# Lista de exercícios 1

**Conteúdo:**

- Lógica Proposicional: proposições, conectivos lógicos, tabelas-verdade, equivalências lógicas
- Quantificadores: quantificadores existencial e universal, negação de quantificadores
- Notações somatório e produtório: definições, propriedades, exemplos
- Indução Matemática: princípios de indução, provas por indução
- Teoria dos Conjuntos: subconjuntos, cardinalidade, operações, diagramas de Venn

# Lógica Proposicional e Quantificadores

## Parte 1 – Regras de Inferência

Identifique a regra de inferência ilustrada em cada argumento abaixo:

1. Se Martins é o autor, então o livro é de ficção. Mas o livro não é de ficção. Portanto, Martins não é o autor.
2. Se a firma falir, todos os seus ativos têm que ser confiscados. A firma faliu. Logo, todos os ativos foram confiscados.
3. O cachorro tem pelo sedoso e adora latir. Portanto, o cachorro adora latir.
4. Se Paulo é um bom nadador, então ele é um bom corredor. Se Paulo é um bom corredor, então ele é um bom ciclista. Portanto, se Paulo é um bom nadador, então ele é um bom ciclista.

## Parte 2 – Justificação e Demonstração

Justifique cada passo na sequência de demonstração abaixo:

$$\begin{array}{rr} H_1 & \neg A \\ H_2 & B \\ H_3 & B \to (A \lor C) \\ \therefore & C \\ & \overline{\phantom{xxxxxxxxxxxx}} \\ 1. & A \lor C \text{ \_\_\_\_\_\_\_} \\ 2. & C \text{ \_\_\_\_\_\_\_} \end{array}$$

## Parte 3 – Avaliação Lógica de Proposições

Determine o valor lógico das proposições abaixo, considerando o conjunto universo como todos os inteiros:

1. $(\exists x)(I(x))$

2. $(\forall x)[L(x) \rightarrow I(x)]$
3. $(\exists x)[L(x) \wedge G(x)]$
4. $(\forall x)[L(x) \vee G(x)]$

Considere:

- $I(x)$: x é ímpar
- $L(x)$: x < 0
- $G(x)$: x > 9

## Parte 4 – Tradução para linguagem natural

Sejam as proposições:

- A: "O livro é interessante"
- B: "O livro é caro"

Traduza para a linguagem natural:

1. $\neg A$
2. $A \wedge B$
3. $A \vee B$
4. $B \vee (\neg A)$
5. $(\neg A) \wedge (\neg B)$

## Parte 5 – Determinação da Negação

Determine a negação correta para as sentenças abaixo:

1. Estou feliz.
2. Todos os elefantes são cor-de-rosa.
3. Alguns cavalos são brancos.
4. Todos os cavalos são pretos.
5. O sol está brilhando.

## Parte 6 – Tabela-verdade

Faça a tabela-verdade para as sentenças a seguir:

1. $(A \rightarrow B)$
2. $(A \leftrightarrow B)$

## Parte 7 – Tradução de frases em linguagem simbólica

Traduza as frases abaixo para a linguagem simbólica:

1. É verão somente se está calor.
2. Uma condição necessária para estar calor é que seja verão.

3. Nunca é verão quando está calor.

Considere:

- A: "Está calor"
- B: "É verão"

## Parte 8 – Exercícios de interpretação lógica

Analise logicamente as proposições e indique sua veracidade:

1. $(5 + 4 = 9 \wedge 2 \leq 4)$
2. $(3 + 2 = 6 \wedge 2 + 2 = 4)$
3. $(5 + 3 = 7 \vee 4 + 4 = 7)$
4. $(4 + 3 = 7 \vee 2 + 3 = 4)$

## Parte 9 – Uso dos quantificadores

Escreva cada afirmação em forma simbólica, usando quantificadores:

1. Todos os dias são ensolarados.
2. Alguns dias são chuvosos.
3. Nenhum dia é ensolarado e chuvoso ao mesmo tempo.

Considere:

- $D(x)$: x é um dia.
- $S(x)$: x é ensolarado.
- $C(x)$: x é chuvoso.

## Parte 10 – Provas e validação

Use lógica proposicional para provar que cada argumento é válido:

### Argumento 1

$$\begin{array}{cr} H_1 & A' \\ H_2 & B \to A \\ \therefore & B' \end{array}$$

### Argumento 2

$$\begin{array}{cr} H_1 & A \to (B \to C) \\ H_2 & A \vee D' \\ H_3 & B \\ \therefore & D \to C \end{array}$$

**Argumento 3**

$$\begin{array}{rr} H_1 & \neg A \to \neg B \\ H_2 & B \\ H_3 & A \to C \\ \therefore & C \end{array}$$

**Argumento 4**

$$\begin{array}{rr} H_1 & P \lor \neg Q \\ H_2 & Q \\ \therefore & P \end{array}$$

**Argumento 5**

$$\begin{array}{rr} H_1 & P \to Q \\ H_2 & Q \to R \\ \therefore & P \to R \end{array}$$

**Argumento 6**

$$\begin{array}{rr} H_1 & P \to \neg Q \\ H_2 & P \\ \therefore & \neg Q \end{array}$$

**Argumento 7**

$$\begin{array}{rr} H_1 & \neg P \to Q \\ H_2 & Q \to \neg R \\ \therefore & \neg P \to \neg R \end{array}$$

**Argumento 8**

$$\begin{array}{rr} H_1 & P \lor Q \\ H_2 & \neg P \\ \therefore & Q \end{array}$$

# Somatório e Indução Matemática

## Parte 1 – Propriedades do Somatório

Determine o valor de cada somatório abaixo:

1. $\sum_{i=1}^{10} i$
2. $\sum_{i=1}^{5} (2i + 3)$

3. $\sum_{i=2}^{2}(3i^2+2i+1)$
4. $\sum_{i=1}^{100} 12$

Verifique se as equivalências abaixo são verdadeiras:

5. $\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)=\sum_{i=1}^{n} a_i+\sum_{i=1}^{n} b_i$
6. $\sum_{i=1}^{n}(a_i \cdot b_i)=\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i$
7. $\sum_{i=1}^{3} a_i+\sum_{i=4}^{n} a_i=\sum_{i=1}^{n} a_i$
8. $\sum_{i=1}^{n} a_i=\sum_{i=1}^{n-1} a_i+a_n$
9. $\sum_{i=1}^{n} a_i=\sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}$
10. $(\sum_{i=1}^{n} a_i)^2=\sum_{i=1}^{n} a_i^2$

## Parte 2 – Prova por Indução Matemática

Prove por indução matemática as seguintes afirmações:

### Somatório

11. A soma dos n primeiros números naturais é dada por $\frac{n(n+1)}{2}$.
12. A soma dos n primeiros números ímpares é dada por $n^2$.
13. A soma dos n primeiros números pares é dada por $n(n+1)$.
14. A soma dos n primeiros números quadrados é dada por $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
15. $\sum_{i=1}^{n} i.2^{i-1}=(n-1)2^n+1$

### Divisibilidade

16. $n^3+2n$ é divisível por 3 para todo n natural.
17. $4^n+6n-1$ é divisível por 9 para todo n natural.
18. $2^{2n}-1$ é divisível por 3 para todo n natural.

# Conjuntos e Teoria dos Conjuntos