

Numerische Methoden Serie 5

Aufgabe 1 Simples Splittingverfahren

Die folgende ODE beschreibt Drehung und Schrumpfen eines Vektors im \mathbb{R}^2 :

$$\frac{d}{dt}\underline{y} = \frac{dR}{dt} \cdot R^{-1} \cdot \underline{y} - 0.1\underline{y} \quad (1)$$

mit der Rotationsmatrix:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta t & -\sin \theta t \\ \sin \theta t & \cos \theta t \end{pmatrix}$$

- (a) Wir wollen die ODE splitten in **Rotations- und Streckungskerne**

Wir erkennen sofort, dass die ODE bereits beim + in die zwei gewünschten Kerne geteilt ist, wobei $\frac{d}{dt}\underline{y}_1 = \frac{dR}{dt}R^{-1}\underline{y}_1$ der Rotationskern und $\frac{d}{dt}\underline{y}_0 = -0.1\underline{y}_0$ der Streckungskern ist. Für den Anfangswert gilt $\underline{y}(0) = 0$.

- (b) Diese beiden einzelnen **ODEs** sind einfach via Variablentrennung **analysitsch lösbar**. Aus der Form $\frac{d}{dt}\underline{y}_1 \cdot \underline{y}_1^{-1} = \frac{dR}{dt}R^{-1}$ erkennt man schnell, dass für den Rotationskern gilt:

$$\underline{y}_1(t) = \underline{y}_0 R(t) \quad (2)$$

Weiter kann man den Streckungskern $\frac{d}{dt}\underline{y}_0 \cdot \underline{y}_0^{-1} = -0.1$ über Trennung der Variablen lösen:

$$\int \underline{y}_0^{-1} d\underline{y} = \int -0.1 dt \implies \underline{y}(t) = \underline{y}_0 \exp -0.1t \quad (3)$$

- (c) Diese Teilaufgabe ist im dazugehörigen Template implementiert.