Numerische Methoden Serie 6

1 Kernaufgabe Runge-Kutta 1

Teilaufgabe a)

Schreiben Sie das explizite Euler-Verfahren, das implizite Euler-Verfahren und die implizite Mittelpunktsregel als Runge–Kutta-Verfahren; geben Sie die entsprechen- den Butcher-Tabellen an und erklären Sie die Herleitung jeder diesen Methoden als Runge–Kutta-Verfahren im Sinne der Vorlesung.

Wir erinnern uns an die Formel aus der Vorlesung, die uns die Terme k_i über die Einträge a_{ij}, c_i des Butcher Schemas liefert:

$$k_i = f\left(t_n + hc_i, y_n + h\sum_{j=1}^{s} a_{ij}k_j\right), \; i = 1, \cdots, s \tag{1}$$

$$y_0 := y_0 + h\sum_{i=1}^{s} b_i k_i$$

Wir werden nun diese Formeln nutzen um die einzelnen Verfahren als Runge-Kutta Verfahren aus ihrem gegebenen Butcher Schema herzuleiten.

(1) **Das explizite Euler-Verfahren.**
Das Butcher Schema für dieses Verfahren ist geg. durch

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$$

Daraus können wir wie in der Uebung über die Form des Schemas die Formel für das Verfahren herleiten. Das Verfahren ist einstufig mit $s = 1$ und hat also nur einen Term:

$$k_1 = f(t_n + 0 \cdot h, y_n + h(0 \cdot k_1)) = f(t_n, y_n) \tag{2}$$

$$y_0 := y_0 + h(k_1)$$

Das könnte man auch andersherum direkt aus der Formel

$$y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0) = y_0 + hk_1 \tag{3}$$

ablesen. Da sieht man, dass $b = 1, \; a = 0, \; c = 0$ sein muss.

(2) **Das implizite Euler-Verfahren.**
Das Butcher Schema für dieses Verfahren ist geg. durch

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

Daraus können wir gleich wie für das explizite Euler-Verfahren die Formel verwenden. Wieder ist $s = 1$ und wir erhalten die implizite Formel:

$$k_1 = f(t_n + h, y_n + h(1 \cdot k_1)) = f(t_n + h, y_n + hk1) \tag{4}$$

$$y_0 := y_0 + h(k_1)$$

Andersherum kann man auch direkt aus aus der Formel das Butcher-Schema herleiten:

$$y_1 = y_0 + hf(t_1, y_1) = y_0 + hk_1 \tag{5}$$

Darin erkennen wir den Koeffizienten $b_1 = 1$, und wir können mit

$$k_1 = f(t_0 + h, y_1) = f(t_0 + 1 \cdot h, 1 \cdot y_1) \tag{6}$$

$a = 1, \; c = 1$ ablesen.

(3) **Die implzite Mittelpunktsregel.** Das Butcher Schema für dieses Verfahren ist geg. durch

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 \end{array}$$

Daraus erhalten wir auch wieder ein implizites einstufiges Verfahren:

$$k_1 = f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + h\left(\frac{1}{2} \cdot k_1\right)\right) = f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{hk_1}{2}\right) \tag{7}$$

$$y_0 := y_0 + h(k_1)$$

Das können wir auch direkt andersherum über die Formel der impliziten Mittelpunktsregel herleiten, denn wir wissen bereits dass die iMP Regel geg. ist durch:

$$y_1 = y_0 + h(f(t_0 + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(y_0 + y_1))) = y_0 + hk_1 \tag{8}$$

Daraus können wir direkt den Koeffizienten $b_1 = 1$ für das Butcher Schema ablesen. Genau gleich können wir nun umschreiben:

$$k_1 = f(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_0) = f(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{1}{2}hk_1) \tag{9}$$

Und daraus können wir nun ablesen, dass $a_1 = c_1 = \frac{1}{2}$. Das ergibt uns aus der Formel direkt das Butcher Schema!