

Mathematik für Physik

Jonas Spinner
16. Mai 2022

Bitte nicht diese pdf weiterverbreiten,
sondern den Link <https://www.jspinner.de>.
Dort gibts die aktuelle Version!

Dies ist eine privat erstellte Zusammenfassung und richtet sich an einen Studenten, der das Thema bereits aus einer Einführungsvorlesung kennt. Übersichtlichkeit und Struktur sind mir besonders wichtig, deshalb schreibe ich in Stichpunkten. Ich kommentiere die Themen, die ich wichtig finde und zeige die Rechnungen, die ich lehrreich finde. Insbesondere versuche ich, Aussagen zu verallgemeinern und direkt zu formulieren, was sicherlich manchmal schief geht. Ich freue mich über Rückmeldungen!

Im Folgenden eine kleine Liste von Quellen, auf die ich beim Anfertigen dieser Zusammenfassung zurückgegriffen habe. Die Punkte sind nach abnehmender Relevanz geordnet.

- Einführungsvorlesungen Statistik: CGDA 2018(Quast), Rechnernutzung 2019/20(Husemann)

Inhaltsverzeichnis

1	Basics	3
1.1	Wiederkehrende Konzepte	3
1.1.1	Entwicklung in einer Basis	3
1.1.2	Entwicklung in einem kleinen Parameter	3
1.1.3	Physik = Mathe \otimes Interpretation	3
1.2	Polynome	3
1.2.1	Grundbegriffe	3
1.2.2	Einfache Herleitung Taylor-Entwicklung	4
1.2.3	Taylor-Entwicklung konvergiert nicht immer gegen die entwickelte Funktion	4
1.2.4	Faktor-Darstellung von Polynomen	5
1.2.5	Polynomdivision	5
1.2.6	Partialbruchzerlegung (PBZ)	5
1.3	Gemischtes	5
1.3.1	Funktionen als Spezialfall von Relationen	5
1.3.2	Intuition zur Legendre-Transformation	6
1.3.3	Fouriertransformation	6
1.3.4	Diagonalisierung von Matrizen	7
2	Reihen	8
2.1	Grundlagen	8
2.1.1	Grundbegriffe	8
2.1.2	Konvergenz (...)	8
2.1.3	Potenzreihen	8
2.1.4	Wichtige Beispiele	9
2.1.5	Weitere Themen	9
2.2	Absolut konvergente Reihen	9
2.2.1	Konvergenzbeweis (...)	9
2.2.2	Reihenwerte finden (...)	9
2.2.3	Konvergenzgrad erhöhen	9
2.3	Nicht absolut konvergente Reihen	10
2.3.1	Nicht absolut konvergente Reihen verstehen	10
2.3.2	Grundlagen von Resummation	11
2.3.3	Methoden für Reihen, von denen nur die ersten N Terme bekannt sind	12
3	Statistik	14
3.1	Grundlagen	14
3.1.1	Grundbegriffe	14
3.1.2	Wahrscheinlichkeitsverteilungen: PDF vs CDF	15
3.1.3	Statistische Momente	16
3.2	Fehlerrechnung	16
3.2.1	Grundlagen	16
3.2.2	Kovarianz	17
3.2.3	Fehlerfortpflanzung	17
3.3	Typische Verteilungen	18
3.3.1	Gaussverteilung/Normalverteilung $f(x; \mu, V) = \frac{1}{\sqrt{2\pi V}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2V}\right)$ mit $x \in \mathbb{R}$	18
3.3.2	Gleichverteilung $f(x; b, a) = \frac{1}{b-a}$ mit $x \in [a, b]$	18

3.3.3	Binomialverteilung $f(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ mit $k \in \{1, \dots, n\}$	18
3.3.4	Poissonverteilung $f(k; \lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ mit $k \in \mathbb{N}$	19
3.3.5	Exponentialverteilung $f(x; \lambda) = \frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda}$ mit $x \in \mathbb{R}^+$	19
3.3.6	Exotische Verteilungen	19
3.3.7	Zentraler Grenzwertsatz	19
3.4	Numerische Verfahren	20
3.4.1	Zufallszahlen	20
3.4.2	Bootstrapping-Methode	21
3.4.3	Monte-Carlo-Integration	21
3.5	Parameteranpassung (Fits)	21
3.5.1	χ^2 -Methode	21
3.5.2	Maximum-Likelihood-Methode	21
3.6	Hypothesentests	21
3.6.1	Grundlagen	21
3.6.2	Vorgehen	21
3.6.3	Wahl der Prüfgröße	22
3.6.4	Goodness-of-Fit-Test	22
3.6.5	Vergleich von 2 Stichproben	23
4	Funktionentheorie	24
4.0.1	Grundlagen	24
4.0.2	Cauchy-Riemann-Gleichungen $\partial_x u = \partial_y v, \partial_x v = -\partial_y u$ für $f(z) = u(z) + iv(z), z = x + iy$	24
4.0.3	Cauchy-Integral-Theorem $\oint_{\partial A} f(z) dz = 0$	25
4.0.4	Cauchy-Integral-Formel $\oint dz \frac{f(z)}{z-z_0} = 2\pi i f(z_0)$ und Residuensatz	25
4.0.5	Analytische Fortsetzung	26
5	Rechentricks für QFT	28
5.1	γ -Matrizen	28
5.1.1	Grundlagen	28
5.1.2	Darstellungen der γ -Matrizen	28
5.1.3	γ -Matrizen als Basis für hermitesche 4×4 -Matrizen	29
5.1.4	Identitäten	29
5.1.5	Spuren berechnen	29
5.1.6	γ_5 in D Dimensionen	30
5.2	Spinor-Bilineare	30
5.2.1	Grundlagen	30
5.2.2	Diskrete Transformationen	30
5.2.3	Fierz-Transformationen (...)	31
5.3	Quantenfeldtheorie mit Weyl-Spinoren (...)	31

Kapitel 1

Basics

1.1 Wiederkehrende Konzepte

1.1.1 Entwicklung in einer Basis

1.1.2 Entwicklung in einem kleinen Parameter

1.1.3 Physik = Mathe \otimes Interpretation

- Anschaulich: Theorien in der Physik sind meist “einfach nur” Themenbereiche der Mathematik mit physikalischer Interpretation der auftretenden mathematischen Konstrukte
- Quantenmechanik = Lineare Algebra \otimes Interpretation
 - Interpretation: Vektor als physikalischer Zustand, lineare Abbildung als Observable, ...
- Feldtheorie = Gruppentheorie, Funktionalanalysis \otimes Interpretation
 - Interpretation: Darstellungen der Gruppen als Felder (Gruppentheorie-Aspekt)
 - Benötige Funktionalanalysis zur Beschreibung der Felder
- Allgemeine Relativitätstheorie = Differentialgeometrie \otimes Interpretation
- Statistische Mechanik = Statistik \otimes Interpretation

1.2 Polynome

1.2.1 Grundbegriffe

- Funktion f heißt Polynom vom Grad n : $\iff f$ hat die Form $f(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k x^k$
 - “Faktor-Darstellung” von Polynomen: $f(x) = \alpha \prod_{k=0}^n (x - x_k)$
 - * Vorteil dieser Darstellung: Kann Nullstellen x_k des Polynoms ablesen
- Funktion f heißt gebrochen rationale Funktion : $\iff f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ mit Polynomen p, q
 - $f = \frac{p}{q}$ mit Polynomen p, q vom Grad n, m heißt echt gebrochen : $\iff n < m$
- Taylorentwicklung = Entwicklung einer Funktion in der Basis der Polynome
 - Komiker-Notation für Taylorreihe: $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) (x - x_0)^k = e^{\partial_x} f(x)|_{x_0}$

1.2.2 Einfache Herleitung Taylor-Entwicklung

- Sinn: Kann Taylor-Entwicklung mit einfachen Rechenregeln sukzessive herleiten
 - Idee: Herleitung der Taylor-Entwicklung $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \partial_t^n f(t) \Big|_{x_0} (x - x_0)^n$ aus Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung $\int_{x_0}^x dt \partial_t f(t) = f(x) - f(x_0)$ und partieller Integration $\int_{x_0}^x dt f(t) \partial_t g(t) = f(t)g(t) \Big|_{x_0} - \int dt g(t) \partial_t f(t)$
 - Notation: $a(t) \Big|_{x_0}^x := a(x) - a(x_0)$ und $a(t) \Big|_{x_0} := a(x_0)$
1. $f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x dt \partial_t f(t)$
 - Folgt aus Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
 - Bekomme 0ten Term der Taylor-Entwicklung, der Rest-Fehler steckt im Integral
 2. $\int_{x_0}^x dt \partial_t f(t) \partial_t (t - x) = (t - x) \partial_t f(t) \Big|_{x_0}^x - \int_{x_0}^x dt (t - x) \partial_t^2 f(t) = \partial_t f(t) \Big|_{x_0} (x - x_0) - \int_{x_0}^x dt (t - x) \partial_t^2 f(t)$
 - Erkenne geschickt $1 = \partial_t (t - x)$ in $\int_{x_0}^x dt \partial_t f(t) \Rightarrow$ Kann partiell integrieren
 - Term aus der oberen Grenze in $(t - x) \partial_t f(t) \Big|_{x_0}^x$ verschwindet
 - Bekomme 1ten Term der Taylor-Entwicklung dazu, der Rest-Fehler steckt im Integral
 3. $-\int_{x_0}^x dt \partial_t \frac{(t-x)^2}{2!} \partial_t^2 f(t) = -\frac{(t-x)^2}{2!} \partial_t^2 f(t) \Big|_{x_0}^x + \int_{x_0}^x dt \frac{(t-x)^2}{2!} \partial_t^3 f(t) = \frac{1}{2!} \partial_t^2 f(t) \Big|_{x_0} (x - x_0)^2 + \int_{x_0}^x dt \frac{(t-x)^2}{2!} \partial_t^3 f(t)$
 - Erkenne geschickt $(t - x) = \partial_t \frac{(t-x)^2}{2!} \Rightarrow$ Kann partiell integrieren, Term aus der oberen Grenze verschwindet
 - Bekomme 2ten Term der Taylor-Entwicklung dazu, der Rest-Fehler steckt im Integral
 4. $\int_{x_0}^x dt \partial_t \frac{(t-x)^3}{3!} \partial_t^3 f(t) = \frac{(t-x)^3}{3!} \partial_t^3 f(t) \Big|_{x_0}^x - \int_{x_0}^x dt \frac{(t-x)^3}{3!} \partial_t^4 f(t) = \frac{1}{3!} \partial_t^3 f(t) \Big|_{x_0} (x - x_0)^3 - \int_{x_0}^x dt \frac{(t-x)^3}{3!} \partial_t^4 f(t)$
 - Selbes Spiel mit $\frac{(t-x)^2}{2!} = \partial_t \frac{(t-x)^3}{3!}$
 5. Überlegungen, warum das Vorgehen für alle Ordnungen funktioniert
 - Bekomme in n -ter Ordnung einen Faktor $\frac{1}{n}$ durch Potenzregel: $\frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!} = \partial_t \frac{(t-x)^n}{n!}$
 - Alternierendes Vorzeichen $(-1)^n$ durch partielle Integration hebt sich mit dem alternierenden Vorzeichen aus $(x_0 - x)^n = (-1)^n (x - x_0)^n$ auf
 - Ehrliche Variante: Induktionsbeweis

1.2.3 Taylor-Entwicklung konvergiert nicht immer gegen die entwickelte Funktion

- Beispiel 1: $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \Rightarrow$ Taylorreihe konvergiert gegen die falsche Funktion
 - Jeder Term in der Taylor-Entwicklung verschwindet
 - * Terme in $\partial_x^n e^{-\frac{1}{x^2}}$ haben die Form $\frac{1}{x^m} e^{-\frac{1}{x^2}}$
 - * $\frac{1}{x^m} e^{-\frac{1}{x^2}} \Big|_{x=0} = \frac{1/x^n}{e^{-1/x^2}} \Big|_{x=0} = 0$, da man in $e^{\frac{1}{x^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{x^{2k}}$ für $\frac{1}{x} \rightarrow \infty$ immer einen Term findet, der stärker steigt als $\frac{1}{x^n}$
 - Idee funktioniert auch mit $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$, aber dann ist die Funktion bei $x = 0$ unstetig und es macht einen Unterschied, ob man den Grenzwert von unten oder oben bildet
 - Anwendungsbeispiel in Physik: Instanton-Übergänge
 - * Konkret: $\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle \approx e^{-\frac{8\pi^2}{\alpha_s^2}}$ mit QCD-Kopplungskonstante α_s
 - * Folge: Kann Instanton-Effekte nicht perturbativ behandeln

- Beispiel 2: $f(x) = \frac{1}{1-x} \Rightarrow$ Taylorreihe konvergiert nur für $x \in (-1, 1)$
 - Taylorentwicklung liefert $f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} x^n$
 - * Verwende $\partial_x^{n-1} \frac{1}{1-x} = n! \frac{1}{(1-x)^n}$
 - Kann für $x \in (-1, 1)$ geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ verwenden

1.2.4 Faktor-Darstellung von Polynomen

- Methoden
 - Grad n des Polynoms f hat $n \leq 2 \Rightarrow$ Kann Nullstellen mit quadratischer Ergänzung direkt bestimmen
 - Grad n des Polynoms f hat $n > 2 \Rightarrow$ Kein Schema X
 - * Nullstellen erraten: Teste "einfache Werte" für die Nullstellen (zB 0, 1, ...)
 - * Substitution: Falls $g(z) = f(x)$ mit $z = x^l$ ein Polynom ist, kann man zuerst die Nullstellen von g bestimmen und mit $z = x^l$ die Nullstellen von f folgern
 - * Habe Nullstelle x_0 gefunden \Rightarrow Kann f mit Polynomdivision $f' = f/(x - x_0)$ in Polynom f' vom Grad $n - 1$ umschreiben und Vorgehen wiederholen

1.2.5 Polynomdivision

- Polynomdivision = Schreibe unecht gebrochene Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ um in Polynom g und echt gebrochene Funktion $\frac{s}{q}$ bzw $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = g(x) + \frac{s(x)}{q(x)}$
- Vorgehen: Schriftlich Dividieren (Grundschule) mit Faktoren $(x - x_0)$ statt Zahlen als Divisor

1.2.6 Partialbruchzerlegung (PBZ)

- Partialbruchzerlegung = Schreibe echt gebrochene Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ um in $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\beta_k}{x-x_k}$
 - Notation: n ist der Grad von q , x_k sind die Nullstellen von q
 - Die Form $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\beta_k}{x-x_k}$ ist nützlich, da man f so einfach integrieren kann
- Vorgehen
 - Ziel: Bestimme Koeffizienten α_k in $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\beta_k}{x-x_k}$
 - 1. Vorarbeit für Partialbruchzerlegung
 - (a) Faktor-Darstellung für p, q finden
 - (b) Polynomdivision für f durchführen \Rightarrow Spalte Polynom ab (keine PBZ nötig) und führe PBZ für den echt gebrochenen Anteil durch
 - 2. Multipliziere Ansatz $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{x-x_k}$ mit $q(x) \Rightarrow$ Erhalte LGS $p(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \frac{q(x)}{x-x_k}$
 - Notiz: $\frac{q(x)}{x-x_k} = \prod_{j \neq k} (x - x_j)$ ist die Faktor-Darstellung von q ohne den Faktor $(x - x_k)$
 - 3. Löse LGS \Rightarrow Erhalte die Koeffizienten α_k

1.3 Gemischtes

1.3.1 Funktionen als Spezialfall von Relationen

- Eigenschaften von Abbildungen $f : X \rightarrow Y$
 - Relation heißt links-/rechtseindeutig: \iff Jedem $x \in X / y \in Y$ wird durch f genau ein $y \in Y / x \in X$ zugeordnet
 - * Intuitiv: Links-/rechtseindeutig = (Von rechts/links) nach links/rechts eindeutig

- Relation heißt links-/rechtstotal : \iff Jedes $y \in Y/x \in X$ ist durch die Relation mit mindestens einem $x \in X/y \in Y$ verbunden
 - * Intuitiv: Links-/rechtstotal = (Von rechts/links) nach links/rechts total bzw jeder Punkt wird getroffen (in dieser Richtung)
 - * Kann jede nicht-links-/rechts-totale Relation links-/rechtstotal machen, indem ich die Elemente aus Y/X entferne, die nicht durch die Relation erreicht werden
- Relation f heißt Funktion : $\iff f$ ist linkseindeutig und rechtstotal
 - Funktion f heißt injektiv : \iff Funktion f ist zusätzlich rechtseindeutig
 - Funktion f heißt surjektiv : \iff Funktion f ist zusätzlich linkstotal
 - Funktion f heißt bijektiv : \iff Funktion f ist injektiv und surjektiv

1.3.2 Intuition zur Legendre-Transformation

1.3.3 Fouriertransformation

- Definition: Fouriertransformierte $\tilde{\phi}(k)$ einer Funktion $\phi(x)$
 - $\phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \tilde{\phi}(k) e^{ikx}$
 - $\tilde{\phi}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \phi(x) e^{-ikx}$
 - Bedingungen an mögliche Konventionen
 - * Produkt der Vorfaktoren in ϕ und $\tilde{\phi}$ muss $\frac{1}{2\pi}$ sein
 - * exp-Funktionen in ϕ und $\tilde{\phi}$ müssen entgegengesetztes Vorzeichen haben
 - Relation $\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx}$
 - Interpretationen
 - * Fouriertransformierte von 1 ist $\delta(x)$ und umgekehrt
 - * Fouriertransformation ist invertierbar
1. Integraldarstellung für θ -Funktion $\theta(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{e^{ikx}}{k-i\epsilon}$ für $\epsilon \rightarrow 0+$
 - Strategie: Rechne $\theta = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$ nach mit Residuensatz
- (a) Addiere geschickte 0: $\theta(x) = \theta(x) + I_{\text{Bogen}} - I_{\text{Bogen}} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} dk \frac{e^{ikx}}{k-i\epsilon} - I_{\text{Bogen}}$
- (b) Wähle Kurve γ so, dass $I_{\text{Bogen}} = 0$
- Berechne Bogenintegral mit Parametrisierung $k = \rho e^{i\phi}$: $I_{\text{Bogen}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{Bogen}} dk \frac{e^{ikx}}{k-i\epsilon}$
 $= \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{Bogen}} d\phi i \rho e^{i\phi} \frac{e^{i x \rho e^{i\phi}}}{\rho e^{i\phi} - i\epsilon} = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{Bogen}} d\phi i e^{i \rho x \cos \phi} e^{-\rho x \sin \phi}$
 - $x > 0$: Verwende Kurve um Halbkreis mit $\text{Im} k > 0 \Rightarrow x \sin \phi > 0$
 - $x < 0$: Verwende Kurve um Halbkreis mit $\text{Im} k < 0 \Rightarrow x \sin \phi > 0$
- (c) Residuum berechnen mit Residuensatz
- $x > 0$: Integrand $f(k) = e^{ikx}$ hat Residuum bei $k_0 = i\epsilon \Rightarrow \theta(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} dk \frac{f(k)}{k-i\epsilon} = \frac{1}{2\pi i} 2\pi i f(k_0) = f(k_0) = e^{-\epsilon x} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0+} 1$
 - $x < 0$: Kein Residuum eingeschlossen $\Rightarrow \theta(x) = 0$
2. Verwende Zusammenhang zwischen θ -Funktion und δ -Funktion:

$$\delta(x) = \frac{d\theta(x)}{dx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \frac{k}{k-i\epsilon} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0+} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx}$$
 - Kann hier den Grenzwert $\epsilon \rightarrow 0+$ durchführen, da der Integrand hier keinen Pol hat

1.3.4 Diagonalisierung von Matrizen

- Eigenwert-Zerlegung
 - Anschaulich: Klassische “Diagonalisierung”, wie man sie aus dem Grundstudium kennt
 - Aussage: $A \in \mathbb{C}^{n \times n}, [A, A^\dagger] = 0 \Rightarrow A$ ist diagonalisierbar bzw $\exists_{U \in \mathbb{C}^{n \times n}, U^\dagger U = 1} A = U D U^{-1}$ mit Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$
 - * Diagonaleinträge von D heißen Eigenwerte und sind Eigenschaften von A
 - * Notiz: “Normale” Operatoren ($[A, A^\dagger] = 0$) sind Verallgemeinerung von unitären ($A^\dagger A = 1$) und hermiteschen ($A^\dagger = A$) Operatoren, die beide diese Bedingung erfüllen
 - 1. $A = \frac{A+A^\dagger}{2} + \frac{iA-iA^\dagger}{2i}$ kann zerlegt werden in hermiteschen Operatoren $A+A^\dagger$ und antihermiteschen Operator $iA-iA^\dagger$, die beide einzeln diagonalisierbar sind
 - 2. $[A, A^\dagger] = 0 \Rightarrow [A+A^\dagger, iA-iA^\dagger] = 0$ bzw $A+A^\dagger, iA-iA^\dagger$ sind simultan diagonalisierbar $\Rightarrow A$ ist diagonalisierbar
 - Vorgehen: Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmen, U enthält Eigenvektoren als Spalten/Zeilen (?)
- Singular value decomposition
 - Anschaulich: Verallgemeinerung der Eigenwert-Zerlegung auf beliebige Matrizen $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$
 - * Für Eigenwert-Zerlegung musste A normal ($[A, A^\dagger] = 0$) und quadratisch sein, diese Forderungen gibt es hier nicht mehr
 - * Feeling: Tausche eine zusätzliche beliebige Matrix für die Forderung “Normaloperator” (im Vergleich zur Eigenwert-Zerlegung)
 - Aussage: $A \in \mathbb{C}^{n \times m} \Rightarrow \exists_{U \in \mathbb{C}^{m \times n}, V \in \mathbb{C}^{n \times n}, U^\dagger U = 1, V^\dagger V = 1} A = U D V^*$ mit (Rechteck-)Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{m \times n}$
 - * Diagonaleinträge von D heißen singular values und sind Eigenschaften von A
 - Vorgehen: Kompliziert...
 - Bsp in Physik: CKM-Matrix
- Takagi factorisation
 - Aussage: $A \in \mathbb{C}^{n \times n}, A^T = A \Rightarrow \exists_{U \in \mathbb{C}^{n \times n}, U^\dagger U = 1} A = U D U^T$ mit Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$
 - Vorgehen: Kompliziert...
 - Bsp in Physik: PMNS-Matrix für Majorana-Neutrinos
- Nützlich: Polzerlegung
 - Anschaulich: Keine Diagonalisierung, aber nützliche Zerlegung von $\mathbb{C}^{n \times n}$ -Matrizen
 - Aussage: $A \in \mathbb{C}^{n \times n} \Rightarrow \exists_{H, U \in \mathbb{C}^{n \times n}, H^\dagger = H, U^\dagger U = 1} A = H U$
- Muss man die Diagonalisierung explizit durchführen können?
 - Grundstudium: Ja.
 - Nach Quantenmechanik: “Ich wähle die Basis, in der die Matrix diagonal ist, und schaue mir darin die Physik an.”

Kapitel 2

Reihen

2.1 Grundlagen

2.1.1 Grundbegriffe

- Reihe: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$
- Kann Reihen als Spezialfall von Folgen verstehen: $f_N = \sum_{n=0}^N a_n$

2.1.2 Konvergenz (...)

- Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt konvergent : \iff Zugehörige Folge ist konvergent
 - $a_n \in \mathbb{C} \Rightarrow \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\operatorname{Im} \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ müssen beide konvergent sein, damit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent heißt
 - Konvergenz bringt nicht viel (siehe Riemannscher Umordnungssatz) – Die gewollte Eigenschaft ist “absolute Konvergenz”
- Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt absolut konvergent : $\iff \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ ist konvergent

2.1.3 Potenzreihen

- Potenzreihe: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$
- Konvergenzradius R
 - Aussage: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ konvergiert absolut $\forall x |x - x_0| < R$ und divergiert $\forall x |x - x_0| > R$
 - * Für $|x - x_0| = R$ ist keine allgemeine Aussage möglich
 - Expliziter Ausdruck für R : $R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ (Satz von Cauchy-Hadamard)
 - R aus Quotientenkriterium
 - * $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha \Rightarrow R = \frac{1}{\alpha}$
 - Notiz: Alle Potenzreihen konvergieren für $x = x_0$
- Gleichmäßige Konvergenz (...)
- Asymptotische Potenzreihen
 - Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ heißt asymptotisch zur Funktion f : \iff Für den Abstand $\epsilon_N(x) = f(x) - \sum_{n=0}^N a_n (x - x_0)^n$ gilt für $x \rightarrow x_0$ und festes N $\epsilon_N(x) \ll (x - x_0)^N$
 - * Anschaulich: Halte N fest und suche ein x , für das die Bedingung $\epsilon_N(x) \ll (x - x_0)^N$ gilt (?)
 - Asymptotische Potenzreihen müssen nicht konvergent sein

2.1.4 Wichtige Beispiele

- Geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-q}$ ist konvergent
- Harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist nicht konvergent
- Exponentialreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} =: e^x$ ist konvergent
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

2.1.5 Weitere Themen

- Cauchyprodukt: $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$
 - Anschaulich:
 - Begründung: Schreibe die zu addierenden Terme in ein (unendlich großes) Quadrat und ändere die Summationsreihenfolge von entlang den Achsen zu diagonal

2.2 Absolut konvergente Reihen

2.2.1 Konvergenzbeweis (...)

- Monotoniekriterium
- Majoranten-/Minorantenkriterium
- Leibnizkriterium
- Wurzelkriterium
- Quotientenkriterium

2.2.2 Reihenwerte finden (...)

- Bekannte Reihen identifizieren
 - Beispiele
 - * $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$
 - * $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$, sin/cos, sinh/cosh
 - * zeta-Funktion
- Teleskopsumme
- Feynman-Trick
 - Trick: Ziehe Ableitung aus der Reihe (Ableitung und Summation vertauschen), identifiziere Reihenwert und führe dann Ableitung aus
 - Bsp: $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \partial_x \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} \stackrel{m=n+1}{=} \partial_x \sum_{m=1}^{\infty} x^m = \partial_x \frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}$

2.2.3 Konvergenzgrad erhöhen

- Motivation: Reihen können sehr langsam konvergieren \Rightarrow Will Reihe umschreiben, damit sie schneller konvergiert
 - Bsp: Oszillationen, geringe Änderungsrate
- Shanks-Transformation
 - Anschaulich: Redefiniere die Reihe $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (bzw die Partialsummen $S_N = \sum_{n=0}^N a_n$) zu neuen Partialsummen \tilde{S}_n , die (hoffentlich) schneller konvergieren

- * Notiz: Diese Methode liefert keine analytischen Ergebnisse für die Reihe, sondern hat zum Ziel, mit möglichst wenig Partialsummen schon sehr nahe an den exakten Wert der Reihe zu kommen
- Voraussetzungen: Reihe S hat die Form $S = S_N + R_N$ mit Partialsumme $S_N = S + \alpha q^N$ bzw Rest $R_N = -\alpha q^N$ mit beliebigem α, q
 - * Kann Shanks-Transformation auch anwenden, wenn die Reihe nur "ungefähr" diese Form hat – Umso besser die Form passt, desto besser wird das Ergebnis
- Vorgehen: $\tilde{S}_n = \frac{S_{n+1}S_{n-1} - S_n^2}{S_{n+1} + S_{n-1} - 2S_n}$
 - * Herleitung
 - Strategie: Verwende 3 Relationen $S_n = S + \alpha q^n$ (für unterschiedliches n), um S (unabhängig von q, α) zu bestimmen
 - 1. 3 Relationen: $S_{n+1} = S + \alpha q^{n+1}, S_n = S + \alpha q^n, S_{n-1} = S + \alpha q^{n-1}$
 - 2. Eliminiere α : $S_{n+1} - S = \alpha q^{n+1} = q\alpha q^n = q(S_n - S)$ und $(n \rightarrow n-1) S_n - S = q(S_{n-1} - S)$
 - 3. Eliminiere q : $q = \frac{S_{n+1} - S}{S_n - S} = \frac{S_n - S}{S_{n-1} - S} \Rightarrow S(S_{n+1} + S_{n-1} - 2S_n) = S_{n+1}S_{n-1} - S_n^2 \Rightarrow S = \frac{S_{n+1}S_{n-1} - S_n^2}{S_{n+1} + S_{n-1} - 2S_n}$
 - 4. Ansatz $S_n = S + \alpha q^n$ war nicht exakt \Rightarrow Interpretiere Ergebnis für S als Näherung für die Partialsumme \tilde{S}_n (konvergiert hoffentlich schneller als S_n)
- Notiz: Kann das Ergebnis nochmal Shanks-transformieren und die Konvergenz damit beliebig oft verbessern
- Verallgemeinerung (k te Shanks-Transformation): Ansatz $S_n = S + \sum_{m=1}^k \alpha_m q_m^n \Rightarrow$ Finde Ausdruck für \tilde{S}_n mit Determinante von Werten von S_n
- Richardson-Extrapolation
 - Anschaulich: Gleiches Konzept wie Shanks-Transformation, aber mit anderem Ansatz
 - Voraussetzung: Reihe hat die Form $S_n = S + \sum_{k=1}^n \frac{Q_k}{N^k}$
 - * Kann Richardson-Extrapolation auch anwenden, wenn die Reihe nur "ungefähr" diese Form hat – Umso besser die Form passt, desto besser wird das Ergebnis
 - * Unterschied zur Shanks-Transformation: Habe hier n statt nur 2 Parameter \Rightarrow Kann Konvergenz auch für festes N beliebig gut verbessern
 - Vorgehen: $\tilde{S}_N^n = \sum_{k=0}^n \frac{S_{N+k} (N+k)^n (-1)^{k+n}}{k! (n-k)!}$ für beliebiges $n \geq 0$
 - * Herleitungsstrategie: Bestimme alle $Q_k, k = 0, \dots, n$ und S , indem ich $n+1$ mal die Voraussetzung verwende (mit unterschiedlichem N); interpretiere dann $\tilde{S}_N^n := S$
 - * Naiv: Herleitung für $n = 1$
 1. Voraussetzung: $S_N = S + \frac{Q_1}{N}, S_{N+1} = S + \frac{Q_1}{N+1}$
 2. Eliminiere Q_1 : $Q_1 = (N+1)(S_{N+1} - S) = N(S_N - S) \Rightarrow S(N+1 - N) = S = (N+1)S_{N+1} - NS_N =: \tilde{S}_N^1$
 - * Beweis des allgemeinen Ausdrucks (...)
 - Herleitung von $1 = \sum_{k=0}^n \frac{(n+k)^n (-1)^{k+n}}{k! (n-k)!} (?)$
 - * Bsp: $\tilde{S}_N^0 = S_N, \tilde{S}_N^1 = (N+1)S_{N+1} - NS_N, \tilde{S}_N^2 = \frac{1}{2} \left((N+2)^2 S_{N+2} - 2(N+1)^2 S_{N+1} + N^2 S_N \right)$

2.3 Nicht absolut konvergente Reihen

2.3.1 Nicht absolut konvergente Reihen verstehen

- Riemannscher Umordnungssatz
 - Anschaulich: Für konvergente (aber nicht absolut konvergente) Reihen ist die Summationsreihenfolge entscheidend
 - Aussage: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist konvergent, aber nicht absolut konvergent $\Rightarrow \forall_{s \in \mathbb{R}} \exists$ Umordnung von $a_n : \sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$
 - Fazit: Summationsreihenfolge ist relevant und legt den Wert der Reihe fest

- Kann man nicht-konvergente Reihen resumieren?
 - Vermutung: Funktioniert mit analytischer Fortsetzung von irgendeinem Parameter der Reihe

2.3.2 Grundlagen von Resummation

- Resummation = Der Prozess, einer nicht wohldefinierten (= nicht absolut konvergenten) Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ einen wohldefinierten Wert S zuzuweisen
 - Notation: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n := S$ mit einem irgendwie definierten Objekt S (hängt vom Resummations-Schema ab)
 - Anforderung:
- Resummations-Axiome
 - Anschaulich: Um nicht absolut konvergenten Reihen eindeutige Werte zuordnen zu können, muss man spezielle Axiome für sie einführen
 - * Die “normalen” Axiome zum Rechnen in \mathbb{R} führen wegen dem Riemannschen Umordnungssatz zu nicht eindeutigen Ergebnissen
 - * Alle Resummations-Tricks (zB Euler-/Borel-Resummation) müssen diese Axiome erfüllen, um eindeutige Ergebnisse zu liefern
 - Wahl der Axiome
 - * Kann erstes Element rausziehen: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n$
 - Notiz: Betonung liegt auf “erstes Element” – Um andere Elemente rauszuziehen, müsste man Kommutativität verwenden
 - * Linearität in Summanden derselben Ordnung $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) + \beta \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \right)$
 - * Keine Axiome: Kommutativität ($a + b = b + a$) und Assoziativität ($a + (b + c) = (a + b) + c$)
 - Begründung: Umordnungen (siehe Riemannscher Umordnungssatz) benötigen verwenden Kommutativität und Assoziativität \Rightarrow Will diese Operationen explizit nicht
 - Beispiele für direkte Resummation mit den Resummations-Axiomen
 - * Anschaulich: Direkte Resummation funktioniert prinzipiell immer, wird aber schnell kompliziert
 - * $S := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = 1 - \left(1 - 1 + 1 - 1 + \dots \right) = 1 - S \Rightarrow 2S = 1 \Rightarrow S = \frac{1}{2}$
- Euler-Resummation $\sum_{n=0}^{\infty} a_n := \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$
 - Anschaulich: Mache die Reihe zu einer Potenzreihe und nehme an, dass diese konvergiert mit Konvergenzradius $R > 1$
 - * Falls die Potenzreihe nicht konvergiert, funktioniert Euler-Resummation nicht und man benötigt ein anderes Resummationsschema
 - Beispiele
 - * $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n := \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1 - (-x)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}$
 - * $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n := \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^n = \lim_{x \rightarrow 1^-} x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^{n-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} x \partial_x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n = \lim_{x \rightarrow 1^-} x \partial_x \frac{1}{1+x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(-\frac{x}{(1+x)^2} \right) = -\frac{1}{4}$
- Borel-Resummation $\sum_{n=0}^{\infty} a_n := \int_0^{\infty} dx e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$
 - Anschaulich: Schreibe die Summe geschickt mit der Identität $n! = \int_0^{\infty} dx e^{-x} x^n$ um
 - * Vorteil: Borel-Resummation liefert Faktor $\frac{1}{n!}$ in der Summe \Rightarrow Kann besonders viele Reihen resumieren
 - * Herleitung: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \times n! = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \times \int_0^{\infty} dx e^{-x} x^n = \int_0^{\infty} dx e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$
 - Verwende Integraldarstellung der Gamma-Funktion bzw der Fakultät $n! = \Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} dx e^{-x} x^n$ für $n \in \mathbb{N}$
 - Beispiele

- * $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n := \int_0^{\infty} dx e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \int_0^{\infty} dx e^{-x} e^{-x} = -\frac{1}{2} e^{-2x} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2}$
- * $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n := \int_0^{\infty} dx e^{-x} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \frac{x^n}{n!} = \int_0^{\infty} dx e^{-x} (-x) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$
 $= \int_0^{\infty} dx e^{-x} (-x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \int_0^{\infty} dx (-x) e^{-2x} = \int_0^{\infty} dx (-x) e^{-\alpha x} \Big|_{\alpha=2} = \partial_{\alpha} \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \Big|_{\alpha=2}$
 $= \partial_{\alpha} \frac{1}{\alpha} \Big|_{\alpha=2} = -\frac{1}{\alpha^2} \Big|_{\alpha=2} = -\frac{1}{4}$
- * $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n! := \int_0^{\infty} dx e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \int_0^{\infty} dx \frac{e^{-x}}{1+x} = -e \text{Ei}(-1) \approx 0.596347$
 - Notiz: Diese Reihe kann man mit Euler-Resummation nicht resumieren, da $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} n! (-x)^n$ immer noch divergent ist

2.3.3 Methoden für Reihen, von denen nur die ersten N Terme bekannt sind

- Motivation: Oft sind nur die ersten N Koeffizienten einer Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ bekannt \Rightarrow Möchte Methoden, mit denen ich daraus eine bessere Näherung für $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ bekomme
 - Anspruch: Will besseres Ergebnis als $\sum_{n=0}^N a_n x^n$
 - Bsp: Störungstheorie in QM oder QFT – Möchte aus Ergebnissen in endlicher Ordnung Störungstheorie ein verbessertes Ergebnis konstruieren
- Padé-Approximation
 - Anschaulich: Nähere Beginn einer Potenzreihe $\sum_{k=0}^{N+M} a_k x^k$ als eine gebrochenrationale Funktion $P_{N,M}(x) = \frac{\sum_{n=0}^N A_n x^n}{\sum_{m=0}^M B_m x^m}$
 - * Notiz: In der Praxis liefert die “diagonale Padé-Approximation” $P_{N,N}$ (bzw $N = M$) meist die beste Näherung an $\sum_{k=0}^{N+M} a_k x^k$
 - * Notiz: Dies ist keine Resummations-Methode, sondern eine Näherung für eine Potenzreihe
 - Vorgehen
 - * Strategie: Bestimme Koeffizienten A_n, B_m aus Koeffizientenvergleich in der Bedingung $\left(\sum_{k=0}^{N+M} a_k x^k \right) \left(\sum_{m=0}^M B_m x^m \right) + \mathcal{O}(x^{M+N+1}) = \sum_{n=0}^N A_n x^n$
 - Erhalte $N + M + 1$ Bedingungen
 - Koeffizienten A_0, B_0 legen gemeinsam die Normierung fest \Rightarrow Kann oBdA $B_0 = 1$ wählen
 - * Gleichungssystem explizit herleiten
 1. Ausgangspunkt: $\left(\sum_{k=0}^{N+M} a_k x^k \right) \left(\sum_{m=0}^M B_m x^m \right) + \mathcal{O}(x^{M+N+1}) = \sum_{n=0}^N A_n x^n$
 2. Verwende Cauchy-Produkt: $\left(\sum_{k=0}^{N+M} a_k x^k \right) \left(\sum_{m=0}^M B_m x^m \right) + \mathcal{O}(x^{N+M+1})$
 $= \sum_{k=0}^{N+M} x^k \sum_{m=0}^k a_{k-m} B_m + \mathcal{O}(x^{N+M+1})$
 3. Koeffizientenvergleich in x^k :
 $\sum_{n=0}^N A_n x^n = \sum_{k=0}^{N+M} x^k \sum_{m=0}^k a_{k-m} B_m = \sum_{k=0}^N x^k \sum_{m=0}^k a_{k-m} B_m + \sum_{k=N+1}^{N+M} x^k \sum_{m=0}^k a_{k-m} B_m$
 $\Rightarrow 0 = \sum_{m=0}^k a_{k-m} B_m = a_k + \sum_{m=1}^k a_{k-m} B_m$ von $x^k, k \in [N+1, N+M]$ und
 $A_k = \sum_{m=0}^k a_{k-m} B_m$ aus $x^k, k \in [0, N]$
- 1. Bestimme die M Koeffizienten B_n aus den Bedingungen $0 = a_k + \sum_{m=1}^k a_{k-m} B_m$ für $k \in [N+1, \dots, N+M]$
 - * Explizit: Muss LGS $\alpha_{ij} B_j = \beta_i$ mit $\alpha_{ij} = a_{N+i-j}, \beta_i = -a_{N+i}$ lösen für $i, j \in [1, \dots, M]$
 - * Notiz: $\sum_{m=0}^k a_{k-m} B_m = a_k + \sum_{m=1}^k a_{k-m} B_m$ wegen $B_0 = 1$
 - * Trick: Diese Gleichungen hängen nicht von den A_n ab
- 2. Bestimme die $N+1$ Koeffizienten A_n mit $A_k = \sum_{m=0}^k a_{k-m} B_m$ für $k \in [0, \dots, N]$
 - * Hier muss man kein LGS lösen, die Koeffizienten stehen direkt da
- * Bsp: $N = M = 1$
 1. Ansatz $P_{1,1}(x) = \frac{A_0 + A_1 x}{1 + B_1 x}$
 2. $P_{1,1}(x) \stackrel{!}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ liefert Bedingung $A_0 + A_1 x = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2)(1 + B_1 x) = a_0 + (a_1 + B_1 a_0)x + (a_2 + B_1 a_1)x^2$

3. Koeffizientenvergleich $\Rightarrow A_0 = a_0, A_1 = a_1 + B_1 a_0, a_2 + B_1 a_1 = 0$

$$\Rightarrow B_1 = -\frac{a_2}{a_1}, A_1 = a_1 + a_0 B_1 = a_1 - \frac{a_0 a_2}{a_1}$$

4. Direkter Weg mit allgemeinen Formeln:

(Triviales) LGS für B_1 : $\alpha_{11} B_1 = -\beta_1$ mit $\alpha_{11} = a_{1+1-1} = a_1, \beta_1 = -a_{1+1} = -a_2 \Rightarrow B_1 = \frac{\beta_1}{\alpha_{11}} = -\frac{a_2}{a_1}$,

$$A_0 \sum_{m=0}^0 a_{0-m} B_m = a_0 B_0 = a_0, A_1 = \sum_{m=0}^1 a_{1-m} B_m = a_1 B_0 + a_0 B_1 = a_1 + a_0 B_1 = a_1 - \frac{a_0 a_2}{a_1}$$

• Continued fractions

– Anschaulich: Nähere beliebige Funktion $f(x)$ durch einen verschachtelten Bruch $P_N(x) = \frac{c_0}{1 + \frac{c_1 x}{1 + \frac{c_2 x}{1 + \dots \frac{c_{N-1} x}{1 + c_N z}}}}$

* Benötige N Ableitungen von $f(x)$ bzw die ersten $N + 1$ Koeffizienten der Potenzreihe von $f(x)$, um einen continued fraction der Güte N zu erhalten

* Notiz: Dies ist keine Resummations-Methode, sondern eine Näherung für eine Potenzreihe

– Vorgehen

1. Bestimme abgeleitete Funktionen $f_i(x) := \frac{f_{i-1}(0) - f_{i-1}(x)}{x f_{i-1}(x)}$

2. Bestimme Nullstellen $f_i(0) = -\partial_x \log f_{i-1}(x) \Big|_{x=0} \Rightarrow c_i = f_i(0)$

$$* f_i(0) = \frac{f_{i-1}(0) - f_{i-1}(x)}{x f_{i-1}(x)} \Big|_{x=0} \stackrel{\text{l'Hospital}}{=} -\frac{\partial_x f_{i-1}(x)}{f_{i-1}(x) - x \partial_x f_{i-1}(x)} \Big|_{x=0} = -\frac{\partial_x f_{i-1}(x)}{f_{i-1}(x)} \Big|_{x=0} = -\partial_x \log f_{i-1}(x)$$

* Begründung für $c_i = f_i(0)$: Setze Relation $f_i(x) = \frac{f_i(0)}{1 + x f_{i+1}(x)}$ (Umkehrung von der Definition der $f_i(x)$) rekursiv ein

– Zusammenhang mit Padé-Approximation (...)

• Padé-Borel-Approximation

– Anschaulich: Praxistaugliche Variante der Borel-Resummation (wenn nur endlich viele Terme der Potenzreihe bekannt sind) – Berechne erst die Padé-Approximation, resummiere sie dann mit Borel-Resummation

* Notiz: Hier wird zuerst eine Potenzreihe genähert (Padé-Approximation) und dann zusätzlich resummiert (Borel-Resummation), um mögliche (nicht absoluten) Divergenzen interpretieren zu können

* Durch Borel-Resummation wird auch eine mögliche nicht-absolute Konvergenz behandelt \Rightarrow Dies ist die allgemeinste Methode, um ein gutes Ergebnis aus dem Beginn einer Reihe zu erhalten

– Vorgehen

* Situation: Habe Beginn einer Potenzreihe $Z(x) = \sum_{k=0}^{N+M} a_k x^k$ gegeben

1. Berechne Padé-Approximation für die Borel-Transformierte $\mathcal{B}Z_{N,N}(x) = \sum_{k=0}^{2N} \frac{a_k}{k!} x^k$

* Berechne die "diagonale" Padé-Approximation $N = M$ bzw $Z_{N,N}$

* Vorgehen wie für normale Padé-Approximation, aber mit zusätzlichem Faktor $\frac{1}{n!}$ für die Koeffizienten

2. Borel-resummiere (= Laplace-transformiere) das Ergebnis $Z(x) = \int_0^\infty dt e^{-t} \mathcal{B}Z(xt)$

Kapitel 3

Statistik

3.1 Grundlagen

3.1.1 Grundbegriffe

- Ergebnisse
 - Ergebnis: Mögliches Ergebnis eines Zufallsexperiments
 - * Bsp: “Kopf” beim Münzwerfen, “4” beim Würfeln, “Temperatur in K um 7 Uhr morgens”
 - Ergebnisraum Ω : Menge aller möglichen Ergebnisse
 - * Ω kann endlich, abzählbar unendlich oder überabzählbar unendlich viele Elemente enthalten
- Ereignisse
 - Ereignis: Menge möglicher Ergebnisse
 - * Bsp: “Kopf” beim Münzwerfen, “gerade Zahl” beim Würfeln, “Temperatur in K um 7 Uhr morgens enthält die Zahlenfolge 3141592654”
 - Ereignismenge E : Menge aller möglicher Ereignisse
 - * E ist die Potenzmenge von Ω bzw $E = 2^\Omega$
 - Notation: A, B, \dots für Ereignisse
 - Ereignisse sind Mengen \Rightarrow Kann damit Mengenlehre machen: Vereinigung $A \cup B$, Durchschnitt $A \cap B$, Gegenereignis \bar{A} , Differenz $A \setminus B$, disjunkte Ereignisse $A \cap B = \emptyset$
- Zufallsvariable $X : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ bzw $\omega \mapsto x = X(\omega)$
 - Anschaulich: Zufallsvariable ordnet jedem Ergebnis eine Zahl zu, mit der gerechnet werden kann
 - * Problem mit Ergebnissen: Das sind irgendwelche Objekte, will aber mit Zahlen rechnen
 - Notation: X, Y, \dots für Zufallsvariablen, x, y, \dots für Werte der Zufallsvariablen
 - Bsp: $X = \begin{cases} 0 & \text{Kopf} \\ 1 & \text{Zahl} \end{cases}$ beim Würfeln
 - Eigenschaften der Funktion X
 - * X ist eine Funktion \Rightarrow Jedem Argument $\omega \in \Omega$ wird eindeutig ein $X(\omega) \in \mathbb{K}$ zugeordnet
 - * X kann injektiv/surjektiv/bijektiv sein, muss aber nicht
 - Körper \mathbb{K} der Realisationen der Zufallsvariablen ist meist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
 - * Für die Erweiterung $\mathbb{K} = \mathbb{R}^n$ heißt X multivariante Zufallsvariable
 - * Notation: Schreibe Körper, über den integriert wird, nicht explizit dazu
- Wahrscheinlichkeit $P : \mathbb{K} \rightarrow [0, 1]$
 - Anschaulich: Ordne jeder Realisation einer Zufallsvariable $x = X(\omega)$ eine Wahrscheinlichkeit (Zahl zwischen 0 und 1) zu
 - Randbedingung: $\sum_{x \in \mathbb{K}} P(x) = 1$ (Gesamtwahrscheinlichkeit ist 1)

- Empirische Definition: $P(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_x}{n}$ mit n Wiederholungen und k_x -maligem Auftreten der Realisation einer Zufallsvariable x

- * Anschaulich: Definiere Wahrscheinlichkeiten durch unendlich viele Wiederholungen

- Weitere Begriffe

- Ereignisse $A, B \in E$ heißen stochastisch unabhängig : $\iff P(A \cap B) = P(A)P(B)$

3.1.2 Wahrscheinlichkeitsverteilungen: PDF vs CDF

- Begriffe

- Verwirrungsgefahr mit Begriffen aus der Literatur(PDF, CDF oder Überbegriff?): Verteilungsfunktion, Dichtefunktion, Verteilungsdichte, ...
- Hier: Verwende "Wahrscheinlichkeitsverteilungen" als Überbegriff für PDF, CDF

- Diskrete vs kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilungen

- Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen: Ω hat endlich oder abzählbar unendlich viele Elemente
 - * Summiere über Realisationen von Zufallsvariablen, zB $1 = \sum_{x \in \mathbb{R}} P(x)$
- Kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilungen: Ω hat überabzählbar unendlich viele Elemente
 - * Integriere über Realisationen von Zufallsvariablen, zB $1 = \int_{\mathbb{K}} dx P(x)$
- Notation: Gehe ab hier von kontinuierlichen Wahrscheinlichkeitsverteilungen aus
 - * Keine Einschränkung, erhalte Ergebnisse für diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen mit $\int dx \rightarrow \sum_x$
 - * Begründet: In der Physik geht es quasi nur um kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilungen

- Probability density function PDF $f(x) = P(x = X(\omega))$

- Anschaulich: PDF ist die mathematisch direkteste Information über die Wahrscheinlichkeit $P : \mathbb{K} \rightarrow [0, 1]$
 - * Charakterisiere Wahrscheinlichkeitsverteilungen meist über deren PDF, kann aber auch andere Größen verwenden(zB CDF, statistische Momente)
- "Wahrscheinlichkeitsdichte", da die PDF nur unter dem Integral Sinn macht
 - * In der Realität kann man keine infinitesimal kleinen Ergebnis-Bereiche vermessen, sondern nur makroskopische Ergebnisbereiche $P(x \leq y \leq z) = \int_x^z dx f(x)$

- Cumulative distribution function CDF $f_c(x) = P(x \leq X(\omega)) := \int_x^\infty dx P(x = X(\omega)) = \int_x^\infty dx f(x)$

- Anschaulich: CDF ist Integral über PDF und damit eine makroskopisch messbare Wahrscheinlichkeit
- CDF enthält dieselbe Information wie PDF: $f(x_0) = \partial_x f_c(x)|_{x=x_0}$
- Notation: Index "c" für CDF

- Begriffe: Mittelwert, Median, Modus

- Anschaulich: Unterschiedliche Begriffe zur Charakterisierung der PDF, die je nach Anwendungsfall mehr oder weniger nützlich sind
- Modus: Maximum von $f(x)$
 - * Anschaulich: Wert mit der größten Wahrscheinlichkeit
- Zentralwert/Median: x mit $\int_x^\infty dx f(x) = \int_{-\infty}^x dx f(x) = \frac{1}{2}$
 - * Anschaulich: Der Wert, bei dem gerade die Hälfte die kleineren und die größeren Werte dieselbe Wahrscheinlichkeit haben
- Mittelwert/Erwartungswert/Mean: Erstes statistisches Moment
 - * Anschaulich: Der Wert, von dem die Messergebnisse(linear gewichtet) am wenigsten abweichen

3.1.3 Statistische Momente

- Allgemeine statistische Momente $\langle X^n \rangle = \int dx x^n f(x)$
 - Notation: $\langle O(x) \rangle = E(O(x)) = \int dx O(x) P(x)$ für beliebige Funktion $O(x)$
 - Schreibe $\langle X \rangle$ statt $\langle x \rangle$, da X die Zufallsvariable ist (deren Eigenschaften untersucht werden)
 - Wahrscheinlichkeitsverteilung ist durch ihre statistischen Momente eindeutig festgelegt
- 0. statistisches Moment (Normierung) $1 = \langle 1 \rangle = \int dx f(x)$
 - Lege Normierung von $f(x)$ fest, damit Eigenschaften verschiedener Wahrscheinlichkeitsverteilungen gut verglichen werden können
- 1. statistisches Moment (Erwartungswert) $\mu := \langle X \rangle = \int dx x f(x)$
 - Anschaulich: Maß für
- 2. statistisches Moment (Varianz) $V := \langle (X - \mu)^2 \rangle = \int dx (x - \mu)^2 f(x)$
 - Anschaulich: Maß für die Abweichungen von $f(x)$ vom Mittelwert μ
 - * Nachteil: $V \sim x^2$ hat nicht die Einheit $\sim x$ und ist daher schwer zu interpretieren
 - Standardabweichung $\sigma := \sqrt{V}$ ist Varianz in der richtigen Einheit
 - * Kann Standardabweichung interpretieren als Maß für die Breite des Erwartungswert-Peaks
 - Es gilt $\langle (X - \mu)^2 \rangle = \langle X^2 - 2\mu X + \mu^2 \rangle = \langle X^2 \rangle - 2\mu \langle X \rangle + \mu^2 = \langle X^2 \rangle - \mu^2$ wegen $\mu := \langle X \rangle$
- Höhere statistische Momente
 - Schiefe $\frac{\langle (X - \mu)^3 \rangle}{\sigma^3}$
 - Kurtosis $\frac{\langle (X - \mu)^4 \rangle}{\sigma^4}$

3.2 Fehlerrechnung

3.2.1 Grundlagen

- Unsicherheit vs Fehler
 - Finde “Unsicherheit” besser als “Fehler”, da es um ein Maß für die Güte der Messwerte geht und “Fehler” da nicht ins Bild passt
- Grundidee von Unsicherheitsrechnung: Unsicherheiten sind gaußverteilt
 - Woher kommt das?
- Typen von Unsicherheiten
 - Systematische Unsicherheit
 - Statistische Unsicherheit
 - Theoretische Unsicherheit
- Abschätzungen mit einer Stichprobe
 - Anschaulich: Habe eine Liste von n Ergebnissen $\{x_1, \dots, x_n\}$
 - Schätzwert für Erwartungswert $\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$
 - Schätzwert für Varianz $V = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$
 - * Plausibilisierung für Bessel-Korrektur $n - 1$ (statt nur n): Varianz sollte für $n = 1$ nicht definiert sein, da dann keine Aussage über die Krümmung der Wahrscheinlichkeitsverteilung gemacht werden kann

3.2.2 Kovarianz

- Anschaulich: Kovarianz ist Verallgemeinerung der Varianz auf mehrere Zufallsvariablen
- Definition $\text{cov}(X, Y) := \langle (X - \mu_X)(Y - \mu_Y) \rangle$
 - Kann beliebig viele Zufallsvariablen X, Y, \dots haben
 - $\text{cov}(X, X) = \langle (X - \mu_X)^2 \rangle = V_X$
 - $\text{cov}(X, Y) = \langle (X - \mu_X)(Y - \mu_Y) \rangle = \langle XY \rangle - \langle X\mu_Y \rangle - \langle \mu_X Y \rangle + \langle \mu_X \mu_Y \rangle = \langle XY \rangle - \mu_X \mu_Y$
 - Andere Notation: $\sigma_{XY} := \text{textcov}(X, Y)$
 - * Notation ist intuitiv: $\sigma_{XX} = \sigma_X^2$
- Zufallsvariablen X, Y sind unkorreliert: $\iff \text{cov}(X, Y) = 0$ bzw $\langle XY \rangle = \mu_X \mu_Y$
 - Anschaulich: $\langle XY \rangle = \langle X \rangle \langle Y \rangle = \mu_X \mu_Y \Rightarrow$ Für unkorrelierte Zufallsvariablen vertauschen die Erwartungswerte die Klammern
- Redefinition: Pearsonscher Korrelationskoeffizient $\rho_{XY} := \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$
 - Nützliche Definition: $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$ mit $|\rho_{XY}| \in [0, 1]$ als Maß für die Stärke der Korrelation von X, Y
- Kovarianz in Matrixnotation = Kovarianzmatrix $\begin{pmatrix} \text{cov}(X, X) & \text{cov}(X, Y) & \dots \\ \text{cov}(Y, X) & \text{cov}(Y, Y) & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$
 - Kovarianzmatrix für n Zufallsvariablen ist $n \times n$ -Matrix
 - Diagonaleinträge sind Varianzen wegen $\text{cov}(X, X) = V_X$

3.2.3 Fehlerfortpflanzung

- Allgemeines Fehlerfortpflanzungsgesetz $\sigma_{Y_I Y_J} = \sum_{i,j} \frac{\partial f_I}{\partial X_i} \frac{\partial f_J}{\partial X_j} \sigma_{X_i X_j}$
 - Aussage: Aus Größen X_i mit Unsicherheiten $\sigma_{X_i X_j}$ entstandene Größen $Y_I = f_I(X_1, \dots)$ haben die Unsicherheiten $\sigma_{Y_I Y_J}$
 - * Anzahl der X_i und der Y_I darf natürlich verschieden sein
 - Anschaulich: Fehlerfortpflanzung ist unitäre Transformation von Kovarianzmatrizen
 - * Unitäre Transformation = “Wahrscheinlichkeitserhaltung” \Rightarrow Gute Eigenschaft für Fehlerfortpflanzung
 - * Explizit: Transformiere Matrix $A_{ij} = \sigma_{X_i X_j}$ mit Transformationsmatrix $U_{iI} = \frac{\partial f_I}{\partial X_i}$ zu $B_{IJ} = \sigma_{Y_I Y_J}$:
 $B_{IJ} = \sum_{i,j} U_{iI}^\dagger A_{ij} U_{jJ}$ bzw $B = U^\dagger A U$
 - Begründung: ?
 - Notation: Kleinbuchstaben $i, j \dots$ für Summation über Indizes der X_i , Großbuchstaben $I, J \dots$ für Summation über die Indizes der Y_I
- Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz $\sigma_Y^2 = \sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial X_i} \frac{\partial f}{\partial X_j} \sigma_{X_i X_j} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \right)^2 \sigma_{X_i}^2 + \sum_{i \neq j} \frac{\partial f}{\partial X_i} \frac{\partial f}{\partial X_j} \sigma_{X_i X_j}$
 - Aussage: Eine aus Größen X_i mit Unsicherheiten $\sigma_{X_i X_j}$ entstandene Größe $Y = f(X_1, \dots)$ hat die Unsicherheit σ_Y^2
 - Begründung: Grenzfall des allgemeinen Fehlerfortpflanzungsgesetzes für nur eine transformierte Größe $\{Y_I\} = \{Y\}$
 - Die Größen X_i sind unkorreliert ($\sigma_{X_i X_j} = 0$) \Rightarrow Hinterer Term verschwindet
- Spezialfälle des Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetzes für unkorrelierte Größen X_i
 - $Y = \alpha X_1 + \beta X_2 \Rightarrow \sigma_Y^2 = \alpha^2 \sigma_{X_1}^2 + \beta^2 \sigma_{X_2}^2$
 - $Y = X_1 X_2, Y = X_1 / X_2 \Rightarrow \left(\frac{\sigma_Y}{Y} \right)^2 = \left(\frac{\sigma_{X_1}}{X_1} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{X_2}}{X_2} \right)^2$

3.3 Typische Verteilungen

3.3.1 Gaussverteilung/Normalverteilung $f(x; \mu, V) = \frac{1}{\sqrt{2\pi V}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2V}\right)$ mit $x \in \mathbb{R}$

- Anwendung: Wegen zentralem Grenzwertsatz werden alle Wahrscheinlichkeitsverteilungen für viele Zufallsvariablen zu Gaußverteilungen \Rightarrow Gaußverteilung spielt zentrale Rolle
- Theoretische Motivation: Fouriertransformierte der Gaußverteilung ist wieder eine Gaußverteilung
- Statistische Momente: $\mu = \mu, V = V$
 - Verwende diese Notation, da die Interpretation der statistischen Momente durch die Gaussverteilung festgelegt ist: $1\sigma, 2\sigma, 3\sigma$ -Intervalle sind über Gaußverteilung definiert
 - * $P(|x - \mu| < 1\sigma) = 0.6826, P(|x - \mu| < 2\sigma) = 0.9545, P(|x - \mu| < 3\sigma) = 0.9973$
 - Für $\mu = 0$ gilt $\langle x^{2n} \rangle = V^n \frac{(2n)!}{2^n n!}, \langle x^{2n+1} \rangle = 0$
 - * $\langle x^{2n+1} \rangle = \int dx x^{2n+1} f(x; 0, V) \stackrel{x \rightarrow -x}{=} - \int dx x^{2n+1} f(x; 0, V) = 0$ wegen $f(-x; 0, V) = f(x; 0, V)$
 - * $\langle x^{2n} \rangle = \int dx x^{2n} \frac{1}{\sqrt{2\pi V}} e^{-x^2/(2V)} = \int dx x^{2n} \frac{1}{\sqrt{2\pi V}} e^{-\alpha x^2} \big|_{\alpha=1/(2V)} = (-1)^n \partial_\alpha^n \int dx \frac{1}{\sqrt{2\pi V}} e^{-\alpha x^2} \big|_{\alpha=1/(2V)}$
 $= (-1)^n \partial_\alpha^n \frac{1}{\sqrt{2\pi V}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \big|_{\alpha=1/(2V)} = \frac{1}{\sqrt{2V}} (-1)^n \partial_\alpha^n \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \big|_{\alpha=1/(2V)} = \frac{1}{\sqrt{2V}} (-1)^n \left((-1)^n \frac{1}{\sqrt{\alpha}^{2n+1}} \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \right) \big|_{\alpha=1/(2V)}$
 $= V^n \frac{(2n)!}{2^n n!}$
 - * Kann in $f(x; \mu, V)$ immer $x \rightarrow y = x - \mu$ reskalieren $\Rightarrow f(x; \mu, V) = f(y; 0, V)$
- Kumulierte Gaußverteilung heißt error function(erf): $\text{erf}(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^x du e^{-u^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x du e^{-u^2}$
 - Error function hat keine analytische Lösung, verwende numerische Integration

3.3.2 Gleichverteilung $f(x; b, a) = \frac{1}{b-a}$ mit $x \in [a, b]$

- Statistische Momente: $\mu = \frac{a+b}{2}, V = \frac{(b-a)^2}{12}$
- Theoretische Motivation: Gleichverteilung ist die einfachste Wahrscheinlichkeitsverteilung
- Gleichverteilte Zufallszahlen lassen sich einfach maschinell erzeugen
 - Folgerung: Maschinell erzeugte Zufallszahlen sind Ausgangslage, um beliebig verteilte Zufallszahlen zu generieren

3.3.3 Binomialverteilung $f(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ mit $k \in \{1, \dots, n\}$

- Anwendung: Modellierung von Bernoulli-Experimenten (nur 2 Ergebnisse, Wahrscheinlichkeit p eines Treffers ändert sich nicht, n Wiederholungen und k Treffer)
- Statistische Momente: $\mu = np, V = np(1-p)$
- Theoretische Motivation: Terme in $[p + (1-p)]^n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^n f(k; n, p)$
 - Kann damit Normierung ablesen: $\sum_{k=1}^n f(k; n, p) = [p + (1-p)]^n = 1^n = 1$
- Wird zur Poissonverteilung für $\lambda = np, n \rightarrow \infty$
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} f(k; n, p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$
 $= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!/(n-k)!}{(n-\lambda)^k} \right) \frac{\lambda^k}{k!} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \right) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = f(k; \lambda)$
 - Verwende $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!/(n-k)!}{(n-\lambda)^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{(n-\lambda)(n-\lambda)\dots(n-\lambda)} = 1$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$
- Wird zur Gaußverteilung mit $\mu = np, \sigma = \sqrt{np(1-p)}$ für $n \rightarrow \infty$

3.3.4 Poissonverteilung $f(k; \lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ mit $k \in \mathbb{N}$

- Anwendung: Modellierung von Events, die zufällig mit einer Frequenz λ stattfinden
 - Konkret: k ist die Anzahl an Events eines Prozesses mit Frequenz λ in einem gegebenen Zeitintervall
 - Poissonverteilung hat nur Mittelwert als Parameter, Varianz ist durch den Mittelwert festgelegt \Rightarrow Einfache Modellierung, da man keine Annahme zur Standardabweichung machen muss
- Theoretische Motivation: Terme aus $e^\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$
 - Kann damit Normierung ablesen: $\sum_{k=0}^{\infty}$
- Statistische Momente: $\mu = \lambda, V = \lambda$
 - Daraus folgt automatisch die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{\lambda}$
 - Interessanter Zusammenhang $\mu = V = \lambda \Rightarrow$ Breite des Peaks nimmt mit zunehmendem λ zu
 - Allgemeiner: $\langle n! \rangle = \lambda^n$

$$\begin{aligned} * \langle n! \rangle &= \sum_{k=0}^{\infty} n! \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=n}^{\infty} n! \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-n)!} = e^{-\lambda} \lambda^n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\lambda^{k-n}}{(k-n)!} \\ &\stackrel{m=k-n}{=} e^{-\lambda} \lambda^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = e^{-\lambda} \lambda^n e^\lambda = \lambda^n \end{aligned}$$
- Statistischer Fehler für eine Messung mit n Events: $\sigma = \sqrt{\lambda} \approx \sqrt{n}$ für n gemessene Events
 - Problem: $n = \lambda$ stimmt nur, wenn man zufällig gerade die mittlere Anzahl an Events misst
 - Konkret: Für $n < \lambda, n > \lambda$ ist $\sqrt{n} < \sqrt{\lambda}/\sqrt{n}/\sqrt{\lambda}$ und der Fehler wird falsch abgeschätzt
- Wird zu einer Gaußverteilung mit $\mu = \lambda, \sigma = \sqrt{\lambda}$ für $\mu \gg 1$

3.3.5 Exponentialverteilung $f(x; \lambda) = \frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda}$ mit $x \in \mathbb{R}^+$

- Anwendung: Modellierung von Zerfallsprozessen mit der DGL $\partial_x y \propto y$
- Statistische Momente: $\mu = \lambda, V = \lambda^2, \langle x^n \rangle = n! \lambda^n$

3.3.6 Exotische Verteilungen

- χ^2 -Verteilung $f(x; n) = \frac{1}{\Gamma(n/2)} \frac{1}{2} (x/2)^{n/2-1} e^{-x/2}$ mit $x \in \mathbb{R}^+$
 - Anwendung: χ^2 -Verteilung modelliert Summe der quadratischen Abweichungen von Messwerten einer Funktion
 - Statistische Gewichte: $\mu = n, V = 2n$
- Breit-Wigner-Verteilung $f(x; \lambda, x_0) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma/2}{(\gamma/2)^2 + (x-x_0)^2}$ mit $x \in \mathbb{R}$
 - Anwendung: Modellierung von Resonanzphänomenen, Fouriertransformierte der Exponentialverteilung
 - Statistische Gewichte: $\mu = x_0, V$ existiert nicht(?), Halbwertsbreite λ
- Landau-Verteilung

3.3.7 Zentraler Grenzwertsatz

- Aussage: Wahrscheinlichkeitsverteilung von n unabhängigen Zufallsvariablen mit derselben Wahrscheinlichkeitsverteilung wird für $n \rightarrow \infty$ zu einer Gaußverteilung
- Herleitung von Daniel...

3.4 Numerische Verfahren

3.4.1 Zufallszahlen

- Transformationsmethode

- Ziel: Aus Zufallszahlen x_i mit Verteilung $f(x)$ andere Zufallszahlen $y_i = y(x_i)$ mit Verteilung $g(y)$ generieren
 - * Bedingung: $y(x)$ ist eine invertierbare Funktion
- Idee: Verwende, dass die Transformation die Gesamtwahrscheinlichkeiten invariant lässt bzw $f(x)dx = g(y)dy$
 - * Anschaulich: Mathematik-Methode
- Transformationsfunktion $y(x)$ für gegebenes $g(y)$ finden: $y(x) = G^{-1}(F(x))$
 - * Notation: $F(x) = \int_{x_0}^x dt f(t)$, $G(y) = \int_{y_0}^y dt g(t)$ mit beliebigem x_0 und $y_0 = y(x_0)$, $G(G^{-1}(t)) = t$
 - * Bsp: $f(x) = 1, x \in [0, 1], g(y) = e^{-y}, y > 0 \Rightarrow F(x) = x, G(y) = 1 - e^{-y}, G^{-1}(t) = -\log(1 - t) \Rightarrow y(x) = G^{-1}(F(x)) = -\log(1 - x)$
 - * Bsp: $f(x) = x^2, x \in [0, 1], g(y) = y^3, y \in [0, 1] \Rightarrow F(x) = \frac{x^3}{3}, G(y) = \frac{y^4}{4}, G^{-1}(t) = 4\sqrt[4]{t} \Rightarrow y(x) = G^{-1}(F(x)) = 4\sqrt[4]{\frac{x^3}{3}}$
 - * Notiz: Formale Rechnung liefert $y(x) = G^{-1}(F(x) - F(x_0) + G(y_0))$, aber wegen $y_0 = y(x_0)$ und $dx f(x) = dy g(y)$ ist $F(x_0) = G(y_0) \Rightarrow$ Zusatzterme verschwinden automatisch $-F(x_0) + G(y_0) = 0$
- Verteilungsfunktion $g(y)$ für gegebenes $y(x)$ finden: $g(y) = f(x(y)) \left| \frac{dx(y)}{dy} \right|$
 - * Bsp: $y(x) = x^2 \Rightarrow x(y) = \sqrt{y} \Rightarrow g(y) = f(\sqrt{y}) \left| \frac{d\sqrt{y}}{dy} \right| = f(\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}}$
 - * Bsp: $y(x) = \log(1 + x) \Rightarrow x(y) = e^y - 1 \Rightarrow g(y) = f(e^y - 1) \left| \frac{d(e^y - 1)}{dy} \right| = f(e^y - 1) e^y$
- Verallgemeinerung auf mehrere Zufallsvariablen: Gehe von $g(\vec{y}) = f(\vec{x}) \det \frac{\partial x^i}{\partial y^j}$ aus
 - * Anschaulich: Verallgemeinerung ist vom Prinzip her trivial, in der Praxis aber kompliziert wegen Matrizen

- Verwerfungsmethode ("straight sampling")

- Ziel: Zufallszahlen y_i einer beliebigen Verteilung $f(x)$ in einem Intervall $[x_1, x_2]$ aus gleichverteilten Zufallszahlen in diesem Intervall generieren
- Anschaulich: "Dumme" Methode (im Vergleich zur "formalen" Transformationsmethode)
 - * Nützlich für komplexe PDFs (Transformationsmethode hier beliebig komplex)
- Algorithmus zur Generierung y_i
 1. Generiere gleichverteilte Zufallszahlen x_0, y_0 mit $x_0 \in [x_1, x_2], y_0 \in [0, \max f(x)]$
 2. $y_0 < f(x_0) \Rightarrow$ Füge y_0 zu den generierten Zufallszahlen hinzu

- Majorantenmethode ("importance sampling")

- Anschaulich: Kombination von Transformations- und Verwerfungsmethode (optimiere Laufzeit)
 - * Gleiches Prinzip wie Verwerfungsmethode, verwende zusätzlich Elemente der Transformationsmethode
- Idee: Vergleiche $f(x)$ mit Majorante $m(x) > f(x)$, die effektive Generierung von Zufallszahlen erlaubt (zB durch die Transformationsmethode)
 - * Notiz: Kann Majorante auch stückweise definieren (konzeptionell hässlich, aber einfach implementierbar)
- Algorithmus zur Generierung der y_i
 1. Generiere $m(x)$ -verteilte Zufallszahlen x_0, y_0 mit $x_0 \in [x_1, x_2], y_0 \in [0, 1]$
 2. $y_0 < \frac{f(x_0)}{m(x_0)} \Rightarrow$ Füge y_0 zu den generierten Zufallszahlen hinzu

- Box-Muller Verfahren (...)
- Anschaulich: Trick, um gaußverteilte Zufallszahlen zu generieren
- Idee: Verwende, dass Gaußfunktion in 2 Dimensionen analytisch integriert werden kann

3.4.2 Bootstrapping-Methode

3.4.3 Monte-Carlo-Integration

- Relative statistische Unsicherheit $\sigma = \frac{\sqrt{N}}{N} = \frac{1}{\sqrt{N}}$
- Begründung: Monte-Carlo-Integration ist ein Zählprozess \Rightarrow Modelliert durch Poisson-Verteilung
- Vorteil: Für d -dimensionale Integrale ist Unsicherheit unabhängig von $d \Rightarrow$ MC-Methode besser als Quadraturformeln ($\sigma \sim N^{-2/d}$) für $d \lesssim 4$

3.5 Parameteranpassung (Fits)

3.5.1 χ^2 -Methode

•

3.5.2 Maximum-Likelihood-Methode

3.6 Hypothesentests

3.6.1 Grundlagen

- Hypothesentests können nur Hypothesen verwerfen, keine Hypothese bestätigen
- Einfacher Test vs nicht-einfacher Test
 - Einfacher Test: Hypothesen enthalten keine freien Parameter
 - Nicht-einfacher Test: Hypothesen enthalten freie Parameter (" θ ")
- Klassifikation von Fehlern
 - Fehler 1. Art = falsch-positiv
 - * Anschaulich: Nullhypothese verworfen, obwohl sie wahr ist
 - * Wahrscheinlichkeit für Fehler 1. Art: Signifikanzniveau α
 - Fehler 2. Art = falsch-negativ
 - * Anschaulich: Nullhypothese nicht verworfen, obwohl sie falsch ist
 - * Wahrscheinlichkeit für Fehler 2. Art: β

3.6.2 Vorgehen

- Input: Stichprobe \vec{x} , Hypothesen H_i

1. Prüfgröße ("test statistic") $t(\vec{x})$ festlegen

- Formal: $t(\vec{x})$ ist eine Zufallsvariable, zugehörige PDF hängt von der Hypothese H_i ab
 - Hypothese H_i wird beschrieben durch PDF $g(t, H_i)$ der Prüfgröße $t(\vec{x})$
 - * Hypothese H_i kann freie Parameter enthalten \Rightarrow Kann diese aus den Daten bestimmen
 - Beliebige viele Hypothesen möglich, kann jede einzeln testen
- Geschickte Wahl von $t(\vec{x})$ ist entscheidend
 - Bsp: $t(\vec{x}) = L(H_i, \vec{x})$

2. Signifikanzniveau α bzw t_0 festlegen

- Signifikanzniveau α (kleine Zahl)
 - α = Wahrscheinlichkeit für Fehler 1. Art
 - Konfidenzlevel $1 - \alpha$ (große Zahl)
 - Typische Wahl: $\alpha = 0.05$ bzw $1 - \alpha = 0.95$
- Grenzpunkt t_0 definiert durch $\alpha = \int_{t_0}^{\infty} dt g(t, H_0)$
- Best practice: Lege Signifikanzniveau vor der Messung fest, nicht nach der Messung

3. Messung liefert Wert $t_1 = t(\vec{x})$

- Formal: Setze Ergebnisse der Stichprobe in die Prüfgröße ein
- p -Wert berechnen $p = \int_{t_1}^{\infty} dt g(t, H_0)$
 - Achtung: p -Wert (Eigenschaft der Messung) \neq Signifikanzniveau α (Eigenschaft der Nullhypothese H_0)

4. Entscheidung

- $\begin{cases} t \geq t_1 & H_0 \text{ verwerfen} \\ t < t_1 & H_0 \text{ nicht verwerfen} \end{cases}$ oder äquivalent (und intuitiver) mit $\begin{cases} p \geq \alpha \\ p > \alpha \end{cases}$
- Größe zur Charakterisierung von alternativen Hypothesen $H_i: \beta = \int_{-\infty}^{t_0} dt g(t, H_i)$ (kleiner Zahl)
 - Teststärke $1 - \beta$ (kleine Zahl)

3.6.3 Wahl der Prüfgröße

- Neyman-Pearson-Lemma
 - Aussage: Likelihood-Funktionen $L(H_0), L(H_1)$ vollständig bekannt \Rightarrow Likelihood-Quotient $t(\vec{x}) = \frac{L(H_0, \vec{x})}{L(H_1, \vec{x})}$ ist beste Prüfgröße
- Methoden, wenn Likelihood-Funktion unbekannt ist
 - Guter Ansatz für die Prüfgröße
 - Asymptotische Lösung für Prüfgröße im Grenzfall großer Stichproben verwenden
 - Monte-Carlo-Simulationen (?)

3.6.4 Goodness-of-Fit-Test

- Anschaulich: Goodness-of-Fit-Test ist Spezialfall des Hypothesentests (nur Nullhypothese H_0 , keine weiteren Hypothesen)
 - Funktion: Modell verwerfen oder Modell nicht verwerfen
- Pearsonscher χ^2 -Test (unbinned): $t(\vec{x}, \vec{\theta}) = \sum_{i=1}^N \frac{(x_i - f(x_i, \vec{\theta}))^2}{\sigma_i^2}$
 - Input: Stichprobe \vec{x} (Größe N), Unsicherheiten $\vec{\sigma}$ der Einzelmessungen, Nullhypothese H_0 mit m Freiheitsgraden $\vec{\theta}$
 - Minimum von t folgt einer χ^2 -Verteilung $f(\chi^2, \frac{n_{\text{dof}}}{2})$ mit $n_{\text{dof}} = N - m$
 - * Verteilung: $f(z, k) = \frac{1}{2^k \Gamma(k)} z^{k-1} e^{-z/2}$, Eigenschaften $E = 2k, V = 4k$
 - * χ^2 -Verteilung hat Erwartungswert bei $n_{\text{dof}} \Rightarrow$ Gebe $\frac{\chi^2}{n_{\text{dof}}}$ als Qualitätsparameter an ($\frac{\chi^2}{n_{\text{dof}}} \sim 1$ ist gut, $\frac{\chi^2}{n_{\text{dof}}} \gg 1$ ist schlecht)
- Pearsonscher χ^2 -Test (binned): $t(\vec{x}) = \sum_{i=1}^m \frac{(n_i - E[n])^2}{E[n]}$
 - Input: Stichprobe \vec{x} (Größe N), aufgeteilt in m bins mit Inhalten n_i und Erwartungswerten E_i unter der Nullhypothese

- * “Erwartungswert unter der Nullhypothese” E_i definiert als erstes Moment der Nullhypothesen-PDF
- Vorteil: Unabhängig von PDF der Stichprobe
- $n_i \gtrsim 5 \Rightarrow t(\vec{x})$ folgt χ^2 -Verteilung $f(\chi^2, \frac{n_{\text{dof}}}{2})$ mit $n_{\text{dof}} = m - 1$ Freiheitsgraden
 - * Verteilung: $f(z, k) = \frac{1}{2^k \Gamma(k)} z^{k-1} e^{-z/2}$, Eigenschaften $E = 2k, V = 4k$
- Likelihood-Verfahren $t = -2 \log \frac{L(H_0)}{L_{\text{sat}}}$
 - Trick: L_{sat} ist Likelihood-Funktion für optimales (“saturated”) Modell (beschreibt die Daten perfekt)
 - * Habe damit 2 zu vergleichende Modelle (H_0 und optimales Modell) \Rightarrow Kann Neyman-Pearson-Lemma verwenden
 - Notiz: Likelihood-Verfahren und χ^2 -Test sind äquivalent für Gaußverteilung
 - * Kann das explizit nachrechnen (...)

3.6.5 Vergleich von 2 Stichproben

- Studentscher t-Test – Vergleich der Mittelwerte
- F-Test – Vergleich der Varianzen
- Kolmogorov-Smirnov-Test – Vergleich der PDFs

Kapitel 4

Funktionentheorie

4.0.1 Grundlagen

- Funktionentheorie = Komplexe Analysis
 - Idee: Kann Ergebnisse aus reeller Analysis recyceln \Rightarrow Beschreibe \mathbb{C} -Analysis als \mathbb{R}^2 -Analysis
- Notation
 - Funktionen: $f, g, \dots : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ für komplexe Funktionen, $u, v, \dots : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ für reelle Funktionen
- Funktion $f : B \rightarrow \mathbb{C}$ heißt holomorph auf der Menge $A \subset B : \iff \forall_{z_0 \in A} : f'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existiert
 - Ableitung existiert bedeutet, dass der Wert endlich ist und er nicht von der Richtung abhängt, in der der Grenzwert $z \rightarrow z_0$ gebildet wird
 - Menge A wird nicht spezifiziert $\Rightarrow f$ ist holomorph auf dem gesamten Definitionsbereich B
- Holomorphe Funktionen sind analytisch(kann man beweisen...)
 - Analytisch = Unendlich oft differenzierbar = Kann in Taylorreihe entwickelt werden(Taylorreihe konvergiert)

4.0.2 Cauchy-Riemann-Gleichungen $\partial_x u = \partial_y v, \partial_x v = -\partial_y u$ für $f(z) = u(z) + iv(z), z = x + iy$

- Voraussetzungen: f ist holomorph für erlaubte Werte von z
- Herleitung aus Holomorphie von f
 - Idee: $f'(z)$ ist richtungsunabhängig \Rightarrow Kann \mathbb{C} -Ableitung über \mathbb{R} -Ableitung in x- und y-Richtung ausdrücken
 - Notiz(kann man beweisen...): Komplexe Ableitung und Cauchy-Riemann-Gleichungen sind äquivalent
 - * Anschaulich: Kann auch komplexe Ableitung aus Riemann-Gleichungen ableiten
- 1. Ableitung in x-Richtung $f' = \partial_x u + i\partial_x v$
 - $f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{x \rightarrow x_0, y = y_0} \frac{f(x + iy_0) - f(x_0 + iy_0)}{x - x_0} = \partial_x(u + iv)(x + iy_0) = \partial_x u(x + iy_0) + i\partial_x v(x + iy_0)$
- 2. Ableitung in y-Richtung $f' = \partial_y v - i\partial_y u$
 - $f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{x = x_0, y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0 + iy) - f(x_0 + iy_0)}{i(y - y_0)} = -i\partial_y(u + iv)(x_0 + iy) = -i\partial_y v(x_0 + iy) - i\partial_y u(x_0 + iy)$
- 3. Ableitung ist richtungsunabhängig $f' = \partial_x u + i\partial_x v = \partial_y v - i\partial_y u \Rightarrow \partial_x u = \partial_y v, \partial_x v = -\partial_y u$
 - Mache Koeffizientenvergleich in 1 und 2

- Alternative Notation: $\left(\vec{\nabla} \times \begin{pmatrix} u \\ -v \\ 0 \end{pmatrix} \right)_3 = (\vec{\nabla} \times \vec{v}_1)_3 = 0, \left(\vec{\nabla} \times \begin{pmatrix} v \\ u \\ 0 \end{pmatrix} \right)_3 = (\vec{\nabla} \times \vec{v}_2)_3 = 0$

4.0.3 Cauchy-Integral-Theorem $\oint_{\partial A} f(z) dz = 0$

- Voraussetzungen: f ist holomorph auf A
- Notation: ∂A ist Rand der Menge A
- Herleitung aus Cauchy-Riemann-Gleichungen und Satz von Stokes
 1. $\oint_{\partial A} f(z) dz = \oint_{\partial A} (u + iv)(dx + idy) = \oint_{\partial A} (udx - vdy) + i \oint_{\partial A} (vdx - udy)$
 - Differential einer komplexen Variablen $dz = dx + idy$ (warum?)
 2. $\oint_{\partial A} f(z) dz = \oint_{\partial A} \vec{v}_1 d\vec{s} + i \oint_{\partial A} \vec{v}_2 d\vec{s}$
 - Erkenne Skalarprodukte mit $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} u \\ -v \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} v \\ u \\ 0 \end{pmatrix}$, $d\vec{s} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$ mit einer beliebigen Variable dz , von der das Ergebnis nicht abhängt
 3. $\oint_{\partial A} f(z) dz = \int_A (\vec{\nabla} \times \vec{v}_1) d\vec{a} + i \int_A (\vec{\nabla} \times \vec{v}_2) d\vec{a}$ mit Satz von Stokes
 - Satz von Stokes: $\oint_{\partial A} \vec{v} d\vec{s} = \int_A (\vec{\nabla} \times \vec{v}) d\vec{a}$ für Fläche A mit Wegelement $d\vec{s}$ und Flächenelement $d\vec{a}$
 - Satz von Stokes anschaulich
 - (a) Zerlege Wegintegral um den Rand von A in infinitesimal kleine Wegintegrale um jeden Punkt von A , wobei sich die inneren Wegintegral-Teile aufheben
 - (b) Für Wegintegrale um eine infinitesimal kleine Fläche ist die Projektion der Rotation auf den Normalenvektor $(\vec{\nabla} \times \vec{v}) d\vec{a}$ konstant und gleich der Projektion des Felds auf den Wegvektor $\vec{v} d\vec{s}$ (warum?)
 4. $\oint_{\partial A} f(z) dz = 0$ mit Cauchy-Riemann-Gleichungen
 - Da die Fläche A (bzw $d\vec{a}$) senkrecht auf der komplexen Ebene steht, ist $(\vec{\nabla} \times \vec{v}_i) d\vec{a} = (\vec{\nabla} \times \vec{v}_i)_3 da_3$
 - Cauchy-Riemann-Gleichungen $(\vec{\nabla} \times \vec{v}_i)_3 = 0 \Rightarrow$ Beide Integrale verschwinden
- Spezialfall des Residuensatzes mit keinen Residuen
 - Residuensatz hat die Form $\oint_{\partial A} f(z) dz = \dots \neq 0$, wobei f nicht holomorph auf A sein muss

4.0.4 Cauchy-Integral-Formel $\oint dz \frac{f(z)}{z-z_0} = 2\pi i f(z_0)$ und Residuensatz

- Herleitung mit einfachem Spezialfall und dem Cauchy-Integral-Theorem
 1. Einfacher Spezialfall $\oint_{\text{Kreis}} \frac{dz}{z} = 2\pi i$
 - Parametrisiere Weg entlang eines Kreises mit Radius ρ mit $z = \rho e^{i\phi}$, $\phi \in [0, 2\pi)$ und $dz = i\rho e^{i\phi} d\phi$
 - $\oint_{\text{Kreis}} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{\rho i e^{i\phi} d\phi}{\rho e^{i\phi}} = \int_0^{2\pi} i d\phi = 2\pi i$
 - Interessant: Ergebnis hängt nicht vom Radius ρ des Kreises ab \Rightarrow Gilt auch für beliebig kleinen Kreis
 - Notiz: $\oint_{\text{Kreis}} dz z^n = i \int_0^{2\pi} d\phi e^{i(n+1)\phi} = 2\pi i \delta_{n,-1}$
 - * Für $n \neq -1$ ist $\int_0^{2\pi} d\phi e^{i(n+1)\phi} = \int_0^{2\pi} d\phi (\cos(n+1)\phi + i \sin(n+1)\phi) = 0$
 2. Verallgemeinerung: Für (beliebigen) geschlossenen Pfad γ um $z = 0$ gilt $\oint_{\gamma} \frac{dz}{z} = 2\pi i$
 - Kann mit dem Cauchy-Integral-Theorem $0 = \oint_{\partial A} \frac{dz}{z}$ mit beliebigem A addieren
 - * Achtung: A darf nicht den Punkt $z = 0$ enthalten, sonst ist $\frac{1}{z}$ auf A nicht holomorph und die Voraussetzungen für das Cauchy-Integral-Theorem sind nicht erfüllt
 - * Kann A so wählen, dass es an die von γ eingeschlossene Fläche nahtlos anschließt \Rightarrow Bekomme neues Wegintegral mit Pfad γ'
 - Kann Nullen bzw Flächen A so addieren, dass γ' ein Kreis ist und Punkt 1) gilt
 3. Verallgemeinerung: Für geschlossenen Pfad γ um z_0 gilt $\oint_{\gamma} \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i$
 - Transformation $u = z - z_0$ mit $du = dz$ führt mit 2) auf $\oint_{\gamma(z)} \frac{dz}{z-z_0} = \oint_{\gamma(z(u))} \frac{du}{u} = 2\pi i$
 4. Verallgemeinerung: Für holomorphe Funktion f und geschl. Pfad γ um z_0 gilt $\oint_{\gamma} dz \frac{f(z)}{z-z_0} = 2\pi i f(z_0)$

- (a) f ist holomorph $\Rightarrow f$ ist unendlich oft differenzierbar und kann in Taylorreihe entwickelt werden

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)(z - z_0)^n$$
- (b) Nach Einsetzen der Taylorreihe kürzt sich die Singularität für alle Summanden außer $f(z_0) \Rightarrow$
 Alle Summanden außer $f(z_0)$ verschwinden wegen dem Cauchy-Integral-Theorem
- (c) Übrig bleibt $\oint_{\gamma} dz \frac{f(z)}{z - z_0} = f(z_0) \oint_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i f(z_0)$

• Verallgemeinerung für einen Pol n-ter Ordnung: $\oint_{\gamma} dz \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} = 2\pi i \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$

– Herleitung analog zur Cauchy-Integral-Formel

1. Schreibe f als Taylorreihe (möglich, da f holomorph ist): $f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$
2. Wegen Cauchy-Integral-Theorem verschwindet im Integral nur der n-te Term der Taylorreihe nicht

* Begründung: Oben wurde $\oint_{\text{Kreis}} dz z^{n-1} = 2\pi i \delta_{n0}$ berechnet

* Dieser Term hat die Form $\oint_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) = 2\pi i \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$

– Herleitung aus der Cauchy-Integral-Formel

* Idee: Leite beide Seiten der Cauchy-Integral-Formel n-mal nach z_0 ab

* Linke Seite: $\partial_{z_0}^n \oint_{\gamma} dz \frac{f(z)}{z - z_0} = n! \oint_{\gamma} dz \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}$

• In jeder einzelnen Ableitung hebt sich das Minus aus $\partial_x \frac{1}{x^n} = -n \frac{1}{x^{n+1}}$ mit dem Minus aus der inneren Ableitung $\partial_{z_0}(z - z_0) = -1$ auf

* Rechte Seite: $\partial_{z_0}^n 2\pi i f(z_0) = 2\pi i f^{(n)}(z_0)$

* Umstellen nach $\oint_{\gamma} dz \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}$ liefert den gesuchten Ausdruck

• Verallgemeinerung für beliebige Pole (= Residuensatz) ist Fleißarbeit

– Ergebnis: $\oint dz f(z) = 2\pi i \sum_c \frac{1}{(n_c - 1)!} \lim_{z \rightarrow c} \partial_z^{n_c - 1} \left((z - c)^{n_c} f(z) \right)$

* Anschaulich: Faktor $(z - c)^{n_c}$ kürzt die Singularität von f an der Stelle $z = c$, sodass der gesamte Ausdruck wieder regulär ist

* Notation: Funktion f hat Pole an den Stellen $z = c$ mit Ordnung n_c

* Meist haben die Pole Ordnung 1 $\Rightarrow \oint dz f(z) = 2\pi i \sum_c \lim_{z \rightarrow c} (z - c) f(z)$

– Vorgehen

1. Mehrere Pole \Rightarrow Zerlege den Integrationsweg und summiere über die einzelnen Pole

2. Jeder Pol wird analog zur letzten Verallgemeinerung behandelt

* Zerlege $f(z)$ geschickt:

$$\oint dz f(z) = \oint dz \sum_c \frac{g_c(z)}{(z - z_{0,c})^{n_c}} = 2\pi i \sum_c \frac{1}{(n_c - 1)!} g^{(n_c - 1)}(z_{0,c}) = 2\pi i \sum_c \frac{1}{(n_c - 1)!} \left((z - z_{0,c})^{n_c} f^{(n_c - 1)}(z) \right) \Big|_{z=z_{0,c}}$$

* Achtung: Muss etwas anpassen $\frac{f}{(z - z_0)^{n+1}} \rightarrow f, n + 1 \rightarrow n$

• Typische Anwendung des Residuensatzes: Integrale mit komplexem Integrand berechnen

- Idee: Wähle geschlossenen Pfad (der das zu berechnende Integral enthält) so, dass der nicht-zum-berechnenden-Integral-gehörende-Bereich verschwindet oder berechnet werden kann
- Berechne dann Wegintegral mit Residuensatz und stelle die Gleichung nach dem zu berechnenden Integral um
- Notiz: Oft kann man auch reelle Integrale mit dem Residuensatz geschickt berechnen, indem man sie in die komplexe Ebene fortsetzt

4.0.5 Analytische Fortsetzung

• Formulierung

- Voraussetzung: $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ mit $U \subset \mathbb{C}$ ist eine analytische Funktion; $F : V \rightarrow \mathbb{C}$ mit $U \subset V \subset \mathbb{C}$ ist eine analytische Funktion mit $\forall_{z \in U} F(z) = f(z)$
- Aussage: F ist eindeutig bestimmt

- F heißt analytische Fortsetzung von f von U auf V
- Interpretation
 - Es gibt beliebig viele Möglichkeiten F, f irgendwie von U auf V fortzusetzen, aber nur eine Funktion F ist auch analytisch
 - Analytische Fortsetzung erlaubt es, mit Funktionen auf Bereichen zu arbeiten, auf denen sie nicht definiert sind
 - * Bsp: $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$ für $\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$
 - Visualisierung: [3B1B-Video](#)

Kapitel 5

Rechentricks für QFT

5.1 γ -Matrizen

5.1.1 Grundlagen

- Definition: $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$
 - Intuitivere Form: $\gamma^\mu \gamma^\nu = \begin{cases} \gamma^\nu \gamma^\mu = g^{\mu\nu} & \mu = \nu \\ -\gamma^\nu \gamma^\mu & \mu \neq \nu \end{cases}$
- γ -Matrizen sind der “große Bruder” der Pauli-Matrizen
- Nützliche Abkürzung γ_5 :
- Nützliche Abkürzung $\sigma^{\mu\nu} := \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$
- Notationen
 - Dirac-Adjungierter Spinor $\bar{\psi} := \psi^\dagger \gamma^0$
 - Dirac-Adjungierter Operator $\bar{\Gamma} := \gamma^0 \Gamma^\dagger \gamma^0$
 - * Vorteil der Abkürzung: $(\bar{a} \Gamma b)^\dagger = (a^\dagger \gamma^0 \Gamma b)^\dagger = b^\dagger \Gamma^\dagger \gamma^0 a = \bar{b} \gamma^0 \Gamma^\dagger \gamma^0 a = \bar{b} \bar{\Gamma} a$
 - Kurznotation(slash) für Kontraktion mit γ^μ : $\not{a} := \gamma^\mu a_\mu$

5.1.2 Darstellungen der γ -Matrizen

- Kann mit unitären Transformationen $\gamma'^\mu = U \gamma^\mu U^\dagger$ ($U^\dagger U = 1$) die Basis für γ -Matrizen ändern
 - Explizit: $2g^{\mu\nu} = \{\gamma'^\mu, \gamma'^\nu\} = \{U \gamma^\mu U^\dagger, U \gamma^\nu U^\dagger\} = U \gamma^\mu U^\dagger U \gamma^\nu U^\dagger + U \gamma^\nu U^\dagger U \gamma^\mu U^\dagger = U \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} U^\dagger = 2g^{\mu\nu} U 1 U^\dagger = 2g^{\mu\nu}$
- Dirac-Darstellung $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i & -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
 - Bevorzugte Basis für Quantenmechanik-Rechnungen
 - Interpretation im nichtrelativistischen Grenzfall
 - * Obere/untere beiden Komponenten entsprechen Teilchen/Antiteilchen
 - * Obere/untere Komponente für Teilchen und Antiteilchen entsprechen $m_s = \pm \frac{1}{2}$
- Weyl-Darstellung $\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \gamma_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 - Bevorzugte Basis für Quantenfeldtheorie-Rechnungen
 - Interpretation: Obere/untere beiden Komponenten für linkshändigen/rechtshändigen Weyl-Spinor
- Majorana-Darstellung (...)

5.1.3 γ -Matrizen als Basis für hermitesche 4×4 -Matrizen

- Argument: Kann beliebiges Produkt von γ -Matrizen als Produkt von bis zu 4 γ -Matrizen schreiben
 1. γ -Matrizen verschieben, sodass gleiche γ -Matrizen nebeneinander stehen $\gamma^\mu \gamma^\nu = \begin{cases} -\gamma^\nu \gamma^\mu & \mu \neq \nu \\ \gamma^\nu \gamma^\mu & \mu = \nu \end{cases}$
 - Übrig bleiben höchstens 4 ungepaarte γ -Matrizen, da es nur 4 verschiedene γ -Matrizen gibt
 2. Paare gleicher γ -Matrizen vereinfachen: $\gamma^\mu \gamma^\mu = g^{\mu\mu}$, $\gamma^\mu \gamma_\mu = g^\mu_\mu = \delta^\mu_\mu = \text{tr} \mathbb{1} = 4$
 - $2g^{\mu\mu} = \{\gamma^\mu, \gamma^\mu\} = 2\gamma^\mu \gamma^\mu$
- Argument: Es gibt 16 unabhängige Objekte aus bis zu 4 γ -Matrizen, zum Beispiel $B = \{\mathbb{1}, \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}, \gamma^\mu \gamma_5, i\gamma_5\}$
 - $\mathbb{1}$ (1 Element) ist Basis für Ausdrücke mit 0 γ -Matrizen
 - γ^μ (4 Elemente) ist Basis für Ausdrücke mit 1 γ -Matrix
 - $\sigma^{\mu\nu}$ (6 Elemente) ist Basis für Ausdrücke mit 2 γ -Matrizen
 - * Kann Produkte von 2 γ -Matrizen in symmetrischen und antisymmetrischen Teil zerlegen $\gamma^\mu \gamma^\nu = \frac{1}{2}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} + \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = S^{\mu\nu} + A^{\mu\nu}$ mit $S^{\mu\nu} = S^{\nu\mu}$ und $A^{\mu\nu} = -A^{\nu\mu}$
 - * Symmetrische Kombination ist proportional zu $\mathbb{1}$ (0 γ -Matrizen) $S^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = g^{\mu\nu}$
 - * Antisymmetrische Kombinationen ist proportional zu $\sigma^{\mu\nu}$: $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = iA^{\mu\nu}$
 - * 2 γ -Matrizen von γ_5 wegnehmen ($\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_5$) funktioniert genauso gut wie 2 γ -Matrizen hinschreiben ($\gamma^\mu \gamma^\nu$) wegen $\sigma^{\mu\nu} \gamma_5 = \frac{i}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \sigma_{\rho\sigma}$
 - $\gamma^\mu \gamma_5$ (4 Elemente) ist Basis für Ausdrücke mit 3 γ -Matrizen
 - * Begründung: $\gamma^\mu \gamma_5$ sind 5 γ -Matrizen, aber γ^μ kommt doppelt vor, deshalb kann der Ausdruck wie oben vereinfacht werden
 - * $\gamma^\mu \gamma_5$ sind dann die 4 Produkte von 3 γ -Matrizen, in denen eine (γ^μ) zu γ_5 fehlt
 - $\gamma_5 = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$ (1 Element) ist Basis für Ausdrücke mit 4 γ -Matrizen
- Formaler Beweis: B ist linear unabhängig (...)

5.1.4 Identitäten

- Komplex konjugieren/transponieren
 - $(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$
 - $(\gamma^\mu)^T = \gamma^0 \gamma^2 \gamma^\mu \gamma^2 \gamma^0$
 - $(\gamma^\mu)^* = \gamma^1 \gamma^3 \gamma^\mu \gamma^3 \gamma^1$
- Indizes kontrahieren
 - $\gamma^\mu \gamma_\mu = 4$
 - $\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -2\gamma^\nu$
 - $\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu = 4g^{\nu\rho}$
- $\sigma^{\mu\nu} \gamma_5 = \frac{i}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \sigma_{\rho\sigma}$

5.1.5 Spuren berechnen

- Spuren mit gerader Anzahl von γ -Matrizen
- Spuren mit ungerader Anzahl von γ -Matrizen verschwinden
- Spuren mit gerader Anzahl von γ -Matrizen und γ_5
- Spuren mit ungerader Anzahl von γ -Matrizen und γ_5 verschwinden

5.1.6 γ_5 in D Dimensionen

5.2 Spinor-Bilineare

5.2.1 Grundlagen

- Spinor-Bilineare $\bar{a}\Gamma b$ mit $\Gamma \in B$
 - Spinor-Bilineare sind wichtig: In Observablen alle Spinor-Indizes kontrahiert sein müssen \Rightarrow Vom ganzen Spinor-Formalismus bleiben in Observablen nur Spinor-Bilineare übrig
 - $B = \{1, \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}, \gamma^\mu\gamma_5, i\gamma_5\}$ ist Basis für γ -Matrizen
 - Notation für Ortsabhängigkeit: $\bar{a}\Gamma b(x) := \bar{a}(x)\Gamma b(x)$
- Warum nicht $\psi^\dagger\Gamma\psi$?
 - $\bar{\psi}\Gamma\psi$ ist hermitesch und damit eine reelle Zahl: $(\bar{\psi}\Gamma\psi)^\dagger = \bar{\psi}\bar{\Gamma}\psi = \bar{\psi}\Gamma\psi$ wegen $\bar{\Gamma} = \Gamma$ mit der obigen Wahl für B
 - * Verwende $\bar{\psi}\Gamma\psi$ mit $\Gamma \in B$ als Basis für Spinor-Matrixelemente in Observablen \Rightarrow Sollte $\bar{\psi}\Gamma\psi$ so wählen, dass $\bar{\psi}\Gamma\psi \in \mathbb{R}$
 - * Mit γ_5 statt $i\gamma_5$ würde man nicht das richtige Vorzeichen bekommen wegen $\bar{\gamma}_5 = -\gamma_5$
 - Für $\psi^\dagger\Gamma\psi$ ist $(\psi^\dagger\Gamma\psi)^\dagger = \psi^\dagger\Gamma^\dagger\psi$, aber $\Gamma^\dagger \neq \Gamma$ und daher ist $\psi^\dagger\Gamma\psi$ ungeschickt
 - * Kann sicher auch eine Basis B mit $\Gamma^\dagger = \Gamma$ finden, aber die ist komplizierter als die oben gegebene Basis
- $\bar{a}\Gamma b = \bar{a}_L\Gamma b_{L/R} + \bar{a}_R\Gamma b_{R/L}$
 - Anschaulich: $\bar{a}\Gamma b$ und $\bar{a}_{L/R}\Gamma b_{L/R}$ sind zwei unterschiedliche Zugänge, Spinor-Bilineare zu schreiben
 - Notiz: Erhalte ersten/zweiten Eintrag in $\bar{a}\Gamma b = \bar{a}_L\Gamma b_{L/R} + \bar{a}_R\Gamma b_{R/L}$ für eine ungerade/gerade Anzahl γ -Matrizen in Γ

5.2.2 Diskrete Transformationen

- Setze Phasen der Einfachheit halber auf 1
- Lorentz-Skalare $\bar{a}P_{L,R}b(x)$
 - $\mathcal{P}\bar{a}P_{L,R}b(x)\mathcal{P}^\dagger = \bar{a}P_{R,L}b(\mathcal{P}x)$
 - $\mathcal{C}\bar{a}P_{L,R}b(x)\mathcal{C}^\dagger = \bar{b}P_{L,R}a(x)$
 - $\mathcal{T}\bar{a}P_{L,R}b(x)\mathcal{T}^\dagger = \bar{a}P_{R,L}b(-\mathcal{P}x)$
 - $(\mathcal{CP})\bar{a}P_{L,R}b(x)(\mathcal{CP})^\dagger = \bar{b}P_{R,L}a(\mathcal{P}x)$
 - $(\mathcal{CPT})\bar{a}P_{L,R}b(x)(\mathcal{CPT})^\dagger = \bar{b}P_{L,R}a(-x)$
- Lorentz-Vektoren $\bar{a}\gamma^\mu P_{L,R}b(x)$
 - $\mathcal{P}\bar{a}\gamma^\mu P_{L,R}b(x)\mathcal{P}^\dagger = g^{\mu\mu}\bar{a}P_{R,L}\gamma^\mu b(\mathcal{P}x)$
 - $\mathcal{C}\bar{a}\gamma^\mu P_{L,R}b(x)\mathcal{C}^\dagger = -\bar{b}P_{R,L}\gamma^\mu a(x)$
 - $\mathcal{T}\bar{a}\gamma^\mu P_{L,R}b(x)\mathcal{T}^\dagger = g^{\mu\mu}\bar{a}P_{L,R}\gamma^\mu b(-\mathcal{P}x)$
 - $(\mathcal{CP})\bar{a}\gamma^\mu P_{L,R}b(x)(\mathcal{CP})^\dagger = -g^{\mu\mu}\bar{b}P_{L,R}\gamma^\mu a(\mathcal{P}x)$
 - $(\mathcal{CPT})\bar{a}\gamma^\mu P_{L,R}b(x)(\mathcal{CPT})^\dagger = -\bar{b}\gamma^\mu P_{L,R}a(-x)$
- Lorentz-Tensoren $\bar{a}\sigma^{\mu\nu}b(x)$
 - $\mathcal{P}\bar{a}\sigma^{\mu\nu}b(x)\mathcal{P}^\dagger = g^{\mu\mu}g^{\nu\nu}\bar{a}\sigma^{\mu\nu}b(\mathcal{P}x)$
 - $\mathcal{C}\bar{a}\sigma^{\mu\nu}b(x)\mathcal{C}^\dagger = -\bar{b}\sigma^{\mu\nu}a(x)$
 - $\mathcal{T}\bar{a}\sigma^{\mu\nu}b(x)\mathcal{T}^\dagger = g^{\mu\mu}g^{\nu\nu}\bar{a}\sigma^{\mu\nu}b(-\mathcal{P}x)$
 - $(\mathcal{CP})\bar{a}\sigma^{\mu\nu}b(x)(\mathcal{CP})^\dagger = -g^{\mu\mu}g^{\nu\nu}\bar{b}\sigma^{\mu\nu}a(\mathcal{P}x)$

$$- (\mathcal{CPT}) \bar{a} \sigma^{\mu\nu} b(x) (\mathcal{CPT})^\dagger = -\bar{b} \sigma^{\mu\nu} a(-x)$$

- Strategie fürs Nachrechnen (...)

- Benötige Identitäten für $(\gamma^\mu)^\dagger / (\gamma^\mu)^T / (\gamma^\mu)^*$ (s. 5.1.4, um $\mathcal{P}/\mathcal{C}/\mathcal{T}$ -Transformationsverhalten zu berechnen)

5.2.3 Fierz-Transformationen (...)

5.3 Quantenfeldtheorie mit Weyl-Spinoren (...)