

CH2. 순열과 조합

확률 :

$$P(A) = \frac{\text{사건}(A) \text{의 경우의 수}}{\text{전체 사건의 경우의 수}} = \frac{n(A)}{n(U)}$$

ex) 주사위를 1회 던졌을 때 2의 배수가 나올 확률?

$$\text{pf}) U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow n(U) = 6$$

$$A = \{2, 4, 6\} \Rightarrow n(A) = 3$$

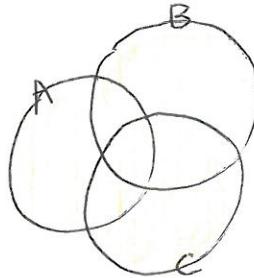
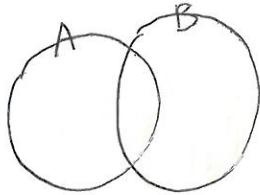
$$\therefore P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

§ 경우의 수

[1] 합사건 :

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) + n(A \cap B \cap C) \\ &\quad - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) \end{aligned}$$



ex) $U = \{x \mid x \leq 30, \text{ 자연수}\} \Rightarrow n(U) = 30$

① $A = \{3 \text{의 배수}\} = \{3, 6, 9, \dots, 30\} \Rightarrow n(A) = 10$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

② $B = \{5 \text{의 배수}\} = \{5, 10, 15, \dots, 30\} \Rightarrow n(B) = 6$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(U)} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$$

③ $C = \{3 \text{의 배수 or } 5 \text{의 배수}\} = \{3, 5, 6, 9, 10, 12, \dots, 30\} = \underline{\underline{A \cup B}}$
합사건

$$n(A \cup B) = 14 = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(U)} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}$$

④ $D = \{3 \text{의 배수 and } 5 \text{의 배수}\} = \{15, 30\} = \underline{\underline{A \cap B}}$ $\Rightarrow n(D) = 2$
교사건

$$P(D) = \frac{n(D)}{n(U)} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$$

P/104 예제 2-1

$$n(A) = 25, \quad n(B) = 19, \quad n(A \cup B) = 40 \quad \text{일 때} \quad n(A \cap B) = ?$$

(PF) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$$\Rightarrow n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$$

$$= 25 + 19 - 40 = 4 \quad \times$$

예제 2-2

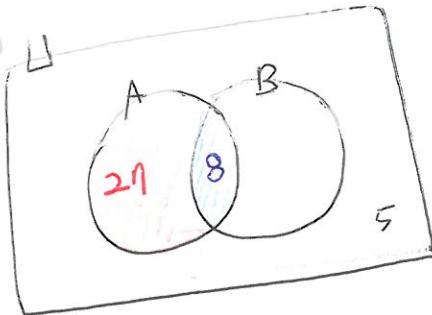
\square = 60명의 학생에게 두 문제를 풀게 하였다 $\Rightarrow n(\square) = 60$

A = 1번 문제를 푼 학생 $\Rightarrow n(A) = 35$

B = 2번 문제를 푼 학생 $\Rightarrow n(B) = 28$

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ = 두 문제를 모두 못 푼 학생 $\Rightarrow n(A^c \cap B^c) = 5$

PF)



$$n(A \cup B) = 55$$

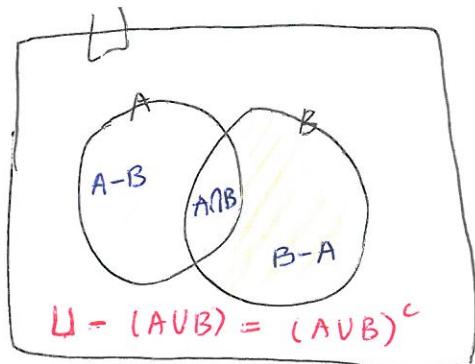
① 두 문제 모두 푼 학생 :

$$\begin{aligned} n(A \cap B) &= n(A) + n(B) - n(A \cup B) \\ &= 35 + 28 - 55 = 8 \end{aligned}$$

② 1번 문제만 푼 학생 :

() $n(A) - n(A \cap B) = 35 - 8 = 27$

* 차집합



$$A - B = A \cap B^c$$

$$B - A = B \cap A^c$$

* 여집합

$$A^c = U - A$$

$$B^c = U - B$$

$$(A \cup B)^c = U - (A \cup B) = A^c \cap B^c$$

* 합집합

$$A \cup B = A + B - (A \cap B)$$

* 교집합

$$A \cap B = A + B - (A \cup B)$$

직장인 100명을 대상으로 A, B, C 세 종류의 책 중에서 읽은 책을 조사하였다.

$$\textcircled{1} \quad U = \text{total 직장인} \Rightarrow n(U) = 100$$

$$A = A\text{를 읽은 사람} \Rightarrow n(A) = 28$$

$$B = B\text{를 읽은 사람} \Rightarrow n(B) = 30$$

$$C = C\text{를 읽은 사람} \Rightarrow n(C) = 42$$

$$A \cap B = A\text{와 } B\text{를 읽은 사람} \Rightarrow n(A \cap B) = 8$$

$$B \cap C = B\text{와 } C\text{를 읽은 사람} \Rightarrow n(B \cap C) = 5$$

$$A \cap C = A\text{와 } C\text{를 읽은 사람} \Rightarrow n(A \cap C) = 10$$

$$A \cap B \cap C = A\text{와 } B, C\text{를 읽은 사람} \Rightarrow n(A \cap B \cap C) = 3$$

① A, B, C 중 어느 책도 읽지 않은 사람?

○

$$n(A \cup B \cup C)$$

$$= n(A) + n(B) + n(C) + n(A \cap B \cap C)$$

$$- n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C)$$

$$= 28 + 30 + 42 + 3 - 8 - 10 - 5 = 80$$

$$\therefore n(U) - n(A \cup B \cup C) = 100 - 80 = 20 \times$$

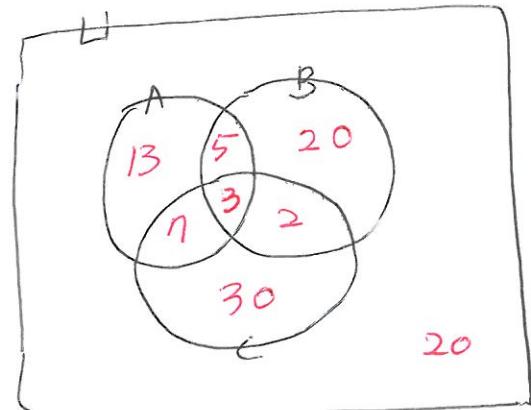
② A만 읽은 사람?

$$n(A \cup B \cup C) - n(B \cup C) = 80 - [n(B) + n(C) - n(B \cap C)]$$

$$= 80 - [30 + 42 - 5] = 80 - 67 = 13 \times$$

③ B와 C만 읽은 사람?

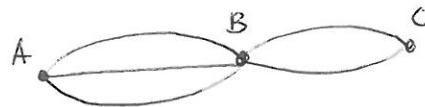
$$n(B \cap C) - n(A \cap B \cap C) = 5 - 3 = 2 \times$$



[2] 곱사건

둘 사건 A, B에 대하여, 사건 A와 사건 B가 동시에 일어나는 경우를 곱사건이라 하고 $A \cap B$ 로 표현한다.

ex) A집에서 C집을 가는 경로 : $A \rightarrow C = (A \rightarrow B) \cap (B \rightarrow C)$



$$\left\{ \begin{array}{l} n(A \rightarrow C) = 6 \\ n(A \rightarrow B) = 3 \\ n(B \rightarrow C) = 2 \end{array} \right.$$

$$\therefore n(A \rightarrow C) = n(A \rightarrow B) \times n(B \rightarrow C) = 3 \times 2 = 6$$

* 곱사건

$$n(A \cap B) = n(A) \times n(B)$$

둘 사건 A, B가 동시에 일어나는 경우의 수

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{선분 } 5\text{종류 } : A, B, C, D, E \Rightarrow n(\text{선분}) = 5 \\ \text{주간지 } 3\text{종류 } : X, Y, Z \Rightarrow n(\text{주간지}) = 3 \end{array} \right.$$

① 선분 1개와 주간지 1개를 구독하는 경우의 수?

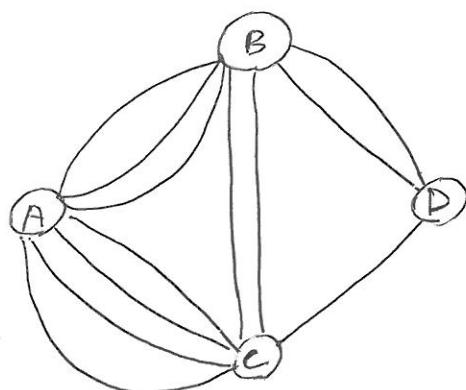
$$\Rightarrow n(\text{선분} \cap \text{주간지}) = 5 \times 3 = 15 \text{ 가지}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} (A, X), (A, Y), (A, Z), (B, X), (B, Y), (B, Z) \\ (C, X), (C, Y), (C, Z), (D, X), (D, Y), (D, Z) \\ (E, X), (E, Y), (E, Z) \end{array} \right\}$$

예제 2-5

A, B, C, D 네 지점 사이에 다음과 같은 도로 망이 있다.

같은 지점은 한번 밖에 지나갈 수 없을 때, A 에서 D 를 다녀오는 경우의 수?



$$\Rightarrow n(A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow A) + n(A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow A)$$

$$= (3 \times 2 \times 1 \times 4) + (4 \times 1 \times 2 \times 3)$$

$$= 24 + 24$$

$$= 48$$

7/108

예제 2-6

$(a+b+c)(x+y+z+w)$ 의 항수?

$$\Rightarrow 3 \times 4 = 12$$

$$= \left\{ ax + ay + az + aw + bx + by + bz + bw \right. \\ \left. + cx + cy + cz + cw \right\}$$

예제 2-7

10원, 50원, 100원 동전을 모두 사용하여 280원을 지불하는 방법 수?

(만, 동전은 10개 보다 적게 (less than, 이내)로 사용한다.)

Pf)

$$(10원 \times 3개 + 50원 + 100원 \times 2개) \quad or \\ (10원 \times 3개 + 50원 \times 3개 + 100원)$$

$\Rightarrow 2\text{가지}$

[3] 여사건

: 전체 사건 \cup 에서 사건 A가 일어나지 않는 사건 = A^c 로 표시하고,
"A의 여사건"이라 한다.

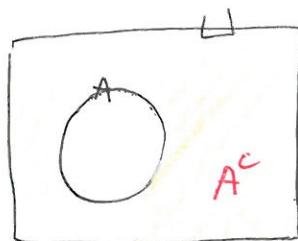
$$= \cup - A$$

경우의 수: $n(A^c) = n(\cup) - n(A)$

확률: $P(A) = \alpha$

$$P(A^c) = \frac{n(A^c)}{n(\cup)} = \frac{n(\cup) - n(A)}{n(\cup)} = 1 - \alpha$$

$P(A) + P(A^c) = 1$



ex) $\cup = \{a, b, c, d, e\}$: 전체 집합

$$A = \{a, b\}$$

$$A^c = \cup - A = \{c, d, e\}$$

Ex) 남학생 3명 = {A, B, C}

여학생 3명 = {x, y, z}

① 두명을 선발할 때 적어도 1명이 여학생일 사건의 경우의 수?

[방법 1] i) 여학생 1명 (두명 중 1명이) 일 경우의 수 = 9가지

$$= \{(x, A), (x, B), (x, C), (y, A), (y, B), (y, C), (z, A), (z, B), (z, C)\}$$

ii) 두명 중 모두 여학생일 경우의 수 = 3 가지

$$= \{(x, y), (x, z), (y, z)\}$$

$$\therefore 9 + 3 = 12 \text{ 가지}$$

[방법 2] 6명 중 2명 선발하는 total 경우의 수 = $\frac{6 \times 5}{2} = 15$ 가지

남자만 2명 다 뽑힐 경우의 수 = 3 가지

$$\therefore 15 - 3 = 12 \text{ 가지}$$

② 두명을 모두 남자가 뽑힐 경우의 수 = 3 가지

$$= \{(A, B), (A, C), (B, C)\}$$

③ 6명 중 2명 선발하는 경우의 수 = $\frac{6 \times 5}{2} = 15$ 가지

$$= \left\{ (A, B), (A, C), (A, X), (A, Y), (A, Z), (B, C), (B, X), (B, Y), (B, Z), (C, X), (C, Y), (C, Z), (X, Y), (X, Z), (Y, Z) \right\}$$

ex) $U = 100\text{명} = (\text{남자 } 50 + \text{여자 } 50)$

① 100명 중 두명을 선별할 경우의 수

$$= \frac{100 \times 99}{2} = 50 \times 99 \Rightarrow {}_{100}C_2 = \frac{100!}{2! \cdot 98!} = \frac{100 \times 99}{2} = \frac{100P_2}{2!}$$

$(A B) = (B A)$

② 100명 중 두명을 선별 할 때 두명 모두 남자일 경우의 수

$$= \frac{50 \times 49}{2} = 25 \times 49 \Rightarrow {}_{50}C_2 = \frac{50!}{2! \cdot 48!} = \frac{50 \times 49}{2} = \frac{50P_2}{2!}$$

③ 100명 중 두명을 선별 할 때 적어도 1명이 여자일 경우의 수

$$= n(\text{두명 선별}) - n(\text{두명 모두 남자}) = \frac{100 \times 99}{2} - \frac{50 \times 49}{2}$$

$$= (50 \times 99) - (25 \times 49)$$

ex) $U = \{1, 2\}$ 의 부분집합의 수 = $\{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\} \} = 4 = 2^2$

ex) $U = \{1, 2, 3\}$ 의 부분집합의 수 = $8 = 2^3$

$$\Rightarrow \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\} \}$$

ex) $U = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ 의 부분집합의 수 = 2^n

(있거나 or 없거나)

EX) 남학생 = 50명, 여학생 50명

① 3명을 선발 할 때 적어도 1명이 여학생일 경우의 수

$$= n(3\text{명 선발}) - n(3\text{명 모두 남자}) = {}_{100}C_3 - {}_{50}C_3$$

$$= \frac{100 \times 99 \times 98}{6} - \frac{50 \times 49 \times 48}{6}$$

$$= 3! \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (ABC) = (ACB) = (BAC) \\ = (BCA) = (CAB) = (CBA) \end{array} \right\}$$

4개 세트에 쌍짜임이다!!

② 4명을 선발 할 때 적어도 1명이 여자를 경우의 수

$$= n(4\text{명 선발}) - n(4\text{명 모두 남자}) = {}_{100}C_4 - {}_{50}C_4$$

$$= \frac{100 \times 99 \times 98 \times 97}{4!} - \frac{50 \times 49 \times 48 \times 47}{4!}$$

$$= {}_{100}C_4 - {}_{50}C_4 = \frac{{}_{100}P_4}{4!} - \frac{{}_{50}P_4}{4!}$$

$$= \frac{100!}{96! \times 4!} - \frac{50!}{46! \times 4!}$$

P/110 예제 2-8 부분집합의 개수

$$\square = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

○ ① 적어도 홀수를 하나 이상 포함한 부분집합 수

$$= n(\text{전체 부분집합 수}) - n(\text{홀수만 있는 부분집합 수})$$

$\cancel{\{2, 4\}}$

$$= 2^5 - 2^2 = 32 - 4 = 28$$

② 적어도 짝수를 하나 이상 포함한 부분집합 수

$$= n(\text{전체 부분집합 수}) - n(\text{홀수만 있는 부분집합 수})$$

$\cancel{\{1, 3, 5\}}$

$$= 2^5 - 2^3 = 32 - 8 = 24$$

$$\text{ex) } \square = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$$

적어도 홀수를 하나 이상 포함한 부분집합 수

$$= n(\text{전체 부분집합}) - n(\text{홀수만 있는 부분집합})$$

$$= 2^{100} - 2^{50}$$

(있거나 or 없거나)

P/111

예제 2-9

$A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ 의 부분집합 중에서 1, 2를 반드시 포함하는 부분집합의 개수가 = 16 개 일 때 $n = ?$

$$\text{pf) } n(\text{ 1과 2를 반드시 포함하는 부분집합}) = 2^{n-2} = 16 = 2^4$$

$$\Rightarrow n-2 = 4 \Rightarrow \boxed{n=6}$$

예제 2-10

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 정합 $\{1, 2\}$ 와 서로소인 부분집합의 개수

pf) 원소 $\{1, 2\}$ 를 제외한 집합 $\{3, 4\}$ 이므로

\Rightarrow 집합 $\{1, 2\}$ 와 서로소인 부분집합 수 = $\{3, 4\}$ 의 부분집합 수

$$= 2^2 = 4$$

* 공약수 : 두개 이상의 자연수에서 서로 같은 약수

* 서로소 : 1을 제외한 공약수가 없음 (공약수가 1인 자연수)

§ 순열 (Permutation)

- : 서로 다른 n 개의 원소에서 r 개를 선택하여 "순서를 생각하고" 배열하는 경우의 수를 $n P_r$ 이라 표현하고, n 개에서 r 개를 선택하는 "순열"이라 한다.

정리 2-4

순열

$$\begin{aligned} n P_r &= n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1) \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \quad (\text{단, } n \geq r) \end{aligned}$$

<생질>

$$n P_0 = \frac{n!}{n!} = 1$$

$$n P_1 = \frac{n!}{(n-1)!} = n$$

$$n P_n = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n! = n(n-1)(n-2) \dots 3 \times 2 \times 1$$

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$$

ex) $A = \{1, 2, 3, 4\}$

① 2개를 선택하며 순서를 고려한 경우의 수

$$= {}^4P_2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = 4 \times 3 = 12$$

$$\Rightarrow \left\{ (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3) \right\}$$

