Gruppentheorie

Jonas Spinner
16. Mai 2022

Bitte nicht diese pdf weiterverbreiten,
sondern den Link https://www.jspinner.de.
Dort gibts die aktuelle Version!

Dies ist eine privat erstellte Zusammenfassung und richtet sich an einen Studenten, der das Thema bereits aus einer Einführungsvorlesung kennt. Übersichtlichkeit und Struktur sind mir besonders wichtig, deshalb schreibe ich in Stichpunkten. Ich kommentiere die Themen, die ich wichtig finde und zeige die Rechnungen, die ich lehrreich finde. Insbesondere versuche ich, Aussagen zu verallgemeinern und direkt zu formulieren, was sicherlich manchmal schief geht. Ich freue mich über Rückmeldungen!

Im Folgenden eine kleine Liste von Quellen, auf die ich beim Anfertigen dieser Zusammenfassung zurückgegriffen habe. Die Punkte sind nach abnehmender Relevanz geordnet.

- Zee - Group Theory in a Nutshell for Physicists: Ehrliche Erklärungen, gut für Grundlagen
- Georgi - Lie Algebras in Particle Physics: Vertiefung
- Einführungsvorlesung 2019/20 bei Nierste(Symmetrien und Gruppen)
- Sexl, Urbantke - Relativity, Groups, Particles: Gut für Lorentz- und Poincaré-Gruppe

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundbegriffe

1.1 Gruppen

1.1.1 Grundbegriffe

- $(G, \cdot)$ mit Menge von Elementen G und Verknüpfung $\cdot : G \times G \to G$ heißt Gruppe $:\iff$
  - $\cdot$ ist assoziativ: $\forall_{a,b,c\in G}(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
    * Kommutative Gruppe $\forall_{a,b\in G} a \cdot b = b \cdot a$ heißt Abelsche Gruppe(Nicht-Kommutativität ist interessant)
  - Es gibt ein Eins-Element 1: $\forall_{a\in G} a = a \cdot 1 = 1 \cdot a$
  - Zu jedem Element a gibt es ein inverses Element a^{-1}: $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$
    * Inverses Element ist eindeutig und Rechts- und Linksinverse sind identisch
  - Notation: Verwende oft selbes Symbol für Menge und Gruppe(Bedeutung aus Kontext)
- Charakterisierung nach Anzahl der Elemente: Endliche Gruppe(endlich viele Elemente) vs unendliche Gruppe(unendlich viele Elemente)
  - Dimension dim$G$ der Gruppe G ist Anzahl der Elemente
- Charakterisierung nach Indizierung: Diskrete Gruppe(diskreter Index) vs kontinuierliche Gruppe (kontinuierlicher Index)
  - Kann Gruppenelemente als g_a oder $g(a)$ bennenen mit diskretem oder kontinuierlichem Index a
  - a kann ein Multiindex sein(enthält mehrere normale Indizes)
- Abbildungen zwischen Gruppen $f : G \to H$
  - f heißt Homomorphismus $:\iff f(a)f(b) = f(ab)$ bzw f erhält das Multiplikationsgesetz
  - f heißt Isomorphismus $:\iff f$ ist ein invertierbarer Homomorphismus
    * Isomorphe Gruppen($G \simeq H$) haben dieselben Eigenschaften
  - f heißt Endomorphismus $:\iff f$ ist Homormophismus und $G = H$
  - f heißt Automorphismus $:\iff f$ ist Isomorphismus und Endomorphismus/f ist invertierbarer Homomorphismus mit $G = H$
- Direktes Produkt $H = F \otimes G$: Für $f \in F, g \in G$ ist $(f, g) \in H$ mit Verknüpfung $(f_1, g_1)\cdot(f_2, g_2) = (f_1\cdot f_2, g_1\cdot g_2)$
  - Anschaulich: H ist Superposition von F und G, wobei F und G nichts voneinander wissen
  - Direkte Summen $H = F \oplus G$ von Gruppen können in(evtl kompliziert) direkte Produkte umgeschrieben werden
- $a, b \in G$ heißen äquivalent($a \sim b$) $:\iff \exists_{f\in G} a = f^{-1}bf$
  - Äquivalenzklasse(reflexiv, transitiv, symmetrisch): Menge von Gruppenelementen, die zueinander äquivalent sind

1.1.2 Untergruppen

- H heißt Untergruppe der Gruppe G ($H \subset G$) $:\iff$ $H \subset G$ für die Elementmengen, H ist eine Gruppe
  - Jede Gruppe G hat die Untergruppen $G, \{1\}$
- Zyklische Untergruppe $\{1, a, a^2, \dots a^{n-1}\}$ für ein Element a einer endlichen Gruppe G
  - Idee: Für eine endliche Gruppe G kommt man nach $n < \infty$ Multiplikationen mit dem selben Element a wieder bei 1 an(a hat Ordnung n)
  - Trick: Gruppenelemente rekonstruieren mit zyklischen Untergruppen und wenigen bekannten Gruppenelementen
  - Lagrange-Theorem: Für eine endliche Gruppe(n Elemente) mit einer Untergruppe(m Elemente) muss $\frac{n}{m}$ ganzzahlig sein
    * Folgerung: Endliche Gruppen mit einer Primzahl von Elementen sind immer zyklische Gruppen
- $H \subset G$ heißt invariante Untergruppe/Normalteiler von G($G \triangleright H$) $:\iff$ $\forall_{h\in H, g\in G} g^{-1}hg \in H$
  - Jede Gruppe hat triviale invariante Untergruppen $\{1\}, G$
  - $g^{-1}Hg := \{g^{-1}hg : h \in H\}$ ist eine Untergruppe von G und im Allgemeinen verschieden von H
  - Zwei invariante Untergruppen sind identisch oder verschieden, es gibt keine Überschneidungen
  - Zentrum $\mathcal{Z}_G := \{z \in G : \forall_{g\in G} zg = gz\}$ ist abelsche invariante Untergruppe
  - Von G abgeleitete Untergruppe $\mathcal{D}_G = \{(ba)^{-1}(ab) : a, b \in G\}$
    * $\mathcal{D}_G$ ist die kleinste invariante Untergruppe H von G, sodass G/N abelsch ist
    * Anschaulich: $\mathcal{D}_G$ enthält die Nicht-Abelschheit der Gruppe($(ba)^{-1}(ab) = 1$ für abelsche Gruppe)
  - Linke/rechte Coset/Nebenklasse gH/Hg
    * gH/Hg ist im Allgemeinen keine Gruppe, nur im Spezialfall $G \triangleright H$
  - Quotientengruppe $G/H := \{gH : g \in G\}$: Alle linken Nebenklassen
    * G/H ist im Allgemeinen keine Gruppe, nur im Spezialfall $G \triangleright H$
    * Anschaulich: Für $G \triangleright H$ hat man $G = G/H \otimes H$
    * Anschaulich: Für $A = B \otimes C$ ist $A/B = C, A/C = B$
    * dimG/U = dim$G$ − dim$U$

1.1.3 Zerlegung von halbeinfachen Gruppen

- Gruppe G heißt einfach $:\iff$ G hat keine invarianten Untergruppen
  - Anschaulich: Einfache Gruppe hat keine innere Struktur(vgl Primzahl)
- Gruppe G heißt halbeinfach $:\iff$ G hat keine abelschen invarianten Untergruppen außer $\{1\}$ und G
  - Halbeinfache Gruppe ist direkte Summe von einfachen Gruppen
  - G kann einfache Gruppen oder andere halbeinfache Gruppen als invariante Untergruppen haben
- Analogie zu $\mathbb{N}$
  - Faktor einer natürlichen Zahl: Invariante Untergruppe einer Gruppe
  - Primzahl: Einfache Gruppe
  - Nicht-Primzahl: Halbeinfache Gruppe
- Begriffe einfach und halbeinfach übertragen sich von Lie-Gruppen auf Lie-Algebren

1.2 Darstellungen

1.2.1 Grundbegriffe

- $\mathscr{D}: G \to GL(V)$ mit Gruppe G und Gruppe $GL(V)$ der invertierbaren linearen Abbildungen eines Vektorraums V heißt Darstellung von $G :\iff \mathscr{D}$ ist Homomorphismus($\mathscr{D}(a)\mathscr{D}(b) = \mathscr{D}(ab)$)
  - $\mathscr{D}$ heißt treue Darstellung $:\iff \mathscr{D}$ ist Isomorphismus(Selbe Information in Gruppe und Darstellung)
  - $\mathscr{D}$ heißt triviale Darstellung $:\iff \forall_{g\in G}\mathscr{D}(g) = 1_n$(maximal untreue Darstellung)
  - dim$V$ heißt Dimension der Darstellung
- Für dim$V = n < \infty$ ist $GL(V) \simeq GL(n,\mathbb{C})$ und man kann nach Wahl einer Basis $n\times n$-Darstellungsmatrizen $\mathscr{D}(g) \in GL(n,\mathbb{C})$ für $g \in G$ verwenden
- character $\chi_{\mathscr{D}} : GL(V) \to \mathbb{C}$, $\chi_{\mathscr{D}}(g) = \text{tr}\mathscr{D}(g)$ charakterisiert Gruppenelement g und Darstellung $\mathscr{D}$
  - Äquivalente Gruppenelemente $a, b \in G$($a \sim b$) haben denselben character $\chi_{\mathscr{D}}(a) = \chi_{\mathscr{D}}(b)$
- Darstellungen $\mathscr{D}, \mathscr{D}'$ auf Vektorräumen V, V' mit dim$V$ = dimV' heißen äquivalent $:\iff \exists_{A\in GL(V)}\forall_{g\in G}\mathscr{D}(g) = A^{-1}\mathscr{D}'(g)A$
- Direkte Summe von Darstellungen $\mathscr{D}(g) = \mathscr{D}^{(1)}(g) \oplus \mathscr{D}^{(2)}(g)$ ist eine Darstellung
  - Anschaulich: $\mathscr{D}(g)$ hat Blockdiagonalform mit den Blöcken $\mathscr{D}^{(1)}(g)$, $\mathscr{D}^{(2)}(g)$
- Direktes Produkt von Darstellungen $\mathscr{D}(g) = \mathscr{D}^{(1)}(g) \otimes \mathscr{D}^{(2)}(g)$ ist eine Darstellung
  - character eines direkten Produkts $\chi_{\mathscr{D}}(g) = \chi_{\mathscr{D}^{(1)}}(g)\chi_{\mathscr{D}^{(2)}}(g)$
- Konzept definierende Darstellung: Leite Gruppeneigenschaften aus der definierenden Darstellung ab, erweitere dann auf beliebige Darstellungen
  - Motivation: Arbeite in Physik fast immer mit Darstellungen(Matrizen) und nur selten direkt mit Gruppen(Verknüpfungstabelle), da Physiker scharf auf Matrizen sind
    * Berechtigt, da so ziemlich alle Gruppen in der Physik durch Matrizen dargestellt werden können
  - Definierende Darstellung sollte treue Darstellung sein(geht auch ohne, zB Lorentz-Gruppe)
- $\mathscr{D}$ heißt projektive Darstellungen der Gruppe $G :\iff \forall_{a,b\in G}\mathscr{D}(a)\mathscr{D}(b) = e^{i\phi(a,b)}\mathscr{D}(ab)$
  - Anschaulich: Erweiterterte Darstellungsdefinition, in dem komplexe Phasen egal sind
  - Notation: Projektive Darstellungen einer Gruppe G heißen PG
  - Physikalische Zustände transformieren sich unter projektiven Darstellungen, da nur Betragsquadrate physikalisch sind
    * In der Rechnung kein Unterschied zwischen G und PG, da Phase in Observable wegfällt

1.2.2 Irreduzible Darstellungen

- $\mathscr{D}$ heißt reduzibel $:\iff \exists_{X\subset V}\forall_{g\in G,x\in X}\mathscr{D}(g)x \in X$ mit echtem Unterraum X(invarianter Unterraum)
- Reduzible Darstellungen haben eine Basis mit $\mathscr{D}(g) = \begin{pmatrix} \mathscr{D}^{(1)}(g) & A(g) \\ 0 & \mathscr{D}^{(2)}(g) \end{pmatrix}$
  - Erste Spalte für Transformation im invarianten Unterraum X, zweite Spalte für Transformation im orthogonalen Unterraum $X^\perp = V/X$
  - $\mathscr{D}^{(1)}$ und $\mathscr{D}^{(2)}$ sind Darstellungen von G
- $\mathscr{D}$ heißt zerfallend/fully reducible $:\iff \forall_{g\in G}A(g) = 0 \iff X$ und $X^\perp$ sind invariante Unterräume
  - Darstellung zerfällt in direkte Summe $\mathscr{D}(g) = \mathscr{D}^{(1)}(g) \oplus \mathscr{D}^{(2)}(g)$
- Ziel: Irreduzible Darstellungen einer Gruppe finden
  - Wie zerfällt eine irreduzible Darstellung einer Gruppe in irreduzible Darstellungen einer bestimten Untergruppe?

1.2.3 Unitäre Darstellungen

- $\mathscr{D}(g)$ heißt unitäre Darstellung $:\Longleftrightarrow$ Alle Darstellungsmatrizen $\mathscr{D}(g)$ sind unitär $\mathscr{D}^\dagger(g)\mathscr{D}(g) = 1$
  - Unitarität von Transformationen ist notwendig für Wahrscheinlichkeitsinterpretation in QM und QFT
- Unitaritätstheorem für endliche Gruppen: Alle Darstellungen sind äquivalent zu unitären Darstellungen
  - Beweis: Konstruiere unitäre Darstellung $\mathscr{U}(g)$ für eine nicht-unitäre Darstellung $\mathscr{D}(g)$ einer Gruppe G
    1. $H = \sum_{g\in G} \mathscr{U}^\dagger(g)\mathscr{U}(g)$ ist hermitesch und invariant
       * Hermitesch: $H^\dagger = \left(\sum_g \mathscr{U}^\dagger(g)\mathscr{U}(g)\right)^\dagger = \sum_g \mathscr{U}^\dagger(g)\mathscr{U}(g) = H \Rightarrow$ Kann unitär diagonalisieren
       * Invariant: Für $h \in G$ $\mathscr{U}^\dagger(h)H\mathscr{U}(h) = \sum_g \mathscr{U}^\dagger(h)\mathscr{U}^\dagger(g)\mathscr{U}(g)\mathscr{U}(h) = \sum_g \mathscr{U}^\dagger(gh)\mathscr{U}(gh) = \sum_g \mathscr{U}^\dagger(g)\mathscr{U}(h) = H$(Trick: Über alle g wird summiert $\Rightarrow$ Summen über g und gh sind gleich)
    2. H unitär diagonalisieren: $\rho^2 = W^\dagger HW$ mit reeller Diagonalmatrix ρ^2 mit positiven Einträgen
       * Einträge sind positiv: $(\rho^2)_{jj} = \hat{e}_j^\dagger \rho^2 \hat{e}_j = \sum_g \left(\mathscr{U}(g)W\hat{e}_j\right)^\dagger \left(\mathscr{U}(g)W\hat{e}_j\right) > 0$
       * $M^\dagger M$ hat positive Eigenwerte: $M^\dagger Mv = \lambda v \Rightarrow v^\dagger M^\dagger Mv = |Mv|^2 = \lambda|v^2| \Rightarrow \lambda > 0$
       * $\rho = \sqrt{\rho^2}$ und ρ^{-1} existieren, da ρ^2 diagonal ist und die Einträge reell und positiv sind
    3. $\mathscr{D}$ mit $\mathscr{D}(g) = \rho W^\dagger \mathscr{U}(g)W\rho^{-1}$ ist eine unitäre Darstellung
       * $\mathscr{D}^\dagger(g)\mathscr{D}(g) = \rho^{-1}W^\dagger\mathscr{U}^\dagger(g)W\rho\rho W^\dagger\mathscr{U}(g)W\rho^{-1} = \rho^{-1}W^\dagger\mathscr{U}^\dagger(g)H\mathscr{U}(g)W\rho^{-1} = \rho^{-1}W^\dagger HW\rho^{-1} = \rho^{-1}\rho^2\rho^{-1} = 1$
- Unitaritätstheorem für unendliche Gruppen: Alle Darstellungen von kompakten Gruppen sind äquivalent zu unitären Darstellungen
  - Beweis: Gleich wie für endliche Gruppen, aber Integral statt Summe über die Gruppenelemente
    * Beweis benötigt, dass das Integral konvergiert(vermutlich Eigenschaft von kompakten Gruppen)
  - Kann Kompaktheit für Lie-Algebren einfach nachweisen mit Killing-Form
- Alle irreduziblen unitären Darstellungen einer kompakten Gruppe sind endlichdimensional
  - Nicht-kompakte Gruppen haben nur unendlich-dimensionale irreduzible unitäre Darstellungen

1.2.4 Darstellungstheorie von endlichen Gruppen

- Reguläre Darstellung für eine Gruppe mit n Elementen: Darstellung $\mathscr{D}$ mit Zuständen $|a\rangle$ und $\mathscr{D}(a)|b\rangle = |ab\rangle$
  - Idee: Multiplikationstabelle als Matrix darstellen
  - Kann Multiplikationsgesetz(volle Information) von endlichen Gruppen durch Tabelle darstellen
- Schurs Lemma: Irreduzible Darstellung $\mathscr{D}$ einer endlichen Gruppe G, Matrix A mit $\forall_{g\in G} A\mathscr{D}(g) = \mathscr{D}(g)A \Rightarrow A = \lambda 1$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$
- Orthogonalitätstheorem $\sum_{g\in G} \mathscr{D}^{(r)\dagger}(g)^i{}_j \mathscr{D}^{(s)}(g)^k{}_l = \frac{\text{dim}G}{d_r}\delta^{rs}\delta^i{}_l\delta^k{}_j$
  - Input: d_i-dimensionale irreduzible Darstellungen $\mathscr{D}^{(i)}$ einer endlichen Gruppe G
  - Verwende hoch-/tiefgestellte Indizes für Norm durch den komplexen Betrag $a^{i\dagger}b^i = a_i b^i$
- character table: Tabelle mit irreduziblen Darstellungen und Äquivalenzklassen einer Gruppe auf den Achsen und characters als Einträge
  - character table enthält alle Informationen über die Darstellungstheorie einer Gruppe
  - Orthogonalitätstheorem liefert starke Einschränkungen an die character table

1.2.5 Reelle, pseudoreelle und komplexe Darstellungen

- Konjugierte Darstellung $\mathscr{D}^{(r*)}(g) = \left(\mathscr{D}^{(r)}(g)\right)^*$ zu einer Darstellung $\mathscr{D}^{(r)}(g)$ einer Gruppe G auf VR V
  - character der konjugierten Darstellung $\chi^{(r*)}(g) = \left(\chi^{(r)}(g)\right)^*$
- Darstellung heißt komplex $:\iff \chi^{(r*)}(g) \neq \chi^{(r)}(g) :\iff\ !\exists_{S\in GL(V)}\mathscr{D}^{(r*)}(g) = S\mathscr{D}^{(r)}(g)S^{-1}$
- Darstellung heißt nicht komplex $:\iff \chi^{(r)}(g) = \chi^{(r*)}(g) :\iff \exists_{S\in GL(V)}\mathscr{D}^{(r*)}(g) = S\mathscr{D}^{(r)}(g)S^{-1}, S^\dagger S = 1$
  - Darstellung heißt reell $:\iff S^T = S$
    * Es gibt eine Basis, in der alle Einträge der Darstellungsmatrizen reell sind
  - Darstellung heißt pseudoreell $:\iff S^T = -S$

Kapitel 2

Lie-Gruppen und Lie-Algebren

2.1 Grundlagen

2.1.1 Idee von Lie-Gruppen

- Gruppe G heißt Lie-Gruppe $:\iff$ Kann lokale Parameter $\alpha \in \mathbb{K}^n$ für Elemente $g(\alpha) \in G$ finden, sodass $\gamma(\alpha, \beta), \delta(\alpha)$ in $g(\gamma) = g(\alpha)g(\beta), g(\delta) = g^{-1}(\alpha)$ analytisch sind
  - Grundidee: Gruppe sieht in der Nähe von $g(\alpha)|_{\alpha=0} = 1$ aus wie $\mathbb{K}^n$(differenzierbare Mannigfaltigkeit)
  - Parametrisiere Elemente mit $g(\alpha)|_{\alpha=0} = 1 \Rightarrow \mathscr{D}(\alpha)|_{\alpha=0} = 1$
  - Unterscheide reelle($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) und komplexe($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) Lie-Gruppen
  - Einschränkung: Keine Sprünge mit kontinuierlichen Parametern(zB $\mathcal{P}$ in Lorentz-Gruppe)
- Generatoren $X^a = -i\frac{\partial}{\partial \alpha_a}\mathscr{D}(\alpha)|_{\alpha=0}$
  - Anschaulich: Generatoren enthalten Information über infinitesemale Transformationen
    * Formal: Generatoren sind Basis für Tangentenvektoren an 1
    * Wahl der Generatoren abhängig von der Parametrisierung der Gruppe
  - Infinitesemal nah bei $\alpha = 0$ haben Gruppenelemente die Form $\mathscr{D}(d\alpha) = 1 + iX^a d\alpha_a$
    * Kann Gruppenelemente taylorentwickeln, da sie eine differenzierbare Mannigfaltigkeit bilden
    * Definition mit i, damit für eine unitäre Darstellung(Normalfall) X_a hermitesch ist
  - Makroskopische Darstellung $\mathscr{D}(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{i\alpha_a X^a}{n}\right)^n = e^{i\alpha_a X^a}$
    * $\left(1 + \frac{i\alpha_a X^a}{n}\right)$ ist ein Gruppenelement für $n \to \infty$, wegen Abgeschlossenheit ist auch $\mathscr{D}(\alpha)$ ein Gruppenelement(in der Nähe von $\alpha = 0$)
  - Generatoren sind Basis der Lie-Algebra
  - Indexnotation: Habe metrischen Raum mit im Allgemeinen nicht-trivialer Metrik(später mehr dazu) $\Rightarrow$ Unterscheide obere und untere Indizes
- Lie-Gruppe heißt kompakt $:\iff$ Mannigfaltigkeit der Gruppenelemente ist abgeschlossen und beschränkt
  - Einfacher: Lie-Gruppe ist kompakt, wenn die Komponenten der Transformationsmatrizen beschränkt sind
  - Lie-Gruppe heißt kompakt $\iff$ Entsprechende Lie-Algebra hat definite Killing-Form

2.1.2 Lie-Algebra

- Lie-Algebra definiert durch Kommutatorrelation $[X^a, X^b] = i f^{ab}{}_c X^c$
  1. Idee: In $e^{i\alpha_a X^a} e^{i\beta_b X^b} = e^{i\gamma_a X^a}$ muss $\gamma(\alpha, \beta)$ analytisch sein(Definition von Lie-Gruppen)
  2. Entwicklung für kleine Parameter $i\gamma_a X^a = \log\left(e^{i\alpha_a X^a} e^{i\beta_b X^b}\right) \approx i\left(\alpha_a + \beta_a\right) X^a - \frac{1}{2}\alpha_a\beta_b[X^a, X^b]$
     - Entwickle $e^{i\epsilon_a X^a} \approx 1 + i\epsilon_a X^a - \frac{1}{2}\epsilon_a\epsilon_b X^a X^b$, um nichttriviale Terme zu bekommen

- Verwende $\log(1+x) \approx x - \frac{1}{2}x^2$

3. Führe ${f^{ab}}_c$ ein mit $e^{i\alpha_a X^a} e^{i\beta_b X^b} = e^{i(\alpha_c + \beta_c - \frac{1}{2}\alpha_a\beta_b {f^{ab}}_c + \dots)X^c}$
   - Campbell-Baker-Hausdorff-Formel: Alle höheren Terme in der Entwicklung sind Kommutatoren von Generatoren und damit durch f_{abc} bestimmt

- Strukturkonstanten ${f^{ab}}_c$ enthalten gesamte Information über Multiplikationsgesetz der Gruppe
  - ${f^{ab}}_c$ ist darstellungsunabhängig(wegen Multiplikationsgesetz und Glattheit), aber basisabhängig
  - Für unitäre Darstellungen $X^{a\dagger} = X^a$ gilt ${f^{ab}}_c \in \mathbb{R}$: $-i{f^{ab}}^*_c X^c = [X^a, X^b]^\dagger = [X^b, X^a] = -i{f^{ab}}_c X^c$
  - Lie-Algebren sind isomorph $\iff$ Strukturkonstanten identisch bis auf Basiswechsel

- Formal: Vektorraum V(Addition, Skalar-Multiplikation) mit Verknüpfung $[\cdot,\cdot] : V \times V \to V$
  - $[\cdot,\cdot]$ ist bilinear, alternativ($\forall_{x\in V}[x,x] = 0$), erfüllt Jacobi-Identität $[a,[b,c]] + [c,[a,b]] + [b,[c,a]] = 0$
  - Reelle/komplexe Lie-Algebra: V ist $\mathbb{R}/\mathbb{C}$-Vektorraum(Koeffizienten sind reell oder komplex)
    * Komplexe Lie-Algebra ist reelle Lie-Algebra mit doppelt so vielen Koeffizienten $\Rightarrow$ Arbeite immer mit reellen Lie-Algebren
  - Für $V = \mathbb{K}^{n\times n}, \mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ erfüllt $[a,b] = ab - ba$ die Verknüpfungsaxiome
    * Achtung: Verknüpfung $\cdot$(Matrixmultiplikation) ist nicht abgeschlossen, wird aber für $[\cdot,\cdot]$ verwendet
  - Dimension dim$A$ der Lie-Algebra A: Anzahl der Generatoren($\neq$ dim$V$)

- Spur definiert Skalarprodukt für Lie-Algebra: trX^aX^b für $X^a, X^b \in g$
  - Kann Generatoren mit Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren orthogonal wählen $\Rightarrow$ Skalarprodukt hat die Form tr$X^aX^b = \alpha\delta^{ab}$

- Physiker arbeiten oft nur mit den Generatoren statt der vollen Lie-Algebra
  - Generatoren sind Basis der Lie-Algebra, deshalb alles abgedeckt mit deren Untersuchung
  - Merkt man auch daran, dass ich X^a gleichermaßen für Generatoren und Elemente der Lie-Algebra verwende

- Darstellung von Lie-Algebren analog zur Darstellung von Gruppen

- Lie-Algebra erzeugt durch Exponenzieren eine einfach zusammenhängende Lie-Gruppe(universal cover)
  - Lie-Algebra erzeugt auch andere Lie-Gruppen, die sind aber nicht einfach zusammenhängend(verschiedene Gruppenelemente werden miteinander identifiziert)
    * Alle von derselben Lie-Algebra erzeugten Gruppen sind lokal isomorph
  - Intuition: Wenn man Darstellungstheorie einer nicht einfach zusammenhängenden Gruppe macht, braucht man wahrscheinlich irgendwo das universal cover der Gruppe
  - Bsp: $SU(2)$ ist universal cover von $SO(3)$, $SL(2,\mathbb{C})$ ist universal cover von $SO^+(1,3)$

- Notation: Lie-Algebra g zu einer Gruppe G bekommt denselben Namen in Kleinbuchstaben
  - Viele Gruppen haben dieselben Lie-Algebren(zB $so(3) \simeq su(2)$), da sie dasselbe universal cover haben

2.1.3 Wahl der Generatoren

- Ziel: Will Generatoren $(T_R)^a$ einer Darstellung R festlegen
  - Notation: R für die Darstellung, a für den Index der Generatoren
  - Notation: d_R für Dimension der Darstellung R
  - Notiz: f^{abc} bereits definiert durch $[(T_R)^a, (T_R)^b] = if^{abc}(T_R)^c$ für jede Darstellung R

- Normierung der Generatoren tr$(T_R)^a(T_R)^b = B_R\delta^{ab}$

- Anschaulich: Wähle Generatoren $(T_R)^a$ orthogonal $\Rightarrow$ tr$(T_R)^a(T_R)^b \propto \delta^{ab}$
  * Begründung: Immer möglich mit Gramschem Orthogonalisierungsverfahren
- Indexnotation: $\Big((T_R)^a\Big)^i_{\ j}\Big((T_R)^b\Big)^j_{\ i} = B_R\delta^{ab}$
- Achtung: Proportionalitätskonstante B_R ist abhängig von der Darstellung
  * Kann B_R für eine Darstellung durch Konvention festlegen($B_F = \frac{1}{2}$)
  * Kann B_R nicht für jede einzelne Darstellung durch Konvention festlegen, da die Darstellungen zusammenhängen

- Casimir-Operator $(T_R)^a(T_R)^a = C_R\mathbb{1}$
  - Anschaulich: Wegen $[(T_R)^a(T_R)^a, (T_R)^b] = 0$ ist $(T_R)^a(T_R)^a \propto \mathbb{1}$
  - Indexnotation: $\Big((T_R)^a\Big)^i_{\ j}\Big((T_R)^a\Big)^j_{\ k} = C_R\delta^i_k$

- Konventionen für bestimmte Darstellungen
  - Wichtige Darstellungen
    * Fundamentale Darstellung $R = F$ "einfachste Darstellung"
    * Adjungierte Darstellung $R = A$ mit $\Big((T_A)^a\Big)^b_{\ c} = -if^{ab}{}_c$ "Darstellung der Generatoren"
  - Konvention: $B_F = \frac{1}{2}$
    * Anschaulich: Konvention für Generatoren der fundamentalen Darstellung
  - Konvention: $B_A = ?$
    * Anschaulich: Konvention für f^{abc}
  - Definiere d^{abc} in der fundamentalen Darstellung: $d^{abc} = 2$tr$(T_F)^a\{(T_F)^b, (T_F)^c\}$
    * Motivation für Vorfaktor 2: d^{abc} bekommt gleichen Vorfaktor wie f^{abc} in tr$(T_F)^a(T_F)^bT_F)^c = \frac{1}{2}tr(T_F)^a[(T_F)^b, (T_F)^c] + \frac{1}{2}tr(T_F)^a\{(T_F)^b, (T_F)^c\} = \frac{1}{4}(if^{abc} + d^{abc})$

- Weitere Relationen
  - $d_RC_R = B_Rd_A$
    * Anschaulich: C_R aus B_R hängen über Dimensionen der Darstellungen zusammen
    * Herleitung: Setze $a = b$ und summiere über a in tr$(T_R)^a(T_R)^b = B_R\delta^{ab}$
      · tr$(T_R)^a(T_R)^a =$ tr$C_R\mathbb{1} = C_Rd_R$ und tr$(T_R)^a(T_R)^a = B_R\delta^{aa} = B_Rd_A$
      · $\delta^{aa} = d_A$, da die Dimension der adjungierten Darstellung d_A die Anzahl der Generatoren ist

- A_{R_1}tr$(T_{R_1})^a\{(T_{R_1})^b, (T_{R_1})^c\} = A_{R_2}tr(T_{R_2})^a\{(T_{R_2})^b, (T_{R_2})^c\}$
  - Anschaulich: Keine "fundamentale" Definition(Normierung, Casimir etc), aber nützlich wegen den Relationen, die man für A_R herleiten kann
  - Anwendung: Drücke A_R für beliebiges R durch A_F aus
  - Konvention: $A_F = 1$
  - Relationen für A_R
    * $A_R = -A_{\bar{R}}$ mit komplex konjugierter Darstellung $\bar{R}$ von R(...)
      1. Komplex konjugierte Darstellung $\bar{R}$ von hat die Generatoren $(T_{\bar{R}})^a = -\Big((T_R)^a\Big)^*$
    * $A_R = 0$ für reelle Darstellungen R
      · Folgt trivial aus $A_R = -A_{\bar{R}}$ mit $R = \bar{R}$(R reell): $A_R = -A_{\bar{R}} = -A_R = 0$
    * $A_{R_1\oplus R_2} = A_{R_1} + A_{R_2}$
      1. Generatoren von $R_1 \oplus R_2$ haben Blockdiagonalform $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ mit $d_{R_1} \times d_{R_1}$-Matrix A und $d_{R_2} \times d_{R_2}$-Matrix B
      2. Produkte von Blockdiagonalmatrizen sind Blockdiagonalmatrizen, wobei Beiträge unterschiedlicher Blockdiagonalmatrizen nicht mischen

3. Für die Spur einer Blockmatrix $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ gilt tr $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \text{tr}A + \text{tr}B$
4. Formal: $A(R)\text{tr}(T_F)^a\{(T_F)^b, (T_F)^c\} = \text{tr}(T_{R_1\oplus R_2})^a\{(T_{R_1\oplus R_2})^b, (T_{R_1\oplus R_2})^c\} = \text{tr}(T_{R_1})^a\{(T_{R_1})^b, (T_{R_1})^c\}$ $\text{tr}(T_{R_2})^a\{(T_{R_2})^b, (T_{R_2})^c\} = (A_{R_1} + A_{R_2})\text{tr}(T_F)^a\{(T_F)^b, (T_F)^c\}$

* $A_{R_1\otimes R_2} = A_{R_1} d_{R_2} + A_{R_2} d_{R_1}$(...)

2.1.4 Unteralgebren

- Algebra A hat Unteralgebra $S \subset A :\iff \forall_{a,b\in S}[a,b] \in S$
  - Lie-Gruppe $\{e^{ia} : a \in S\}$ ist Untergruppe von $\{e^{ia} : a \in A\}$
- Subalgebra $S \subset A$ heißt Ideal($S \triangleright A$) $:\iff \forall_{s\in S, a\in A}[s,a] \in S$
  - Ideale(Lie-Algebren) erzeugen Normalteiler(Lie-Gruppen) durch Exponenzieren
- Zentrum $\mathcal{Z}_A$ von A ist das größte Ideal mit $\forall_{z\in\mathcal{Z}_A, a\in A}[z,a] = 0$
  - Anschaulich: $\mathcal{Z}_A$ enthält alle Elemente der Lie-Algebra, die mit allen Elementen kommutieren
- A heißt lösbar $:\iff A \triangleright A^{(1)} \triangleright \cdots \triangleright A^{(n)}$ endet mit $A^{(n)} = 0$
  - Von A abgeleitete Algebren $A^{(n+1)} = \{[a,a] : a \in A^{(n)}\}, A^{(0)} = A$
  - Eine komplexe lösbare Algebra ist isomorph zu einer Algebra aus oberen Dreiecksmatrizen
- Lie-Algebra A heißt einfach $:\iff A$ hat keine Ideale außer A und $\{0\}$
  - Anschaulich: Eine einfache Lie-Algebra hat keine innere Struktur(vgl Primzahl)
- Lie-Algebra A heißt halbeinfach $:\iff A$ hat keine abelschen Ideale außer A und $\{0\}$
  - Halbeinfache Lie-Algebra ist direkte Summe von einfachen Lie-Algebren
  - Allgemeines abelsches Ideal: $u(1)$-Unteralgebra
- Eigenschaften einfach, halbeinfach, kompakt übertragen sich zwischen Lie-Algebren und Lie-Gruppen
- $S \subset A$ heißt reguläre Unteralgebra von $A :\iff$ Wurzeln von S sind eine Teilmenge der Wurzeln von A, Cartan-Generatoren von S sind Teilmenge der Cartan-Generatoren von A
  - Reguläre Unteralgebren erhält man durch Zerschneiden von Dynkin-Diagrammen

2.1.5 Adjungierte Darstellung

- Generatoren der adjungierte Darstellung einer Lie-Algebra $\mathcal{A}$ definiert durch $(T^a)^b{}_c := -if^{ab}{}_c$
  - Anschaulich: Durch Strukturkonstanten definierte Darstellung(natürlichste Darstellung)
- Formaler Zugang: Darstellung auf dem Vektorraum der Lie-Algebra $\mathscr{D}_a(b) = \text{ad}_a(b) = [a,b] \in \mathcal{A}$ für $a, b \in \mathcal{A}$
- Adjungierte Darstellung einer einfachen Lie-Algebra ist irreduzibel
- Killing-Form $K(A,B) = \text{tr}(\text{ad}_A \text{ad}_B)$ definiert Skalarprodukt auf dem VR der Lie-Algebra
  - Cartan-Killing-Metrik $g^{ab} = g^{ba} = K(T^a, T^b) = \text{tr}T^aT^b = -f^{ac}{}_d f^{bd}{}_c$ enthält Information über Topologie der Lie-Algebra
  - Lie-Algebra A ist kompakt $\iff \forall_{a,b\in A} K(a,b)$ ist definit $\iff g$ ist positiv/negativ definit
    * Definition über Definitheit der Killing-Form ist äquivalent zur topologischen Definition für die Gruppe(Mannigfaltigkeit ist abgeschlossen und beschränkt)
  - Lie-Algebra ist halbeinfach $\iff \det g \neq 0 \iff g$ ist invertierbar mit $g^{ab}g_{bc} = \delta^a_c$
    * Benötige Invertierbarkeit von g für sinnvolle Indexnotation
  - Total antisymmetrische Strukturkonstanten $f^{abc} = f^{ab}{}_d g^{dc}$
- Dykin-Indizes der adjungierten Darstellung einer einfachen Lie-Algebra $\forall_i l^i = 1$
  - Muss zur Erzeugung des höchsten Gewichts μ für $\forall_i l^i = 1$ jede Wurzel einmal verwenden $\Rightarrow$ Höchstes Gewicht $\mu = 0$, da es zu jeder Wurzel α eine Wurzel $-\alpha$ gibt, die die Verschiebung durch α aufhebt

2.1.6 Abelsche Lie-Algebra $U(1) = \{e^{i\phi} : \phi \in [0, 2\pi)\}, u(1) = \{\phi : \phi \in [0, 2\pi)\}$

- $u(1)$ ist eindeutige abelsche Lie-Algebra $\forall_{a,b,c} f^{ab}{}_c = 0$
  - Strukturkonstanten legen Eigenschaften einer Lie-Algebra fest $\Rightarrow$ Abelsche Lie-Algebra eindeutig
- Normalteiler von $U(n)$: $U(n) = (SU(n)/Z_n) \otimes U(1)$
  - Zyklische Gruppe mit n Elementen $Z_n = \{e^{\frac{i2\pi k}{n}} : k \in \{1, \dots n-1\}\}$
  - Erwarte $U(n) = SU(n) \otimes U(1)$, aber $Z_n \subset U(1)$, $Z_n \subset SU(n) \Rightarrow$ Muss Z_n bei $SU(n)$ oder $U(1)$ abspalten, um direktes Produkt zu erhalten
    * Für $A \in Z_n$ gilt $A \in U(1)$(Spezialfall $\phi = \frac{2\pi k}{n} \in [0, 2\pi)$), $A \in SU(n)$(det$A = \left(e^{\frac{i2\pi k}{n}}\right)^n = 1$)
    * Formal: $\mathcal{Z}_{SU(n)} = Z_n$
  - Für Lie-Algebra ist nur lokale Umgebung interessant $\Rightarrow$ Lie-Algebren von $SU(n)$, $SU(n)/Z_n$ identisch
- Anschaulich: Lie-Gruppe/Lie-Algebra der Phasentransformationen

2.2 Klassifikation von endlichen einfachen kompakten Lie-Algebren

2.2.1 Endliche einfache kompakte Lie-Algebra

- Benötigt: Lie-Algebra ist hat grundlegende Struktur(einfach), g^{-1} existiert(kompakt), endlichdimensional
  - Unendlichdimensionale Lie-Algebren benötigen andere Herangehensweise(unendlich viele Generatoren), wird aber im modelbuilding auch verwendet(zB Kac-Moody-Algebren, Virasoro-Algebra)
- Mit Klassifikation von einfachen kompakten Lie-Algebren versteht man auch halbeinfache kompakte Lie-Algebren und allgemeiner kompakte Lie-Algebren
  - Halbeinfache kompakte Lie-Algebra ist eine direkte Summe von einfachen Lie-Algebren
    * Dynkin-Diagramme: Dynkin-Diagramm einer halbeinfache kompakte Lie-Algebra besteht aus den nicht-zusammenhängenden Dynkin-Diagrammen der einfachen Lie-Algebren, aus der sie besteht
  - Kompakte Lie-Algebra ist automatisch auch halbeinfach(Definite Matrix ist invertierbar)
- Basiswechsel zu $g = d_G 1$ mit $d_G > 0$(positiv definit)/$d_G < 0$(negativ definit) möglich
  - Kann $d_G = 1$ wählen, dann gibt es keinen Unterschied zwischen oberen und unteren Indizes

2.2.2 Casimir-Operatoren

- X ist Casimir-Operator einer Lie-Algebra $A \iff \forall_{a \in A} [X, a] = 0$ / $X \in \mathcal{Z}_A$
- Casimir-Operator einer einfachen kompakten Lie-Algebra $C = X^i g_{ij} X^j = X_i X^i$ mit Generatoren X^i
  - Nachrechnen für Generatoren mit Symmetrie+Antisymmetrie $[X^i, C] = g_{jk}\left(X^j[X^i, X^k] + [X^i, X^j]X^k\right) = i g_{jk} f^{ik}{}_l \left(X^j X^l + X^l X^j\right) = i g_{jk} g_{ln} f^{ikn}\left(X^j X^l + X^l X^j\right) = 0$
- Einfache Lie-Algebra hat genau einen(eindeutigen) Casimir-Operator
  - Halbeinfache Lie-Algebra hat einen Casimir-Operator für jede einfache Unteralgebra
- Charakterisiere Darstellungen von Lie-Algebren mit Eigenwerten des Casimir-Operators
- Irreduzible Darstellungen haben $C = \lambda \mathbb{1}$(Schursches Lemma) $\Rightarrow$ Eigenwert λ charakterisiert Darstellung

2.2.3 Cartan-Elemente

- Cartan-Generatoren H^i sind Basis der Cartan-Unteralgebra $\{H^a : \forall_b [H^a, H^b] = 0\}$
  - Basis der Cartan-Unteralgebra ist nicht eindeutig, liefert aber für jede Wahl dieselben Ergebnisse
  - Rang rg$A$ einer Lie-Algebra A: Anzahl der Cartan-Generatoren(dim$A \geq$ rg$A$)
- Gewichte $\mu^j = ((\mu^j)^1, \dots (\mu^j)^n)$ mit Gewichtskomponenten $(\mu^j)^i$ beschreiben Zustände $|\mu^j, x, \mathscr{D}\rangle$ der Darstellung $\mathscr{D}$(typisch: fundamentale Darstellung)
  - Cartan-Generatoren sind vollständiger Satz kommutierender Observablen $\Rightarrow$ Eigenwerte $(\mu^j)^i$ der Cartan-Generatoren H^i benennen die Elemente $|\mu^j, x, \mathscr{D}\rangle$ einer Darstellung $\mathscr{D}$ der Lie-Algebra: $H^i|\mu^j, x, \mathscr{D}\rangle = (\mu^j)^i|\mu^j, x, \mathscr{D}\rangle$
    * Benötige Entartungsindex x für beliebige Darstellung $\mathscr{D}$(nicht für fundamentale Darstellung)
  - Benennung: $(\mu^j)^i$ mit $j \in \{1, \dots \text{dim}V\}$, $i \in \{1, \dots \text{rg}A\}$
  - Kann beliebige Elemente der Lie-Algebra als Linearkombination der Basiselemente $|\mu^j, x, \mathscr{D}\rangle$ ausdrücken
  - $\mu^i \in \mathbb{R}$, weil die Generatoren H^i hermitesch sind

2.2.4 Lie-Algebra in der Cartan-Basis

- Cartan-Basis: Trenne Cartan-Generatoren H^i von anderen Generatoren E^α
  - Kartesische Basis für H^i
    * Verwende hermitesche Basis der Lie-Algebra(existiert wegen Unitaritätstheorem)
    * Normiere Generatoren mit tr$H^iH^j = \delta^{ij}$
  - Sphärische Basis für E_{α^j}: Wurzel α^j als Index
    * Wurzeln sind nur für Nicht-Cartan-Generatoren interessant, da Cartan-Generatoren $\alpha = 0$ haben
    * Nicht-hermitesche Basis $E^\dagger_{\alpha^j} = E_{-\alpha^j}$
    * Normiere Generatoren mit tr$E_{\alpha^j}E_{-\alpha^j} = 1$(später für einfache Ergebnisse benötigt)
  - Verwende unterschiedliche Indizes für Generatoren in kartesischer Basis(Zahlenvektor i) und in sphärischer Basis(Wurzelvektor α)
- Lie-Algebra in der Cartan-Basis: $[H^i, H^j] = 0, [H^i, E_{\alpha^j}] = (\alpha^j)^i E_{\alpha^j}, [E_{\alpha^j}, E_{\alpha^k}] = N_{\alpha^j\alpha^k}E_{\alpha^j+\alpha^k}, [E_{\alpha^j}, E_{-\alpha^j}] = (\alpha^j)_i H^i$
  1. Generatoren in adjungierter Darstellung $(T^i)^a{}_b = -if^{ia}{}_b$ sind diagonal und Wurzeln $(\alpha^a)^i$ sind die Eigenwerte $(T^i)^a{}_b =: -(\alpha^a)^i\delta^a_b \Rightarrow if^{ia}{}_b = (\alpha^a)^i\delta^a_b$
  2. Lie-Algebra mit Generatoren E^i in kartesischer Basis $[H^i, E^a] = if^{ia}{}_bX^b = (\alpha^a)^i\delta^a_bX^b = (\alpha^a)^iE^a$
     - E_{α^j} in sphärischer Basis(bessere Notation: $[H^i, E_{\alpha^j}] = (\alpha^j)^iE_{\alpha^j}$
  3. $[H^i, E_{\alpha^j}]^\dagger = -[H^i, E^\dagger_{\alpha^j}] = \left((\alpha^j)^iE_{\alpha^j}\right)^\dagger = (\alpha^j)^iE^\dagger_{\alpha^j} \Rightarrow E^\dagger_{\alpha^j} = E_{-\alpha^j}$
     - Folge: Anzahl der Wurzeln ist gerade $\Rightarrow$ Anzahl der E_{α^j} ist gerade
  4. $[H^i, [E_{\alpha^j}, E_{\alpha^k}]] = -[E_{\alpha^j}, [E_{\alpha^k}, H^i]] - [E_{\alpha^k}, [H^i, E_{\alpha^j}]] = ((\alpha^j)^i + (\alpha^k)^i)[E_{\alpha^j}, E_{\alpha^k}] \Rightarrow [E_{\alpha^j}, E_{\alpha^k}] = N_{\alpha^j\alpha^k}E_{\alpha^j+\alpha^k}$
     - Parameter $N_{\alpha^j\alpha^k} = N_{\alpha^j,\alpha^k}$ sind Redefinition der Strukturkonstanten f^{abc} in der sphärischen Basis
     - $N_{\alpha^j\alpha^k} = 0$, falls $\alpha^j + \alpha^k$ keine Wurzel ist bzw falls $[E_{\alpha^j}, E_{\alpha^k}] = 0$(zB $N_{\alpha^j\alpha^j} = 0$)
     - $N_{\alpha^j\alpha^k} = -N_{\alpha^k\alpha^j}$ aus Antisymmetrie des Kommutators
     - $N_{\alpha^j\alpha^k} = -N_{-\alpha^j,-\alpha^k}$ aus $[E_{\alpha^j}, E_{\alpha^k}]^\dagger = -[E_{-\alpha^j}, E_{-\alpha^k}] = N_{\alpha^j\alpha^k}E_{-\alpha^j-\alpha^k}$ und $\alpha^j \to -\alpha^j$, $\alpha^k \to -\alpha^k$
  5. $[H^i, [E_{\alpha^j}, E_{-\alpha^j}] = ((\alpha^j)^i - (\alpha^j)^i)[E_{\alpha^j}, E_{-\alpha^j}] = 0 \Rightarrow [E_{\alpha^j}, E_{-\alpha^j}] = (b^j)_iH^i$ ist Element der Cartan-Unteralgebra mit unbekanntem $(b^j)_i$
  6. $(b^k)_ig^{ij} = \text{tr}(b^k)_iH^iH^j = \text{tr}\left(E_{\alpha^k}E_{-\alpha^k}H^j - E_{-\alpha^k}E_{\alpha^k}H^j\right) = \text{tr}E_{-\alpha^k}[H^j, E_{\alpha^k}] = (\alpha^k)^j\text{tr}E_{\alpha^k}E_{-\alpha^k} = (\alpha^k)^j \Rightarrow (b^k)_i = (\alpha^k)_i$
     - Anschaulich: Normierung tr$E_{\alpha^j}E_{-\alpha^j} = 1$ legt $(b^j)_i = (\alpha^j)_i$ fest

- Wurzeln $\alpha^j = ((\alpha^j)^1, \dots (\alpha^j)^n)$ mit Wurzelkomponenten $(\alpha^j)^i$ beschreiben Zustände $|\alpha^j\rangle$ der adjungierten Darstellung
  - Definition: Gewichte für die Zustände $|\alpha^j\rangle$ der adjungierten Darstellung $H^i|\alpha^j\rangle = (\alpha^j)^i|\alpha^j\rangle$ bzw $[H^i, E_{\alpha^j}] = (\alpha^j)^i E_{\alpha^j}$
  - Anschaulich: Adjungierter Darstellung hat rätselhafte Eigenschaften, deshalb haben Zustände in fundamentaler und adjungierter Darstellung sehr unterschiedliche Struktur
  - Cartan-Generatoren H^i haben Wurzel $(\alpha^i)^j = 0$ wegen $[H^i, H^j] = 0$
  - Benennung: $(\alpha^j)^i$ mit $i \in \{1, \dots \text{rg}A\}, j \in \{1, \dots \text{dim}A\}$
    * Achtung: dim$A$ ist die Anzahl der Generatoren, rg$A$ ist die Anzahl der Cartan-Generatoren
    * Berücksichtige in dieser Zählweise auch die trivialen($\alpha^j = 0$) Wurzeln der Cartan-Generatoren
    * Meist wird Notation $\alpha, \beta, \dots$ statt $\alpha^1, \alpha^2, \dots$ (weniger Indizes) verwendet, ich wähle hier die ausführliche Variante $(\alpha^j)^i$ um Verwirrung zu vermeiden
    * Notation: Lasse Summations-Indizes beim Skalarprodukt von Wurzeln weg: $\alpha^i\alpha^j := (\alpha^i)_l(\alpha^j)^l$
  - Wurzel α heißt positiv/negativ $:\iff$ Erste von 0 verschiedene Komponente von α ist positiv/negativ
    * Definition hängt von der Wahl des Koordinatensystems/Reihenfolge der H^i ab
  - Wurzel α^j heißt einfach $:\iff$ α^j ist Element einer minimalen Teilmenge der positiven Wurzeln, mit der man alle positiven Wurzeln durch Linearkombinationen mit Koeffizienten aus $\mathbb{N}^0$ darstellen kann
    * Lie-Algebra vom Rang n hat n einfache Wurzeln
    * Anschaulich: Einfache Wurzeln sind Basisvektoren für das Wurzeldiagramm
- Cartan-Matrix $A_{ij} = 2\frac{\alpha^i\alpha^j}{\alpha^i\alpha^i}$
  - Cartan-Matrix enthält selbe Information wie das Dynkin-Diagramm
    * Überrascht nicht, da Dynkin-Diagramme aus der Bedingung $2\frac{\alpha^k\alpha^k}{\alpha^k\alpha^l} \in \mathbb{Z}$ folgen
    * Cartan-Matrix aus Dynkin-Diagramm ablesen: $4\cos^2\theta_{ij} = A_{ij}A_{ji}$, $\rho_{ij} = \frac{A_{ji}}{A_{ij}}$
  - Nützliche Eigenschaft: $\alpha^i = \sum_j A_{ij}\mu^j$
- Interpretation: Jedes Paar von Wurzeln $\pm a^j$ entspricht einer su(2)-Subalgebra
  - Konkret: Generatoren $J_{\pm,j} = \frac{1}{|\alpha|}E_{\pm\alpha^j}, J_{3,j} = \frac{1}{|\alpha^j|^2}(\alpha^j)_i H^i$ mit $[J_{3,j}, J_{\pm,j}] = \pm J_{\pm,j}, [J_{+,j}, J_{-,j}] = J_3$
  - Anschaulich mit Dynkin-Diagrammen: su(2)-Subalgebren(einzige Rang-1-Algebren) sind Grundbaustein

2.2.5 Konstruktion von Wurzeldiagrammen

- Idee: Halbeinfache Lie-Algebren werden durch Wurzeldiagramme charakterisiert $\Rightarrow$ Finde alle erlaubten Wurzeldiagramme(Lie-Algebren) für einen gegebenen Rang(Dimension der Wurzeldiagramme)
  - Information in Wurzeldiagrammen ist redundant: Es genügt Liste einfacher Wurzeln mit Winkeln $\theta_{\alpha^i\alpha^j}$ dazwischen und Einteilung in lange und kurze Wurzeln(ausgenutzt in Dynkin-Diagrammen)
- Erlaubte Kombinationen aus Winkel θ_{ij} und Längenquotient $\rho_{ij} > 1$ zweier Wurzeln α^i, α^j
  - $\theta_{ij} = \frac{5\pi}{6}, \rho_{ij} = \sqrt{3}$
  - $\theta_{ij} = \frac{4\pi}{4}, \rho_{ij} = \sqrt{2}$
  - $\theta_{ij} = \frac{2\pi}{3}, \rho_{ij} = 1$
  - $\theta_{ij} = \frac{\pi}{2}, \rho_{ij}$ unbestimmt(Wurzeln sind senkrecht $\Rightarrow$ Keine Beziehung)
    * Kann die senkrechten Wurzeln normieren, sodass sie dieselbe Länge haben
  - Rekursive Konstruktion der Strukturkonstanten $N_{\alpha^i\alpha^j} \Rightarrow$ Bedingung $2\frac{\alpha^j\alpha^j}{\alpha^j\alpha^k} = (q-p)^{jk} \in \mathbb{Z}$
    1. Rekursionsrelation $M(k-1, \alpha^i, \alpha^j) = M(k, \alpha^i, \alpha^j) + k\alpha^i\alpha^i + \alpha^i\alpha^j$ für alle Wurzeln in einer Kette
       * Geschickte Abkürzung $M(k, \alpha^i, \alpha^j) = N_{\alpha^i, k\alpha^i+\alpha^j}N_{-\alpha^i,(k+1)\alpha^i+\alpha^j}$ für $N_{\alpha^i\alpha^j}$

* Idee: Konstruiere $E_{k\alpha^i+\alpha^j}$ mit $k\in\mathbb{Z}$ durch $[E_{\alpha^i},E_{\alpha^j}]=N_{\alpha^i\alpha^j}E_{\alpha^i+\alpha^j}$, bis $k\alpha^i+\alpha^j$ keine Wurzel mehr ist
* Konstruktion endet nach endlich vielen Schritten, da es nur endlich viele Generatoren gibt
* Lie-Algebra auf Jacobi-Identität $[E_{k\alpha^i+\alpha^j},[E_{\alpha^i},E_{-\alpha^i}]+[E_{\alpha^i},[E_{-\alpha^i},E_{k\alpha^i+\alpha^j}]]+[E_{-\alpha^i},[E_{k\alpha^i+\alpha^j},E_{\alpha^i}]]=0$ anwenden $\Rightarrow M(k-1,\alpha^i,\alpha^j)=M(k,\alpha^i,\alpha^j)+k\alpha^i\alpha^i+\alpha^i\alpha^j$
* Rekursionsrelation ist so definiert, dass bei großem k gestartet wird und bei kleinem k endet

2. Anfangsbedingung $M(p,\alpha^i,\alpha^j)=0$ und Endbedingung $M(-(q+1),\alpha^i,\alpha^j)=0$
   * Definiere Anfangsbedingung: $\alpha^j+(p+1)\alpha^i$ ist keine Wurzel $\Rightarrow M(p,\alpha^i,\alpha^j)=0$
   * Definiere Endbedingung: $\alpha^j-(q+1)\alpha^i$ ist keine Wurzel $\Rightarrow M(-(q+1),\alpha^i,\alpha^j)=0$
3. Lösung der Rekursion ablesen $M(p-s,\alpha^i,\alpha^j)=\alpha^i\alpha^i\left(sp-\sum_{j=1}^{s-1}j\right)+s\alpha^i\alpha^j=s\left(\alpha^i\alpha^i(p-\frac{s-1}{2})+\alpha^i\alpha^j\right)$
4. Rekursionslösung muss Endbedingung erfüllen $\Rightarrow 2\frac{\alpha^i\alpha^i}{\alpha^i\alpha^j}=(q-p)^{ij}\in\mathbb{Z}$
   * Endbedingung $0=M(-(q+1),\alpha^i,\alpha^j)=M(p-(p+q+1),\alpha^i,\alpha^j)=(p+q+1)\left(\alpha^i\alpha^i\frac{p-q}{2}+\alpha^i\alpha^j\right)$ $\Rightarrow 2\frac{\alpha^i\alpha^i}{\alpha^i\alpha^j}=(q-p)^{ij}$

- Bedingungen an Winkel θ_{ij} und Längenquotient ρ_{ij} zwischen zwei Wurzeln α^i,α^j
  * Rekursive Konstruktion für Wurzeln $k\alpha^i+\alpha^j$ und $k\alpha^j+\alpha^i\Rightarrow 2\frac{\alpha^i\alpha^i}{\alpha^i\alpha^j}=n^{ij},2\frac{\alpha^j\alpha^j}{\alpha^i\alpha^j}=m^{ij}$, $n^{ij},m^{ij}\in\mathbb{Z}$
    · Wähle $m^{ij},n^{ij}\geq 0$: Mit α^i ist auch $-\alpha^i$ eine Wurzel, kann mit $\alpha^i\to-\alpha^i,\alpha^j\to-\alpha^j$ die Vorzeichen von m^{ij},n^{ij} beliebig umkehren
    · Wähle $m^{ij}\geq n^{ij}$: Benennung von α^i,α^j ist beliebig
  * Bedingungen multiplizieren $\Rightarrow\frac{m^{ij}n^{ij}}{4}=\frac{(\alpha^i\alpha^j)^2}{(\alpha^i\alpha^i)(\alpha^j\alpha^j)}=\cos^2\theta_{ij}\in[0,1]$
    · $m^{ij},n^{ij}\geq 0\Rightarrow\theta_{ij}\in[0,\frac{\pi}{2}]$
    · $n^{ij},m^{ij}\in\mathbb{Z}\Rightarrow\cos^2\theta_{ij}\in\{0,\frac14,\frac12,\frac34,1\}\Rightarrow\theta_{ij}\in\{0,\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\}$
    · $\theta_{ij}=0$(zwei gleiche Wurzeln) liefert keine Information und wird deshalb nicht betrachtet
  * Betrachte einfache Wurzeln $\theta_{ij}\in[\frac{\pi}{2},\pi]$, da das eleganter ist
    · Einfache Wurzeln α^i,α^j haben $\theta_{ij}\in[\frac{\pi}{2},\pi]$(folgt anschaulich aus der Definition)
  * Bedingungen dividieren $\Rightarrow\frac{m^{ij}}{n^{ij}}=\frac{\alpha^i\alpha^i}{\alpha^j\alpha^j}\in\mathbb{Q}$
    · $\frac{\alpha^i\alpha^i}{\alpha^j\alpha^j}=\rho_{ij}^2$ ist das Verhältnis der Längenquadrate der Wurzeln
    · Für $\alpha^i\alpha^j=0(\theta_{ij}=\frac{\pi}{2})\Rightarrow m^{ij}=n^{ij}=0$ und $\frac{m^{ij}}{n^{ij}}$ ist nicht definiert

• Konstruktion von Wurzeldiagrammen für halbeinfache Lie-Algebren

1. Wähle eine erlaubte Konfiguration (θ_{ij},ρ_{ij}) und zeichne die Wurzeln α^i,α^j
   - In n Dimensionen: Wähle für ein Wurzeldiagramm $n-1$ Winkel(einer für jede mögliche Ebene)
2. Konstruiere alle anderen Wurzeln α^k mit Schritten $\alpha^k=\alpha^j-2\cos\theta_{ij}|\alpha^j|\frac{\alpha^i}{|\alpha^i|}$ für schon konstruierte Wurzeln α^i,α^j
   - Anschaulich: Erhalte neue Wurzel durch Spiegeln einer Wurzel an einer Gerade senkrecht zu einer anderen Wurzel
   - $\alpha^k=\alpha^j-2\cos^2\theta_{ij}|\alpha^j|\frac{\alpha^i}{|\alpha^i|}=\alpha^j-2\frac{\alpha^i\alpha^j}{\alpha^i\alpha^i}\alpha^i=\alpha^j-(p-q)^{ij}\alpha^i$ ist wegen $(p-q)^{ij}\in[-q^{ij},p^{ij}]$ eine Wurzel

• Regeln für Wurzeldiagramme(in richtiger Konstruktion automatisch erfüllt)

- Maximal 4 Wurzeln in einer Kette
  * Idee: Widerspruchsbeweis für Kette mit 5 Wurzeln $\{\alpha^j-2\alpha^i,\alpha^j-\alpha^i,\alpha^j,\alpha^j+\alpha^i,\alpha^j+2\alpha^i\}$
  1. Ketten in β-Richtung ausgehend von $\alpha^j+2\alpha^i,\alpha^j-2\alpha^i$ enthalten nur je eine Wurzel $\Rightarrow\alpha^j(\alpha^j+2\alpha^i)=\alpha^j(\alpha^j-2\alpha^i)=0$
     * Mögliche benachbarte Wurzeln $2(\alpha^j-\alpha^i),2\alpha^i,2(\alpha^j+\alpha^i)$ sind alles keine Wurzeln wegen $N_{\alpha^i\alpha^i}=0$
  2. Mit $\alpha^j(\alpha^j+2\alpha^i)=\alpha^j(\alpha^j-2\alpha^i)=0$ folgt $\alpha^i\alpha^j=0$ und $\alpha^j\alpha^j=0$
     * $\alpha^j\alpha^j=0$ ist ein Widerspruch $\Rightarrow$ Es kann höchstens 4 Wurzeln in einer Kette geben
- Die Wurzeln einer Lie-Algebra haben höchstens 2 unterschiedliche Längen(lange und kurze Wurzeln)

2.2.6 Graphische Darstellung mit Dynkin-Diagrammen

- Idee: l-dimensionale Wurzeldiagramme von halbeinfachen kompakten Lie-Algebren 2-dimensional darstellen, indem man Information über einfache Wurzeln graphisch codiert
  - Benötigte Information: Liste der einfachen Wurzeln mit Eigenschaften(relative Winkel und Länge oder Darstellung der Wurzeln in $\mathbb{R}^n$)
  - Information über einfache Wurzel folgt direkt aus den Strukturkonstanten f^{abc} der Lie-Algebra
- Konstruktion von Dynkin-Diagrammen
  1. Ein Kreis für jede einfache Wurzel
  2. Kreis füllen(nicht füllen) für jede kurze(lange) Wurzel(aus ρ_{ij})
     - Definition: Wenn alle Wurzeln gleich lang sind, sind alle Wurzeln lang
  3. Verbindungslinien für jedes Paar einfacher Wurzeln α^i, α^j abhängig vom Winkel θ_{ij}
     - $0/1/2/3$ Verbindungslinien für $\theta_{ij} = \frac{\pi}{2}/\frac{2\pi}{3}/\frac{3\pi}{4}/\frac{5\pi}{6}$
       * 0 Linien für $\theta_{ij} = \frac{\pi}{2}$, da das der häufigste Fall ist
     - Regel: Loops von Verbindungslinien sind nicht erlaubt
     - Regel: Maximal 3 Linien kommen aus einem Kreis
     - Regel: Reduktion einer Kette von Kreisen(verbunden mit je einer Linie) auf einen Kreis erzeugt ein erlaubtes Dynkin-Diagramm

  - Alle nicht verbotenen Dynkin-Diagramme entsprechen erlaubten halbeinfachen kompakten Lie-Algebren
- Reguläre Unteralgebren finden mit Dynkin-Diagrammen
  - Durchschneiden von Linien in einem Dynkin-Diagramm erzeugt Dynkin-Diagramme von Unteralgebren
    * Begründung: Durchschneiden der Linie bedeutet, dass ein eigentlich nicht senkrechter(im Sinne von Wurzeln) Teil der Lie-Algebra senkrecht gemacht wird, senkrechte Wurzeln entsprechen einem direkten Produkt der zugehörigen Lie-Algebren
    * Kann beliebige Linien durchschneiden und somit alle möglichen Unteralgebren konstruieren
  - Durch Linien verbundene Unteralgebren sind nicht senkrecht(im Sinne von Wurzeln/direktes Produkt), sondern überlappen sich
- Isomorphien mit Dynkin-Diagrammen
  - Lie-Algebren mit demselben Dynkin-Diagramm sind isomorph
    * Begründung: Dynkin-Diagramm enthält alle Informationen über die Lie-Algebra
  - Isomorphien in Dynkin-Diagrammen einfacher zu sehen als durch Konstruktion der Abbildungen

2.2.7 Cartan-Klassifikation

- Idee: Klassifiziere einfache kompakte Lie-Algebren durch Konstruktion aller erlaubten Dynkin-Diagramme
- Drücke einfache Wurzeln durch kartesische Einheitsvektoren e^i in $\mathbb{R}^n$ aus
  - Wähle manchmal $n > l$ für eine geschickte Darstellung, dann liegen die Wurzeln in einer l-dimensionalen Hyperfläche von $\mathbb{R}^n$(meist $\sum_{i=1}^n e^i$)
- Familien von Lie-Algebren vom Rang l
  - $A_l = su(l+1, \mathbb{C})$ mit einfachen Wurzeln $\{e^i - e^{i+1} : i = 1, \dots l\}$
    * Wurzeln liegen l-dimensionaler Hyperfläche von $\mathbb{R}^{l+1}$ senkrecht zu $\sum_{i=1}^{l+1} e^i$
  - $B_l = so(2l+1, \mathbb{R})$ mit einfachen Wurzeln $\{e^{i-1} - e^i : i = 2, \dots l\} \cup \{e^l\}$
  - $C_l = usp(2l, \mathbb{C})$ mit einfachen Wurzeln $\{e^{i-1} - e^i : i = 2, \dots l\} \cup \{2e^l\}$
  - $D_l = so(2l, \mathbb{R})$ mit einfachen Wurzeln $\{e^{i-1} - e^i : i = 2, \dots l\} \cup \{e^{l-1} + e^l\}$

    * Spezialfall: $D_2 \simeq su(2) \oplus su(2)$ ist nicht einfach

- Exzeptionelle Lie-Algebren(Rang im Index)
  - G_2 mit einfachen Wurzeln $\{e^1 - e^2, -2e^1 + e^2 + e^3\}$
  - F_4 mit einfachen Wurzeln $\{e^1 - e^2, e^2 - e^3, \frac{1}{2}\left(e^4 - (e^1 + e^2 + e^3)\right)\}$
  - E_6 mit einfachen Wurzeln $\{e^i - e^{i+1} : i = 3, \dots 6\} \cup \{e^6 + e^7, \frac{1}{2}\left(e^8 + e^7 - \sum_{i=1}^6 e^i\right)\}$
  - E_7 mit einfachen Wurzeln $\{e^i - e^{i+1} : i = 2, \dots 6\} \cup \{e^6 + e^7, \frac{1}{2}\left(e^8 + e^7 - \sum_{i=1}^6 e^i\right)\}$
  - E_8 mit einfachen Wurzeln $\{e^i - e^{i+1} : i = 1, \dots 6\} \cup \{e^6 + e^7, \frac{1}{2}\left(e^8 + e^7 - \sum_{i=1}^6 e^i\right)\}$

2.2.8 Höhere Darstellungen von Lie-Algebren

- Wurzeln α^k generieren Übergänge zwischen Zuständen $|\mu^j, x, \mathscr{D}\rangle$: $H^i E_{\alpha^k}|\mu^j, x, \mathscr{D}\rangle = (\mu^j + \alpha^k)^i |E_{\alpha^k}|\mu^j, x, \mathscr{D}\rangle$
  - Benutze Cartan-Algebra: $H^i E_{\alpha^k}|\mu^j, x, \mathscr{D}\rangle = [H^i, E_{\alpha^k}]|\mu^j, x, \mathscr{D}\rangle + E_{\alpha^k} H^i |\mu^j, x, \mathscr{D}\rangle = (\alpha^k)^i E_{\alpha^k}|\mu^j, x, \mathscr{D}\rangle + E_{\alpha^k}(\mu^j)^i|\mu^j, x, \mathscr{D}\rangle = (\mu^j + \alpha^k)^i|\mu^j, x, \mathscr{D}\rangle$
  - Formel interpretieren: $\mu^j + \alpha^k$ ist ein Gewicht oder $E_{\alpha^k}|\mu^j, x, \mathscr{D}\rangle = 0$
  - Idee: Verwende Wurzeln α^k(bzw E_{α^k}), um aus einem bestimmten Zustand(höchstes Gewicht) alle anderen Zustände zu konstruieren

- μ^j heißt höchstes Gewicht einer irreduziblen Darstellung $\mathscr{D} :\iff$ Für alle positiven Wurzeln α^k ist $\mu^j + \alpha^k$ kein Gewicht($E_{\alpha^k}|\mu^j, x, \mathscr{D}\rangle = 0$)
  - Höchstes Gewicht ist eindeutig, bezeichne es deshalb mit μ statt μ^j
  - Idee: Benötige alle Wurzeln zur Konstruktion des höchsten Gewichts, deshalb enthält das höchste Gewicht die volle Information der Lie-Algebra

- Dynkin-Indizes $l^i = 2\frac{\alpha^i \mu}{\alpha^i \alpha^i}$ einer Darstellung(höchstes Gewicht μ der Darstellung, einfache Wurzeln α^i)
  - Anschaulich: $l^i = (q-p)^i \in \mathbb{N}_0$ gibt Länge der α^i-Kette an, die man zur Erzeugung von μ braucht
  - Kann Dynkin-Indizes auch für beliebige Gewichte definieren, dann ist $l^i \in \mathbb{Z}$
  - Verwechslungsgefahr: Manchmal bezeichnet man mit Dynkin-Indizes auch die Normierungskonstante d der Generatoren in tr$T^a T^b = d\mathbb{1}$

- $\mathscr{D}^j$ heißt fundamentale Darstellung der Lie-Algebra $:\iff$ Höchstes Gewicht μ^j von $\mathscr{D}^j$ erfüllt $2\frac{\alpha^i \mu^j}{\alpha^i \alpha^i} = \delta^{ij}$
  - Anschaulich: Höchstes Gewicht μ einer beliebigen Darstellung $\mathscr{D}$ kann durch höchste Gewichte μ^j der fundamentalen Darstellungen $\mathscr{D}^j$ und Dynkin-Indizes l^j von $\mathscr{D}$ rekonstruiert werden $\mu = \sum_j l^j \mu^j$
    * Zerlegung funktioniert $l^i = 2\frac{\alpha^i \mu}{\alpha^i \alpha^i} = \sum_j 2\frac{\alpha^i \mu^j}{\alpha^i \alpha^i} l^j = \sum_j \delta^{ij} l^j = l^i$
  - Höchstes Gewicht μ^j einer fundamentalen Darstellung $\mathscr{D}^j$ heißt fundamentales Gewicht
  - Fundamentale Darstellung $\mathscr{D}^j$ hat Dynkin-Indizes $l^j = 1, \forall_{i \neq j} l^i = 0$ wegen $2\frac{\alpha^i \mu^j}{\alpha^i \alpha^i} = \delta^{ij}$
  - Bsp: $SU(3)$ mit rg$A = 2$ hat fundamentale Darstellung $(1,0)$ und antifundamentale Darstellung $(0,1)$

- Konstruktion höherer Darstellungen aus fundamentalen Darstellungen
  - Anschaulich: Irreduzible Darstellung $(l^1, l^2, \dots l^{\text{rg}A})$ mit höchstem Gewicht μ ist Teilmenge des direkten Produkt aus Darstellungen $(l^1, 0, \dots 0), (0, l^2, \dots 0), \dots (0, 0, \dots l^{\text{rg}A})$
    * Nur Teilmenge, da direktes Produkt im Allgemeinen reduzibel ist(enthält auch andere irreduzible Darstellungen)
  - Charakterisiere irreduzible Darstellungen einer Lie-Algebra A durch Dynkin-Indizes l^j

2.3 Klassische Lie-Gruppen $=$ Einfache kompakte Lie-Gruppen

2.3.1 Übersicht

- Abstrahiere in Definitionen vom Körper $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ des Vektorraums der Lie-Algebra
  - dim$\mathbb{K}$ meint Anzahl der Parameter im $\mathbb{K}$-Vektorraum, also dim$\mathbb{R} = 1,$ dim$\mathbb{C} = 2$
- Definiere Gruppen über fundamentale Darstellung in $\mathbb{K}^{n\times n}$
- Spezielle Gruppe SG für eine Gruppe G: $SG = \{M \in G :$ det$M = 1\}$
  - dim$SG =$ dim$G - 1$, da ein Parameter durch det$M = 1$ festgelegt wird
  - Forderung an Elemente $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ der Lie-Algebra: tr$A = 0$
- Nicht-kompakte Version $G(a,b)$ der Gruppe $G(n)$: Metrik $g = \begin{pmatrix} 1_a & \\ & -1_b \end{pmatrix}$ statt $g = 1_n$
  - $G(a,b)$ ist nicht kompakt, da die Metrik nicht definit ist
  - Erhalte $G(n)$ aus $G(a,b)$ durch analytische Fortsetzung
    * Konkret: Komplexer Basiswechsel der Generatoren für eine reelle Lie-Algebra

2.3.2 Lineare Gruppe $GL(n,\mathbb{K}) := \{M \in \mathbb{K}^{n\times n} :$ det$M \neq 0\}$

- Grundlegende Eigenschaften
  - Alle klassischen Lie-Gruppen sind Untergruppen von $GL(n,\mathbb{K})$
  - G in $GL(n,\mathbb{K})$ steht für det$M \neq 0$, das G wird in allen Untergruppen implizit weggelassen
  - $GL(n,\mathbb{K})$ ist linear, da Abbildungen durch $\mathbb{K}^{n\times n}$-Matrizen linear sind
  - dim$GL(n,\mathbb{K}) = n^2$dim$\mathbb{K}$
- Topologische Eigenschaften
  - $GL(n,\mathbb{R})$ ist nicht zusammenhängend: Teile mit det$M > 0$ und det$M < 0$ sind getrennt
  - $GL(n,\mathbb{R})$ ist nicht kompakt, maximale kompakte Untergruppe ist $O(n,\mathbb{C})$
  - $GL(n,\mathbb{C})$ ist zusammenhängend: Kann Problemstelle det$M = 0$ in $\mathbb{C}$ umgehen
  - $GL(n,\mathbb{C})$ ist nicht kompakt, maximale kompakte Untergruppe ist $U(n,\mathbb{C})$
- Lie-Algebra $gl(n,\mathbb{K}) = \{M \in \mathbb{K}^{n\times n}\}$
  - n^2 Generatoren von $gl(n,\mathbb{R})$: $\{\delta^{ij} : i,j \in \{1,\dots n\}\}$($n^2$ Generatoren, reelle Koeffizienten)
  - $2n^2$ Generatoren von $gl(n,\mathbb{C})$: $\{\delta^{ij}, i\delta^{ij} : i,j \in \{1,\dots n\}\}$
    * Alternative: n^2 Generatoren und komplexe Koeffizienten
  - Begründung: $\forall_{A\in\mathbb{K}^{n\times n}}dete^{iA} = e^{\text{tr}iA} \neq 0$

2.3.3 Unitäre Gruppe $U(n,\mathbb{C}) := \{M \in \mathbb{C}^{n\times n} : M^\dagger M = 1\}$

- Grundlegende Eigenschaften
  - dim$U(n,\mathbb{C}) = \frac{n^2}{2}$
    * Unitarität liefert eine Bedingung pro Komponente
  - det$M = \pm 1$ wegen $1 =$ det$1 =$ det$(M^\dagger M) = ($det$M)^2$
  - Wähle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, da $U(n,\mathbb{R}) = O(n,\mathbb{R})$
- Topologische Eigenschaften
  - $U(n,\mathbb{C})$ ist zusammenhängend und kompakt

- $U(n,\mathbb{C})$ ist nicht einfach zusammenhängend: Untergruppe $U(1)$ ist nicht einfach zusammenhängend(Kreis)

- Lie-Algebra $su(n,\mathbb{C}) = \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} : A = A^\dagger\}$ mit n^2-1 Generatoren
  - Wähle Normierung der Generatoren tr$A^iA^j = \frac{1}{2}\delta^{ij}$
  - n Cartan-Generatoren $(H^m)^i{}_j = \frac{1}{\sqrt{2m(m+1)}}\left(\sum_{k=1}^m \delta^i_k\delta^m_j - m\delta^i_{m+1}\delta^{m+1}_j\right)$
    * Anschaulich: Auf der Hauptdiagonale $a \in \{1,\dots n-1\}$ Einsen und danach ein $-a$ für tr$A=0$, Normierungsfaktor
  - $2\frac{n(n-1)}{2} = n(n-1)$ andere Generatoren: Für Index (i,j)($\frac{n(n-1)}{2}$ Möglichkeiten) aus oberer Dreiecksmatrix wähle $E^i{}_j = 1/E^i{}_j = -i$, $E^j{}_i = 1/E^j{}_i = i$(andere Einträge verschwinden), Vorfaktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$
  - Fundamentale Gewichte $\mu^i = \sum_{k=1}^i \nu^k, i\in\{1,\dots n-1\}$
    * Gewichte $(\nu^j)^i = (H^i)^{jj} = \frac{1}{\sqrt{2i(i+1)}}\left(\sum_{k=1}^i \delta^{jk} - i\delta^{j,i+1}\right)$ mit $\nu^i\nu^j = \frac{1}{2}\left(\delta^{ij} - \frac{1}{N}\right)$
    * Wurzeln $\alpha^i = \nu^i - \nu^{i+1}, i \in \{1,\dots n-1\}$ mit $\alpha^i\alpha^j = \delta^{ij} - \frac{1}{2}\delta^{i,j\pm1}$

2.3.4 Orthogonale Gruppe $O(n,\mathbb{R}) := \{M \in \mathbb{R}^{n\times n} : M^TM = 1\}$

- Grundlegende Eigenschaften
  - det$M = \pm 1$ wegen $1 =$ det$1 =$ det$(M^TM) = ($det$M)^2$
  - Normalfall $O(n) := O(n,\mathbb{R})$
- Topologische Eigenschaften
  - $SO(n,\mathbb{C})$ ist nicht kompakt
  - $SO(n,\mathbb{R})$ ist kompakt
- Lie-Algebra $so(n,\mathbb{R}) = \{A\in\mathbb{R}^{n\times n} : A^T = -A\}$ mit $\frac{n(n-1)}{2}$ Generatoren
  - Basis für Generatoren $(T^{ab})^{ij} = -i\left(\delta^{ai}\delta^{bj} - \delta^{aj}\delta^{bi}\right)$
  - Cartan-Generatoren von $so(2n+1)/so(2n)$: $H^i = T^{2i-1,2i}$, $i\in\{1,\dots n\}/i\in\{1,\dots n-1\}$
    * Cartan-Generatoren in kartesischer Basis nicht diagonal($A^T = -A$), Diagonalisierung durch Wechsel in Polarkoordinaten für jedes Koordinatenpaar $(2n-1,2n), n\in\mathbb{N}$
  - Fundamentale Gewichte von $so(2n+1)$: $\mu^j = \sum_{k=1}^j e^k, j\in\{1,\dots n-1\}$, $\mu^n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n e^k$
    * Eine Spinor-Darstellung: μ^n ist speziell wegen anderer Normierung
  - Fundamentale Gewichte von $so(2n)$: $\mu^j = \sum_{k=1}^j e^k, j\in\{1,\dots n-2\}$, $\mu^{n-1} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n-1} e^k - e^n\right)$, $\mu^n = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n-1} e^k + e^n\right)$
    * Zwei Spinor-Darstellungen: μ^{n-1}, μ^n sind speziell wegen anderer Normierung

2.3.5 Symplektische Gruppe $Sp(2n,\mathbb{K}) := \{M\in\mathbb{K}^{2n\times 2n} : M^TgM = g\}$

- Grundlegende Eigenschaften
  - Metrik $g = \begin{pmatrix} & 1_n \\ -1_n & \end{pmatrix}$(deshalb Parameter $2n$ statt n)
  - det$M = 1$ folgt aus $M^TgM = g$ für $Sp(2n,\mathbb{R})$
    * $0 = P(\lambda) =$ det$(M-\lambda) = \lambda^{2n}det(\lambda^{-1}M - 1) = \lambda^{2n}detMdet(\lambda^{-1} - M^{-1}) = \lambda^{2n}detMdet(\lambda^{-1} + gM^Tg) = \lambda^{2n}detMdetg^2det(M^T - \lambda^{-1}) = \lambda^{2n}detMdet(M^T-\lambda^{-1}) = \lambda^{2n}detM\ P(\frac{1}{\lambda})$
    * Folgerung: Eigenwerte von M sind Paare $(\lambda, \frac{1}{\lambda})$(kürzen sich in det weg) $\Rightarrow$ det$M = 1$
    * S in Sp steht nicht für speziell(det$M = 1 \neq -1$)
  - dim$Sp(2n,\mathbb{R}) = n(2n+1)$, dim$Sp(2n,\mathbb{R}) = 2n(2n+1)$

- Untergruppe $USp(2n,\mathbb{C}) := \{M \in \mathbb{C}^{n\times n} : M^T g M = g, M^\dagger M = 1\} = U(2n,\mathbb{C}) \cap Sp(2n,\mathbb{C})$
  - dim$USp(2n,\mathbb{C}) = n(2n+1)$
- Lie-Algebra $usp(2n,\mathbb{C}) := \{H^{\in}\mathbb{C}^{n\times n} : H^\dagger = H, H^T = gHg\}$ mit $n(2n+1)$ Generatoren
  - Anschaulich: Generatoren haben die Form $M = \begin{pmatrix} A & B^* \\ B & -P^T \end{pmatrix}$ mit $P^\dagger = P, W^T = W$
  - Andere Darstellung der Generatoren: $\{iA\otimes 1, S_1\otimes\sigma_1, S_2\otimes\sigma_2, S_3\otimes\sigma_3\}$ mit Pauli-Matrizen σ_i, $A, S_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A^T = -A, S_i^T = S_i$
    * $Q\otimes R$ für direktes Produkt(hier: $Q\in\mathbb{R}^{n\times n}, R\in\mathbb{R}^{2\times 2} \Rightarrow Q\otimes R \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$)
- Topologische Eigenschaften
  - $Sp(2n,\mathbb{R})$ ist zusammenhängend, nicht kompakt
  - $Sp(2n,\mathbb{C})$ ist einfach zusammenhängend, nicht kompakt
  - $USp(2n,\mathbb{C})$ einfach zusammenhängend, kompakt

2.4 Tensor-Darstellungen und Young Tableaux

2.4.1 Tensor-Darstellungen einer beliebigen Gruppe

- Tensoren einer Gruppe G: Objekte, die sich unter einer Darstellung der Gruppe G transformieren
  - Jargon: Tensoren sind Darstellungen einer Gruppe(Tensor-Darstellungen)
- Aufgabe: Allgemeinen Tensor(transformiert sich unter reduzibler Darstellung) in direkte Summe von irreduziblen Tensoren(transformieren sich unter irreduziblen Darstellungen) zerlegen
  - Irreduzible Tensor-Darstellungen(Ergebnis der Zerlegung) transformieren sich unter direkter Summe von irreduziblen Darstellungen
    * Tensor als Vektor vorstellen $\Rightarrow$ Irreduzible Tensoren mischen nicht untereinander

2.4.2 Tensor-Darstellungen von $SU(n)$

- Fundamentale Darstellungen: V^i/V_i für $n/\bar{n}$ mit $i\in\{1,\dots n\}$
  - Intuitive Notation: $V^i \to U^{ij}V^j$, $(V^*)^i = (V^i)^* \to (U^{ij}V^j)^* = (U^*)^{ij}(V^*)^j$
    * Anschauliche Definition von $SU(n)$-Transformationen: Lassen komplexes Skalarprodukt $(V^*)^i W^i$ invariant
    * $(V^*)^iW^i \to (U^*)^{ij}(V^*)^jU^{ik}V^k = (U^\dagger)^{ji}U^{ik}(V^*)^jV^k = (U^\dagger U)^{jk}(V^*)^jV^k = \delta^{jk}(V^*)^jV^k = (V^*)^iV^i$
    * Definiere deshalb Transformationsgesetz für normalen und komplex konjugierten Vektor im Skalarprodukt
  - Elegante Notation: $V^i \to U^i{}_jV^j$, $V_i \to V_j(U^\dagger)^j{}_i$
    * Anschaulich: Elegante Notation ist ein Trick, um V statt V^* zu schreiben
    * Redefinitionen: $V_i := (V^*)^i, U^i{}_j := U^{ij}, (U^\dagger)^j{}_i = (U^\dagger)^{ji} = (U^*)^i$
    * Unitaritätsbedingung $(U^\dagger)^i{}_kU^k{}_j = \delta^i_j$
    * Skalarprodukt $V_iW^i \to (U^\dagger)^j{}_iU^i{}_kV_jW^k = (U^\dagger U)^j{}_kV_jW^k = \delta^j_kV_jW^k = V_jW^j$
- Invariante Tensoren
  - $\delta^i_j \to U^i{}_k(U^\dagger)^l{}_j\delta^k_l = U^i{}_k(U^\dagger)^k{}_j = \delta^i_j$
    * Anwendung: Indizes kontrahieren $\delta^i_jV^{ij} = V^{ii} = $ tr$V$
  - $\epsilon^{i_1i_2\dots i_n} \to U^{i_1}{}_{j_1}U^{i_2}{}_{j_2}\dots U^{i_n}{}_{j_n}\epsilon^{j_1j_2\dots j_n} = \epsilon^{i_1i_2\dots i_n}$
    * Ursprung: $1 = $ det$U = \epsilon^{i_1i_2\dots i_n}U^{i_1}{}_1U^{i_2}{}_2\dots U^{i_n}{}_n \Rightarrow \epsilon^{j_1j_2\dots j_n} = \epsilon^{i_1i_2\dots i_n}U^{i_1}{}_{j_1}U^{i_2}{}_{j_2}\dots U^{i_n}{}_{j_n}$
    * Anwendung: Indizes heben(und senken) $V^{i_2\dots i_n} = \epsilon^{i_1i_2\dots i_n}V_{i_1}$

* Anschaulich: $\epsilon^{i_1 i_2 \ldots i_n}$ ist der einzige Tensor vom Rang n
    * Alle Identitäten gelten für $\epsilon^{i_1 i_2 \ldots i_n}$ und $\epsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n}$(alle Indizes oben und unten vertauscht)

- Beliebige Darstellung (a,b) als direktes Produkt von fundamentalen Darstellungen $V^{i_1 i_2 \ldots i_a}_{j_1 j_2 \ldots j_b}$
  - Anschaulich: (a,b) transformiert sich wie direktes Produkt aus a Tensoren V^i und b Tensoren V_i

2.4.3 Young Tableaux als irreduzible Darstellungen von S_n

- Young Tableau von S_n ist Anordnung von n Boxen
  - Regel: Länge der Reihen nimmt nach unten hin ab oder bleibt gleich
- Zusammenhang mit S_n: Eine Spalte entspricht einem Vertauschungszyklus
  - Notiere Elemente von S_n als k_j Vertauschungszyklen(jeweils Länge j), sodass $n = \sum_{j=1}^n j k_j$
  - Schreibe Indizes von 1 bis n in beliebiger Reihenfolge in die Boxen $\Rightarrow$ Darstellung für ein Element von S_n
- Irreduzible Darstellung konstruieren: Indizes in Zeilen symmetrisieren und in Spalten antisymmetrisieren
  - Kann eine beliebige Darstellung explizit durch Symmetrisieren und Antisymmetrisieren in irreduzible Darstellungen zerlegen
  - Lasse Indizes weg bei irreduziblen Darstellungen(allgemeiner)
- Dimension der irreduziblen Darstellung eines Young Tableaux: $\frac{n!}{H}$ mit hook length H
  1. hook der i-ten Box ist eine Linie von unten(spaltenweise) bis zur Box und dann nach rechts(zeilenweise)
  2. hook length H_i der i-ten Box ist Anzahl der Boxen, die die hook durchläuft
  3. hook length $H = \prod_{i=1}^n H_i$ des Young Tableaux ist Produkt der hook lengths H_i der einzelnen Boxen
- Idee: Irreduzible Darstellungen von Tensor-Darstellungen mit Young Tableaux
  - Indizes von Tensoren verhalten sich wie Darstellungen von S_n
    * Konkret: Kann beliebigen Tensor in symmetrische und antisymmetrische Tensoren(jeweils irreduzibel) zerlegen
  - Folge: Kann irreduzible Darstellungen aller Gruppen mit Tensordarstellungen(zB $SU(n), SO(n), Sp(2n), \ldots$) mit Young Tableaux darstellen

2.4.4 Young Tableaux für $SU(n)$-Tensoren

- Zugang über Tensoren
  - Betrachte beliebigen Tensor (a,b), wobei die Indizes die Werte $i \in \{1, \ldots n\}$ annehmen können
  - Beliebigen Tensor (a,b) in Standardform(nur obere Indizes) bringen: $V^{i_1 \ldots i_a j_{b+1} \ldots j_n} = \epsilon^{j_1 \ldots j_n} V^{i_1 \ldots i_a}_{j_1 \ldots j_b}$
    * Indexstruktur(oben/unten) enthält Information über Symmetrie des Tensors, will aber direkt mit Symmetrieeigenschaften arbeiten und brauche Indexstruktur deshalb nicht
    * Bsp $V^{i_1 \ldots i_a j_{b+1} \ldots j_n}$ ist antisymmetrisch unter Vertauschung $j_c \leftrightarrow j_d$, $c, d \in \{j_{b+1}, \ldots j_n\}$
  - Young tableau aus einem irreduziblen Tensor mit bekannten Symmetrieeigenschaften konstruieren
    * Vorarbeit: Beliebigen Tensor in irreduzible Tensoren zerlegen
      · Konkret: Tensor so symmetrisieren und antisymmetrisieren, dass jedes Indexpaar entweder symmetrisch oder antisymmetrisch ist
    * Hilfe bei Konstruktion: Schreibe Indizes des Tensors in Boxen des Young Tableau
    * Umkehrung: Tensor mit bestimmten Symmetrieeigenschaften aus einem Young Tableau ablesen
    1. Boxen nebeneinander für Indizes, bei denen der Tensor symmetrisch unter Vertauschung ist
    2. Boxen untereinander für Indizes, bei denen der Tensor antisymmetrisch unter Vertauschung ist
    3. Boxen so sortieren, dass die Länge der Reihen nach unten abnimmt oder gleich bleibt

- $SU(n)$-Tensoren hinschreiben schwierig wegen komplizierten Symmetrieeigenschaften(antisymmetrisch in $2/3/4/\ldots$ Indizes) $\Rightarrow$ Zugang über Dynkin-Indizes ist intuitiver

- Zugang über Charakterisierung von irreduziblen Darstellungen durch Dynkin-Indizes
  - Charakterisiere irreduzible Darstellungen von $SU(n)$ durch Dynkin-Indizes $(l_1, \ldots l_{n-1})$
  - Young Tableau für $(l_1, \ldots l_{n-1})$: $n-1$ Rechtecke mit Breite l_k und Höhe $k \in \{1, \ldots n-1\}$

- Young Tableaux verstehen
  - Benenne Young Tableaux mit Dynkin-Indizes(eindeutig) oder Dimensionen(nicht eindeutig)
  - Young Tableau zur fundamentalen Darstellung $l_i = 1, \forall_{j \neq i} l_i = 0$: i Blöcke übereinander
  - Young Tableau zur trivialen Darstellung: Rechteck mit Höhe n Blöcke(Breite egal)
    * Triviale Darstellung hat automatisch Dimension 1
    * Kann triviale Darstellung von jedem Young Tableau abspalten(ändert Dimension nicht)
  - Young Tableau zur adjungierten Darstellung $(l_1, \ldots l_{n-1}) = (1, \ldots 1)$ ist eine Treppe mit Höhe $n-1$
  - Young Tableau einer beliebigen Darstellung passt zusammen mit Young Tableau der komplex konjugierten $\bar{\alpha}$ in ein Rechteck mit Höhe n und Breite abhängig von der Breite von α
    * Formal: $\overline{(l_1, l_2, \ldots l_{n-2}, l_{n-1})} = (l_{n-1}, l_{n-2}, \ldots l_2, l_1)$
  - Regeln für Young Tableaux(Dimension, Zerlegung etc) kann man herleiten(kompliziert)

- Dimension eines Young Tableaux/irreduzible Darstellung von $SU(n)$
  - Dimension bedeutet Dimension der Lie-Gruppe/Lie-Algebra
    * Achtung: Unterschiedliche irreduzible Darstellungen können gleiche Dimension haben
  - Explizite Formel $d(l_1, \ldots l_{n-1}) = \prod_{a=1}^{n-1} \prod_{b=1}^{n-a} \left(1 + \frac{1}{a} \sum_{c=b}^{b+a-1} l_c\right)$
  - Factors over hooks rule $d(l_1, \ldots l_{n-1}) = \prod_i \frac{F_i(l_1, \ldots l_{n-1})}{H_i(l_1, \ldots l_{n-1})}$
    * Faktor F_i einer Box bestimmen
      1. Box links oben hat Faktor n
      2. Box unter einer Box mit Faktor k hat Faktor $k-1$
      3. Box rechts neben einer Box mit Faktor k hat Faktor $k+1$
    * Hook H_i einer Box bestimmen: H_i ist Summe der durchlaufenen Boxen entlang des hooks i
      · hook i ist mittige Linie durch Boxen beginnend bei Box mit größtem Abstand von i nach unten durch Box i(Linie gekrümmt) bis zur Box mit größtem Abstand von i nach rechts

- Zerlegung von Produktdarstellungen $\alpha \otimes \beta$ in irreduzible Darstellungen
  - Direktes Produkt von 2 irreduziblen Darstellungen liefert wieder eine Darstellung, die aber reduzibel ist $\Rightarrow$ Will reduzible Darstellung zerlegen in direkte Summe von irreduziblen Darstellungen
    * Kann Vorgehen rekursiv erweitern auf direktes Produkt von m irreduziblen Darstellungen
  - Vorgehen: Erweitere erste(komplexeres) Young Tableau mit Boxen der zweiten(einfacheren) Young Tableau in allen mit Regeln konformen Möglichkeiten
    * Jede mögliche Erweiterung liefert eine Young Tableau in der direkten Summe

  1. Schreibe a_i in jede Box der i-ten Zeile der zweiten Young Tableau
  2. Menge Y_0 enthält erstes Young Tableaux
  3. Erhalte Menge von Young Tableaux Y_{i+1} aus Menge von Young Tableaux Y_i durch Hinzufügen der Boxen aus der i-ten Zeile des zweiten Young Tableaux in allen erlaubten Kombinationen
     - Regel: Elemente von Y_{i+1} müssen erlaubte Young Tableaux sein(höchstens n Boxen in einer Spalte)
     - Regel: In einer Spalte darf höchstens ein a_i vorkommend
  4. Regel für Elemente $Y_{n-1} \Rightarrow$ Streiche Young Tableaux weg, die die Regel nicht erfüllen
     (a) Schreibe Box-Symbole a_i von Elementen von Y_{n-1} in der Reihenfolge von rechts nach links innerhalb einer Reihe und von oben nach unten für unterschiedliche Reihen in eine Symbolfolge
     (b) Regel $\forall_k \forall_{i>j} n_{a_i}(k) \geq n_{a_j}(k)$ muss erfüllt sein mit $n_{a_i}(k)$ a_is bis zum Index k der Symbolfolge

2.5 Spinor-Darstellungen von $SO(n)$

2.5.1 Grundlagen

- Spinor-Gruppe $Spin(n) := \{e^{ia} : a \in so(n)\}$ ist universal cover von $SO(n)$
  - Konstruiere Algebra $spin(n) = so(n) := \{\sigma_{ij} = -\frac{i}{2}[\gamma_i, \gamma_j] : \gamma_a \in Cl_n\}$ mit Clifford-Algebra Cl_n
    * $Cl_n := \{\gamma_i \in \mathbb{C}^{m\times m}, i \in \{1, \ldots n\} : \gamma_i^\dagger = \gamma_i, [\gamma_i, \gamma_j]_+ = 2\delta_{ij}1\}$
    * $\sigma_{ij} = -i\gamma_i\gamma_j\delta_{ij}$ sind $\frac{n(n-1)}{2}$ hermitesche spurlose Matrizen
    * $\frac{1}{2}\sigma_{ij}$ erfüllt dieselben Kommutatorrelationen wie Generatoren J^{lm} von $so(n)$
  - Bsp: $Spin(3) \simeq SU(2), Spin(4) \simeq SU(2) \otimes SU(2), Spin(3,1) \simeq SL(2,\mathbb{C}), Spin(5) =\simeq Sp(2)$
- Spinor-Darstellungen von $SO(n)$ sind Darstellungen von $Spin(n)$
  - $Spin(n)$ ist double cover von $SO(n) \Rightarrow SO(n) \simeq PSpin(n) \subset Spin(n)$
    * Projektive Darstellung(Notation: PG statt G) ist Darstellung, bei der die Phase der Transformation egal ist
    * Besonderheit von $SO(n)$: Universal cover ist double cover und deshalb $SO(n) \simeq PSpin(n)$
  - Wegen $SO(n) \simeq PSpin(n)$ ist es einfacher, statt $SO(n)$ mit $Spin(n)$ zu rechnen
    * Im Ergebnis(Observable) fällt komplexe Phase(Unterschied zwischen $SO(n)$ und $Spin(n)$) weg
  - Typische Eigenschaft: Für $A \in Spin(n)$ ist $A(2\pi) = -1, A(4\pi) = 1$(folgt aus double cover)
- Spinor-Darstellungen in Dynkin-Diagrammen
  - Spinor-Darstellung erkennen: Andere Normierung der Gewichte/besondere einfache Wurzeln
  - Höhere Darstellung einer Gruppe kann Beimischung von fundamentalen Spinor-Darstellungen haben(dann ist sie auch eine Spinordarstellung), muss aber nicht

2.5.2 Spinor-Darstellung von $SO(3) \subset SU(2) \simeq PSpin(3)$

- Fundamentale Darstellung von $SU(2)$ ist $j = \frac{1}{2}$-Darstellung
- $SU(2)$ ist double cover von $SO(3)$/Zuordnung $SU(2) : SO(3)$ ist $2:1$
  - Formal: Isomorphismus $SO(3) \simeq SU(2)$ existiert nur lokal, nicht global
  - Ziel: Vektor(transformierte sich unter Darstellung von $SO(3)$) konstruieren aus $SU(2)$-Matrizen

1. Konstruiere $X = x^i\sigma^i$(hermitesche, spurlose Matrix) mit Pauli-Matrizen σ^i und Vektor $\vec{x}$
2. $SU(2)$-Transformation $X \to U^\dagger XU$ ändert Eigenschaften von X nicht $\Rightarrow U^\dagger XU = y^i\sigma^i$
   - $(U^\dagger XU)^\dagger = U^\dagger X^\dagger U = U^\dagger XU$, $\text{tr}(U^\dagger XU) = \text{tr}(XUU^\dagger) = \text{tr}X = 0 \Rightarrow \vec{y}$ ist auch ein Vektor
   - $-\vec{y}^2 = \det(U^\dagger XU) = \det X \det(U^\dagger U) = \det X = -\vec{x}^2 \Rightarrow \vec{x}^2 = \vec{y}^2$
3. U und $-U$ generieren dieselbe Rotation $(-U)^\dagger X(-U) = U^\dagger XU \Rightarrow$ Zuordnung ist $2:1$

- Rotation um x_3-Achse mit Winkel ϕ: $U(\phi) = e^{\frac{i\phi\sigma_3}{2}} = \begin{pmatrix} e^{\frac{i\phi}{2}} & \\ & e^{\frac{-i\phi}{2}} \end{pmatrix}$ mit $U(2\pi) = -1, U(4\pi) = 1 \Rightarrow$ Fundamentale Darstellung hat typische Eigenschaft von Spinor-Darstellungen

2.5.3 Darstellung von $Spin(n)$ mit Clifford-Algebra Cl_n

- $Spin(2n)$ und $Spin(2n+1)$
  - Rechnung für $Spin(2n)$ ist natürlicher als Rechnung für $Spin(2n+1)$
  - Strategie: Löse Problem erst für $Spin(2n)$ und wandle die Lösung dann leicht ab für $Spin(2n+1)$
  - $Spin(2n+1)$ hat eine fundamentale Spinor-Darstellung
    * Begründung: Ein Gewicht mit anderer Normierung/eine besondere Wurzel

- $Spin(2n)$ hat zwei fundamentale Spinor-Darstellungen
  * Begründung: Zwei Gewichte mit anderer Normierung/zwei besondere Wurzeln

- Konstruktion von Cl_n(γ-Matrizen)
  - Verwende σ_{ij}(mit γ-Matrizen) als Basis der Lie-Algebra, da man so natürlicher als wie mit der Standardbasis für $so(n)$ an die Eigenschaften von $Spin(n)$ kommt
  - Idee: Konstruiere Menge $\gamma^{(n)}$ von $2n$ γ-Matrizen $\gamma_i^{(n)}$ durch direkte Produkte von σ_i und 1

1. Definiere $\gamma_i^{(n)}$ für Cl_{2n} durch Induktion
   - Induktionsanfang: $\gamma_1^{(1)} = \sigma_1, \gamma_2^{(1)} = \sigma_2$
   - Induktionsschritt: $\gamma_{2n+1}^{(n+1)} = 1_{2^n} \otimes \sigma_1$, $\gamma_{2n+2}^{(n+1)} = 1_{2^n} \otimes \sigma_2$, $\gamma_i^{(n+1)} = \gamma_i^{(n)} \otimes \gamma_3$ für $i \in \{1, \dots 2n\}$
   - Anschauliche Notation: $\gamma_{2k-1}^{(n)} = 1 \otimes 1 \cdots \otimes 1 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_3 \cdots \otimes \sigma_3, \gamma_{2k}^{(n)} = 1 \otimes 1 \cdots \otimes 1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_3 \cdots \otimes \sigma_3$ mit $k-1$ 1en und $n-k$ $\sigma_3$en
2. Besondere γ-Matrix $\gamma_F^{(n)} = (-i)^n \gamma_1^{(n)} \gamma_2^{(n)} \dots \gamma_{2n}^{(n)}$ hat Eigenschaft $[\gamma_F^{(n)}, \gamma_i^{(n)}]_+ = 0$
   - Verallgemeinerung von γ_5 für $n=2$
   - Anschauliche Notation: $\gamma_F^{(n)} = \sigma_3 \otimes \sigma_3 \cdots \otimes \sigma_3$ mit n $\sigma_3$en
3. Definiere γ-Matrizen von Cl_{2n+1} $\Rightarrow$ Habe alle γ-Matrizen für Cl_n
   - Strategie 1: Entferne $\gamma_{2n}^{(n+1)}$ aus der Menge $\gamma^{(n+1)}$ $\Rightarrow$ Habe $2n+1$ γ-Matrizen für Cl_{2n+1}
   - Strategie 2: Füge $\gamma_F^{(n)}$ zur Menge $\gamma^{(n)}$ hinzu $\Rightarrow$ Habe $2n+1$ γ-Matrizen für Cl_{2n+1}
   - Strategie 2 ist besser, da Cl_{2n+1} dann nur 2^n-dimensional statt 2^{n+1}-dimensional ist

- Konstruktion der Generatoren σ_{ij} von $spin(n)$

1. $\frac{1}{2}\sigma_{ij}$ mit $\sigma_{ij} = -\frac{i}{2}[\sigma_i, \sigma_j]$ als Generatoren
   - Kann $\sigma_{ij}^{(n)}$ mit $\gamma_i^{(n)}$ angeben: $\sigma^{(n+1)} = \sigma_{ij}^{(n)} \otimes 1 = -i\gamma_i^{(n+1)}\gamma_j^{(n+1)}, \sigma_{i,2n+1}^{(n+1)} = \gamma_i^{(n)} \otimes \sigma_2, \sigma_{i,2n+2}^{(n+1)} = -\gamma_i^{(n)} \otimes \sigma_1, \sigma_{2n+1,2n+2}^{(n+1)} = 1_{2^n} \otimes \sigma_3$
   - Generatoren $\sigma_{ij} = -\sigma_{ji}$ sind antisymmetrisch $\Rightarrow$ Parameter ω_{ij} sind auch antisymmetrisch
2. Finde Kommutatorrelationen $[\frac{1}{2}\sigma_{ij}, \frac{1}{2}\sigma_{kl}] = \frac{i}{2}\left(\delta_{ik}\sigma_{jl} + \delta_{jl}\sigma_{ik} - \delta_{jk}\sigma_{il} - \delta_{il}\sigma_{jk}\right)$
   - Benötige Definition von σ_{ij} und Clifford-Algebra für die (längliche) Rechnung
   - Erkenntnis: Gleiche Kommutatorrelation wie für Generatoren J^{lm} von $so(n)$

- Transformationsmatrizen der fundamentalen Darstellung von $Spin(n)$: $U(\omega) = e^{\frac{i}{4}\omega_{ij}\sigma_{ij}}$ mit $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$
  - Transformationsverhalten von Spinoren $\psi \to e^{\frac{i}{4}\omega_{ij}\sigma_{ij}}\psi$, $\psi^\dagger \to \psi^\dagger e^{-\frac{i}{4}\omega_{ij}\sigma_{ij}}$
  - $Spin(n)$-Rotation in der (a,b)-Ebene von $\mathbb{C}^{2^n \times 2^n}$: $\phi := \omega_{ab} \neq 0, \forall_{i \neq a \text{ or } j \neq b}\omega_{ij} = 0 \Rightarrow$ Selbes Verhalten wie bei $SU(2) = Spin(3)$
  - $x_i = \psi^\dagger \gamma_i \psi$ mit Spinor ψ transformiert sich wie ein Vektor: $x_i \to x_i - \omega_{ij}x_j$
    * Betrachte infinitesemale Transformation $x_i = \psi^\dagger\gamma_i\psi \to \psi^\dagger\left(1 - \frac{i}{4}\omega_{jk}\sigma_{jk}\right)\gamma_i\left(1 + \frac{i}{4}\omega_{nm}\sigma_{nm}\right)\psi$ $= \psi^\dagger\gamma_i\psi - \frac{i}{4}\omega_{jk}\psi^\dagger[\sigma_{jk}, \gamma_i]\psi = x_i - \frac{1}{2}\left(\omega_{ij}x_j - \omega_{ji}x_j\right) = x_i - \omega_{ij}x_j$ und benutze $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$

- Links- und rechtshändige Spinoren $\psi_L = \psi_-, \psi_R = \psi_+$
  - Formal: γ_F ist Casimir-Operator von $spin(n)$ wegen $\forall_{i,j}[\gamma_F, \sigma_{ij}] = 0$
    * Verwende zusätzlichen Eigenwert $\pm$ für Charakterisierung von Darstellungen
  - Anschaulich: $\gamma_F^2 = 1 \Rightarrow$ Kann Projektionsoperatoren $P_{R,L} = P_\pm = \frac{1 \pm \gamma_F}{2}$ auf irreduzible Darstellungen definieren
    * $P_R\psi = P_+\psi$ und $P_L\psi = P_-\psi$ mischen nicht unter $Spin(n)$-Transformationen, da sie unterschiedliche γ_F-Quantenzahlen haben

- Ladungskonjugation C definiert durch $\xi^T C\psi \to \xi^T C\psi$ unter $Spin(n)$-Transformationen
  - Ladungskonjugation definiert komplex konjugierten Spinor $\psi_c = C^{-1}\psi^*$

- Anschaulich: Benötige C um zu untersuchen, ob eine Darstellung komplex, reell oder pseudoreell istxs
- Grundlage für Bestimmung von C: $\sigma_{ij}^T C = -C\sigma_{ij}$ bzw $C^{-1}\sigma_{ij}^T C = C^{-1}\sigma_{ij}^* C = -\sigma_{ij}$
- Für $Spin(2n)$: $C_2 = i\sigma_2 \otimes \sigma_1$, $C_{n+1} = \begin{cases} C_n \otimes \sigma_1 & n \text{ ungerade} \\ C_n \otimes i\sigma_2 & n \text{ gerade} \end{cases}$
  * Anschauliche Notation: $C_n = i\sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_2 \dots$ ist direktes Produkt aus n Matrizen
  * Eigenschaften: $C_n^T = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} C_n$, $\gamma_i^{(n)} C_n = (-1)^{n+i+1} C_n \gamma_i^{(n)}$, $C_n^{-1}\gamma_F C_n = (-1)^n \gamma_F$
- Für $Spin(2n+1)$:
  * Strategie 1: Benutze normales C_{n+1} von $SO(2n+2)$
  * Strategie 2: C_n geschickt konstruieren

- Freiheitsgrade von Spinordarstellungen
  - Vorgehen: Suche Basiswechsel A in $A^{-1}\mathscr{D}^*(g)A = \mathscr{D}(g)$(Definitionseigenschaft von $C \Rightarrow A = C$)
    * C existiert nicht $\Rightarrow$ Darstellung ist komplex
    * C existiert $\Rightarrow$ Darstellugn ist reell($C^T = C$) oder pseudoreell($C^T = -C$)
  - $Spin(8n+2k)$: reell($k=0$), komplex($k=1$), pseudoreell($k=2$), komplex($k=3$)
  - $Spin(8n+2k+1)$: reell($k=0$), pseudoreell($k=1$), pseudoreell($k=2$), reell($k=3$)

Kapitel 3

Poincaré-Gruppe

3.1 Grundlagen

3.1.1 Rolle der Poincaré-Gruppe

- Motivation: Poincaré-Gruppe $\mathscr{P}$ ist Symmetriegruppe der Raumzeit
  - Konkret: $\mathscr{P}$ ist Gruppe der Transformationen zwischen Inertialsystemen
  - Historisch: Relativistische Theorien(Elektrodynamik, Quantenelektrodynamik, Standardmodell) haben Poincaré-Symmetrie
  - Formal: Physikalische Größen invariant unter $\mathscr{P}_+^\uparrow$-Transformationen
    * Achtung: Schwache Wechselwirkung nicht invariant unter $\mathcal{P}, \mathcal{T} \Rightarrow$ Nur $\mathscr{P}_+^\uparrow$ statt $\mathscr{P}$
  - Teilchen transformieren sich unter irreduziblen unitären projektiven Darstellungen von $\mathscr{P}$
- Minkowski-Raum: Metrischer Raum mit Elementen aus $\mathbb{R}^4$ und Metrik $g =$ diag$(1, -1, -1, -1)$
  - Physik findet im Minkowski-Raum($3+1$ Dimensionen) statt
- Formal: Poincaré-Gruppe $\mathscr{P} = IO(1,3)$ ist Gruppe der linearen Isometrien im Minkowski-Raum
  - Isometrie: Längenerhaltende Abbildung(Länge definiert durch Metrik des Minkowski-Raums)
  - Isometrische Gruppe IG zu einer Gruppe G enthält Gruppenelemente von G und Translationen
  - Zusammenhängende Untergruppe von $IO(1,3)$(von der Lie-Algebra erzeugt) ist $ISO^+(1,3) = \mathscr{P}_+^\uparrow$
- Formal: Lorentz-Gruppe $\mathcal{L} = O(1,3)$ ist Gruppe der linearen Abbildungen im Minkowski-Raum
  - Anschaulich: $\mathcal{L}$ ist Untergruppe von $\mathscr{P}$, die nur homogene Transformationen(keine Translationen) enthält
  - Interessante Dinge passieren in $\mathcal{L}$(Translationen langweilig) $\Rightarrow$ Betrachte oft nur $\mathcal{L}$
- Multiplikationsgesetz von $\mathscr{P}$: $\mathscr{D}(A,a)\mathscr{D}(B,b) = \mathscr{D}(AB, Ab+a)$ für $\mathscr{D}(\Lambda, c) \in \mathscr{P}$
- Definierende Darstellung(Vektordarstellung) von $\mathscr{P}$: $\mathbb{R} \ni a \to \mathscr{D}(\Lambda, c)a = \Lambda a + c, \Lambda \in O(1,3), c \in \mathbb{R}^4$
  - Idee: Verstehe Gruppe mit Vektordarstellung, verallgemeinere dann auf beliebige Darstellungen

3.1.2 Topologie der Lorentz-Gruppe

- Lorentz-Gruppe $O(1,3)$ ist nicht zusammenhängend
  - Teile mit det$\Lambda = 1$ und det$\Lambda = -1$ sind nicht zusammenhängend
    * det$g =$ det$(\Lambda^T g \Lambda) =$ det$g($det$\Lambda)^2 \Rightarrow ($det$\Lambda)^2 = 1$
    * Grund: Vorzeichen der Determinante bei O(N), U(N) beliebig
  - Teile mit ${\Lambda^0}_0 \geq 1$ und ${\Lambda^0}_0 \leq -1$ sind nicht zusammenhängend
    * $1 = g^{00} = {\Lambda^0}_\mu g^{\mu\nu} {\Lambda^0}_\nu = ({\Lambda^0}_0)^2 - \sum_i ({\Lambda^0}_i)^2 \Rightarrow ({\Lambda^0}_0)^2 = 1 + \sum_i ({\Lambda^0}_i)^2 \geq 1$

* Grund: Metrik des Minkowski-Raums

- Zerlegung in zusammenhängende Teile $\mathcal{L} = \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \{\mathcal{P}, \mathcal{T}\}$ bzw $\mathcal{L}/\mathcal{L}_+^\uparrow \simeq \{1, \mathcal{P}, \mathcal{T}, \mathcal{PT}\}$
  - $\mathcal{L}_+^\uparrow = \{\Lambda \in \mathcal{L} : \det\Lambda = 1, \Lambda^0{}_0 \geq 1\} =: SO^+(1,3)$ heißt eigentlich orthochrone Lorentzgruppe
  - $\mathcal{L}_+^\downarrow = \{\Lambda \in \mathcal{L} : \det\Lambda = -1, \Lambda^0{}_0 \leq -1\} = \mathcal{T}\mathcal{L}_+^\uparrow$
  - $\mathcal{L}_-^\uparrow = \{\Lambda \in \mathcal{L} : \det\Lambda = -1, \Lambda^0{}_0 \geq 1\} = \mathcal{P}\mathcal{L}_+^\uparrow$
  - $\mathcal{L}_-^\downarrow = \{\Lambda \in \mathcal{L} : \det\Lambda = 1, \Lambda^0{}_0 \leq -1\} = \mathcal{PT}\mathcal{L}_+^\uparrow$
  - Nur $\mathcal{L}_+^\uparrow$ ist eine Gruppe, da hier die 1 enthalten ist
  - $SO(1,3) = \mathcal{L}_+ = \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_+^\downarrow$, $O^+(1,3) := \mathcal{L}^\uparrow$

3.1.3 Beziehung der Lorentz-Algebra $so^+(1,3)$ zu anderen Lie-Algebren

- $so^+(1,3)$ generiert $SO^+(1,3)$, benötige dazu diskrete Transformationen $\{\mathcal{P}, \mathcal{T}\}$ zur Generation von $O(1,3)$
  - Bennung der Lie-Algebra beliebig($o(1,3) = so(1,3) = so^+(1,3)$), meine Konvention ist $so^+(1,3)$
- $so(4) \simeq su(2) \oplus su(2) \Rightarrow$ Kann Darstellungen von $\mathcal{L}$ bzw. $so^+(1,3)$ durch Eigenwerte von Casimir-Operatoren von $su(2)$-Darstellungen charakterisieren
  - Erhalte $so(4)$ aus $iso^+(1,3)$ durch analytische Fortsetzung
- $PSL(2,\mathbb{C}) \simeq SO^+(1,3)$
  - $SL(2,\mathbb{C}) \not\simeq SO^+(1,3)$ ist die universelle Umschließung(universal cover) von $SO^+(1,3)$
  - $SO^+(1,3) \simeq PSL(2,\mathbb{C}) \Rightarrow$ Lorentz-Gruppe ist immer noch $SO^+(1,3)$, rechne aber mit $SL(2,\mathbb{C})$, da man dann auch Spinor-Darstellungen mitnimmt und die komplexe Phase am Ende wieder rausfällt

3.2 Lie-Algebra $iso^+(1,3)$ von $\mathscr{P}$

3.2.1 Kovariante Generatoren

- Kovarianter Ansatz für infinitesemale Transformation $\mathscr{D}(1+\omega, \epsilon) = 1 + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu} - \epsilon_\mu P^\mu$
  - Anschaulich: Generatoren $M^{\mu\nu}$(Raumzeit-Rotationen/Lorentzgruppe), P^μ(Raumzeit-Translationen)
  - Darstellungsoperator ist Poincaré-Skalar(keine offenen Indizes)
    * Folgerung: Offene Indizes der Parameter $\omega_{\mu\nu}, \epsilon_\mu$ bestimmen Indexstruktur der Generatoren $M^{\mu\nu}, P^\mu$
  - Wahl der Vorfaktoren ist Konvention(beliebige Redefinition der Parameter erlaubt)
- Generator für Raumzeit-Rotationen ist antisymmetrisch $M^{\mu\nu} = -M^{\nu\mu}$
  - $\Lambda = 1 + \omega \in O(1,3) \Rightarrow g_{\mu\nu} = \Lambda^\rho{}_\mu g_{\rho\sigma}\Lambda^\sigma{}_\nu = \left(\delta^\rho_\mu + \omega^\rho{}_\mu\right) g_{\rho\sigma} \left(\delta^\sigma_\nu + \omega^\sigma{}_\nu\right) = g_{\mu\nu} + \omega_{\nu\mu} + \omega_{\mu\nu} \Rightarrow \omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$
  - Kann Indizes in $\mathscr{D}(1+\omega,\epsilon)$ umbenennen $\Rightarrow M^{\mu\nu} = -M^{\nu\mu}$
- Kommutatorrelationen
  - $[P^\mu, P^\nu] = 0$ (Translationen vertauschen)
  - $[M^{\mu\nu}, P^\rho] = i\left(g^{\nu\rho}P^\mu - g^{\mu\rho}P^\nu\right)$
  - $[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = i\left(g^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} + g^{\nu\sigma}M^{\mu\rho} - g^{\mu\sigma}M^{\nu\rho} - g^{\nu\rho}M^{\mu\sigma}\right)$

1. Infinitesemale Darstellung in $\mathscr{D}(\Lambda,a)^{-1}\mathscr{D}(1+\omega,\epsilon)\mathscr{D}(\Lambda,a)$ einsetzen
   - $\mathscr{D}(\Lambda,a)^{-1}\mathscr{D}(1+\omega,\epsilon)\mathscr{D}(\Lambda,a) = 1 + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\mathscr{D}(\Lambda,a)^{-1}M^{\mu\nu}\mathscr{D}(\Lambda,a) - \epsilon_\mu\mathscr{D}(\Lambda,a)^{-1}P^\mu\mathscr{D}(\Lambda,a)$
2. Zuerst Multiplikationsgesetz für $\mathscr{D}(\Lambda,a)^{-1}\mathscr{D}(1+\omega,\epsilon)\mathscr{D}(\Lambda,a)$ verwenden und dann infinitesemale Darstellung einsetzen
   - $\mathscr{D}(\Lambda,a)^{-1} = \mathscr{D}(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)$ folgt aus $1 = \mathscr{D}(\Lambda,a)^{-1}\mathscr{D}(\Lambda,a)$ und Multiplikationsgesetz

- Multiplikationsgesetz anwenden: $\mathscr{D}(\Lambda,a)^{-1}\mathscr{D}(1+\omega,\epsilon)\mathscr{D}(\Lambda,a)$
  $=\mathscr{D}(\Lambda^{-1},-\Lambda^{-1}a)\mathscr{D}\left((1+\omega)\Lambda,(1+\omega)a+\epsilon\right)=\mathscr{D}\left(1+\Lambda^{-1}\omega\Lambda,\Lambda^{-1}(\omega a+\epsilon)\right)$
- Infinitesemale Darstellung einsetzen und Indizes umbenennen: $\mathscr{D}\left(1+\Lambda^{-1}\omega\Lambda,\Lambda^{-1}(\omega a+\epsilon)\right)$
  $=1+\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(\Lambda^{-1})_\rho{}^\mu\Lambda^\nu{}_\sigma M^{\rho\sigma}+\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(2i)(\Lambda^{-1})_\rho{}^\mu a^\nu P^\rho-\epsilon_\mu(\Lambda^{-1})_\rho{}^\mu P^\rho$

3. Koeffizientenvergleich der beiden Ergebnisse für $\mathscr{D}(\Lambda,a)^{-1}\mathscr{D}(1+\omega,\epsilon)\mathscr{D}(\Lambda,a)$
   - Ergebnis antisymmetrisieren in Indizes von $M^{\mu\nu}$ wegen $M^{\mu\nu}=-M^{\nu\mu}$
   - ϵ_μ: $\mathscr{D}(\Lambda,a)^{-1}P^\mu\mathscr{D}(\Lambda,a)=(\Lambda^{-1})_\rho{}^\mu P^\rho$
   - $\omega_{\mu\nu}$: $\mathscr{D}(\Lambda,a)^{-1}M^{\mu\nu}\mathscr{D}(\Lambda,a)=(\Lambda^{-1})_\rho{}^\mu\left(\Lambda^\nu{}_\sigma M^{\rho\sigma}+ia^\nu P^\rho-ia^\rho P^\nu\right)$
   - Anschaulich: Ergebnis ist Transformationsverhalten der Generatoren
4. Infinitesemale Darstellung für $\mathscr{D}(\Lambda,a)=:\mathscr{D}(1+\lambda,a)$ einsetzen
   - Allgemein nützlich: $\mathscr{D}(1+\lambda,a)^{-1}X\mathscr{D}(1+\lambda,a)=\mathscr{D}(1-\lambda,-a)X\mathscr{D}(1+\lambda,a)$
     $=\left(1-\frac{i}{2}\lambda_{\mu\nu}M^{\mu\nu}+a_\mu P^\mu\right)X\left(1+\frac{i}{2}\lambda_{\rho\sigma}M^{\rho\sigma}-a_\rho P^\rho\right)=X+\frac{i}{2}\lambda_{\rho\sigma}[X,M^{\rho\sigma}]-a_\rho[X,P^\rho]$
     * Infinitesemal $\mathscr{D}(1+\lambda,a)^{-1})=\mathscr{D}\left((1+\lambda)^{-1},-(1+\lambda)^{-1}a\right)\overset{\lambda,a\ll 1}{=}\mathscr{D}(1-\lambda,-a)$
   - Vorgehen: Koeffizientenvergleich von 3) und Kommutator-Ausdruck, beachte $M^{\mu\nu}=-M^{\nu\mu}$
   - $\mathscr{D}(\Lambda,a)^{-1}P^\mu\mathscr{D}(\Lambda,a)=P^\mu+\frac{i}{2}\lambda_{\rho\sigma}[P^\mu,M^{\rho\sigma}]-a_\rho[P^\mu,P^\rho]\overset{!}{=}(1-\lambda)_\rho{}^\mu P^\rho=P^\mu-\lambda_{\rho\sigma}g^{\mu\sigma}P^\rho$
     $\Rightarrow[P^\mu,P^\rho]=0$, $[P^\mu,M^{\rho\sigma}]=i\left(g^{\mu\sigma}P^\rho-g^{\mu\rho}P^\sigma\right)$
   - $\mathscr{D}(\Lambda,a)^{-1}M^{\mu\nu}\mathscr{D}(\Lambda,a)=M^{\mu\nu}+\frac{i}{2}\lambda_{\rho\sigma}[M^{\mu\nu},M^{\rho\sigma}]-a_\rho[M^{\mu\nu},P^\rho]$
     $\overset{!}{=}(1-\lambda)_\rho{}^\mu\left((1+\lambda)^\nu{}_\sigma M^{\rho\sigma}+ia^\nu P^\rho-ia^\rho P^\nu\right)=M^{\mu\nu}+\lambda_{\rho\sigma}\left(g^{\nu\rho}M^{\mu\sigma}-g^{\mu\sigma}M^{\rho\nu}\right)+ia_\rho\left(g^{\nu\rho}P^\mu-g^{\mu\rho}P^\nu\right)$
     $\Rightarrow[M^{\mu\nu},P^\rho]=i\left(g^{\mu\rho}P^\nu-g^{\nu\rho}P^\mu\right)$, $[M^{\mu\nu},M^{\rho\sigma}]=i\left(g^{\mu\sigma}M^{\rho\nu}-g^{\mu\sigma}M^{\nu\rho}-g^{\nu\rho}M^{\sigma\mu}+g^{\nu\rho}M^{\sigma\mu}\right)$

- Transformation von $ISO^+(1,3)$ $\mathscr{D}(1+\omega,\epsilon)=\exp\left(\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}-\epsilon_\mu P^\mu\right)$
  - Kann in gegebener Darstellung(Matrizen für $M^{\mu\nu},P^\mu$) Matrixexponentialfunktion berechnen

3.2.2 Anschauliche Generatoren: Rotationen und Boosts

- Definiere anschauliche Generatoren J^i,K^i über kovariante Generatoren $M^{\mu\nu}$
  - Generator von räumlichen Rotationen $J^i=\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}M^{jk}$
  - Generator von Raumzeit-Boosts $K^i=M^{0i}$
  - Anzahl der Freiheitsgrade nicht geändert, da $M^{\mu\nu}$ wegen $M^{\mu\nu}=-M^{\nu\mu}$ nur 6 Freiheitsgrade hat
  - Verändere nichts an den Translation-Generatoren P^μ, da die schon anschaulich sind
- Kommutatorrelationen für J^i,K^i aus Kommutatorrelationen für $M^{\mu\nu}$
  - $[J^i,J^j]=i\epsilon^{ijk}J^k$ (Rotationen sind abgeschlossen)
  - $[J^i,K^j]=i\epsilon^{ijk}K^k$
  - $[K^i,K^j]=-i\epsilon^{ijk}J^k$
  - $[P^\mu,P^\nu]=0$, $[J^i,P^0]=0$, $[J^i,P^j]=i\epsilon^{ijk}P^k$, $[K^i,P^0]=-iP^i$, $[K^i,P^j]=-iP^0\delta^{ij}$
- Transformation von $ISO^+(1,3)$ $\mathscr{D}(\eta,\phi,\epsilon)=\exp\left(i\phi^iJ^i+i\eta^iK^i-\epsilon_\mu P^\mu\right)$
  - Parameter: 3 Winkel ϕ^i für Rotation um 3 räumliche Achsen, 3 Rapiditäten η^i für Boost entlang 3 räumlichen Achsen

3.3 Endlichdimensionale nicht-unitäre Darstellungen von $\mathcal{L}_+^\uparrow=SO^+(1,3)$

3.3.1 Generatoren zur Charakterisierung von Darstellungen

- Definiere geschickte Generatoren $N_\pm^i=\frac{1}{2}(J^i\pm iK^i)$ über anschauliche Generatoren J^i,K^i
  - Achtung: J^i,K^i sind Generatoren von $so^+(1,3)$, $N_\pm^i$ sind Generatoren von $so(4)$
    * Lie-Algebra ändert sich bei der Redefinition, da die $N_\pm^i$ über komplexe Koeffizienten aus den J^i,K^i vorhergehen obwohl $so(4)$ und $so^+(1,3)$ reelle Koeffizienten haben

- Formal: $N^i_\pm$ entstehen aus J^i, K^i durch analytische Fortsetzung der reellen Lie-Algebra (vgl Weyl-Trick)
- Umkehrung der Definition: $J^i = N^i_+ + N^i_-$, $K^i = -i(N^i_+ - N^i_-)$

- Kommutatorrelationen für $N^i_\pm$ aus Kommutatorrelationen für J^i, K^i
  - $[N^i_\pm, N^j_\pm] = i\epsilon^{ijk} N^k_\pm$ (je eine $su(2)$ für N^i_+ und N^i_-)
  - $[N^i_+, N^j_-] = 0$ (die beiden $su(2)$ mischen nicht)
- Folgerung aus Kommutatorrelationen/Dynkin-Diagrammen: $so(4) \simeq su(2) \oplus su(2)$
  - Charakterisiere $so(4)$-Darstellungen mit Casimir-Eigenwerten von $su(2) \otimes su(2)$: (j_1, j_2), $2j_1, 2j_2 \in \mathbb{N}_0$ mit Dimension $(2j_1+1)(2j_2+1)$
- Transformation von $SO^+(1,3)$ $\mathscr{D}^{(j_1,j_2)}(\eta,\phi) = \exp\left(i\phi^i(J^i_{(j_1)} + J^i_{(j_2)}) + \eta^i(J^i_{(j_1)} - J^i_{(j_2)})\right)$
  - Konstruiere (j_1, j_2)-Darstellungen von $so^+(1,3)$ aus $su(2)$-Darstellungen $\mathscr{D}^{(j)}$ mit Generatoren $J^i_{(j)}$
    * Generatoren $(J^3_{(j)})_{mm'} = m\delta_{mm'}, (J^\pm_{(j)})_{mm'} = \sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}\delta_{m'm\pm 1}$, $J^\pm_{(j)} = J^1_{(j)} \pm iJ^2_{(j)}$
    * Trick: Konstruiere nur fundamentale Darstellungen $(\frac{1}{2}, 0), (0, \frac{1}{2})$(höhere Darstellungen sind direkte Summen)
    * Für $j_1 \neq 0, j_2 \neq 0$ leben $J^i_{(j_1)}, J^i_{(j_2)}$ in unterschiedlichen Räumen(zB $J^i_{(j_1)} - J^i_{(j_2)} \neq 0$ für $j_1 = j_2$)
  - Mit dieser Exponentialfunktion generierte Darstellungen(endlichdimensional) sind nicht unitär

3.3.2 Grundlagen zur Darstellungstheorie von $\mathcal{L}^\uparrow_+$

- Transformationsmatrizen in Darstellung (j_1, j_2) sind direktes Produkt von $SU(2)$-Transformationsmatrizen, aber mit komplexen Parametern $\mathscr{D}^{(j_1,j_2)}(\eta,\phi) = \mathscr{D}^{(j_1)}(\phi^i - i\eta^i) \otimes \mathscr{D}^{(j_2)}(\phi^i + i\eta^i)$
  - Schreibe Ergebnis aus obigem Abschnitt $\mathscr{D}^{(j_1,j_2)}(\eta,\phi) = \exp\left(i\phi^i(J^i_{(j_1)} + J^i_{(j_2)}) + \eta^i(J^i_{(j_1)} - J^i_{(j_2)})\right)$ um
- Ergebnis der Darstellungstheorie von $\mathcal{L}$: Endlichdimensionale irreduzible nicht-unitäre Darstellungen
  - Darstellungen sind nicht unitär, da Generator $(K^i)^\dagger = -K^i$ nicht hermitesch ist
  - Kann auch unitäre Darstellungen(ortsabhängige Tensoren) konstruieren
- Beziehung zur Darstellungstheorie von $\mathscr{P}$
  - Zusammenhang $s = j_1 + j_2$ zwischen Quantenzahlen (m, s) von $\mathscr{P}$ und (j_1, j_2) von $\mathcal{L}$
    * $m > 0$: Beschränke $\mathcal{L}$- und $\mathscr{P}$-Transformationen auf little group, dann steht in $\exp$ dasselbe $i\phi^i S^i = i\phi^i(N^i_+ + N^i_-) \Rightarrow S^i = N^i_+ + N^i_-$, $s = j_1 + j_2$
    * $m = 0$: ?
  - Irreduzible Darstellungen von $\mathcal{L}$ sind keine irreduziblen Darstellungen von $\mathscr{P}$, da sie durch Eigenwerte der Casimir-Operatoren $(N^i_\pm)^2$ charakterisiert werden und $[N^i_\pm, P^\mu] \neq 0$
    * Anschaulich: Irreduzible Darstellungen von $\mathscr{L}$ mischen unter $\mathscr{P}$-Transformationen miteinander
    * Darstellungen mit unterschiedlichem $s = j_1 + j_2$ können nicht mischen $\Rightarrow$ Mischung nur zwischen Darstellungen, die durch $\mathcal{P}$-Transformation verknüpft sind(zB $(\frac{1}{2}, 0)$ und $(0, \frac{1}{2})$)
  - Irreduzible Darstellungen von $\mathscr{P}$ werden nirgends behandelt $\Rightarrow$ Haben vermutlich keine schöne Lösung, verwende deshalb Darstellungen von $\mathcal{L}$
- Direktes Produkt von (j_1, j_2)-Darstellungen ist direktes Produkt der einzelnen Komponenten $(j_1), (j_2)$
  - Dimension von Darstellungen (j_1, j_2) ist $(2j_1+1)(2j_2+1)$
  - Zerlegung der Produkt-Darstellung $(\frac{1}{2}, 0) \otimes (0, \frac{1}{2}) = (1,1) \oplus (0,1) \oplus (1,0) \oplus (0,0)$
- Reduktion von $SO^+(1,3)$-Transformationen auf $SU(2)$-Transformationen $\Rightarrow$ Irreduzible Darstellungen von $SO^+(1,3)$ sind reduzibel $(2j_1+1) \otimes (2j_2+1) = (2(j_1+j_2)+1) \cdots \oplus (2|j_1 - j_2| + 1)$
- Kann alle Darstellungen als direktes Produkt von fundamentale Darstellungen $(\frac{1}{2}, 0), (0, \frac{1}{2})$ ausdrücken

3.3.3 Van-der-Waerden-Notation: Indexnotation für Tensoroperatoren von $\mathcal{L}$

- Idee: Indexnotation für Objekte(Tensoren), die sich unter beliebigen Darstellungen (j_1, j_2) von $\mathcal{L}$ transformieren
  - Grundlage ist $su(2)$-Indexnotation mit der Metrik $\epsilon^{ij} = -\epsilon^{ji}$ (siehe $su(n)$-Tensordarstellungen)
  - Notiz: Komponenten der Tensoren können prinzipiell Grassmann-Zahlen (antikommutieren) oder normale Zahlen (kommutieren) sein
    * Tensor soll ein Feld beschreiben $\Rightarrow$ Vertauschungs-Eigenschaft festgelegt durch Spin-Statistik-Theorem: Komponenten von bosonischen Feldern (gerade Anzahl an Indizes) sind normale Zahlen, Komponenten von fermionischen Feldern (ungerade Anzahl an Indizes) sind Grassmann-Zahlen
    * Notiz: Es gibt auch Anwendungen der Van-der-Waerden-Notation, in der man Tensoren mit ungerader Anzahl an Indizes durch normale Zahlen beschreibt (zB spinor helicity formalism)
- Lorentz-Tensoren haben zwei Typen von Indizes
  - $so(4) \simeq su(2) \oplus su(2)$ (2 unabhängige $su(2)$-Indizes) ist analytische Fortsetzung von $so^+(1,3)$ zu einer kompakten Gruppe
  - Kann auch $so^+(1,3)$ durch zwei $su(2)$ ausdrücken, dann hat man aber keine direkte Summe mehr (sondern Zusammenhänge zwischen den beiden $su(2)$'s)
  - Die Indextypen von $so^+(1,3)$ sind abhängig wegen Zusammenhang zwischen den $su(2)$s in $so^+(1,3)$
    * Notation: Kein Punkt/Punkt über Index für Indizes von $(\frac{1}{2}, 0)/(0, \frac{1}{2})$ bzw L/R
- Fundamentale Darstellungen der Lorentz-Gruppe
  - Linke fundamentale Darstellung $(\frac{1}{2}, 0)$ ξ^a: $\xi^a \to (\mathscr{D}_L)^a{}_b \xi^b$
  - Rechte fundamentale Darstellung $(0, \frac{1}{2})$ $\eta^{\dot{a}}$: $\eta^{\dot{a}} \to (\mathscr{D}_R)^{\dot{a}}{}_{\dot{b}} \eta^{\dot{b}}$
    * Kann Tensor $\eta^{\dot{a}}$ von $(0, \frac{1}{2})$ immer durch Tensor ξ^a von $(\frac{1}{2}, 0)$ ausdrücken durch $\eta^{\dot{a}} = (\xi^a)^* =: \bar{\xi}^{\dot{a}}$ $\Rightarrow$ Rechte fundamentale Darstellung ist streng genommen unnötig
  - Meine Konvention: Indizes sind per default oben
- Tensoren zu beliebigen Darstellungen
  - Definierende Darstellung $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$: $V^{a\dot{a}} \to (\mathscr{D}_L)^a{}_b (\mathscr{D}_R^T)^{\dot{a}}{}_{\dot{b}} V^{b\dot{b}}$
  - Adjungierte Darstellung $(1,0) \oplus (0,1)$: Direkte Summe von V_{ab} und $V_{\dot{a}\dot{b}}$ mit entsprechendem Transformationsverhalten
  - Beliebige Darstellung $(\frac{n}{2}, \frac{m}{2})$: $V^{a_1 \dots a_n \dot{b}_1 \dots \dot{b}_m} \to (\mathscr{D}_L)^{a_1}{}_{c_1} \dots (\mathscr{D}_L)^{a_n}{}_{c_n} (\mathscr{D}_R^T)^{\dot{b}_1}{}_{\dot{d}_1} \dots (\mathscr{D}_R^T)^{\dot{b}_m}{}_{\dot{d}_m} V^{c_1 \dots c_n \dot{d}_1 \dots \dot{d}_m}$
- Indizes umwandeln $(\eta^*)_{\dot{a}} = (\eta_a)^*$
  - Anschaulich: Die beiden $su(2)$-Algebren für links- und rechtshändige Indizes sind nicht unabhängig (das wären sie in einer direkten Summe $so(4) \simeq su(2) \oplus su(2)$), sondern mischen miteinander
  - Explizit: $\epsilon^{ab}(\xi_b)^* = \epsilon^{\dot{a}\dot{b}} \xi_{\dot{b}} = (\epsilon\xi^*)^{\dot{a}}$ mit linkshändigem Spinor ξ_a transformiert sich wie ein rechtshändiger Spinor $\xi^{\dot{a}}$
    * Kann man nachrechnen, indem man die Darstellungen $\mathscr{D}_{L,R}$ verwendet:
      $\epsilon\xi^* \to \epsilon \left(e^{(i\phi^i - \eta^i)\frac{\sigma^i}{2}} \xi \right)^* = \epsilon e^{(i\phi^i + \eta^i)\epsilon^{-1}\frac{\sigma^i}{2}\epsilon} \xi^* = e^{(i\phi^i + \eta^i)\frac{\sigma^i}{2}} \epsilon\xi^*$ mit $(\sigma^i)^* = -\epsilon^{-1}\sigma^i\epsilon$
  - Konvention: Arbeite nur mit linkshändigen Weyl-Spinoren ξ^a
    * Anschaulich: Arbeite nur mit dem minimal Notwendigen $\Rightarrow$ Vermeide Verwirrung
    * Schreibe rechtshändige Weyl-Spinoren als komplex konjugierte linkshändige Weylspinoren $\bar{\xi}^{\dot{a}} := (\xi^a)^*$
    * Kontrolle: Jeder rechtshändige Spinor (bzw gepunkteter Index) hat ein komplex-konjugiert-Zeichen bzw $\bar{\xi}^{\dot{a}}$, es gibt kein $\xi^{\dot{a}}$
- Indizes heben und senken mit $\epsilon_{ab} = \epsilon_{\dot{a}\dot{b}} = -\epsilon^{ab} = -\epsilon^{\dot{a}\dot{b}} = i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$: $\xi_a = \epsilon_{ab}\xi^b$, $\bar{\xi}_{\dot{a}} = \epsilon_{\dot{a}\dot{b}}\bar{\xi}^{\dot{b}}$

- Total antisymmetrischer Tensor $\epsilon^{ab} = -\epsilon^{ba}$ ist Metrik von $su(2)$
  * Metrik mit Indizes oben/unten vertauscht ist die inverse Metrik, $\epsilon^2 = -\mathbb{1}_2 \Rightarrow \epsilon^{-1} = -\epsilon \Rightarrow$ Metrik mit oberen und unteren Indizes haben relatives Minus-Zeichen
- Achtung: Definition $\xi_a = \epsilon_{ab}\xi^b$, $\bar{\xi}_{\dot{a}} = \epsilon_{\dot{a}\dot{b}}\bar{\xi}^{\dot{b}}$ erlaubt Heben/Senken von Indizes nur mit dem rechten Index in $\epsilon_{ab}/\epsilon_{\dot{a}\dot{b}} \Rightarrow$ Quelle von Vorzeichenfehlern
  * Anschaulich: Ursache allen Übels ist, dass die Metrik nicht symmetrisch ist
- Konvention zur Definition von Skalarprodukten: $\xi\eta := \xi^a\eta_a, \bar{\xi}\bar{\eta} := \bar{\xi}_{\dot{a}}\bar{\eta}^{\dot{a}}$
  * Skalarprodukt von Feldern (Grassmann-Zahlen) ist kommutativ: $\xi\eta = \xi^a\eta_a = \xi^a\epsilon_{ab}\eta^b = -\xi^a\epsilon_{ba}\eta^b = \eta^b\epsilon_{ba}\xi^a = \eta\xi$ wegen $\xi^a\eta^b = -\eta^b\xi^a$
  * Achtung Vorzeichenfehler: $\xi^a\eta_a = \xi^a\epsilon_{ab}\eta^b = -(\epsilon_{ba}\xi^a)\eta^b = -\xi_b\eta^b \Rightarrow$ Es ist wichtig, Indexstruktur im Skalarprodukt festzulegen ($^a{}_a$ vs $_a^a$)
  * Motivation für unterschiedliche Index-Reihenfolge: $\xi\eta = \xi^a\eta_a$ vs $\bar{\xi}\bar{\eta} = \bar{\xi}_{\dot{a}}\bar{\eta}^{\dot{a}}$ (?)

- Invarianten unter Lorentz-Transformationen: $\xi^T\chi = \xi_a\chi^a = \xi_a\epsilon^{ab}\chi_b$, $\bar{\eta}^T\bar{\chi} = \bar{\eta}_{\dot{a}}\bar{\chi}^{\dot{a}} = \bar{\eta}^{\dot{b}}\epsilon_{\dot{b}\dot{a}}\bar{\chi}^{\dot{a}}$
  - Explizit: $\mathscr{D}_{L/R}^T\epsilon\mathscr{D}_{L/R} = \epsilon$ mit $(\sigma^i)^T = -\epsilon^{-1}\sigma^i\epsilon$

- Zusammenhang mit 4-Vektor-Formalismus: $V_{a\dot{b}} = V_\mu(\sigma^\mu)_{a\dot{b}}$ bzw $V^\mu = \frac{1}{2}(\sigma^\mu)_{a\dot{b}}V^{\dot{b}a} = \frac{1}{2}\text{tr}(\sigma^\mu V)$
  - Anschaulich: 4-Vektor-Formalismus ist nicht fundamental(vgl Verhältnis $SU(2) : SO(3)$)
  - Bijektiver Zusammenhang zwischen Spinor-Formalismus und 4-Formalismus funktioniert für beliebige Darstellungen
    * Zusammenhang ist bijektiv für Tensoren, nicht bijektiv(sondern 2:1) für die Transformationsmatrizen
  - Verallgemeinerte Pauli-Matrizen $(\sigma^\mu) = (1, \vec{\sigma}), (\bar{\sigma}^\mu) = (1, -\vec{\sigma})$ bzw $(\sigma^\mu)_{a\dot{a}}, (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}a}$ mit $(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}a} = \epsilon^{ab}\epsilon\dot{a}\dot{b}(\sigma^\mu)_{b\dot{b}}$
    * Anschaulich: Mit $(\sigma^\mu)^{a\dot{a}}, (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}a}$ kann man invariante Objekte aus links- und rechtshändigen Weyl-Spinoren $\xi^a, \bar{\eta}^{\dot{a}}$ konstruieren
    * Pauli-Matrizen σ^μ sind Basis von $SL(2, \mathbb{C}) \Rightarrow$ Kann jedes Element aus $SL(2, \mathbb{C})$ durch Linearkombination von Pauli-Matrizen σ^μ ausdrücken($SL(2, \mathbb{C})$ ist universal cover von $\mathcal{L}$)
  - Direkte Beziehung $\mathscr{D}_R^{-1}(\Lambda)^{\dot{a}}{}_{\dot{b}}(\sigma^\mu)^{\dot{b}b}\mathscr{D}_L(\Lambda)_b{}^a = \Lambda^\mu{}_\nu(\sigma^\nu)^{\dot{a}a}$, $\mathscr{D}_L^{-1}(\Lambda)_a{}^b(\bar{\sigma}^\mu)_{b\dot{b}}\mathscr{D}_R(\Lambda)^{\dot{b}}{}_{\dot{a}} = \Lambda^\mu{}_\nu(\bar{\sigma}^\nu)_{a\dot{a}}$ zwischen den Transformationsmatrizen
  - Transformationsmatrix im 4-Formalismus $\Lambda^\mu{}_\nu = \frac{1}{2}\text{tr}\left(\bar{\sigma}^\mu A\sigma_\nu A^\dagger\right) = \frac{1}{2}(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}b}A_b^c(\sigma_\nu)_{c\dot{d}}(A^\dagger)^{\dot{d}}_{\dot{a}}$, $A \in SL(2, \mathbb{C})$
    * Sehe 2:1-Beziehung von fundamentalen Darstellungen der Transformationsmatrizen(Spinoren) $(D_L)_a{}^b, (D_R)^{\dot{a}}{}_{\dot{b}}$ zu Vektor-Darstellungen $\Lambda^\mu{}_\nu$: A und $-A$ generieren dieselbe Transformation

3.3.4 Eigenschaften wichtiger Darstellungen von $\mathcal{L}$

- Skalare Darstellung $(0, 0)$(1-dimensional) $\mathscr{D}^{(0,0)}(\eta, \phi) = \exp\left(i\phi^i 0 + \eta^i 0\right) = e^0 = 1$ mit $su(2)$-Generatoren $J_{(0)}^i = 0$
  - Triviales Transformationsverhalten $V \to V$ für Tensor V von $(0, 0)$

- Weyl-Spinor-Darstellungen $(\frac{1}{2}, 0)$ und $(0, \frac{1}{2})$(je 2-dimensional)
  - $\mathscr{D}_L(\eta, \phi) = \mathscr{D}^{(1/2,0)}(\eta, \phi) = \exp\left((i\phi^0 + \eta^i)\frac{\sigma^i}{2}\right)$, $\mathscr{D}_R(\eta, \phi) = \mathscr{D}^{(0,1/2)}(\eta, \phi) = \exp\left((i\phi^0 - \eta^i)\frac{\sigma^i}{2}\right)$ mit $su(2)$-Generator $J_{(1/2)}^i = \frac{\sigma^i}{2}$
  - Transformationsverhalten $V_a \to (\mathscr{D}_L)_a{}^bV_b/V_{\dot{a}} \to (\mathscr{D}_R^T)_{\dot{a}}{}^{\dot{b}}V_{\dot{b}}$ für 2-komponentige Tensoren $V_a, V_{\dot{a}}$
  - Nachteil: Weyl-Spinoren sind nicht $\mathcal{P}$-invariant $(\frac{1}{2}, 0) \overset{\mathcal{P}}{\leftrightarrow} (0, \frac{1}{2})$

- Dirac-Spinor-Darstellung $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$(4-dimensional)
  - Vorteil: Dirac-Spinoren sind $\mathcal{P}$-invariant
  - Achtung: Unterscheide 4-dimensionale Darstellungen $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$ und $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

- Vektor-Darstellung $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$(4-dimensional)
  - Verwende 4-Vektor-Notation
  - Generatoren $(J^i)^\mu{}_\nu = i\epsilon^{0i\mu}{}_\nu, (K^i)^\mu{}_\nu = i(g^{0\mu}\delta^i_\nu - g^{i\mu}\delta^0_\nu)$
  - Zerlegung in fundamentale Darstellungen von $su(2)$: $(2\frac{1}{2}+1)\otimes(2\frac{1}{2}+1) = (2\times 1+1)\oplus(2\times 0+1)$
- Darstellungen für antisymmetrische Tensoren $(1,0)$ und $(0,1)$(je 3-dimensional)
  - Tensoren $F^{\mu\nu}_\pm = \pm\tilde{F}^{\mu\nu}$ heißen selbst-dual($+$)/anti-selbst-dual($-$) und transformieren sich unter $(0,1)$/$(1,0)$
    * Definiere $F^{\mu\nu}_\pm$ als Linearkombination von $F^{\mu\nu} = -F^{\mu\nu}$, $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$
  - $(1,0)\oplus(0,1)$ ist Darstellung für antisymmetrische Lorentz-Tensoren($F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$)
    * $(1,0)\oplus(0,1)$ ist adjungierte Darstellung der Lorentz-Gruppe
    * $(1,0)\oplus(0,1)$ ist $\mathcal{P}$-invariant, $(1,0)$ und $(0,1)$ einzeln nicht
    * Einfache Überlegung: $(1,0)\oplus(0,1)$ ist einzige 6-dimensionale Darstellung, $\mathcal{L}$ hat 6 Generatoren
- Darstellung für symmetrische Tensoren $(1,1)$(9-dimensional)
  - $(1,1)\oplus(0,0)$ ist Darstellung für symmetrische Lorentz-Tensoren($F^{\mu\nu} = F^{\nu\mu}$)
    * $(1,1)$ ist spurloser symmetrischer Tensor, $(0,0)$ ist Spur des symmetrischen Tensors

3.4 Unitäre Darstellungen von $\mathscr{P}$

3.4.1 Casimir-Operatoren von $\mathscr{P}$

- $P^2 = P^\mu P_\mu$ mit Translations-Generator P^μ
  - Anschaulich: Masse $m^2 = P^\mu P_\mu$ des mit der Darstellung assoziierten Teilchens
  - $[P^\mu P_\mu, X] = 0$ für alle Generatoren X nachrechnen
    * $[P^\alpha P_\alpha, P^\mu] = P^\alpha[P_\alpha, P^\mu] + [P^\alpha, P^\mu]P_\alpha = 0$
    * $[P^\alpha P_\alpha, M^{\mu\nu}] = P^\alpha[P_\alpha, M^{\mu\nu}] + [P^\alpha, M^{\mu\nu}]P_\alpha = P^\alpha i(\delta^\mu_\alpha P^\nu - \delta^\nu_\alpha P^\mu) + i(g^{\mu\alpha}P^\nu - g^{\nu\alpha}P^\mu)P_\alpha$ $= i(P^\mu P^\nu - P^\nu P^\mu) + i(P^\mu P^\nu - P^\nu P^\mu) = 0$
- $W^2 = W^\mu W_\mu$ mit Pauli-Lubanski-Vektor $W^\mu = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}P_\nu M_{\rho\sigma}$
  - Anschaulich: Maß für Spin s des mit der Darstellung assoziierten Teilchens (m,s)
    * Konkreter Zusammenhang abhängig von $m>0$/$m=0$(erklärt in Wigner-Klassifikation)
  - Pauli-Lubanski-Vektor in anschaulichen Generatoren: $W^0 = -P_j J_j, W^i = -P_0 J^i + \epsilon^{ijk}P_j K_k$
  - Eigenschaften von W^μ
    * $[W^\mu, P^\alpha] = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}P_\nu[M_{\rho\sigma}, P^\alpha] = \frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}P_\nu(\delta^\alpha_\sigma P_\rho - \delta^\alpha_\rho P_\sigma) = i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}P_\nu\delta^\alpha_\sigma P_\rho = 0$ (Symmetrie+Antisym.)
    * $[W^\mu, M^{\alpha\beta}] = i(g^{\alpha\mu}W^\beta - g^{\beta\mu}W^\alpha)$ (?)
    * $[W^\alpha, W^\mu] = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}P_\nu[W^\alpha, M_{\rho\sigma}] = \frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}P_\nu(\delta^\alpha_\rho W_\sigma - \delta^\alpha_\sigma W_\rho) = i\epsilon^{\mu\nu\alpha\sigma}P_\nu W_\sigma = i\epsilon^{\alpha\mu\nu\sigma}P_\nu W_\sigma$
  - $[W^\mu W_\mu, X] = 0$ für alle Generatoren X nachrechnen
    * $[W^\mu W_\mu, P^\alpha] = W^\mu[W_\mu, P^\alpha] + [W^\mu, P^\alpha]W_\mu = 0$
    * $[W^\mu W_\mu, M^{\alpha\beta}] = W^\mu[W_\mu, M^{\alpha\beta}] + [W^\mu, M^{\alpha\beta}]W_\mu = i\left(W^\mu(\delta^\alpha_\mu W^\beta - \delta^\beta_\mu W^\alpha) + (g^{\alpha\mu}W^\beta - g^{\beta\mu}W^\alpha)W_\mu\right)$ $= i(W^\alpha W^\beta - W^\beta W^\alpha + W^\beta W^\alpha - W^\alpha W^\beta) = 0$
- Eigenwerte von Casimir-Operatoren klassifizieren irreduzible Darstellungen von $\mathscr{P}$ nicht eindeutig
  - Grund: $\mathscr{P}$ ist nicht halbeinfach
  - Bsp: Unendlich viele Darstellungen mit unterschiedlichem s für $W^2 = P^2 = 0$

3.4.2 Grundlagen zu unitären Darstellungen von $\mathscr{P}$

- Kann Endlichdimensionale nicht-unitäre Darstellungen von $\mathcal{L}_+^\uparrow$ als Darstellungen von $\mathscr{P}$ verwenden
  - Translationen sind invariante Untergruppe von $\mathscr{P} \Rightarrow$ Kann alle Translationen auf triviale Darstellungen abbilden und Darstellungsdefinition ist erfüllt
- Unitaritätstheorem: $\mathscr{P}, \mathcal{L}$ nicht kompakt $\Rightarrow \mathscr{P}, \mathcal{L}$ haben keine endlichdimensionalen unitären Darstellungen
  - Benötige unitäre Darstellungen wegen Wahrscheinlichkeitserhaltung
  - Unitäre Darstellungen sind unendlich-dimensional $\Rightarrow$ Orts-/Impulsabhängige Tensoren bzw Felder)
- Little group von $\mathscr{P}$: $\mathscr{P}_p := \{(\Lambda, a) \in \mathscr{P} : (\Lambda, a)$ lässt p fest$\}$
  - Anschaulich: $\mathscr{P}_p$ ist Untergruppe von $\mathscr{P}$, die p invariant lässt
    * Konkret: Boosts(ändern p) sind sicherlich nicht in $\mathscr{P}_p$
  - Little group $\mathscr{P}_p$ ist kompakt $\Rightarrow$ Hat endlichdimensionale unitäre Darstellungen
  - Mit Klassifizierung von Darstellungen von $\mathscr{P}_p$ sind Darstellungen von $\mathscr{P}$ eindeutig klassifiziert
- Tensoren von $\mathscr{P}$: $|m,p,\alpha\rangle$ mit $P^2|m,p,\alpha\rangle = m^2|m,p,\alpha\rangle$, $P^\mu|p,\alpha\rangle = p^\mu|p,\alpha\rangle$
  - Little group $\mathscr{P}_p$ der Darstellung legt Eigenschaften des Entartungsindex α fest
- Unendlichdimensionale Darstellung von $\mathscr{P}$
  - Darstellung der Generatoren $P^\mu = i\partial^\mu, M^{\mu\nu} = i(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu)$
  - Tensoren der Darstellung sind Felder $\psi_\alpha(p)$
    * Anschaulich: $\psi_\alpha(p)$ sind p-abhängige Basisvektoren der Darstellungen
    * Basiswechsel in Ortsbasis liefert $\psi_\alpha(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\psi_\alpha(p)e^{-ipx} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\left(\psi_\alpha^+(p)e^{-ipx} + \psi_\alpha^-(p)e^{ipx}\right)|_{p^2=m^2}$
  - $P^2|m,p,\alpha\rangle = m^2|m,p,\alpha\rangle$ in dieser Darstellung heißt Klein-Gordon-Gleichung $(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)|m,p,\alpha\rangle = 0$
- Felder $\psi_\alpha(p)$ als p-abhängige Darstellungen von $\mathcal{L}_+^\uparrow$
  - Gebe den Feldern $\psi_\alpha(p)$ zusätzlich Spinor- oder 4-Indizes(Notationen sind äquivalent)
  - Lagrangian(siehe QFT) beschreibt Eigenschaften von $\psi_\alpha(p)$ und hat für eine (j_1, j_2)-Darstellung von $\mathcal{L}_+^\uparrow$ $(2j_1+1)(2j_1+1)$ Freiheitsgrade
    * Problem: Darstellungen von $\mathscr{P}$ haben $2s+1(m>0)$ bzw $2(m=0)$ Freiheitsgrade und nicht $(2j_1+1)(2j_2+1) \Rightarrow$ Muss unnötige Freiheitsgrade entfernen
    * Vorgehen: Postuliere außer den Bewegungsgleichungen(außer Lagrangian) zusätzliche Gleichungen(zB Eichinvarianz), die die unnötigen Freiheitsgrade festlegen(zB Eichinvarianz)

3.4.3 Wigner-Klassifikation

- Idee: Suche erlaubte Kombinationen von Eigenwerten von $P^2, W^2 \Rightarrow$ Klassifiziere Darstellungen von $\mathscr{P}_p$
- Casimir-Operatoren $P^2, W^2 \Rightarrow$ Quantenzahlen (m,s) für alle Darstellungen von $\mathscr{P}$
- Massive Teilchen $P^2 > 0 \Rightarrow m \in \mathbb{R}_+$ $s = \frac{n}{2}, n \in \mathbb{N}_0$ und Zustände $|m,p,s,m_s\rangle$
  - Finde ein Ruhesystem $p^\mu = (m, \vec{0})$, hier lässt $\mathscr{P}_p = SO(3)$(Rotationen) p invariant
  - W^2 im Ruhesystem $p^\mu = (m,\vec{0})$: $W^2 = -m^2\vec{J}^2 = -m^2 j(j+j)$ mit Eigenwerten $s := j = \frac{n}{2}, n \in \mathbb{N}_0$
    * Darstellung (m,s) hat $2s+1$ Freiheitsgrade für mögliche Ausrichtungen m_s von $\vec{S}$
- Masselose Teilchen $P^2 = 0, W^2 = 0 \Rightarrow m = 0$, $s = \frac{n}{2}, n \in \mathbb{N}_0$ und Zustände $|m,p,s,\pm 1\rangle$
  - Finde kein Ruhesystem($v = c$), kann aber System $p^\mu = (p,0,0,p)$ mit Bewegung entlang $\hat{e}_z$ wählen, hier lässt $\mathscr{P}_p = ISO(2)$(Rotationen um $\hat{e}_z$, Translationen entlang $\hat{e}_z$) p invariant

- $P_\mu W^\mu = 0$(gilt immer), $P^2 = 0, W^2 = 0 \Rightarrow W^\mu = \lambda P^\mu$ mit Helizität $\lambda = \pm s$
    * Darstellung (s) hat 2 Freiheitsgrade $\lambda = \pm s$ für mögliche Ausrichtungen ± 1 von $\vec{S}$

- Exotische Darstellungen(in der Natur vermutlich nicht realisiert)
  - $P^2 = 0, W^2 < 0 \Rightarrow m = 0, s \in \mathbb{R}$
  - Tachyonen $P^2 < 0$
    * Interpretation: Teilchen ist schneller als Licht $\Rightarrow$ Komische Eigenschaften

Kapitel 4

Supersymmetrie