Correction partiel

Janvier 2021

Exercice 1

On choisit y comme pivot. En faisant $L_2 \longleftarrow L_2 + L_1$ et $L_3 \longleftarrow L_3 - L_1$ on a

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & + & z & = & 1 \\ 2x & - & y & + & 2z & = & 2 \\ -x & + & y & - & z & = & 3 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & + & z & = & 1 \\ 4x & & & + & 3z & = & 3 \\ -3x & & & - & 2z & = & 2 \end{array}\right.$$

Puis, on effectue $L_3 \longleftarrow 4L_3 + 3L_2$. On obtient alors

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & + & z & = & 1 \\ 4x & & & + & 3z & = & 3 \\ -3x & & & - & 2z & = & 2 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & + & z & = & 1 \\ 4x & & & + & 3z & = & 3 \\ & & & & z & = & 17 \end{array}\right.$$

Le système est alors échelonné. Il suffit de le remonter.

$$\text{Conclusion : } \mathscr{S} = \{(-12, 8, 17)\}$$

Exercice 2

1. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$p \circ p(u) = p\left(p(u)\right) = p\left(\left(x, \frac{y+z}{2}, \frac{y+z}{2}\right)\right) = \left(x, \frac{\frac{y+z}{2} + \frac{y+z}{2}}{2}, \frac{\frac{y+z}{2} + \frac{y+z}{2}}{2}\right) = \left(x, \frac{\frac{2y+2z}{2}}{2}, \frac{\frac{2y+2z}{2}}{2}\right).$$

C'est-à-dire : $p \circ p(u) = \left(x, \frac{y+z}{2}, \frac{y+z}{2}\right) = p(u)$. Ainsi, on a $p \circ p = p$.

2. On a

$$\mathrm{Ker}(p) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ x = 0 \text{ et } \ y + z = 0\right\} = \{(0, y, -y);\ y \in \mathbb{R}\} = \{y(0, 1, -1);\ y \in \mathbb{R}\}$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Vect}(\{X\})$ avec $X = (0, 1, -1)$. On en déduit que $\{X\}$ est une famille génératrice de $\mathrm{Ker}(p)$. Comme $X \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, $\{X\}$ est libre. C'est donc une base de $\mathrm{Ker}(p)$.

3. On a

$$\mathrm{Im}(p) = \left\{\left(x, \frac{y+z}{2}, \frac{y+z}{2}\right),\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\right\} = \left\{x(1, 0, 0) + \frac{y+z}{2}(0, 1, 1);\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\right\}$$

Ainsi, $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Vect}(\{Y, Z\})$ avec $Y = (1, 0, 0)$ et $Z = (0, 1, 1)$. On en déduit que $\{Y, Z\}$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(p)$. Comme Y et Z ne sont pas colinéaires, $\{Y, Z\}$ est une famille libre. C'est donc une base de $\mathrm{Im}(p)$.

4. Le théorème du rang est :

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors,

$$\dim(E) = \dim\left(\mathrm{Ker}(f)\right) + \dim\left(\mathrm{Im}(f)\right)$$

Ici, $\dim(E) = \dim\left(\mathbb{R}^3\right) = 3$ et $\dim\left(\mathrm{Ker}(p)\right) + \dim\left(\mathrm{Im}(p)\right) = 1 + 2 = 3$. Nos résultats sont donc cohérents!

5. • Soit $u = (x, y, z) \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p)$.

   Alors, comme $u \in \mathrm{Ker}(p)$, x=0 et $y = -z$. De plus, comme $u \in \mathrm{Im}(p)$, $y = z$. Ainsi, $x = y = z = 0$, cad $u = 0_{\mathbb{R}^3}$.

   On a donc $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

   • On sait que $\mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Im}(p) \subset \mathbb{R}^3$. Or,

$$\dim(\mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Im}(p)) = \dim(\mathrm{Ker}(p)) + \dim(\mathrm{Im}(p)) - \dim(\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p)) = 1 + 2 - 0 = 3 = \dim\left(\mathbb{R}^3\right)$$

   Par conséquent, $\mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Im}(p) = \mathbb{R}^3$.

   On a bien montré que $\mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p) = \mathbb{R}^3$. p est la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.

Exercice 3

Dans l'exercice, on note $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$ les trois vecteurs de la base canonique et $u_1 = (0, -1, 1)$, $u_2 = (-1, -1, 1)$ et $u_3 = (-1, 0, -1)$ les trois vecteurs de la base $\mathscr{B}_2$.

1. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha\, u_1 + \beta\, u_2 + \gamma\, u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$. Alors,

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & - & \beta & - & \gamma & = & 0 \\ -\alpha & - & \beta & & & = & 0 \\ \alpha & + & \beta & - & \gamma & = & 0 \end{array}\right.$$

   $L_3 \longleftarrow L_3 + L_2$ donne $\gamma = 0$. Du coup, $\alpha = \beta = 0$ et la famille $\mathscr{B}_2$ est libre.

   Comme $\mathrm{Card}\,(\mathscr{B}_2) = 3 = \dim\left(\mathbb{R}^3\right)$, on en déduit que $\mathscr{B}_2$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. On calcule $f(e_1) = (3, 1, -1) = 3e_1 + 1e_2 - 1e_3$, $f(e_2) = (-2, 1, 0) = -2e_1 + 1e_2 + 0e_3$ et $f(e_3) = (-2, -1, 2) = -2e_1 - 1e_2 + 2e_3$. Ainsi,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. On calcule $f(u_1) = (0, -2, 2) = 0e_1 - 2e_2 + 2e_3$, $f(u_2) = (-3, -3, 3) = -3e_1 - 3e_2 + 3e_3$ et $f(u_3) = (-1, 0, -1) = -1e_1 + 0e_2 - 1e_3$. Ainsi,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ -2 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

4. De la question précédente, on remarque que $f(u_1) = 2u_1$, $f(u_2) = 3u_2$ et $f(u_3) = u_3$. Ainsi,

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. On calcule $id(u_1) = u_1 = 0e_1 - 1e_2 + 1e_3$, $id(u_2) = u_2 = -1e_1 - 1e_2 + 1e_3$ et $id(u_3) = u_3 = -1e_1 + 0e_2 - 1e_3$. Ainsi,

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

6. Soient $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$. On sait que $PU = V \Longleftrightarrow U = P^{-1}V$. Or

$$PU = \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & - & y & - & z & = & X \\ -x & - & y & + & & = & Y \\ x & + & y & - & z & = & Z \end{array} \right.$$

En faisant $L_3 \longleftarrow L_3 + L_2$, on obtient $-z = Y + Z$. Ainsi, $z = -Y - Z$. En reportant dans L_1, on a $y = -z - X = -X + Y + Z$. Ainsi, via L_2, $x = X - 2Y - Z$.

Ainsi, $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X - 2Y - Z \\ -X + Y + Z \\ -Y - Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = P^{-1}V$.

D'où, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

7. Via deux produits matriciels, on trouve que $P^{-1}AP = D$!

Exercice 4

On note $\{P_1, P_2, P_3\}$ les vecteurs de la base $\mathscr{B}_2$.

1. $P = 2X^2 + 4X + 2 = 2P_3$. Ainsi, $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2. Si $X' = \begin{pmatrix} c' \\ b' \\ a' \end{pmatrix}$ alors

   $P = c'P_1 + b'P_2 + a'P_3 = c'.1 + b'(1+X) + a'(1 + 2X + X^2) = (c' + b' + a').1 + (b' + 2a')X + a'X^2$. Par unicité des coordonnées de P dans la base canonique, on en déduit que $\left\{ \begin{array}{rcl} c & = & c' + b' + a' \\ b & = & b' + 2a' \\ a & = & a' \end{array} \right.$

   Ce système se réécrit

   $$\begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c' + b' + a' \\ b' + 2a' \\ a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c' \\ b' \\ a' \end{pmatrix}, \text{ c'est-à-dire, } X = PX' \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. De ce qui précède, on a $X' = P^{-1}X$. Il est facile de calculer P^{-1} car le système est déjà échelonné. On trouve $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi, $X' = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

   Ainsi, $P = -3X^2 - 2X + 1 = -3(X+1)^2 + 4(X+1)$.