 꿰어서 배열하는 방법 수

$$= \frac{(n-1)!}{2}$$

원순열에서 뒤집어 놓으면
같은 것이 2개씩

* 염주순열 : 원순열에서 뒤집어 놓을 수 있는 순열

서로 다른

※ 구슬 n개를 서로 다른 방법으로 배열하는 경우의 수 :

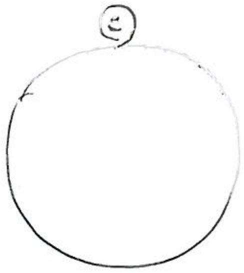
① 일렬로 배열하는 경우의 수 = $_nP_n = n!$

② 원형으로 배열하는 경우의 수 = $(n-1)!$

③ 염주로 만드는 경우의 수 = $\frac{1}{2}(n-1)!$

ex) {a, a, a, b, b, c}로 원탁 배열 가지수?

pf)



※ c로만 대칭성을 깰 수 있다.

{a, a, a, b, b}를 일렬로 배열하는수 :

$$\Rightarrow \frac{5!}{3! \times 2!} = 10 \text{ 가지}.$$

p/125

$\boxed{\text{예제 2-21}}$

탁자에 서로 다른 구슬 5개가 있다 {A, B, C, D, E}.

① 일직선으로 배열하는 경우의수 $= {}_5P_5 = 5! = 120$

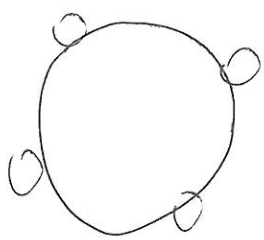
② 원형으로 배열하는 경우의수 $= \frac{5!}{5} = 4! = 24$

회전 방향이 같아지는것 5개씩.

③ 염주(목걸이)로 만드는 경우의 수 $= \frac{4!}{2} = 12$

앞·뒤 뒤집었을때 2개씩 같다.

ex) {a, a, b, b}로 원탁 배열 가지수?



$$\begin{cases} aabb = abba = bbaa = baab \\ abab = baba \end{cases}$$

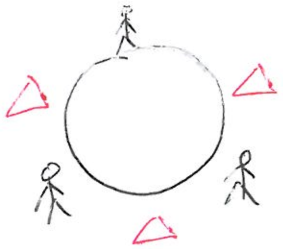
일렬 배열 수 $\rightarrow \frac{4!}{2!\,2!} = 6$가지

∴ 2가지 ; 원탁 배열 수.

7/12.6 $\boxed{\text{예제 2-22}}$

남학생 3명, 여학생 3명이 원탁에 둘러 앉을 때

① 남녀가 교대로 앉는 경우의수?



i) 먼저 대칭성을 깬다.

남자를 먼저 배열 하는 가지수 = 2! = 2
원탁

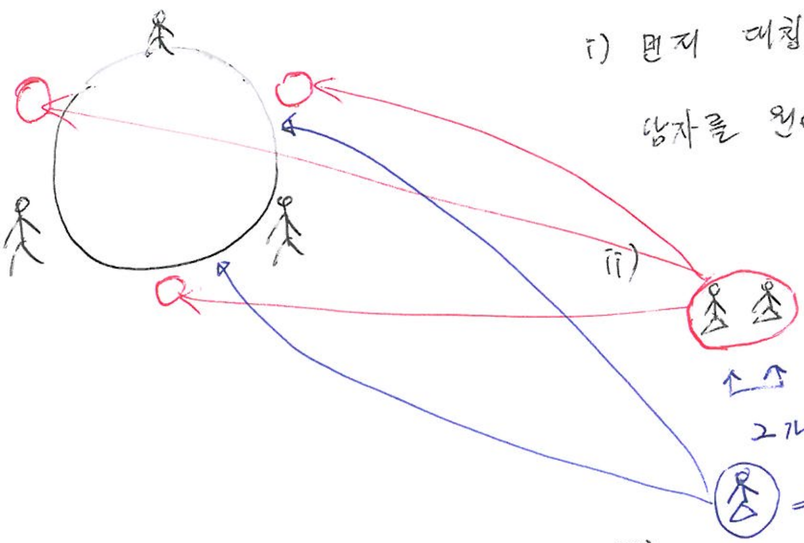
ii) 여자를 배열하는 경우의수 = $_3P_3$ = 3! = 6

⇒ 2! × 3! = 12 ✗

② 여자 두명을 이웃하게하고 한명은 이웃하지 않게 앉는 방법수?

i) 먼저 대칭성을 깸

남자를 원탁에 앉는 방법수 = 2! = 2



ii) ⇒ 3가지

2가지

⇒ 2가지 : 나머지 여자 1명이 앉는 경우의 수

iii) {XY z, XZ Y, YZ X} ⇒ 3가지

⇒ 2! × 3 × 2 × 3 × 2 = 72 ✗