Estatística

Albert E.F. Muritiba

Estatística é a ciência que se dedica à coleta, análise e interpretação de dados. Ela é uma ferramenta essencial para a tomada de decisões em diversas áreas do conhecimento.

- **Estatística Descritiva**
  - Descrever e resumir os dados
  - Tabelas, gráficos e medidas resumo
  - **Exemplo**: média, mediana, moda, variância, desvio padrão, etc.
- **Estatística Inferencial**
  - Inferir conclusões sobre uma população a partir de uma amostra
  - Testes de hipóteses, intervalos de confiança, regressão, etc.
  - **Exemplo**: teste t de Student, ANOVA, regressão linear, etc.

> neste curso, vamos focar na **estatística descritiva**.

Estatística Descritiva

Medidas de Posição

- **Média**: Balanço entre todos os valores. Busca o valor central.
  - Aritmética:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

  - Geométrica:

$$\bar{g} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$$

  - Harmônica:

$$\bar{h} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$$

```python
import numpy as np
x = np.random.randint(1, 100, 50) #50 valores aleatórios entre 1 e 100
```

```python
# Média Aritmética passo a passo
soma = 0
for i in x:
    soma += i
media = soma / len(x)
print(media)
```

```python
# Média Aritmética com numpy
media = np.mean(x)
```

```python
# Média Geométrica passo a passo
produto = 1
for i in x:
    produto *= i
media = produto ** (1/len(x))
print(media)
```

```python
# Média Geométrica com numpy
media = np.prod(x) ** (1/len(x))
```

```python
from scipy import stats
# Média Geométrica com scipy
media = stats.gmean(x)
```

> `scipy` é uma biblioteca de código aberto que fornece muitas ferramentas estatísticas e matemáticas.

```python
# Média Harmônica passo a passo
soma = 0
for i in x:
    soma += 1/i
media = len(x) / soma
print(media)
```

```python
# Média Harmônica com numpy
media = len(x) / np.sum(1/x)
```

```python
# Média Harmônica com scipy
media = stats.hmean(x)
```

Observação: No uso prático, devemos dar preferência ao uso de funções prontas de bibliotecas especializadas, como `scipy`, para cálculos estatísticos. Isso garante maior eficiência e precisão nos cálculos.

Exemplo

Suponha que você tem mil reais investidos e a tabela abaixo mostra o retorno mês a mês. Qual é o retorno médio mensal?

Mês	Ret. Absoluto	Ret. Relativo
C.I.	1000,00	1,0000
Janeiro	100,00	1,1000
Fevereiro	200,00	1,1818
Março	50,00	1,0385
Abril	-200,00	0,8519
Maio	-30,00	0,9739
Junho	100,00	1,0893
Total	**1220,00**	7,2353*
Média	**36,67**	1,0392*

(*) Incorreto!

- Podemos afirmar que o retorno total foi de R$ 220,00 em 6 meses. O retorno médio foi de R$ 36,67 por mês.
- Mas quando olhamos para o retorno relativo, o total indicado é de 7,2353 , o que é absurdo, pois o valor não ficou 7 vezes maior.
- Enquanto a média relativa foi de 1,0392, o que indicaria que o valor ficou 3,92% maior a cada mês. Se isso fosse verdade, o valor final seria de R$ 1259,49.
- O que aconteceu?
    - O total do rendimento relativo deve ser o **produto** dos rendimentos relativos de cada mês.
    - A média relativa deve ser a média **geométrica** dos rendimentos relativos de cada mês.

Mês	Ret. Absoluto	Ret. Relativo
C.I.	1000,00	1,0000
Janeiro	100,00	1,1000
fevereiro	200,00	1,1818
março	50,00	1,0385
abril	-200,00	0,8519
maio	-30,00	0,9739
junho	100,00	1,0893
Total	**1220,00**	**1,220**
Média	**36,67**	**1,0337**

- Quando o total de uma variável é melhor representado pela **soma** dos valores, a média **aritmética** é a melhor escolha.
- Quando o total é melhor representado pelo **produto** dos valores, a média **geométrica** é a melhor escolha.

E a média harmônica?

Exemplo

Suponha que o piloto de corrida fez cinco voltas em um circuito de 10km. A tabela abaixo mostra o tempo e a velocidade média de cada volta. Qual é a velocidade média final do piloto?

Volta	Tempo (h)	Velocidade (km/h)
1	0,0455	220
2	0,0450	222
3	0,0500	200
4	0,0435	230
5	0,0495	202
Total	**0,2335**	1074*
Média	**0,0467**	214,8*

(*) Incorreto!

- Podemos afirmar que o piloto completou o circuito em **0,2335** horas. Cada volta foi feita em média em **0,0467** horas.
- Quando olhamos para a velocidade:
    - A soma como total não faz sentido, pois a velocidade não é acumulativa.
    - A média não corresponde à velocidade média do piloto. Pois, quando dividimos a distância total pela soma dos tempos, obtemos **214,1 km/h**.
- Este é um caso em que a **média harmônica** é mais adequada.

Cáculo da velocidade média:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$v = \frac{5 \times 10}{\frac{10}{220} + \frac{10}{222} + \frac{10}{200} + \frac{10}{230} + \frac{10}{202}}$$

- $$= \frac{5}{\frac{1}{220} + \frac{1}{222} + \frac{1}{200} + \frac{1}{230} + \frac{1}{202}}$$

- $$= 214,1 \text{ km/h}$$

> Observe que o cálculo que realizamos é equivalente a calcular a média harmônica dos valores de velocidade.

Volta	Tempo (h)	Velocidade (km/h)
1	0,0455	220
2	0,0450	222
3	0,0500	200
4	0,0435	230
5	0,0495	202
Total	**0,2335**	--
Média	**0,0467**	**214,1**

- **Mediana**: Valor central de um conjunto de dados **ordenados**.
    - Se n é ímpar, a mediana é o valor central.
    - Se n é par, a mediana é a média dos dois valores centrais.

```
# Mediana com numpy
mediana = np.median(x)
```

- Em comparação com a média, a mediana é menos sensível a valores extremos.
- Mediana é mais representativa em distribuições assimétricas.
- Mediana é demanda mais tempo computacional para calcular.

- **Moda**: Valor mais frequente em um conjunto de dados.

```
# Moda com numpy
values, freq = np.unique(x, return_counts=True)
moda = values[np.argmax(freq)]
```

```
from scipy import stats
# Moda com scipy
moda = stats.mode(x)
```

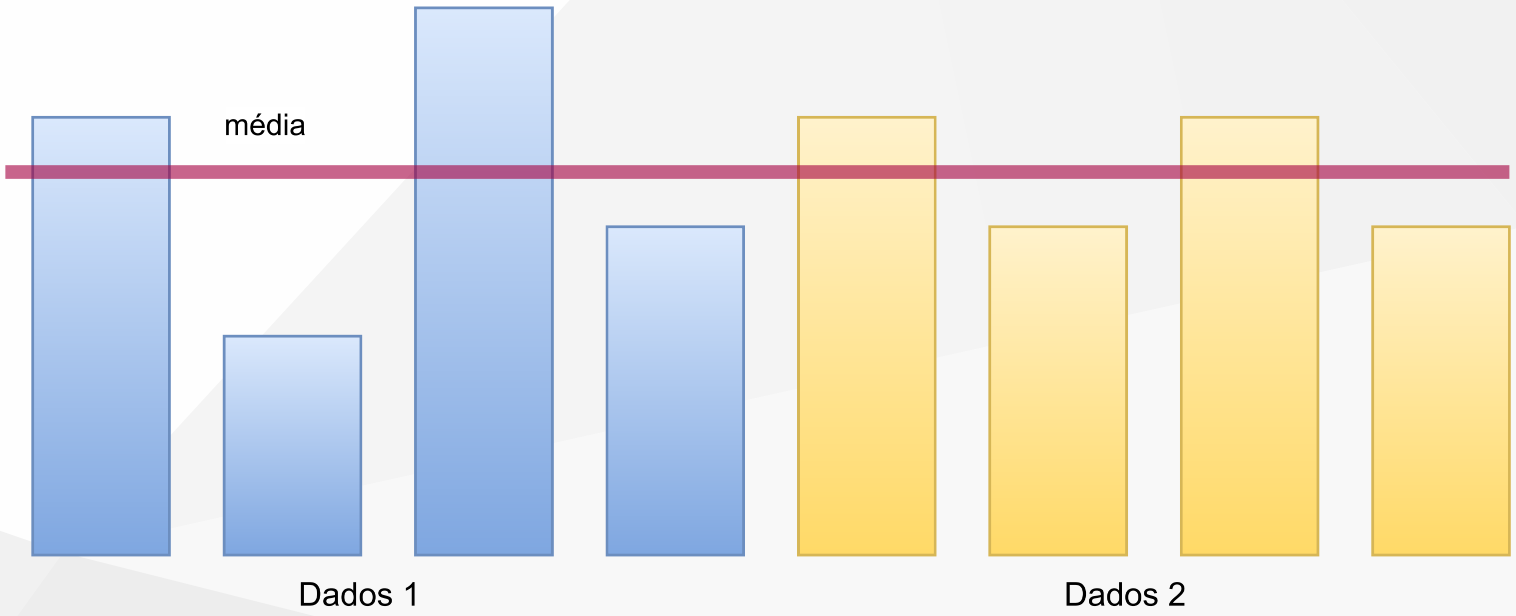
> `scipy` é uma biblioteca de código aberto que fornece muitas ferramentas estatísticas e matemáticas.

Aplicações:

- Conjuntos de dados com valores discretos
- Conjuntos de dados categóricos

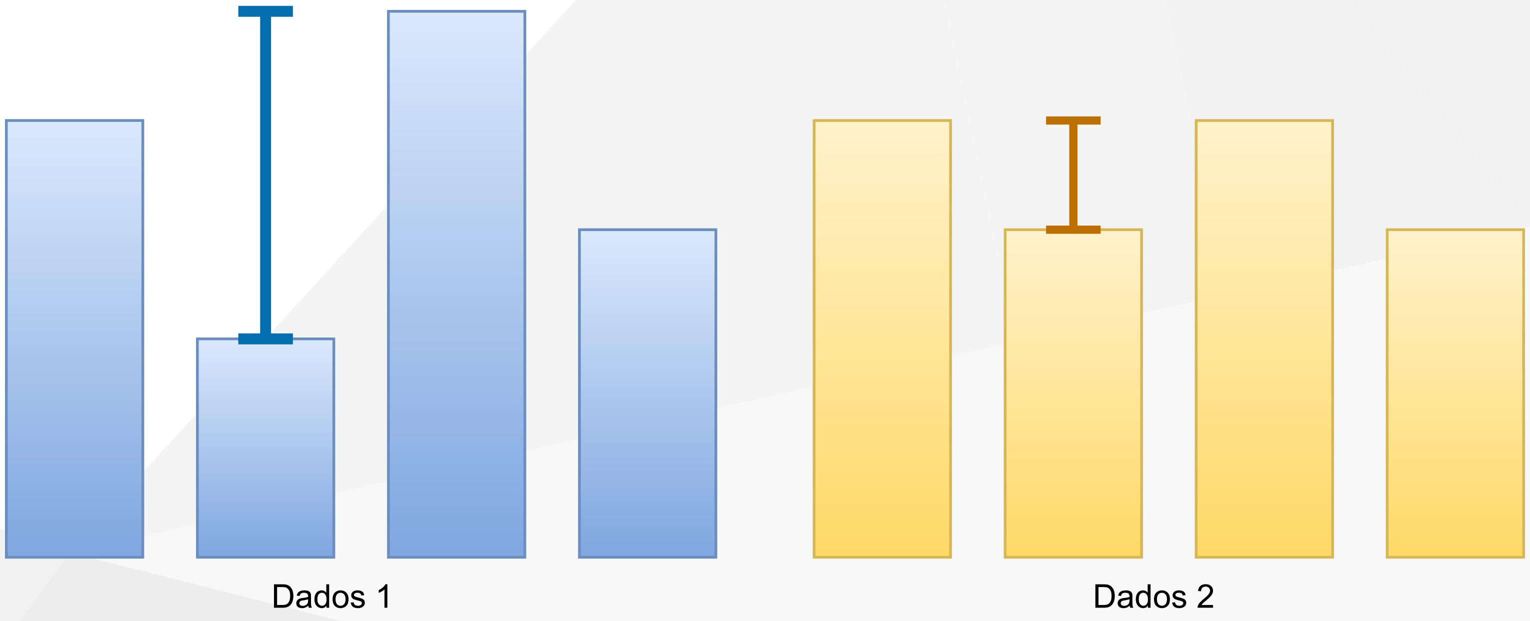
Medidas de Dispersão

A média, mediana e moda são medidas de posição que descrevem o centro de um conjunto de dados. As medidas de dispersão descrevem a **variabilidade** dos dados.



- **Amplitude**: Diferença entre o maior e o menor valor.

```
# Amplitude com numpy
amplitude = np.ptp(x)
```



- **Variância**: Média dos quadrados das diferenças entre os valores e a média.
  - População: $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}{n}$
  - Amostra: $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$

```python
# Variância populacional com numpy
variancia = np.var(x, ddof=0)
# Amostra 10 valores de x sem reposição
sample = np.random.choice(x, 10,replace=False)
# Variância amostral com numpy
variancia = np.var(sample, ddof=1)
```

> `ddof` é o grau de liberdade. Se `ddof=0`, a variância é calculada para a população. Se `ddof=1`, a variância é calculada para a amostra.

A razão para usar $n - 1$ em vez de n é que a variância amostral é uma estimativa da variância populacional. A simulação abaixo investiga qual fórmula é mais precisa.

```
import numpy as np
pop = np.random.randint(1, 10000, 1000)
v_pop = np.var(pop, ddof=0)
# Variâncias de 1000 amostras de 100 valores de pop
v_A = np.array([np.var(np.random.choice(pop, 100, replace=False), ddof=0) for _ in range(1000)])
v_B = np.array([np.var(np.random.choice(pop, 100, replace=False), ddof=1) for _ in range(1000)])
print('População:', v_pop)
print('Amostra (ddof=0):', np.mean(v_A))
print('Amostra (ddof=1):', np.mean(v_B))
# erro quadrático médio
print('EQM (ddof=0):', np.mean((v_A - v_pop)**2))
print('EQM (ddof=1):', np.mean((v_B - v_pop)**2))
```

- **Desvio Padrão**: Raiz quadrada da variância.
  - População: $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$
  - Amostra: $s = \sqrt{s^2}$

```
# Desvio padrão populacional com numpy
desvio_padrao = np.std(x, ddof=0)
# Desvio padrão amostral com numpy
desvio_padrao = np.std(sample, ddof=1)
# Desvio padrão populacional com scipy.stats
desvio_padrao = stats.tstd(x, ddof=0)
# Desvio padrão amostral com scipy.stats
desvio_padrao = stats.tstd(sample, ddof=1)
```

> Em média, quanto os valores se desviam da média. Os valores de desvio padrão são mais fáceis de interpretar do que os valores de variância, pois estão na mesma unidade dos dados.

A função `stats.tstd` da biblioteca `scipy` oferece outros argumentos que podem ser úteis em algumas situações.

- `limits` : `(a: float, b: float)` - Valores menores que `a` ou maiores que `b` são ignorados.
- `inclusive` : `(bool, bool)` - Se `True` , os valores `a` e `b` são incluídos na contagem.
- 'nan_policy': `('propagate', 'raise', 'omit')` - Como lidar com valores `nan` .
    - `propagate` : retorna `nan` .
    - `raise` : gera um erro.
    - `omit` : ignora os valores `nan` .

```
# Desvio padrão populacional com scipy.stats
desvio_padrao = stats.tstd(x, ddof=0, limits=(0, 100), inclusive=(True, False), nan_policy='omit')
```

- **Coeficiente de Variação**: Medida de dispersão relativa.
  - $CV = \frac{s}{\bar{x}} \times 100\%$

```python
#CV usando numpy
cv = np.std(x, ddof=0) / np.mean(x) * 100
#CV usando scipy.stats
cv = stats.variation(x) * 100
```

> Em média, quanto os valores se desviam **percentualmente** da média.

Medidas de Forma

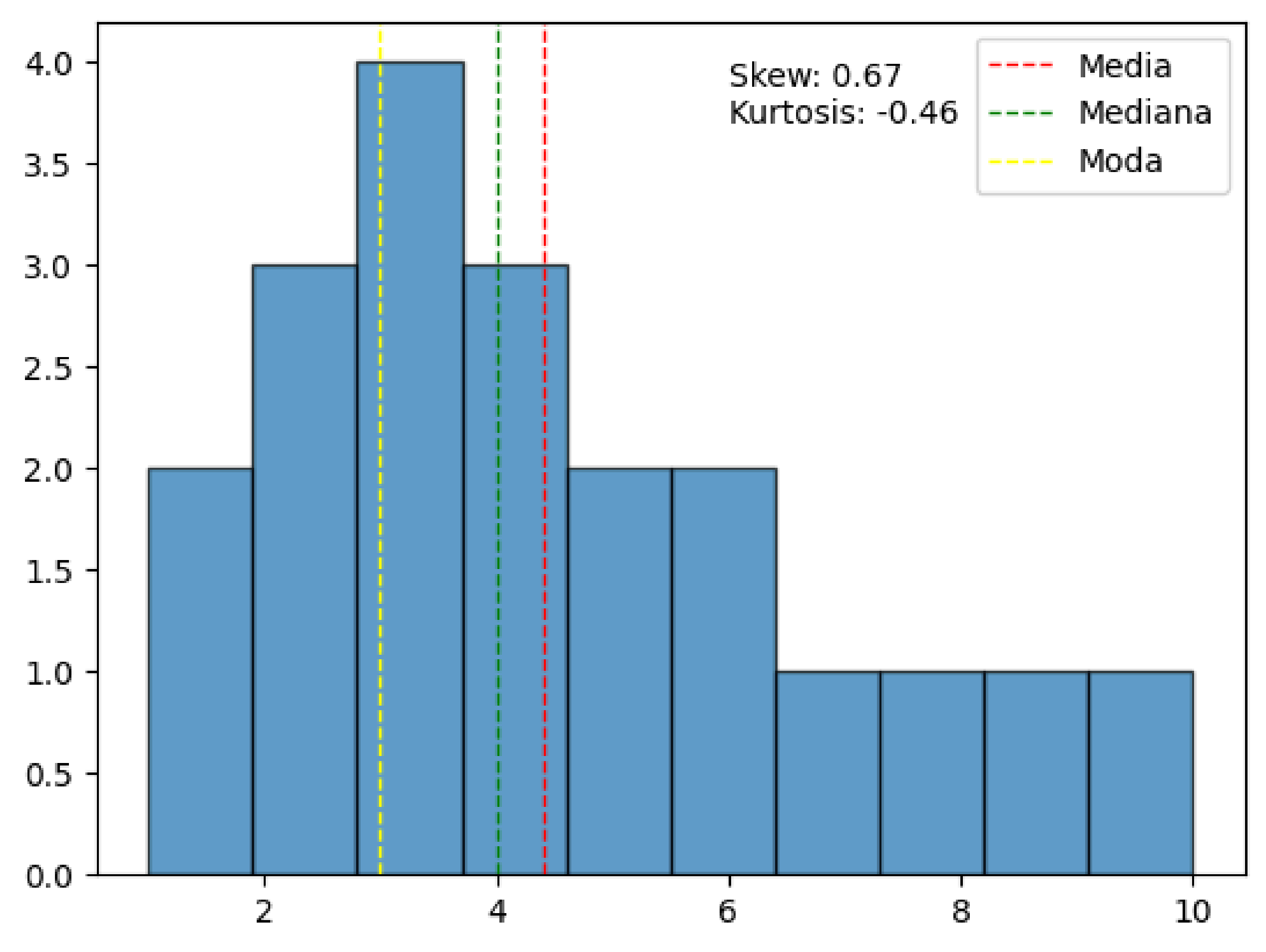
Dados podem ainda ser classificados de acordo com a forma da distribuição. As medidas de forma descrevem a forma da distribuição dos dados.

- **Assimetria**: Medida de desvio da simetria em relação à média.

```
# Assimetria com scipy.stats
assimetria = stats.skew(x)
```

> skew > 0: assimetria positiva
> skew < 0: assimetria negativa
> skew = 0: simétrica

saiba mais

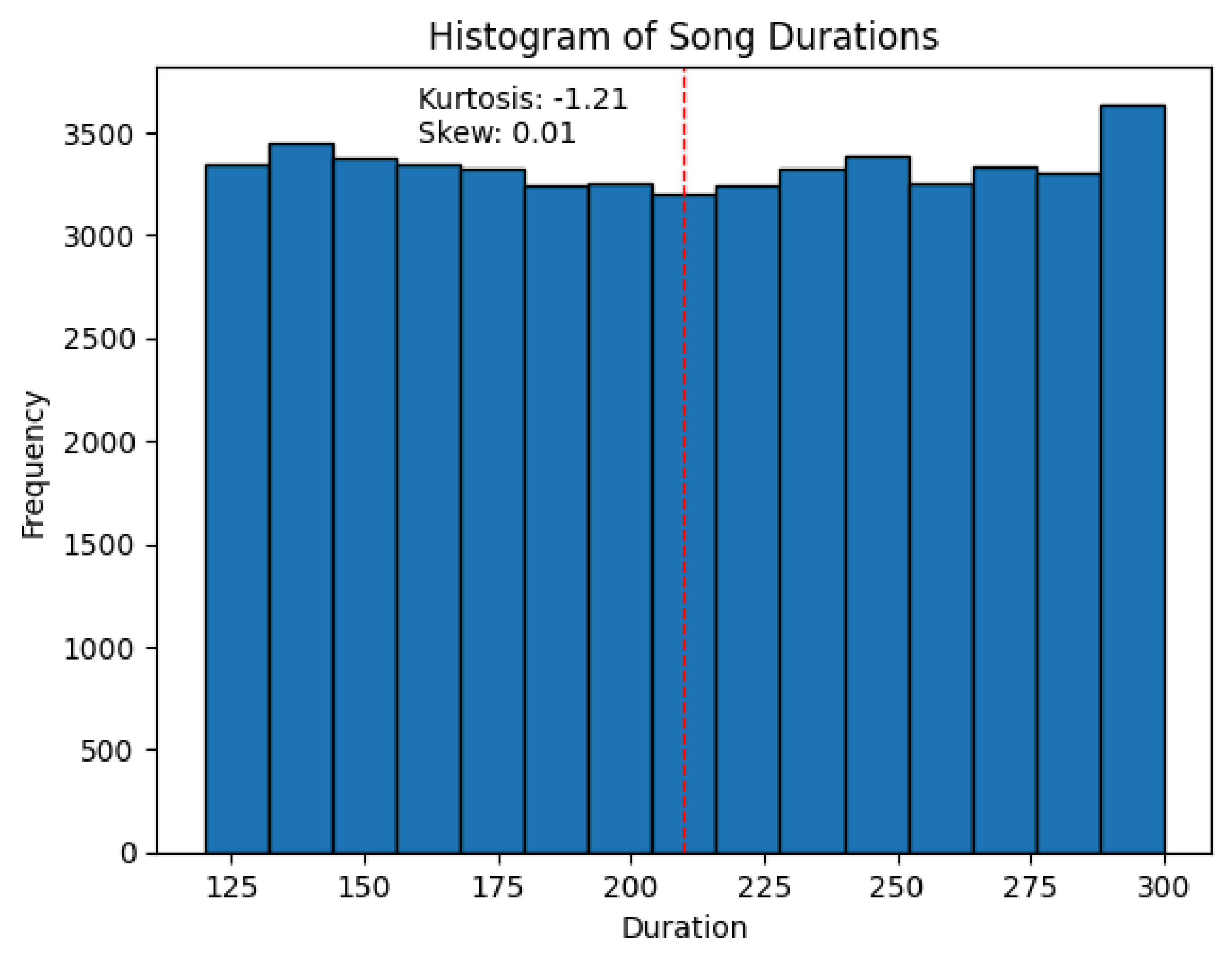


- **Curtose**: Medida de achatamento da distribuição.
    - Leptocúrtica: mais alta e fina
    - Mesocúrtica: normal
    - Platicúrtica: mais baixa e larga

```
# Curtose com scipy.stats
curtose = stats.kurtosis(x)
```

> Curtose > 0: Leptocúrtica
> Curtose = 0: Normal
> Curtose < 0: Platicúrtica

saiba mais



Medidas de Associação

Dados podem ser associados de várias maneiras. As medidas de associação descrevem a relação entre duas variáveis.

Sejam x e y duas variáveis aleatórias...

- **Covariância**: É a média dos produtos dos desvios de cada valor para suas respectivas médias.
  - População: $\sigma_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y)}{n}$
  - Amostra: $s_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n-1}$

```
# Covariância com numpy
cov = np.cov(x, y, ddof=0)
# Covariância com scipy.stats
cov = stats.cov(x, y, ddof=0)
```

> `ddof` é o grau de liberdade. Se `ddof=0`, a covariância é calculada para a população. Se `ddof=1`, a covariância é calculada para a amostra.

- **Covariância > 0:** associação positiva, ou seja, quando uma variável aumenta, a outra também aumenta.
- **Covariância < 0:** associação negativa, ou seja, quando uma variável aumenta, a outra diminui.
- **Covariância $\approx$ 0:** pouca ou nenhuma associação.

> Obs.: A covariância é uma medida de associação linear. Ela não é normalizada, o que dificulta a interpretação.

- **Correlação**: Medida de associação linear normalizada entre duas variáveis.
  - Coeficiente de correlação de Pearson: $r = \frac{s_{xy}}{s_x \times s_y}$,
  - onde s_x e s_y são os desvios padrão de x e y.
  - s_{xy} é a covariância entre x e y.

```python
# Correlação com numpy
r = np.corrcoef(x, y)
# Correlação de Pearson com scipy.stats
r, p = stats.pearsonr(x, y)
```

> `p` é o valor-p, que indica a probabilidade de obter uma correlação igual ou mais extrema, assumindo que a hipótese nula é verdadeira.

- Os valores da correlação variam de -1 a 1,
- o sinal indica a direção da associação,
- o módulo indica a força da associação.

Módulo de r	Interpretação
$[0,9-1]$	Correlação muito forte
$[0,7-0,9[$	Correlação forte
$[0,5-0,7[$	Correlação moderada
$[0,3-0,5[$	Correlação fraca
$[0-0,3[$	Correlação desprezível

Percentis e Quartis

- **Percentil**: Valor da variável maior que uma certa porcentagem dos dados.

```
import numpy as np
x = np.array([15, 22, 35, 4, 85])
v = np.percentile(x, 32)
print(v)
```

> `v` é o valor que é maior que 32% dos dados.

- **Quartil**: Valores de variáveis que dividem os dados em quatro partes iguais.

```
import numpy as np
x = np.array([15, 22, 35, 4, 85])
q1, q2, q3 = np.percentile(x, [25, 50, 75])
```

> `q1`, `q2` e `q3` são os valores que dividem os dados em quatro partes iguais.

Normalização de Dados

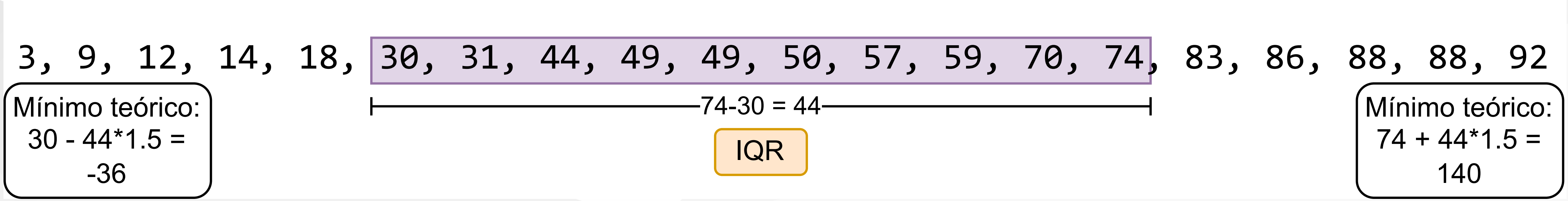
- **Padronização**: Transformação dos dados para ter média zero e desvio padrão um.
  - $z = \frac{x - \bar{x}}{s}$

```
import numpy as np
x = np.array([15, 22, 35, 4, 85])
z = (x - np.mean(x)) / np.std(x)
#usa a função zscore do scipy
z = stats.zscore(x)
```

- Padronização é útil para comparar variáveis com diferentes escalas.
- Padronização é útil para algoritmos de aprendizado de máquina sensíveis à escala.
- Padronização não remove outliers.

Outliers

- **Outliers**: Valores extremos que se desviam significativamente do restante dos dados.
  - Critério de Tukey: $Q_1 - 1.5 \times IQR$ e $Q_3 + 1.5 \times IQR$



> `IQR` do inglês *Interquartile Range* é a diferença entre o terceiro e o primeiro quartil.

saiba mais

- **Tratamento de Outliers**:
    - Remoção: remover os outliers do conjunto de dados.

```
import numpy as np
x = np.array([15, 22, 35, 4, 85])
q1, q3 = np.percentile(x, [25, 75])
iqr = q3 - q1
xa = x[(x >= q1 - 1.5*iqr) & (x <= q3 + 1.5*iqr)]
```

- Substituição: substituir os outliers por valores mais próximos.

```
xb = x.copy()
xb[(xb < q1 - 1.5*iqr)] = q1 - 1.5*iqr
xb[(xb > q3 + 1.5*iqr)] = q3 + 1.5*iqr
```

- Ignorar: ignorar os outliers e continuar a análise.
- Análise separada: analisar os outliers separadamente.

Conclusão

- A estatística descritiva é uma ferramenta essencial para a análise de dados.
- As medidas de posição descrevem o centro dos dados.
- As medidas de dispersão descrevem a variabilidade dos dados.
- As medidas de forma descrevem a forma da distribuição dos dados.
- As medidas de associação descrevem a relação entre duas variáveis.
- Percentis e quartis dividem os dados em partes iguais.
- Normalização de dados é útil para comparar variáveis com diferentes escalas.
- Outliers são valores extremos que se desviam significativamente do restante dos dados.