EPITA

Mathématiques

Partiel S2

durée : 3 heures

Janvier 2021

Nom :

Prénom :

Classe :

NOTE :

Consignes :

— Documents et calculatrices interdits.
— Vous devez répondre directement sur les feuilles jointes.
— Aucune autre feuille, que celles agrafées fournies pour répondre, ne sera corrigée.
— Aucune réponse au crayon de papier ne sera corrigée.
— Toute personne ne respectant pas ces consignes se verra attribuer la note 00/ 20.

Exercice 1 (2 points)

Résoudre le système suivant en utilisant la méthode du pivot de Gauss (vous prendrez soin de bien faire apparaître les opérations effectuées au fur et à mesure).

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2x + y + z & = & 1 \\ 2x - y + 2z & = & 2 \\ -x + y - z & = & 3 \end{array}\right.$$

Exercice 2 (7 points)

On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$p : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \quad \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto \quad \left(x, \dfrac{y+z}{2}, \dfrac{y+z}{2}\right) \end{cases}$$

1. Montrer que $p \circ p = p$.

2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(p)$.

3. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(p)$.

4. Après avoir cité le théorème du rang, vérifier la cohérence de vos résultats.

5. Vérifier que $\mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p) = \mathbb{R}^3$. Décrire l'application p.

Exercice 3 (7 points)

Dans $\mathbb{R}^3$, on note $\mathscr{B}_1$ la base canonique et $\mathscr{B}_2 = \{(0,-1,1);(-1,-1,1);(-1,0,-1)\}$.

De plus, soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (3x-2y-2z, x+y-z, -x+2z) \end{array} \right.$

1. Montrer que $\mathscr{B}_2$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Trouver $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(f)$.

3. Trouver $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_1}(f)$.

4. Trouver $D = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(f)$.

5. Trouver $P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_1}(\mathrm{id})$ où id désigne l'application identité de $\mathbb{R}^3$.

6. Inverser P.

7. Calculer $P^{-1}AP$. Que remarquez-vous ?

Exercice 4 (4 points)

Dans $\mathbb{R}_2[X]$, on note $\mathscr{B}_1 = \left\{1, X, X^2\right\}$ la base canonique et $\mathscr{B}_2 = \left\{1, X+1, (X+1)^2\right\}$ une autre base.

Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$. On note $X = \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}$ les coordonnées de P dans $\mathscr{B}_1$ et $X' = \begin{pmatrix} c' \\ b' \\ a' \end{pmatrix}$ les coordonnées de P dans $\mathscr{B}_2$.

1. Prenons par exemple $P = 2X^2 + 4X + 2 \in \mathbb{R}_2[X]$. Que vaut X ? Que vaut X' ?

2. Revenons au cas général. On suppose X' connu. En écrivant P comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{B}_2$, trouver une relation matricielle entre X' et X.

3. Supposons $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Trouver X'. En déduire l'expression de P dans $\mathscr{B}_1$ d'une part et dans $\mathscr{B}_2$ d'autre part.