



中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

博士学位论文

拐点暴胀模型

作者姓名：_____徐武涛_____

指导教师：_____郭宗宽 研究员 中国科学院理论物理研究所_____

学位类别：_____理学博士_____

学科专业：_____理论物理_____

培养单位：_____中国科学院理论物理研究所_____

2019 年 12 月

Inflection Point Inflation

**A dissertation submitted to the
University of Chinese Academy of Sciences
in partial fulfillment of the requirement
for the degree of
Doctor of Philosophy
in Theoretical Physics**

By

Xu Wutao

Supervisor: Professor Guo Zongkuan

Institute of Theoretical Physics, Chinese Academy of Sciences

December, 2019

中国科学院大学 学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文是本人在导师的指导下独立进行研究工作所取得的成果。尽我所知，除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的研究成果。对论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明或致谢。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

作者签名：

日 期：

中国科学院大学 学位论文授权使用声明

本人完全了解并同意遵守中国科学院大学有关保存和使用学位论文的规定，即中国科学院大学有权保留送交学位论文的副本，允许该论文被查阅，可以按照学术研究公开原则和保护知识产权的原则公布该论文的全部或部分内容，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存、汇编本学位论文。

涉密及延迟公开的学位论文在解密或延迟期后适用本声明。

作者签名：

日 期：

导师签名：

日 期：

摘 要

待写

关键词：宇宙微波背景辐射，原初黑洞，二级引力波，慢滚参数

Abstract

write lately.

Keywords: cosmic microwave background, primordial black hole, second order gravitational wave, slow-roll parameters

目 录

第 1 章 引言	1
第 2 章 现代宇宙学	3
2.1 大爆炸宇宙学	3
2.2 暴胀宇宙学	6
2.2.1 视界疑难	6
2.2.2 平坦性疑难	7
2.2.3 大尺度结构疑难	7
2.3 暴胀模型	7
2.4 CMB 和标量扰动	11
2.5 小结	16
第 3 章 暴胀模型	17
3.1 拐点暴胀模型基本概念	17
3.2 双拐点暴胀模型	17
3.3 一些拐点暴胀模型的文章	18
3.3.1 带跑动动能项的多项式超势	18
3.3.2 建立拐点暴胀模型	20
3.4 预测	20
第 4 章 双拐点暴胀模型预言的引力波	21
4.1 超引力	21
4.2 原初黑洞	24
4.3 计算方法	26
4.4 引力波	26
4.4.1 基本方程	26
4.4.2 数值结果	29
4.4.3 功率谱为幂指数时的结果	30
第 5 章 总结与展望	31
附录 A 中国科学院大学学位论文撰写要求	33
A.1 论文无附录者无需附录部分	33
A.2 测试公式编号	33
参考文献	35

作者简历及攻读学位期间发表的学术论文与研究成果	39
致谢	41

图形列表

4.1	双拐点标量势能 $V(\phi)$	22
4.2	双拐点暴胀模型预测的标量扰动的原初功率谱 $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$	24
4.3	橙色曲线为双拐点模型预言的诱导引力波的能量谱。黑/红曲线分别为 LISA[1] 和太极 [2] 的期望灵敏度曲线。	30

表格列表

符号列表

字符

Symbol	Description	Unit
R	the gas constant	$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
C_v	specific heat capacity at constant volume	$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
C_p	specific heat capacity at constant pressure	$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
E	specific total energy	$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$
e	specific internal energy	$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$
h_T	specific total enthalpy	$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$
h	specific enthalpy	$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$
k	thermal conductivity	$\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-1}$
S_{ij}	deviatoric stress tensor	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
τ_{ij}	viscous stress tensor	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
δ_{ij}	Kronecker tensor	1
I_{ij}	identity tensor	1

算子

Symbol	Description
Δ	difference
∇	gradient operator
δ^\pm	upwind-biased interpolation scheme

缩写

CFD	Computational Fluid Dynamics
CFL	Courant-Friedrichs-Lewy
EOS	Equation of State

JWL	Jones-Wilkins-Lee
WENO	Weighted Essentially Non-oscillatory
ZND	Zel'dovich-von Neumann-Doering

第1章 引言

第 2 章 现代宇宙学

2.1 大爆炸宇宙学

自 1915 年爱因斯坦提出广义相对论以来，广义相对论便开始替代牛顿引力理论作为研究宇宙学的理论基础。时间-空间开始被当作一个整体进行研究，而爱因斯坦场方程是一切的起点

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \mathcal{R} g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (2.1)$$

其中 $G_{\mu\nu}$ 为爱因斯坦张量， $R_{\mu\nu}$ 和 \mathcal{R} 分别为里奇张量和里奇标量， $T_{\mu\nu}$ 为能量-动量张量。方程左边代表时空作为一个流形整体的几何性质，右边表示时空中物质的分布情况。爱因斯坦方程 (2.1) 说明时空中的物质分布和时空的几何性质之间是互为因果的关系。

为了描述宇宙的演化，首先要确定时空流形的度规以给出方程 (2.1) 左边的描述。基于当前观测，现代宇宙学普遍采用两条假设作为宇宙学原理：物质分布在宇宙学尺度上是 1) 均匀的；2)、各向同性。以此为出发点可以导出用于描述可观测宇宙的 **弗里德曼-勒梅特-罗伯逊-沃克 (FLRW) 度规**

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]. \quad (2.2)$$

$a(t)$ 为尺度因子， $K = -1, 0, +1$ 分别代表开放、平直、闭合宇宙。由 FLRW 度规得到里奇张量 R 为

$$\begin{aligned} R_{00} &= -3 \frac{\ddot{a}}{a} \\ R_{ij} &= g_{ij} \left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2H^2 + 2 \frac{K}{a^2} \right) \\ R_{0i} &= 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

里奇标量 \mathcal{R} 为

$$\mathcal{R} \equiv g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = 6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + H^2 + \frac{K}{a^2} \right). \quad (2.4)$$

故得到爱因斯坦张量

$$G^\mu_\nu = R^\mu_\nu - \frac{1}{2}\mathcal{R}\delta^\mu_\nu$$

$$= \begin{cases} -3(H^2 + \frac{K}{a^2}), & \mu = \nu = 0 \\ -(H^2 + 2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{K}{a^2}), & \mu = \nu = 1, 2, 3 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}. \quad (2.5)$$

再看方程右侧，根据宇宙在大尺度上是各向同性且均匀的假设，宇宙可以被近似为理想流体，具有下面的形式的能量-动量张量

$$T^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

其中 ρ 和 p 分别为能量密度和压强，且只为时间 t 的函数。根据爱因斯坦场方程组中的时间-时间分量和空间-空间分量分别得到如下方程

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{K}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho \quad (2.7)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2K}{a^2} = 4\pi G(\rho - p), \quad (2.8)$$

由上面两个方程可以得到两个独立的弗里德曼方程

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{K}{a^2} \quad (2.9)$$

$$\dot{H} + H^2 \equiv \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \quad (2.10)$$

由弗里德曼方程可以导出对应能量守恒的连续性方程

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + p). \quad (2.11)$$

从方程 (2.11) 可知宇宙中不同物质的能量密度随时间的演化关系取决于它所服从的物态方程

$$p = w\rho, \quad (2.12)$$

其中 w 是物态参数，代入连续性方程 (2.11) 可得

$$\rho a^{3(1+w)} = \text{constant}. \quad (2.13)$$

对物质和辐射，物态参数 w 分别为 0 和 $1/3$ ，因而能量密度 ρ 分别正比于 a^{-3} 和 a^{-4} 。可以看出，辐射的能量密度相比于物质衰减地更快。

(2.6) 中能量-动量张量 $T_{\mu\nu}$ 的来源为物质和辐射。若在场方程中加入宇宙学常数项 Λ ，则可以将其移到右侧写作能量-动量张量的一部分 $T_{\mu\nu}^{(vac)} \equiv -\Lambda/8\pi G$ ，并定义真空能量密度 $\rho_{vac} \equiv \Lambda/8\pi G$ 。对真空能，物态参数 $w = -1$ ，根据方程 (2.13) 真空能不随时间衰减。从这里开始分别以 $\rho_r, \rho_m, \rho_\Lambda$ 表示辐射、物质和真空能的能量密度。

由于宇宙中各组分的能量密度的衰减速率不一，使得占据宇宙能量密度主导地位的成分在宇宙演化的不同时期并不相同。根据各组分的衰减速率，宇宙将先后由辐射、物质和真空占据主导地位，决定宇宙的演化方式。在各个时期，尺度因子 $a(t)$ 随时间的变化关系为

$$a(t) \propto \begin{cases} t^{1/2} & \text{辐射为主, } w = 1/3 \\ t^{2/3} & \text{物质为主, } w = 0 \\ e^{Ht} & \text{真空为主, 哈勃参数为常数} \end{cases} \quad (2.14)$$

严格意义上宇宙的总能量密度 ρ_{tot} 应为真空、物质和辐射三部分的和

$$\rho_{tot} = \rho_\Lambda + \rho_m + \rho_r, \quad (2.15)$$

为了确定宇宙在三维空间上的几何性质（正曲率闭合空间、负曲率开放空间还是零曲率平直空间），定义临界能量密度

$$\rho_{cr} = \frac{3H^2}{8\pi G}, \quad (2.16)$$

于是弗里德曼方程 (2.9) 变成

$$\rho_{cr} \left(1 + \frac{K}{(Ha)^2} \right) = \rho_{tot}. \quad (2.17)$$

再引入无量纲参数 $\Omega_{tot} \equiv \rho_{tot}/\rho_{cr}$ ，空间曲率 K 可以表示成

$$\Omega - 1 = \frac{K}{(Ha)^2} \quad (2.18)$$

对宇宙微波背景辐射的观测支持 $K = 0$ ，故我们认为当前所处的宇宙在空间是平直的，没有曲率。从这里开始若无特别说明，均认为 $K = 0$ 。在平直宇宙中，各组分的密度比之和为一

$$\Omega_\Lambda + \Omega_m + \Omega_r = 1. \quad (2.19)$$

约定下标 A_0 表示物理量 A 在当前的值。于是在任意时刻，由弗里德曼方程 (2.9) 给出尺度因子 $a(t)$ 满足的方程

$$\frac{\dot{a}}{a} = H_0 \sqrt{\Omega_{\Lambda,0} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + \frac{\Omega_{r,0}}{a^4}} \quad (2.20)$$

2.2 暴胀宇宙学

大爆炸宇宙学能很好地描述宇宙的演化和大尺度结构的形成，但是也遇到了一些难以解释的疑难。例如平坦性疑难、视界疑难、磁单极子疑难等。

2.2.1 视界疑难

因为取光速 $c = 1$ ，所以在物理时间 dt 内，光子走过的固有距离为 $cdt = dt$ 。一阶近似下光子走过的共动距离为 $d\eta = dt/a(t)$ ，故截止到时刻 t 为止光子走过的最大共动距离为

$$\eta = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}. \quad (2.21)$$

对应的固有距离为

$$d_p(t) = a(t)\eta = a(t) \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}. \quad (2.22)$$

假设空间中有一点 P ，到时刻 t 为止能接收到的以光速传播的信号的最远发射源与 P 相距 $d_{\max} = d_p(t)$ 。因此 $d_p(t)$ 能够将宇宙分割为以 P 为中心的可观测和不可观测的两部分。若有另外一点 Q ，处于点 P 的过去光锥（以 P 为中心的可观测宇宙）外，那么 P 、 Q 之间不可能产生过任何相互作用，互相处于对方的因果联系区外。我们将决定因果联系和非因果联系区边界的临界距离 $d_p(t)$ 定义为**粒子视界**。

相对的光在时刻 t 出发所能到达的最远距离被定义为**事件视界**，把宇宙分隔为了 t 时刻信息可影响和不可影响的两部分。用 $d_e(t)$ 表示为

$$d_e(t) = a(t)\chi_e(t) = a(t) \int_t^\infty \frac{dt}{a}. \quad (2.23)$$

需要注意的是可影响不是立即也非只当未来无穷远时才能产生因果联系，而是取决于相对距离。

$$l_0 = a_0 \eta_0$$

$$l'_0 = (a_0 + \dot{a}_0 \Delta t)(\eta_0 - \Delta t/a_0) = l_0 + \dot{a}_0 \Delta t \eta_0 - \Delta t = l_0 + \Delta t(H_0 l_0 - 1)$$

在物质/辐射为主时期，粒子视界分别为

$$d_p(t) = \begin{cases} 2H_0^{-1} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{\frac{3}{2}} = 2H_0^{-1} (1+z)^{-\frac{3}{2}}, & \text{物质为主,} \\ H_0^{-1} \left(\frac{a}{a_0} \right)^2 = H_0^{-1} (1+z)^{-2}, & \text{辐射为主.} \end{cases} \quad (2.24)$$

现在观测到的宇宙尺寸为 $d_p(t_0) = 2H_0^{-1}$ ，在红移 $z < z_{eq}$ （即物质为主时期）时，目前的可观测宇宙的尺寸要乘以因子 $(1+z)^{-1}$ ，而当时的粒子视界多了因子 $(1+z)^{-3/2}$ 。因此那时存在 $(1+z)^{3/2}$ 个因果逻辑区，互相之间还不能交换信息。并且越早期红移越大，目前的可观测宇宙会被分割为更多的因果逻辑区。宇宙缘何能在大尺度上实现各向同性的问题就越严重。这就是**视界疑难**。

2.2.2 平坦性疑难

上一节根据目前的实验观测我们假设代表空间曲率的 $K = 0$ ，认为我们所处的宇宙空间是平坦的。但细究之下，在大爆炸宇宙学中，简单的假设 $K = 0$ 会带来精细调节的问题。

曲率密度 $\Omega_K(z) = 1 - \Omega_{tot} = -K/(Ha)^2 = \Omega_{K0}(1+z)^2/E^2(z)$ 。因此宇宙永远处于**平坦、开放、封闭**三种可能性之一，无法互相转换。物质为主时期， $E^2(z) = (H/H_0)^2 = (1+z)^3$ ，故 $\Omega_K \sim \Omega_{K0}/(1+z)$ 。辐射为主时期， $E^2(z) = (1+z)^4$ ，故 $\Omega_K \sim \Omega_{K0}/(1+z)^2$ 。不论哪个时期，都表明越接近宇宙早期，曲率密度越接近 1。例如，在物质-辐射相等时， $\Omega_K \sim 10^{-4}\Omega_{K0}$ ；原初核合成时期， $\Omega_K \sim 10^{-16}\Omega_{K0}$ 。然而大爆炸理论无法回答曲率密度为何会如此极端的靠近 0，也无法在理论上给出 $K = 0$ 。这就是**平坦性疑难**。

2.2.3 大尺度结构疑难

在最后散射面上观测到的各向异性，其幅度较小且接近标度不变。在大爆炸到最后散射面形成的这段时间内，标准宇宙学难以解释这些涨落是如何能扩散到这样大的尺度上。

2.3 暴胀模型

由于共动距离不随时间改变，在共动坐标系下讨论**（共动）粒子视界**会使视界问题变得更简单。若尺度因子 $a(t)$ 是时间 t 的幂函数，则在当前时刻 t_0 和过去

某一时刻 t_1 的因果联系区的共动尺度比为

$$\frac{\chi_{p0}}{\chi_{p1}} \sim \frac{t_0}{t_1} \frac{a_1}{a_0} \sim \frac{\dot{a}_1}{\dot{a}_0}. \quad (2.25)$$

平坦性疑难中，给大爆炸宇宙学造成困难的地方来自于比值

$$\frac{\Omega_0 - 1}{\Omega_1 - 1} = \frac{(Ha)_1^2}{(Ha)_0^2} \sim \left(\frac{\dot{a}_1}{\dot{a}_0} \right)^2. \quad (2.26)$$

在这几个疑难中，都出现了比值 \dot{a}_1/\dot{a}_0 。当强能量条件满足时 $\rho + 3p > 0$ ，根据加速度方程 (2.10) 尺度因子的二阶导数小于零，因此宇宙处于减速膨胀的状态。故越早期，比值 \dot{a}_1/\dot{a}_0 越大，问题越严重。如果要求 $\dot{a}_1/\dot{a}_0 \leq 1$ ，那么只能假设 \dot{a} 经历了先增大、后渐小的过程。引入的这一段加速膨胀的过程是必要的，至于是否充分取决于实现这一条件的特定模型。根据加速度方程，普通物质的存在提供了引力使得宇宙的膨胀速度减小。那么为了实现加速膨胀，必须假设宇宙中存在别的物质，使得引力表现为一种“排斥力”。

我们先给出暴涨的定义：**暴涨**是当引力表现为一种排斥力使得宇宙处于加速膨胀的一个阶段。

暴涨能够解释大爆炸的起源。因为加速膨胀，原本处于因果联系区内的一个小区域会在短时间内膨胀地非常大。更进一步，暴涨甚至能从一个均匀的小区域中产生整个可观测宇宙，即便这一区域外相当非均匀。原因在于，在一个加速膨胀的宇宙中，总是存在有限大的事件视界

$$\begin{aligned} d_e(t) &= a(t) \int_t^{t_{\max}} \frac{dt}{a} = a(t) \int_{a(t)}^{a_{\max}} \frac{da}{\dot{a}a} \\ &= \sqrt{\frac{3}{8\pi G}} a(t) \int_{a(t)}^{a_{\max}} \frac{da}{a \sqrt{a^{-(1+3w)} - \frac{3K}{8\pi G}}} \end{aligned} \quad (2.27)$$

因为 $(1 + 3w) < 0$ ，即使 $a_{\max} \rightarrow \infty$ ， $d_e(t)$ 也会收敛到有限值。如此一来，以 p 为中心， $d_e(t)$ 为半径的区域 $V_1(t) = \{q \mid |q - p| < d_e(t)\}$ 其未来的演化永远不会受到来自于半径为 $2d_e(t)$ 的同心区域 $V_2(t)$ 外的影响。能对内部产生作用的只有半径在 $d_e(t)$ 到 $2d_e(t)$ 的部分。假设在 $t = t_i$ 时 $V_2(t_i)$ 内部的物质分布均匀且各向同性，那么到暴涨结束时， $V_1(t_f)$ 内始终保持均匀和各向同性。 $V_1(t)$ 区域的物理尺度在暴涨结束时为

$$d_e(t_f) = d_e(t_i) \frac{a_f}{a_i}. \quad (2.28)$$

在加速膨胀宇宙中，粒子视界可以作如下近似

$$d_p(t) = a(t) \int_{t_i}^t \frac{dt}{a} = a(t) \int_{a_i}^a \frac{da}{\dot{a}} \sim \frac{a(t)}{a_i} d_e(t_i), \quad (2.29)$$

因为积分的主要贡献来自于 $a \sim a_i$ 的部分。在暴胀结束时， $d_p(t) \sim d_e(t)$ ，说明均匀区域的大小与粒子视界的尺度相当。不同于一个均匀的宇宙包含很多不同的因果关联区，我们可以从一个很小的均匀的因果关联区出发，通过暴胀使得它的大小以爆炸似的方式变大，同时保持了均匀性。

下一个问题是**均匀性**的条件是否可以放开，即不要求暴胀开始时因果关联区内部物质分布的均匀性。那么我们从一个高度非均匀的因果关联区出发，计算一下暴胀结束时的扰动大小。假设初始的能相对量密度扰动在 $\sim H_i^{-1}$ 的尺度上为 $\mathcal{O}(1)$ 的量级，

$$\left(\frac{\delta \varepsilon}{\varepsilon} \right)_{t_i} \sim \frac{1}{\varepsilon} \frac{|\nabla \varepsilon|}{a_i} H_i^{-1} = \frac{|\nabla \varepsilon|}{\varepsilon} \frac{1}{\dot{a}_i} \sim \mathcal{O}(1) \quad (2.30)$$

这里 ∇ 是在共动坐标系中对空间的导数。当 $t \gg t_i$ 时，哈勃半径 $H^{-1}(t)$ 内的能量密度扰动近似为

$$\left(\frac{\delta \varepsilon}{\varepsilon} \right)_t \sim \frac{1}{\varepsilon} \frac{|\nabla \varepsilon|}{a(t)} H^{-1}(t) \sim \mathcal{O}(1) \frac{\dot{a}_i}{\dot{a}(t)}, \quad (2.31)$$

这里假设了 $|\nabla \varepsilon|/\varepsilon$ 不会在暴胀期间产生明显变化。这一假设的合理性可以来自于对标量扰动在大于 H^{-1} 的尺度上的行为的分析。(2.31) 说明当宇宙处于加速膨胀过程中时，在半径为 H^{-1} 的区域内，相对能量密度扰动会变得越来越小。因而宇宙变得越来越平坦。

总结起来，如今我们观测到的均匀且各向同性的宇宙，可以有一个非均匀的起源，只要存在暴胀就可以将非均匀性给抹除。

同时，暴胀也能解决平坦性问题。从 (2.31) 可以发现，如果要求避免大的密度扰动重新进入视界 ($\sim H_0^{-1}$) 使得宇宙的均匀性假设被破坏，那么必须假设暴胀开始时候的膨胀率远小于今天的膨胀率，即 $\dot{a}_i/\dot{a}_0 \ll 1$ 。再精确一点，可以根据 CMB 的观测要求在当今的视界尺度上，能量密度扰动的方差不应当超过 10^{-5} 。只要满足条件 $\dot{a}_i/\dot{a}_0 \ll 10^{-5}$ ，方程 (2.31) 即可被满足，暴胀时的非均匀性足够被抹除。(2.26) 可以改写为

$$\Omega_0 = 1 + (\Omega_i - 1) \left(\frac{\dot{a}_i}{\dot{a}_0} \right)^2, \quad (2.32)$$

可以看出只要满足条件 $|\Omega_i - 1| \sim \mathcal{O}(1)$, 就能使得

$$\Omega_0 = 1 \quad (2.33)$$

在相当高的精度上成立。还可以从另一个角度来理解, 在减速膨胀的宇宙中, 只当 $t \rightarrow 0$ 时会有 $\Omega(t) \rightarrow 1$ 。而在加速膨胀的宇宙中, 是当 $t \rightarrow \infty$ 时才有 $\Omega(t) \rightarrow 1$ 。因而只要在减速膨胀阶段之前存在一个加速膨胀阶段, 困扰我们的精细调节问题便不复存在。

一般我们通过标量场来实现一个强能量条件被破坏的模型, 相应的场被称为暴胀子。带有势能 $V(\varphi)$ 的标量场 φ 的能动量张量为

$$T^\alpha_\beta = \varphi^{;\alpha} \varphi_{;\beta} - \frac{1}{2} (\varphi^{;\gamma} \varphi_{;\gamma} - V(\varphi)) \delta^\alpha_\beta \quad (2.34)$$

根据 $T^\alpha_{\beta;\alpha} = 0$ 可得

$$\varphi^{;\alpha}_{;\alpha} + \frac{\partial V(\varphi)}{\partial \varphi} = 0. \quad (2.35)$$

若 $\varphi^{;\gamma} \varphi_{;\gamma} > 0$, 且定义变量

$$\rho \equiv \frac{1}{2} \varphi^{;\gamma} \varphi_{;\gamma} + V(\varphi), \quad p \equiv \frac{1}{2} \varphi^{;\gamma} \varphi_{;\gamma} - V(\varphi), \quad u^\alpha \equiv \varphi^{;\alpha} / \sqrt{\varphi^{;\gamma} \varphi_{;\gamma}}, \quad (2.36)$$

则能动量张量 T^α_β 可以改写为理想流体的能动量张量形式,

$$T^\alpha_\beta = (\rho + p) u^\alpha u_\beta - p \delta^\alpha_\beta. \quad (2.37)$$

特别当 φ 场是均匀场, 即 $\partial \varphi / \partial x^i = 0$ 时场的能量密度为

$$\rho = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + V(\varphi) \quad (2.38)$$

以及压强

$$p = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - V(\varphi) \quad (2.39)$$

相应的连续性方程 (2.11) 以及弗里德曼方程 (2.9) 改写为

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V_{,\varphi} = 0 \quad (2.40)$$

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + V(\varphi) \right) \quad (2.41)$$

约定约化普朗克质量 $M_p \equiv \frac{1}{\sqrt{8\pi G}} = 1$ 。消去标量场 ϕ 的二阶导数，得到 Hamilton-Jacobi 方程

$$[H'(\phi)]^2 - \frac{3}{2}H^2 = -\frac{1}{2}V(\phi) \quad (2.42)$$

$$\dot{\phi} = -2H'(\phi) \quad (2.43)$$

由 (2.43) 可知 $\dot{H} = -\dot{\phi}^2/2 \leq 0$ ，故物理哈勃半径 $1/H$ 随时间增大。同时尺度因子 $a(t)$ 加速增大，故共动哈勃半径 $1/(aH)$ 不断随时间减小。方程 (2.42) 有一个很好的性质，与任意一个方程解的线性扰动都会以指数的速度趋于零，因此很容易进行数值求解。

2.4 CMB 和标量扰动

宇宙学原理假设其中之一是宇宙在大尺度结构上是均匀且各向同性。但真实情况是存在一个一阶扰动修正，扰动可以非均匀、各向异性。带有扰动的弗里德曼平坦宇宙的度规为

$$ds^2 = [{}^{(0)}g_{\alpha\beta} + \delta g_{\alpha\beta}(x^\gamma)] dx^\alpha dx^\beta, \quad (2.44)$$

其中 $|\delta g_{\alpha\beta}| \ll |{}^{(0)}g_{\alpha\beta}|$ 。采用共动时间时，背景度规为

$${}^{(0)}g_{\alpha\beta} = a^2(\eta)\text{diag}(1, -1, -1, -1). \quad (2.45)$$

度规扰动 $\delta g_{\alpha\beta}$ 可以分解为三种类型：**标量扰动**、**矢量扰动**和**张量扰动**。三种扰动独立演化，互不影响。扰动 $\delta g_{\alpha\beta}$ 的来源之一，是从物理角度，仅仅因为坐标变换导致的扰动不是真实的扰动。而在坐标变换下的不变量才是反映真实扰动的物理量，这样的不变量称为**规范不变量**。以时空为变量的无穷小函数 $\xi^\alpha(x)$ ，可以用来定义一个无穷小坐标变换。

$$x^\alpha \rightarrow \tilde{x}^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha. \quad (2.46)$$

4-标量 $q(x^\rho)$ 的扰动 $\delta q = q(x^\rho) - {}^{(0)}q(x^\rho)$ 按如下方式变换

$$\delta q \rightarrow \delta \tilde{q} = \delta q - {}^{(0)}q_{,\alpha}\xi^\alpha. \quad (2.47)$$

同理可知 4-矢量扰动和 4-张量扰动的变换规则为

$$\delta u_\alpha \rightarrow \delta \tilde{u}_\alpha = \delta u_\alpha - {}^{(0)}u_{\alpha,\gamma}\xi^\gamma - {}^{(0)}u_\gamma\xi_{,\alpha}^\gamma, \quad (2.48)$$

$$\delta g_{\alpha\beta} \rightarrow \delta \tilde{g}_{\alpha\beta} = \delta g_{\alpha\beta} - {}^{(0)}g_{\alpha\beta,\gamma}\xi^\gamma - {}^{(0)}g_{\gamma\beta}\xi_{,\alpha}^\gamma - {}^{(0)}g_{\alpha\gamma}\xi_{,\beta}^\gamma. \quad (2.49)$$

考虑标量扰动时，度规的最一般形式为

$$g_{\alpha\beta} = a^2(\eta) \begin{pmatrix} 1 + 2\phi & B_{,j} \\ B_{,i} & -(1 - 2\psi)\delta_{ij} + E_{,ij} \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

其中 ϕ, ψ, B, E 为 3-标量。根据扰动的规范变换，可得这几个标量函数相应的变换规则。通过观察发现有这些标量函数的线性组合可得的最简单的规范不变量有两个，分别为

$$\Phi \equiv \phi - \frac{1}{a}[a(B - E')]' \quad (2.51)$$

$$\Psi \equiv \psi + \frac{a'}{a}(B - E'). \quad (2.52)$$

容易验证 Φ 和 Ψ 在坐标变换下不变，包含了真实的扰动信息。

同理可得，矢量扰动和张量扰动的规范不变量为 $\bar{V}_i = S_i - F'_i$ 和 h_{ij} ，且物理自由度均为 2。因为存在两个非物理自由度，因此可以引入两个约束条件以固定其中两个变量，从而简化方程的求解。通常采用**纵向规范**和**同步规范**。

同步规范： $\phi = B = 0$ 。度规的扰动形式由 ϕ, E 两个标量函数刻画，

$$ds^2 = a^2 [-((1 - 2\phi)\delta_{ij} - 2E_{,ij})dx^i dx^j]. \quad (2.53)$$

由式 (2.51) 可知在同步规范下，规范不变量与扰动之间的关系为

$$\Phi = \frac{1}{a}[aE']' \quad (2.54)$$

$$\Psi = \phi - \frac{a'}{a}E'. \quad (2.55)$$

纵向规范： $B = E = 0$ 。度规的扰动形式由 ϕ, ψ 两个标量函数刻画，

$$ds^2 = a^2 [(1 + 2\phi)d\eta^2 - (1 - 2\psi)\delta_{ij}dx^i dx^j]. \quad (2.56)$$

由式 (2.51) 可知在纵向规范下，规范不变量与扰动之间的关系为

$$\Phi = \phi \quad (2.57)$$

$$\Psi = \psi. \quad (2.58)$$

纵向规范下规范不变量与扰动之间的简单关系，使得有关不变量的复杂计算可以在特定的规范下完成。

爱因斯坦场方程是一组非线性方程，在数学上难以求解。当在均匀且各向同性的基础上考虑扰动时，一般也只考虑到方程的线性阶。幸运的是，即便只是精确到线性阶，也足以描述能量密度扰动的非线性演化。

根据场方程，扰动所满足的规范不变场方程为

$$\overline{\delta G}^\alpha_\beta = 8\pi G \overline{\delta T}^\alpha_\beta. \quad (2.59)$$

$\overline{\delta T}^\alpha_\beta$ 可以分解为标量、矢量、张量三个互不影响的部分。在 FRW 度规的背景下，直接计算 $\overline{\delta G}^\alpha_\beta$ 得到各个扰动分别满足的方程组

标量扰动：

$$\Delta\Phi - 3\mathcal{H}(\Phi' + \mathcal{H}\Psi) = 4\pi G a^2 \overline{\delta T}^0_0, \quad (2.60)$$

$$(\Phi' + \mathcal{H}\Phi)_{,i} = 4\pi G a^2 \overline{\delta T}^0_i, \quad (2.61)$$

$$\left[\Phi'' + \mathcal{H}(2\Psi + \Phi)' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi + \frac{1}{2}\Delta(\Phi - \Psi) \right] \delta_{ij} - \frac{1}{2}((\Phi - \Psi))_{,ij} = -4\pi G a^2 \overline{\delta T}^i_j. \quad (2.62)$$

矢量扰动：

$$\Delta\bar{V}_i = 16\pi G a^2 \overline{\delta T}^0_{i(V)}, \quad (2.63)$$

$$(\bar{V}_{i,j} + \bar{V}_{j,i})' + 2\mathcal{H}(\bar{V}_{i,j} + \bar{V}_{j,i}) = -16\pi G a^2 \overline{\delta T}^i_{j(V)}. \quad (2.64)$$

张量扰动：

$$h''_{ij} + 2\mathcal{H}h'_{ij} - \Delta h_{ij} = 16\pi G a^2 \overline{\delta T}^i_{j(T)}. \quad (2.65)$$

这些方程描述了各种类型的扰动如何随时间演化的过程。物质在宇宙中的分布可以用理想流体来近似描述，而在这种情况下得到的矢量扰动的解正比于尺度因子的负二次方，因此矢量类型的度规扰动会衰减的非常迅速以至于在通常情况下都可以将其忽略。张量扰动正是所谓的引力波，此处暂且把焦点放在标量扰动上，后文关于第二个工作的内容中会更加详细地讨论二阶张量扰动。

根据理想流体的能动量张量 (2.37)，容易得到相应的规范不变量为

$$\overline{\delta T}^0_0 = \overline{\delta \varepsilon} \quad (2.66)$$

$$\overline{\delta T}^0_i = \frac{1}{a}(\varepsilon_0 + p_0)(\overline{\delta u}_{\parallel i} + \overline{\delta u}_{\perp i}) \quad (2.67)$$

$$\overline{\delta T}^i_j = -\overline{\delta p} \delta^i_j. \quad (2.68)$$

$\overline{\delta\varepsilon}$ 、 $\overline{\delta u_{ii}}$ 、 $\overline{\delta p}$ 分别是能量密度扰动、无旋速度扰动、压强扰动对应的规范不变量。标量扰动的贡献只来自于这几项，正比于速度扰动的无源分量 $\overline{\delta u_{Li}}$ 的项只对矢量扰动产生贡献。

当 $i \neq j$ 时， $\delta T_j^i = 0$ ，方程 (2.62) 约化为

$$(\Phi - \Psi)_{,ij} = 0 \quad (i \neq j). \quad (2.69)$$

有唯一解 $\Phi = \Psi$ 。从而标量扰动满足的方程组进一步被化简为

$$\Delta\Phi - 3\mathcal{H}(\Phi' + \mathcal{H}\Phi) = 4\pi G a^2 \overline{\delta\varepsilon}, \quad (2.70)$$

$$(a\Phi)'_{,i} = 4\pi G a^2 (\varepsilon_0 + p_0) \overline{\delta u_{ii}}, \quad (2.71)$$

$$\Phi'' + 3\mathcal{H}\Phi' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi = 4\pi G a^2 \overline{\delta p}. \quad (2.72)$$

在非膨胀宇宙中 $\mathcal{H} = 0$ ，方程 (2.70) 与引力势满足的泊松方程相同。在膨胀宇宙中，方程 (2.70) 左边的第二、三项在视界内会被压低一个因子 $\sim \lambda/H^{-1}$ ，可以忽略。故而方程 (2.70) 可以看作是泊松方程的推广，而度规的一阶标量扰动 Φ 可以是牛顿引力势在广义相对论下的推广。

从热力学可知，压强作为内能和熵的函数 $p(\varepsilon, S)$ ，其涨落的表达式为

$$\overline{\delta p} = c_s^2 \overline{\delta\varepsilon} + \tau \delta S, \quad (2.73)$$

其中 $c_s^2 \equiv (\partial p / \partial \varepsilon)_S$ 为声速， $\tau \equiv (\partial p / \partial S)_\varepsilon$ 。将上式带入方程 (2.70) 和 (2.72) 可得关于引力势的闭方程

$$\Phi'' + 3(1 + c_s^2)\mathcal{H}\Phi' - c_s^2 \Delta\Phi + (2\mathcal{H}' + (1 + 3c_s^2)\mathcal{H}^2)\Phi = 4\pi G a^2 \tau \delta S. \quad (2.74)$$

针对上述方程，共有 8 种情况需要讨论。是否为绝热扰动 ($\delta S = 0$)，是否为极端相对论物质，以及长短波极限。即便在绝热扰动下，上述方程也无法对任意物态方程 $p(\varepsilon)$ 给出解析解，不过针对长波及短波极限能够给出相应的渐进解。这里仅以极端相对论物质的绝热扰动为例略加讨论。

物态方程为

$$p = w\varepsilon, \quad (2.75)$$

因此声速为

$$c_s^2 = w, \quad (2.76)$$

尺度因子为

$$a \propto \eta^{2/(1+3w)}, \quad (2.77)$$

结合上面两式，方程 (2.74) 在傅里叶空间中变为

$$\Phi_k'' + \frac{6(1+w)}{1+3w} \frac{1}{\eta} \Phi_k' + wk^2 \Phi_k = 0. \quad (2.78)$$

方程有解析解

$$\Phi_k = \eta^{-\nu} [C_1 J_\nu(\sqrt{w}k\eta) + C_2 Y_\nu(\sqrt{w}k\eta)], \quad \nu \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{5+3w}{1+3w} \right), \quad (2.79)$$

其中 J_ν 和 Y_ν 为 ν 阶贝塞尔函数，分别为扰动 Φ 的非衰减模式和衰减模式。

联合 (2.70) 和方程

$${}^{(0)}G_0^0 = 8\pi G^{(0)}T_0^0, \quad (2.80)$$

得到能量密度的相对扰动

$$\delta \equiv \frac{\overline{\delta\varepsilon}}{\varepsilon_0} = \frac{k^2\Phi - 3\mathcal{H}(\Phi' + \mathcal{H}\Phi)}{\frac{3}{2}\mathcal{H}^2}. \quad (2.81)$$

在长波极限下， $\sqrt{w}k\eta \ll 1$ ， δ 及 Φ 的非衰减模式均趋近于常数，且

$$\overline{\delta\varepsilon}/\varepsilon_0 \simeq -2\Phi. \quad (2.82)$$

说明不论是度规扰动还是能量密度的相对扰动，在离开视界之后都会趋近于稳定。

在短波极限下， $\sqrt{w}k\eta \gg 1$ ，即对尺度小于 Jeans 波长 ($\lambda_J \sim c_s t$) 的扰动模式而言，其行为更像是振幅随时间衰减的声波

$$\Phi_k \propto \eta^{-\nu-\frac{1}{2}} \exp(\pm i\sqrt{w}k\eta). \quad (2.83)$$

特别是在辐射为主时期， $w = 1/3$ 以及 $\nu = 1/3$ ，贝塞尔函数有更简单的表达式使得

$$\Phi_k = \frac{1}{x^2} \left[C_1 \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right) + C_2 \left(\frac{\cos x}{x} + \sin x \right) \right]. \quad (2.84)$$

其中 $x \equiv k\eta/\sqrt{3}$ 。对应的相对能量密度扰动为

$$\frac{\overline{\delta\varepsilon}}{\varepsilon_0} = 2C_1 \left[\left(\frac{2-x^2}{x^2} \right) \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right) - \frac{\sin x}{x} \right] \quad (2.85)$$

$$+ 4C_2 \left[\left(\frac{1-x^2}{x^2} \left(\frac{\cos x}{x} + \sin x \right) + \frac{\sin x}{2} \right) \right]. \quad (2.86)$$

2.5 小结

这里是小结

第 3 章 暴胀模型

3.1 拐点暴胀模型基本概念

3.2 双拐点暴胀模型

拐点暴胀通常指这样的暴胀模型，存在场值 $\phi = \phi_0$ （拐点）使得势能在该处的二阶导数为零

$$V''(\phi_0) = 0 \quad (3.1)$$

势能的一般形式为

$$V(\phi) = V_0 + a(\phi - \phi_0) + \frac{c}{6}(\phi - \phi_0)^3 \quad (3.2)$$

$$V_0 \equiv V(\phi_0), a \equiv V'(\phi_0), c \equiv V'''(\phi_0) \quad (3.3)$$

高阶项 ($n \geq 4$) 被截断。相应的慢滚参数为

$$\epsilon = \frac{M_p}{2} \left(\frac{V'^2}{V} \right), \eta = M_p^2 \left(\frac{V''}{V} \right), \xi^2 = M_p^4 \left(\frac{V'V'''}{V^2} \right) \quad (3.4)$$

接下来通过 WMAP、Planck 等实验观测到的标量扰动大小 \mathcal{P}_R 和标量谱指标 n_s 来确定系数 a 和 c 。令暴胀结束时的场值为 ϕ_e ，那时有 $\epsilon \sim 1$ 。则对应 $\phi \sim \phi_e$ 的 e-folding 数为

$$\mathcal{N} = \frac{V_0}{M_p^2} \sqrt{\frac{2}{ac}} [F_0(\phi_e) - F_0(\phi)] \quad (3.5)$$

$$F_0(z) = \cot^{-1} \left(\sqrt{\frac{c}{2a}} (z - \phi_0) \right) \quad (3.6)$$

如果将慢滚参数在极值处的平方根定义为 X ， \mathcal{N} 中涉及 ϕ 的部分定义为 Y ，那么可以将各慢滚参数及可观测量用统一用 X, Y 进行描述。

$$\epsilon = \frac{2V_0^2}{c^2 M_p^6 \mathcal{N}^4} \left(\frac{Y}{X} \right)^4 \quad (3.7)$$

$$\eta = -\frac{2}{\mathcal{N}} \frac{Y}{S} \left(\sqrt{1-X} \cos Y - \sqrt{X} \sin Y \right) \quad (3.8)$$

$$\xi^2 = \frac{2}{\mathcal{N}^2} \left(\frac{Y}{X} \right)^2 \quad (3.9)$$

在暴胀期间, $\epsilon \ll 1$, 导致 $X = S\sqrt{\epsilon} \leq \sqrt{\epsilon} \ll 1$, 故而有 $S \approx \sin Y$ 。相应的功率谱, 标量谱指标及其跑动为

$$\mathcal{P}^{1/2} \equiv \frac{1}{\sqrt{24\pi^2}} \frac{V_0^{1/2}}{\epsilon^{1/2} M_p^2} \approx \frac{V_0^{1/2}}{2\sqrt{6}\pi M_p^2 X} \sin^2 Y \quad (3.10)$$

$$n_s \equiv 1 + 2\eta - 6\epsilon \approx 1 - \frac{4}{\mathcal{N}} Y \cot Y \quad (3.11)$$

$$(3.12)$$

3.3 一些拐点暴胀模型的文章

这里我们讨论如何在超引力中构建一个拐点暴胀模型。基于超引力构建的大多数旧暴胀模型 [3–5] 都遇到了 η 问题 [6]: F-term 势能正比于指数因子 $e^{|\phi|^2}$, 使得慢滚参数 η 不满足慢滚条件。有多种方法可以 η 问题 [7–10]。其中一种办法是将平移对称性引入 Kähler 势中 $K(\phi - \phi^\dagger)$, 这样暴胀子不会出现在 Kähler 势中, 消失的指数因子保证了势能的平坦性。这种情形下, 能够得到幂指数势能 $V(\phi) \propto \phi^n$ 的混沌暴胀。

有作者 [11–13] 将手征场 ϕ 的类 Nambu-Goldstone 平移对称性推广到了一般形式 $\phi^n \rightarrow \phi^n + C$, 使得 Kähler 势是 $(\phi^n - \phi^\dagger)$ 的函数。为了获得合理的势能形式, 应当在 Kähler 势和超势中分别加入一个小的 shift 对称性破缺项 $\kappa|\phi|^2$ 和 $\lambda\phi^m X$, 此处有 $\kappa, \lambda \ll 1$ 以及外场 X 。这样可以获得幂指数为分数的标量势能 $V(\phi) \propto \phi^{m/n}$, 标量谱指标 n_s 以及张标比 r 近似为 $n_s = 1 - (1 + \frac{m}{n})\frac{1}{\mathcal{N}}$ 和 $\frac{8m}{n}\frac{1}{\mathcal{N}}$ [12]。由于模型中动能项的系数是场依赖的: $(\kappa + n^2|\phi|^{2n-2})\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^\dagger$, 这就是所谓的跑动动能项暴胀。

在最小超对称标准模型的框架下, 通过规范不变的平坦方向 *udd* 或 *LLe* 首次构造出了拐点暴胀模型 [14], 并得到了发展 [15–18]。在 [19] 中, 作者用单手征超场构造出了一个拐点暴胀模型, 与 Planck 2015 年的结果相一致。在暴胀结束后, 该模型进入一个非超对称德-西特真空, 能够用于解释宇宙近期的加速膨胀。

3.3.1 带跑动动能项的多项式超势

Kähler 势在手征超场 ϕ 的广义平移对称性变换下保持不变:

$$\phi^n \rightarrow \phi^n + C, \quad (3.13)$$

因此，它必然是 $i\chi \equiv (\phi^n - \phi^{n\dagger})$ 的函数：

$$K = \sum_{l=1} \frac{c_l}{l} (\phi^n - \phi^{n\dagger})^l = ic_1(\phi^n - \phi^{n\dagger}) - \frac{1}{2}(\phi^n - \phi^{n\dagger})^2 + \dots \quad (3.14)$$

系数 c_l 是与 1 同量级的常数。在暴胀期间， χ 一直稳定在极小值处，所以 $l \geq 3$ 的项对动能的贡献可以忽略 [11]。对 $l \leq 2$ 的项， χ 稳定在 $\chi_{\min} \simeq c_1$ 。

为了使暴胀模型可行，需要在 Kähler 势中添加一个微小的平移对称性破缺项：

$$\Delta K = \kappa |\phi|^2, \quad (3.15)$$

系数满足条件 $0 < \kappa \ll 1$ 。

与 [12] 不同，我们假设超势满足一个更一般的形式 [20–24]

$$W = X \left(\sum_{m=0} \lambda_m \phi^m \right) + W_0. \quad (3.16)$$

这里 $\lambda_m \ll 1$ ， X 是一个额外的手征超场，并且稳定在 $X = 0$ 。 $|W_0| \simeq m_{3/2}$ 且 $m_{3/2}$ 为引力微子的质量。按照通常的假设，在暴胀过程中 $m_{3/2}$ 远远小于哈勃参数，所以在讨论暴胀动力学的时候可以被丢弃。

所以最终的 Kähler 势为

$$K = \kappa |\phi|^2 + c_1(\phi^n - \phi^{n\dagger}) - \frac{1}{2}(\phi^n - \phi^{n\dagger})^2 + |X|^2 \dots \quad (3.17)$$

超势 W 和 Kähler 势共同决定了标量场 ϕ 的有效拉式量

$$\begin{aligned} L &= -K^{\phi\phi^\dagger} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^\dagger - V \\ &= (\kappa + n^2 |\phi|^{(2n-2)}) \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^\dagger - V, \end{aligned} \quad (3.18)$$

暴胀场 ϕ 的标量势能为

$$\begin{aligned} V &= e^K \left[D_\phi W (K^{-1})^{\phi\phi^\dagger} (D_\phi W)^\star - 3|W|^2 \right] \\ &= e^{\kappa |\phi|^2 + c_1(\phi^n - \phi^{n\dagger}) - \frac{1}{2}(\phi^n - \phi^{n\dagger})^2} \left(\sum_m \lambda_m |\phi|^m \right)^2, \end{aligned} \quad (3.19)$$

其中

$$D_\phi W = \partial_\phi W + (\partial_\phi K)W, \quad (3.20)$$

以及

$$K^{\phi\phi^\dagger} = \frac{\partial^2 K}{\partial \phi \partial \phi^\dagger} \quad (3.21)$$

当 $(\kappa/n^2)^{1/(2n-2)} \ll |\phi| \ll \kappa^{-1/2}$ 时, κ 项可以忽略, 所以若定义 $\hat{\phi} \equiv \phi^n$, 则意味着 $\hat{\phi}$ 在类 Nambu-Goldstone 平移变换下不变, 拉式量 (3.18) 近似为

$$\begin{aligned} L &= \partial_\mu \hat{\phi} \partial^\mu \hat{\phi}^\dagger - e^{-\frac{|c_1|^2}{2}} \left(\sum_m \lambda_m |\hat{\phi}|^{m/n} \right)^2 \\ &= \partial_\mu \hat{\phi} \partial^\mu \hat{\phi}^\dagger - \left(\sum_m \hat{\lambda}_m |\hat{\phi}|^{m/n} \right)^2, \end{aligned} \quad (3.22)$$

其中 $i\chi \equiv (\phi^n - \phi^{n\dagger}) = ic_1$, $\hat{\lambda}_m \equiv e^{-\frac{|c_1|^2}{4}} \lambda_m$ 。

由于平移对称性, $\hat{\phi}$ 的实部不会出现在 Kähler 势中, 所以势能在实方向上相当平坦使得其成为暴胀子候选者。虚部获得了比哈勃能标更重地质量, 并且在暴胀过程中稳定在极小值处。因此, 设 $\hat{\phi} \equiv (\varphi + i\chi)/\sqrt{2} = \varphi/\sqrt{2} + ic_1/2$ 并得到 φ 地标量势能

$$V = \left[\sum_{m=0} \hat{\lambda}_m \left(\frac{\varphi}{\sqrt{2}} \right)^{\frac{m}{n}} \right]^2. \quad (3.23)$$

3.3.2 建立拐点暴胀模型

为了创建一个拐点暴胀模型, 我们采用如下形式的超势

$$W = X(\lambda_p \phi^p + \lambda_q e^{i\theta} \phi^q), \quad (3.24)$$

其中幂指数 $q > p \leq 1$ 且为整数, 系数 λ_p 、 λ_q 为正实数且不失一般性, θ 为第二项的相位。

将 (3.24) 代入势能函数 (3.23) 得到

$$\begin{aligned} V &= \left[\hat{\lambda}_p \left(\frac{\varphi}{\sqrt{2}} \right)^{\frac{p}{n}} + \hat{\lambda}_q e^{i\theta} \left(\frac{\varphi}{\sqrt{2}} \right)^{\frac{q}{n}} \right]^2 \\ &= \hat{\lambda}_p^2 \left(\frac{\varphi}{\sqrt{2}} \right)^{\frac{2p}{n}} \left[1 + 2\xi \cos \theta \left(\frac{\varphi}{\sqrt{2}} \right)^{\frac{q-p}{n}} + \xi^2 \left(\frac{\varphi}{\sqrt{2}} \right)^{\frac{2(q-p)}{n}} \right], \end{aligned} \quad (3.25)$$

其中 $\hat{\lambda}_{p,q} \equiv e^{-\frac{|c_1|^2}{4}} \lambda_{p,q}$ 和 $\xi = |\hat{\lambda}_q/\hat{\lambda}_p| = |\lambda_q/\lambda_p|$ 。

3.4 预测

第4章 双拐点暴胀模型预言的引力波

前面的章节中我们讨论了在超引力中构造拐点暴胀模型。接下来我们将继续在超引力中构造暴胀模型——双拐点暴胀模型，并将其与原初黑洞相结合。

4.1 超引力

仍然考虑带有平移对称性的 Kähler 势 [25]

$$K = ic(\Phi - \bar{\Phi}) - \frac{1}{2}(\Phi - \bar{\Phi})^2 - \frac{\zeta}{4}(\Phi - \bar{\Phi})^4, \quad (4.1)$$

其中 c 和 ζ 为实参数。暴胀场取为手征超场 $\Phi = (\phi + i\chi)/\sqrt{2}$ 的实分量 ϕ 。只要四次方项 $\frac{\zeta}{4}(\Phi - \bar{\Phi})^4$ 中的 ζ 取得足够大，则暴胀场 ϕ 在暴胀期间，场 χ 的期望为 $\langle \chi \rangle \approx 0$ 。

参考了 racetrack 模型 [26–28] 和其他模型 [25]，我们选取如下形式的超势

$$W = a_0(1 + a_1 e^{-b_1 \Phi} + a_2 e^{-b_2 \Phi} + a_3 e^{-b_3 \Phi}). \quad (4.2)$$

如果我们在宇宙学常数为零的真空中恢复来真空的超对称性（关于真空中的超对称破缺问题的讨论参考文献 [19]），则 F-term 和势能 V 在 $\Phi = 0$ 处应当都为零，即 $D_\Phi W = 0$ ， $V = 0$ ，这要求超势 W 满足约束条件

$$W = \partial_\Phi W = 0. \quad (4.3)$$

求解约束条件 (4.3) 可以消去参数 a_1 和 a_2

$$a_1 \rightarrow \frac{b_2 + a_3 b_2 - a_3 b_3}{b_1 - b_2}, \quad a_2 \rightarrow \frac{-b_1 - a_3 b_1 + a_3 b_3}{b_1 - b_2}. \quad (4.4)$$

将 Kähler 势和超势代入到公式

$$V = e^{K/M_P^2} [D_{\Phi_i} W (K^{-1})^{ij*} D_{\Phi_j^*} W^* - 3M_P^{-2} |W|^2], \quad (4.5)$$

中，可以得到标量势能 $V(\phi)$ 。其中，

$$D_\Phi W = \partial_\Phi W + M_P^{-2} (\partial_\Phi K) W, \quad (4.6)$$

以及 Kähler 度规的逆,

$$K^{ij\star} = \frac{\partial^2 K}{\partial \Phi_i \partial \Phi_j^\star}. \quad (4.7)$$

当在参数空间选取某组参数如

$$a_0 = 4.35 \times 10^{-6}, a_3 = 7 \times 10^{-8}, b_1 = 3.05, b_2 = 6.3868164, b_3 = -4.4, c = 2.8. \quad (4.8)$$

时, 标量势能 $V(\phi)$ 有两个近反射点, 如图4.1中所示。场取较大值处的拐点给出与当前 CMB 数据相一致的标量谱指标和张标比, 较小值处的拐点可以使标量扰动的功率谱产生一个尖峰从而生成原初黑洞。

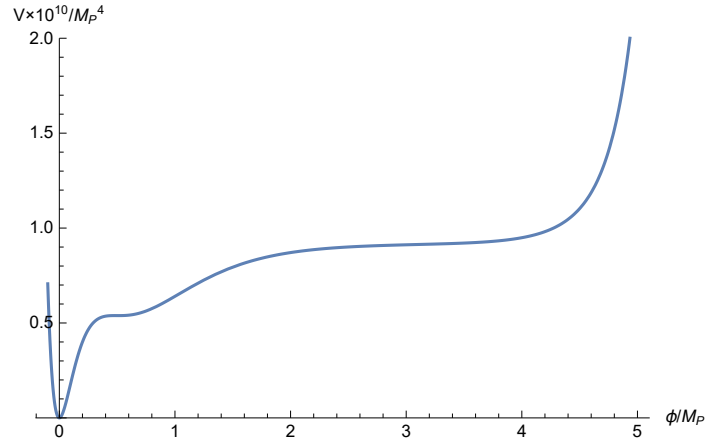


图 4.1 双拐点标量势能 $V(\phi)$

在 FRW 背景以及单场慢滚框架下, 基于势能的慢滚参数 ϵ_V 和 η_V 为

$$\epsilon_V = \frac{M_P^2}{2} \left(\frac{V'}{V} \right)^2, \quad (4.9)$$

$$\eta_V = M_P^2 \left(\frac{V''}{V} \right). \quad (4.10)$$

由于在拐点附近势能变得极端平坦, 因此慢滚近似不再适用 [29, 30], 代之以极端慢滚暴胀。此时为了更精确地求解暴胀过程, 势能慢滚参数需要替换为哈勃慢滚参数 [31–33],

$$\epsilon_H = -\frac{\dot{H}}{H^2}, \quad (4.11)$$

$$\eta_H = -\frac{\ddot{H}}{2H\dot{H}} = \epsilon_H - \frac{1}{2} \frac{d \ln \epsilon_H}{dN_e}, \quad (4.12)$$

$$\xi_H = \frac{\ddot{H}}{2H^2\dot{H}} - 2\eta_H^2 = \epsilon_H \eta_H - \frac{d\eta_H}{dN_e}, \quad (4.13)$$

点 $\dot{}$ 表示对宇宙时间 t 的导数， $N_e(t)$ 表示从视界穿过 k_\star 到暴胀结束期间的e-folding数，通常在取值在范围50~60之间。

标量谱指标及其跑动和张标比的领头阶可以用 $\epsilon_H, \eta_H, \xi_H$ 来表示

$$n_s = 1 - 4\epsilon_H + 2\eta_H, \quad (4.14)$$

$$\alpha = \frac{dn_s}{d \ln k} = 10\epsilon_H \eta_H - 8\epsilon_H^2 - 2\xi_H, \quad (4.15)$$

$$r = 16\epsilon_H. \quad (4.16)$$

在参数集(4.8)，相应的数值结果为

$$n_s = 0.9635, \quad \alpha = -0.00369, \quad r = 0.00276, \quad (4.17)$$

当 $k_\star = 0.05 Mpc^{-1}$ 时，在68%的置信水平上与Planck 2018给出的对CMB的限制结果相一致[34]

$$n_s = 0.9640 \pm 0.0043, \quad \alpha = -0.0071 \pm 0.0068, \quad r < 0.079. \quad (4.18)$$

由于在拐点附近用近似表达式 $\mathcal{P}_{\mathcal{R}} \approx \frac{1}{8\pi^2 M_p^2} \frac{H^2}{\epsilon_H}$ 计算得到的标量扰动会低于真实值[35]。因此必须在模空间中数值求解MS方程，

$$\frac{d^2 u_k}{d\eta^2} + \left(k^2 - \frac{1}{z} \frac{d^2 z}{d\eta^2} \right) u_k = 0, \quad (4.19)$$

其中 η 为共形时间， $z \equiv \frac{a}{H} \frac{d\phi}{d\eta}$ 。初值条件取为Bunch-Davies真空[36]

$$u_k \rightarrow \frac{e^{-ik\eta}}{\sqrt{2k}}, \quad \text{as} \quad \frac{k}{aH} \rightarrow \infty. \quad (4.20)$$

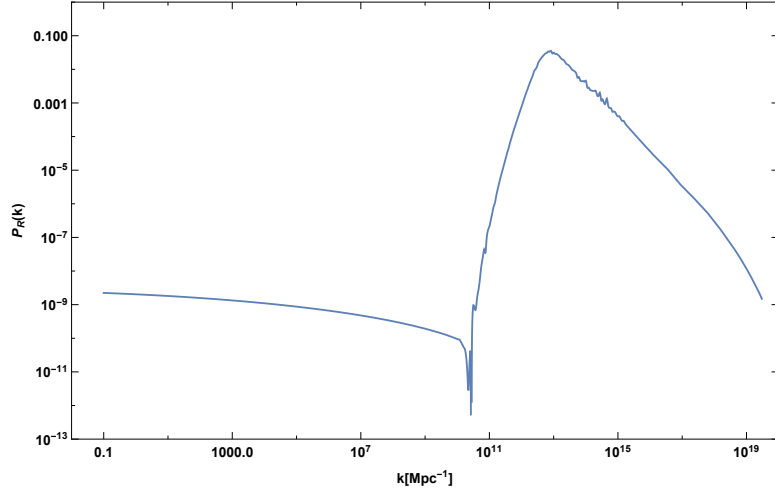
出于数值求解的方便，我们将共形时间 η 替换为 N_e ，把MS方程重写为[37]

$$\frac{d^2 u_k}{dN_e^2} + (1 - \epsilon_H) \frac{du_k}{dN_e} + \left[\frac{k^2}{\mathcal{H}^2} + (1 + \epsilon_H - \eta_H)(\eta_H - 2) - \frac{d(\epsilon_H - \eta_H)}{dN_e} \right] u_k = 0, \quad (4.21)$$

原初功率谱由下式给出

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \frac{k^3}{2\pi^2} \left| \frac{u_k}{z} \right|_{k \ll \mathcal{H}}^2 \quad (4.22)$$

图4.2为MS方程4.19基于参数集4.8的数值结果。从图中可以发现功率谱在小尺度有一个高峰，在CMB的尺度上大约增长了7个数量级。这样大的一个密度扰动使得原初黑洞能够通过引力塌缩形成。


 图 4.2 双拐点暴胀模型预测的标量扰动的原初功率谱 $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$

4.2 原初黑洞

当某个原初密度扰动足够大的尺度在暴胀结束后重新进入视界时，由引力塌缩可能形成原初黑洞。一般黑洞的质量 M 正比于当时的一个哈勃体积内的总质量 M_H ，比例系数为 γ 。

$$M = \gamma M_H = \gamma \frac{4}{3} \pi \rho H^{-3} \quad (4.23)$$

系数 γ 取决于引力塌缩的过程，与采取的模型有关，一般取 0.2 在辐射为主时期 [38]。利用熵守恒 $d(g_s(T)T^3 a^3)/dt = 0$ 和 $\rho \propto g(T)T^4$ ，可以得到辐射为主时期：

$$M = \gamma M_{H(eq)} \left(\frac{g(T_f)}{g(T_{eq})} \right)^{1/2} \left(\frac{g_s(T_f)}{g_s(T_{eq})} \right)^{-2/3} \left(\frac{k}{k_{eq}} \right)^{-2} \quad (4.24)$$

$M_{H(eq)}$ 表示辐射-物质相等时的视界内的总质量。因为物质为主时期 $H^2 \propto \rho \propto a^{-3}$ 和 $k = aH$ ，故有

$$\begin{aligned} M_{H(eq)} &= \frac{4}{3} \pi \rho_{eq} H_{eq}^{-3} \\ &= \frac{4}{3} \pi \rho_m a_{eq}^{-3} \left(\frac{k_{eq}}{a_{eq}} \right)^{-3} \\ &= \frac{4}{3} \pi \Omega_m \rho_{0,crit} k_{eq}^{-3} \\ &\approx 3 \times 10^{50} g \end{aligned}$$

在辐射为主时期假设 $g(T) = g_s(T)$ 是一个好的近似，以及最新 Planck 2018 数据 [39] 给出的 $k_{eq} = 0.073 \Omega_m h^2 \text{ Mpc}^{-1}$ 。于是 (4.24) 可写成

$$M(k) = 10^{18} g \left(\frac{\gamma}{0.2} \right) \left(\frac{g(T_f)}{106.75} \right)^{-1/6} \left(\frac{k}{7 \times 10^{13} \text{ Mpc}^{-1}} \right)^{-2} \quad (4.25)$$

$M(k)$ 表示共动波数 k 重新进入视界时形成的黑洞的质量。

在 Press-schechter 引力塌缩模型中 [40], 质量 M 的原初黑洞的生成率由一个高斯随机概率分布决定。当相对密度扰动 δ 大于某个阈值 δ_c 时, 视界内的物质将在引力的作用下塌缩形成一个黑洞, 那么质量为 M 的原初黑洞所占丰度 $\beta(M)$ 将由高斯分布的分布函数给出:

$$\beta(M) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2(M)} \int_{\delta_c}^{\infty} d\delta \exp\left(\frac{-\delta^2}{2\sigma^2(M)}\right). \quad (4.26)$$

唯一不确定的还剩下方差 $\sigma^2(M)$ 。对它的计算一般采用如下方式, 将空间粗粒化成一个尺度为 $R = 1/k$ 的区域, 并用高斯窗口函数 $W(x) = \exp(-x^2/2)$ 将相对密度扰动光滑化, 最后对所有区域求 δ 的方差作为 $\sigma^2(M)$:

$$\sigma^2(M(k)) = \int \frac{dq}{q} W(qR)^2 \quad (4.27)$$

$$= \frac{16}{81} \int \frac{dq}{q} (qR)^4 \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(q) W(qR)^2, \quad (4.28)$$

对应 k 模的原初黑洞对暗物质的贡献为

$$\begin{aligned} f_{PBH}(M) &\equiv \frac{\Omega_{PBH}(M)}{\Omega_c} = \frac{\rho_{PBH}(M)}{\rho_m} \Big|_{eq} \frac{\Omega_m h^2}{\Omega_c h^2} \\ &= \frac{\beta(M)}{8 \times 10^{-16}} \left(\frac{\gamma}{0.2}\right)^{3/2} \left(\frac{g(T_M)}{106.75}\right)^{-1/4} \left(\frac{M}{10^{18} \text{ g}}\right)^{-1/2} \end{aligned}$$

其中暗物质的丰度取为 $\Omega_c h^2 \simeq 0.12$ [39]。当前所有原初黑洞的丰度由积分式给出;

$$\Omega_{PBH} = \int \frac{dM}{M} \Omega_{PBH}(M), \quad (4.29)$$

公式 (4.26) 说明原初黑洞的质量分数对临界塌缩密度 δ_c 非常敏感。在辐射为主时期, 近期多数在这方面的研究文章 [41–44] 建议 δ_c 取值大约为 0.45。此时若希望原初黑洞能在 $\mathcal{O}(1)$ 量级成为暗物质组成成分, 那么曲率扰动的原初功率谱需要增大到大约为 $\mathcal{P}_{\mathcal{R}} \simeq 10^{-2}$ 。而在 CMB 尺度上, 扰动大约为 $\mathcal{P}_{\mathcal{R}} \simeq 10^{-9}$ 。因此我们需要一个机制, 使得对应某个尺度范围 (相应的某个原初黑洞的质量区间) 的曲率扰动在离开视界时产生一个峰。

把原初黑洞的质量和 e-folding 数联系起来, 能使我们对其形成于哪个时期有一个相对清晰的概念。为了做到这一点, 需要假设在暴胀时期, 哈勃 “常数”

近似为常数。所以 k 模离开视界时相对于某个基准 k_\star 已经膨胀了大约

$$\Delta N_e^\star = \log \frac{a_k}{a_\star} = \log \frac{a_k H_I}{k_\star} = \log \frac{a_f H_f}{k_\star}, \quad (4.30)$$

仍然假设对应熵和能量密度的有效自由度数相等，于是可以得到公式 [45]:

$$\Delta N_e^\star = -\frac{1}{2} \log \frac{M}{M_\odot} + \frac{1}{2} \log \gamma + \frac{1}{12} \log \frac{g(T)}{106.75} + \frac{1}{2} \log \frac{4.4 \times 10^{24} \Omega_r H_0^2}{k_\star^2}, \quad (4.31)$$

其中辐射密度为 $\Omega_r h^2 = 4.18 \times 10^{-5}$ ，哈勃常数为 $H_0 \simeq 0.0007 \text{Mpc}^{-1}$ 。若选择基准为 $k_\star = 0.05 \text{Mpc}^{-1}$ ，参考 Planck 组的数据，上式可以变为

$$\Delta N_e^\star = 18.37 - \frac{1}{2} \log \frac{M}{M_\odot}. \quad (4.32)$$

4.3 计算方法

4.4 引力波

根据微扰论，二阶引力波的源为一阶标量扰动。由于标量扰动的功率谱在小尺度有一个增强，因而二阶引力波不能简单的被忽略。接下来将给出二阶引力波的运动方程以及功率谱的计算。

4.4.1 基本方程

在共形牛顿规范下，精确到二阶微扰的度规可以写作如下形式

$$ds^2 = a^2(\eta) \{ -(1 + 2\Psi)d\eta^2 + [(1 - 2\Psi)\delta_{ij} + \frac{1}{2}h_{ij}]dx^i dx^j \}, \quad (4.33)$$

其中 Ψ 为一阶标量扰动， h_{ij} 为二阶张量扰动（后文简称张量扰动），并且忽略了一阶张量扰动、矢量扰动和各向异性应力张量扰动部分。

在牛顿规范下，我们可以将张量扰动分解 + 分量和 \times 分量。

$$h_{ij}(\eta, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} [h_{\mathbf{k}}^+(\eta) \mathbf{e}_{ij}^+(\mathbf{k}) + h_{\mathbf{k}}^\times(\eta) \mathbf{e}_{ij}^\times(\mathbf{k})], \quad (4.34)$$

其中 $\mathbf{e}_{ij}^+(\mathbf{k})$ 和 $\mathbf{e}_{ij}^\times(\mathbf{k})$ 为极化张量，且满足正交归一化条件 $\sum_{i,j} \mathbf{e}_{ij}^\alpha(\mathbf{k}) \mathbf{e}_{ij}^\beta(-\mathbf{k}) = \delta^{\alpha\beta}$ 。接下来的正文中将忽略极化指标 α 和 β 。

结合二阶扰动的爱因斯坦方程，动量空间中的张量扰动满足运动方程

$$h_{\mathbf{k}}'' + 2\mathcal{H}h_{\mathbf{k}}' + k^2 h_{\mathbf{k}} = S(\eta, \mathbf{k}), \quad (4.35)$$

其中 $S(\eta, \mathbf{k})$ 是源项 $S_{ij}(\eta, \mathbf{k})$ 的傅立叶变换,

$$S(\eta, \mathbf{k}) = -4 \mathbf{e}^{ij}(\mathbf{k}) \int \frac{d^3 \mathbf{x}}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} S_{ij}(\eta, \mathbf{k}). \quad (4.36)$$

源项的表达式为 [46, 47]

$$S_{ij}(\eta, \mathbf{k}) = 4\Psi \partial_i \partial_j \Psi + 2\partial_i \Psi \partial_j \Psi - \frac{4}{3(1+w)\mathcal{H}^2} \partial_i(\Psi' + \mathcal{H}\Psi) \partial_j(\Psi' + \mathcal{H}\Psi). \quad (4.37)$$

利用格林函数法可以给出运动方程 (4.35) 的解析解

$$h_{\mathbf{k}}(\eta) = \frac{1}{a(\eta)} \int^\eta d\tilde{\eta} G_{\mathbf{k}}(\eta; \tilde{\eta}) [a(\tilde{\eta}) S(\tilde{\eta}, \mathbf{k})]. \quad (4.38)$$

其中 $G_{\mathbf{k}}(\eta; \tilde{\eta})$ 满足如下常微分方程

$$\frac{d^2 G(\eta; \tilde{\eta})}{d\tilde{\eta}^2} + \left(k^2 - \frac{d^2 a}{a d\tilde{\eta}^2} \right) G_{\mathbf{k}}(\eta; \tilde{\eta}) = \delta(\eta - \tilde{\eta}). \quad (4.39)$$

为了计算源项 $S_{ij}(\eta, \mathbf{k})$ 随时间的演化, 需要求解标量扰动的运动方程 [48, 49]

$$\Psi''_{\mathbf{k}}(\eta) + \frac{6(1+w)}{(1+3w)\eta} \Psi'_{\mathbf{k}}(\eta) + w k^2 \Psi_{\mathbf{k}}(\eta) = 0, \quad (4.40)$$

其中 w 表示状态方程的参数。标量扰动 $\Psi_{\mathbf{k}}(\eta)$ 同时依赖动量 \mathbf{k} 和时间 η , 分离变量后表示成初值 $\psi_{\mathbf{k}}$ 和转移函数 $\Psi(k\eta)$ 的乘积

$$\Psi_{\mathbf{k}}(\eta) \equiv \Psi(k\eta) \psi_{\mathbf{k}}. \quad (4.41)$$

此时, 源项的傅立叶变换可以表示成

$$S(\eta, \mathbf{k}) = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}} \mathbf{e}(\mathbf{k}, \mathbf{p}) f(\eta, \mathbf{k}, \mathbf{p}) \psi_{\mathbf{k}} \psi_{\mathbf{k}-\mathbf{p}}, \quad (4.42)$$

其中

$$\mathbf{e}(\mathbf{k}, \mathbf{p}) = \mathbf{e}^{ij}(\mathbf{k}) p_i p_j, \quad (4.43)$$

以及

$$\begin{aligned} f(\eta, \mathbf{k}, \mathbf{p}) = & \frac{8(3w+5)}{3(w+1)} \Psi(|\mathbf{p}|\eta) \Psi(|\mathbf{k}-\mathbf{p}|\eta) + \frac{4(3w+1)^2}{3(w+1)} \eta^2 \Psi'(|\mathbf{p}|\eta) \Psi'(|\mathbf{k}-\mathbf{p}|\eta) \\ & + \frac{8(3w+1)}{3(w+1)} \eta [\Psi'(|\mathbf{p}|\eta) \Psi(|\mathbf{k}-\mathbf{p}|\eta) + \Psi(|\mathbf{p}|\eta) \Psi'(|\mathbf{k}-\mathbf{p}|\eta)]. \end{aligned} \quad (4.44)$$

对处于视界内的模式而言，引力波的能量谱的表达式可以通过其功率谱来给出

$$\Omega_{GW}(\eta, k) \equiv \frac{1}{\rho_c} \frac{d\rho_{GW}}{d \ln k} = \frac{1}{24} \left(\frac{k}{\mathcal{H}} \right)^2 \overline{\mathcal{P}_h(\eta, k)}, \quad (4.45)$$

上划线表示取振荡平均，公式中已经包含了两种极化模式， ρ_c 为宇宙的临界能量密度。引力波的功率谱 \mathcal{P}_h 定义为

$$\langle h_{\mathbf{k}}(\eta) h_{\mathbf{p}}(\eta) \rangle = \frac{2\pi^2}{k^3} \delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{p}) \mathcal{P}_h(\eta, k). \quad (4.46)$$

利用公式 (4.38) 和 (4.42) 计算两点关联函数 $\langle h_{\mathbf{k}}(\eta) h_{\mathbf{p}}(\eta) \rangle$

$$\langle h_{\mathbf{k}}(\eta) h_{\mathbf{p}}(\eta) \rangle = \int \frac{d^3 q d^3 \tilde{q}}{(2\pi)^3} \mathbf{e}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \mathbf{e}(\mathbf{p}, \tilde{\mathbf{q}}) I(\eta, \mathbf{p}, \tilde{\mathbf{q}}) \langle \psi_{\mathbf{q}} \psi_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} \psi_{\tilde{\mathbf{q}}} \psi_{\mathbf{p}-\tilde{\mathbf{q}}} \rangle, \quad (4.47)$$

其中

$$I(\eta, \mathbf{k}, \mathbf{p}) \equiv \int_{\tilde{\eta}}^{\eta} d\tilde{\eta} \frac{a(\tilde{\eta})}{a(\eta)} G_k(\eta; \tilde{\eta}) f(\tilde{\eta}, \mathbf{k}, \mathbf{p}). \quad (4.48)$$

我们假设 $\psi_{\mathbf{k}}$ 服从高斯分布，根据 Wick 定理 $\psi_{\mathbf{k}}$ 的四点关联函数可以转化为两点关联函数。引入无量纲参数 $u \equiv |\mathbf{k} - \mathbf{p}|/k$ ， $v \equiv |\mathbf{p}|/k$ 和 $x \equiv k\eta$ ，获得引力波功率谱的最终表达式为 [50]

$$\mathcal{P}_h(\eta, k) = 4 \int_0^\infty dv \int_{|1-v|}^{1+v} du \left(\frac{4v^2 - (1 + v^2 - u^2)^2}{4uv} \right) \mathcal{I}^2(x, u, v) \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(ku) \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(kv), \quad (4.49)$$

其中

$$\mathcal{I}(x, u, v) \equiv k^2 I(\eta, \mathbf{k}, \mathbf{p}). \quad (4.50)$$

对 (4.1) 节讨论的双拐点暴胀模型对应的标量扰动的功率谱而言，其尖峰对应的模式再次进入视界内时，宇宙处于辐射为主的时期，这意味着 $w = 1/3$ 。因此方程 (4.41) 的解和格林函数分别可以化简为

$$\Psi(x) = \frac{9}{x^2} \left(\frac{\sin(x/\sqrt{3})}{x/\sqrt{3}} - \cos(x/\sqrt{3}) \right), \quad (4.51)$$

和

$$G_k(\eta; \tilde{\eta}) = \frac{\sin(k\eta - k\tilde{\eta})}{k}. \quad (4.52)$$

峰值对应尺度 10^{13}Mpc^{-1} ，比基准尺度 $k_{\star} = 0.05 \text{Mpc}^{-1}$ 大好几个量级。方程 (4.51) 说明标量扰动在视界内被抑制，因此诱导引力波的产生期主要集中在对

应的模式穿过视界的时候。这个性质使得我们可以使用 [50] 中提出的方法，当 $x \rightarrow \infty$ 时，振荡平均的结果为

$$\overline{\mathcal{I}^2(x \rightarrow \infty, u, v)} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4u^3 v^3 x} \right)^3 (u^2 + v^2 - 3)^2 \left\{ \left[-4uv + (u^2 + v^2 - 3) \ln \left| \frac{3 - (u+v)^2}{3 - (u-v)^2} \right| \right]^2 + \left[\pi(u^2 + v^2 - 3) \Theta(u + v - \sqrt{3}) \right]^2 \right\}, \quad (4.53)$$

其中 Θ 为 Heaviside theta 函数。结合方程 (4.46) 和 (4.48) 以及辐射为主时期的 $\mathcal{H} = 1/\eta$ ，得到最终的表达式

$$\Omega_{GW}(\eta, k) = \frac{1}{12} \int_0^\infty dv \int_{|1-v|}^{1+v} du \left(\frac{4v^2 - (1 + v^2 - u^2)^2}{4uv} \right)^2 \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(ku) \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(kv) \left(\frac{3}{4u^3 v^3} \right)^2 (u^2 + v^2 - 3)^2 \left\{ \left[-4uv + (u^2 + v^2 - 3) \ln \left| \frac{3 - (u+v)^2}{3 - (u-v)^2} \right| \right]^2 + \left[\pi(u^2 + v^2 - 3) \Theta(u + v - \sqrt{3}) \right]^2 \right\}. \quad (4.54)$$

4.4.2 数值结果

在获得 Ω_{GW} 的数值结果后，我们将其与 LISA[1] 和太极 [2] 的灵敏度曲线相比较。当前时刻与辐射为主时期产生的能量谱之间的关系为

$$\Omega_{GW,0} = \Omega_{r,0} \left(\frac{g_{\star,0}}{g_{\star,p}} \right)^{1/3} \Omega_{GW}, \quad (4.55)$$

其中 $\Omega_{r,0}$ 为当前辐射能量密度占比， $g_{\star,0}$ 和 $g_{\star,p}$ 分别为当前时刻和峰值对应的模式穿过视界时的相对论有效粒子数。当前时刻的频率 f 为

$$f \approx 0.03 \text{Hz} \frac{k}{2 \times 10^7 \text{pc}^{-1}}. \quad (4.56)$$

从图4.3可以看出数值结果位于 LISA[1] 和太极 [2] 的期望灵敏度曲线之上。峰值频率的预测值大约为 0.05Hz，落在空间引力波探测器的探测范围内。并且对于在峰值模式 k_p 两侧的模式，可以很好地用 k 的幂函数来描述。当 $k \ll k_p$ 时， $\Omega_{GW} \propto k^3$ ，这与由预加热和相变驱动的随机引力波背景的结果相同。在 $k \gg k_p$ 的区域内，幂指数为 1.9，这和其他引力波源的情况不同。

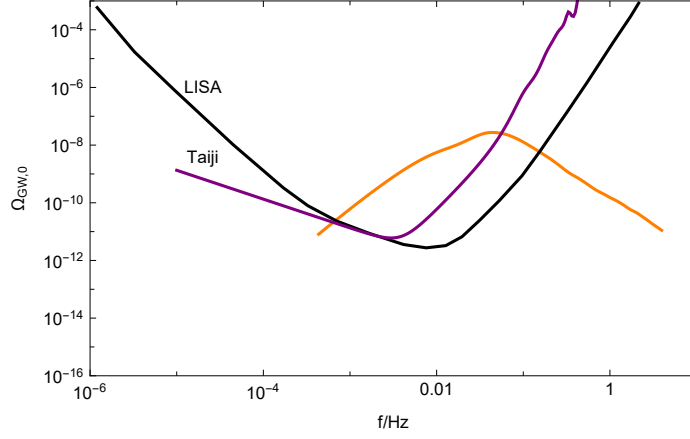


图 4.3 橙色曲线为双拐点模型预言的诱导引力波的能量谱。黑/红曲线分别为 LISA[1] 和太极 [2] 的期望灵敏度曲线。

4.4.3 功率谱为幂指数时的结果

从图4.2可以看到原初功率谱在峰值附近可以近似用 k 的幂函数来描述。当 $k \ll k_p$ 和 $k \gg k_p$ 时, $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) \propto k^{n_1}$ 和 $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) \propto k^{n_2}$ 。此时, $\Omega_{GW}(k) \propto k^{m_1}$ 和 $\Omega_{GW}(k) \propto k^{m_2}$ 。 m_1 和 m_2 是 n_1 和 n_2 的函数。首先看 $k \ll k_p$, Ω_{GW} 的主要贡献来自于峰值。因为 v 和 u 反比于 k , 方程 (4.54) 中对积分的主要贡献来自于区间 $1 \ll v, u \leq k_p/k$ 。在这中情况下,, 方程 (4.54) 简化到

$$\Omega_{GW}(k) \propto k^{2n_1} \int_0^{k_p/k} dv v^{2n_1-4}. \quad (4.57)$$

若 $n_1 > 2$, 则结果为

$$\Omega_{GW}(k) \propto k^3. \quad (4.58)$$

再者, 考虑第二种情况 $k \gg k_p$ 。若 $v \ll 1$ 或 $u \ll 1$, 则被积函数能简化为 v^{3-n_2} 。当 $n_2 > -4$ 时, 方程 (4.54) 为

$$\Omega_{GW}(k) \propto k^{2n_2} \int_{-\infty}^{+\infty} dv F(v). \quad (4.59)$$

因为 (4.59) 中积分部分与 k 无关, 因此 $\Omega_{GW}(k) \propto k^{2n_2}$ 。对 $n_2 \leq -4$, 对积分的主要贡献来自于区间 $k_p/k \leq v$

1 或 $k_p/k \leq u \ll 1$ 。此时方程 (4.54) 简化为

$$\Omega_{GW}(k) \propto k^{2n_2} \int_{k_p/k}^{\epsilon} dv v^{3-n_2}, \quad (4.60)$$

其中 ϵ 满足 $k_p/k \ll \epsilon \ll 1$ 。因此 $\Omega_{GW}(k) \propto k^{n_2-4}$ 对 $n_2 < -4$ 以及 $\Omega_{GW}(k) \propto k^{2n_2-4}$ 对 $n_2 = -4$ 。

第 5 章 总结与展望

附录 A 中国科学院大学学位论文撰写要求

学位论文是研究生科研工作成果的集中体现，是评判学位申请者学术水平、授予其学位的主要依据，是科研领域重要的文献资料。根据《科学技术报告、学位论文和学术论文的编写格式》（GB/T 7713-1987）、《学位论文编写规则》（GB/T 7713.1-2006）和《文后参考文献著录规则》（GB7714—87）等国家有关标准，结合中国科学院大学（以下简称“国科大”）的实际情况，特制订本规定。

A.1 论文无附录者无需附录部分

A.2 测试公式编号

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \\ \frac{\partial(\rho \mathbf{V})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \mathbf{V}) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E \mathbf{V}) = \nabla \cdot (k \nabla T) + \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{V}) \end{cases} \quad \dots (A.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} u \, d\Omega + \int_S \mathbf{n} \cdot (u \mathbf{V}) \, dS = \dot{\phi} \quad \dots (A.2)$$

参考文献

- [1] AMARO-SEOANE P, AUDLEY H, BABAK S, et al. Laser interferometer space antenna[J]. arXiv preprint arXiv:1702.00786, 2017.
- [2] GUO Z K, CAI R G, ZHANG Y Z. Taiji program: Gravitational-wave sources[J]. arXiv preprint arXiv:1807.09495, 2018.
- [3] FREEDMAN D Z, NIEUWENHUIZEN P V, FERRARA S. Progress toward a theory of supergravity[M]//Supergravities in Diverse Dimensions: Commentary and Reprints (In 2 Volumes). World Scientific, 1989: 512-516.
- [4] DESER S D, ZUMINO B. Consistent supergravity[J]. Phys. Lett. B, 1976, 62(CERN-TH-2164): 335-337.
- [5] WESS J, BAGGER J. Supersymmetry and supergravity[M]. Princeton university press, 1992.
- [6] YAMAGUCHI M. Supergravity-based inflation models: a review[J]. Classical and Quantum Gravity, 2011, 28(10):103001.
- [7] STEWART E D. Inflation, supergravity, and superstrings[J]. Physical Review D, 1995, 51(12): 6847.
- [8] LINDE A. Hybrid inflation[J]. Physical Review D, 1994, 49(2):748.
- [9] LINDE A, RIOTTO A. Hybrid inflation in supergravity[J]. Physical Review D, 1997, 56(4): R1841.
- [10] PANAGIOTAKOPOULOS C. Hybrid inflation with quasi-canonical supergravity[J]. Physics Letters B, 1997, 402(3-4):257-262.
- [11] TAKAHASHI F. Linear inflation from running kinetic term in supergravity[J]. Physics Letters B, 2010, 693(2):140-143.
- [12] NAKAYAMA K, TAKAHASHI F. Running kinetic inflation[J]. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2010, 2010(11):009.
- [13] KASUYA S, TAKAHASHI F. Flat direction inflation with running kinetic term and baryogenesis [J]. Physics Letters B, 2014, 736:526-532.
- [14] ALLAHVERDI R, ENQVIST K, GARCIA-BELLIDO J, et al. Gauge-invariant inflaton in the minimal supersymmetric standard model[J]. Physical review letters, 2006, 97(19):191304.
- [15] ALLAHVERDI R, KUSENKO A, MAZUMDAR A. A-term inflation and the smallness of the neutrino masses[J]. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2007, 2007(07):018.
- [16] ENQVIST K, MAZUMDAR A, STEPHENS P. Inflection point inflation within supersymmetry [J]. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2010, 2010(06):020.

- [17] HOTCHKISS S, MAZUMDAR A, NADATHUR S. Observable gravitational waves from inflation with small field excursions[J]. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2012, 2012(02):008.
- [18] CHATTERJEE A, MAZUMDAR A. Bound on largest $r \lesssim 0.1$ from sub-planckian excursions of inflaton[J]. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2015, 2015(01):031.
- [19] GAO T J, GUO Z K. Inflection point inflation and dark energy in supergravity[J]. Physical Review D, 2015, 91(12):123502.
- [20] NAKAYAMA K, TAKAHASHI F, YANAGIDA T T. Polynomial chaotic inflation in supergravity[J]. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2013, 2013(08):038.
- [21] KAWASAKI M, YAMAGUCHI M, YANAGIDA T. Natural chaotic inflation in supergravity[J]. Physical review letters, 2000, 85(17):3572.
- [22] KAWASAKI M, YAMAGUCHI M, YANAGIDA T. Natural chaotic inflation in supergravity and leptogenesis[J]. Physical Review D, 2001, 63(10):103514.
- [23] KALLOSH R, LINDE A. New models of chaotic inflation in supergravity[J]. journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2010, 2010(11):011.
- [24] KALLOSH R, LINDE A, RUBE T. General inflaton potentials in supergravity[J]. Physical Review D, 2011, 83(4):043507.
- [25] KETOV S V, TERADA T. On susy restoration in single-superfield inflationary models of supergravity[J]. The European Physical Journal C, 2016, 76(8):438.
- [26] KRASNIKOV N. On supersymmetry breaking in superstring theories[J]. Physics Letters B, 1987, 193(1):37-40.
- [27] ESCODA C, GÓMEZ-REINO M, QUEVEDO F. Saltatory de sitter string vacua[J]. Journal of High Energy Physics, 2003, 2003(11):065.
- [28] BLANCO-PILLADO J J, BURGESS C P, CLINE J M, et al. Racetrack inflation[J]. Journal of High Energy Physics, 2005, 2004(11):063.
- [29] DIMOPOULOS K. Ultra slow-roll inflation demystified[J]. Physics Letters B, 2017, 775:262-265.
- [30] GERMANI C, PROKOPEC T. On primordial black holes from an inflection point[J]. Physics of the dark universe, 2017, 18:6-10.
- [31] SCHWARZ D J, TERRERO-ESCALANTE C A, GARCIA A A. Higher order corrections to primordial spectra from cosmological inflation[J]. Physics Letters B, 2001, 517(3-4):243-249.
- [32] LEACH S M, LIDDLE A R, MARTIN J, et al. Cosmological parameter estimation and the inflationary cosmology[J]. Physical Review D, 2002, 66(2):023515.
- [33] SCHWARZ D J, TERRERO-ESCALANTE C A. Primordial fluctuations and cosmological

- inflation after wmap 1.0[J]. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2004, 2004(08): 003.
- [34] AKRAMI Y, ARROJA F, ASHDOWN M, et al. Planck 2018 results. x. constraints on inflation [J]. arXiv preprint arXiv:1807.06211, 2018.
- [35] GAO T J, GUO Z K. Primordial black hole production in inflationary models of supergravity with a single chiral superfield[J]. *Physical Review D*, 2018, 98(6):063526.
- [36] BUNCH T S, DAVIES P C. Quantum field theory in de sitter space: renormalization by point-splitting[J]. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 1978, 360(1700):117-134.
- [37] BALLESTEROS G, TAOSO M. Primordial black hole dark matter from single field inflation [J]. *Physical Review D*, 2018, 97(2):023501.
- [38] CARR B J. The primordial black hole mass spectrum[M]. Press, 1975.
- [39] AGHANIM N, AKRAMI Y, ASHDOWN M, et al. Planck 2018 results. vi. cosmological parameters[J]. arXiv preprint arXiv:1807.06209, 2018.
- [40] PRESS W H, SCHECHTER P. Formation of galaxies and clusters of galaxies by self-similar gravitational condensation[J]. *The Astrophysical Journal*, 1974, 187:425-438.
- [41] MUSCO I, MILLER J C, REZZOLLA L. Computations of primordial black-hole formation[J]. *Classical and Quantum Gravity*, 2005, 22(7):1405.
- [42] MUSCO I, MILLER J C, POLNAREV A G. Primordial black hole formation in the radiative era: Investigation of the critical nature of the collapse[J]. *Classical and Quantum Gravity*, 2009, 26(23):235001.
- [43] MUSCO I, MILLER J C. Primordial black hole formation in the early universe: critical behaviour and self-similarity[J]. *Classical and Quantum Gravity*, 2013, 30(14):145009.
- [44] HARADA T, YOO C M, KOHRI K. Threshold of primordial black hole formation[J]. *Physical Review D*, 2013, 88(8):084051.
- [45] MOTOHASHI H, HU W. Primordial black holes and slow-roll violation[J]. *Physical Review D*, 2017, 96(6):063503.
- [46] ANANDA K N, CLARKSON C, WANDS D. Cosmological gravitational wave background from primordial density perturbations[J]. *Physical Review D*, 2007, 75(12):123518.
- [47] BAUMANN D, STEINHARDT P, TAKAHASHI K, et al. Gravitational wave spectrum induced by primordial scalar perturbations[J]. *Physical Review D*, 2007, 76(8):084019.
- [48] MUKHANOV V F, FELDMAN H A, BRANDENBERGER R H. Theory of cosmological perturbations[J]. *Physics Reports*, 1992, 215(5-6):203-333.
- [49] KODAMA H, SASAKI M. Cosmological perturbation theory[J]. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, 1984, 78:1-166.

- [50] KOHRI K, TERADA T. Semianalytic calculation of gravitational wave spectrum nonlinearly induced from primordial curvature perturbations[J]. Physical Review D, 2018, 97(12):123532.

作者简历及攻读学位期间发表的学术论文与研究成果

本科生无需此部分。

作者简历

casthesis 作者

徐武涛，浙江省海盐县人，中国科学院理论物理研究所博士研究生。

ucasthesis 作者

莫晃锐，湖南省湘潭县人，中国科学院力学研究所硕士研究生。

已发表 (或正式接受) 的学术论文:

[1] ucasthesis: A LaTeX Thesis Template for the University of Chinese Academy of Sciences, 2014.

申请或已获得的专利:

(无专利时此项不必列出)

参加的研究项目及获奖情况:

可以随意添加新的条目或是结构。

致 谢

感激 `casthesis` 作者吴凌云学长, `gbt7714-bibtex-style` 开发者 `zepinglee`, 和 `ctex` 众多开发者们。若没有他们的辛勤付出和非凡工作, \LaTeX 菜鸟的我是无法完成此国科大学位论文 \LaTeX 模板 `ucasthesis` 的。在 \LaTeX 中的一点一滴的成长源于开源社区的众多优秀资料和教程, 在此对所有 \LaTeX 社区的贡献者表示感谢!

`ucasthesis` 国科大学位论文 \LaTeX 模板的最终成型离不开以霍明虹老师和丁云云老师为代表的国科大学位办公室老师们制定的官方指导文件和众多 `ucasthesis` 用户的热心测试和耐心反馈, 在此对他们的认真付出表示感谢。特别对国科大的赵永明同学的众多有效反馈意见和建议表示感谢, 对国科大本科部的陆晴老师和本科部学位办的丁云云老师的细致审核和建议表示感谢。谢谢大家的共同努力和支持, 让 `ucasthesis` 为国科大学子使用 \LaTeX 撰写学位论文提供便利和高效这一目标成为可能。

