『C 言語による画像再構成の基礎』式 (4-53) に関して

@spica-jp

2023 年 1 月 4 日（水曜日）

教科書（『C 言語による画像再構成の基礎』）p. 144 の式 (4-53) の 2 行上で提示された式，すなわち

$$F(2k+1) = \sum_{j=0}^{(N/2)-1} f'(j) \exp\left(-\frac{2\pi ij(2k+1)}{N}\right) + \sum_{j=0}^{(N/2)-1} f'\left(j+\frac{N}{2}\right) \exp\left(-\frac{2\pi i(j+(N/2))(2k+1)}{N}\right)$$

から出発する。

さて，

$$\begin{aligned}
\exp\left(-\frac{2\pi ij(2k+1)}{N}\right) &= \exp\left(-\frac{4\pi ijk+2\pi ij}{N}\right) \\
&= \exp\left(-\frac{4\pi ijk}{N}-\frac{2\pi ij}{N}\right) \\
&= \exp\left(-\frac{4\pi ijk}{N}\right)\exp\left(-\frac{2\pi ij}{N}\right) \\
&= \exp\left(-\frac{2\pi ijk}{N/2}\right)\exp\left(-\frac{2\pi ij}{N}\right)
\end{aligned}$$

であり，また，

$$\begin{aligned}
\exp\left(-\frac{2\pi i(j+(N/2))(2k+1)}{N}\right) &= \exp\left(-\frac{(2\pi ij+\pi iN)(2k+1)}{N}\right) \\
&= \exp\left(-\frac{4\pi ijk+2\pi ij}{N}-\frac{\pi iN(2k+1)}{N}\right) \\
&= \exp\left(-\frac{4\pi ijk}{N}-\frac{2\pi ij}{N}-\pi i(2k+1)\right) \\
&= \exp\left(-\frac{4\pi ijk}{N}\right)\exp\left(-\frac{2\pi ij}{N}\right)\exp(-\pi i(2k+1)) \\
&= \exp\left(-\frac{2\pi ijk}{N/2}\right)\exp\left(-\frac{2\pi ij}{N}\right)\exp(-\pi i(2k+1))
\end{aligned}$$

である。

よって，

$$
\begin{aligned}
F(2k+1) = &\sum_{j=0}^{(N/2)-1} f'(j)\exp\left(-\frac{2\pi ijk}{N/2}\right)\exp\left(-\frac{2\pi ij}{N}\right) \\
&+ \sum_{j=0}^{(N/2)-1} f'\left(j+\frac{N}{2}\right)\exp\left(-\frac{2\pi ijk}{N/2}\right)\exp\left(-\frac{2\pi ij}{N}\right)\exp(-\pi i(2k+1)) \\
= &\sum_{j=0}^{(N/2)-1} f'(j)\exp\left(-\frac{2\pi ijk}{N/2}\right)\exp\left(-\frac{2\pi ij}{N}\right) \\
&+ \exp(-\pi i(2k+1))\sum_{j=0}^{(N/2)-1} f'\left(j+\frac{N}{2}\right)\exp\left(-\frac{2\pi ijk}{N/2}\right)\exp\left(-\frac{2\pi ij}{N}\right) \\
= &\sum_{j=0}^{(N/2)-1} \left(f'(j) + \exp(-\pi i(2k+1))f'\left(j+\frac{N}{2}\right)\right)\exp\left(-\frac{2\pi ijk}{N/2}\right)\exp\left(-\frac{2\pi ij}{N}\right)
\end{aligned}
$$

となる。ここで，オイラーの公式[*1]，及び $k \in \mathbb{Z}$ より，

$$
\exp(-\pi i(2k+1)) = \cos(-\pi(2k+1)) + i\sin(-\pi(2k+1)) = -1 + 0 = -1
$$

であるから，

$$
\boxed{F(2k+1) = \sum_{j=0}^{(N/2)-1} \left(f'(j) - f'\left(j+\frac{N}{2}\right)\right)\exp\left(-\frac{2\pi ijk}{N/2}\right)\exp\left(-\frac{2\pi ij}{N}\right)} \tag{1}
$$

を得る。これを教科書風に書き直せば，

$$
F(2k+1) = \sum_{j=0}^{N/2-1} [f'(j) - f'(j+N/2)]e^{-\frac{2\pi ijk}{N/2}} \cdot e^{-\frac{2\pi ij}{N}}
$$

であり，教科書の式 (4-53)，すなわち

$$
F(2k+1) = \sum_{j=0}^{N/2-1} \left[f'(j) - e^{-\frac{2\pi ij}{N}} \cdot f'(j+N/2)\right]e^{-\frac{2\pi ijk}{N/2}}
$$

とはならない。

なお，式 (1) をさらに整理すると，

$$
\boxed{F(2k+1) = \sum_{j=0}^{(N/2)-1} \left(f'(j) - f'\left(j+\frac{N}{2}\right)\right)\exp\left(-\frac{\pi ij(2k+1)}{N/2}\right)}
$$

となる。教科書の式 (4-52)，すなわち

$$
F(2k) = \sum_{j=0}^{(N/2)-1} \left(f'(j) + f'\left(j+\frac{N}{2}\right)\right)\exp\left(-\frac{\pi ij(2k)}{N/2}\right)
$$

とも比較されたい。

[*1] $\theta(\in \mathbb{R})$ に対し，$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ が成り立つ，という公式であり，教科書では p. 140 にて言及されている。