1 first

弗里德曼方程

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{K}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho \tag{1}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2k}{a^2} = 4\pi G(\rho - p). \tag{2}$$

由 $\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - \dot{H}^2$ 及 $H = \frac{\dot{a}}{a}$ 得到

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{K}{a^2} \tag{3}$$

$$\dot{H} + H^2 = \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \tag{4}$$

以及连续性方程

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + p). \tag{5}$$

物态方程

$$p = w\rho \tag{6}$$

带入连续性方程 (5) 得到能量密度 ρ 与尺度因子 $a(t)$ 的关系

$$\rho a^{3(1+w)} = \text{constant} \tag{7}$$

将其带入弗里德曼方程 (3) 并令 $K = 0$，解出哈勃参数及其导数为

$$H = H_0 a^{-\frac{3(1+w)}{2}} \tag{8}$$

$$\dot{H} = -\frac{3(1+w)}{2}H^2 \tag{9}$$

下标 0 表示当前时刻，并取 $a_0 = 1$。进一步得到尺度因子 $a(t)$

$$a = H_0 t^{\frac{2}{3(1+w)}} = H_0 \begin{cases} t^{2/3}, & w = 0 \\ t^{1/2}, & w = 1/3 \end{cases} \tag{10}$$

因为物态参数 $w \in [-1, 1]$，所以 $\dot{H} < 0$ 恒成立，不论是加速膨胀还是减速膨胀期。因此在宇宙整个的演化过程中，哈勃参数 H 单调减小。根据哈勃定律，退行速度 $v_{tui} = Hd$。以光速 $c = 1$ 为界，相距 $d = 1/H$ 时，光子前进的距离正好被膨胀的效应抵消。这个临界距离被定义为哈勃半径

$$r_H = \frac{1}{H} \tag{11}$$

因而哈勃半径单调增大，未来能观测到的区域将越来越大。出于方便求解方程的目的，引入共动时间 η 作为新的时间变量，定义为

$$d\eta = \frac{dt}{a} \tag{12}$$

约定 $\dot{a}$ 和 a' 分别是对 t 和 η 的导数。根据链式规则，两种导数按照如下规则互相转换

$$\frac{d}{d\eta} = a\frac{d}{dt} \tag{13}$$

在共动坐标系下，可以定义对应的共动哈勃半径

$$r_{\mathcal{H}} = \frac{1}{\mathcal{H}} = \frac{1}{aH} = \frac{r_H}{a} \tag{14}$$

这里花体表示在共动坐标系中对应的物理量，$r_{\mathcal{H}}$ 的行为稍有不同，

$$r_{\mathcal{H}} = \frac{1}{\dot{a}} = \begin{cases} \text{单调减小}, & \ddot{a} > 0 \\ \text{单调增大}, & \dot{a} < 0 \end{cases} \tag{15}$$

根据方程 (9)，当 $w \sim -1$ 时，$\dot{H} \sim 0$，故 $H \sim$ 常数。此时宇宙近似为德-西特宇宙，几乎以指数的速度快速膨胀。尺度因子的二阶导数 $\ddot{a}$ 为

$$\ddot{a} = a\Big(\dot{H} + H^2\Big) = -\frac{1+3w}{2} a H^2 \tag{16}$$

当强能量条件被破坏 $(\rho + 3p) < 0 \Leftrightarrow (1 + 3w) < 0$，导致 $\ddot{a} > 0$，宇宙会加速膨胀。

2 second

规范变换和规范不变量。由于物理规律不依赖于所用的坐标系，因而在任何情况下，只有不依赖于坐标系选择的物理量才是值得讨论的。所以当我们研究宇宙中物质扰动的演化规律时，目标就是要找到非坐标依赖的扰动量。首先定义**规范变换**为物理量在无穷小坐标变换下的变换规则，而**规范不变量**为在规范变换下不变的物理量。考虑无穷小坐标变换

$$x^\alpha \to \tilde{x}^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha. \tag{17}$$

其中 ξ^α 为无穷小时空的函数。在该变换下，四-标量（矢量、张量）的扰动分别遵循如下的变换规则

$$\delta q \to \tilde{q} = \delta q -^{(0)} q_\alpha \xi^\alpha \tag{18}$$

$$\delta u_\alpha \to \delta \tilde{u}_\alpha = \delta u_\alpha -^{(0)} u_{\alpha,\gamma} \xi^\gamma -^{(0)} u_\gamma \xi^\gamma{}_{,\alpha} \tag{19}$$

$$\delta g_{\alpha\beta} \to \delta \tilde{g}_{\alpha\beta} = \delta g_{\alpha\beta} -^{(0)} g_{\alpha\beta,\gamma} \xi^\gamma -^{(0)} g_{\gamma\beta} \xi^\gamma{}_{,\alpha} -^{(0)} g_{\alpha\gamma} \xi^\gamma{}_{,\beta}. \tag{20}$$

当度规扰动为标量扰动时，扰动度规形式为

$$ds^2 = a^2 \big[(1+2\phi) d\eta^2 + 2B_{,i} dx^i d\eta - ((1-2\psi)\delta_{ij} - 2E_{,ij}) dx^i dx^j\big]. \tag{21}$$

其中 ϕ, ψ, B, E 为四个标量函数，根据张量扰动的规范变换可以得到它们的变换规则，再通过线性组合能够得到两个规范不变量

$$\begin{aligned} \Phi &\equiv \phi - \frac{1}{a}[a(B - E')]' \\ \Psi &\equiv \psi + \frac{a'}{a}(B - E'). \end{aligned} \tag{22}$$

规范不变量的存在表明四个标量函数中只有两个独立函数。通过人为引入两个约束条件，可以消去多余的非物理自由度。不同的引入约束条件的方式代表不同的规范，效果等价于选取一个唯一的坐标系或一类坐标簇。常用的规范有**纵向规范**和**同步规范**。

纵向规范：$B = E = 0$。度规的扰动形式由 ϕ、ψ 两个标量函数刻画，

$$ds^2 = a^2 \big[(1+2\phi) d\eta^2 - (1-2\psi)\delta_{ij} dx^i dx^j\big]. \tag{23}$$

从 (22) 可知在纵向规范下，规范不变量就是度规的扰动，特别有 $\Psi = \psi$，$\Phi = \phi$。

同步规范：$\phi = B = 0$。度规的扰动形式由 ψ、E 两个标量函数刻画，

$$ds^2 = a^2 \big[-((1-2\psi)\delta_{ij} - 2E_{,ij}) dx^i dx^j\big]. \tag{24}$$

从 (22) 可知在同步规范下，规范不变量与扰动的关系为

$$\Phi = \frac{1}{a}[aE']', \qquad \Psi = \psi - \frac{a'}{a} E'. \tag{25}$$

2.1 扰动方程

为了获知规范不变量如何随时间演化，首先要得到规范不变量满足的方程。由爱因斯坦方程很容易得到这个方程为

$$\overline{\delta G}^{\alpha}_{\beta} = 8\pi G \overline{\delta T}^{\alpha}{}_{\beta}. \tag{26}$$

规范不变量 $\overline{\delta T}^{\alpha}{}_{\beta}$ 可以分解为标量、矢量、张量三个互不影响的部分。背景为 FRW 度规的情况下，直接计算规范不变的张量扰动 $\overline{\delta G}^{\alpha}{}_{\beta}$ 可以得到三种扰动分别满足的方程组

标量扰动:

$$\Delta\Phi - 3\mathcal{H}(\Phi' + \mathcal{H}\Psi) = 4\pi G a^2 \overline{\delta T}^{0}{}_{0}, \tag{27}$$

$$(\Phi' + \mathcal{H}\Phi)_{,i} = 4\pi G a^2 \overline{\delta T}^{0}{}_{i}, \tag{28}$$

$$\begin{aligned}\left[\Phi'' + \mathcal{H}(2\Psi + \Phi)' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi + \frac{1}{2}\Delta(\Phi - \Psi)\right]\delta_{ij}\\ -\frac{1}{2}((\Phi - \Psi))_{,ij} = -4\pi G a^2 \overline{\delta T}^{i}{}_{j}.\end{aligned} \tag{29}$$

矢量扰动:

$$\Delta\overline{V}_i = 16\pi G a^2 \overline{\delta T}^{0}{}_{i(V)}, \tag{30}$$

$$\left(\overline{V}_{i,j} + \overline{V}_{j,i}\right)' + 2\mathcal{H}\left(\overline{V}_{i,j} + \overline{V}_{j,i}\right) = -16\pi G a^2 \overline{\delta T}^{i}{}_{j(V)}. \tag{31}$$

张量扰动:

$$h''_{ij} + 2\mathcal{H}h'_{ij} - \Delta h_{ij} = 16\pi G a^2 \overline{\delta T}^{i}{}_{j(T)}. \tag{32}$$

这些方程的成立不依赖于某个特定的坐标系。然而由于在纵向规范下，有特殊关系 $\Phi = \phi$ 和 $\Psi = \psi$，使我们能够在该规范下求得扰动满足的各种方程，再做替换便可直接得到规范不变量所满足的方程。

2.2 完美流体

得到扰动方程后，以完美流体为例，求解规范不变量的演化。完美流体的能动量张量为

$$T^{\alpha}_{\beta} = (\varepsilon + p)u^{\alpha}u_{\beta} - p\delta^{\alpha}{}_{\beta}. \tag{33}$$

相应的规范不变量为

$$\overline{\delta T}^{0}{}_{0} = \overline{\delta\varepsilon} \tag{34}$$

$$\overline{\delta T}^{0}{}_{i} = \frac{1}{a}(\varepsilon_0 + p_0)\left(\overline{\delta u}_{\shortparallel i} + \overline{\delta u}_{\perp i}\right) \tag{35}$$

$$\overline{\delta T}^{i}{}_{j} = -\overline{\delta p}\delta^{i}{}_{j}. \tag{36}$$

$\overline{\delta\varepsilon}$、$\overline{\delta u}_{\shortparallel i}$、$\overline{\delta p}$ 分别是能量密度扰动、无旋速度扰动、压强扰动对应的规范不变量。标量扰动的贡献只来自于这几项，正比于速度扰动的无源分量 $\overline{\delta u}_{\perp i}$ 的项只对矢量扰动产生贡献。
当 $i \neq j$ 时，$\delta T^i_j = 0$，方程 (29) 约化为

$$(\Phi - \Psi)_{,ij} = 0 \qquad (i \neq j). \tag{37}$$

有唯一解 $\Phi = \Psi$。从而标量扰动满足的方程组进一步被化简为

$$\Delta\Phi - 3\mathcal{H}(\Phi' + \mathcal{H}\Phi) = 4\pi G a^2 \overline{\delta\varepsilon}, \tag{38}$$

$$(a\Phi)'_{,i} = 4\pi G a^2 (\varepsilon_0 + p_0)\overline{\delta u}_{\shortparallel i}, \tag{39}$$

$$\Phi'' + 3\mathcal{H}\Phi' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi = 4\pi G a^2 \overline{\delta p}. \tag{40}$$