Exercício 3. Faça a tabela-verdade da disjunção exclusiva.

Em Lógica, como se observou, uma disjunção é verdadeira quando uma das proposições constituintes é verdadeira ou, também, quando ambas são verdadeiras simultaneamente.

Exercício 4. Faça o que se pede.

1. Sejam as proposições $A \equiv$ "O livro é interessante" e $B \equiv$ "O livro é caro". Fornecer uma sentença na linguagem natural que descreva cada uma das simbolizações abaixo:
a) $(\neg A)$ b) $(A \wedge B)$ c) $(A \vee B)$ d) $(B \vee (\neg A))$
e) $((\neg A) \wedge (\neg B))$

2. Sejam as sentenças: $A \equiv$ "A neve é branca" e $B \equiv$ "O sol é um astro". Determinar o valor-verdade das sentenças abaixo:
a) $[A \wedge (\neg B)]$ b) $[\neg(A \vee B)]$ c) $[(\neg A) \vee B]$ d) $[(\neg A) \wedge (\neg B)]$
e) $[A \leftrightarrow (\neg B)]$

3. Em que casos as sentenças abaixo são falsas? (Em cada item estude todas as possibilidades)
a) Ela é mineira e ele é paraense.
b) Ela é mineira ou ele é paraense.
c) É falso que ela é mineira e ele é paraense.
d) É falso que ela é mineira e é falso que ele é paraense.

4. Sejam as expressões $A \equiv$ "O céu é azul", $B \equiv$ "Deus existe" e $C \equiv$ "O Sol gira em torno da Terra". Fornecer uma sentença na linguagem natural que descreva cada uma das afirmações abaixo:
a) $(\neg A)$ b) $(A \wedge B)$ c) $((A \vee B) \wedge C)$
d) $(B \vee (\neg C))$ e) $[(\neg A) \wedge (\neg B)]$ f) $[\neg((\neg A) \vee C)]$
g) $[\neg(A \vee (\neg\neg B))]$ h) $(C \wedge (\neg B))$

5. Escreva as sentenças em linguagem simbólica abaixo utilizando os conectivos $\neg$, $\wedge$ e $\vee$.
a) Não é verdade que Galileu esteja certo.
b) A água não pode ser simultaneamente líquida e sólida.
c) O seguro da casa inclui incêndio ou roubo.
d) Compro ou não compro.
e) Não estudarei hoje, mas estudarei amanhã e quarta-feira.

6. Determinar a tabela verdade das sentenças abaixo, sendo $A \equiv \varnothing = \{\varnothing\}, B \equiv \varnothing = \varnothing, C \equiv \{\varnothing\} = \{\{\varnothing\}\}$:
a) $[A \wedge (\neg C)]$ b) $[\neg(B \vee C)]$
c) $[(\neg B) \wedge (\neg C)]$ d) $[\neg(A \wedge (\neg B))]$
f) $[\neg[(\neg A) \wedge (\neg B)]]$ g) $[\mathrm{A} \vee (\neg(A \wedge C))]$

7. Em que casos as sentenças abaixo *não* são *falsas*? (Estude todas as possibilidades)
a) A Terra gira e Maria gosta de José.
b) Passarei em lógica ou 2 + 2 = 4.
c) É falso que ela gosta dele e é falso que ele gosta dela.
d) É falso que ela gosta dele e ele gosta dela.

8. Entendemos por *disjunção exclusiva* ao tipo de disjunção em que as sentenças não podem ocorrer simultaneamente, como no exemplo "Ela está alegre *ou* não está alegre". Definir, nos casos abaixo se o *ou* corresponde à disjunção inclusiva ou exclusiva.
a) Eu menti ontem ou mentirei amanhã.
b) Meu time é o campeão deste ano ou não é o campeão deste ano.
c) Ela se formou em 1993 ou em 1998.
d) Com sol ou com chuva, você trabalhava.
e) O terno é de Bentinho ou de Escobar.

4) Implicação

Dadas as proposições A e B podemos considerar a nova proposição $(A \rightarrow B)$, a *implicação* de B por A.

A proposição A chama-se *antecedente* da implicação $(A \rightarrow B)$ e B chama-se o *conseqüente* da implicação $(A \rightarrow B)$.

Postulamos que a proposição $(A \rightarrow B)$ é falsa se e somente se o antecedente A é verdadeiro e o conseqüente B é falso. Nos demais casos, a proposição $(A \rightarrow B)$ é verdadeira.

As considerações acima podem ser esquematizadas como se segue:

Tabela-verdade da implicação:

A	B	$(A \rightarrow B)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Exemplo 7. Consideremos as seguintes proposições:

1) $[\underbrace{(2+4=4)}_{verdadeira} \wedge \underbrace{(1 \leq 2)}_{verdadeira}]$ Esta proposição é verdadeira

2) $[\underbrace{(2+4=4)}_{verdadeira} \wedge \underbrace{(1 \geq 2)}_{falsa}]$ Esta proposição é falsa

3) $[\underbrace{(2+4 \neq 4)}_{falsa} \wedge \underbrace{(1 \leq 2)}_{verdadeira}]$ Esta proposição é verdadeira

4) $[\underbrace{(2+4 \neq 4)}_{falsa} \wedge \underbrace{(1 \geq 2)}_{falsa}]$ Esta proposição é verdadeira

Exercício 6. Dizer se são verdadeiras ou falsas (adote o "bom senso" nos juízos):

1. Se a neve é branca, então Paris é a capital da França.
2. Se Penha é um bairro de São Paulo, então o céu não contém estrelas.
3. Se os planetas giram em torno da terra, então inexistem extra-terráqueos.
4. Se o sol é um planeta inerte, então a terra é uma estrela.

5) **Bi-implicação**

Dadas as proposições A e B podemos considerar a nova proposição $(A \leftrightarrow B)$, a *bi-implicação* de A e B.

Postulamos que a proposição $(A \leftrightarrow B)$ é verdadeira se e somente se as proposições A e B possuem o mesmo valor-verdade. A proposição $(A \leftrightarrow B)$ é falsa se e somente se as proposições A e B tiverem valores-verdade trocados.

As considerações acima podem ser esquematizadas como se segue:

Tabela-verdade da bi-implicação:

A	B	$(A \leftrightarrow B)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Exemplo 9. Consideremos as seguintes proposições:

1) $[\underbrace{(2+4=4)}_{verdadeira} \wedge \underbrace{(1 \leq 2)}_{verdadeira}]$ Esta proposição é verdadeira

2) $[\underbrace{(2+4=4)}_{verdadeira} \wedge \underbrace{(1 \geq 2)}_{falsa}]$ Esta proposição é falsa

3) $[\underbrace{(2+4 \neq 4)}_{falsa} \wedge \underbrace{(1 \leq 2)}_{verdadeira}]$ Esta proposição é falsa

4) $[\underbrace{(2+4 \neq 4)}_{falsa} \wedge \underbrace{(1 \geq 2)}_{falsa}]$ Esta proposição é verdadeira

Exercício 7. Faça o que se pede.

1. Indiquemos por $A \equiv$ "Está calor" e por $B \equiv$ "É verão". Escrever em forma simbólica as seguintes afirmações:

a) É verão somente se está calor.
b) Uma condição necessária para estar calor é que seja verão.
c) Uma condição suficiente para estar calor é que seja verão.
d) Sempre que é verão, faz calor.
e) Nunca é verão, quando está calor.

2. Dentro do contexto da lógica proposicional, identifique as sentenças abaixo quanto a sua veracidade ou falsidade justificando devidamente cada resposta dada.

a) $(5+4=9 \wedge 2 \leq 4)$, b) $(3+2=6 \wedge 2+2=4)$,
c) $(5+3=7 \vee 4+4=7)$, d) $(4+3=7 \vee 2+3=4)$,
e) $(2+3=5 \rightarrow 2+2=4)$, f) $(3+3=5 \rightarrow 32 \leq 33)$,
g) $(2+4=7 \rightarrow 2+2=5)$, h) $(3+2=5 \rightarrow 2+2=5)$,
i) $(6+2=8 \leftrightarrow 6 \leq 8)$, j) $(3+3=5 \leftrightarrow 2+2=3)$,
k) $(2+2=3 \leftrightarrow 2+2=4)$, l) $(3+4=6 \leftrightarrow 3+3=7)$,
m) $(3 \leq 2 \rightarrow 4 \leq 3)$, n) $(32 \leq 33 \rightarrow 4+5=8)$,
o) $(2 \leq 3 \rightarrow (2+2=4 \wedge 7+2=9))$, l) $((3 \leq 4 \wedge 4 \leq 3) \rightarrow 3+3=7)$.

A seguir apresentamos algumas leituras que a negação, conjunção, disjunção, implicação e bi-implicação podem ter na linguagem natural.

$(\neg A)$	Não A; Não se dá que A; Não é fato que A; Não é verdade que A; Não é que A; Não se tem A.
$(A \wedge B)$	A e B; A, mas B; A, embora B; A, assim como B; A e, além disso, B; Tanto A como B; A e também B; Não só A, mas também B; A, apesar de B.
$(A \vee B)$	A ou B ou ambos.
$(A \rightarrow B)$	se A, então B; se A, isto significa que B; tendo-se A, então B; quando A, então B; sempre que A, B; B, sempre que se tenha A; B, contanto que A; A é condição suficiente para B; B é condição necessária para A; Uma condição suficiente para B é A; Uma condição necessária para A é B; B, se A;

	B, quando A; B, no caso de A; A, só se B; A, somente quando B; A, só no caso de B; A implica B, A acarreta B, B é implicada por A.
$(A \leftrightarrow B)$	A se e só se B; A se e somente se B; A quando e somente quando B; A eqüivale a B; Uma condição necessária e suficiente para A é B; A é condição necessária e suficiente para B

3. Escreva as sentenças a seguir em linguagem simbólica, usando sentenças básicas (ou atômicas), isto é, as sentenças que não podem ser construídas a partir de outras sentenças.
a) Se Antônio está feliz, a esposa do Antônio não está feliz, e se o Antônio não está feliz, a esposa do Antônio não está feliz.
b) Ou Antônio virá à festa e Pedro não, ou Antônio não virá à festa e Pedro se divertirá.
c) Uma condição necessária e suficiente para o rei ser feliz é ele ter vinho, mulheres e música.
d) Teresa vai ao cinema só se o filme for uma comédia.

4. Traduza as sentenças abaixo, dado o seguinte esquema:
$A \equiv$ Clarissa sorri
$B \equiv$ Clarissa desperta
$C \equiv$ Clarissa vai á praia
$D \equiv$ Clarissa fica indecisa
$E \equiv$ Clarissa sente o sol
a) $(B \to A)$
b) $(A \to C)$
c) $((D \vee C) \to (A \leftrightarrow (B \wedge (\neg E))))$

5. Simbolize as sentenças abaixo, dado o seguinte esquema:
$A \equiv$ o estudante comete erros,
$B \equiv$ há motivação para o estudo,
$C \equiv$ o estudante aprende a matéria.
a) Se o estudante não comete erros, então ele aprende a matéria.
b) Se não há motivação para o estudo, então o estudante não aprende a matéria.
c) Se há motivação para o estudo, o estudante não comete erros.
d) O estudante aprende a matéria se, e somente se, há motivação para o estudo.

6. Simbolize as sentenças abaixo:
a) Ou Capitu é ou não é a criação mais notável de Machado de Assis.
b) Não é verdade que Machado de Assis escreveu ou não escreveu poesias.
c) Se é fácil ler o que José da Silva escreveu, não é fácil ler o que escreveu Guimarães Rosa.

7. Escreva as sentenças a seguir em linguagem simbólica, usando formas simples, isto é, as sentenças que não podem ser construídas a partir de outras sentenças.
a) Uma condição suficiente para x ser ímpar é x ser primo
b) Uma condição necessária para uma seqüência s convergir é que s seja limitada.
c) O suborno será pago se, e somente se, a mercadoria for entregue.
d) Judite vencerá o torneio de xadrez, a menos que Tânia vença hoje.
e) Se x é positivo, então x^2 é positivo.

8. Traduza as sentenças abaixo, dado o seguinte esquema:
$A \equiv$ ganho um livro
$B \equiv$ ganho uma revista
$C \equiv$ posso ler
$D \equiv$ estou motivado
$E \equiv$ sou aprovado no exame.
a) $(C \rightarrow (A \vee B))$
b) $(D \rightarrow (\neg C))$
c) $(D \rightarrow ((\neg C) \wedge (A \vee B)))$
d) $((\neg D) \rightarrow (E \rightarrow (A \vee B)))$
e) $((\neg D) \rightarrow (C \rightarrow (A \vee B))$
f) $(((\neg C) \wedge A) \rightarrow (E \rightarrow (\neg D)))$

9. Traduza as sentenças abaixo, dado o seguinte esquema:
$A \equiv$ há nuvens,
$B \equiv$ choverá,
$C \equiv$ ventará.
$D \equiv$ fará bom tempo amanhã.
a) $(A \rightarrow B)$
b) $(A \rightarrow (\neg D))$
c) $((\neg D) \wedge (B \wedge C))$
d) $((\neg A) \rightarrow D)$
e) $(A \wedge (B \vee C))$
f) $((A \wedge B) \vee C)$
g) $(A \rightarrow (B \vee C))$
h) $((A \rightarrow B) \vee C)$
i) $((A \leftrightarrow B) \wedge ((\neg C) \wedge D))$
j) $(A \leftrightarrow ((B \wedge C) \vee D))$

10. Simbolize as sentenças abaixo, dado o seguinte esquema:
$A \equiv$ o estudante comete erros;

$B \equiv$ há motivação para o estudo,
$C \equiv$o estudante aprende a matéria.

a) Se não há motivação para o estudo, então o estudante comete erros ou não aprende a matéria.
b) Se o estudante comete erros, então, se não há motivação para o estudo, o estudante não aprende a matéria.
c) O estudante comete erros; além disso, há motivação para o estudo e o estudante aprende a matéria.
d) Não há motivação para o estudo se e somente se o estudante comete erros e não aprende a matéria.
e) Se há motivação para o estudo e o estudante não comete erros, então o estudante aprende a matéria se há motivação.

11. Simbolize as sentenças abaixo, dado o seguinte esquema:
$A \equiv$ Paulo diminui os erros cometidos,
$B \equiv$ há motivação para o estudo,
$C \equiv$ Paulo aprendeu a matéria,
$D \equiv$ O professor é bom.

a) Se o professor é bom, Paulo aprende a matéria.
b) Se o professor não é bom, não há motivação para estudar.
c) O professor é bom, há motivação para estudar e, além disso, Paulo aprende a matéria.
d) Paulo não aprendeu a matéria; ele não diminuiu os erros cometidos.
e) Se Paulo não diminuiu os erros cometidos, o professor não era bom ou não havia motivação para estudar.
f) Paulo aprende a matéria ou diminui os erros cometidos.
g) Paulo diminui os erros cometidos se, e somente se, há motivação para estudar.
h) Se o professor é bom, então, caso haja motivação para estudar, Paulo aprenderá a matéria.
i) Paulo diminuirá o número de erros cometidos se, e somente se, não ocorrer o seguinte: não deixa de haver motivação para o estudo e Paulo não deixa de aprender a matéria.

12. Simbolize as sentenças abaixo:

a) É fácil compreender as obras de José da Silva, mas não os de Guimarães Rosa.
b) Se Diana foi ao baile, não é fato que não tenha ido ao baile.
c) Não é fato que Paulo que vá à festa e fique satisfeito.
d) Se o computador auxilia o cientista se, e somente se, altera a sua programação, então, se altera a programação, é útil.
e) Não se dá o seguinte: não viajamos e não levamos as barracas.
f) Irei á praia salvo se chover.
g) Vou estudar exceto se tiver vontade.

13. Dadas as sentenças atômicas abaixo, escrever por meio de símbolos:
$A \equiv$ “Ela é bonita”
$B \equiv$ “Ela é inteligente”
$C \equiv$ “Ela é rica”

$D \equiv$ "Ela é jovem"
$E \equiv$ "Ela gosta de mim"
$F \equiv$ "Quero casar com ela"

a) "Ela é pobre"
b) "Ela é rica ou jovem"
c) "Ela é inteligente e anciã"
d) "Não é que ela é burra"
e) "Se ela é rica, então quero casar com ela"
f) "Ela é inteligente, bonita, rica, jovem e ela gosta de mim"
g) "Quero casar com ela, mas ela não gosta de mim"
h) "Uma condição necessária para casar com ela é que ela seja bonita"
i) "Uma condição suficiente para casar com ela é que ela seja rica"
j) "Ela é feia, burra, pobre, anciã, mas quero casar com ela"
k) "Quero casar com ela só se ela gosta de mim"
l) "Se ela é jovem então ela é bonita"
m) "Uma condição necessária e suficiente para casar com ela é que ela goste de mim"
n) "Quero casar com ela, exceto se ela é burra"

2.6 - Fórmulas atômicas e fórmulas

Como observamos no início deste capítulo, através dos conectivos lógicos $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$, podemos construir sentenças mais "complexas" a partir de outras sentenças mais "simples". Este procedimento é clarificado pela seguinte regra de formação de sentenças:

Partimos de certas sentenças denominadas fórmulas atômicas[1] : p, q, r, ... Elas desempenham, intuitivamente, o papel de sentenças básicas ou atômicas da linguagem proposicional.

As sentenças (que daqui em diante receberão o nome de 'fórmulas') em geral são obtidas pela seguinte definição indutiva generalizada:

1. Todas as fórmulas atômicas são fórmulas.
2. Se A e B são fórmulas, então

$(\neg A)$,
$(A \wedge B)$,
$(A \vee B)$,
$(A \rightarrow B)$ e
$(A \leftrightarrow B)$

são também fórmulas.

3. Uma dada expressão constitui uma fórmula se e somente se foi obtida pela aplicação de uma das regras (1 ou 2) acima.

Observe-se que os símbolos A e B introduzidos na definição anterior (item 2) se tratam de variáveis que denotam sentenças quaisquer da linguagem proposicional. O leitor deve estar atento para o fato de que tais símbolos não são propriamente símbolos da linguagem em apreço, mas sim símbolos que estão "fora" da linguagem proposicional. Tais variáveis denominam-se, costumeiramente, meta-variáveis.