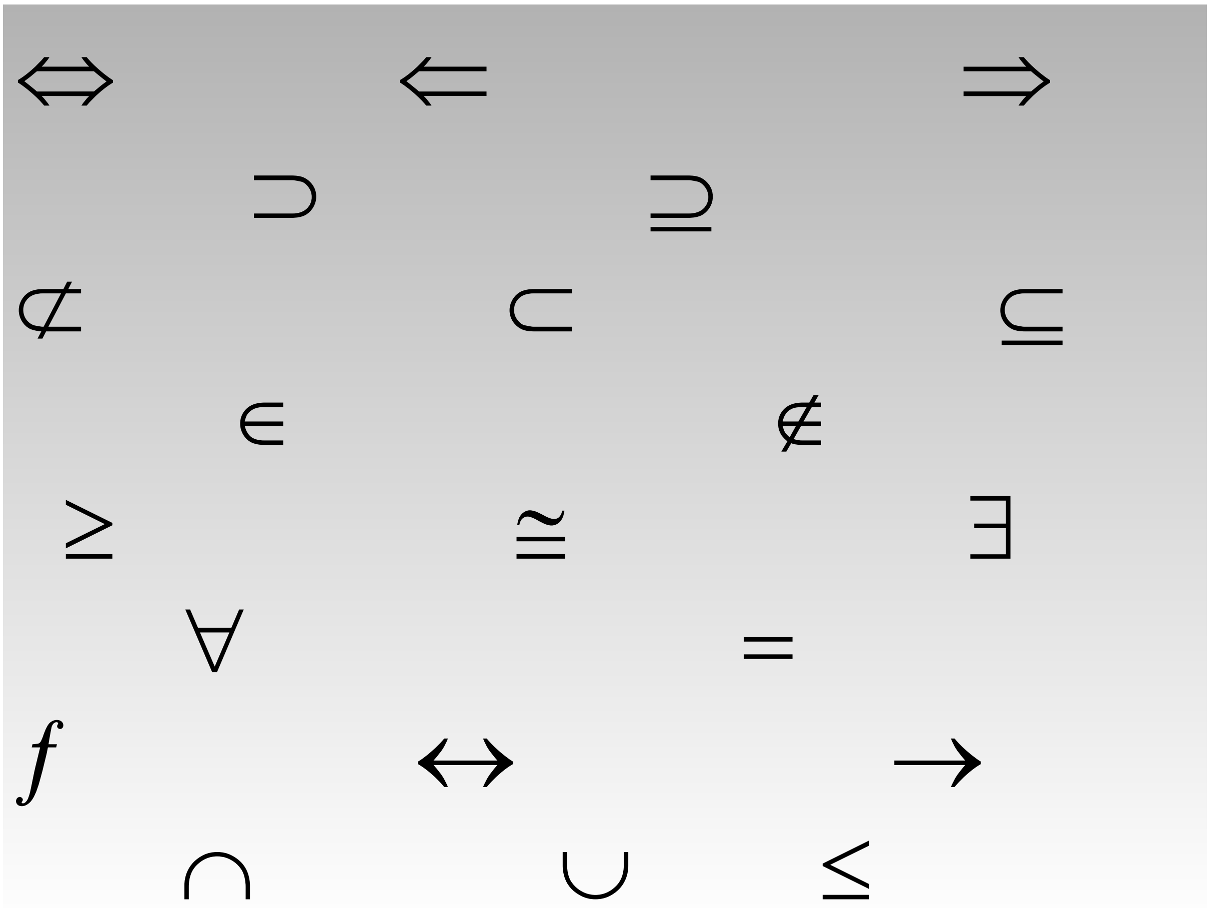
Universidade Estadual de Maringá
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Exercícios de Lógica



Organizador: João Roberto Gerônimo

abril de 2007

Maringá – PR

Introdução

O objetivo deste material é servir de reforço aos conceitos de lógica desenvolvidos na sala da aula. Os exercícios aqui propostos são de dificuldade baixa, média e alta e devem ser tomados como um complemento aos exercícios do livro. A intenção é proporcionar ao estudante o conhecimento de suas principais lacunas de modo a melhor orientar seu estudo.

Esta lista está dividida em assuntos e seus tópicos e contém exercícios "prováveis", ou seja, é *provável* que exercícios desse tipo caiam em *prova.*

Dividimos em temas conforme segue:

- Conceitos
- Tabelas-Verdade
- Método Dedutivo
- Quantificadores
- Problemas Lógicos
- Circuitos Lógicos e Interruptores

Conceitos

1. O que é Lógica? Para que serve?

2. Para que estudar lógica se eu faço o curso de Matemática?

3. Quais os três princípios que regem a Lógica Clássica?

4. a) O que é o Princípio da Identidade. Exemplifique.
b) O que é o Princípio do Terceiro Excluído. Exemplifique.
c) O que é o Princípio da Não-Contradição. Exemplifique.

5. O que é uma proposição?

6. O que são proposições compostas?

7. Quais as principais maneiras de construir proposições compostas?

8. Sejam as proposições P: "Está chovendo" ,Q: "O sol está brilhando" e R: "Há nuvens no céu". Traduza as seguintes sentenças abaixo em notação lógica:

a) "choverá se o sol brilhar ou se o céu estiver com nuvens".
b) "se está chovendo, então há nuvens no céu."
c) "o sol brilha quando e apenas quando o céu fica com nuvens."

9. Utilizando o exercício anterior, determine significados para as para as proposições:
a) $(P \wedge Q) \rightarrow R$
b)$\sim P \leftrightarrow (Q \vee R)$
c)$\sim(P \vee Q) \wedge R$

10. Determine os valores lógicos de cada uma das proposições:
a) se $2 + 2 = 4$ então $2 + 4 = 8$.
b) se $2 + 2 = 5$ então $2 + 4 = 8$.
c) se $2 + 2 = 4$ então $2 + 4 = 6$.
d) se $2 + 2 = 5$ então $2+4=6$.

11. Suponha que $P \rightarrow Q$ seja falso. É possível determinar os valores lógicos de
a) $P \wedge Q$.

b) $P \vee Q$.
c)$Q \rightarrow P$.

12. (FM-2005) Observe as seguintes demonstrações:

I)	II)
Temos 16-36 = 25-45. Somamos (81/4) nos dois lados, o que não altera a igualdade. Assim, 16-36+(81/4) = 25-45+(81/4). Isso pode ser escrito da seguinte forma: $(4-(9/2))^2= (5-(9/2))^2$. Tirando a raiz quadrada em ambos os lados temos:4-(9/2) = 5-(9/2). Somando (9/2) nos dois lados da igualdade temos:4 = 5.	Primo notou que o papel de Tornasol ficou vermelho ao ser posto em ácido. Verificou ainda, que ficou azul ao ser posto em solução alcalina. Agora, Primo está colocando o papel de Tornasol em uma solução ácida ou alcalina. Primo observa que o papel não ficou azul. É claro que o papel ficou vermelho.

Em (I) concluímos que:
A) Desde crianças fomos enganados e de fato 4 = 5.
B) Existe algo errado nessa demonstração.
Caso a sua resposta seja a A), ou seja, você foi enganado, o que resta é o chorar.
Se sua resposta foi a B), ou seja, deve haver algum erro nisto, mostre onde ele está e porque.

Em (II), a conclusão está correta? Justifique sua resposta utilizando os operadores lógicos conhecidos por você.

Tabela Verdade

13. a) O que é uma tabela verdade?
b) Como se constrói uma tabela verdade?
c) Quantas linhas são utilizadas na construção da tabela verdade?

14. A **conjunção de duas proposições P** e **Q**, denotada por $P \wedge Q$, é uma proposição composta que é verdadeira somente quando ambas o são. Construa sua tabela-verdade.

15. A **disjunção de duas proposições P** e **Q**, denotada por $P \vee Q$, é uma proposição composta que é verdadeira somente quando uma delas o é. Construa sua tabela-verdade.

16. A **negação de uma proposição P**, denotada por ~P, é uma proposição que troca o valor lógicao da proposição original. Construa sua tabela-verdade.

17. A **condicional de duas proposições P** e **Q**, denotada por $P \rightarrow Q$, é uma proposição composta que é falsa somente quando a primeira é verdadeira e a segunda é falsa.

18. A **bicondicional de duas proposições P** e **Q**, denotada por $P \leftrightarrow Q$, é uma proposição composta que é verdadeira somente quando ambas possuem o mesmo valor lógico

19. a) O que é uma tautologia?
b) O que é uma contradição?
c) O que é uma implicação ou inferência?
d) O que é uma bicondicional ou equivalência lógica?

20. Verifique que $p \wedge \sim p$ é uma contradição.

21. As tabelas a seguir estabelecem as principais regras de inferência e equivalências lógicas. Demonstre, utilizando a tabela verdade, cada uma dessas regras.

REGRAS DE INFERÊNCIA			
1	**Adição**	$P \Rightarrow P \vee Q$	$Q \Rightarrow P \vee Q$
	Simplificação	$P \wedge Q \Rightarrow P$	$P \wedge Q \Rightarrow Q$
2	**Silogismo Disjuntivo**	$(P \vee Q) \wedge \sim P \Rightarrow Q$	
	Modus Ponens	$(P \rightarrow Q) \wedge P \Rightarrow Q$	

	ModusTollens	$(P \to Q) \wedge \sim Q \Rightarrow \sim P$	
3	**Dilemas Construtivos**	$(P \to Q) \wedge (R \to S) \Rightarrow (P \vee R) \to (Q \vee S)$	
		$(P \to Q) \wedge (R \to S) \Rightarrow (P \wedge R) \to (Q \wedge S)$	
4	**Dilemas Destrutivos**	$(P \to Q) \wedge (R \to S) \Rightarrow [(\sim Q \vee \sim S) \to (\sim P \vee \sim R)]$	
		$(P \to Q) \wedge (R \to S) \Rightarrow [(\sim Q \wedge \sim S) \to (\sim P \wedge \sim R)]$	
5	**Lei Transitiva**	$(P \to Q) \wedge (Q \to R) \Rightarrow (P \to R)$	
6	**Contradição/Tautologia**	$c \Rightarrow P$	$P \Rightarrow t$
7	**Inferência por casos Inferência eliminação**	$(Q \to P) \wedge (R \to P) \Rightarrow [(Q \vee R) \to P]$	$[P \to (Q \vee R)] \wedge \sim R \Rightarrow (P \to Q)$
8	**União**	$P \wedge Q \Rightarrow P \vee Q$	
9	**Transitivadade**	$[P \Rightarrow Q \wedge Q \Rightarrow R] \Rightarrow (P \Rightarrow R)$	$[P \Leftrightarrow Q \wedge Q \Leftrightarrow R] \Rightarrow (P \Leftrightarrow R)$.

EQUIVALÊNCIAS LÓGICAS					
1	**Condicional**	$P \to Q \Leftrightarrow \sim[P \wedge (\sim Q)]$	$P \to Q \Leftrightarrow (\sim P) \vee Q$		
2	**Bicondicional**	$(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow [(P \to Q) \wedge (Q \to P)]$			
3	**Lei da dupla negação**	$\sim(\sim P) \Leftrightarrow P$			
4	**Leis comutativas**	$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$	$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$		
5	**Leis de idempotência**	$P \vee P \Leftrightarrow P$	$P \wedge P \Leftrightarrow P$		
6	**Lei contrapositiva**	$(P \to Q) \Leftrightarrow [(\sim Q) \to (\sim P)]$			
7	**Reductio ad Absurdum**	$(P \to Q) \Leftrightarrow (P \wedge \sim Q) \to c$			
8	**Leis de De Morgan**	$\sim(P \wedge Q) \Leftrightarrow [(\sim P) \vee (\sim Q)]$	$\sim(P \vee Q) \Leftrightarrow [(\sim P) \wedge (\sim Q)]$		
9	**Leis associativas**	$(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$	$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$		
10	**Leis distributivas**	$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$		
11	**Contradição–Tautologia**	$P \wedge t \Leftrightarrow P$	$P \vee t \Leftrightarrow t$	$P \wedge (\sim P) \Leftrightarrow c$	$P \wedge c \Leftrightarrow c$
		$P \vee c \Leftrightarrow P$	$\sim t \Leftrightarrow c$	$\sim c \Leftrightarrow t$	$P \vee \sim P \Leftrightarrow t$
12	**Substituição**	$(P \Leftrightarrow P') \Rightarrow [P(p,q,r,...) \Leftrightarrow P(p',q,r,...)]$			
13	**Absorção**	$[P \vee (P \wedge Q)] \Leftrightarrow P$	$[P \wedge (P \vee Q)] \Leftrightarrow P$		

22. Diga em cada caso, qual a lei de equivalência está sendo usada.

a) $\sim(\sim(P \vee Q)) \Leftrightarrow P \vee Q$.
b) $(P \vee Q) \wedge \sim R \Leftrightarrow \sim R \wedge (P \vee Q)$.
c) $[P \to (Q \leftrightarrow R)] \vee [P \to (Q \leftrightarrow R)] \Leftrightarrow [P \to (Q \leftrightarrow R)]$.
d) $\sim(\sim(\sim P)) \Leftrightarrow \sim P$.
e) $P \wedge (Q \to R) \Leftrightarrow (Q \to R) \wedge P$.
f) $\sim P \to (Q \wedge S) \Leftrightarrow \sim(Q \wedge S) \to P$.
g) $(P \to \sim Q) \wedge (\sim R \wedge S) \Leftrightarrow [(P \to \sim Q) \wedge \sim R] \wedge S$.
h) $\sim P \wedge Q \Leftrightarrow \sim(P \vee \sim Q)$.
i) $[P \to (Q \wedge R) \wedge (P \vee \sim P)] \Leftrightarrow P \to (Q \wedge R)$.
j) $(P \vee R) \wedge (R \vee Q) \Leftrightarrow R \vee (P \wedge Q)$.
k) $(P \wedge Q) \to \sim R \Leftrightarrow \sim(P \wedge Q \wedge R)$.
l) $P \vee Q \Leftrightarrow \sim(\sim P \wedge \sim Q)$.
m) $[(P \wedge R) \to S] \to \sim Q \Leftrightarrow Q \to \sim(P \wedge R) \to S$.
n) $(P \to \sim Q) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \to (P \wedge \sim P)$.
o) $(\sim P \to \sim Q) \vee (Q \vee \sim Q) \Leftrightarrow P \to P$.
p) $\sim(\sim P \wedge (Q \vee R)) \Leftrightarrow \sim((\sim P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge R))$.
q) $\sim(P \to Q) \wedge R \Leftrightarrow \sim(\sim R \vee (P \to Q))$.
r) $(P \to Q) \wedge (\sim Q \wedge \sim P) \Leftrightarrow ((P \to Q) \wedge \sim Q) \wedge \sim P$.
s) $(Q \wedge \sim R) \vee (R \wedge \sim R) \Leftrightarrow Q \wedge \sim R$.
t) $\sim P \to (Q \to R) \Leftrightarrow P \vee (Q \to R)$.

23. Diga em cada caso qual a regra de inferência que está sendo usada.

a) $\sim P \Rightarrow Q \vee \sim P$.
b) $(P \vee \sim Q) \wedge Q \Rightarrow P$.
c) $(P \to \sim Q) \wedge P \Rightarrow \sim Q$.
d) $(\sim P \to Q) \wedge (Q \to \sim R) \Rightarrow (\sim P \to \sim R)$.
e) $\sim P \wedge Q \Rightarrow \sim P$.
f) $(P \to (P \to Q)) \wedge P \Rightarrow (P \to Q)$.
g) $(P \to \sim Q) \wedge (Q \to \sim R) \Rightarrow (P \vee Q) \to (\sim Q \vee \sim R)$.

h) $(\sim P \rightarrow Q) \wedge \sim Q \Rightarrow P$.
i) $(\sim P \vee Q) \wedge \sim Q \Rightarrow \sim Q$.
j) $(\sim P \rightarrow Q) \wedge \sim P \Rightarrow Q$.
k) $((P \rightarrow Q) \vee R) \wedge \sim R \Rightarrow (P \rightarrow Q)$.
l) $P \wedge \sim P \Rightarrow R \wedge S \wedge \sim Q$.
m) $((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)) \vee (S \rightarrow R) \Rightarrow (\sim R \vee \sim(P \rightarrow R)) \rightarrow (\sim S \vee \sim(P \rightarrow Q))$.
n) $((P \wedge Q) \rightarrow (R \wedge S)) \wedge ((R \wedge S) \rightarrow \sim P) \Rightarrow (P \wedge Q) \rightarrow \sim P$.
o) $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow (Q \rightarrow R)$.
p) $P \Rightarrow P \vee \sim P$.
q) $((R \rightarrow S) \rightarrow R) \wedge (R \rightarrow S) \Rightarrow R$.
r) $(P \rightarrow (P \vee Q)) \wedge \sim(P \vee Q) \Rightarrow \sim P$.
s) $(P \vee Q) \wedge (R \vee S) \Rightarrow P \vee Q \vee R \vee S$.
t) $((P \rightarrow Q) \vee R) \wedge \sim S \Rightarrow R \vee \sim R$.
u) $((P \rightarrow Q) \rightarrow R) \wedge (R \rightarrow (Q \rightarrow P)) \Rightarrow (P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P)$.
v) $(\sim(P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow R) \vee \sim(Q \rightarrow P)) \Rightarrow (P \rightarrow Q)$.
x) $((P \wedge Q) \vee R) \wedge \sim(P \wedge Q) \Rightarrow R$.
w) $(\sim P \rightarrow \sim Q) \wedge \sim P \Rightarrow \sim Q$.
y) $(P \rightarrow Q) \wedge R \Rightarrow (P \rightarrow Q)$.

24. Uma **contingência** é uma proposição que assume pelo menos um valor lógico falso e um valor lógico verdadeiro. Portanto, qualquer proposição deve ser uma tautologia ou uma contradição ou uma contingência. Nas proposições abaixo, verifique através da tabela-verdade se é uma tautologia ou uma contradição ou uma contingência. (Utilizaremos a letra t para representar tautologia e a letra c para representar contradição):
a) (FM-2002) $[p \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow [q \rightarrow (p \wedge r)]$.

Solução: Faremos a tabela verdade de $[p \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow [q \rightarrow (p \wedge r)]$.

p	*q*	*r*	*[p*	$\wedge$	*(q*	$\rightarrow$	*r)]*	$\rightarrow$	*[q*	$\rightarrow$	*(p*	$\wedge$	*r)]*
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	V	F	F	V	V	F	V	F	F
V	F	V	V	V	F	V	V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	V	F	V	F	V	V	F	F
F	V	V	F	F	V	V	V	V	V	F	F	F	V
F	V	F	F	F	V	F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	V	V	V	F	V	F	F	V
F	F	F	F	F	F	V	F	V	F	V	F	F	F
Etapa			1	3	1	2	1	4	1	3	1	2	1

Como todas as possibilidades lógicas da etapa 4 são verdadeiras temos que a proposição é uma tautologia

b) (FM-2002) $[(p \vee q) \rightarrow r] \rightarrow [(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)]$.

c) (FM-2001) $[(p \wedge q) \wedge (r \wedge c)] \leftrightarrow (p \vee \sim r)$.
d) (FM-2000) $(p \vee \sim q) \leftrightarrow (\sim p \wedge q)$.
e) (FM-2000) $(p \wedge \sim p) \rightarrow (q \vee p)$.
f) (FM-2000) $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \leftrightarrow (p \wedge q) \rightarrow r$.
g) (FM-2000) $(p \wedge q) \vee (\sim r)$.
h) (FM-2000) $(p \vee q) \rightarrow (r \wedge p)$.
i) (FM-2000) $[(p \rightarrow r) \rightarrow (q \rightarrow r)] \leftrightarrow [(p \wedge q) \rightarrow r]$.
j) (FM-1999) (MD-2003) $[p \vee (p \rightarrow r)] \rightarrow p$.
k) (FM-1999) $\sim(p \wedge q) \vee \sim(q \leftrightarrow p)$.
l) (FM-1999) $(p \wedge q) \rightarrow q \vee p$.
m) (FM-1999) (MD-2003) $\sim(p \rightarrow q) \leftrightarrow \sim p \vee q$.
n) (FM-1999) $[p \wedge (\sim q)] \rightarrow [(\sim p) \vee q]$.
o) (FM-1999) $(p \wedge q \wedge r) \leftrightarrow [(\sim p) \vee (\sim q) \vee (\sim r)$.
p) (FM-1999) $p \wedge (p \rightarrow q) \wedge [p \rightarrow (\sim q)]$.
q) (FM-1999) $(\sim p) \rightarrow (p \rightarrow q)$.
r) $\sim(P \wedge Q)$.
s) $R \Rightarrow \sim(P \wedge Q)$.
t) $\sim(P \wedge Q)$.
u) $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \vee \sim Q)$.
v) $\sim(p \vee \sim q)$.
x) $\sim(p \rightarrow q)$.
w) $\sim(p \wedge q) \vee \sim(q \leftrightarrow p)$

y) $(p \wedge q) \rightarrow (q \vee p)$
z) $\sim(p \rightarrow q) \leftrightarrow \sim(p \vee q)$
aa) $p \wedge q \rightarrow p \vee q$.
ab) $\sim p \rightarrow (q \rightarrow p)$.
ac) $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge q)$.
ad) $q \leftrightarrow (\sim p \wedge q)$.
ae) $(p \leftrightarrow \sim q) \leftrightarrow (p \rightarrow p)$.
af) $(p \leftrightarrow \sim q) \rightarrow (\sim p \wedge q)$.
ag) $(\sim p \wedge r) \rightarrow (q \vee r)$.
ah) $(p \rightarrow r) \leftrightarrow (q \vee \sim r)$.
ai) $(p \rightarrow (p \rightarrow \sim r)) \leftrightarrow (q \vee r)$ l) $(p \wedge q) \vee [\sim p \leftrightarrow (q \vee \sim r)]$.
aj) $[p \wedge (\sim q)] \rightarrow [(\sim p) \vee q]$.
ak) $[(p \wedge q) \wedge r] \leftrightarrow [(\sim p) \vee (\sim q) \vee (\sim r)]$.
al) $[p \wedge (p \rightarrow q)] \wedge [p \rightarrow (\sim q)]$.
am) $(\sim p) \rightarrow (p \rightarrow q)$.
an) $p \vee \sim q) \leftrightarrow (\sim p \wedge q)$.
ao) $(p \wedge \sim p) \rightarrow (q \vee p)$.
ap) $p \wedge (p \vee q) \leftrightarrow p$.
aq) $[(p \rightarrow r) \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [(p \wedge q) \rightarrow r]$.
ar) $[p \leftrightarrow p \wedge q)] \leftrightarrow [p \rightarrow q]$.
as) $p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow q$.
at) $[q \leftrightarrow (p \vee q)] \leftrightarrow [p \rightarrow q]$.
au) $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \leftrightarrow [p \rightarrow (q \wedge r)]$.
av) $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \leftrightarrow [p \rightarrow (q \vee r)]$.
ax) $[(p \rightarrow q) \rightarrow r] \leftrightarrow [(q \wedge \sim r) \rightarrow \sim p]$.
aw) $(p \wedge q) \vee (\sim p) \vee (\sim q)$.
ay) $p \wedge (q \vee r)$.
az) $q \rightarrow (p \vee q)$.
ba) $(p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge (r \vee p)$.
bb) $(\sim p \rightarrow p) \leftrightarrow p$.
bc) $(p \vee q) \rightarrow p$.
bd) $(p \wedge q \wedge r) \vee p \vee q \vee r$.
be) $(p \vee q) \wedge r$.
bf) $(p \wedge q) \rightarrow q$.
bg) $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$.
bh) $(p \vee q) \rightarrow r$.
bi) $(p \rightarrow p) \leftrightarrow p$.
bj) $(\sim p) \leftrightarrow [p \vee (\sim q)]$.
bk) $(p \rightarrow \sim p) \leftrightarrow p$
bl) $(\sim p) \rightarrow q$.
bm) $(\sim q) \rightarrow (\sim p)$
bn) $p \vee \sim p$
bo) $p \vee (q \wedge r)$.
bp) $(p \vee q) \vee r$
bq) $(p \rightarrow q) \rightarrow [p \vee (q \wedge r) \rightarrow p \wedge (p \vee r)]$.
br) $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.
bs) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow [(p \wedge q) \rightarrow (q \wedge r)]$.
bt) $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
bu) $p \vee (q \vee r)$.
bv) $(p \wedge q \wedge r) \vee (\sim p \wedge q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r)$.
bw) $(p \rightarrow q) \rightarrow [p \vee (q \vee r) \rightarrow p \wedge (p \vee r)]$.
by) $p \rightarrow p$
bz) $p \wedge q \rightarrow q \wedge p$
ca) $p \rightarrow p \wedge p$
cb) $p \wedge q \rightarrow q$
cc) $[p \vee (q \rightarrow r)] \rightarrow p$

25. Mostre que
a) $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \leftrightarrow \sim q)$.
b) $(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim p \leftrightarrow \sim q)$ não é uma tautologia.
c) $[(p \rightarrow q) \wedge \sim p] \rightarrow \sim q$ é equivalente a $(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim p \leftrightarrow \sim q)$.

26. O sinal $\underline{\vee}$ é denominado disjunção exclusiva, $p \underline{\vee} q$ é verdadeira quando $p \vee q$ é verdadeira, mas não ambos o são.
a) Construa a tabela verdade de $p \underline{\vee} q$.
b) Construa a tabela verdade da proposição $(p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$.
c) Comparando as tabelas verdade dos itens a) e b) que conclusão podemos chegar?
d) Mostre que: $p \underline{\vee} q \Leftrightarrow q \underline{\vee} p$.
e) Mostre que: $p \underline{\vee} (q \underline{\vee} r) \Leftrightarrow (p \underline{\vee} q) \underline{\vee} r$.
f) Mostre que: $p \underline{\vee} t \Leftrightarrow \sim p$.
g) Mostre que: $p \underline{\vee} c \Leftrightarrow p$.
h) Mostre que: $p \underline{\vee} p \Leftrightarrow c$.
i) Mostre que: $\sim(p \underline{\vee} q) \Leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$.

27. Dadas duas proposições p e q e a condicional $p \rightarrow q$, definimos:
Recíproca ou converso: $q \rightarrow p$.
Inversa: $\sim p \rightarrow \sim q$.
Contrapositiva ou **Contra recíproca**: $\sim q \rightarrow \sim p$.
Com essas definições determinar e simplificar:
a) A contrapositiva da contrapositiva.
b) A contrapositiva da recíproca.
c) A contrapositiva da inversa.
d) A contrapositiva de $p \rightarrow \sim q$.
e) A contrapositiva de $\sim p \rightarrow q$.
f) A contrapositiva da recíproca de $p \rightarrow \sim q$.
g) A recíproca de $\sim p \rightarrow \sim q$.

28. O sinal $\downarrow$ é denominado negação conjunta, $p \downarrow q$ é verdadeira quando nem p e nem q o são.
a) **(FM-2002)** Construa a sua tabela verdade.
b) Mostre as seguintes equivalências:
i) $\sim p \Leftrightarrow p \downarrow p$.
ii) $p \wedge q \Leftrightarrow (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$.
iii) $p \vee q \Leftrightarrow (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$.
iv) $p \downarrow q \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$.
c) **(FM-2002)** Construa a tabela verdade da proposição $[(p \downarrow q) \rightarrow p] \wedge [q \downarrow (p \vee q)]$.

29. (FM-2002) Considere o conectivo lógico $\otimes$ definido por

p	q	$p \otimes q$
V	V	F
V	F	F
F	V	V
F	F	F

Construa a tabela verdade da proposição $(p \wedge q) \otimes (p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \otimes q) \vee \sim p$.

Solução: A tabela verdade é obtida por

P	*q*	*(p*	$\wedge$	*q)*	$\otimes$	*(p*	$\leftrightarrow$	*q)*	$\rightarrow$	*(p*	$\otimes$	*q)*	$\vee$	$\sim$	*p*
V	*V*	*V*	*V*	*V*	*F*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*F*	*V*	*F*	*F*	*V*
V	*F*	*V*	*F*	*F*	*F*	*V*	*F*	*F*	*V*	*V*	*F*	*F*	*F*	*F*	*V*
F	*V*	*F*	*F*	*V*	*F*	*F*	*F*	*V*	*V*	*F*	*V*	*V*	*V*	*V*	*F*
F	*F*	*F*	*F*	*F*	*V*	*F*	*V*	*F*	*V*	*F*	*F*	*F*	*V*	*V*	*F*
Etapas		*1*	*2*	*1*	*3*	*1*	*2*	*1*	*4*	*1*	*2*	*2*	*3*	*2*	*1*

30. (FM-2001) O sinal "$\leftarrow$" é denominado recíproca da condicional. Temos que $p \leftarrow q$ só é falsa quando a condicional é verdadeira, se p e q tem valores verdades distintos.
a) Construa a tabela da verdade de $p \leftarrow q$.
b) Construa a tabela da verdade da proposição $[(p \vee q) \wedge q] \rightarrow (p \leftrightarrow q)$.
c) Comparando a tabelas da verdade dos itens a) e b) que conclusões podemos chegar?

31. (MD-2001) Dada a seguinte proposição:

$$[\, a \rightarrow (\, b \wedge \sim c\,)\,] \leftrightarrow [\, b \rightarrow (\sim a \vee c\,)\,]$$

a) Determine, usando uma tabela-verdade, seus valores-verdade;
b) Diga se é uma tautologia (justifique);
c) Diga se é equivalente à proposição $\sim a$ (justifique).

32. Sabendo que a proposição p é verdadeira, encontre a tabela verdade das proposições:
a) **(MD-2001)** $[p \rightarrow (\sim q)] \leftrightarrow [(p \vee r) \wedge q]$.

Solução: Como p é sempre verdadeira, temos a seguinte tabela verdade detalhada.

p	q	r	[p	$\rightarrow$	(~	q)]	$\leftrightarrow$	[(p	$\vee$	r)	$\wedge$	q]
V	V	V	V	F	F	V	F	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	V	F	V	V	F	V	V
V	F	V	V	V	V	F	F	V	V	V	F	F
V	F	F	V	V	V	F	F	V	V	F	F	F
Etapa			1	3	2	1	4	1	2	1	3	1

b) **(MD-2001)** $[(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)] \leftrightarrow [(p \wedge q) \rightarrow r]$.
Solução:

p	q	r	[(p	$\rightarrow$	r)	$\vee$	(q	$\rightarrow$	r)	$\leftrightarrow$	[(p	$\wedge$	q	$\rightarrow$	r]
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V	F	F	V	V	V	V	F	F
V	F	V	V	V	V	V	F	V	V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F	V	F	V	F	V	V	F	F	V	F
Etapa			1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	1

33. Prove ou disprove as proposições abaixo: (Note que basta uma linha ser F para falhar uma tautologia.)
a) $(Q \rightarrow P) \Leftrightarrow (P \wedge Q)$ b) $(P \wedge \sim Q) \Rightarrow (P \rightarrow Q)$

34. Vários livros apresentam as notações: w(P) =1 se P vale, e w(p) = 0 quando ela é falsa. Tais notações facilitam a simulação de tabelas verdade no computador, por exemplo: se w (P) =x e w(Q)=y, a tabela verdade da conjunção pode ser simulada pela função
$f_{\wedge}:\{0,1\}\times\{0,1\}\rightarrow\{0,1\}$onde $f_{\wedge}(x, y) = x.\ y$, ou ainda , $w(P \wedge Q) = w(P).\ w(Q)$.
a) Verifique tal afirmação:
b) Analogamente, crie funções: $f_{\sim}$,$f_{\vee}$ $f_{\rightarrow}$,$f_{\leftrightarrow}$ que representem os outros conectivos.
c) Através destas funções, crie funções representativas de:

$$\sim(P \vee Q),\ (P \wedge Q) \vee \sim Q,\ (P \wedge Q) \vee R.$$

(Este exercício ilustra o fato de que a construção de tabelas-verdade é um **problema compatível**)

35. (FM-2002) Verifique se é tautologia, contradição ou contingência.

$$[(p \vee q) \rightarrow r] \rightarrow [(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)].$$

Faremos a tabela verdade de $[(p \vee q) \rightarrow r] \rightarrow [(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)]$.

p	*q*	*r*	*[(p*	$\vee$	*q)*	$\rightarrow$	*r]*	$\rightarrow$	*[(p*	$\rightarrow$	*r)*	$\vee$	*(q*	$\rightarrow$	*r)]*
V	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*
V	*V*	*F*	*V*	*V*	*V*	*F*	*F*	*V*	*V*	*F*	*F*	*F*	*V*	*F*	*F*
V	*F*	*V*	*V*	*V*	*F*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*F*	*V*	*V*
V	*F*	*F*	*V*	*V*	*F*	*F*	*F*	*V*	*V*	*F*	*F*	*V*	*F*	*V*	*F*
F	*V*	*V*	*F*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*F*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*
F	*V*	*F*	*F*	*V*	*V*	*F*	*F*	*V*	*F*	*V*	*F*	*V*	*V*	*F*	*F*
F	*F*	*V*	*F*	*F*	*F*	*V*	*V*	*V*	*F*	*V*	*V*	*V*	*F*	*V*	*V*
F	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*V*	*F*	*V*	*F*	*V*	*F*	*V*	*F*	*V*	*F*
Etapa			***1***	***2***	***1***	***3***	***1***	***4***	***1***	***2***	***1***	***3***	***1***	***2***	***1***

Como na última etapa (etapa 4) todas as possibilidades lógicas são verdadeiras, temos que a proposição é uma tautologia.

36. (FM-2002) Considere o conectivo lógico $\otimes$ definido por

p	q	$p \otimes q$
V	V	F
V	V	F
F	F	F
F	F	V

Construa a tabela verdade da proposição

$$[(p \otimes q) \rightarrow p] \wedge [q \otimes (p \vee q)].$$

A tabela verdade da proposição dada é:

p	*q*	*[(p*	$\otimes$	*q)*	$\rightarrow$	*p]*	$\wedge$	*[q*	$\otimes$	*(p*	$\vee$	*q)]*
V	*V*	*V*	*F*	*V*	*V*	*F*	*F*	*V*	*F*	*V*	*V*	*V*

V	F	V	F	F	V	V	F	F	F	V	V	F
F	V	F	F	V	V	F	F	V	F	F	V	V
F	F	F	V	F	F	F	F	F	V	F	F	F
Etapas		1	2	1	3	1	4	1	3	1	2	1

Como na etapa 4 temos apenas valores lógicos falsos dizemos que o resultado é uma contradição.

37. (FM-2001) O sinal "$\leftarrow$ é denominado recíproca da condicional. Temos que $p \leftarrow q$ só é falsa quando a condicional é verdadeira, se p e q tem valores verdades distintos.

a) Construa a tabela da verdade de $p \leftarrow q$.

b) Construa a tabela da verdade da proposição $[(p \vee q) \wedge q] \rightarrow (p \leftrightarrow q)$.

c) Comparando a tabelas da verdade dos itens a) e b) que conclusões podemos chegar?

Solução:

a)

p	*q*	$\rightarrow$	$\leftarrow$
V	*V*	*V*	*V*
V	*F*	*F*	*V*
F	*V*	*V*	*F*
F	*F*	*V*	*V*

b)

p	*q*	$\vee$	$\wedge$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$
V	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*
V	*F*	*V*	*F*	*V*	*F*
F	*V*	*V*	*V*	*F*	*F*
F	*F*	*F*	*F*	*V*	*V*
Etapas		1^a	2^a	4^a	3^a

c) *Como as tabela-verdade das duas proposições são iguais, temos que* $p \leftarrow q$ *e* $[(p \vee q) \wedge q] \rightarrow p \leftrightarrow q)$ *são logicamente eqüivalentes, ou seja,* $p \leftarrow q \equiv [(p \vee q) \wedge q] \rightarrow (p \leftrightarrow q)$.

38. (FM-2001) a) Faça a Tabela Verdade Detalhada da proposição

$$[p \wedge (\sim q \rightarrow p)] \wedge \sim[(p \leftrightarrow (\sim q)) \rightarrow (q \vee (\sim p))];$$

b) Sabendo que os valores lógicos de p, q e r são, respectivamente, V, F e V, determine o valor lógico (V ou F) de $(p \rightarrow r) \leftrightarrow [q \vee (\sim r)]$.

Solução:

a) *A tabela verdade detalhada da proposição é:*

p	*q*	*[p*	$\wedge$	*(~*	*q*	$\rightarrow$	*p)]*	$\wedge$	~	*[(p*	$\leftrightarrow$	*(~*	*q))*	$\rightarrow$	*(q*	$\vee$	*(~*	*p))*
V	V	V	V	F	V	V	V	F	F	V	F	F	V	V	V	V	F	V
V	F	V	V	V	F	V	V	V	V	V	V	V	F	F	F	F	F	V
F	V	F	F	F	V	V	F	F	F	F	V	F	V	V	V	V	V	F
F	F	F	F	V	F	F	F	F	F	F	F	V	F	V	F	V	V	F
Etapa		**1**	**4**	**2**	**1**	**3**	**1**	**6**	**5**	**1**	**3**	**2**	**1**	**4**	**1**	**3**	**2**	**1**

b) *O valor lógico da proposição é dado pela terceira linha e etapa 4 da tabela detalhada a seguir:*

p	*q*	*r*	*(p*	$\rightarrow$	*r)*	$\leftrightarrow$	*[q*	$\vee$	*(~*	*r)]*
V	V	V	V	V	V	V	V	V	F	V
V	V	F	V	F	F	F	V	V	V	F
V	F	V	V	V	V	F	F	F	F	V
V	F	F	V	F	F	F	F	V	V	F
F	V	V	F	V	V	V	V	V	F	V
F	V	F	F	V	F	V	V	V	V	F

F	F	V	F	V	V	F	F	F	F	V
F	F	F	F	V	F	V	F	V	V	F
Etapas			1	2	1	4	1	3	2	1

39. (FM-2001) Sabendo que c representa uma contradição, faça a Tabela Verdade Detalhada da proposição

$$[(p\wedge q) \wedge (r\wedge c)] \leftrightarrow (p\vee\sim c);$$

Solução:

p	*q*	*r*	*[(p*	$\wedge$	*q)*	$\wedge$	*(r*	$\wedge$	*c)]*	$\leftrightarrow$	*(p*	$\vee$	$\sim$	*r)*
V	V	V	V	V	V	F	V	F	F	F	V	V	F	V
V	V	F	V	V	V	F	F	F	F	F	V	V	V	F
V	F	V	V	F	F	F	V	F	F	F	V	V	F	V
V	F	F	V	F	F	F	F	F	F	F	V	V	V	F
F	V	V	F	F	V	F	V	F	F	V	F	F	F	V
F	V	F	F	F	V	F	F	F	F	F	F	V	V	F
F	F	V	F	F	F	F	V	F	F	V	F	F	F	V
F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	V	V	F
Etapa			1	2	1	3	1	2	1	4	1	3	2	1

40. (FM-2000) Encontre a tabela verdade das seguintes proposições.

a) $(p \vee \sim q) \leftrightarrow (\sim p \wedge q)$

b) $(p \wedge \sim p) \rightarrow (q \vee p)$

c) $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \leftrightarrow (p \wedge q) \rightarrow r$.

Solução:

a)(p $\vee \sim$q) $\leftrightarrow$(~p $\wedge$ q)

p	*q*	*(p*	$\vee$	$\sim$	*q)*	$\leftrightarrow$	*(~*	*p*	$\wedge$	*q)*
V	V	V	V	F	F	F	F	V	F	V
V	F	V	V	V	F	F	F	V	F	F
F	V	F	F	F	V	F	V	F	V	V
F	F	F	V	V	F	F	V	F	F	F
Etapas		**1**	**3**	**2**	**1**	**4**	**2**	**1**	**3**	**1**

Temos que o resultado da tabela- verdade acima é uma contradição.

b) (p $\wedge \sim$p) $\rightarrow$(q $\vee$p)

p	*q*	*(p*	$\wedge$	$\sim$	*p)*	$\rightarrow$	*(q*	$\vee$	*p)*
V	V	V	F	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	F	V	F	V	F
F	F	F	F	V	F	V	F	F	F
Etapas		**1**	**3**	**2**	**1**	**4**	**1**	**2**	**1**

Temos que o resultado da tabela – verdade é uma tautologia.

c) [(p $\rightarrow$r) $\rightarrow$(q $\rightarrow$r)] $\rightarrow$ [(p $\wedge$ q) $\rightarrow$r]

p	*q*	*r*	*[(p*	$\rightarrow$	*r)*	$\rightarrow$	*(q*	$\rightarrow$	*r)]*	$\rightarrow$	*[(p*	$\wedge$	*q)*	$\rightarrow$	*r)]*
V	V	V	V	V	V	V	V	V	F	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	V	V	F	F	F	V	V	V	F	F
V	F	V	V	V	V	V	F	V	V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F	V	F	V	F	V	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	V	V	V	V	V	V	F	F	V	V	V
F	V	F	F	V	F	F	V	V	F	V	F	F	V	V	F
F	F	V	F	V	V	V	F	F	V	V	F	F	F	V	V

F	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*V*	*F*	*F*	*F*	*V*	*F*	*F*	*F*	*V*	*F*
Etapas			**1**	**2**	**1**	**3**	**1**	**2**	**1**	**4**	**1**	**2**	**1**	**3**	**1**

Temos que o resultado da tabela- verdade acima é uma contingência.

41. (FM-2000) Encontre a tabela verdade das seguintes proposições.

a) $(p \wedge q) \vee (\sim r)$

b) $(p \vee q) \to (r \wedge p)$

c) $[(p \to r) \to (q \to r)] \leftrightarrow [(p \wedge q) \to r]$.

Solução:

a) $(p \wedge q) \vee (\sim r)$

p	*q*	*r*	*(p*	$\wedge$	*q)*	$\vee$	*(~*	*r)*
V	V	V	V	V	V	V	F	V
V	V	F	V	V	V	V	V	F
V	F	V	V	F	F	F	F	V
V	F	F	V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V	F	F	V
F	V	F	F	F	V	V	V	F
F	F	V	F	F	F	F	F	V
F	F	F	F	F	F	F	F	F
Etapa			**1**	**2**	**1**	**3**	**2**	**1**

b) $(p \vee q) \to (r \wedge p)$

p	*Q*	*r*	*(p*	$\vee$	*q)*	$\to$	*(r*	$\wedge$	*p)*
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	F	F	V
V	F	V	V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	F	F	F	V
F	V	V	F	V	V	F	V	F	F
F	V	F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	V	V	F	F
F	F	F	F	F	F	V	F	F	F
Etapa			**1**	**2**	**1**	**3**	**1**	**2**	**1**

c) $[(p \to r) \to (q \to r)] \leftrightarrow [(p \wedge q) \to r]$

p	*q*	*r*	*[(p*	$\to$	*r)*	$\to$	*(q*	$\to$	*r)]*	$\leftrightarrow$	*[(p*	$\wedge$	*q)*	$\to$	*r]*
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	V	V	F	F	F	V	V	V	F	F
V	F	V	V	V	V	V	F	V	V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F	V	F	V	F	V	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	V	V	V	V	V	V	F	F	V	V	V
F	V	F	F	V	F	F	V	F	F	F	F	F	V	V	F
F	F	V	F	V	V	V	F	V	V	V	F	F	F	V	V
F	F	F	F	V	F	V	F	V	F	V	F	F	F	V	F
Etapa			**1**	**2**	**1**	**3**	**1**	**2**	**1**	**4**	**1**	**2**	**1**	**3**	**1**

42. (FM-2000) Encontre a tabela verdade das seguintes proposições.

a) $(p \vee \sim q) \leftrightarrow (\sim p \wedge q)$

b) $(p \wedge \sim p) \to (q \vee p)$

c) $(p \to r) \vee (q \to r) \leftrightarrow (p \wedge q) \to r$.

Solução:

a) $(p \vee \sim q) \leftrightarrow (\sim p \wedge q)$

p	q	(p	∨	~	q)	↔	(~	p	∧	q)
V	V	V	V	F	V	F	F	V	F	V
V	F	V	V	V	F	F	F	V	F	F
F	V	F	F	F	V	F	V	F	V	V
F	F	F	V	V	F	F	V	F	F	F
Etapa		**1**	**3**	**2**	**1**	**4**	**2**	**1**	**3**	**1**

b) $(p \wedge \sim p) \rightarrow (q \vee p)$

p	q	(p	∧	~	p)	→	(q	∨	p)
V	V	V	F	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	V	V	F	V	V
F	V	F	F	V	F	V	V	V	F
F	F	F	F	V	F	V	F	F	F
Etapa		**1**	**3**	**2**	**1**	**4**	**1**	**2**	**1**

c) $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \leftrightarrow (p \wedge q) \rightarrow r$

p	q	r	(p	→	r)	∨	(q	→	r)	↔	(p	∧	q)	→	r
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V	F	F	V	V	V	V	F	F
V	F	V	V	V	V	V	F	V	V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F	V	F	V	F	V	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	V	V	V	V	V	V	F	F	V	V	V
F	V	F	F	V	F	V	V	F	F	V	F	F	V	V	F
F	F	V	F	V	V	V	F	V	V	V	F	F	F	V	V
F	F	F	F	V	F	V	F	V	F	V	F	F	F	V	F
Etapa			**1**	**2**	**1**	**3**	**1**	**2**	**1**	**4**	**1**	**2**	**1**	**3**	**1**

43. (FM-1999) Uma contingência é uma proposição que assume pelo menos um valor lógico falso e um valor lógico verdadeiro. Portanto, qualquer proposição deve ser uma tautologia ou uma contradição ou uma contingência. Nas proposições abaixo, verifique através da tabela-verdade se é uma tautologia ou uma contradição ou uma contingência:

a) $[p \wedge (\sim q)] \rightarrow [(\sim p) \vee q]$

b) $(p \wedge q \wedge r)] \leftrightarrow [(\sim p) \vee (\sim q) \vee (\sim r)]$

c) $p \wedge (p \rightarrow q) \wedge [p \rightarrow (\sim q)]$

d) $(\sim p) \rightarrow (p \rightarrow q)$.

Solução:

a) $[p \wedge (\sim q)] \rightarrow [(\sim p) \vee q]$

p	q	[p	∧	(~	q)	→	[(~	p)	∨	q]
V	V	V	F	F	V	V	F	V	V	V
V	F	V	V	V	F	F	F	V	F	F
F	V	F	F	F	V	V	V	F	V	V
F	F	F	F	V	F	V	V	F	V	F
Etapas		**1**	**3**	**2**	**1**	**4**	**2**	**1**	**3**	**1**

Como na etapa 4 a proposição assume valores lógicos verdadeiros e falsos temos que o resultado da tabela- verdade é uma contingência.

b) $[(p \wedge q) \wedge r\ ] \leftrightarrow [(\sim p) \vee (\sim q) \vee (\sim r)]$

p	q	r	[(p	∧	q)	∧	r]	↔	[(~	p)	∨	(~	q)	∨	(~	r)]
V	V	V	V	V	V	V	V	F	F	V	F	F	V	F	F	V
V	V	F	V	V	V	F	F	F	F	V	F	F	V	V	V	F
V	F	V	V	F	F	F	V	F	F	V	V	V	F	V	F	V
V	F	F	V	F	F	F	F	F	F	V	V	V	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	V	F	V
F	V	F	F	F	V	F	F	F	V	F	V	F	V	V	V	F

F	*F*	*V*	*F*	*F*	*F*	*F*	*V*	*F*	*V*	*F*	*V*	*V*	*F*	*V*	*F*	*V*
F	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*V*	*F*	*V*	*V*	*F*	*V*	*V*	*F*
Etapas			***1***	***2***	***1***	***3***	***1***	***5***	***2***	***1***	***3***	***2***	***1***	***4***	***2***	***1***

Como os valores lógicos da etapa 5 são falsos temos que o resultado da tabela – verdade é uma contradição.

c) $[p \wedge (p \rightarrow q)] \wedge [p \rightarrow (\sim q)]$

p	*q*	*[p*	$\wedge$	*(p*	$\rightarrow$	*q)]*	$\wedge$	*[p*	$\rightarrow$	*(~*	*q)]*
V	*F*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*F*	*V*	*F*	*F*	*V*
V	*F*	*V*	*F*	*V*	*F*	*F*	*F*	*V*	*V*	*V*	*F*
F	*V*	*F*	*F*	*F*	*V*	*V*	*F*	*F*	*V*	*F*	*V*
F	*F*	*F*	*F*	*F*	*V*	*F*	*F*	*F*	*F*	*V*	*F*
Etapas		***1***	***3***	***1***	***2***	***1***	***4***	***1***	***3***	***2***	***1***

Temos que o resultado da tabela- verdade é uma contradição.

d) $(\sim p) \rightarrow (p \rightarrow q)$

p	*q*	*(~*	*p)*	$\rightarrow$	*(p*	$\rightarrow$	*q)*
V	*V*	*F*	*V*	*V*	*V*	*F*	*V*
V	*F*	*F*	*V*	*V*	*V*	*F*	*F*
F	*V*	*V*	*F*	*V*	*F*	*V*	*V*
F	*F*	*V*	*F*	*V*	*F*	*V*	*F*
Etapas		***2***	***1***	***3***	***1***	***2***	***1***

Como os valores lógicos da etapa 3 são verdadeiros temos que o resultado da tabela – verdade é uma tautologia.

44. (FM-1999) Uma contingência é uma proposição que assume pelo menos um valor lógico falso e um valor lógico verdadeiro. Portanto, qualquer proposição deve ser uma tautologia ou uma contradição ou uma contingência. Nas proposições abaixo, verifique através da tabela-verdade se é uma tautologia ou uma contradição ou uma contingência:

a) $[p \vee (p \rightarrow r)] \rightarrow p$.

b) $\sim(p \wedge q) \vee \sim(q \leftrightarrow p)$

c) $(p \wedge q) \rightarrow q \vee p$.

d) $\sim(p \rightarrow q) \leftrightarrow \sim p \vee q$.

Solução:

a)

p	*r*	*[p*	$\vee$	*(p*	$\rightarrow$	*r)]*	$\rightarrow$	*p*
V	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*
V	*F*	*V*	*V*	*V*	*F*	*F*	*V*	*V*
F	*V*	*F*	*V*	*F*	*V*	*V*	*F*	*F*
F	*F*	*F*	*V*	*F*	*V*	*F*	*F*	*F*
Etapa		***1***	***3***	***1***	***2***	***1***	***4***	***1***

b)

p	*q*	~	*(p*	$\wedge$	*q)*	$\vee$	*(q*	$\leftrightarrow$	*p)*
V	*V*	*F*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*
V	*F*	*V*	*V*	*F*	*F*	*V*	*F*	*F*	*V*
F	*V*	*V*	*F*	*F*	*V*	*V*	*V*	*F*	*F*
F	*F*	*V*	*F*	*F*	*F*	*V*	*F*	*V*	*F*
Etapa		***3***	***1***	***2***	***1***	***4***	***1***	***2***	***1***

c)

p	*q*	*(p*	$\wedge$	*q)*	$\rightarrow$	*q*	$\vee$	*p*
V	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*
V	*F*	*V*	*F*	*F*	*V*	*F*	*V*	*V*
F	*V*	*F*	*F*	*V*	*V*	*V*	*V*	*F*
F	*F*	*F*	*F*	*F*	*V*	*F*	*F*	*F*

Etapa	1	2	1	3	1	2	1

d)

p	q	~	(p	→	q)	↔	~	p	∨	q
V	V	F	V	V	V	F	F	V	V	V
V	F	V	V	F	F	F	F	V	F	F
F	V	F	F	V	V	F	V	F	V	V
F	F	F	F	V	F	F	V	F	V	F
Etapa		3	1	2	1	4	2	1	3	1

Método Dedutivo

45. O que é um argumento?

46. Quando um argumento é válido?

47. (FM-2005) Observe as demonstrações I e II a seguir:

I) Um aluno deu a solução seguinte para a inequação (1) abaixo:

$\dfrac{(x+3)(x-2)}{(x-1)} > x$	(1)
$(x + 3)(x - 2) > x^2 - x$	(2)
$x^2 + x - 6 > x^2 - x$	(3)
$x - 6 > -x$	(4)
$2x > 6$	(5)
$x > 3$	(6).

II) *Maria assustou-se esta noite com um gato branco. Como sabe que foi um gato? Bem, ela só poderia assustar-se com um animal e em sua casa só há cães e gatos. Se fosse um cão, o susto teria sido maior. E como sabe que o gato era branco? Na casa da Maria só tem gatos brancos e gatos pretos e os gatos pretos não seriam visíveis naquela escuridão...*

Com isso concluímos que:
Todos os passos de (2) a (6) da solução estão corretos.
A conclusão está correta? Justifique sua resposta utilizando os operadores lógicos conhecidos por você.

48. Utilizando as regras de inferência e equivalência lógicas, mostre as seguintes tautologias:
a) (FM-2002) $(q \wedge r) \to p \Leftrightarrow [q \to (r \to p)]$.
b) (FM-2002) $(p \to q) \to r \Leftrightarrow r \vee (p \wedge \sim q)$
c) (FM-2002) $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$.
d) (FM-2002) $[(p \to q) \vee (p \to r)] \Leftrightarrow [p \to (q \vee r)]$.
e) (FM-2002) (MD-2003) $(p \wedge q) \vee \sim p \Leftrightarrow (\sim q \to \sim p)$.
f) (FM-2002) $(r \vee s) \vee \sim s \Leftrightarrow t$.
g) (FM-2002) $(p \wedge q) \to r \Leftrightarrow [(p \to r) \wedge (q \to r)]$.
h) (FM-2001) $p \Rightarrow (p \wedge q) \vee \sim p$.
i) (FM-2001) $(p \to q) \wedge p \Leftrightarrow p \wedge q$.
j) (FM-2001) $[p \to (p \wedge q)] \Leftrightarrow (p \to q)$;
k) (FM-2001) $[(p \to q) \to q)] \Leftrightarrow (p \vee q)$.
l) (FM-2001) $[(p \to q) \wedge (p \to r)] \Leftrightarrow [p \to (q \wedge r)]$;
m) (FM-2001) $[\sim(p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)] \Leftrightarrow \sim p$.
n) (FM-2001) $p \Rightarrow (p \wedge q) \vee \sim q$.
o) (FM-2001) $(p \to q) \wedge p \Leftrightarrow p \wedge q$.

p) (FM-1999) $(p \wedge q) \vee \sim p \Leftrightarrow (\sim q \to \sim p)$.
q) (FM-1999) $(r \vee s) \vee \sim s \Leftrightarrow s$.
r) (FM-1999) $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$.
s) (FM-1999) $[(p \to q) \vee (p \to r) \Leftrightarrow [p \to (q \vee r)]$.
t) (MD-2001) $[(p \vee q) \leftrightarrow (p \wedge q) \Leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$.
u) (MD-2001) $(p \wedge q) \vee \sim p \Leftrightarrow (\sim q \to \sim p)$.
v) $P \wedge (Q \to P) \Leftrightarrow P \vee (P \wedge \sim Q)$.
x) $P \Leftrightarrow \sim P\ \ P$.
w) $(P \wedge Q) \vee (P \wedge \sim Q) \Leftrightarrow P$.
y) $(P \to Q) \wedge (P \to \sim Q) \Leftrightarrow \sim P$.
z) $P \to (P \vee Q) \Leftrightarrow P \vee \sim P$.
aa) $[((P \to Q) \wedge P) \to Q] \wedge (P \to Q) \Leftrightarrow (P \to Q)$.
ab) $((P \to (Q \vee R)) \wedge \sim R) \to (P \to Q) \Leftrightarrow (P \wedge \sim Q) \to P$.
ac) $P \Rightarrow P \wedge (P \vee Q)$
ad) $P \vee (P \wedge Q) \Rightarrow P$
ae) $(\sim P \vee Q \vee R) \wedge P \wedge \sim Q \Rightarrow R$
af) $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \Rightarrow (Q \vee R)$
ag) $P \wedge (Q \to R) \wedge [(P \to Q) \vee (R \to S)] \wedge \sim R \Rightarrow (Q \to S)$
ah) Absorção I: $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$.
ai) Absorção II: $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$.
aj) $(p \to q) \Leftrightarrow (p \vee q \to q)$.
ak) $(p \to q) \Leftrightarrow \sim p \vee q$.
al) $(p \to q) \wedge (p \to \sim q) \Leftrightarrow \sim p$.
am) $(p \to q) \Leftrightarrow [p \to (p \wedge q)$.
an) $(p \to q) \Rightarrow [(p \wedge r) \to (q \wedge r)]$.

49. Para cada um dos seguintes argumentos dados abaixo, dê uma prova direta ou uma prova indireta da validade.

a) H1: $q \vee (r \to u)$
H2: $q \to s$
H3: $\sim s \to (u \to p)$
H4: $\sim s$
T: $r \to p$

b) H1: $p \vee (q \wedge r)$
H2: $q \to s$
H3: $r \to u$
H4: $s \wedge u \to p \vee r$
H5: $\sim p$
T: r

c) H1: $p \vee q$
H2: $\sim q \vee r$
T: $p \vee r$

d) H1: $p \to q$
H2: $\sim q$
T: $\sim p$

e) H1: $p \leftrightarrow q$
H2: q
T: p

f) H1: $p \to \sim q$
H2: $r \to q$
H3: r
T: $\sim p$

g) H1: $p \to q$
H2: $r \to \sim q$
T: $r \to \sim p$

h) (FM-2002) $H_1, H_2, H_3, H_4 \to T$, onde
H1 :$(p \to q)$
H_2 : $(r \to s)$
H_3 $(q \vee s) \to \sim m$ H_4 :m
T :$(\sim p \wedge \sim r)$

i) (FM-2002) H_1, H_2, H_3, T, onde
H_1: $p \to q$,
H_2: $p \vee q$,
H_3 $\sim p$
T : c.

j) (FM-2002)
H_1: $p \to q$
H_2: $p \vee r$
H_3: $\sim q$
H_4: $r \to (s \wedge t)$
T: s

k) (FM-2002)
H_1: $p \to q$
H_2: $q \to r$
H_3: $\sim r$
T: $\sim p$

l) (FM-2002)
H_1: $p \wedge \sim q \to s$
H_2: $\sim (s \vee u)$
H_3: $q \to r$
T: $p \to q \wedge r$

m) (FM-2002)
H_1: $p \to q$
H_2: $p \vee r$
H_3: $\sim q$

n) (FM-2002)
H1: $p \to q$
H2: $q \to r$
H3: $\sim r$

H_4: $r \to (s \wedge t)$
T: s
o) (FM-2002)
H_1: $p \wedge \sim q \to s$
H_2: $\sim(s \vee u)$
H_3: $q \to r$
T: $p \to q \wedge r$

T: ~p

p) (FM-2001) H_1, H_2, H_3, $H_4 \to$ T, onde
H_1: $p \to q$
H_2: $r \to s$
H_3: $\sim q \wedge r$
H_4: $\sim p \wedge s \to x$
T: x

q) (FM-2001)
H1: $p \to q$
H2: $q \leftrightarrow s$
H3: $u \vee [r \wedge (\sim s)]$
H4: p
T: u

r) (FM-2001)
H1: $\sim(p \wedge q)$
H2: $(\sim r) \to q$
H3: $\sim p \to r$
T: r

s) (FM-2001)
H1: $p \to q$
H2: $r \to s$
H3: $(q \vee s) \to \sim u$
H4: u
T: $\sim p \wedge \sim r$

u) (FM-2001)
H1: $(\sim p \vee q) \to r$
H2: $(r \vee s) \to \sim u$
H3: u
T: ~q

v) (FM-2000)
H1: $p \vee (q \wedge r)$
H2: $p \vee q \to s$
T: $p \vee s$

x) (FM-2000)
H1: $(p \vee q) \to r \wedge s$
H2: $r \wedge s \to s$
H3: ~s
T: ~q

w) (FM-2000)
H1: $p \vee (q \wedge r)$
H2: $p \vee q \to s$
T: $p \vee s$

y) (FM-2000)
H1: $(p \vee q) \to r \wedge s$
H2: $r \wedge s \to s$
H3: ~s
T: ~q

z) (FM-2000)
H1: $p \vee q \to r$
H2: $s \to p \wedge u$
H3: $q \vee s$
T: r

aa) (FM-2000) (MD-2003)
H1: $s \to p \wedge q$
H2: $\sim s \to p$
H3: ~p
T: q

ab) (MD-2001)
a
$b \vee \sim c$
$d \to c$
$a \to \sim b \wedge e$

~ d

ac) (MD-2001)
$p \vee q$
$p \to q$
----
q

ad) (MD-2001)
$p \vee q$
$p \to q$
----
p

ae) (MD-2001)
b
$c \vee \sim d$
$e \to d$
$b \to \sim c \wedge a$

~ e

af) (MD-2001)
H1: $(p \vee q) \to (r \wedge s)$
H2: $(r \wedge s) \to s$
H3: ~s
T: ~q

ag) (MD-2001)
c
$d \vee \sim e$
$a \to e$
$c \to \sim d \wedge b$

~ a

ah) H_1 $P \to Q$
H_2 $P \to R$
T: $P \to (Q \wedge R)$

ai) $H_1 P \vee Q$
H_2 $(R \to P) \to S$
H_3 ~S
T:Q

aj) H_1 $P \vee (Q \wedge R)$
H_2 $Q \to S$
H_3 $P \to U$

ak) H_1 $A \vee (B \to C)$
H_2 $C \to (D \wedge E)$
H_3 $(\sim B \vee D) \to F$

H_4 ~$(R \wedge X)$
H_5 $S \rightarrow (X \vee Y)$
H_6 ~U
T: Y

H_4 ~F
T: A

al) H_1 $P \vee Q$
H_2 $P \rightarrow Q$
T: Q

af) H_1 $A \leftrightarrow B$
H_2 $C \leftrightarrow D$
T: $(A \rightarrow D) \leftrightarrow (B \rightarrow C)$

ag) H_1- $p \vee (q \wedge r)$
H_2-$(p \vee q) \rightarrow s$
T: $p \vee s$

ah) H_1- $(p \vee q) \rightarrow (r \vee s)$
H_2 – $(r \wedge s) \rightarrow s$
H_3 - ~s
T: ~q

ai) H_1- $(p \vee q) \rightarrow r$
H_2– $s \rightarrow (p \wedge u)$
H_3- $q \vee s$
T: r

aj) H_1-$s \rightarrow (p \wedge q)$
H_2-~$s \rightarrow p$
H_3-~p
T: q

ak) b, $c \vee$ ~d, $e \rightarrow d$, $b \rightarrow$ ~$c \wedge a$ $\vdash$ ~e

al) (FM-2005)
H_1: $(F \wedge A) \wedge (C \wedge B)$
T : $C \wedge P$

am) (FM-2005)
H_1: $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
H_2: $P \vee S$
H_3: $(S \rightarrow X) \wedge (X \rightarrow U)$
H_4: $V \rightarrow ($~$U \wedge$ ~$R)$
H_5: V
T : ~Q

an) (FM-2005)
H_1: $(X \rightarrow R) \wedge (R \rightarrow V)$
H2: $(V \rightarrow P) \wedge (P \rightarrow A)$
T : $X \rightarrow P$

50. (FM-2002) Demonstre pelo método dedutivo as seguintes tautologias:
a) $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$.
b) $[(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)] \Leftrightarrow [p \rightarrow (q \vee r)]$.

a) *$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$*

Ordem	***Proposição***	***Justificativa***
1	$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow$	*H_1*
2	$(p \vee p) \wedge (p \vee q)$	*1, Teorema 2.11 d – Distributiva*
3	$p \wedge (p \vee q)$	*2, Teorema 2.11 b – Idempotêcia* *Teorema 2.13 – Substituição*
4	$(p \vee c) \wedge (p \vee q)$	*3, Teorema 2.12 d – Contradição* *Teorema 2.13 – Substituição*
5	$p \vee (c \wedge q)$	*4, Teorema 2.11 d – Distributiva*
6	$p \vee (q \wedge c)$	*5, Teorema 2.11 a – Comutativa* *Teorema 2.13 – Substituição*
7	$p \vee c$	*6, Teorema 2.12 f – Contadição*
8	p	*7, Teorema 2.12 g - Contadição*

b) *$[(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)] \Leftrightarrow [p \rightarrow (q \vee r)]$*

Ordem	***Proposição***	***Justificativa***
1	$(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \Leftrightarrow$	*H_1*
2	$(\sim p \vee q) \vee (\sim p \vee r)$	*1, Teorema 2.9 b – Condicional* *Teorema 2 13 – Substituição*
3	$(q \vee \sim p) \vee (r \vee \sim p)$	*2, Teorema 2.11 a – Comutativa* *Teorema 2.13 – Substituição*
4	$q \vee (\sim p \vee r) \vee \sim p$	*3, Teorema 2.11 c – Associativa*
5	$q \vee (r \vee \sim p) \vee \sim p$	*4, Teorema 2.11 a – Comutativa* *Teorema 2.13 Substituição*
6	$(q \vee r) \vee (\sim p \vee \sim p)$	*5, Teorema 2.11 c – Associativa*
7	$(q \vee r) \vee \sim p$	*6, Teorema 2.11 b – Idempotência* *Teorema 2.13 Substituição*
8	$\sim p \vee (q \vee r)$	*7, Teorema 2.11 a - Comutativa*
9	$p \rightarrow (q \vee r)$	*8, Teorema 2.9 b - Condicional*

51. (FM-2002) Demonstre:

Direta	Indireta	Condicional
H_1: $p \rightarrow q$	H_1: $p \rightarrow q$	H_1: $p \wedge \sim q \rightarrow s$
H_2: $p \vee r$	H_2: $q \rightarrow r$	H_2: $\sim(s \vee u)$
H_3: $\sim q$	H_3: $\sim r$	H_3: $q \rightarrow r$
H_4: $r \rightarrow (s \wedge t)$	T: $\sim p$	T: $p \rightarrow q \wedge r$
T: s		

a) *Demonstração Direta:*

Ordem	*Proposição*	*Justificativa*
1	$p \rightarrow q$	H_1
2	$p \vee r$	H_2
3	$\sim q$	H_3
4	$r \rightarrow (s \wedge u)$	H_4
5	$\sim p$	*1, 3, Teorema 2.8 f – Modus Tolles*
6	r	*2, 5, Teorema 2.8 d – Silogismo Disjuntivo*
7	$s \wedge u$	*4 6 Teorema 2.8 e – Modus Ponens*
8	s	*7, Teorema 2.8 c Simplificação*

b) *Demonstração Indireta*

Ordem	*Proposição*	*Justificativa*
1	$p \rightarrow q$	H_1
2	$q \vee r$	H_2
3	$\sim r$	H_3
4	p	H_4 *Negação da Tese*
5	q	*1, 4, Teorema 2.8 e – Modus Ponens*
6	r	*2, 5, Teorema 2.8 e – Modus Ponens*
7	$\sim r \wedge r$	*3, 6, Conjunção*

c) *Demonstração Condicional*

Ordem	*Proposição*	*Justificativa*
1	$(p \wedge \sim q) \rightarrow s$	H_1
2	$\sim (s \vee t)$	H_2
3	$q \rightarrow r$	H_3
4	p	H_4
5	$\sim s \wedge \sim t$	*2, Teorema 2.10 b – De Morgan*
6	$\sim s$	*5, Teorema 2.8 c – Simplificação*
7	$\sim(p \wedge \sim q)$	*1 6 Teorema 2.8 f – Modus Tolles*
8	$p \rightarrow q$	*7 Teorema 2.9 a – Condicional*
9	$p \rightarrow r$	*3, 8, Exemplo 2.18 – Transitiva*
10	r	*4, 9,Teorema 2.8 e – Modus Ponens*
11	q	*7,Teorema 2.8 c- Simplificação* *Teorema 2.8 a - -Dupla negação*
12	$q \wedge r$	*10, 11, Conjunção*

52. (FM-2002) Demonstre pelo método dedutivo as seguintes tautologias:

a) $(p \wedge q) \vee \sim p \Leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$.

b) $(r \vee s) \vee \sim s \Leftrightarrow t$.

a) *Vamos demonstrar que* $(p \wedge q) \vee \sim p \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$. *(;é uma tautologia utilizando o método dedutivo. Para isto devemos mostrar a validade dos argumentos* $H_1(p \wedge q) \vee \sim p \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$*; e* H_2*:* $(\sim q \rightarrow \sim p) \rightarrow (p \wedge q) \vee \sim p$ *.Vejamos o primeiro argumen*

Ordem	*Proposição*	*Justificativa*
1	$(p \wedge q) \vee \sim p$	H_1

2	$\sim p \vee (p \wedge q)$	*1, Teorema 2.11 a – Comutativa*
3	$(\sim p \vee p) \wedge (\sim p \vee q)$	*2, Teorema 2.11 d – Distributiva*
4	$t \wedge (\sim p \vee q)$	*3, Teorema 2.12 j – Tautologia* *Teorema 2.13 Substituição*
5	$\sim p \vee q$	*4, Teorema 2.11 a - Comutativa* *Teorema 2.12 c– Tautologia*
6	$q \vee \sim p$	*5 Teorema 2.11 a – Comutativa*
7	$\sim [(\sim q) \wedge p]$	*6, Teorema 2.10 b – De Morgan*
8	$(\sim q \rightarrow \sim p)$	*7, Teorema 2.9 a – Condicional*

Para demostrar o segundo argumento utilizamos o mesmo processo de baixo para cima pois foram utilizadas somentes equivalências lógicas.

b) *Vamos demonstrar que* $r \vee s) \vee \sim s \leftrightarrow t$*, é uma tautologia utilizando o método dedutivo. Para isto devemos mostrar a validade dos argumentos* H_1 $r \vee s) \vee \sim s \rightarrow t$*; e* H_2*:* $t \rightarrow (r \vee s) \vee \sim s$*.Vejamos o primeiro argumen*

Ordem	**Proposição**	**Justificativa**
1	$(r \vee s) \vee \sim s$	H_1
2	$r \vee (s \vee \sim s)$	*1 Teorema 2.11 c – Associatiava*
3	$r \vee t$	*2, Teorema 2.12 j – Tautologia* *Teorema 2.13 – Substituição*
4	t	*3, Teorema 2.12 – Tautologia*

Para demostrar o segundo argumento utilizamos o mesmo processo de baixo para cima pois foram utilizadas somentes equivalências lógicas.

53. (FM-2002) Demonstre:

a) Direta	**b) Indireta**	**c) condicional**
H_1: $p \rightarrow q$	H_1: $p \rightarrow q$	H_1: $p \wedge \sim q \rightarrow s$
H_2: $p \vee r$	H_2: $q \rightarrow r$	H_2: $\sim(s \vee u)$
H_3: $\sim q$	H_3: $\sim r$	H_3: $q \rightarrow r$
H_4: $r \rightarrow (s \wedge t)$	T: $\sim p$	T: $p \rightarrow q \wedge r$
T: s		

a) *Demonstração Direta:*

Ordem	**Proposição**	**Justificativa**
1	$p \rightarrow q$	H_1
2	$p \vee r$	H_2
3	$\sim q$	H_3
4	$r \rightarrow (s \wedge u)$	H_4
5	$\sim p$	*1, 3,Teorema 2.8 f – Modus Tolles*
6	r	*2, 5, Teorema 2.8 d – Silogismo Disjuntivo*
7	$s \wedge u$	*4, 6, Teorema 2.8 e – Modus Ponens*
8	s	*7, Teorema 2.8 c - Simplificação*

b) *Demonstração Indireta*

Ordem	**Proposição**	**Justificativa**
1	$p \rightarrow q$	H_1
2	$q \vee r$	H_2
3	$\sim r$	H_3
4	p	*Negação da Tese*
5	q	*1, 4, Teorema 2.8 e – Modus Ponens*
6	r	*2, 5, Teorema 2.8 e – Modus Ponens*
7	$\sim r \wedge r$	*3, 6,Cconjunção*

c) *Demonstração Condicional*

Ordem	**Proposição**	**Justificativa**
1	$(p \wedge \sim q) \rightarrow s$	H_1
2	$\sim (s \vee t)$	H_2
3	$q \rightarrow r$	H_3
4	p	H_4

5	$\sim s \wedge \sim t$	*2, Teorema 2.10 b – De Morgan*
6	$\sim s$	*5, Teorema 2.8 c – Simplificação*
7	$\sim(p \wedge \sim q)$	*1, 6, Teorema 2.8 f – Modus Tolles*
8	$p \rightarrow q$	*7, Teorema 2.9 a – Condicional*
9	$p \rightarrow r$	*3, 8, Teorema 2.9 e – Reductio Absurdum*
10	r	*4, 9, Teorema 2.8 e – Modus Ponens*
11	q	*7, Teorema 2.8 c – Simplificação* *Teorema 2.8 a – Dupla Negação*
12	$q \wedge r$	*10 ,11, Conjunção*

54. (FM-2002) Usando as regras de equivalência, mostre a seguinte tautologia:

$$(p \rightarrow q) \rightarrow r \Leftrightarrow r \vee (p \wedge \sim q)$$

Mostraremos que $(p \rightarrow q) \rightarrow r \Leftrightarrow r \vee (p \wedge \sim q)$ é uma tautologia, de fato:

Ordem	***Proposição***	***Justificativa***
1	$(p \rightarrow q) \rightarrow r \Leftrightarrow$	H_1
2	$\Leftrightarrow(\sim p \vee q) \rightarrow r \Leftrightarrow$	*1, Teorema 2.9 b- Condicional* *Teorema 2. 13 – Substituição*
3	$\Leftrightarrow\sim(\sim p \vee q) \vee r \Leftrightarrow$	*2,Teorema 2. 9 b – Condicional*
4	$\Leftrightarrow r \vee \sim(\sim p \vee q)$	*3, Teorema 2.11 c- - Distributiva*
5	$r \vee (p \wedge \sim q)$	*4, Teorema 2. 10b - De Morgan* *Teorema 2. 13 – Substituição*

55. (FM-2002) Usando o método direto ou indireto e que c represente uma contradição demonstre o teorema H_1, H_2, H_3 T, onde

H_1: $p \rightarrow q$

H_2: $p \vee q$

H_3 $\sim p$

T : c

Usaremoa o método direto papa mostrar o desjado.

Ordem	***Proposição***	***Justificativa***
1	$p \rightarrow q$	H_1
2	$p \vee q$	H_2
3	$\sim q$	H_3
4	$\sim p$	*1, 3, Teorema 2.8 f - Modus Tolles*
5	Q	*2, 4, Teorema 2. 8 d – Silogismo Disjuntivo*
6	$q \wedge \sim p$	*5, 3, Conjunção*
7	c	*6, Teorema 2.12 e - Contradição*

56. (FM-2002) Usando as regras de equivalência, mostre a seguinte tautologia:

$(q \wedge r) \rightarrow p \Leftrightarrow [q \rightarrow (r \rightarrow p)]$.

Mostraremos que $(q \wedge r) \rightarrow p \Leftrightarrow [q \rightarrow (r \rightarrow p)]$ é uma tautologia, de fato:

Ordem	***Proposição***	***Justificativa***
1	$(q \wedge r) \rightarrow p$	H_1
2	$\sim (q \wedge r) \vee p$	*1, Teorema 2.9 b - Condicional*
3	$(\sim q \vee \sim r) \vee p$	*2, Torema 2.10 b - De Morgan* *Teorema 2.13 – Substituição*
4	$\sim q \vee (\sim r \vee p)$	*3, Teorema 2.11 c – Associativa* *Teorema 2.13 – Substituição*
5	$\sim q \vee (r \rightarrow p)$	*4, Teorema 2.9 b –Condicional* *Teorema 2.13 – Substituição*

6	$q \to (r \to p)$	5, Teorema 2.9 b - Condicional Teorema 2.13 – Substituição

57. (FM-2002) Usando o método direto ou indireto, demonstre o teorema $H_1, H_2, H_3, H_4 \to T$, onde $H1 :(p \to q)$ $H_2 : (r\to s)$ $H_3\ (q \vee s) \to \sim m$ $H_4 : m$ $T :(\sim p \wedge \sim r)$

Usaremos o método direto para mostrar o desejado.

Ordem	Proposição	Justificativa
1	$p \to q$	H_1
2	$r \to s$	H_2
3	$(q \vee s) \to \sim m$	H_3
4	m	H_4
5	$\sim(q \vee s)$	3, 4, Teorema 2.8 f - Modus Tolles
6	$\sim q \wedge \sim s$	5, Teorema 2.10 b - De Morgan
7	$\sim q$	6, Teorema 2.8 c – Simplificação
8	$\sim s$	6, Teorema 2.8 c – Simplificação
9	$\sim p$	1, 7, Teorema 2.8 f - Modus Tolles
10	$\sim r$	2, 8, Teorema 2.8 f - Modus Tolles
11	$\sim p \wedge \sim r$	9, 10, Conjunção

58. (FM-2002) Mostre que $2^n < n!$ para todo $n \in IN$ e $n \geq 4$.

Primeiramente mostraremos que P(4) é verdadeiro. De fato, $2^4 = 16 < 2 = 4!$. Suponhamos agora que p(k) seja verdadeiro, logo, $2^k < k!$. Queremos mostrar que P(k+1) é verdadeiro. De fato, $2.2^k < 2k!$ implica $2^{k+1} < 2k!$. Como $2k! < (k+1)!$ Temos então $2^{k+1} < (k+1)!$

59. (FM-2002) Mostre que $(p\wedge q)\to r \Leftrightarrow [(p\to r)\wedge(q\to r)]$, utilizando o método dedutivo.

Solução:

Ordem	Proposição	Justificativa
1	$(p \wedge q) \to r$	H
2	$\sim(p \wedge q) \vee r$	1, Teorema 2.9 b - Condicianal
3	$(\sim p \vee \sim q) \vee r$	2, Teorema 2.10 a – De Morgan
4	$\sim p \vee(\sim q \vee r)$	3, Teorema 2.11 c – Associativa
5	$\sim p \vee [\sim q \vee (r \vee r)$	4, Teorema 2.12 j – Tautologia
6	$\sim p \vee [r \vee (\sim q \vee r)$	5, Teorema 2.11 c – Associativa Teorema 2.11 a - Comutativa
7	$(\sim p \vee r) \vee (\sim q \vee r)$	6, Teorema 2.11 c – Associativa
8	$(p\to r)\wedge(q\to r)$	7, Teorema 2.9 b - Condicianal

60. (FM-2001) Utilizando o método dedutivo, demonstre as seguintes tautologias:

a) $p \Rightarrow (p\wedge q) \vee \sim p$.

b) $(p\to q)\wedge p \Leftrightarrow p \wedge q$.

Solução: a) *Vamos demonstrar que $p \to (p\wedge q) \vee \sim p$.é uma tautologia utilizando o método dedutivo. Para isto devemos mostrar a validade do argumento H_1:$p \to (p\wedge q) \vee \sim p$. Vejamos:*

Ordem	Proposição	Justificativa
1	p	H_1
2	$(p \vee \sim q)$	1, Teorema 2.8 b - Adição
3	$(p \vee \sim q) \wedge t$	2, Teorema 2.12 c - Identidade
4	$(p \vee \sim q) \wedge (q \vee \sim q)$	3, Teorema 2.12 j - Tautologia
5	$(p \wedge q) \vee \sim q$	4, Teorema 2.11 d - Distributiva

b) *Vamos demonstrar que$(p\to q)\wedge p \leftrightarrow p \wedge q$ é uma tautologia utilizando o método dedutivo. Para isto devemos mostrar a validade dos argumentos H_1:$(p \to q)\wedge p \to p \wedge q$ e H_2: $p \wedge q \to (p\to q)$ Vejamos o primeiro argumento*

Ordem	Proposição	Justificativa

1	$(p \to q) \wedge p$	H_1
2	$\sim(p \wedge \sim q) \wedge p$	1, Teorema 2.9 a - condicional
3	$(\sim p \vee q) \wedge p$	2, Teorema 2.10 a - De Morgan Teorema 2.13 - Substituição
4	$(\sim p \wedge p) \vee (q \wedge p)$	3, Teorma 2.11 d - distributiva
5	$c \vee (q \wedge p)$	4, Teorema 2.12 e - contradição
6	$q \wedge p$	5, Teorema 2.12 c - identidade
7	$p \wedge q$	6, Teorema2.11 a - comutativa

Para demostrar o segundo argumento utilizamos o mesmo processo de baixo para cima pois foram utilizadas somente equivalências lógicas.

61. (FM-2001) Considerando as hipóteses H_1, H_2, H_3 e H_4, demonstre a tese T, utilizando-se de um método direto ou indireto.

H_1: $p \to q$ H_2: $r \to s$ H_3: $\sim q \wedge r$ H_4: $\sim p \wedge s \to x$ T: x

Solução:

Ordem	Proposição	Justificativa
1	$p \to q$	H_1
2	$r \to s$	H_2
3	$\sim q \wedge r$	H_3
4	$\sim p \wedge s \to x$	H_5
5	$\sim q$	3,Teorema 2.8 c - Simplificação
6	$\sim p$	1,5,Teorema 2.9 d - Contra-positiva
7	r	3,Teorema 2.8 c - Simplificação
8	s	2,7, Teorema 2.8 e - Modus Ponens
9	$\sim p \wedge s$	6,8, Conjunção
10	x	4, 9,Teorema 2.8 - Modus Ponens

62. (FM-2001) Demonstre, pelo Método Dedutivo, as seguintes proposições:

a) $[p \to (p \wedge q)] \Leftrightarrow (p \to q)$;

b) $[(p \to q) \to \ q)] \Leftrightarrow (p \vee q)$.

Solução:

a) *Vamos demonstrar que $[p \to (p \wedge q)] \leftrightarrow (p \to q)$;é uma tautologia utilizando o método dedutivo. Para isto devemos mostrar a validade dos argumentos $H_1[p \to (p \wedge q)] \to (p \to q)$; e H_2: $(p \to q) \to p \to (p \wedge q)]$ .Vejamos o primeiro argumento*

Ordem	Proposição	Justificativa
1	$p \to (q \wedge q) \Leftrightarrow$	H_1
2	$\sim[p \wedge \sim(p \wedge q)]$	1, Teorema 2.9 a - Condicional
3	$\sim[p \wedge \sim p \vee \sim q)]$	2, Teorema 2.10 a – De Morgan Teorema 2.13 - Substituição
4	$\sim[(p \wedge \sim p) \vee (p \wedge \sim q)]$	3, Teorema 2.11 d – Distributiva Teorema 2.13 - Substituição
5	$\sim[c \vee (p \wedge \sim q)]$	4, Teorema 2.12 e – Contadição Teorema 2.13 - Substituição
6	$\sim[(p \wedge \sim q) \vee c]$	5, Teorema 2.11 a – Comutativa Teorema 2.13 – Substituição
7	$\sim(p \wedge \sim q)$	6, Teorema 2.12 g – Contradição Teorema 2.13 – Substituição
8	$p \to q$	7, Teorema 2.9 a - Condicional

Para demostrar o segundo argumento utilizamos o mesmo processo de baixo para cima pois foram utilizadas somente equivalências lógicas.

b) *Vamos demonstrar que $[(p \rightarrow q) \rightarrow q)] \leftrightarrow (p \vee q)$.;é uma tautologia utilizando o método dedutivo. Para isto devemos mostrar a validade dos argumentos H_1 $[(p \rightarrow q) \rightarrow q)] \rightarrow (p \vee q)$.e H_2: $(p \vee q) \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow q)]$. Vejamos o primeiro argumento*

Ordem	***Proposição***	***Justificativa***
1	$(p \rightarrow q) \rightarrow q \Leftrightarrow$	H_1
2	$\sim[(p \rightarrow q) \wedge (\sim q)]$	*1, Teorema 2.9 a – Condicional*
3	$\sim(p \rightarrow q) \vee (\sim(\sim q))$	*2, Teorema 2.10 a – De Morgan*
4	$\sim(p \rightarrow q) \vee q$	*4, Teorema 2.8 a – Dupla negação* *Teorema 2.13 – Substituição*
5	$\sim[\sim(p \wedge (\sim q))] \vee q$	*4, Teorema 2.9 a – Condicional* *Teorema 2.13 – Substituição*
6	$[p \wedge (\sim q)] \vee q$	*5, Teorema 2.8 a – Dupla negação* *Teorema 2.13 – Substituição*
7	$q \vee [p \wedge (\sim q)]$	*6, Teorema 2.11 a – Comutativa*
8	$(q \vee p) \wedge [q \vee (\sim q)]$	*7, Teorema 2.11 d – Distibutiva*
9	$(q \vee p) \wedge t$	*8, Teorema 2.12 j – Tautologia* *Teorema 2.13 - Substituição*
10	$q \vee p$	*9, Teorema 2.12 c - Identidade*
11	$p \vee q$	*10, Teorema 2.11 a – Comutativa*

Para demostrar o segundo argumento utilizamos o mesmo processo de baixo para cima pois foram utilizadas somente equivalências lógicas

63. (FM-2001) Mostre pelo método direto ou indireto as seguintes tautologias:

a) H1: $p \rightarrow q$ H2: $q \leftrightarrow s$ H3: $u \vee [r \wedge (\sim s)]$ H4: p T: u	b) H1: $\sim(p \wedge q)$ H2: $(\sim r) \rightarrow q$ H3: $\sim p \rightarrow r$ T: r

a) *Faremos pelo Método Direto*

Ordem	***Proposição***	***Justificativa***
1	$p \rightarrow q$	H_1
2	$q \rightarrow s$	H_2
3	$u \vee [r \wedge (\sim s)]$	H_3
4	p	H_4
5	$(u \vee r) \wedge (u \vee (\sim s))$	*3, Teorema 2.11 d - Distributiva*
6	$(u \vee \sim s)$	*5, Teorema 2.8 c – Simplificação*
7	*Q*	*1, 4, Teorema 2.8 e – Modus Ponens*
8	*S*	*2,7, Teorema 2.8 e – Modus Ponens*
9	$(\sim s) \vee u$	*6, Teorema 2.11 a – Comutativa*
10	*U*	*9, 8,Teorema 2.8 d Silogismo disjuntivo*

b) *Faremos pelo Método Indireto:*

Ordem	***Proposição***	***Justificativa***
1	$\sim(p \wedge q)$	H_1
2	$(\sim r) \rightarrow q$	H_2
3	$(\sim p) \rightarrow r$	H_3
4	$\sim r$	*Negação da Tese*
5	$\sim(\sim p)$	*3, 4, Teorema 2.8 f – Modus Tolles*

6	p	5, Teorema 2.8 a – Dupla Negação
7	$(\sim p) \vee (\sim q)$	1, Teorema 2.10 a – De Morgan
8	$\sim q$	7, 6, Teorema 2.8 d – Silogismo Disjuntivo
9	q	2, 4, Teorema 2.8 e – Modus Ponens
10	$q \wedge (\sim q)$	8, 9, Conjunção
11	c	10, Teorema 2.12 e - Contradição

Como negamos a tese e chegamos em uma contradição temos o desejado

64. (FM-2001) Demonstre, pelo Método Dedutivo, as seguintes proposições:
a) $[(p\rightarrow q) \wedge (p\rightarrow r)] \Leftrightarrow [p\rightarrow (q \wedge r)]$;
b) $[\sim(p\vee q) \vee (\sim p\wedge q)] \Leftrightarrow \sim p$.

Solução:

a) *Vamos demostrar que* $[(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)] \leftrightarrow [p\rightarrow(q \wedge r)]$ *e uma tautologia utilizando o método dedutivo. Para isto devemos mostrar a validade dos argumentos* $H_1[(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)] \rightarrow [p\rightarrow(q \wedge r)]$ *e* H_2 $[p\rightarrow(q \wedge r)] \rightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)]$ *.Vejamos o primeiro argumento*

Ordem	Proposição	Justificativa
1	$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$	H_1
2	$(\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee r)$	1, Teorema 2.9 b – Condicional Teorema 2.13 - Substituição
3	$\sim p \vee (q \wedge r)$	2, Teorema 2.10 d - Distributiva
4	$p \rightarrow (q \wedge r)$	3, Teorema 2.9 b - Condicional

Para demonstrar o segundo aergumento utlizaremos o mesm processo de baixo para cima pois foram utilizadas somente equivalências lógicas.

b) *Vamos demostrar que* $[\sim(p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)] \leftrightarrow \sim p$ *é uma tautologia utilizando método dedutivo.Para isto demos mostrar a validade dos argumentos* $H_1[\sim(p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)] \rightarrow \sim p$ *e* H_2 $p \rightarrow [\sim(p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)]$*. Vejamos o primeiro argumento*

Ordem	Proposição	Justificativa
1	$\sim(p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)$	H_1
2	$(\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$	1, Teorema 2.10 b – De Morgan Teorema 2.13 - Substituição
3	$\sim p \wedge (\sim q \vee q)$	2, Teorema 2.11 d - Distributiva
4	$\sim p \wedge t$	3, Teorema 2.12 j – Tautologia Teorema 2.13 Substituição
5	$\sim p$	4, Teorema 2.12 c - Tautologia

Para demonstrar o segundo aergumento utlizaremos o mesm processo de baixo para cima pois foram utilizadas somente equivalências lógicas.

65. (FM-2001) Mostre pelo método direto ou indireto as seguintes tautologias:

a) H1: $p\rightarrow q$
H2: $r\rightarrow s$
H3: $(q\vee s) \rightarrow \sim u$
H4: u
T: $\sim p\wedge\sim r$

b) H1: $(\sim p\vee q) \rightarrow r$
H2: $(r\vee s)\rightarrow\sim u$
H3: u
T: $\sim q$

Solução:

a)

Ordem	Proposição	Justificativa
1	$p \rightarrow q$	H_1
2	$r \rightarrow s$	H_2
3	$(q \vee s) \rightarrow \sim u$	H_3
4	u	H_4
5	$\sim(\sim u)$	4, Teorema 2.8 a – Duple Negação
6	$\sim(q \vee s)$	3, 5, Teorema 2.8 f – Modus Tolles

7	*(∼q) ∧ (∼s)*	*6, Teorema 2.10 b – De Morgan*
8	*∼s*	*7, Teorema 2.8 c - Simplificação*
9	*∼r*	*2, 8 Teorema 2.8 f – Modus Tolles*
10	*∼q*	*7, Teorema 2.8 c - Simplificação*
11	*∼p*	*1, 7 Teorema 2.8 f – Modus Tolles*
12	*∼p ∧ ∼r*	*9, 11, Conjunção*

b)

Ordem	*Proposição*	*Justificativa*
1	*. (∼p ∨ q) → r*	H_1
2	*(r ∨ s) → ∼u*	H_2
3	*u*	H_3
4	*∼(∼u)*	*3, Teorema 2.8 a – Dupla Negação*
5	*∼(r ∨ s)*	*2, 4, Teorema 2.8 f Modus Tolles*
6	*(∼r) ∧ (∼s)*	*5, Teorema 2.10 b De Morgan*
7	*∼r*	*6, Teorema 2.8 c – Simplificação*
8	*∼(∼p ∨ q)*	*1, 7, Teorema 2.8 f – Modus Tolles*
9	*∼(∼p) ∧∼q*	*8, Teorema 2.10 b – De Morgan*
10	*∼q*	*9, Teorema 2.8 c - Simplificação*

66. (MD-2001) Para cada inferência abaixo, demonstre sua validade (justificando cada passo) ou dê um contra-exemplo:

q ∨ p	q ∨ p
q → p	q → p
-------	--------
p	q

67. (MD-2001) Dada a seguinte proposição:

[r → (p ∧ ~ q)] ↔ [p → (~ r ∨ q)]

a) determine, usando uma tabela-verdade, seus valores-verdade;
b) diga se é uma tautologia (justifique);
c) diga se é equivalente à proposição ~ r (justifique).

68. (MD-2001) Demonstre, justificando cada passo, a seguinte inferência:

p
q ∨ ~ r
s → r
p → ~ q ∧ u

~ s

69. (MD-2001) Demonstre, utilizando o método dedutivo, a tautologia [(p ∨ q) ↔ (p ∧ q) ≡ (p ↔ q).

Solução:

1. (p ∨ q) ↔ (p ∧ q)	
2.[(p ∨ q) → (p ∧ q)] ∧ [(p ∧ q) → (p ∨ q)]	(EL – 2)
3. [~(p ∨ q) ∨ (p ∧ q)] ∧ [~(p ∧ q) ∨ (p ∨ q)]	(EL – 1b)
4. [(~p ∧ ~q) ∨ (p ∧ q)] ∧ [(~p ∨ ~q) ∨ (p ∨ q)]	(EL – 8a, EL – 8b)
5. [(~p ∧ ~q) ∨ (p ∧ q)] ∧ [(~p ∨ p) ∨ (~q ∨ q)]	(EL – 5, EL – 9)
6. [(~p ∧ ~q) ∨ (p ∧ q)] ∧ t	(EL – 11h, EL – 6a)
7. [(~p ∧ ~q) ∨ (p ∧ q)]	(EL – 11a)
8. [(~p ∧ ~q) ∨ p] ∧ [(~p ∧ ~q) ∨ q]	(EL – 10b)
9. [(p ∨ ~p) ∧ (p ∨ ~q)] ∧ [(q ∨ ~p) ∧ (q ∨ ~q)]	(EL – 5, EL – 10b))
10. (p ∨ ~q) ∧ (q ∨ ~p)	(EL – 11h, EL – 11a)
11. p → q ∧ q → p	(EL – 1b)
12. p ↔ q	(EL – 2)

70. (MD-2001) Demonstre, utilizando o método direto ou indireto

$$\begin{cases} H1: (p \vee q) \rightarrow r \\ H2: (r \vee q) \rightarrow (p \rightarrow s) \\ H3: p \wedge t \\ T: s \end{cases}$$

Solução:

1. $(p \vee q) \rightarrow r$	(Hipótese 1)
2. $(r \vee q) \rightarrow (p \rightarrow s)$	(Hipótese 2)
3. $p \wedge t$	(Hipótese 3)
4. p	(3, I – 2a)
5. $p \vee q$	(4, I1a)
6. r	(1, 5, I4)
7. $r \vee q$	(6, I1a)
8. $p \rightarrow s$	(2, 7, I4)
9. s	(8, 4, I4)

71. (MD-2001) Demonstre, utilizando o método dedutivo, a tautologia $(p \wedge q) \vee \sim p \Leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$.

Solução:

$(p \wedge q) \vee \sim p \Leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$

1. $(p \wedge q) \vee \sim p$	
2. $\sim p \vee (p \wedge q)$	EL – 5 (b)
3. $(\sim p \vee p) \wedge (\sim p \vee q)$	EL – 10 (b)
4. $t \wedge (\sim p \vee q)$	EL – 11 (g)
5. $(\sim p \vee q)$	EL – 11 (a)
6. $p \rightarrow q$	EL – 1 (b)
7. $\sim q \rightarrow \sim p$	EL – 7

72. (MD-2001) Demonstre, utilizando o método direto ou indireto

H1: $(p \vee q) \rightarrow (r \wedge s)$
H2: $(r \wedge s) \rightarrow s$
H3: $\sim s$
T: $\sim q$

Solução:

1. $(p \vee q) \rightarrow (r \wedge s)$	(Hipótese 1)
2. $(r \wedge s) \rightarrow s$	(Hipótese 2)
3. $\sim s$	(Hipótese 3)
4. $\sim(r \wedge s)$	(2, 3, I – 6)
5. $\sim(p \vee q)$	(1, 4, I – 6)
6. $\sim p \wedge \sim q$	(5, EL – 8 (b))
5. $\sim q$	(6, I – 2 (b))

73. (FM-2001)

i) Utilizando o método dedutivo, demonstre as seguintes tautologias:

a) $p \Rightarrow (p \wedge q) \vee \sim q$. b) $(p \rightarrow q) \wedge p \Leftrightarrow p \wedge q$.

Solução:

a)

$P \Rightarrow$	*H*
$\Rightarrow P \vee (\sim Q) \equiv$	*RI 1a (adição)*
$\equiv (P \vee \sim Q) \wedge t$	*EL 11a (tautologia- contradição)*
$\equiv (P \vee \sim Q) \wedge (Q \vee \sim Q)$	*EL 11h (tautologia- contradição) EL 4b(comutativa)*
$\equiv \sim Q \vee (P \wedge Q)$	*EL 10b (distributiva)*
$\equiv (P \wedge Q) \vee \sim Q$	*EL 4 b (comutativa)*

b)

$(P \to Q) \wedge P \equiv$	
$\equiv (\sim P \vee Q) \wedge P$	*EL 1a (condicional)*
$\equiv P \wedge (\sim P \vee Q)$	*EL 4a (comutativa)*
$\equiv (P \wedge \sim P) \vee (P \quad Q)$	*EL 10a (distributiva)*
$\equiv c \vee P \wedge Q$	*EL 11c (tautologia – contradição)*
$\equiv P \wedge Q$	*EL4b (comutativa)EL 11e (tautologia –contradição)*

74. (FM-2000) Mostre pelo método direto ou indireto as seguintes tautologias.

a) H1: $p \vee (q \wedge r)$ H2: $p \vee q \to s$ T: $p \vee s$	b) H1: $(p \vee q) \to r \wedge s$ H2: $r \wedge s \to s$ H3: $\sim s$ T: $\sim q$

Solução:

a)

Ordem	Proposição	Justificativa
1	$p \vee (q \wedge r)$	H_1
2	$p \vee q \to s$	H_2
3	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	1, Teorema 2.11 d - Distributiva
4	$(p \vee q)$	3, Teorema 2.8 c – Simplificação
5	S	2, 4,Teorema 2.8 e – Modus Ponens
6	$p \vee s$	5, Teorema 2.8 b – Adição Teorema2.11 a Comutativa

b)

Ordem	Proposição	Justificativa
1	$(p \vee q) \to (r \wedge s)$	H_1
2	$r \wedge s \to s$	H_2
3	$\sim s$	H_3
4	$p \vee q \to s$	1,2, Exemplo 2.18 - Transitiva
5	$\sim (p \vee q)$	3,4, Teorema 2.8 f – Modus Tolles
6	$\sim p \wedge \sim q$	5, Teorema 2.10 b – De Morgan
7	$\sim q$	6, Teorema 2.8 c - Simplificação

Outra solução:

Ordem	Proposição	Justificativa
1	$(p \vee q) \to r \wedge s$	H_1
2	$r \wedge s \to s$	H_2
3	$\sim s$	H_3
4	$\sim (r \wedge s)$	2,3, Teorema 2.8 f – Modus Tolles
5	$\sim (p \vee q)$	1,4, Teorema 2.8 f – Modus Tolles
6	$\sim p \wedge \sim q$	5, Teorema 2.10 b – De Morgan
7	$\sim q$	6, Teorema 2.8 c – Simplificação

Método Indireto

Ordem	Proposição	Justificativa
1	$p \vee q \to r \wedge s$	H_1
2	$r \wedge s \to s$	H_2
3	$\sim s$	H_3
4	q	H_4 negação da tese
5	$p \vee q$	4, Teorema 2.8 b - Adição
6	$r \wedge s$	1,5, Teorema 2.8 e – Modus Ponens
7	s	4, Teorema 2.8 c - Simplificação

8	$s \wedge \sim s$	3,7 conjunção

75. (FM-2000) Mostre pelo método direto ou indireto as seguintes tautologias.

a) H1: $p \vee (q \wedge r)$ H2: $p \vee q \rightarrow s$ T: $p \vee s$	b) H1: $(p \vee q) \rightarrow r \wedge s$ H2: $r \wedge s \rightarrow s$ H3: $\sim s$ T: $\sim q$

Solução:

a)

Ordem	***Proposição***	***Justificativa***
1	$p \vee (q \wedge r)$	H_1
2	$p \vee q \rightarrow s$	H_2
3	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	1, Teorema 2.11 d - Distributiva
4	$(p \vee q)$	3, Teorema 2,8 c - Simplificação
5	s	2, 4, Teorema 2.8 e – Modus Ponens
6	$p \vee s$	5, Teorema 2.8 b - Adição

b)

Ordem	***Proposição***	***Justificativa***
1	$(p \vee q) \rightarrow (r \wedge s)$	H_1
2	$r \wedge s \rightarrow s$	H_2
3	$\sim s$	H_3
4	$p \vee q \rightarrow s$	1,2 Exemplo 2.18 - Transitiva
5	$\sim(p \vee q)$	3,4, Teorema 2.8 f - Modus Tolles
6	$\sim p \wedge \sim q$	5, Teorema 2.10 b – De Morgan
7	$\sim q$	6, Teorema 2.8 c – Simplificação

Outra solução:

Ordem	***Proposição***	***Justificativa***
1	$(p \vee q) \rightarrow r \wedge s$	H_1
2	$r \wedge s \rightarrow s$	H_2
3	$\sim s$	H_3
4	$\sim(r \wedge s)$	2,3, Teorema 2.8 f – Modus Tolles
5	$\sim(p \vee q)$	1,4,Teorema 2.8 f – Modus Tolles
6	$\sim p \wedge \sim q$	5, Teorema 2.10 b – De Morgan
7	$\sim q$	6, Teorema 2.8 c – Simplificação

Método Indireto

Ordem	***Proposição***	***Justificativa***
1	$p \vee q \rightarrow r \wedge s$	H_1
2	$r \wedge s \rightarrow s$	H_2
3	$\sim s$	H_3
4	q	H_4 negação da tese
5	$p \vee q$	4, Teorema 2.8 b - Adição
6	$r \wedge s$	1,5, Teorema 2.8 e - Modus Ponens
7	s	4, Teorema 2.8 c - Simplificação
8	$s \wedge \sim s$	3,7 conjunção

76. (FM-2000) Mostre pelo método direto ou indireto as seguintes tautologias.

a) H1: $p \vee q \rightarrow r$ H2: $s \rightarrow p \wedge u$ H3: $q \vee s$	b) H1: $s \rightarrow p \wedge q$ H2: $\sim s \rightarrow p$ H3: $\sim p$

T: r	T: q

Solução:

a) Método Indireto

Ordem	*Proposição*	*Justificativa*
1	$(p \vee q) \to r$	H_1
2	$s \to (p \wedge u)$	H_2
3	$q \vee s$	H_3
4	$\sim r$	H_4 negação da tese
5	$\sim(p \vee q)$	1,4, Teorema 2.8 f – Modus Tolles
6	$\sim p \wedge \sim q$	5, Teorema 2.10 b – De Morgan
7	$\sim q$	6, Teorema 2.8 c - Simplificação
8	s	7,2, Teorema 2.8 d – Silogismo disjuntivo
9	$p \wedge u$	2, Teorema 2.8 e – Modus Ponens
10	p	9, Teorema 2.8 c - Simplificação
11	$\sim p$	6, Teorema 2.11 b - Idempotência
12	$p \wedge \sim p$	10 11 conjunção

b)Método Direto

Ordem	*Proposição*	*Justificativa*
1	$s \to (p \wedge q)$	H_1
2	$\sim s \to p$	H_2
3	$\sim p$	H_3
4	s	2, 3, Teorema 2.8 f – Modus Tolles
5	$p \wedge q$	1, 4, Teorema 2.8 e – Modus Ponens
6	q	5, Teorema 2.8 c - Simplificação

77. (FM-1999) Demonstre pelo método dedutivo as seguintes tautologias:

a) $(p \wedge q) \vee \sim p \Leftrightarrow (\sim q \to \sim p)$.

b) $(r \vee s) \vee \sim s \Leftrightarrow s$.

Solução:

a) Vamos demonstrar que $(p \wedge q) \vee \sim p \leftrightarrow (\sim q \to \sim p)$.é uma tautologia utilizando o método dedutivo. Para isto devemos mostrar a validade dos argumentos $(p \wedge q) \vee \sim p \vdash (\sim q \to \sim p)$ e $(\sim q \to \sim p) \vdash (p \wedge q).\vee \sim p$ Vejamos o primeiro argumento:

Ordem	*Proposição*	*Justificativa*
1	$(p \wedge q) \vee \sim p$	H_1
2	$\sim p \vee (p \wedge q)$	1, Teorema 2.11 a - Comutativa
3	$(\sim p \vee p) \wedge (\sim p \vee q)$	2, Teorema 2.11 d - Distributiva
4	$t \wedge (\sim p \vee q)$	3, Teorema 2.12 j – Tautologia Teorema 2.13 – Substituiçào
5	$\sim p \vee q$	4, Teorema 2.11a – Comutativa Teorema 2.12 c – Tautologia
6	$q \vee \sim p$	5, Teorema 2.11 a – Comutativa
7	$\sim q \to \sim p$	6, Teorema 2.9 b - Condicional

Para mostrar o segundo argumento utilizamos o mesmo processo de baixo para cima pois foram utilizadas somente equivalências lógicas.

b) Vamos demonstrar que. $(r \vee s) \vee \sim s \leftrightarrow s$ é uma tautologia utilizando o método dedutivo. Para isto devemos mostrar a validade dos argumentos $(r \vee s) \vee \sim s \rightarrow s$ e

$s \rightarrow (r \vee s) \vee \sim s$ Vejamos o primeiro argumento

Ordem	Proposição	Justificativa
1	$(r \vee s) \vee \sim s$	H_1
2	$r \vee (s \vee \sim s)$	1, Teorema 2.11 a - Comutativa
3	$r \vee t$	2, Teorema 2.12 j – Tautologia Teorema 2.13 – Substituição
4	t	3, Teorema 2.12 d – Tautologia
5	$s \wedge s \vee t$	4, Teorema 2.12 d - Tautologia
6	$s \wedge t$	5, Teorema 2.12 d – Tautologia Teorema 2.13 – Substituição
7	s	6, Teorema 2.12 c – Tautologia

Para mostrar o segundo argumento utilizamos o mesmo processo de baixo para cima pois foram utilizadas somente equivalências lógicas.

78. (FM-1999) Demonstre pelo método dedutivo as seguintes tautologias:

a) $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$.

b) $[(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \Leftrightarrow [p \rightarrow (q \vee r)]$.

Solução:

a) Vamos demonstrar que. $p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p$ é uma tautologia utilizando o método dedutivo. Para isto devemos mostrar a validade dos argumentos $p \vee (p \wedge q) \rightarrow p$ e $p \rightarrow [p \vee (p \wedge q)$. Vejamos o primeiro argumento

Ordem	Proposição	Justificativa
1	$p \vee (p \wedge q)$	H_1
2	$(p \vee p) \wedge (p \vee q)$	1, Teorema 2.11 d - Distributiva
3	$p \wedge q \vee p$	2, Teorema 2.11 b - Idempotência
4	P	3, Teorema 2.8 c - Simplificação

ii) Para mostrar o segundo argumento utilizamos a tabela abaixo.

Ordem	Proposição	Justificativa
1	P	H_1
2	$p \vee (p \wedge q)$	1, Teorema 2.8 b - Adição

b) Vamos demonstrar que. $[(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \leftrightarrow [p \rightarrow (q \vee r)]$. é uma tautologia utilizando o método dedutivo. Para isto devemos mostrar a validade dos argumentos $[(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$ $[p \rightarrow (q \vee r)]$. e $[p \rightarrow (q \vee r)] \rightarrow [(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$. Vejamos o primeiro argumento

Ordem	Proposição	Justificativa
1	$[(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$	H_1
2	$(\sim p \vee q) \vee (\sim p \vee r)$	1,Teorema 2.9 a – Condicional Teorema 2.13 – Substituição
3	$(\sim p \vee \sim p) \vee (q \vee r)$	2, Teorma 2.11 a - Comutativa Teorema 2.13 – Substituição
4	$\sim p \vee (q \vee r)$	3, Teorema 2.11 b – Idempotência Teorema 2.13 – Substituição
5	$p \rightarrow (q \vee r)$	4, Teorema 2.9 a - Condicional

Para mostrar o segundo argumento utilizamos o mesmo processo de baixo para cima pois foram utilizadas somente equivalências lógicas.

79. Considere as seguintes inferências:

A: H_1 $(P \vee Q) \wedge R$
H_2 $\sim P$
T: Q

B: H_1 $P \rightarrow R$
H_2 $Q \rightarrow \sim r$
H_3 Q
T: $\sim P$

Nos itens abaixo, são apresentados algumas apresentações de A e B . Em cada uma delas, descreva passo a passo, quais equivalências lógicas e /ou regras de inferência foram usadas, especificando também a quais linhas as regras fazem referência (Veja o exemplo dado)

a) Demonstração direta de A

1	$(P \vee Q) \wedge R$	
2	$\sim P$	
3	$P \vee Q$	
4	Q	

b) Demonstração direta de A

1	$(P \vee Q) \wedge R$	
2	$\sim P$	
3	$(P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$	
4	$\sim P \vee \sim R$	
5	$\sim(P \wedge R)$	
6	$Q \wedge R$	
7	Q	

c) Demonstração indireta de A

1	$(P \vee Q) \wedge R$	
2	$\sim P$	
3	$\sim Q$	
4	$P \vee Q$	
5	P	
6	$P \wedge \sim P$	

d) Demonstração direta de B

1	$P \rightarrow R$	
2	$Q \rightarrow \sim R$	
3	Q	
4	$R \rightarrow \sim Q$	
5	$P \rightarrow \sim Q$	
6	$\sim P$	

e) Demonstração direta de B

1	$P \rightarrow R$	
2	$Q \rightarrow \sim R$	
3	Q	
4	$\sim P \vee R$	
5	$\sim Q \vee \sim R$	
6	$\sim R$	
7	$\sim P$	

f) Demonstração indireta de B

1	$P \rightarrow R$	
2	$Q \rightarrow \sim R$	
3	Q	
4	P	
5	R	
6	$\sim Q$	
7	$Q \wedge \sim Q$	

80. Mostre que as inferências abaixo não são válidas, ou seja, a conjunção das hipóteses não implica a tese. Para mostrar isso é necessário achar um contra exemplo ,ou seja, achar exemplos de proposições que tornam as hipóteses verdadeiras e a tese falsa –veja o exemplo dado):

a) H_1 $P \vee R$ H_2 $Q \vee R$ T: $P \vee Q$	b) H_1 $P \to Q$ H_2 $Q \to R$ T: $P \to Q$
c) H_1 $P \to Q$ H_2 $\sim P \to R$ H_3 $\sim Q$ T: $R \to Q$	d) H_1 $P \wedge Q$ H_2 $R \vee (S \to P)$ H_3 $\sim R$ T: S

81. Leia o trecho abaixo e responda as questões apresentadas.
"Certa vez um homem caminhava em uma praia com um único pensamento: entender o que era lógica! Depois de muito caminhar, encontrou um amigo que se mostrou interessado em fazer com que o outro entendesse tal dádiva do pensamento humano. Colocou-se então a explicar...
- Você tem aquário em casa?
- Sim.
- Então você gosta de peixe!
- Claro.
- Se você gosta de peixe, deve gostar de sereia, que é metade peixe!
- É gosto.
- Mas gostando de sereia você gosta de mulher, pois sereia tem metade peixe e a outra metade mulher!
- Tem razão!
- Pois então, como você gosta de mulher, você é homem.
- É verdade, eu sou homem.
- Viu que legal, isto é lógica.
O homem saiu satisfeito com a explicação do amigo e louco para mostrar a alguém o que havia aprendido. Até que encontrou um outro homem também caminhando pela praia e perguntou:
- Você tem aquário em casa?
O homem respondeu:
- Não, não tenho.
- Então você não é homem!
E os dois se atacaram..."

Responda: No trecho em que o homem tenta explicar o que é lógica, faz-se uso de uma técnica dedutiva. Qual é? Por quê?
Porque a conclusão de que não ter aquário em casa implica não ser homem é falsa? (Explique usando artifícios do cálculo proposicional e das técnicas dedutivas).

82. Considere a afirmação:
Em um triângulo cujos lados medem a, b, c com $a \geq b \geq, c$, sempre temos $c + b > a$" (Desigualdade triangular)
Desta forma analise a proposição abaixo, bem como a prova dada:
Proposição: "Dados dois pontos x e y distintos e não colineares com o centro em uma circunferência de raio r e centro O, temos que a distância entre x e y (d(x, y)) é sempre menor que 2r."
Prova: De fato, se a distância entre x e y fosse maior que 2r (já que igual não pode ser, uma vez que os pontos não são colineares), teríamos:
$d(x, O) + d(y, O) > d(x, y)$
$r + r > d(x, y) > 2r$
$2r > 2r$
Desta forma segue que a distância entre dois pontos distintos não colineares com o centro em uma circunferência é sempre menor do que o diâmetro da mesma.
Qual a técnica dedutiva usada neste caso? Por que?

83. Numa acareação da CPI do "pão de queijo", as seguintes informações ocorrem:
a) A diz que B mente.
b) B diz que C mente.
c) C diz que A e B mentem. Se o conjunto de sentenças não é contraditório, quem está falando a verdade?

84. Legitime o argumento: "Se eu não especifico as condições iniciais, meu programa não roda. Se eu cometo 'loop infinito', meu programa não termina. Se o programa não roda ou se ele não termina, então o programa falha. Log se o programa não falha, então eu especifiquei as condições iniciais e não cometi 'loop'.

85. Assuma que "Zé é uma menina" e que "Zé tem dez anos" são sentenças falsas. Quais das seguintes são válidas?
a) Se Zé tem dez anos então Zé é menina.

b) Zé tem dez anos se e somente se é menina.
c) Zé não é menina com dez anos.

86. Suponha que "Zé não é baixo" seja falso e que assuma válidas as seguintes sentenças: "Zé ou Maria têm dez anos" e "se Maria tem dez anos então Zé não é baixo." Quais das sentenças abaixo são verdadeiras?
a) Zé não é baixo. b) Maria tem dez anos.
c) Zé tem dez anos. d) Ou Zé ou Maria não tem dez anos.

87. Denote por I: "uma dada matriz é invertível" e por D: "seu determinante é diferente de zero". Considerando válida a proposição $I \Rightarrow D$, quais da sentenças abaixo são conseqüências da asserção feita? (Não é necessário conhecimento de Álgebra Linear e observe a posição do para)
a) "para uma matriz Ter inversa basta que seu determinante seja nulo."
b) "para s3eu determinante ser não nulo 'é suficiente que a matriz seja invertível."
c) "para seu determinante ser nulo é necessário que a matriz seja invertível."
d) "uma matriz tem inversa se e apenas se seu determinante é não nulo."
e) "uma matriz tem determinante zero se ela não é invertível."

88. Em cálculo, a seguinte asserção vale: "uma função diferenciável é contínua" .Análogo ao exercício anterior, quais das sentenças seguem da asserção feita? (não é necessário conhecimento de cálculo)
a) "uma função é diferenciável apenas se ela é contínua"
b) "uma função é contínua apenas se ela é diferenciável"
c) "ser diferenciável é condição necessária para que seja contínua"
d) "ser diferenciável é condição suficiente para que seja contínua"
e) "a função é diferenciável se, e somente se é contínua"

Quantificadores

89. a) O que é uma sentença aberta?
b) Como transformar uma sentença aberta em proposição?
c) Quais os quantificadores existentes?
d) Qual a negação do quantificador existencial?
e) Qual a negação do quantificador universal?

90. Apresente a definição de limite utilizando quantificadores e encontre a negação.

91. Analise o significado lógico das seguintes frases do cotidiano:
a) Eu não fiz nada.
b) Eu não entendi nada.
c) Eu não vi ninguém.

92. Apresente a negação de $(\exists!\, x)(p(x))$.

93. Demonstre as seguintes propriedades de quantificadores

a) $(\forall x)\ (p(x)) \Rightarrow p(b)$
b) $[(\forall x)\ (p(x)) \vee (\forall x)\ (q(x))] \Rightarrow (\forall x)\ (p(x) \vee q(x))$.
c) $(\forall x)\ (p(x)) \Rightarrow (\exists x)\ (p(x))$
d) $(\exists x)\ (p(x) \wedge q(x)) \Rightarrow [(\exists x)\ (p(x)) \wedge (\exists x)\ (q(x))]$
e) $(\exists x)(\forall y)(p(x,y)) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)(p(x,y))$
f) $(\forall x)(p(x) \wedge q(x)) \Leftrightarrow [(\forall x)(p(x)) \wedge (\forall x)(q(x))]$
g) $[(\exists x)(p(x)) \vee (\exists x)(q(x))] \Leftrightarrow (\exists x)(p(x) \vee q(x))$
h) $(\exists x)(\exists y)(p(x,y)) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)(p(x,y))$
i) $\sim[(\exists x)(\exists y)(p(x,y))] \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(\sim p(x,y))$
j) $(\forall x)(\forall y)(p(x,y)) \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)(p(x,y))$
k) $\sim[(\forall x)(\exists y)(p(x,y))] \Leftrightarrow (\exists x)(\forall y)(\sim p(x,y))$
l) $\sim[(\forall x)(\forall y)(p(x,y))] \Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)(\sim p(x,y))$
m) $\sim[(\exists x)(\forall y)(p(x,y))] \Leftrightarrow (\forall x)(\exists y)(\sim p(x,y))$

94. (FM-2005) Verifique a validade dos quantificadores no universo dos números reais.

a) $(\forall x)(\exists y)(x^2 - y = 3)$ b) $(\forall y)(\exists x)(x^2 - y = 3)$ c) $(\exists y)(\exists x)(x^2 - y = 3)$

95. (FM-2002) (MD-2003) (FM-1999) Verifique a validade dos quantificadores a seguir para a proposição no universo dos números reais: $x^2 + x + 1 \geq 0$.

a) $(\forall x)$ (p(x)). b) $(\forall x)$ (~p(x)).
c) $(\exists x)$ (p(x)). d) $(\exists x)$ (~p(x)).

96. (FM-2002)(FM-1999) Verifique a validade dos quantificadores a seguir para a proposição no universo dos números inteiros $2x^2 - 5x + 2 = 0$:

a) $(\forall x)$ (p(x))
b) $(\forall x)$ (~p(x))
c) $(\exists x)$ (p(x))
d) $(\exists x)$ (~p(x))

Solução:

a) *Falso, pois para* $x = 3$, $2x^2 - 5x + 2 \neq 0$.

b) *Falso, pois para* $x = 2$, $2x^2 - 5x + 2 = 0$

c) *Verdadeiro, pois quando* $x = 2$, $2x^2 - 5x + 2 = 0$

d) *Verdadeiro, pois se considerarmos* $x = 3$, *temos* $2x^2 - 5x + 2 = 0$ *então* $(\exists x)(\sim p(x))$.

97. (FM-2002) Considere o universo de discurso como sendo os números inteiros e a proposição aberta p(x, y):$xy + x = 3x$.Determine o valor lógico das proposições abaixo justificando:

a) $(\forall x)$ $(\exists y)$ (p(x, y)).
b) ~[$(\exists x)$ $(\exists y)$ (~p(x, y))].

98. (FM-2002) Considerando a proposição aberta p(a, b) : $a^4 = 3 + b$, onde a assume valores em {0, 1, -1, 2, -2} e b em {3, -2, 13}. Determine o valor lógico das proposições abaixo, justificando:

a) $(\forall a)$ $(\exists b)$ (p(a, b))
b) ~ [$(\forall b)$ $(\exists a)$ (~p(a, b)]

99. (FM-2001) Nas sentenças abertas p(x) abaixo, considere x como sendo um número real. Transforme p(x) em proposições verdadeiras, utilizando quantificadores. Justifique suas respostas.

a) p(x): $\left(\dfrac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^2 - 1} = x^2 - 1\right)$.

b) p(x): $\left(\sqrt{x^2} \neq x \vee \sqrt{x^2} \neq -x\right)$.

c) p(x): $(x^2+1 \leq 0)$.

100. (FM-2001) a) Sendo A = {1,2,3}, determine o valor lógico de $(\exists\ x \in A)\ (x^2 + x - 6=0)$;
b) Sendo A um conjunto qualquer, determine a negação de $[(\forall x \in A)(p(x))] \wedge [(\exists x \in A)(q(x))]$.

101. (FM-2001) Sendo A = {3,5,7,9,11,13}, verifique o valor verdade das seguintes proposições, justificando a resposta:

a) $(\forall\ x \in A)$ (x é primo);
b) $(\forall\ x \in A)\ (x+3 \leq 9) \vee (\exists\ x \in A)\ (x^2+2=11)$.

102. (MD-2001) Considere, no universo dos números naturais, os seguintes predicados:

p(x): "x é par"
s(x,y): "$y = x + 1$"
q(x,y,z): "$x = y^2 + z^2$"

a) Dadas as proposições

$(\forall x)(\forall y)(s(x,y) \rightarrow p(x) \vee p(y))$
$(\forall x)(\exists y)(p(y) \wedge s(x,y))$

determine seus valores-verdade e expresse as respectivas negações;

b) Escreva em linguagem lógica, usando quantificadores e os predicados acima, a sentença "Todo número natural ímpar é soma de dois quadrados" (sugestão: escreva, antes, o predicado "x é soma de dois quadrados").

103. (MD-2001) Sendo A = {1,2,3,4}, determinar o valor lógico da proposição

$$(\exists\, x \in A)\ (2x^2 + x = 15).$$

104. (FM-2000) Responda as questões a seguir justificando sua resposta.
a) A proposição $(\forall x \in IR)[x^2+1 = (x+1)^2]$ é verdadeira?
b) A proposição $(\forall x \in IR)(x^2 > 0)$ é verdadeira?
c) A proposição $(\exists x \in IR)(x^2+2x+1 < 0)$ é verdadeira?
d) Quantifique a expressão $5.a + 4 \geq 11$ de forma a obter uma sentença verdadeira no universo dos números reais..

105. (FM-1999) Considere o conjunto universo U = {1, 2, 3 }. Verifique quais das frases abaixo são verdadeiras e quais são falsas, justifique sua resposta.
a) $(\forall x \in U)\ (\exists y \in U)$ tal que $x^2 < y + 1$.
b) $(\forall x \in U)$, $(\exists x \in U)$ tal que $x^2 + y^2 < 12$.
c) $(\forall z \in U)$, $(\exists x \in U)$, $(\exists y \in U)$, tal que $x^2 + y^2 < z^2$.

106. Escreva cada frase abaixo em linguagem lógica, usando quantificadores:
Universo = seres humanos
(exemplo) Quem com ferro fere com ferro será ferido
solução: sejam os predicados:
p(x): "x fere com ferro"
q(x): "x é ferido com ferro"
a frase fica $(\forall x)\ (p(x) \rightarrow q(x))$

a) Todo brasileiro é técnico da seleção.
b) Há brasileiros que já viram a neve, mas não há finlandeses que nunca a viram.
c) Todo ser humano ou é do hemisfério sul ou do hemisfério norte.
d) Existe um ser humano que mora na lua.
e) Quem não arrisca não petisca.

Universo = números naturais (nesse item, descreva em linguagem lógica também os predicados, por exemplo um predicado do tipo "x é produto de dois números naturais" é descrito como$(\exists y)\ (\exists z)\ (x = y\ .z)$
f) Todo número natural é soma de dois quadrados.
g) Nenhum número ímpar é divisível por dois.
h) Se a soma de dois números é par, então um dos números também é par.
i) O quadrado de um número natural é um número natural.
j) A média de um número natural ainda é um número natural.

107. Considere, no universo dos números naturais, os seguintes predicados:
P(x): x é par
Q(x, y): x = 2y
R(x, y, z): z = x + y
S(x, y): y = x + 1
Escreva as proposição abaixo em linguagem usual (português).
a) $(\forall x)\ P(x)$
b) $(\forall x)(\exists y)\ (S(x, y))$
c) $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(R(x, y, z)$
d) $(\forall x)(\forall y)(S(x, y) \rightarrow (P(x) \vee P(y))$
e) $(\forall y)(\exists x)(Q(x, y))$
f) $(\forall x)(\forall y)(Q(x, y) \rightarrow P(x))$

108. Determine o valor verdade das proposições do exercício **106** (somente aquelas referentes ao universo dos naturais), do exercício **107** e das proposições abaixo (cujo universo é o dos números inteiros).
a) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\exists t)(x\ .t = y\ .z)$
b) $(\forall x)(\exists y)(\exists z)(\exists t)(x = y^2 + z^2\ t^2\ )$
c) $(\exists x)(\forall y)(\exists z)(y\ z = x)$
d) $(\exists x)(\forall y)(\exists z)(y - z = x)$
e) $(\forall x)(\exists y)(\exists z)(x = (y + z)\ /2)$
f) $(\forall y)(\exists! x)(x = y^2\ )$
g) $(\forall x)(\exists! y)(y + 1 = x\ )$
h) $(\forall x)[(\exists y)(x = 2y\ ) \rightarrow (x + 1$ é ímpar$)]$

109. Expresse a negação de cada uma das proposições do exercício **108**. Nos itens f e g tente negar antes uma proposição do tipo$(\exists! x)(P(x))$, lembrando que $(\exists! x)(P(x)) = (\exists x)[(P(x)) \wedge (\forall y)(\sim P(x)) \vee (x = y))]$.

110. Verifique se valem as seguintes afirmações (prove as implicações que valem, e dê contra- exemplo para as implicações que não valem)
$(\exists x)(P(x) \to Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x)(P(x)) \to (\exists x)(Q(x))$
$(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x)(P(x)) \to (\forall x)(Q(x))$
(dica: em cada afirmação há uma implicação que vale e outra que não vale)

111. Sejam os predicados no universo dos inteiros: N(x): x é inteiro não negativo, E(x): x é par, I(x): x é ímpar, P(x): x é primo.
a) Escreva as proposições abaixo simbolicamente :
b) Existe um inteiro impar.
c) Todo inteiro é par ou ímpar.
d) Todo inteiro primo não é negativo.
e) O único par primo é 2.
f) Existe um e apenas um par primo.
g) Nem todos primos são ímpares.
h) Se um inteiro não é impar , então ele é par.

112. Determine os valores (universo: inteiros)
a) $(\forall m)\ (\exists n)\ [2n = m]$
b) $(\forall m)\ (\exists n)\ [2m = n]$
c) $(\forall m)\ (\exists n) \sim[2n = m]$
d) $(\exists n)\ (\forall m)(2m = n)$
e) $(\exists n)\ (\forall m)(m < n + m)$
f) $(\exists n)\ (\forall m)(n < n + m)$

113. Determine quais das seguintes proposições são verdadeiras (universo: inteiros). Depois considere os reais como universo.
a) $(\forall x)(\exists y)\ (x\ y = 0)$
b) $(\forall x)(\exists y)\ (x\ y = 1)$
c) $(\exists x)(\forall y)(x\ y = 1)$
d) $((\exists x)(\forall y)(x\ y = x)$

114. Considere os predicados: S(x, y, z): "x + y = z", P(x, y, z): "x. y = z" e L(x, y, z): "x < y"; e o universo do discurso o conjunto dos naturais. Exprima a frase usando predicados dados e determine i valor verdade:
a) Para todo x e y ,existe z tal que x + y = z.0
b) Nenhum x é menor do que 0.
c) Existe elemento neutro na adição.
d) Existe um único elemento neutro na adição.
e) Para todo x, x. y = y para todo y.
f) Existe um x tal que x. y = y para todo y.

115. Simule computacionalmente o valor verdade dos predicados:
a) $(\forall x)$ P(x) (P(x)um vetor com entradas boolenas de comprimento 20)
b) $(\forall x)\ (\exists y)$ P(x) um "array"- matriz 10 x 30 com entradas boolenas, diagramos,$1 \leq x \leq 10$ e $1 \leq y \leq 30$.

116. Outra forma de quantificar é "existe um apenas um" elemento do discurso que torna o predicado P verdadeiro, denotado por $\exists!x\ P(x)$. Tente expressa- lo em função dos outros conectivos e quantificadores.

117. Quando $(\forall x)$ P(x) falha, significa que existe um sujeito x_0 tal que $P(x_0)$ não vale. Neste caso dizemos que x_0 é um contra- exemplo das sentenças abaixo:
a) Todos os primos são ímpares: $(\forall x)$ (x é primo $\Rightarrow$ x é impar)
b) Todos inteiro é soma de dois quadrados.
c) Todos inteiros é soma de três quadrado.

118. Utilizando os predicados: a | b: "a divide b", a = b: "a igual a b", exiba o predicado P(x): "x é primo" em notação lógica. Como fica sua negação sem usar o conectivo ~?

119. Expresse a sentença "não existe o maior primo" (use P do exercício acima e o predicado >: "maior que").

120. Denote por T(a, b, c) o predicado "a, b, c são lados de um triângulo retângulo. Enuncie o Teorema de Pitágoras.

121. Universo: inteiros. Para cada uma das afirmações abaixo, encontre um predicado P que torna a implicação falsa.
a) $(\forall x)\ (\exists!y)\ P(x, y) \Rightarrow (\exists!y)\ (\forall y)\ P(x, y)$

b) $(\exists! y)\ (\forall y)\ P(x, y) \Rightarrow (\forall x)\ (\exists! y)\ P(x, y)$

122. Mostre que as afirmações não são válidas:
a) $(\exists x)\ [P(x) \Rightarrow Q(x)] \Leftrightarrow [(\exists x)\ P(x) \Rightarrow \exists x\ Q(x)]$
b) $(\forall x)\ [P(x) \Rightarrow Q(x)] \Leftrightarrow [(\forall x)\ P(x) \Rightarrow \forall x\ Q(x)]$

123. Legitime o argumento: "Todos os poetas são ou niilistas ou sonhadores. Afrânio é poeta. Mais ele não é niilista. Logo há sonhadores".(P: poeta, N: niilista, S: sonhador e A: Afrânio).

124. Inferir: "Todos os gaúchos gostam de estórias .Todos os contadores de história são interessantes. O escritor Veríssimo é gaúcho. Logo, alguém é gaúcho e interessante".(G: gaúcho, C: contar estórias, I: ser interessante, V: Veríssemo).

125. Inferir: Todos os peixes vivem no mar. Acontece que Pluto é um animal. Pluto não vive no mar. Portanto, há animais que não são peixes.

126. Verifique se as conclusões estão corretas. Caso afirmativo tente justificar o argumento.
a) Premissas: (1) Todos os comunistas são ateus. (2) Bakunin é ateu. Conclusão: Bakunin é comunista.
b) Premissas: (2) Todos os comunistas são ateus (2) Bakunin é comunista. Conclusão: Bakunin é ateu.
c) Premissas: (1) Nenhum estudante é maníaco. (2) Todos os jovens são estudantes. Conclusão: Não existe um jovem maníaco. (obs.: a premissa 1 é equivalente a: Todos os estudantes não são maníacos.)

127. (FM-2002) Considerando a proposição aberta p(a, b) : $a^4 = 3 + b$, onde a assume valores em {0, 1, -1, 2, -2} e b em {3, -2, 13}. Determine o valor lógico das proposições abaixo, justificando:
a) $(\forall a)\ (\exists b)\ (p(a, b))$
b) $\sim [(\forall b)\ (\exists a)\ (\sim p(a, b)]$

a) Falsa, pois para x = 0 não temos a proposição verdadeira independente do valor de b.

b) Verdadeira, pois $(\forall b)(\exists a)(\sim p(a, b)$ é verdadeira Logo sua negação é falsa.

128. (FM-2002) Considere o universo de discurso como sendo os números inteiros e a proposição aberta p(x, y):$xy + x = 3x$.Determine o valor lógico das proposições abaixo justificando:
a) $(\forall x)\ (\exists y)\ (p(x, y))$.
b) $\sim[(\exists x)\ (\exists y)\ (\sim p(x, y))]$.

a) Verdadeira pois para qualquer x inteiro considere $y = 2 \in Z$ tal que: $x \cdot 2 + x = 3x$.

b) Falsa pois para $y = 3$ e $x = 1$ temos $x \cdot y + x = 1 \cdot 3 + 1 = 4 \neq 3 \cdot 1$

129. (FM-2002) Verifique a validade dos quantificadores a seguir para a proposição no universo dos números reais:

$$x^2 + x + 1 \geq 0.$$

a) $(\forall x)\ (p(x))$. b) $(\forall x)\ (\sim p(x))$.
c) $(\exists x)\ (p(x))$. d) $(\exists x)\ (\sim p(x))$.

a) Verdadeiro, pois para todo x existirá p(x).Se este x for pertencente aos números reais.

b) Falso, pois ele é a negação de $(\exists x)\ (p(x))$ que também é verdadeiro.

c) Verdadeiro, basta pegar x=2 e veremos que $x^2 + x + 1 \geq 0$.

d) Falso, pois ele é a negação de $(\forall x)\ (p(x))$ que também é verdade.

130. (MD-2001) Considere o conjunto universo U={1,2,3}. Verifique se a proposição é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

$$\forall z \in U, \exists x \in U, \exists y \in U, \text{ tal que, } x^2+y^2<2z^2$$

Solução: A proposição é falsa pois para z=1 temos

$$x = 1 \wedge y = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2.z^2$$
$$x = 1 \wedge y = 2, 3 \Rightarrow x^2 + y^2 > 2.z^2$$
$$x = 2 \wedge y = 1, 2, 3 \Rightarrow x^2 + y^2 > 2.z^2$$
$$x = 3 \wedge y = 1, 2, 3 \Rightarrow x^2 + y^2 > 2.z^2$$

131. (MD-2001) Sendo $A = \{1,2,3,4\}$, determinar o valor lógico da proposição

$$(\exists\, x \in A)\ (2x^2 + x = 15)$$

Solução: É falsa, pois para

$$x = 1, \text{ temos } 2x^2+x=3$$
$$x = 2, \text{ temos } 2x^2+x=10$$
$$x = 3, \text{ temos } 2x^2+x=21$$
$$x = 4, \text{ temos } 2x^2+x=36.$$

Logo, $(\forall\, x \in A)\ (2x^2+x \neq 15)$ é verdadeira.

Portanto, $(\exists\, x \in A)\ (2x^2+x \neq 15) = \sim(\forall\, x \in A)\ (2x^2+x \neq 15)$ é falsa.

132. (MD-2001) Considere, no universo dos números naturais, os seguintes predicados:

p(x): "x é par"

s(x,y): "$y = x + 1$"

q(x,y,z): "$x = y^2 - z^2$"

a) Dadas as proposições

$(\forall x)(\forall y)(s(x,y) \wedge p(x) \rightarrow \sim p(y))$

$(\forall x)(\exists y)(p(y) \wedge s(x,y))$

determine seus valores-verdade e expresse as respectivas negações;

b) Escreva em linguagem lógica, usando quantificadores e os predicados acima, a sentença "Todo número natural ímpar é diferença de dois quadrados"

[sugestão: escreva, antes, o predicado "x é diferença de dois quadrados"].

133. (MD-2001) Considere, no universo dos números naturais, os seguintes predicados:

p(x): "x é ímpar"

s(x,y): "$y = x + 1$"

q(x,y,z): "$x = y^2 + z^2$"

c) Dadas as proposições

$(\forall x)(\forall y)(s(x,y) \rightarrow p(x) \vee p(y))$

$(\forall x)(\exists y)(p(y) \wedge s(x,y))$

determine seus valores-verdade e expresse as respectivas negações;

d) Escreva em linguagem lógica, usando quantificadores e os predicados acima, a sentença "Todo número natural par é soma de dois quadrados"

[sugestão: escreva, antes, o predicado "x é soma de dois quadrados"].

134. (MD-2001) Considere, no universo dos números naturais, os seguintes predicados:

p(x): "x é par"

s(x,y): "$y = x + 1$"

q(x,y,z): "$x = y^2 + z^2$"

e) Dadas as proposições

$(\forall x)(\forall y)(s(x,y) \rightarrow p(x) \vee p(y))$

$(\forall x)(\exists y)(p(y) \wedge s(x,y))$

determine seus valores-verdade e expresse as respectivas negações;

f) Escreva em linguagem lógica, usando quantificadores e os predicados acima, a sentença "Todo número natural par é soma de dois quadrados"

[sugestão: escreva, antes, o predicado "x é soma de dois quadrados"].

135. (MD-2001) Considere, no universo dos números naturais, os seguintes predicados:

p(x): "x é ímpar"

s(x,y): "$y = x + 1$"

q(x,y,z): "$x = y^2 + z^2$"

g) Dadas as proposições

$(\forall x)(\forall y)(s(x,y) \rightarrow p(x) \vee p(y))$

$(\forall x)(\exists y)(p(y) \wedge s(x,y))$

determine seus valores-verdade e expresse as respectivas negações;

h) Escreva em linguagem lógica, usando quantificadores e os predicados acima, a sentença "Todo número natural ímpar é soma de dois quadrados"

[sugestão: escreva, antes, o predicado "x é soma de dois quadrados"].

136. (MD-2001) Considere, no universo dos números naturais, os seguintes predicados:

p(x): "x é par"

s(x,y): "$y = x + 1$"

q(x,y,z): "$x = y^2 + z^2$"

i) Dadas as proposições

$(\forall x)(\forall y)(s(x,y) \rightarrow p(x) \vee p(y))$

$(\forall x)(\exists y)(p(y) \wedge s(x,y))$

determine seus valores-verdade e expresse as respectivas negações;

j) Escreva em linguagem lógica, usando quantificadores e os predicados acima, a sentença "Todo número natural ímpar é soma de dois quadrados"
[sugestão: escreva, antes, o predicado "x é soma de dois quadrados"].

137. (FM-2001) Sendo A = {3,5,7,9,11,13}, verifique o valor verdade das seguintes proposições, justificando a resposta:

a) $(\forall x \in A)$ (x é primo);

b) $(\forall x \in A)(x+3 \leq 9) \vee (\exists x \in A)(x^2+2=11)$.

Solução:

Seja A= { 3, 5, 7, 9, 11, 13}.

a) *($\forall x \in A$) (x é primo) é uma proposição FALSA, basta considerar x=9=3.3 que, portanto, não é primo.*

b) *($\forall x \in A$) ($x+3\leq 9$) é FALSA, pois para x=7, temos x+3=10>9. ($\exists x \in A$) ($x^2+2=11$) é VERDADEIRA, pois para x=3, temos $x^2+2=11$. Portanto, a proposição dada pela disjunção destas duas é VERDADEIRA.*

138. (FM-2001) a) Sendo A = {1,2,3}, determine o valor lógico de $(\exists x \in A)(x^2 + x - 6=0)$;

b) Sendo A um conjunto qualquer, determine a negação de $[(\forall x\in A)(p(x))]\wedge[(\exists x\in A)(q(x))]$.

Solução:

a) *O valor lógico é verdadeiro, pois basta considerar $x=2 \in A$ e $2^2+2-6=6-6=0$.*

b) *A negação é dada pela proposição*

$$\sim[[(\forall x\in A)\ (p(x))] \wedge [(\exists x\in A)\ (q(x))]].$$

Utilizando a regra de De Morgan (19 a) teremos:

$$[\sim[(\forall x\in A)\ (p(x))]] \vee [\sim[(\exists x\in A)\ (q(x))]].$$

Por (27) teremos

$$[(\exists x\in A)\ (\sim p(x))] \vee [(\forall x\in A)\ (\sim q(x))].$$

139. (FM-2001) Nas sentenças abertas p(x) abaixo, considere x como sendo um número real. Transforme p(x) em proposições verdadeiras, utilizando quantificadores. Justifique suas respostas.

a) p(x): $\left(\dfrac{x^4-2x^2+1}{x^2-1} = x^2-1\right)$.

b) p(x): $\left(\sqrt{x^2} \neq x \vee \sqrt{x^2} \neq -x\right)$.

c) p(x): $(x^2+1\leq 0)$.

Solução:

a) $(\exists x)\left(\dfrac{x^4-2x^2+1}{x^2-1} = x^2-1\right)$, *pois se x=0, teremos a igualdade, mas se x=1 ou x=-1, o lado esquerdo não está definido.*

b) $(\exists x)\left(\sqrt{x^2} \neq x \vee \sqrt{x^2} \neq -x\right)$, *pois se x=2, temos* $\sqrt{2^2}=2$, *mas se x=0* $\sqrt{0^2}=0$ e $\sqrt{0}=-0$, *portanto para 0 não vale.*

c) *$x^2+1>0$, pois para todo x, $x^2>0$ e assim $x^2+1>0$, logo ($\forall x$) ($x^2+1>0$), ou seja, ($\forall x$) ($\sim p(x)$).*

140. (FM-2000) Responda as questões a seguir justificando sua resposta.

Quantifique a expressão 5.a +4 $\leq$ 11 de forma a obter uma sentença verdadeira no universo dos números reais..

a) A proposição $(\forall x\in IR)[x^2+2x+1 = (x+1)^2]$ é verdadeira?

b) A proposição $(\forall x\in IR)(x^2+2x+1 = 0)$ é verdadeira?

c) A proposição $(\exists x\in IR)(x^2+2x+1 > 0)$ é verdadeira?

Solução:

a) Verdadeira, pois $(x+1)^2 = (x+1).(x+1) = x^2+ 2x +1$.

b) Falsa, basta pegar x =3 então $x^2 + 2x + 1 = 16 \neq 0$.

c) Verdadeira, se fizermos x = 2 temos $x^2 + 2x +1 = 9 > 0$.

($\exists x \in IR$)(5a +4 $\leq$ 11) pois a equação só se satisfaz com a $\leq \dfrac{6}{5}$

141. (FM-2000) Verifique o valor verdade das proposições a seguir, justificando sua resposta.

a) Dado $B = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in Z^* \right\}$ $(\forall\ x \in B)\ (x^2 - 1 \leq 0)$

b) Dado $A=\{1, 2, 3\}$ $(\exists x\in A)\ (\forall y\in A)\ (\forall z\in A)\ (x^2+y^2<2z^2)$

$\sim\{(\exists x)\ [(\forall y)\ (p(x,y))]\} \equiv (\forall x)\ [(\exists y)\ (\sim p(x,y))]$

Solução:

a) Verdadeira pois $\left(\frac{1}{n}\right)^2$ *$n \in Z$, tal que $n \neq 0$ é menor que zero.*

b) Falsa, pois para $y=1$ e $z=1$ não temos $x \in A$ tal que $x^2+y^2< 2z^2$.

142. (FM-2000) Responda as questões a seguir justificando sua resposta.

Quantifique a expressão $5.a +4 \geq 11$ de forma a obter uma sentença verdadeira no universo dos números reais..

a) A proposição $(\forall x\in IR)[x^2+1 = (x+1)^2]$ é verdadeira?

b) A proposição $(\forall x\in IR)(x^2 > 0)$ é verdadeira?

c) A proposição $(\exists x\in IR)(x^2+2x+1 < 0)$ é verdadeira?

Solução:

a) Falsa, pois se pegarmos $x = 1$ teremos $(x^2 + 1) = 3 \neq 4 = (x + 1)^2$.

b) Falsa, pois para $x = 0$ temos $x^2 = 0$ e não $x^2 > 0$.

c) Falsa, pois para qualquer $x \in IR$ temos $x^2 + 2x + 1 > 0$.

$(\exists a \in IR)\ (5a + 4 \geq 11)$ pois a equação só se satisfaz com $a \geq \frac{6}{5}$

143. (FM-1999) Considere o conjunto universo $U=\{1,2,3\}$. Verifique quais das frases abaixo são verdadeiras e quais são falsas, justificando sua resposta.

a) $\forall x\in U, \exists y\in U$, tal que $x^2 < y+1$.

b) $\forall x\in U, \exists y\in U$, tal que $x^2 +y^2<12$.

c) $\forall z\in U, \exists x\in U, \exists y\in U$, tal que $x^2 +y^2<2z^2$.

Considere o conjunto universo $U = \{1, 2, 3\}$. Verifique quais das frases abaixo são verdadeiras e quais são falsas, justifique sua resposta.

a) $(\forall x \in U)\ (\exists y \in U)$ tal que $x^2 < y + 1$

Falsa pois se $x = 3$ para qualquer $y \in U$ temos que $x^2 > y + 1$.

b) $(\forall x \in U), (\exists x \in U)$ tal que $x^2 + y^2 < 12$.

Verdadeira pois para $x = 1$ $\forall y \in U$ temos $x^2 + y^2 < 12$.

Para $x = 2$ e $y = 1$ ou $y = 2$ temos $x^2 + y^2 < 12$

Para $x = 3$ e $y = 1$ temos $x^2 + y^2 < 12$

c) $(\forall z \in U), (\exists x \in U), (\exists y \in U)$, tal que $x^2 + y^2 < z^2$.

Falsa pois para $z = 1$ $(\forall x \in U)$ e$(\forall y \in U)$ temos $x^2 + y^2 \geq 2z^2$

144. (FM-1999) Verifique a validade dos quantificadores a seguir para a proposição no universo dos números inteiros: $2x^2 – 5x +2=0$.

a) $(\forall x)\ (p(x))$

b) $(\forall x)\ (\sim p(x))$

c) $(\exists x)\ (p(x))$

d) $(\exists x)\ (\sim p(x))$

Solução:

a) *Falsa, pois se considerarmos $x = 3$ veremos que a proposição não é satisfeita.*

b) *Falsa, basta considerar $x = -2$ que satisfaz a proposição.*

c) *Verdadeira pois é a negação de $(\forall x)\ (\sim p(x))$ que é falsa.*

d) *Verdadeira, pois é a negação de $(\forall x)\ (p(x))$ que é falsa.*

145. (FM-1999) Verifique a validade dos quantificadores a seguir para a proposição no universo dos números reais: $x^2+x+1\geq 0$.

a) $(\forall x)\ (p(x))$

b) $(\forall x)\ (\sim p(x))$

c) $(\exists x)\ (p(x))$

d) (∃x) (~p(x))

Solução:

a) *Verdadeiro, pois para todo x real, $x^2+x+1=0$ não possui raiz real, e também nunca é negativo, logo $x^2+x+1\geq 0$.*

b) *Falso, pois é negação de (∃x) (p(x)) que também é verdadeiro.*

c) *Verdadeiro, pois pelo item a) para todo x real temos $x^2+x+1\geq 0$, logo temos um em particular.*

d) *Falso, pois ele é a negação de (∀x) (p(x)) que é verdade pelo item a).*

Princípio da Indução Finita

146. (FM-2005) Sabe-se que para somar dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, toma-se um segmento orientado (A,B) para representar $\vec{u}$ e um segmento orientado (B,C) para representar $\vec{v}$, e a soma de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é um novo vetor denotado por $\vec{u} + \vec{v}$ que tem como representante o segmento orientado (A,C). Mostre utilizando o Princípio da Indução finita que a soma de n vetores $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \ldots + \vec{v}_n$ é dada pelo vetor que tem como representante o segmento orientado (X,Y), onde X é a origem de $\vec{v}_1$ e Y é a extremidade de $\vec{v}_n$.

147. (FM-2002)(FM-2000) Utilizando o Princípio da Indução Finita mostre que a seguinte proposição é verdadeira

$$(\forall n\in IN^*)[1.2 + 2.3 + \ldots + n.(n+1) = \frac{1}{3}n.(n+1)(n+2)].$$

Solução: *i) Temos $p(n_0)$ é verdadeiro pois*

$$0.1=0.\frac{1}{3}.(0+1)(0+2)$$

ii) Suponhamos que p(k) é verdadeiro, então temos

$$(0.1+1.2+2.3+\ldots+k.(k+1)=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$$

Provaremos que p(k+1) é verdadeiro. De fato, somando (k+1)(k+2) em ambos os lados da igualdade temos

$$0.1+1.2+2.3+\ldots k.(k+1)+(k+1)(k+2)=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)=$$

$$\frac{k(k+1)(k+2)+3(k+1)(k+2)}{3}=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3).$$

Portanto, p(k+1) é verdadeiro.

148. (FM-2002) Mostre que :

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots(2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$$

para todo n ∈ IN e n ≥ 1.

Temos P(1) verdadeiro pois $1^2 = 1 = \frac{1(4.1^2-1)}{3}$. Suponhamos que p(k) é verdadeiro , então $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots +$ $(2k-1)^2 = \frac{k(4k^2-1)}{3}$.

Somando $[2(k+1)-1]^2$ em ambos os lados obtemos:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2k-1)^2 + (2(k+1)-1)^2 = \frac{k(4k^2-1)}{3} + (2(k+1)-1)^2 =$$

$$= \frac{k(4k^2-1)}{3} + (2k+1)^2 = \frac{k(4k^2-1)+3(2k+1)^2}{3} =$$

$$= \frac{4k^3-k+12k^2+12k+3}{3} = \frac{4k^3+11k+12k^2+3}{3} =$$

$$= \frac{(k+1).(4k^2+8k+4-1)}{3} = \frac{(k+1)(4k^2+8k+3)}{3} =$$
$$= \frac{(k+1)(4(k+1)^2-2)}{3}.$$

Portanto temos P(k+1) é verdadeiro.

149. (FM-2002) Utilize o principio de indução finita para mostrar a validade da proposição encontrando o valor de n_0:

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N},\ n \geq n_0)\ (2^n > n^2).$$

Solução:*Primeiramente faremos alguns testes para encontrar o possível valor de n_0.*

n	2^n	n^2
0	1	0
1	2	1
2	4	4
3	8	9
4	16	16
5	32	25
6	64	36
7	128	49
8	256	64
9	512	81
10	1024	100

Pela tabela vemos que p(5) é verdadeiro pois: $2^5 = 32 > 25 = 5^2$
Suponhamos que p(k) é verdadeiro então: $2^k > k^2$ $*$
Multiplicando $*$ por 2 temos $2^{k+1} > 2k^2$
Assim devemos mostrar que $2k^2 \geq (k+1)^2$
De fato:

$$K \geq 5 \Rightarrow k \geq \frac{2+2\sqrt{2}}{2} \Rightarrow k^2 + 2k + 1 \geq 0 \Rightarrow 2k^2 \geq k^2 - 2k + 1 \Rightarrow 2k^2 \geq (k+1)^2$$

Portanto p(k+1) é verdadeiro.

150. (FM-2002) Mostre por indução que:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right).$$

Solução:*Temos que p(1) é verdadeiro pois:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Suponhamos agora que p(k) seja verdadeiro, então temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

Devemos mostrar que p(k+1) é verdadeiro. De fato:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k+1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como queríamos demonstrar.

151. (MD-2001)***(FM-1999)*** Utilize o Princípio da Indução Matemática para mostrar que o termo geral de uma progressão aritmética de razão r é $a_n = a_1 + (n-1).r$.

Solução: *$a_n = a_1 + (n-1).r$, $n \in \mathbb{N}^*$*

(i) P(1) é verdadeiro pois $a_1 = a_1 + (1-1).r$.
(ii) Suponhamos que P(k) seja verdadeiro, então

$$a_k = a_1 + (k-1).r$$

Como temos uma P.A de razão r,
$a_{k+1} = a_k + r = a_1 + (k-1).r + r = a_1 + [(k-1)+1].r = a_1 + [(k+1)-1].r$
Logo, P(k+1) é verdadeiro.
Portanto, obtemos o desejado.

152. (FM-2001) Mostre, utilizando o Princípio de Indução Finita, as seguintes proposições:

a) $(\forall n \in IN)\quad \left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right) \leq 2-\frac{1}{n}$

b) $(\forall\ n\ \in\ IN)$ ($2^{3n} - 1$ é divisível por 7).

Solução: (1ª. maneira)

a) *P(1) é verdadeira pois 1 ≤ 1. Suponhamos que P(k) é verdadeiro, então*

$$\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{k^2}\right) \leq 2-\frac{1}{k}$$

Somando $\frac{1}{(k+1)^2}$ *em ambos os lados obtemos*

$$\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}\right) \leq 2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}=$$

$$=2-\left(\frac{1}{(k+1)^2}-\frac{1}{k}\right)\overset{(*)}{\leq} 2-\frac{1}{k+1}$$

Portanto, P(k+1) é verdadeiro.

(*) $\frac{1}{(k+1)^2}=\frac{1}{k^2+2k+1}\leq\frac{1}{k^2+1}\leq\frac{k}{k^2+1}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\Rightarrow\frac{1}{(k+1)^2}-\frac{1}{k}\leq\frac{-1}{k+1}$.

(2ª. maneira)

P(1) é verdadeiro, pois $2^3 - 1=7$. Suponhamos que P(k) é verdadeiro, então

$$2^{3k} - 1=7.m,\ m\in Z.$$

Multiplicando por 2^3 em ambos os lados obtemos

$$2^{3k}.2^3 - 2^3 =7.m.2^3 \Rightarrow 2^{3(k+1)} - 8=7.m.2^3 \Rightarrow 2^{3(k+1)} - 1=7.m.2^3+7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^{3(k+1)} - 1=7.(m.2^3+7) \Rightarrow 2^{3(k+1)} - 1 = 7.(8.m+7).$$

Como $8m+7 \in Z$, temos que $2^{3(k+1)} - 1$ é divisível por 7. Portanto, P(k+1) é verdadeiro.

153. (FM-2001) Mostre, utilizando o Princípio de Indução Finita, as seguintes proposições:

a) $(\forall n\in IN^*)$ ($2^n > n$);

b) $(\forall n\in IN)$ ($3^{2n} + 7$ é divisível por 8).

Solução:(1ª. maneira)

a) *P(1) é verdadeiro, pois*

$$2^1=2 > 1.$$

Suponhamos que P(k) seja verdadeiro, então

$$2^k > k.$$

Multiplicando ambos lados por 2 teremos:

$$2^k.2 > 2.k \Rightarrow 2^{k+1}>2.k.$$

Como $k>1$ temos $k + k > k+1$ e , logo, $2.k > k+1$.

Portanto, $2^{k+1}>k+1$ e P(k+1) é verdadeiro

.

b) *P(0) é verdadeiro pois*

$$3^{2.0}+7=3^0+7=1+7=8=8.1.$$

Suponhamos que P(k) seja verdadeiro, então $\frac{8}{3^{2.k}+7}$*, ou seja, $3^{2.k}+7=8.a$ para algum $a \in Z$.*

Multiplicando ambos os lados por 3^2 obtemos:

$3^{2.k}\ 3^2+7.3^2=8.a.3^2 \Rightarrow 3^{2k+2}+63=8.(9.a) \Rightarrow 3^{2(k+1)}+7=8.(9.a) - 56 \Rightarrow \Rightarrow 3^{2(k+1)}+7=8.(9.a - 7)$

$\exists b=(9.a - 7) \in Z$ tal que $3^{2(k+1)}+7=8.b$. Portanto, $\frac{8}{3^{2.k}+7}$ *e P(k+1) é verdadeiro.*

(2ª. maneira)

(a) *i) Para $n=1$, temos que $2^n=2^1=2>1=n$.*

ii) Suponhamos que para $n=k$ o resultado seja verdadeiro, ou seja, $2^k>k$. Queremos mostrar que o resultado é verdadeiro para $n=k+1$, ou seja, queremos mostrar que $2^{k+1}>k+1$.

Temos que $2^{k+1}=2^k.2^1$, mas pela hipótese de indução $2^k>k$, logo $2^k.2^1>2.k$. Assim $2^{k+1}>2.k =k+k>k+1$, pois $k\geq 1$. Pelo PIF, temos o desejado.

***(b)** P(0) é verdadeiro pois*

$$3^{2.0}+7=3^0+7=1+7=8=8.1.$$

Suponhamos que o resultado seja verdadeiro para $n=k$, isto é, $3^{2.k}+7$ é divisível por 8. Queremos mostrar que a proposição é verdadeira quando $n=k+1$, ou seja, $3^{2.(k+1)}+7$ é divisível por 8. Temos

$$3^{2.(k+1)}+7=3^{2k+2}+7=3^{2k}.3+7 \qquad (*)$$

Pela hipótese de indução $3^{2.k}+7=8.a$ para algum $\underline{a}$ inteiro. Assim $3^{2.k}=8.a-7$, em (*), obtemos

$$3^{2.(k+1)}+7=9.3^{2k}+7=9.(8.a-7)+7=9.8.a-56=8.(9.a-7)$$

e $9.a-7$ é um número inteiro. Assim temos pelo PIF o desejado.

154. (FM-2001) Define-se a^n assim $a^0=1$ e $a^n=a^{n-1}.a$, $\forall$ $n>0$. Utilize esta definição e o Princípio da Indução Finita (PIF) para mostrar que $a>0 \Rightarrow a^n>0$, $\forall$ $n \in IN$.

Solução:

***i)** Se $n=0$, teremos $a>0 \Rightarrow a^n=a^0=1>0$, portanto a proposição é verdadeira.*

***ii)** Suponhamos que para $n=k$ tenhamos uma proposição verdadeira, ou seja, $a>0\Rightarrow a^k>0$. Queremos mostrar que, se $a>0\Rightarrow a^{k+1}>0$. Temos $a^{k+1}=a^k.a$ (por definição). Mas por hipótese de indução $a^k>0$ e por hipótese $a>0$, logo a^{k+1} é produto de dois números positivos e assim $a^{k+1}>0$.*

155. (MD-2001) Demonstre, por indução finita, que

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{n^2}{4}(n+1)^2, \quad \forall n \in IN.$$

***Solução:** (i) P(1) é verdadeiro, pois $1^3=(1/4)^2(1+1)^2$.*
(ii) Suponhamos que p(k) é verdadeiro então

$$1^3+2^3+3^3+...+k^3= k^2/4.(k+1)^2 \qquad (*)$$

Somando $(k+1)^3$ em ambos os lados de (*), teremos

$$1^3+2^3+3^3+...+k^3+(k+1)^3 = k^2/4.(k+1)^2+(k+1)^3=$$
$$= k^2/4+k+1)+(k+1)^2=(k^2+4k+4)/4.(k+1)^2=$$
$$=(k+1)^2/4.(k^2+4k+4)= (k+1)^2/4.(k+2)^2$$

Logo, p(k+1) é verdadeiro. Portanto, P(n) é verdadeiro para todo $n \in IN$, pelo Princípio da Indução Finita.

156. (FM-2000) Utilizando o Princípio da Indução Finita mostre que as seguinte proposição é verdadeira

$$(\forall n \in IN^*)[3^0 + 3^1 + ...+ 3^{n-1} = \frac{1}{2}(3^n-1)].$$

Solução:

Primeiramente mostraremos que p(1) é verdadeiro. De fato

$$3^0=1=\frac{1}{2}(3^1-1)$$

Agora, suponhamos p(k) verdadeiro, então temos

$$3^0+3^1+3^2+...3^{k-1}=\frac{1}{2}(3^k-1)$$

Queremos mostrar que p(k+1) é verdadeiro. De fato

$$3^0+3^1+3^2+...+3^{(k+1)-1}=\frac{1}{2}(3^k-1)+3^{k+1}=$$

$$=\frac{3^k}{2}-\frac{1}{2}+3^k=\frac{3.3^k}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(3^{k+1}-1).$$

157. (FM-2000) Mostre que n^3+2n é divisível por 3.

***Solução:** P(n): ($\forall n \in IN$, $n \geq 0$) ($n^3 + 2n$) é divisível por 3.*

Primeiramente, mostremos que P(0) é verdadeiro. De fato,

$0^3+2.0=0=3.0$

Agora, por hipótese de indução, suponhamos que P(k) é verdadeiro, ou seja,

($\exists a$, $a \in Z$, $a \geq 0$) tal que ($\forall k \in IN$, $k \geq -1$)
$k^3+2k=3.a$
Queremos mostrar que P(k+1) também é verdadeiro. De fato,

$$\begin{aligned}(k+1)^3+2(k+1) &= k^3+3k^2+3k+1+2k+2=\\ &=(k^3+2k)+3k^2+3k+3=\\ &=3a+3k^2+3k+3=\\ &=3.(a+k^2+k+1)\end{aligned}$$

Portanto P(k+1) é verdadeiro.

158. (FM-2000)(FM-1999) Utilizando o Princípio da Indução Finita mostre que a seguinte proposição é verdadeira

$$(\forall n \in IN^*)[1 + 4 + 7 + ... + (3n-2) = \frac{3n^2 - n}{2}.$$

Solução: *Primeiramente, mostraremos que p(1) é verdadeiro, de fato:*

$$3.1 - 2 = 1 = \frac{3.1^2 - 1}{2}$$

Agora , suponhamos que p(k) seja verdadeiro , então temos :

$$1+4+7+...+(3k-2)= \frac{3k^2 - k}{2}$$

Devemos mostrar que p(k+1) é verdadeiro, de fato :

$$1+3+7+...+(3k-2)+(3(k+1)-2) = \frac{3k^2 - k}{2} + (3(k+1)-2) =$$

$$\begin{aligned}\frac{3k^2 - k + 2(3(k+1)) - 4}{2} = \frac{3k^2 - k + 6k + 6 - 4}{2} &=\\ &= \frac{3k^2 + 5k + 2}{2} =\\ &= \frac{3k^2 + 5k + 2 + (k+1) - (k+1)}{2}\\ &= \frac{3[k^2 + 2k + 1] - (k+1)}{2}\\ &= \frac{3(k+1)^2 - (k+1)}{2}\end{aligned}$$

159. (FM-1999) Prove por indução finita a seguinte asserção: 2+4+6+8+10+...+2n= n.(n+1).
Solução: *Temos que P(0) é verdadeiro pois*

$$2.0 = 0 = 0\,(0 + 1)$$

Agora, suponhamos que p(k) seja verdadeiro, então temos

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + ... + 2k = k\,(k+ 1)$$

Devemos mostrar que p (k + 1) é verdadeiro, de fato:

$$\begin{aligned}2 + 4 + 6 + 8 + 10 + ... + 2k + 2\,(k+1) &= k\,(k + 1) + 2k + 2 =\\ &= (k+1)\,(k + 2).\end{aligned}$$

Problemas Lógicos

160. Num problema considere os seguintes elementos:

Temos cinco casas.
O inglês vive na casa amarela.

O brasileiro é o dono do cachorro.
Na casa verde se bebe café.
O espanhol bebe chá.
A casa verde está situada ao lado e a direita (do leitor) da casa cinzenta.
O estudante de psicologia possui macacos.
Na casa amarela se estuda filosofia.
Na casa do meio se bebe leite.
O norueguês vive na primeira casa.
O senhor que estuda lógica vive na casa vizinha á do homem que tem uma raposa.
Na casa vizinha a que se guarda o cavalo, estuda-se filosofia.
O estudante que se dedica a estudos sociais bebe suco de laranja.
O japonês estuda metodologia.
O norueguês vive ao lado da casa azul.
***Esclarecimento:** Cada uma das cinco casas está pintada de diferente cor. Seus moradores são de diferentes nacionalidades. Tem diferentes animais. Bebem diferentes bebidas e estudam diferentes matérias. Apresente clara e nitidamente qual a ordem das casas, quem é o morador de cada uma, de que cor são pintadas, o que estuda cada morador, qual seu bicho de estimação e qual sua cor preferida.*

Perguntas: Quem bebe água? E quem é dono da zebra?

161. *Escritor famoso:*Um teste de um concurso indaga:"qual a época do nascimento de um eminente escritor inglês, sabendo-se que apenas uma das alternativas é correta?(a)nasceu no século XIX; (b) nasceu no século XX; (c) nasceu depois de 1860; (d) nasceu antes de 1860; (e) não é possível resolver este problema".

162. *O filho do pianista:*Para complicar a vida de um lógico que queria saber a idade de seus três filhos, uma senhora manteve com ele seguinte diálogo:
_O produto de suas idades é 36
_Ainda não sei, respondeu o lógico
_A soma de suas idades é igual ao número da casa ao lado.
_Ainda não sei, respondeu o lógico.
_O mais velho toca piano.
_ Agora já sei as idades, respondeu o lógico.
Qual era o numero da casa e quais as idades dos filhos?

163. *Diálogo de filósofos:* Um paradoxo conhecido desde a época medieval, imagina o seguinte diálogo entre Socrátes e Platão: Quem esta mentindo?
_ Socrátes: "O que Platão vai dizer é falso."
_ Platão: "Socrátes acaba de dizer uma verdade."

164. *Frente e verso***:** Numa folha de papel em branco escreva: "A sentença do outro lado é verdadeira". No outro lado escreva: "A sentença do outro lado é falsa". As sentenças são verdadeiras?

165. *O Barbeiro:* Um barbeiro foi condenado a barbear todos e somente todos aqueles homens que não se barbeiam a si próprios. Quem barbeia o barbeiro?

166. *O crocodilo sádico:* Um crocodilo raptou um beb6e de sua mãe e prometeu devolvê-lo se a mãe respondesse corretamente "sim' ou "não". Questão: "Vou comer o sei bebê?"
O que a mãe respondeu e o que fez o crocodilo?

167. *Os condenados:* Os prisioneiros de um certo reino são sempre decapitados ou enforcados. Um prisioneiro conseguiu o privilégio de fazer uma previsão. Se fosse falsa, ele seria enforcado, e se fosse correta, decapitado. O prisioneiro conseguiu se livrar da pena?

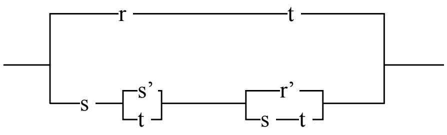
168. *O problema de três filósofos:* Três filósofos, depois de uma longa discussão, adormeceram debaixo de uma árvore. Um moleque, passando por aí, pintou o nariz dos três de vermelho. Quando os filósofos acordaram, começaram a rir da cara do outro, até que um deles parou bruscamente, porque se deu conta que seu nariz também estava pintado. Qual foi seu raciocínio?

169. *Os revolucionários:* Três revolucionários foram presos, mas o juiz tinha simpatia pela causa que eles defendiam e queria achar uma maneira sutil de liberta-los. Num dia o juiz chegou à cela com 5 etiquetas, duas pretas e três brancas, e anunciou: "Vou fixar uma etiqueta nas costas de cada um, de modo que cada um de vocês possa ver a de seus companheiros sem ver o própria. Não poderá haver nenhum tipo de comunicação. Quem acertar a cor de sua etiqueta e puder explicar, estará livre." Em seguida , fixou as etiquetas brancas nas costas dos prisioneiros e saiu, deixando-os com o guarda. Como cada um deles pode acertar a cor de sua etiqueta?

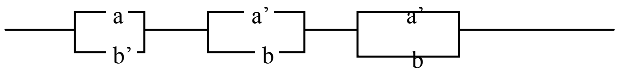
Circuitos Lógicos e de Interruptores

170. Simplifique ao máximo os seguintes circuitos de interruptores:

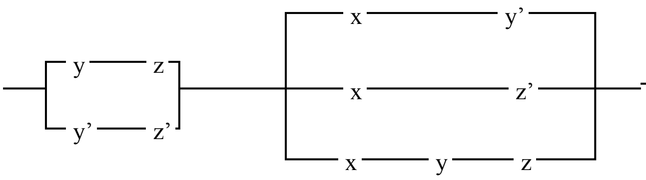
a)



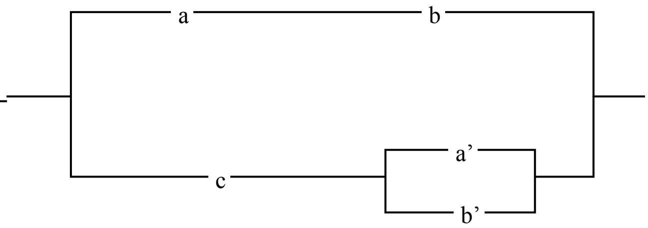
b)



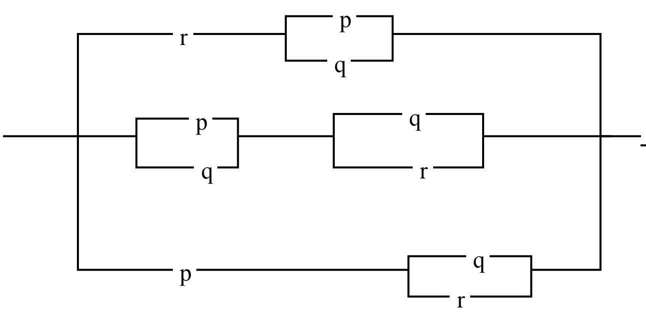
c)



d)



e)



f)