Lista de exercícios 1

Conteúdo: - Lógica Proposicional: proposições, conectivos lógicos, tabelas-verdade, equivalências lógicas - Quantificadores: quantificadores existencial e universal, negação de quantificadores - Notações somatório e produtório: definições, propriedades, exemplos - Indução Matemática: princípios de indução, provas por indução - Teoria dos Conjuntos: subconjuntos, cardinalidade, operações, diagramas de Venn

Lógica Proposicional e Quantificadores

Parte 1 – Regras de Inferência

Identifique a regra de inferência ilustrada em cada argumento abaixo:

1. Se Martins é o autor, então o livro é de ficção. Mas o livro não é de ficção. Portanto, Martins não é o autor.
2. Se a firma falir, todos os seus ativos têm que ser confiscados. A firma faliu. Logo, todos os ativos foram confiscados.
3. O cachorro tem pelo sedoso e adora latir. Portanto, o cachorro adora latir.
4. Se Paulo é um bom nadador, então ele é um bom corredor. Se Paulo é um bom corredor, então ele é um bom ciclista. Portanto, se Paulo é um bom nadador, então ele é um bom ciclista.

Parte 2 – Justificação e Demonstração

Justifique cada passo na sequência de demonstração abaixo:

H_1	$\neg A$	
H_2	B	
H_3	$B \to (A \vee C)$	
$\therefore$	C	
1.	$A \vee C$	____________
2.	C	____________

Parte 3 – Avaliação Lógica de Proposições

Determine o valor lógico das proposições abaixo, considerando o conjunto universo como todos os inteiros:

1. $(\exists x)(I(x))$
2. $(\forall x)[L(x) \to I(x)]$
3. $(\exists x)[L(x) \wedge G(x)]$
4. $(\forall x)[L(x) \vee G(x)]$

Considere: - $I(x)$: x é ímpar - $L(x)$: x $<$ 0 - $G(x)$: x $>$ 9

Parte 4 – Tradução para linguagem natural

Sejam as proposições: - A: "O livro é interessante" - B: "O livro é caro"

Traduza para a linguagem natural:

1. $\neg A$
2. $A \wedge B$
3. $A \vee B$
4. $B \vee (\neg A)$
5. $(\neg A) \wedge (\neg B)$

Parte 5 – Determinação da Negação

Determine a negação correta para as sentenças abaixo:

1. Estou feliz.
2. Todos os elefantes são cor-de-rosa.
3. Alguns cavalos são brancos.
4. Todos os cavalos são pretos.
5. O sol está brilhando.

Parte 6 – Tabela-verdade

Faça a tabela-verdade para as sentenças a seguir:

1. $(A \to B)$
2. $(A \leftrightarrow B)$

Parte 7 – Tradução de frases em linguagem simbólica

Traduza as frases abaixo para a linguagem simbólica:

1. É verão somente se está calor.
2. Uma condição necessária para estar calor é que seja verão.
3. Nunca é verão quando está calor.

Considere: - A: "Está calor" - B: "É verão"

Parte 8 – Exercícios de interpretação lógica

Analise logicamente as proposições e indique sua veracidade:

1. $(5 + 4 = 9 \wedge 2 \leq 4)$
2. $(3 + 2 = 6 \wedge 2 + 2 = 4)$
3. $(5 + 3 = 7 \vee 4 + 4 = 7)$
4. $(4 + 3 = 7 \vee 2 + 3 = 4)$

Parte 9 – Uso dos quantificadores

Seja o domíno de discurso o conjunto dos períodos de um determinado dia (amanhã, tarde, noite, madrugada). Escreva cada afirmação em forma simbólica, usando quantificadores:

1. Todas as manhãs são ensolaradas.
2. Algumas manhãs são chuvosas.
3. Nenhuma manhã é ensolarado e chuvoso ao mesmo tempo.
4. Nem sempre é chuvoso
5. Choveu em algum momento do dia.

Considere: - $M(x)$: x é uma manhã. - $S(x)$: x é ensolarado. - $C(x)$: x é chuvoso.

Parte 10 – Provas e validação

Use lógica proposicional para provar que cada argumento é válido:

Argumento 1

$$\begin{array}{cr} H_1 & \neg A \\ H_2 & B \to A \\ \therefore & \neg B \\ \hline \end{array}$$

Argumento 2

$$\begin{array}{cr} H_1 & A \to (B \to C) \\ H_2 & A \vee \neg D \\ H_3 & B \\ \therefore & D \to C \\ \hline \end{array}$$

Argumento 3

$$\begin{array}{cr} H_1 & \neg A \to \neg B \\ H_2 & B \\ H_3 & A \to C \\ \therefore & C \\ \hline \end{array}$$

Argumento 4

$$\begin{array}{cr} H_1 & P \vee \neg Q \\ H_2 & Q \\ \therefore & P \\ \hline \end{array}$$

Argumento 5

$$\begin{array}{cr} H_1 & P \to Q \\ H_2 & Q \to R \\ \therefore & P \to R \\ \hline \end{array}$$

Argumento 6

$$\begin{array}{cr} H_1 & P \to \neg Q \\ H_2 & P \\ \therefore & \neg Q \\ \hline \end{array}$$

Argumento 7

$$\begin{array}{cr} H_1 & \neg P \to Q \\ H_2 & Q \to \neg R \\ \therefore & \neg P \to \neg R \\ \hline \end{array}$$

Argumento 8

$$\begin{array}{cr} H_1 & P \vee Q \\ H_2 & \neg P \\ \therefore & Q \\ \hline \end{array}$$

Somatório e Indução Matemática

Parte 1 – Propriedades do Somatório

Determine o valor de cada somatório abaixo:

1. $\sum_{i=1}^{10} i$
2. $\sum_{i=1}^{5} (2i+3)$
3. $\sum_{i=2}^{2} (3i^2+2i+1)$
4. $\sum_{i=1}^{100} 12$

Verifique se as equivalências abaixo são verdadeiras:

5. $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$
6. $\sum_{i=1}^{n} (a_i \cdot b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i$
7. $\sum_{i=1}^{3} a_i + \sum_{i=4}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i$
8. $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n-1} a_i + a_n$
9. $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}$
10. $(\sum_{i=1}^{n} a_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$

Parte 2 – Prova por Indução Matemática

Prove por indução matemática as seguintes afirmações:

Somatório

11. A soma dos n primeiros números naturais é dada por $\frac{n(n+1)}{2}$.
12. A soma dos n primeiros números ímpares é dada por n^2.
13. A soma dos n primeiros números pares é dada por $n(n+1)$.
14. A soma dos n primeiros números quadrados é dada por $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
15. $\sum_{i=1}^{n} i.2^{i-1} = (n-1)2^n + 1$

Divisibilidade

16. $n^3 + 2n$ é divisível por 3 para todo n natural.
17. $4^n + 6n - 1$ é divisível por 9 para todo n natural $(n > 1)$.
18. $2^{2n} - 1$ é divisível por 3 para todo n natural.

Conjuntos e Teoria dos Conjuntos

Parte 1 – Elementos, Pertinência e Subconjuntos

Seja:

- $A = \{1, 2, 3\}$
- $B = \{\emptyset, 1, 2\}$
- $C = \{\{1, 2, 3\}, 1, 2, 3, 4\}$

Marque V (verdadeiro) ou F (falso) para cada afirmação:

1. $1 \in B$
2. $\{1, 2\} \subset B$
3. $A \subset C$
4. $A \in C$
5. $\emptyset \subset A$
6. $\emptyset \in B$
7. $B \subset C$
8. $\{A\} \subset C$

Parte 2 – Operações com Conjuntos

Considere os conjuntos:

- $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
- $X = \{1, 3, 5, 7\}$
- $Y = \{2, 3, 5, 7\}$
- $Z = \{1, 2, 4, 8\}$

Determine:

1. $X \cup Y$
2. $X \cap Y$
3. $X - Z$
4. $(X \cup Y) - Z$
5. $X \cap (Y \cup Z)$

Parte 3 – Diagramas de Venn

Considere três conjuntos A, B e C, representados em um diagrama de Venn. Traduza as seguintes afirmações para linguagem simbólica:

1. Elementos que pertencem somente a A.
2. Elementos que pertencem simultaneamente a A, B e C.
3. Elementos que pertencem a exatamente dois dos conjuntos.
4. Elementos que não pertencem a A, mas pertencem a B ou C.

Parte 4 – Questões Conceituais

Responda justificando brevemente cada questão:

1. Pode existir um conjunto que seja subconjunto dele mesmo? Justifique.
2. Pode existir um conjunto que seja elemento dele mesmo? Justifique.
3. Explique a diferença conceitual entre $\emptyset \subset A$ e $\emptyset \in A$.

Parte 5 – Cardinalidade e Conjunto das Partes

Dado o conjunto $M = \{a, b, c\}$, determine:

1. A cardinalidade de M.
2. O conjunto das partes de M.
3. A cardinalidade do conjunto das partes de M.

Parte 6 – Operadores Menos Comuns

Embora menos utilizados, os operadores abaixo são importantes para a teoria dos conjuntos. Determine o significado de cada um deles:

1. $A \subseteq B$
2. $A \subsetneq B$
3. $A \supset B$
4. $A \supsetneq B$
5. $a \notin B$
6. $A \Delta B$ ou $A \oplus B$
7. $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$
8. $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$
9. A^c ou $\overline{A}$
10. $A \times B$

11. A/B