弗里德曼方程

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2}+\frac{K}{a^2}=\frac{8\pi G}{3}\rho \tag{1}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a}+\frac{2\dot{a}^2}{a^2}+\frac{2k}{a^2}=4\pi G(\rho-p). \tag{2}$$

由 $\dot{H}=\frac{\ddot{a}}{a}-\dot{H}^2$ 及 $H=\frac{\dot{a}}{a}$ 得到

$$H^2=\frac{8\pi G}{3}\rho-\frac{K}{a^2} \tag{3}$$

$$\dot{H}+H^2=\frac{\ddot{a}}{a}=-\frac{4\pi G}{3}(\rho+3p). \tag{4}$$

以及连续性方程

$$\dot{\rho}=-3H(\rho+p). \tag{5}$$

物态方程

$$p=w\rho \tag{6}$$

带入连续性方程 (5) 得到能量密度 ρ 与尺度因子 $a(t)$ 的关系

$$\rho a^{3(1+w)}=\text{constant} \tag{7}$$

将其带入弗里德曼方程 (3) 并令 $K=0$，解出哈勃参数及其导数为

$$H=H_0a^{-\frac{3(1+w)}{2}} \tag{8}$$

$$\dot{H}=-\frac{3(1+w)}{2}H^2 \tag{9}$$

下标 0 表示当前时刻，并取 $a_0=1$。进一步得到尺度因子 $a(t)$

$$a=H_0t^{\frac{2}{3(1+w)}}=H_0\begin{cases}t^{2/3}, & w=0\\ t^{1/2}, & w=1/3\end{cases} \tag{10}$$

因为物态参数 $w\in[-1,1]$，所以 $\dot{H}<0$ 恒成立，不论是加速膨胀还是减速膨胀期。因此在宇宙整个的演化过程中，哈勃参数 H 单调减小。根据哈勃定律，退行速度 $v_{tui}=Hd$。以光速 $c=1$ 为界，相距 $d=1/H$ 时，光子前进的距离正好被膨胀的效应抵消。这个临界距离被定义为哈勃半径

$$r_H=\frac{1}{H} \tag{11}$$

因而哈勃半径单调增大，未来能观测到的区域将越来越大。出于方便求解方程的目的，引入共动时间 η 作为新的时间变量，定义为

$$d\eta=\frac{dt}{a} \tag{12}$$

约定 $\dot{a}$ 和 a' 分别是对 t 和 η 的导数。根据链式规则，两种导数按照如下规则互相转换

$$\frac{d}{d\eta}=a\frac{d}{dt} \tag{13}$$

在共动坐标系下，可以定义对应的共动哈勃半径

$$r_{\mathcal{H}}=\frac{1}{\mathcal{H}}=\frac{1}{aH}=\frac{r_H}{a} \tag{14}$$

这里花体表示在共动坐标系中对应的物理量，$r_{\mathcal{H}}$ 的行为稍有不同,

$$r_{\mathcal{H}}=\frac{1}{\dot{a}}=\begin{cases}\text{单调减小}, & \ddot{a}>0\\ \text{单调增大}, & \dot{a}<0\end{cases} \tag{15}$$

根据方程 (9)，当 $w\sim-1$ 时，$\dot{H}\sim0$，故 $H\sim$ 常数。此时宇宙近似为德-西特宇宙，几乎以指数的速度快速膨胀。尺度因子的二阶导数 $\ddot{a}$ 为

$$\ddot{a}=a\left(\dot{H}+H^2\right)=-\frac{1+3w}{2}aH^2 \tag{16}$$

当强能量条件被破坏 $(\rho+3p)<0\Leftrightarrow(1+3w)<0$，导致 $\ddot{a}>0$，宇宙会加速膨胀。