

Quantenfeldtheorie

Jonas Spinner
16. Mai 2022

Bitte nicht diese pdf weiterverbreiten,
sondern den Link <https://www.jspinner.de>.
Dort gibts die aktuelle Version!

Dies ist eine privat erstellte Zusammenfassung und richtet sich an einen Studenten, der das Thema bereits aus einer Einführungsvorlesung kennt. Übersichtlichkeit und Struktur sind mir besonders wichtig, deshalb schreibe ich in Stichpunkten. Ich kommentiere die Themen, die ich wichtig finde und zeige die Rechnungen, die ich lehrreich finde. Insbesondere versuche ich, Aussagen zu verallgemeinern und direkt zu formulieren, was sicherlich manchmal schief geht. Ich freue mich über Rückmeldungen!

Im Folgenden eine kleine Liste von Quellen, auf die ich beim Anfertigen dieser Zusammenfassung zurückgegriffen habe. Die Punkte sind nach abnehmender Relevanz geordnet.

- Schwartz - Quantum Field Theory and the Standard Model: Guter Einstieg in die Standardthemen
- Einführungs-Vorlesungen: TTPo 2019/2020 (Melnikov), TTP1 2020 (Nierste), TTP2 2020/21 (Heinrich)
- Srednicki - Quantum Field Theory: Ergänzung zum Schwartz, tolles Lernkonzept
- Shifman - Advanced Topics in Quantum Field Theory: Nicht-perturbative Effekte
- Zee - Quantum Field Theory in a nutshell: Unkonventionelle Zugänge
- Peskin, Schröder - An Introduction to Quantum Field Theory
- Itzykson, Zuber - Quantum Field Theory

Überblick

- Klassische Feldtheorie vs Quantenfeldtheorie
 - Überraschend großer Anteil von Teilchentheorie-Vorlesungen kann man mit klassischer Feldtheorie verstehen
 - * Klassische Feldtheorie: Lagrangian, Propagatoren, spontane Symmetriebrechung, Eichtheorie, Effektive Feldtheorie, Solitons
 - * Quantenfeldtheorie: Teilchen-Konzept (und damit Quantisierung, Feynman-Diagramme, Observablen etc), Loop-Effekte/Renormierung
 - Konzepte von klassischer Feldtheorie werden schon im Grundstudium in klassischer Elektrodynamik behandelt
 - * Klassische Elektrodynamik ist Standardbeispiel für klassische Feldtheorie
- Feldtheorie = Anwendung von Gruppentheorie
 - Begründung: “Lagrangian ist allgemeinster Ausdruck der Felder, der invariant unter den Symmetrien der Theorie ist (und weitere Bedingungen...)” \Rightarrow Muss Symmetrien der Theorie beschreiben können, um mit Lagrangian arbeiten zu können
 - Viele Zusammenhänge mit Gruppentheorie-Zusammenfassung (Gruppentheorie-Kapitel: 2.1, 2.4, 3.1, 3.3)
 - * Bsp: Lorentz- und Poincaré-Gruppe (Raumzeit), Lie-Gruppen (innere Symmetrien), diskrete Gruppen wie Z_2 (innere Symmetrien)
- Konkrete Modelle ausgelagert in Zusammenfassung “Modelle für Teilchenphysik”
 - Ziel: Trennung von Quantenfeldtheorie an sich und Anwendungen \Rightarrow Entwickle Handwerkszeug, um mit neuen Modellen zu arbeiten
- Entwickle Formalismus für allgemeine Felder ϕ (bzw Darstellungen der Lorentz-Gruppe), um die Gemeinsamkeiten zu betonen
 - Typisch in Lehrbüchern: Behandle Skalarfeld, Fermion-Feld, Vektorfeld getrennt
 - Gehe in gesonderten Abschnitten “... für typische Felder” auf die 3 Spezialfälle Skalarfeld, Fermion-Feld, Vektorfeld ein
 - Notation
 - * Liste aller Felder: Φ
 - * Generisches Feld: ϕ ($\phi = \Phi_i$ ist Komponente von Φ)
 - * Skalarfeld: φ
 - * Weyl-Spinor: ξ (linkshändig), η (rechtshändig)
 - * Dirac-Spinor: ψ
 - * Vektorfeld: A^μ
 - Empfehlung: Arbeite mit Skalarfeld (triviale Darstellung der Lorentz-Gruppe), um Konzepte zu verstehen
- Lagrange-Formalismus vs Hamilton-Formalismus
 - Anschaulich: Formalismen sind äquivalent, geschickte Wahl vereinfacht aber Rechnung und Interpretation
 - Lagrange-Formalismus \Rightarrow Bevorzugt für Arbeiten mit Symmetrien
 - * Grundlage: Wirkung $S = \int d^4x \mathcal{L}$ ist invariant unter allen Symmetrietransformationen des Systems \Rightarrow Lagrangian \mathcal{L} ist mit den Symmetrien des Systems und den Feldern eindeutig festgelegt
 - * Lagrange-Formalismus ist Standard in klassischer Feldtheorie
 - * **Quantum Field Theory (QFT)** im Lagrange-Formalismus = Pfadintegralformalismus
 - Hamilton-Formalismus \Rightarrow Bevorzugt für physikalische Interpretation

- * Vorteil: Hamiltonian/Energie \mathcal{H} , kanonischer Impuls Π sind Erhaltungsgrößen
- * Hamilton-Formalismus wird in klassischer Feldtheorie quasi nicht benutzt
- * **QFT** im Hamilton-Formalismus = Kanonische Quantisierung

- Struktur

1. Überblick und Vorüberlegungen (Kapitel 1)
2. Klassische Feldtheorie (Kapitel 2)
 - Ausgangsposition: Lagrangian aus Symmetrien der Theorie konstruieren
 - Anwendungen: Euler-Lagrange-Gleichungen und Lösung(Fourierentwicklung), Propagatoren, Noether-Theorem
3. Quantenfeldtheorie (Kapitel 3-4)
 - Anschaulich: Quantenfeldtheorie = Klassische Feldtheorie(Kapitel 1) \otimes Quantenmechanik (Kommutatorrelationen für Felder bzw Pfadintegral)
 - Zwei äquivalente Formulierungen mit unterschiedlichem Anwendungsbereich
 - * Kanonische Quantisierung: Nützlich für explizite Rechnungen
 - * Pfadintegralformalismus: Nützlich für formale Überlegungen
4. Vorhersagen von **QFT** (Kapitel 5-7)
 - Stichworte: Observablen (Matrixelement, Wirkungsquerschnitt, Zerfallsrate), Regularisierung, Renormierung
5. Spezialthemen (Kapitel 8+)
 - Fortgeschrittene Themen in Quantenfeldtheorien, die für realistische Modelle wichtig sind
 - Stichworte: Eichtheorie, spontane Symmetriebrechung, effektive Feldtheorie...

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlagen	9
1.1	Grundbegriffe	9
1.1.1	Klassifikation von Quantenfeldtheorien	9
1.1.2	Slang	9
1.2	Überblick behalten	9
1.2.1	Schöne Worte	9
1.2.2	Klassische Feldtheorie vs Quantenfeldtheorie	10
1.2.3	Kanonische Quantisierung vs Pfadintegralformalismus	10
1.2.4	Klassifikation von Symmetrien	11
1.2.5	Einschränkungen an Spin der Teilchen	11
1.2.6	Störungstheorie	12
1.2.7	Minkowski-Raumzeit vs euklidische Raumzeit	12
1.3	Interpretation von Quantenfeldtheorie	12
1.3.1	Interpretation von Quantenfeldern	12
1.3.2	Quantenfeldtheorie als Anregung von Feldmoden	13
1.3.3	Interpretation verrückter Features von QFT	13
1.4	Axiome für Quantenfeldtheorie	14
1.4.1	Grundlagen	14
1.4.2	Unitarität	14
1.4.3	Lokalität	14
1.4.4	Lorentz-Invarianz	14
1.4.5	Cluster decomposition principle	14
1.4.6	Decomposition theorem	14
2	Klassische Feldtheorie	15
2.1	Lagrange-Formalismus	15
2.1.1	Wirkung S	15
2.1.2	Lagrangedichte	15
2.1.3	Typische Felder	16
2.2	Konstruktion des Lagrangian	18
2.2.1	Forderungen zur Bestimmung von \mathcal{L}	18
2.2.2	Typen von Termen im Lagrangian	20
2.2.3	Unphysikalische Parameter in \mathcal{L} absorbieren	21
2.2.4	Konstruktion des freien Lagrangians für typische Felder	22
2.2.5	Klassifikation von renormierbaren Wechselwirkungstermen für typische Felder (...)	25
2.3	Bewegungsgleichungen	25
2.3.1	Euler-Lagrange-Gleichungen $\partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \Phi} - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Phi} = 0$	25
2.3.2	Bewegungsgleichungen für typischer freie Felder	25
2.3.3	Vorgehen zur Lösung der Bewegungsgleichungen für freie Felder	26
2.3.4	Lösung der Bewegungsgleichungen für typische Felder	28
2.3.5	Greensfunktionen der Bewegungsgleichungen = Propagatoren	28
2.3.6	Feynman-Propagatoren für typische Felder	31
2.4	Hamilton-Formalismus	31
2.4.1	Grundlagen	31
2.4.2	Kanonischer Impuls für typische freie Felder (...)	32
2.4.3	Hamiltonian für typische freie Felder (...)	32

2.5	Noether-Theorem	32
2.5.1	Noether-Theorem für Feldtheorie	32
2.5.2	Energie-Impuls-Tensor	33
2.6	Diskrete Transformationen	33
2.6.1	Grundlagen	33
2.6.2	Diskrete Transformationen von Fourier-Koeffizienten	33
2.6.3	Diskrete Transformationen für typische freie Felder	34
2.6.4	Diskrete Transformationen im Lagrangian	35
2.6.5	CPT -Theorem	35
3	Kanonische Quantisierung	37
3.1	Grundlagen	37
3.1.1	Kanonische Quantisierung	37
3.1.2	Teilchen-Zustände	37
3.1.3	Spin-Statistik-Theorem	38
3.2	Grundbegriffe Zeitentwicklung	40
3.2.1	Wichtige Operationen	40
3.2.2	Wichtige Größen	40
3.2.3	Die beiden Propagator-Definitionen sind äquivalent	41
3.3	Formalismus Zeitentwicklung	42
3.3.1	Grundlagen	42
3.3.2	Zeitentwicklung im Heisenbergbild (H-Bild)	43
3.3.3	Zeitentwicklung im Wechselwirkungsbild (WW-Bild)	43
3.4	Berechnung der S -Matrix	44
3.4.1	Grundlagen	44
3.4.2	Schema X zur Berechnung von $i\mathcal{M}$ aus S_{fi}	45
3.4.3	Wicks Theorem	46
3.4.4	Wicks Theorem für Zustände	47
3.4.5	Zusammenhang zwischen Greensfunktionen der freien Theorie und der WW-Theorie	47
3.5	Alternative Methoden zur Berechnung der S -Matrix	49
3.5.1	Übersicht	49
3.5.2	LSZ-Formel	49
3.5.3	Greensfunktionen berechnen im Lagrangeformalismus (...)	51
3.6	Verallgemeinerung von Feldern – Feldoperatoren	52
3.6.1	Feldoperatoren	52
3.6.2	Spektraldichte	53
4	Pfadintegralquantisierung	54
4.1	Grundlagen	54
4.1.1	Überblick	54
4.1.2	Interpretation des Pfadintegrals	54
4.1.3	Klassischer Grenzfall – method of stationary phase	54
4.2	Pfadintegral-Formalismus und kanonische Quantisierung sind äquivalent	54
4.2.1	Bosonisches Pfadintegral in der Quantenmechanik	54
4.2.2	Bosonisches Pfadintegral in der Quantenfeldtheorie	56
4.2.3	Fermionisches Pfadintegral in der Quantenmechanik	59
4.2.4	Fermionisches Pfadintegral in der Quantenfeldtheorie	62
4.2.5	Fazit: Pfadintegral für eine generische Quantenfeldtheorie	62
4.2.6	Bonus: Zusatzfaktor $\langle 0, \infty \phi(\infty), \infty \rangle \langle \phi(-\infty), -\infty i, -\infty \rangle$ für ein skalares Feld bestimmen	62
4.3	Matrixelemente berechnen	63
4.3.1	Übersicht	63
4.3.2	Erzeugendes-Funktional-Formalismus	64
4.3.3	Erzeugendes Funktional der freien Theorie $Z_{\text{free}}[J]$ für typische Felder	65
4.3.4	Schwinger-Dyson-Gleichungen im Pfadintegralformalismus herleiten (...)	66

5	Observablen	67
5.1	Grundlagen	67
5.1.1	Grundlagen	67
5.1.2	Kinematik	67
5.1.3	Phasenräume	68
5.1.4	Observablen abschätzen mit Dimensionsanalyse	70
5.1.5	Formale Grundlage für Beschreibung von Zerfall und Streuung	71
5.1.6	Anmerkungen	72
5.2	Feynman-Diagramme	72
5.2.1	Klassifikation von Feynman-Diagrammen	72
5.2.2	Begriffe für Feynman-Diagramme	73
5.2.3	Darstellung von Termen im Matricelement \mathcal{M}_{fi} als Feynman-Diagramme	73
5.2.4	Relationen aus der Graphentheorie	74
5.3	Bestimmung von Feynman-Regeln	75
5.3.1	Definition von Feynman-Regeln	75
5.3.2	Ehrliche Methode	75
5.3.3	Ablese-Methode	75
5.3.4	Software verwenden	76
5.4	Anwendung von Feynman-Regeln – Matricelemente berechnen	76
5.4.1	Feynman-Regeln anwenden	76
5.4.2	Konsistenzchecks	78
5.4.3	Vorarbeit für Observablen	79
5.4.4	Weitere Themen	80
5.4.5	Tricks, um Matricelemente zu vereinfachen	81
5.5	Weitere Themen auf Diagramm-Ebene	81
5.5.1	Tadpole-Diagramme	81
5.5.2	Summation von 1PI-Diagrammen (...)	82
5.6	Zerfall	82
5.6.1	Grundlagen	82
5.6.2	2-Körper-Zerfall	83
5.6.3	3-Körper-Zerfall	83
5.7	Streuung	84
5.7.1	Grundlagen	84
5.7.2	$2 \rightarrow 2$ -Streuung	84
5.7.3	Produktion und Zerfall von instabilen Teilchen	85
5.8	Tricks mit $\text{Disc}\mathcal{M}$	86
5.8.1	Übersicht	86
5.8.2	Cutting rules	87
5.8.3	Optisches Theorem	88
5.8.4	Schranken an Wirkungsquerschnitte aus Unitarität	89
5.8.5	Potentiale aus QFT (...)	89
6	Regularisierung	90
6.1	Grundlagen	90
6.1.1	Grundbegriffe	90
6.1.2	Divergenzen in QFT-Rechnungen	90
6.1.3	Naiver (UV-)Divergenzgrad $\omega = (\text{Exponent von } k \text{ im Zähler}) - (\text{Exponent von } k \text{ im Nenner})$ für Loop-Impulse k eines Diagramms/Matricelements	91
6.2	Regularisierung	92
6.2.1	Grundlagen	92
6.2.2	Hard cutoff regularization(UV)	93
6.2.3	Dimensional regularization(UV, IR)	93
6.2.4	Pauli-Villars regularization(UV)	94
6.2.5	Derivative regularization(UV)	95
6.2.6	Photon mass regularization(IR)	96
6.2.7	Lattice regularization(UV, IR)	96
6.3	Berechnung von 1-Loop-Integralen in dimensional regularization	96

6.3.1	Vorgehen	96
6.3.2	Feynman-Parameter x, y, \dots	97
6.3.3	Masterformeln für 1-Loop-Integrale in D Dimensionen	97
6.3.4	Passarino-Veltman functions	99
6.3.5	Rechenmethoden für dimensional regularization	100
6.3.6	Übersicht über Programme zur Berechnung von Loop-Integralen	101
6.4	Multi-Loop-Integrale	101
6.4.1	Grundlagen	101
6.4.2	Überblick über Methoden	102
6.4.3	Integration-of-parts reduction	102
6.4.4	Method of regions	102
6.4.5	Mellin Barnes technique	102
6.4.6	Sector Decomposition	102
7	Renormierung	103
7.1	Grundlagen	103
7.1.1	Grundlagen	103
7.2	Renormierung	104
7.2.1	Renormierung von renormierbaren Theorien	104
7.3	Laufende Kopplungen	106
7.3.1	Renormierungsgruppe	106
7.4	Renormierung von nicht-renormierbaren Theorien	107
8	Eichtheorie	108
8.0.1	Einführung	108
8.1	Grundlagen und Eichfelder	109
8.1.1	Grundlagen	109
8.1.2	Kovariante Ableitung $(D_\mu)^i_j := \delta^i_j \partial_\mu - ig(T_a)^i_j A_\mu^a$	110
8.1.3	Eichfelder mit adjungierten Indizes A_μ^a vs Eichfelder mit fundamentalen Indizes $(A_\mu)^i_j$	111
8.1.4	Infinitesimale Eichtransformationen von Eichfeldern	111
8.1.5	Eigenschaften von Eichfeldern A_μ^a	111
8.1.6	Feldstärketensor $F_{\mu\nu} := \frac{i}{g}[D_\mu, D_\nu]$	113
8.1.7	Geometrischer Zugang zu Eichfeldern	113
8.1.8	Eichfelder haben 2 Freiheitsgrade	115
8.2	Quantenfeldtheorien mit Eichsymmetrie	115
8.2.1	Grundlagen	115
8.2.2	Faddeev-Popov-Methode	116
8.2.3	Eichfixierung in der Praxis	121
8.2.4	BRST-Symmetrie	122
8.2.5	Manuelle Quantisierung von Eichtheorien	123
8.3	Abelsche Eichtheorie	124
8.3.1	Grundlagen	124
8.3.2	Ward-Identität	124
8.3.3	Stückelberg-Mechanismus – Massen für $U(1)$ -Eichfelder	125
8.3.4	Weitere Themen	125
8.4	Nicht-abelsche Eichtheorie	126
8.4.1	Grundlagen	126
8.4.2	Slavnov-Taylor-Identitäten	126
8.4.3	Colour-Algebra – Feynman-Regeln für $SU(n)$ -Generatoren	126
8.4.4	Farbfluss-Diagramme für $SU(n)$	127
8.4.5	Grenzfall $n \rightarrow \infty$ in $SU(n)$	128
8.4.6	Weitere Themen	129

9	Symmetriebrechung	130
9.0.1	Arten der Symmetriebrechung	130
9.1	Spontane Symmetriebrechung	130
9.1.1	Grundlagen	130
9.1.2	SSB für kontinuierliche globale Symmetrien – Goldstone-Theorem	131
9.1.3	SSB für geeichte Symmetrien – Higgs-Mechanismus	133
9.1.4	Bsp-Modelle für SSB	134
9.1.5	CPT-Eigenschaften von Goldstonebosonen (...)	134
9.2	Explizite Symmetriebrechung durch chirale Anomalien	134
9.2.1	Grundbegriffe	134
9.2.2	Fujikawa-Methode – Anomalien aus Transformation des Pfadintegrals	136
9.2.3	Dreiecks-Diagramme – Anomalien aus direkter Rechnung in Störungstheorie	139
9.2.4	Schwinger-Modell – Anomalien in $U(1)$ -Eichtheorie mit einem Fermion in 2 Dimensionen	142
9.2.5	Physikalische Effekte von Anomalien	144
9.2.6	Globale anomale Symmetrien	145
9.2.7	Geeichte anomale Symmetrien	146
9.2.8	't Hooft Anomalien	147
9.2.9	Globale $SU(2)$ -Anomalien (...)	148
9.2.10	Andere Arten von Anomalien (...)	148
10	Effektive Feldtheorie	149
10.1	Das EFT-Weltbild	149
10.1.1	Grundlagen	149
10.1.2	Decoupling	150
10.1.3	Power Counting (...)	150
10.1.4	Naturalness – The paradigm of $\mathcal{O}(1)$ numbers	150
10.1.5	Abschätzungen des Parameterraums mit Dimensionsanalyse	152
10.1.6	Globale Symmetrien werden bei hohen Energieskalen explizit gebrochen	152
10.1.7	Einschränkung von Wilson-Koeffizienten	154
10.1.8	Minimale Operatorbasis	154
10.1.9	Spontane Symmetriebrechung im EFT-Weltbild (...)	155
10.2	Tree-level Matching	155
10.2.1	Grundlagen	155
10.2.2	Matching mit Matrixelementen	155
10.2.3	Matching mit Bewegungsgleichungen	156
10.2.4	Matching mit Hintergrund-Feldern (...)	156
10.2.5	Operator Product Expansion (OPE) (?)	156
10.2.6	Methode: Berechnung von 1-loop-Wilson-Koeffizienten	157
10.3	Matching at higher loops (...)	157
10.3.1	Renormierung	157
10.3.2	RGE improvement	157
10.4	Andere Methoden zur Konstruktion effektiver Feldtheorien	157
10.4.1	Semiklassischer Grenzfall (...)	157
10.4.2	Nichtrelativistischer Grenzfall (...)	157
10.5	Effektive Beschreibung von stark gekoppelten Theorien (...)	157
10.5.1	Grundlagen	157
10.5.2	Explizite Symmetriebrechung durch stark gekoppeltes Kondensat (...)	157
10.5.3	Symmetriebrechungsmechanismen	158
10.5.4	Partial compositeness	158
11	Nichtperturbative Effekte	159
11.1	Grundlagen	159
11.1.1	Der Ursprung von nicht-perturbativen Effekten	159
11.2	Instantons	159
11.3	Solitons	159
11.3.1	Skyrmions	159
11.3.2	Magnetische Monopole	159

11.3.3	Domain walls	159
11.3.4	Cosmic strings	159
11.4	Effekte des θ -Terms in Eichtheorie	159
11.4.1	Überblick	159
11.4.2	Grundlagen	159
11.5	Matching auf perturbative Effekte (...)	159
12	Quantenfeldtheorie in N Dimensionen	160
13	Thermische Quantenfeldtheorie	161
14	Supersymmetrische Quantenfeldtheorien	162

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Grundbegriffe

1.1.1 Klassifikation von Quantenfeldtheorien

- Charakterisierung einer Quantenfeldtheorie
 - Abstrakt: Liste der Materie-Felder (Skalare, Fermionen), Eichsymmetrien und globalen Symmetrien
 - * Liste der Felder folgt automatisch aus Liste der Eichsymmetrien
 - Praktisch: Lagrangian
 - * Lagrangian folgt aus den abstrakten Eigenschaften (Felder, Eichsymmetrie...), der Übergang kann aber sehr komplex sein
- Begriffe
 - Chirale Theorie = Theorie mit Symmetrien, unter denen links- und rechtshändige Fermionen sich unterschiedlich transformieren
 - * Links- und rechtshändige Fermionen sind jeweils irreduzible Darstellungen der Lorentz-Gruppe
⇒ Kein naiver Grund, warum sie sich identisch transformieren sollten

1.1.2 Slang

- Lagrangian = Lagrangedichte

1.2 Überblick behalten

1.2.1 Schöne Worte

- (Quanten-)Feldtheorie = Darstellungstheorie der Poincaré-Gruppe (und evtl noch ein paar weiterer Gruppen)
 - Wichtige Unterscheidung: Off-shell- (Lorentz-) vs On-Shell- (Poincaré-) Darstellungen
 - Feldtheorie/Quantenfeldtheorie (im Hamilton-Formalismus): Zahlen/Operatoren transformieren sich unter der Poincaré-Gruppe
- Quantenmechanik = Quantenfeldtheorie in $1 + 0$ Dimensionen
 - Quantenmechanik: Raumzeit-Metrik ist Einheitsmatrix (bzw eine Zahl) ⇒ Raumzeit-Effekte sind trivial
 - Quantenfeldtheorie ist so kompliziert, weil die Raumzeit-Metrik keine Einheitsmatrix ist
 - * Formal: Raumzeit-Metrik ist keine Einheitsmatrix ⇒ Raumzeit-Symmetrie (Poincaré-Symmetrie) ist nicht-kompakt ⇒ Benötige unendlich-dimensionale Darstellungen (=Felder)
 - Felder sind unendlich-dimensionale Darstellungen, da sie von Raumzeit-Koordinaten ($\in \mathbb{R}$ bzw kontinuierlicher Index) abhängen

1.2.2 Klassische Feldtheorie vs Quantenfeldtheorie

- Stichworte zu den beiden Bereichen
 - Klassische Feldtheorie
 - * Wirkung und Lagrangedichte
 - * Bewegungsgleichungen und Propagatoren
 - * Spontane Symmetriebrechung
 - Quantenfeldtheorie
 - * Einzelne (quantisierte) Teilchen
 - * Feynman-Diagramme (insbesondere Loops), Renormierung
 - * Vakuum-Effekte (Begriff “Vakuum” macht nur Sinn für Quanten-Theorien)

1.2.3 Kanonische Quantisierung vs Pfadintegralformalismus

- Feeling in kanonischer Quantisierung: Verheirate klassische Feldtheorie und Quantenmechanik
 - Erhalte Hamilton-Operator des Systems aus Hamiltondichte $H = \int d^3x \mathcal{H} = \int d^3x (\Pi(x) \partial_0 \Phi(x) - \mathcal{L})$ mit $\Pi(x) = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_0 \Phi(x)}$
 - * Wechsel von Lagrange-Formalismus zum Hamilton-Formalismus komplett analog zur klassischen Mechanik
 - Quantenmechanik-Effekt: Fourierkoeffizienten der klassischen Felder werden zu Erzeugungs- und Vernichtungs-Operatoren(analog zum harmonischen Oszillator) mit Kommutator- oder Antikommutatorrelationen
 - Jede Konfiguration (Masse, Polarisierung, Impuls) eines Felds hat einen eigenen Erzeugungs- und Vernichtungsoperator und damit einen Satz von $n \in \mathbb{N}$ möglichen Zuständen(Interpretation: n Teilchen)
 - Warum “Quanten-”? Bei kleinen Feldanregungen kann man jetzt zwischen 0 und 1 Anregungen unterscheiden, in klassischer Physik wären auch 0.5 Anregungen erlaubt gewesen \Rightarrow Durch diskretisierte Anregungen sind neue Effekte möglich
- Feeling im Pfadintegralformalismus: Wirkungs-Formalismus der klassischen Feldtheorie bekommt eine Zustandssumme analog zur statistischen Mechanik
 - Pfadintegral berücksichtigt Beitrag aller möglichen Konfigurationen
 - * Statistische Mechanik: Zustandssumme summiert/integriert über alle möglichen Konfigurationen der Quantenzahlen(Zahlen) des Systems
 - * Jetzt: Zustandssumme summiert/integriert über alle möglichen Konfigurationen der Felder (Funktionen) des Systemes
 - * Summiere/integriere über Funktionen statt über Zahlen \Rightarrow Benötige Funktionalanalysis
 - Ableitungen des Pfadintegrals liefern Observablen (hier Matrixelemente)
 - Warum Quanten? Im Pfadintegral tragen auch Prozesse mit $\delta S \neq 0$ bei (sind aber mit der Abweichung von $\delta S = 0$ unterdrückt)
- Kanonische Quantisierung und Pfadintegralformalismus sind äquivalent
 - Kanonische Quantisierung und Pfadintegralformalismus sind unterschiedlich gut geeignet für unterschiedliche Probleme \Rightarrow Sehe sie nicht als Konkurrenten, sondern als Ergänzungen zueinander
 - * Vorteil kanonische Quantisierung: Formalismus analog zur Quantenmechanik, Objekte sind wohldefiniert
 - * Vorteil Pfadintegral: Gut für formale Überlegungen (nichtperturbative Effekte, Eichfixierung, Ward-Identitäten...)
 - Viele Ergebnisse lassen sich mit kanonischer Quantisierung und Pfadintegralformalismus gleichermaßen herleiten
 - * Bsp: Propagator, Kausalität
 - Siehe Kapitel zum Pfadintegral-Formalismus für Beweis

1.2.4 Klassifikation von Symmetrien

- Symmetrie = Invarianz unter Transformationen einer bestimmten Gruppe
- Kontinuierlich vs diskret
 - Kontinuierliche Symmetrie: Unendlich viele mögliche Transformationen/Transformation hat kontinuierlichen Parameter
 - Diskrete Symmetrie: Endlich viele Transformationen
- Innere vs äußere
 - Äußere Symmetrie: Invarianz unter Raumzeit-Transformationen
 - * Bsp: Poincaré-Transformationen (Translation, \mathcal{L}_+^\uparrow , \mathcal{P} , \mathcal{T}), Skalentransformationen (conformal symmetry)
 - Innere Symmetrie: Invarianz unter Nicht-Raumzeit-Transformationen
 - * Bsp: $U(1)$ -Transformationen, Ladungskonjugation \mathcal{C}
- Global vs lokal/geeicht
 - Globale Symmetrie: Invarianz unter selber Transformation an jedem Raumzeitpunkt
 - Lokale Symmetrie: Invarianz unter Transformationen mit beliebigen raumzeitabhängigen Parametern
 - * Habe Lokale Symmetrie (= Eichsymmetrie) \Rightarrow Benötige masseloses Vektorfeld (Eichboson)
- Spontan gebrochen vs nicht spontan gebrochen
 - Symmetrie einer Theorie heißt spontan gebrochen : \Longleftrightarrow Vakuum der Theorie transformiert sich unter der Symmetrie
 - * Achtung: Das ist keine Eigenschaft der Symmetrie, sondern des eine Eigenschaft des Vakuums der Theorie
- Weitere Aussagen über Symmetrien
 - Innere Symmetrien sind kompakt
 - * Anschaulich: Falls es nicht so ist, wird der Formalismus deutlich komplexer (wegen unendlich-dimensionalen Darstellungen)
 - * Begründung (Darstellungstheorie): Nur kompakte Gruppen haben endlichdimensionale unitäre Darstellungen
 - Äußere Symmetrien sind höchstens die Super-Poincaré-Gruppe zusammen mit R-Symmetrie (Coleman-Mandula-Theorem)
 - * Voraussetzungen des Coleman-Mandula-Theorems: Unitäre **QFT**, endlich viele Teilchen, obere Schranke für Teilchenmasse, analytische S-Matrix
 - * Notiz: "Normale" Poincaré-Gruppe ist eine Untergruppe der Poincaré-Gruppe
 - * Notiz: Lasse Forderung "endlich viele Teilchen" fallen \Rightarrow Äußere Symmetrie ist höchstens die Super-konforme Gruppe
 - Konforme Gruppe (und damit konforme Feldtheorie) sind als Untergruppe enthalten

1.2.5 Einschränkungen an Spin der Teilchen

- Renormierbarkeit (...)
- Konstruktion von Erhaltungsgrößen (...)

1.2.6 Störungstheorie

- Grundannahme von (perturbativer) Quantenfeldtheorie: Koeffizienten der Wechselwirkungsterme sind klein \Rightarrow Kann sie als Entwicklungsparameter verwenden
 - Rede quasi immer über perturbative Quantenfeldtheorie
- Problem: Für hohe Loop-Ordnungen funktioniert Störungstheorie nicht mehr
 - Argument: n -Loop-Beiträge zum Matrixelement sind unterdrückt mit α^n (mit kleiner Kopplungskonstante α), aber verstärkt mit $n!$ (Anzahl der beitragenden Diagramme) \Rightarrow Für festes α gibt es ein n , ab dem höhere Ordnungen in Störungstheorie immer größere Beiträge liefern
 - * Formal: $n!$ wächst ab einem bestimmten n schneller als α^n
 - Lösungsideen
 - * Naiv: Muss mich damit abfinden, dass Störungstheorie nur bis zu einer maximalen kritischen Ordnung n_c funktioniert
 - In der Praxis nicht schlimm, weil Rechnungen so komplex sind, dass die Ordnung n_c in naher Zukunft nicht erreicht wird
 - * Theorie hat eine Symmetrie, die viele Diagramme verbietet \Rightarrow Anzahl der Diagramme wächst nicht faktoriell
 - * Der **QFT**-Formalismus kann nur effektive Theorien (gültig bis zu einer bestimmten Energieskala) beschreiben, über dieser Skala benötigt man einen anderen Formalismus (der keine Störungstheorie verwendet)

1.2.7 Minkowski-Raumzeit vs euklidische Raumzeit

- Kann Quantenfeldtheorie in Minkowski-Raumzeit (Metrik $g_{\mu\nu}$) oder in euklidischer Raumzeit (Metrik $\delta_{ij}, i \in [1, 2, 3, 4]$) formulieren
 - Übergang durch “Wick-Rotation” $k^4 = ik^0 \Rightarrow$ Erhalte $k^2 = (k^0)^2 - \sum_{i=1}^3 (k^i)^2 = -\sum_{k=1}^4 (k^i)^2$
- Minkowski-Raumzeit – Standard-Wahl für Physiker
 - +: Einfache physikalische Interpretation (kann k^0 als Zeit interpretieren)
 - -: Muss Wick-Rotation durchführen, um Integrale zu berechnen
 - -: Muss Kausalität berücksichtigen
 - * Bsp: Zeitordnung in Korrelationsfunktionen, Regulator $+i0$ im Propagator
- Euklidischer Raumzeit – Standard-Wahl für Mathematiker
 - -: Keine physikalische Interpretation (k^4 ist imaginäre Zeit?)
 - +: Rechnungen stark vereinfacht (keine Wick-Rotationen nötig)
 - +: Kausalität wird automatisch im Formalismus berücksichtigt (?) \Rightarrow Kann argumentieren, dass euklidische Raumzeit natürlicher ist

1.3 Interpretation von Quantenfeldtheorie

1.3.1 Interpretation von Quantenfeldern

- Klassische Feldtheorie vs Quantenfeldtheorie: Wieviele Teilchen sind möglich?
 - Fundamentaler Unterschied: Erzeugungs-/Vernichtungsoperatoren in **QFT** schränken Wertebereich der Anzahl Teilchen (bzw Eigenwerte des Besetzungszahl-Operators $N_{\vec{p}}^{i,\pm} = a_{\vec{p}}^{i,\pm,\dagger} a_{\vec{p}}^{i,\pm}$) ein
 - Klassische Feldtheorie: $N_{\vec{p}}^{i,\pm}$ hat beliebige Eigenwerte $n \in \mathbb{R}$ bzw beliebige Werte für die Fourierkoeffizienten $a_{\vec{p}}^{i,\pm,(\ast)} \in \mathbb{C}$ möglich
 - * Notiz: $a_{\vec{p}}^{i,\pm,(\ast)} \in \mathbb{C} \Rightarrow N_{\vec{p}}^{i,\pm} = a_{\vec{p}}^{i,\pm,\ast} a_{\vec{p}}^{i,\pm} = (N_{\vec{p}}^{i,\pm})^* \in \mathbb{R}$

- **QFT**: $N_{\vec{p}}^{i,\pm}$ hat Eigenwerte $n \in \mathbb{N}$ (Bosonen) bzw $n \in \{0, 1\}$ (Fermionen)

- Interpretation von virtuellen Zuständen

- Definition: Virtuelle Zustände sind Zustände mit 4-Impuls p^μ (und Masse m), die $p^2 = m^2$ nicht erfüllen
- Anschaulich: Virtuelle Zustände sind instabile Anregungen von Quantenfeldern
 - * “Instabile Anregungen”, da sie keine Darstellungen der Lorentzgruppe sind ($p^2 \neq m^2$) und daher nur auf mikroskopischen Zeitskalen (zB in einem Streuprozess) existieren können
- Formal: Existenz virtueller Zustände folgt aus der Energie-Zeit-Unschärfe
 - * Anschaulich: Auf kleinen Zeitskalen ist Verletzung von Energieerhaltung möglich, das machen virtuelle Zustände per Definition
 - Erklärung: Zwei Formalismen zur Beschreibung des Phänomens “Energie-Zeit-Unschärfe” möglich: Entweder Energieverletzung und alle Teilchen sind on-shell ($p^2 = m^2$) oder Energieerhaltung und manche Teilchen sind off-shell ($p^2 \neq m^2$); Konvention in QM/QFT ist erster/zweiter Zugang, aber hinter beiden Zugängen steckt dieselbe Idee (Formalisierung: Feynman tree theorem in 5.8.2)

1.3.2 Quantenfeldtheorie als Anregung von Feldmoden

- Bild: Quantenfeldtheorie ist genau das, was der Name sagt – Eine Theorie von Quantenfeldern
 - Jedem Quantenfeld ist für jeden Raumzeitpunkt eine Liste von Werten (Einträge des Tensors) zugeordnet
 - Quantenfeldtheorie ist eine Quantentheorie \Rightarrow Anregungen der Quantenfelder können nicht beliebig schwach sein, es gibt ein kleinstes Quantum (= Teilchen)
 - Klassische Feldtheorie: Beliebige schwache Anregungen der Quantenfelder sind möglich \Rightarrow Es macht keinen Sinn, von Teilchen als kleinsten Anregungen zu sprechen (da man immer auch 0.1 Teilchen haben kann)
- Virtuelle Teilchen = Instabile Anregungen der Quantenfelder
 - Anregungen sind instabil, falls sie nicht den Anforderungen der Poincaré-Gruppe ($p^2 = m^2$) genügen
- Wechselwirkungen von Quantenfeldern (?)

1.3.3 Interpretation verrückter Features von QFT

- Renormierung = Zusammenhang zwischen Parametern im Lagrangian und Parametern in der Natur ist nicht-trivial
- RGE running = Naturkonstanten sind energieabhängig
- Ghosts = Kann künstliche Felder einführen, um Rechnungen zu vereinfachen
 - Ghost := Teilchen bzw Feld mit “falscher Statistik” (nach dem Spin-Statistik-Theorem)
 - Ghosts können nicht als on-shell-Zustände auftauchen
 - * “Herleitung” des Spin-Statistik-Theorems geht von on-shell-Zuständen aus \Rightarrow Off-shell-Zustände mit falscher Statistik sind kein Problem
 - * Ghosts haben negative Norm \Rightarrow Wahrscheinlichkeits-Interpretation ist schwierig
 - Beispiele
 - * Pauli-Villars-Ghost: Schwere Teilchen mit falscher Statistik als Regulator für Loop-Integrale mit physikalischer Interpretation
 - * Faddeev-Popov-Ghost: Zusätzliche Teilchen in Eichfeld-Loops, die Eichfixierung explizit machen

1.4 Axiome für Quantenfeldtheorie

1.4.1 Grundlagen

- Auf Axiomen basierende Formulierung von QFT ist wünschenswert, aber schwierig
 - Es existiert keine in sich schlüssige axiomatische Formulierung von QFT (aktives Forschungsfeld) (?)
 - Problem: QFT ist komplex \Rightarrow Alle Features in Axiome einzubetten ist aufwändig

1.4.2 Unitarität

1.4.3 Lokalität

1.4.4 Lorentz-Invarianz

1.4.5 Cluster decomposition principle

1.4.6 Decomposition theorem

Kapitel 2

Klassische Feldtheorie

2.1 Lagrange-Formalismus

2.1.1 Wirkung S

- Grundlage des Lagrange-Formalismus: Wirkung $S[\Phi] = \int d^4x \mathcal{L}[\Phi, \partial_\mu \Phi]$ ist universelles Objekt, das alle Informationen über die Theorie enthält
 - Notation: Φ ist ein Tensor mit allen Freiheitsgraden der Felder der Theorie
 - * Lasse in dieser Notation für Lesbarkeit alle Indizes implizit
 - Bsp QCD: $\Phi = (A_\mu^a, \psi_k^i)$ mit Eichfeldern A_μ^a (Lorentz-Index μ , $SU(3)$ -Index a) und Spinorfeldern ψ_k^i (Spinor-Index k , $SU(3)$ -Index i)
 - * Andere Perspektive: Theorie enthält nur das Feld Φ , das sich aber unter einer reduziblen Darstellung der Symmetriegruppe der Theorie transformiert
 - Bsp QCD: $\Phi = (A_\mu^a, \psi_k^i)$ transformiert sich unter Darstellung $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \oplus ((\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2}))$ der Lorentz-Gruppe und Darstellung $8 \oplus 3$ der $SU(3)_c$
 - Informationen der Theorie: Liste der Symmetrien und Quantenzahlen der Felder (m, s, q)
 - * Quantenzahlen (m, s) für Poincaré-Symmetrie, Liste q für Quantenzahlen weiterer Symmetrien
 - Anschaulich: Wirkung $S[\Phi]$ berücksichtigt Beiträge $d^4x \mathcal{L}$ von jedem Raumzeitpunkt x^μ für eine beliebige Feldkonfiguration Φ
 - Formal: Wirkung $S[\Phi]$ ist Funktional der Felder Φ
- Definition von $S[\Phi]$ über die Eigenschaften von \mathcal{L} (2.2.1)
- Prinzip der kleinsten Wirkung: Grundzustand (Vakuum) der Theorie ist eine Feldkonfiguration Φ , die $S[\Phi]$ minimiert bzw. $\frac{\delta S}{\delta \Phi} = 0$
 - Prinzip der kleinsten Wirkung gibt den mathematischen Konstrukten S und \mathcal{L} eine physikalische Interpretation
 - * Metastabile Feldkonfigurationen Φ entsprechen Minima von S
 - * Virtuelle Feldkonfigurationen/virtuelle Zustände Φ haben $\frac{\delta S}{\delta \Phi} \neq 0$
 - Alternative Formulierung: Fordere $\delta S = 0$ statt $\frac{\delta S}{\delta \Phi} = 0$
 - * Führe Variation (totale Ableitung für Funktionale) ein mit $\delta S[\Phi] = \frac{\delta S}{\delta \Phi} \delta \Phi$

2.1.2 Lagrangedichte

- Lagrangedichte $\mathcal{L}[\Phi, \partial_\mu \Phi](x)$ ist nützliche Redefinition von $S[\mathcal{L}]$: $S[\Phi] = \int d^4x \mathcal{L}[\Phi, \partial_\mu \Phi](x)$
- Formal: $\mathcal{L}[\Phi, \partial_\mu \Phi](x)$ ist Funktional der Felder Φ und Funktion des Orts x
 - \mathcal{L} hängt durch die Felder Φ implizit von der Raumzeitkoordinate x ab
 - \mathcal{L} sollte nicht explizit von x abhängen, da dann nicht alle Raumzeit-Punkte gleichberechtigt wären
 - * Formal: Fordere Isotropie und Homogenität des Raums

- Beschreibe Felder in Φ als Darstellungen der Poincaré-Gruppe, eingebettet in Darstellungen der Lorentz-Gruppe (siehe Gruppentheorie)
 - Formal: Benutze 2-Indexnotation (Van-der-Waerden-Notation) oder 4-Indexnotation (Lorentz-Indizes) für die Felder in Φ
- Übliche Notation: $\mathcal{L} \supset A$ für $\mathcal{L} = A + \dots$
 - Motivation: In der Praxis schaut man sich meist nur bestimmte Terme in \mathcal{L} an \Rightarrow Will abkürzende Notation

2.1.3 Typische Felder

- Felder sind Darstellungen der Poincaré-Gruppe
 - Poincaré-Gruppe ist nicht kompakt \Rightarrow Nur Feld-Darstellungen (= unendlichdimensionale Darstellungen) möglich
 - Trick: Verwende statt Darstellungen der Poincaré-Gruppe Darstellungen der Lorentzgruppe zur Beschreibung der Felder, und verwende zusätzliche Bedingungen, um von Darstellungen der Lorentzgruppe auf Darstellungen der Poincaré-Gruppe zu projizieren
 - Interessante Frage für alle Felder: Wie kann man Massen-Terme im Lagrangian einbauen?
- Skalarfeld φ bzw $s = 0$ bzw $(0, 0)$ -Darstellung der Lorentzgruppe
 - Reelles Skalarfeld
 - * Einfachstes mögliches Feld \Rightarrow Typisches Lehrbuchbeispiel
 - Komplexes Skalarfeld
 - * Kann komplexes Skalarfeld durch 2 reelle Skalarfelder ausdrücken
 - * Komplexes Skalarfeld hat wegen Zusammenhang mit reellem Skalarfeld automatisch eine $U(1)$ -Symmetrie
 - Intuitiv: Kann die beiden reellen Felder beliebig vertauschen
 - Kein Mechanismus, der Massenterme für Skalarfelder unterdrückt
 - * Folgerung: Natürliche Massenskala für Skalarfelder ist die größte Energieskala der Theorie
- Fermion-Feld ψ bzw $s = \frac{1}{2}$ bzw $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$ -Darstellung der Lorentzgruppe
 - Fermionen vs Spinoren
 - * Spinoren sind Darstellungen der Lorentz-Gruppe (zB Weyl-Spinor, Dirac-Spinor)
 - Weyl-Spinor $(\frac{1}{2}, 0)$ oder $(0, \frac{1}{2})$, Dirac-Spinor $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$
 - * Fermionen sind Felder bzw Darstellungen der Poincaré-Gruppe (zB Majorana-Fermion, Dirac-Fermion, Weyl-Fermion)
 - Fermionen haben eine Masse (Dirac-Massenterm oder Majorana-Massenterm) und Transformationseigenschaften bezüglich der anderen Symmetrien der Theorie
 - * Fazit: Fermionen sind physikalische Teilchen; Spinoren sind die Mathematik-Hüllen, mit denen man Fermionen beschreibt
 - * Notiz: Kann beliebiges X-Fermion mit beliebigem X-Spinor beschreiben
 - Formale Grundlagen zur Beschreibung von Fermion-Feldern
 - * Helizität
 - Definition: Helizität ist Quantenzahl h des Operators $H = \frac{2\vec{J}\vec{p}}{p}$ mit Impuls $\vec{p}, p = |\vec{p}|$ und Drehimpuls \vec{J}
 - Masselose Teilchen mit Spin $s: h = \pm s \Rightarrow$ Führe Begriffe “right-helical” ($h = s$) und “left-helical” ($h = -s$) ein
 - Massive Teilchen: $h \in \mathbb{R}$
 - Helizität massiver Teilchen ist nicht invariant unter Boosts
 - Fazit: h ist eine gute Quantenzahl, aber nur lorentzinvariant für masselose Teilchen

- * Chiralität

- Definition: Chiralität ist Eigenwert des Operators $\gamma_5 \Rightarrow$ Führe Begriffe “left-chiral” (Eigenwerte -1) und “right-chiral” (Eigenwert 1) ein
- Definiere Projektoren auf Chiralitäts-Eigenzustände $P_{L,R} = \frac{1 \pm \gamma_5}{2}$
- Chiralität massiver Teilchen ist keine gute Quantenzahl (kann das explizit nachrechnen mit Hamilton-Operator)
- Fazit: Chiralität ist lorentzinvariant, aber nur für masselose Teilchen eine gute Quantenzahl

- * Masselose Fermionen: Helizität = Chiralität

- * Ladungskonjugation $\psi \xrightarrow{C} \psi^c$

- Dirac-Spinoren: $\psi^c = i\gamma^0\gamma^2\psi^*$

- Weyl-Fermion (masselos)

- * Definition: Weyl-Fermion hat feste Chiralität

- Für masselose Fermionen ist die Definition automatisch erfüllt
- Für massive Fermionen ist die Definition nicht erfüllt und das Konzept Weyl-Fermion macht keinen Sinn

- * Notiz: Benötige nur einen Weyl-Spinor bzw 2 Komponenten eines Dirac-Spinors, um Weyl-Fermionen zu beschreiben

- Majorana-Fermion (massiv)

- * Definition: Majorana-Fermion ψ erfüllt $\psi^c = e^{i\alpha}\psi$ (mit “Majorana-Phase” α)

- Majorana-Fermionen sind per Definition ungeladen unter allen Symmetrien der Theorie
- Notiz: Felder sind projektive Darstellungen der Poincaré-Gruppe \Rightarrow Habe in jedem Transformationsverhalten eine unphysikalische Phase

- * Anschaulich: Majorana-Fermion ist “reell” (2 reelle Freiheitsgrade) und damit der fundamentale Baustein massiver Fermionen

- Achtung: Ein einzelnes Majorana-Fermion (im Gegensatz zu 2 entarteten Majorana-Fermionen) ist speziell, da sein Massenterm nicht invariant unter beliebigen kontinuierlichen Symmetrien ist

- * Majorana-Fermion als Dirac-Spinor $\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \epsilon\xi^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon\eta^* \\ \eta \end{pmatrix}$

- Masse generiert durch Majorana-Massenterm $\mathcal{L} \supset -m\bar{\psi}\psi + \text{h.c.} = -\frac{m}{2}\xi^T\epsilon\xi + \text{h.c.}$

- Dirac-Fermion (massiv)

- * Definition: Dirac-Fermionen transformieren sich unter der reduziblen Darstellung $(0, \frac{1}{2}) \oplus (\frac{1}{2}, 0)$ der Lorentz-Gruppe

- * Anschaulich: Dirac-Fermion enthält 2 entartete (= selbe Masse) Majorana-Fermionen (4 reelle Freiheitsgrade)

- Begründung: Kann aus einem Dirac-Fermion ψ zwei Majorana-Fermion ψ_1, ψ_2 konstruieren mit $\psi_1 = \psi + \psi^c, \psi_2 = \psi - \psi^c$
 $\Rightarrow \psi_1^c = (\psi + \psi^c)^c = \psi^c + \psi = \psi_1$ ($\alpha = 0$), $\psi_2^c = (\psi - \psi^c)^c = -(\psi - \psi^c) = -\psi_2 = e^{i\pi}\psi_2$ ($\alpha = \pi$)
- 2 entartete Felder \Rightarrow Habe intrinsische $U(1)$ -Symmetrie (analog zur $U(1)$ -Symmetrie für ein komplexes Skalarfeld)

- * Dirac-Fermion als Dirac-Spinor $\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$

- Masse generiert durch Dirac-Massenterm $\mathcal{L} \supset -m\bar{\psi}\psi + \text{h.c.} = -m\xi^T\eta^* + \text{h.c.}$ (Majorana-Massenterme nicht erlaubt, da sie die $U(1)$ -Symmetrie brechen)

- Vektorfeld A^μ bzw $s = 1$ bzw $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ -Darstellung der Lorentzgruppe

- Masseloses Vektorfeld = Eichfeld

- * Interessant: Theorie hat masseloses Vektorfeld \Leftrightarrow Theorie hat Eichsymmetrie
- * Siehe Eichtheorie-Kapitel für Hintergrundinformationen

- Massives Vektorfeld = Proca-Feld

- * Theorie mit fundamentalem massivem Vektorfeld ist nicht renormierbar (?)

- Folgerung: Massive Vektorfelder sind unattraktiv
- “Fundamental” bedeutet, dass die Masse durch einen expliziten Massenterm generiert wird (und nicht durch Higgs- oder Stückelberg-Mechanismus)
- * Mechanismen zur Massengeneration für masselose Vektorfelder bzw Eichbosonen
 - Higgs-Mechanismus: Spontane Symmetriebrechung einer geeichten Symmetrie \Rightarrow Goldstonebosonen werden zu longitudinalen Freiheitsgraden (“Massen”) der Eichbosonen bei bestimmter Wahl der Eichung
 - Stückelberg-Mechanismus: Erlaubt expliziten Massenterm für Eichfeld ohne Brechung der Eichsymmetrie für $U(1)$ -Eichtheorie durch Einführung eines quasi-entkoppelten Skalarfelds (?)
- Weitere Felder
 - Alle weiteren Felder ($s > 1$) sind nicht renormierbar (?)
 - Rarita-Schwinger-Feld bzw $s = \frac{3}{2}$ (?)
 - * Formalismus ähnlich wie bei $s = \frac{1}{2}$ -Fermionen
 - Graviton bzw $s = 2$ bzw $(1, 1)$ -Darstellung der Lorentz-Gruppe (?)
 - * Anschaulich: Eichboson mit Lorentz-Index als Eichtheorie-Index
 - * Bezeichne dieses Teilchen nach seiner physikalischen Bedeutung und nicht nach seinem “Erfinder”, da das Graviton bzw Eichboson der Gravitation die klare Motivation für dieses Teilchen ist

2.2 Konstruktion des Lagrangian

2.2.1 Forderungen zur Bestimmung von \mathcal{L}

- Definition: $\mathcal{L} :=$ Einfachster Ausdruck, der die folgenden Kriterien erfüllt
- Symmetrie-Überlegungen
 - \mathcal{L} ist ein Lorentz-Skalar bzw transformiert sich unter der $(0, 0)$ -Darstellung der Lorentz-Gruppe
 - * Begründung: “Axiom” für Definition von \mathcal{L}
 - * Umsetzung: Alle Lorentz-Indizes müssen kontrahiert sein
 - \mathcal{L} ist ein Skalar bezüglich allen Symmetriegruppen der Theorie
 - * Begründung: “Axiom” für Definition von \mathcal{L}
 - * Umsetzung: Sortiere durch Symmetrien verbotene Terme aus der Menge von durch Lorentz-Symmetrie erlaubten Termen aus
 - \mathcal{L} ist der Allgemeinste mit den Feldern der Theorie konstruierbare Ausdruck, der invariant unter den Symmetrien der Theorie ist
 - * Formale Begründung: Benötige alle erlaubten Terme, da sonst nicht genug freie Parameter (und damit Counterterme) für Renormierung zur Verfügung stehen
 - * Intuitive Begründung: Will allgemeinste Theorie \Rightarrow Sollte keine erlaubten Konfigurationen ausschließen
 - * Umsetzung: Schreibe alle erlaubten Terme auf (kann dann aber viele wegen Redundanz eliminieren)
- Physikalische Forderungen
 - \mathcal{L} darf nur Terme mit endlich vielen Ableitungen enthalten
 - * Begründung: Fordere Lokalität
 - Terme mit unendlich vielen Ableitungen machen nicht-lokale Dinge wie Translation
 - * Notiz: Ausintegrieren schwerer Felder für **Effective Field Theory (EFT)s** (10.2.3) generiert unendlich viele Ableitungen

- Macht Sinn: Habe ein schweres Feld ausintegriert, aber keine Näherung gemacht \Rightarrow Beschreibung der Effekte des schweren Felds erfordert nicht-lokale Effekte
- Kein Problem: Weiß, dass eine lokale Theorie (mit schwerem Teilchen) zugrunde liegt
- \mathcal{L} darf nur Terme mit höchstens 2 Ableitungen enthalten
 - * Begründung: Ostgradsky-Instabilitäten
 - “Instabil”: Kein Grundzustand, kann immer weiter Teilchen-Antiteilchen-Paare erzeugen
 - Formal: Erhalte für Theorien mit 2ter Zeitableitung im Lagrangian im Hamiltonian lineare Terme in kanonischen Impulsen $H \sim p_i \Rightarrow$ Hamiltonian (und damit Energiedichte) nicht nach unten beschränkt (Simon, 1989)
 - * Große Schwierigkeit bei Konstruktion von Theorien für Quantum Gravity
- Totale Ableitungen in \mathcal{L} sind unphysikalisch
 - * Begründung: Totale Ableitungen in \mathcal{L} liefern konstante Verschiebungen in S und ändern daher nichts am Prinzip der kleinsten Wirkung $\delta S = 0$
 - Formaler: Gaußscher Satz $\int d^4x \partial_\mu X^\mu = \oint df_\mu X^\mu = 0$, Kombination A^μ aus Feldern fällt am Rand der Hyperfläche df_μ hinreichend schnell ab
 - * Ausnahme: Totale Ableitungen können die Vakuum-Struktur der Theorie ändern (“ θ -Term”) \Rightarrow Solche Terme haben physikalische Effekte, aber diese sind nicht-perturbativ
- Jedes Feld in \mathcal{L} darf höchstens in der ersten Ableitung auftauchen
 - * Begründung: Erwarte in Analogie zur klassischen Mechanik, dass Felder und erste Ableitungen der Felder als Variablen in \mathcal{L} genügen
 - * Achtung: Da nur $S = \int d^4x \mathcal{L}$ physikalisch ist, kann man \mathcal{L} durch partielle Integration auch mit höheren Ableitungen der Felder ausdrücken
 - Bsp: Lagrangian für freies reelles Skalarfeld kann als $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \varphi (\partial^2 + m^2) \varphi$ geschrieben werden
 - Kann \mathcal{L} durch partielle Integration immer in eine Form bringen, in der es höchstens erste Ableitungen der Felder gibt
- \mathcal{L} muss “echte Massendimension” 4 haben
 - * Begründung: Grundlegendes Objekt $S[\Phi]$ sollte “echte Massendimension” 0 haben
 - Falls $S[\Phi]$ eine Massenskala hätte, wäre irgendeine Massenskala in der Theorie bevorzugt \Rightarrow Erwartet man nicht von einer allgemeinen Theorie
 - Notiz: Unterscheide “Massendimension” (bezieht sich nur auf Felder) und “echte Massendimension” (bezieht sich auf Felder und Koeffizienten) eines Terms
 - * Umsetzung: Koeffizienten der Terme müssen passende Massendimension haben
- \mathcal{L} muss hermitsch sein bzw. $\mathcal{L}^\dagger = \mathcal{L}$
 - * Begründung: $\mathcal{L}^\dagger = \mathcal{L}$ ist Voraussetzung dafür, dass \mathcal{H} hermitsch ist und man reelle Energien erhält
 - * Umsetzung: Addiere zu jedem nicht-hermiteschem Term dessen hermitesch Konjugiertes
- Der zugehörige Hamiltonian \mathcal{H} muss positiv-semidefinit sein
 - * Interpretation: Energiedichte \mathcal{H} in der Theorie muss von unten beschränkt sein
 - Wähle $\mathcal{H}_{\min} = 0 \Rightarrow \mathcal{H} \geq 0$
 - * Argument ist wichtig für Konstruktion der Lagrangians freier Felder mit $s \geq 1$
 - Besonderheit für freie Felder mit $s \geq 1$: Einbettung von Darstellungen der Poincaré-Gruppe in Darstellungen der Lorentz-Gruppe ist nicht-trivial (muss ungewollte Freiheitsgrade durch zusätzliche Bedingungen entfernen)
 - * Argument legt Vorzeichen der Terme im Lagrangian fest
- Forderungen an **Equations of Motion (EOM)s**
 - Jedes Feld ϕ muss die Klein-Gordon-Gleichung $(\partial^2 + m^2)\phi = 0$ erfüllen
 - * Begründung: Klein-Gordon-Gleichung ist Eigenwert-Gleichung des Casimir-Operators $P_\mu P^\mu$ der Poincaré-Gruppe in der Feld-Darstellung \Rightarrow Jede Darstellung ϕ der Poincaré-Gruppe muss diese Eigenwert-Gleichung erfüllen

- Optionale Forderung: Renormierbarkeit
 - \mathcal{L} ist renormierbar \iff Alle Terme in \mathcal{L} haben höchstens Massendimension 4
 - * Massendimensionen eines Terms in \mathcal{L} = Summe der Massendimensionen der Felder im Term
 - Renormierbarkeit ist eher Schönheitsmerkmal als notwendige Forderung
 - * Renormierbare Theorien benötigen nur endlich viele Parameter, um alle Observablen der Theorie zu berechnen
 - * Nicht-renormierbare Theorien benötigen unendlich viele Parameter, um alle Observablen der Theorie zu berechnen
- Konventionen zur Wahl der Koeffizienten
 - Definiere globalen Vorfaktor in \mathcal{L} so, dass man in der **Bewegungsgleichung (BGL)** keine zusätzlichen Vorfaktoren hat
 - Definiere die Koeffizienten von Massentermen so, dass sie der Masse in der **EOM** entsprechen
 - Definiere Koeffizienten von WW-Termen so, dass in den Feynman-Regeln keine Zahlen als Koeffizienten auftauchen
 - * Anschaulich: Nützliche Konvention, um die Rechnung zu vereinfachen
 - * Siehe 5.4.1 für ausführliche Diskussion der Problematik

2.2.2 Typen von Termen im Lagrangian

- Terme mit 0 oder 1 Feldern haben keinen Einfluss auf die Theorie
 - Terme mit 0 Feldern sind konstante Verschiebungen von S und haben daher keine physikalische Bedeutung
 - * Andere Perspektive: Terme mit 0 Feldern tragen nicht zu **EOMs** bei (weil ihre Ableitung verschwindet)
 - Terme mit 1 Feld können mit quadratischer Ergänzung, partieller Integration und Redefinition der Felder entfernt werden
- Kinetischer Term: Bilinear in Feldern, enthält Ableitungen
 - Konkret: Enthält 2 Felder vom gleichen Typ und 1 oder 2 Ableitungsoperatoren ∂_μ
 - Anzahl der Ableitungsoperatoren ist minimal, aber man muss eine Invariante konstruieren können
 - * Bsp: Für skalares Feld benötigt man zwei Ableitungsoperatoren $\partial_\mu \partial^\mu$, da man die Lorentindizes von ∂_μ nicht kontrahieren kann; für Fermionfeld genügt eine Ableitung, da man mit γ^μ die Invariante $\gamma^\mu \partial_\mu$ konstruieren kann
- Massenterm: Bilinear in Feldern, enthält keine Ableitungen
 - Konkret: Enthält 2 Felder vom gleichen Typ
 - Interpretiere Koeffizient des Terms als Masse des Teilchens (genaue Interpretation abhängig von Art des Felds)
- Wechselwirkungsterm: Term mit mindestens 3 Feldern
 - Konkret: Enthält 3 oder mehr Felder(dürfen verschieden sein), darf Ableitungen enthalten
 - Heißt Wechselwirkungsterm, da die zugehörige **EOM** nicht-linear ist
 - * Nicht-lineare **EOM** hat keine einfache Lösung und muss deshalb in Störungstheorie gelöst werden
 - Freie Theorie: Lagrangian enthält keine Wechselwirkungsterme
 - * Dynamik einer freien Theorie ist exakt lösbar (zB mit Greens-Funktionen)

2.2.3 Unphysikalische Parameter in \mathcal{L} absorbieren

- Anschaulich: \mathcal{L} ist durch die Kriterien in 2.2.1 festgelegt, enthält aber viele unphysikalischen Parameter
 - Absorption unphysikalischer Parameter ist nicht notwendig, vereinfacht aber Rechnungen
 - * Observablen hängen per Definition nicht von unphysikalischen Parametern ab
 - Für realistische Theorien kann es sehr komplex sein, alle redundanten Freiheitsgrade zu identifizieren und zu entfernen (insbesondere mit Flavour-Symmetrien)
- Redundanter Freiheitsgrad = Unphysikalischer Freiheitsgrad, der durch Redefinition der Parameter im Lagrangian absorbiert werden kann
 - Es gibt auch unphysikalische Parameter im Lagrangian, die nicht durch Redefinition der Parameter absorbiert werden können (zB ξ -Parameter in Eichtheorie)
- Globale Redundanzen des Lagrangians
 - Additive Konstante $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$
 - * Freiheitsgrad ist unphysikalisch, da er in den EOMs $\partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \Phi} - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Phi} = 0$ durch die Ableitung rausfällt
 - * Konvention: Setze additive Konstante auf "0"
 - * Additive Konstante ist reell, da \mathcal{L} hermitesch ist
 - Multiplikative Konstante $\mathcal{L} \rightarrow \alpha \mathcal{L}, \alpha \in \mathbb{C}$
 - * Freiheitsgrad ist unphysikalisch, da er einer Multiplikation mit einer Konstante in den EOMs $\partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \Phi} - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Phi} = 0$ entspricht
 - * Konvention: ?
- Redundanzen von Feldern ϕ
 - Additive Konstante $\phi \rightarrow \phi + \alpha, \alpha \in \mathbb{C}$
 - * Freiheitsgrad ist unphysikalisch, da Definition der Felder beliebig ist
 - * Konvention: Wähle additive Konstante so, dass mit quadratischer Ergänzung der Term linear im Feld absorbiert wird
 - Multiplikative Konstante $\phi \rightarrow \alpha \phi, \alpha \in \mathbb{C}$
 - * Freiheitsgrad ist unphysikalisch, da Definition der Felder beliebig ist
 - * Konvention zur Festlegung des Betrags der multiplikativen Konstanten: Normiere den kinetischen Term des Felds so, dass die EOMs die Form $\partial^n \phi = \dots$ haben (ohne zusätzlichen Faktor vor $\partial^n \phi$)
 - * Konvention zur Festlegung der Phase der multiplikativen Konstanten
 - ϕ ist reelles Feld \Rightarrow Multiplikative Konstante hat keine Phase
 - ϕ hat nicht-selbstadjungierte Massenterme \Rightarrow Mache den Koeffizienten des Massenterms (= die Masse) positiv und reell (Bsp: Majorana-Massenterme)
 - Sonst \Rightarrow Kann Freiheitsgrade in Kopplungskonstanten eliminieren (Bsp: Phasen der CKM-Matrix)
 - "Flavor-Symmetrie"-Transformationen
 - * Flavor-Symmetrie = Symmetrie der kinetischen- und Massenterme eines Felds, die durch Wechselwirkungsterme gebrochen werden
 - Anschaulich: Habe mehrere Kopien (selbe Quantenzahlen) eines Felds, die aber nicht Komponenten eines gemeinsamen Multiplets sind
 - Flavor-Symmetrie ist eigentlich eine Eigenschaft des Felds, wird aber zur Redefinition von Kopplungskonstanten verwendet
 - Typisches Bsp: Quark- und Lepton-Flavor-Symmetrien im SM
 - * Konvention: Diagonalisiere maximale Anzahl an Kopplungskonstanten A durch Flavor-Symmetrie-Transformation
 - Selbstadjungierter Wechselwirkungsterm $\Rightarrow A^\dagger = A \Rightarrow$ Unitäre Diagonalisierung von A (benötige nur eine Flavor-Symmetrie)
 - Nicht-selbstadjungierter Wechselwirkungsterm $\Rightarrow A^\dagger \neq A \Rightarrow$ Biunitäre Diagonalisierung von A (benötige zwei Flavor-Symmetrien)

2.2.4 Konstruktion des freien Lagrangians für typische Felder

- Anschaulich: Lagrangians konstruieren ist Indexnotation-Übung
 - Lagrangian soll invariant unter Lorentz-Transformationen sein, Felder sind Lorentz-Tensoren \Rightarrow Verwende die zu der Darstellung des Felds passende Indexnotation und schreibe alle erlaubten (= invarianten) Terme auf
- Reelles skalares Feld φ : $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi) - \frac{m^2}{2}\varphi^2$
 1. Invariante Terme: $(\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi), \varphi^2$
 2. Allgemeiner Ansatz $\mathcal{L} = a(\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi) + b\varphi^2$
 - Einschränkung $a, b \in \mathbb{R}$, damit die Terme im Lagrangian hermitesch sind
 3. Wähle $a = \frac{1}{2}$ und $b = -\frac{m^2}{2}$
 - Bedingung $b = -m^2 a$ folgt daraus, dass die zugehörige EOM $2(a\partial^2 - b)\varphi = 0$ der Klein-Gordon-Gleichung entsprechen soll
 - Wähle Normierung $a = \frac{1}{2}$, damit die EOM keinen zusätzlichen Faktor 2 hat
- Komplexes skalares Feld φ : $\mathcal{L} = (\partial_\mu \varphi)^\dagger (\partial^\mu \varphi) - m^2 \varphi^\dagger \varphi$
 - Benötige andere Normierung als für reelles Skalarfeld, damit die EOM keine unnötigen Zusatzfaktoren hat
 - * Begründung: φ, φ^\dagger sind hier unabhängige (reelle) Freiheitsgrade, die damit auch beide eine unabhängige EOM erhalten: $(\partial^2 + m^2)\varphi = 0, (\partial^2 + m^2)\varphi^\dagger = 0$
 - Lagrangian für komplexes Feld hat automatisch eine $U(1)$ -Symmetrie
 1. Komplexes skalares Feld hat 2 reelle Freiheitsgrade φ, φ^\dagger
 - * Alternative Parametrisierung: $\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\varphi_2)$ mit 2 reellen Freiheitsgraden φ_1, φ_2
 2. Muss wegen Konsistenz den Lagrangian für ein komplexes Feld φ durch Lagrangian für 2 reelle Felder φ_1, φ_2 ausdrücken können
 3. Folgerung: Benötige Konstruktionen der Form $\varphi^\dagger \varphi \Rightarrow U(1)$ -Symmetrie
 - * Erhalte sonst nicht die Form $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_i \left(\frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_i)(\partial^\mu \varphi_i) - \frac{m^2}{2}\varphi_i^2 \right)$
- Vorbereitung: Formalismus für 2 komplexe Weyl-Spinoren η, ξ (ξ/η links-/rechtshändig):

$$\mathcal{L} = i\xi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_\mu \xi + i\eta^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_\mu \eta + \left(\frac{M_L}{2} \xi^T \epsilon \xi - \frac{M_R}{2} \eta^\dagger \epsilon \eta^* + m_D \xi^T \eta^* + h.c. \right)$$
 - Notiz: Komponenten $\eta_a, \xi^{\dot{a}}$ von Weyl-Spinoren η, ξ sind Grassmann-Zahlen (antikommutierende Zahlen): $\rho_a \phi_b = -\phi_b \rho_a$ etc
 - * Auch Komponenten von Dirac-Spinoren sind Grassmann-Zahlen, da ein Dirac-Spinoren eine direkte Summe von Weyl-Spinoren ist
 - Massenterme $\mathcal{L}_{\text{mass}} = \frac{M_L}{2} \xi^T \epsilon \xi - \frac{M_R}{2} \eta^\dagger \epsilon \eta^* + m_D \xi^T \eta^* + h.c.$
 - * Invarianten: $\xi_a \epsilon^{ab} \xi_b, (\eta^*)^a \epsilon_{ab} (\eta^*)^b, \xi_a (\eta^*)^a$ und h.c. bzw $a \rightarrow \dot{a}$
 - Vierte Möglichkeit mit ungepunkteten Indizes $(\eta^*)^a \xi_a$ ist nicht unabhängig: $(\eta^*)^a \xi_a = -\xi_a (\eta^*)^a$
 - * Allgemein $\mathcal{L}_{\text{mass}} = \frac{M_L}{2} \xi_a \epsilon^{ab} \xi_b + \frac{M_R}{2} (\eta^*)^a \epsilon_{ab} (\eta^*)^b + m_D \xi_a (\eta^*)^a + h.c.$
 $= \frac{M_L}{2} \xi^T \epsilon \xi - \frac{M_R}{2} \eta^\dagger \epsilon \eta^* + m_D \xi^T \eta^* + h.c.$
 - Wähle Koeffizienten $M_{L,R}, m_D$ so, dass sie in den EOMs den physikalischen Massen entsprechen
 - Kann $M_{L,R} > 0$ wählen, da ich mögliche komplexe Phasen von $M_{L,R}$ durch Phasen-Redefinition der Felder η, ξ absorbieren kann
 - Minuszeichen im M_R -Term: $(\eta^*)^a \epsilon_{ab} (\eta^*)^b = (\eta^*)^T (-\epsilon) \eta^* = -\eta^\dagger \epsilon \eta^*$ wegen $(\epsilon_{ab}) = -\epsilon$
 - * Term mit m_D heißt Dirac-Massenterm, Term mit $M_{L,R}$ heißt Majorana-Massenterm
 - Kinetische Terme $\mathcal{L}_{\text{kin}} = i\xi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_\mu \xi + i\eta^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_\mu \eta$ mit $\overleftrightarrow{\partial}_\mu := \frac{1}{2} \left(\overrightarrow{\partial}_\mu - \overleftarrow{\partial}_\mu \right)$
 - * Verwende $\overleftrightarrow{\partial}_\mu$, da die Terme sonst nicht hermitesch wären

- Kann auch $\partial_\mu = \overrightarrow{\partial}_\mu$ statt $\overleftrightarrow{\partial}_\mu$ verwenden und dazusagen, dass ich eine totale Ableitung zu \mathcal{L} addiert habe: $ia\overleftrightarrow{\partial}_\mu b + \frac{i}{2}\partial_\mu(ab) = \frac{i}{2}a\left(\overrightarrow{\partial}_\mu - \overleftarrow{\partial}_\mu + \overrightarrow{\partial}_\mu + \overleftarrow{\partial}_\mu\right)b = ia\overrightarrow{\partial}_\mu b = ia\partial_\mu b$
- Üblich: Verwende bei Konstruktion der Lagrangians die ehrliche Variante $\overleftrightarrow{\partial}_\mu$ und später die kürzere Variante ∂_μ (habe totale Ableitung im Hinterkopf)
- Definiere $\overleftrightarrow{\partial}_\mu$ mit Faktor $\frac{1}{2}$, um richtige Normierung für die EOMs zu erhalten

1. Invarianten: $\xi_a \epsilon^{ab}(\sigma^\mu)_{bb} \epsilon^{\dot{b}\dot{a}} \overleftrightarrow{\partial}_\mu(\xi^*)_{\dot{a}}, (\eta^*)^a(\sigma^\mu)_{a\dot{a}} \overleftrightarrow{\partial}_\mu \eta^{\dot{a}}, \xi_a \epsilon^{ab}(\sigma^\mu)_{bb} \overleftrightarrow{\partial}_\mu \eta^{\dot{b}}, (\eta^*)^a(\sigma^\mu)_{a\dot{a}} \epsilon^{\dot{a}\dot{b}} \overleftrightarrow{\partial}_\mu(\xi^*)_{\dot{b}}$ bzw in Operatornotation $\xi^T \epsilon \sigma^\mu \epsilon \overleftrightarrow{\partial}_\mu \xi^*, \eta^\dagger \sigma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \eta, \xi^T \epsilon \sigma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \eta, \eta^\dagger \sigma^\mu \epsilon \overleftrightarrow{\partial}_\mu \xi^*$
 - * Habe $\partial_\mu \Rightarrow$ Benötige σ^μ ("wandelt gepunktete und ungepunktete Indizes ineinander um"), um lorentzinvariante Terme zu konstruieren \Rightarrow Es gibt keine $a \leftrightarrow \dot{a}$ -Entartung
 - * Hermitesche Terme: $i\xi^T \epsilon \sigma^\mu \epsilon \overleftrightarrow{\partial}_\mu \xi^*, i\eta^\dagger \sigma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \eta$
 - * Zueinander hermitesch konjugierte Terme: $\xi^T \epsilon \sigma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \eta, \eta^\dagger \sigma^\mu \epsilon \overleftrightarrow{\partial}_\mu \xi^*$ bzw $\left(\xi^T \epsilon \sigma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \eta\right)^\dagger = \eta^\dagger \sigma^\mu \epsilon \overleftrightarrow{\partial}_\mu \xi^*$
2. Allgemein $\mathcal{L}_{\text{kin}} = \alpha i \xi^T \epsilon \sigma^\mu \epsilon \overleftrightarrow{\partial}_\mu \xi^* + \beta i \eta^\dagger \sigma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \eta + \gamma \xi^T \epsilon \sigma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \eta + \gamma^* \eta^\dagger \sigma^\mu \epsilon \overleftrightarrow{\partial}_\mu \xi^*$
 - * Hermitezität von \mathcal{L}_{kin} legt 4 der 8 Koeffizienten-Freiheitsgrade fest \Rightarrow Übrig bleiben 4 Freiheitsgrade $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \gamma \in \mathbb{C}$
3. Eliminiere Freiheitsgrade zwischen den beiden Weyl-Spinoren $\Rightarrow \mathcal{L}_{\text{kin}} = \tilde{\alpha} i \xi^T \epsilon \sigma^\mu \epsilon \overleftrightarrow{\partial}_\mu \xi^* + \tilde{\beta} i \eta^\dagger \sigma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \eta$
 - (a) \mathcal{L}_{kin} umschreiben in Matrix-Notation ($\dot{a} \rightarrow a$ bei komplex konjugieren):

$$\mathcal{L}_{\text{kin}} = \begin{pmatrix} (\epsilon \xi)^a \\ (\eta^*)^a \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \alpha & -i\gamma \\ i\gamma^* & \beta \end{pmatrix} (\sigma^\mu)_{ab} i \overleftrightarrow{\partial}_\mu \begin{pmatrix} (\epsilon \xi^*)^{\dot{b}} \\ \eta^{\dot{b}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\epsilon \xi^*)^{\dot{a}} \\ \eta^{\dot{a}} \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} \alpha & -i\gamma \\ i\gamma^* & \beta \end{pmatrix} (\sigma^\mu)_{ab} i \overleftrightarrow{\partial}_\mu \begin{pmatrix} (\epsilon \xi^*)^{\dot{b}} \\ \eta^{\dot{b}} \end{pmatrix}$$
 - (b) Diagonalisiere hermitesche 2×2 -Matrix $\begin{pmatrix} i\alpha & \gamma \\ \gamma^* & i\beta \end{pmatrix}$ durch unitären Basiswechsel von $\begin{pmatrix} (\epsilon \xi^*)^{\dot{a}} \\ \eta^{\dot{a}} \end{pmatrix}$
 \Rightarrow Die nicht-hermiteschen(nicht-diagonalen) Terme verschwinden durch Festlegen des relativen redundanten Freiheitsgrads zwischen η und $\epsilon \xi^*$
 \Rightarrow Finde $\mathcal{L}_{\text{kin}} = \begin{pmatrix} (\epsilon \xi^*)^{\dot{b}} \\ \eta^{\dot{b}} \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} & 0 \\ 0 & \tilde{\beta} \end{pmatrix} (\sigma^\mu)_{ab} i \overleftrightarrow{\partial}_\mu \begin{pmatrix} (\epsilon \xi^*)^{\dot{b}} \\ \eta^{\dot{b}} \end{pmatrix} = \tilde{\alpha} i \xi^T \epsilon \sigma^\mu \epsilon \overleftrightarrow{\partial}_\mu \xi^* + \tilde{\beta} i \eta^\dagger \sigma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \eta$
 - * Achtung: Felder η, ξ wurden bei der Diagonalisierung redefiniert
4. Absorbiere reelle Faktoren $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ durch Reskalierung der Felder $\xi, \eta \Rightarrow \mathcal{L}_{\text{kin}} = i \xi^T \epsilon \sigma^\mu \epsilon \overleftrightarrow{\partial}_\mu \xi^* + i \eta^\dagger \sigma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \eta$
5. Elegant mit $\bar{\sigma}^\mu$ umschreiben $\Rightarrow \mathcal{L}_{\text{kin}} = i \xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \xi + i \eta^\dagger \sigma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \eta$
 - * $i \xi^T \epsilon \sigma^\mu \epsilon \overleftrightarrow{\partial}_\mu \xi^* = i \xi_a \epsilon^{ab}(\sigma^\mu)_{bb} \epsilon^{\dot{b}\dot{a}} \overleftrightarrow{\partial}_\mu(\xi^*)_{\dot{a}} = -i \xi_a \epsilon^{ab}(\sigma^\mu)_{bb} \epsilon^{\dot{a}\dot{b}} \overleftrightarrow{\partial}_\mu(\xi^*)_{\dot{a}} = i(\xi^*)_{\dot{a}}(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}a} \overleftrightarrow{\partial}_\mu \xi_a = i \xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \xi$ (bekomme je ein Minus durch $\epsilon^{\dot{b}\dot{a}} = -\epsilon^{\dot{a}\dot{b}}$ und durch Antikommutieren der Weyl-Spinor-Komponenten)
 - * Anschaulich: Kann zwei Weyl-Spinoren mit selber Chiralität in einem kinetischen Term vertauschen mit $(\sigma^\mu)_{a\dot{a}}$ und $(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}a}$
 - * Verwende $(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}a} = (\epsilon \sigma^\mu \epsilon)^{\dot{a}a} = \epsilon^{ab} \epsilon^{\dot{a}\dot{b}} (\sigma^\mu)_{bb}$ (kann man komponentenweise nachrechnen)

– Anwendung: Betrachte Majorana-/Dirac-Fermion \Rightarrow Nur Majorana-/Dirac-Massenterm erlaubt

• Komplexes Dirac-Spinor-Feld ψ : $\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu - m)\psi, \overleftrightarrow{\partial}_\mu = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\partial}_\mu - \overleftarrow{\partial}_\mu)$

– Anwendung: ψ ist Majorana-/Dirac-Fermion, m ist die zugehörige Masse

* Für Majorana-Fermion zusätzlicher Faktor $\frac{1}{2}$ für Normierung der EOMs (?)

– Herleitung: Schreibe Weyl-Spinor-Lagrangian in Matrix-Notation und identifiziere Dirac-Spinoren

* Majorana-Massenterm: $\mathcal{L}_{\text{mass}} = -\frac{m}{2} \eta^T \epsilon \eta + \text{h.c.} = -\frac{M}{2} (\eta^T \epsilon \eta - \eta^\dagger \epsilon \eta) = \frac{M}{2} (\eta^a \eta_a + \eta_{\dot{a}}^* \eta^{*\dot{a}} =$

$$\frac{m}{2} \begin{pmatrix} \eta^a \\ \eta_{\dot{a}}^* \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \eta_a \\ \eta^{*\dot{a}} \end{pmatrix} = \frac{m}{2} \bar{\psi} \psi$$

• Rechnung funktioniert analog mit rechtshändigem Weyl-Spinor

• Achtung: $\xi^a \xi_a = \xi^a \epsilon_{ab} \xi^b = -\xi^b \epsilon_{ab} \xi^a = (-1)^2 \xi_b \epsilon^{ab} \xi_a = (-1)^3 \xi_b \epsilon^{ba} \xi_a = -\xi^T \epsilon \xi$, aber $(\eta^*)^a (\eta^*)_a = (\eta^*)^a \epsilon_{ab} (\epsilon^*)^b = \eta^\dagger \epsilon \eta^*$ (weil die Metrik nur Indizes von rechts heben/senken darf)

- * Dirac-Massenterm: $\mathcal{L}_{\text{mass}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \xi^a \\ (\eta^*)^a \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & m_D \\ m_D & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_a \\ (\eta^*)_a \end{pmatrix} + h.c. = m_D \eta^\dagger \xi + h.c.$
 $\cdot (\eta^*)^a \xi_a = \eta^\dagger \xi$ ist trivial, $\xi^a (\eta^*)_a = \xi^a \epsilon_{ab} (\eta^*)^b = -(\eta^*)^b \epsilon_{ab} \xi^a = (-1)^2 (\eta^*)^b \epsilon_{ba} \xi^a = (\eta^*)^b \xi_b = \eta^\dagger \xi$
- * Kinetischer Term $\mathcal{L}_{\text{kin}} = i \xi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_\mu \xi + i \eta^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_\mu \eta = i \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \overleftrightarrow{\partial}_\mu \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = i \psi^\dagger \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi$

– Anschaulich: Weyl-Spinoren nützlich für Lorentz-Invarianz-Überlegung, Dirac-Spinoren nützlich für Physik (kann damit Formalismus für Dirac- und Majorana-Fermionen gemeinsam entwickeln) \Rightarrow Arbeit ab hier bevorzugt mit Dirac-Spinoren

– Notiz: Kann auch $\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \overrightarrow{\partial}_\mu - m)\psi$ schreiben

- * Erhalte diese Form durch partielle Integration $\bar{\psi} i \overleftrightarrow{\partial} \psi = \bar{\psi} \frac{i}{2} (\overrightarrow{\partial} - \overleftarrow{\partial}) \psi = -\frac{i}{2} \partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) + \bar{\psi} i \overrightarrow{\partial} \psi$, die zusätzliche totale Ableitung hat keine physikalischen Effekte
- * Nachteil dieser Form: \mathcal{L} ist nicht hermitesch (kann aber durch Addition einer unphysikalischen totalen Ableitung hermitesch gemacht werden \Rightarrow Nur Eleganz-Problem)

• Reelles masseloses Vektor-Feld $\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2$

1. Eichinvariante Poincaré-Skalare für A^μ : $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$

- Benötige Eichsymmetrie wegen “Theorie hat masseloses Vektorfeld \Leftrightarrow Theorie hat Eichsymmetrie”
- $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ ist einzige eichinvariante Konstruktion aus $A_\mu \Rightarrow$ Kann nur Lorentzskalare aus $F_{\mu\nu}$ verwenden

2. Lege Normierung fest $\Rightarrow \mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$

3. Füge Eichfixierungs-Term $-\frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2$ dazu (Begründung im Eichtheorie-Kapitel) (?)

• Reelles massives Vektor-Feld (Proca-Feld) $\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu$

– Bewegungsgleichungen: $\partial_\mu A^\mu = 0, (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) A^\nu = 0$

1. Interessante Poincaré-Skalare für A^μ : $A_\mu A^\mu, (\partial_\nu A_\mu)(\partial^\nu A^\mu), (\partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu)$

- Alle weiteren Terme mit 2 Feldern können durch partielle Integration in diese Form gebracht werden

2. Allgemeiner Ansatz $\mathcal{L} = \frac{a}{2} (\partial_\nu A_\mu)(\partial^\nu A^\mu) + \frac{b}{2} (\partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu) + \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu$

- Finde EOM $0 = \partial_\mu (a \partial^\mu A^\nu + b \partial^\nu A^\mu) + m^2 A_\nu = (g^{\nu\mu} (a \partial^2 + m^2) + b \partial^\mu \partial^\nu) A_\mu$

3. Wähle $a = -b$

- Physik-Argument: Zu \mathcal{L} gehörende Energiedichte \mathcal{H} muss positiv-semidefinit sein

* Rechnung (...)

- Gruppentheorie-Argument: A^μ hat 4 Freiheitsgrade, massives Vektorfeld (Poincaré-Darstellung mit $m > 0, s = 1$) hat aber nur 3 Freiheitsgrade \Rightarrow Muss Parameter a, b so wählen, dass ein Freiheitsgrad wegfällt

(a) Ableitung der EOMs liefert $0 = \partial_\nu (\partial_\mu (a \partial^\mu A^\nu + b \partial^\nu A^\mu) + m^2 A^\nu) = ((a+b) \partial_\nu \partial^\nu + m^2) (\partial_\mu A^\mu)$

(b) Ableitung der Bewegungsgleichung wird mit $a = -b$ zu $m^2 \partial_\mu A^\mu = 0 \Rightarrow$ Zusätzliche Bedingung $\partial_\mu A^\mu = 0$ für $m^2 \neq 0$

4. Lege Normierung fest ($a = -1$) \Rightarrow Erhalte EOM $(g^{\mu\nu} (\partial^2 + m^2) - \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu = 0$

- Argument für $a < 0$: Energiedichte muss positiv-semidefinit sein (Rechnung...)

5. Lagrangian umschreiben $\mathcal{L} = -\frac{1}{2} ((\partial_\nu A_\mu)(\partial^\nu A^\mu) - (\partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu)) + \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu$

- Definiere $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ mit $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2 ((\partial_\nu A_\mu)(\partial^\nu A^\mu) - (\partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu))$

2.2.5 Klassifikation von renormierbaren Wechselwirkungstermen für typische Felder (...)

- Eichboson-Selbstwechselwirkungen $\mathcal{L} \supset \dots$ (nur nicht-abelsche Eichbosonen)
- Skalar-Selbstwechselwirkung $\mathcal{L} \supset \frac{c_3}{3!}\varphi^3 + \frac{c_4}{4!}\varphi^4$ (nur Skalare)
- Fermion-Eichboson-Wechselwirkung $\mathcal{L} \supset \bar{\psi}i\not{D}\psi$ (2 Fermionen, 1 Eichboson)
- Skalar-Eichboson-Wechselwirkung $\mathcal{L} \supset (D_\mu\varphi)^\dagger(D^\mu\varphi)$ (2 Skalare, 1-2 Eichbosonen)
- Yukawa-Wechselwirkung $\mathcal{L} \supset c\bar{\psi}\varphi\psi' + \text{h.c.}$ (2 Fermionen, 1 Skalar)

2.3 Bewegungsgleichungen

2.3.1 Euler-Lagrange-Gleichungen $\partial_\mu \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\Phi} - \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Phi} = 0$

- Einsetzen der Felder der Theorie in Euler-Lagrange-Gleichungen liefert Bewegungsgleichungen der Theorie
 - Bekomme eine Gleichung für jede Komponente jedes Felds in Φ
- Euler-Lagrange-Gleichungen sind Anwendung des Prinzips der kleinsten Wirkung $\delta S = 0$ auf \mathcal{L} in $S = \int d^4x \mathcal{L}$
 1. Verwende Prinzip der kleinsten Wirkung $0 = \delta S = \delta \int d^4x \mathcal{L}$
 2. Variation der Felder durchführen $\delta S = \delta \int d^4x \mathcal{L} = \int d^4x \delta\mathcal{L} = \int d^4x \left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Phi} \delta\Phi + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\Phi} \delta\partial_\mu\Phi \right)$
 - Variiere Felder (nicht Raumzeit) $\Rightarrow \delta d^4x = 0$
 - Variation δ und partielle Ableitung ∂_μ vertauschen ($\delta\partial_\mu\Phi = \partial_\mu\delta\Phi$), da δ/∂_μ eine Ableitung bezüglich Funktionen/Variablen ist
 3. Partielle Integration $\delta S = \int d^4x \left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Phi} \delta\Phi + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\Phi} \delta\partial_\mu\Phi \right) = \int d^4x \left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Phi} - \partial_\mu \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\Phi} \right) \delta\Phi + \int d^4x \partial_\mu \left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\Phi} \delta\Phi \right)$
 $= \int d^4x \left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Phi} - \partial_\mu \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\Phi} \right) \delta\Phi$
 - $\int d^4x \partial_\mu \left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\Phi} \delta\Phi \right) = \int_{\partial\mathbb{R}^4} dS_\mu \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\Phi} \delta\Phi = 0$, da Integrand für $|x| \rightarrow \infty$ verschwindet ($\delta\Phi \rightarrow 0$)
 4. Euler-Lagrange-Gleichungen $\partial_\mu \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\Phi} - \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Phi} = 0$ aus $\delta S = 0$ ablesen
- **BGL**-Operator \mathcal{D} für jedes freie Feld ϕ folgt aus **EOM** gemäß $0 = \partial_\mu \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi} - \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi} \equiv \mathcal{D}\phi$
 - “Fouriertransformierte” $\tilde{\mathcal{D}}^\pm(p)$: $\tilde{\mathcal{D}}^\pm(p) = \mathcal{D}|_{\partial_\mu = \pm i p_\mu}$ bzw. $\mathcal{D} = \tilde{\mathcal{D}}^\pm|_{p_\mu \rightarrow \mp i \partial_\mu}$
 - * “Fouriertransformierter Operator”: Operator, wenn er unter einem $\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{\pm i k x}$ -Integral steht
 - Kann einen Operator nicht fouriertransformieren (er hat keine x -Abhängigkeit)
 - * Index $+/-$ für **BGL**-Operator, der auf Teilchen-/Antiteilchen-Zustände wirkt

2.3.2 Bewegungsgleichungen für typischer freie Felder

- Skalares Feld (reell oder komplex) $0 = \partial_\mu \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\varphi} - \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\varphi} = (\partial^2 + m^2)\varphi$ bzw. $\mathcal{D} = \partial^2 + m^2$ bzw. $\tilde{\mathcal{D}}^\pm = -(p^2 - m^2)$
- Komplexes Dirac-Spinor-Feld $0 = \partial_\mu \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\psi} - \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\psi} = -(i\not{\partial} - m)\psi$ bzw. $\mathcal{D} = -i\not{\partial} + m$ bzw. $\tilde{\mathcal{D}}^\pm = -(\pm\not{p} - m)$
- Masseloses Vektor-Feld $0 = \partial_\mu \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu A_\nu} - \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta A_\nu} = -\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\left(g^{\mu\nu}\partial^2 - (1 - \frac{1}{\xi})\partial^\mu\partial^\nu\right)A_\mu$ bzw. $\mathcal{D} = -g^{\mu\nu}\partial^2 + (1 - \frac{1}{\xi})\partial^\mu\partial^\nu$ bzw. $\tilde{\mathcal{D}}^\pm = g^{\mu\nu}p^2 - (1 - \frac{1}{\xi})p^\mu p^\nu$
- Massives Vektor-Feld $0 = \partial_\mu \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu A_\nu} - \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta A_\nu} = -\left(g^{\mu\nu}(\partial^2 + m^2) - \partial^\mu\partial^\nu\right)A_\mu, \partial_\mu A^\mu = 0$ bzw. $\mathcal{D} = -g^{\mu\nu}(\partial^2 + m^2) + \partial^\mu\partial^\nu$ bzw. $\tilde{\mathcal{D}}^\pm = g^{\mu\nu}(p^2 - m^2) - p^\mu p^\nu$
 - $\partial_\mu A^\mu = 0$ folgt, wenn man ∂_ν auf die **BGL** anwendet
 - * Explizit: $0 = \partial_\nu \left(g^{\mu\nu}(\partial^2 + m^2) - \partial^\mu\partial^\nu \right) A_\mu = m^2\partial_\mu A^\mu + (1 - 1)\partial^2\partial_\mu A^\mu = m^2\partial_\mu A^\mu$

2.3.3 Vorgehen zur Lösung der Bewegungsgleichungen für freie Felder

- Sind die Bewegungsgleichungen exakt lösbar?
 - Freie Felder: Bewegungsgleichungen sind lineare Differentialgleichungen und damit im Fourierraum exakt lösbar
 - Wechselwirkungs-Theorie: Kann Lösungen der WW-Theorie als kleine Störung zu den Lösungen der freien Theorie entwickeln
 - * Formal: Verwende Greens-Funktionen
- Allgemeine Notation für Felder: ϕ^\pm mit $+/-$ für Teilchen/Antiteilchen
 - Notation im gesamten Abschnitt: Oberer/unteres Zeichen in \pm bzw. \mp für Teilchen/Antiteilchen
 - Verwende Notation ϕ^\pm immer, wenn es um allgemeine Felder ϕ geht, aber Unterschiede zwischen Teilchen und Antiteilchen wichtig sind

1. Bewegungsgleichungen für $\phi^\pm(x)$ haben triviale Lösung $\tilde{\phi}^\pm(\vec{p})$ im Fourierraum

- Anschaulich: Im Fourierraum werden Ableitungsoperatoren zu Variablen und die Bewegungsgleichungen werden zu einem lineares Gleichungssystem
 - Konkret: $\partial_\mu \rightarrow \mp i p_\mu$
 - Bedingung: \mathcal{L} darf keine höheren Potenzen der Felder enthalten (erfüllt in freier Theorie)
- Funktionen hängen zusammen über $\phi^\pm(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{\phi}^\pm(\vec{p}) e^{-ipx} |_{p^2=m^2}$
- Lösungen haben nur 3 Fouriertransformations-Freiheitsgrade \vec{p} , da p^0 die Klein-Gordon-Gleichung $p^2 = m^2$ erfüllen muss
 - Bedingung gilt für Darstellungen der Poincare-Gruppe bzw physikalische Zustände (in Störungstheorie treten virtuelle Teilchen auf, die diese Bedingung nicht erfüllen, weil sie die Bewegungsgleichungen nur näherungsweise lösen und deshalb keine exakten Darstellungen der Poincare-Gruppe sind)
- Gebe Lösungen durch die Basisvektoren $\epsilon^{i,\pm}(\vec{p})$ an
 - Basisvektoren $\epsilon^{i,\pm}(\vec{p})$ sind definiert durch $\tilde{\mathcal{D}}^+ \epsilon^{i,\pm}(\vec{p}) = 0, \tilde{\mathcal{D}}^- \epsilon^{i,\mp,*}(\vec{p}) = 0$
 - * Fouriertransformation von $\mathcal{D}\phi^\pm = 0$ führt auf $\tilde{\mathcal{D}}^\pm \epsilon^{i,\pm}(\vec{p}) = 0$
 - Konvention: Wähle Basisvektoren so, dass sie orthogonal sind $\epsilon^{i_1,\pm_1,\dagger}(\vec{p}) \epsilon^{i_2,\pm_2}(\vec{p}) \propto \delta^{i_1 i_2} \delta^{\pm_1 \pm_2}$
 - * Kann die Basisvektoren immer orthonormal wählen mit Gram-Schmidt-Verfahren
 - Wähle einfaches Bezugssystem zur Bestimmung der Basisvektoren und transformiere dann in beliebiges Bezugssystem
 - * Einfaches Bezugssystem bedeutet $(p^\mu) = (m, 0, 0, 0)$ für massive Teilchen und $(p^\mu) = (p^0, 0, 0, p^0)$ für masselose Teilchen
 - Notation
 - * i für Anzahl der Basisvektoren (so viele Basisvektoren, wie das Feld Freiheitsgrade hat)
 - * \pm für Teilchen-/Antiteilchen-Index mit $\begin{cases} + & \partial_\mu \rightarrow -ip_\mu \\ - & \partial_\mu \rightarrow ip_\mu \end{cases}$ (bzw wähle Vorzeichenkonvention für Phase der Fouriertransformation)
 - * Achtung: Lasse Indizes von Lorentzgruppe und inneren Symmetrien implizit
- Schreibe allgemeine Lösung mit Koeffizienten $a_p^{i,\pm}: \tilde{\phi}^\pm(\vec{p}) = a_p^{i,\pm} \epsilon^{i,\pm}(\vec{p}) e^{\mp ipx} + a_p^{i,\mp,*} \epsilon^{i,\mp,*}(\vec{p}) e^{\pm ipx} |_{p^2=m^2}$
 - Definiere den zweiten Term mit $a_p^{i,\mp,*}$ statt $a_p^{i,\mp} \Rightarrow$ Koeffizienten $a_p^{i,\pm}$ mit/ohne \dagger erhalten bei der kanonischen Quantisierung die Interpretation als Erzeugungs-/Vernichtungsoperatoren
 - Später (kanonische Quantisierung): Koeffizienten $a_p^{i,\pm,(*)}$ werden zu Operatoren
- Interpretation der Freiheitsgrade (i, \pm) von $a_p^{i,\pm}$
 - Freiheitsgrad i für Darstellungen der Poincaré-Gruppe: i läuft über deren Basisvektoren
 - Freiheitsgrad \pm für Teilchen und Antiteilchen (nur für komplexe Felder, reelle Felder haben diesen Freiheitsgrad nicht bzw “+ = -”)

2. Rücktransformation $\phi^\pm(x) = \sum_i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2p^0}} \left(a_{\vec{p}}^{i,\pm} \epsilon^{i,\pm}(\vec{p}) e^{-ipx} + a_{\vec{p}}^{i,\mp,*} \epsilon^{i,\mp,*}(\vec{p}) e^{ipx} \right) \Big|_{p^2=m^2}$

- Integriere nur über d^3p und nicht über dp^0 , da physikalische Teilchen $p^2 = m^2$ erfüllen $\Rightarrow p^0 = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}$ festgelegt
 - Ausführlich: Physikalische Teilchen transformieren sich unter Darstellungen der Poincaré-Gruppe und erfüllen damit die Eigenwertgleichung des Impulsoperators $P^2: p^2 = m^2$
 - Abkürzende Notation: Schreibe p^0 trotzdem als Variable, die aber am Ende mit $p^2 = m^2$ zu $p^0 = E_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ ausgewertet wird

- Anzahl der Freiheitsgrade von $\phi \in \mathbb{R}$ vs $\phi \in \mathbb{C}$

- $\phi \in \mathbb{R}$ hat 2 unabhängige Koeffizienten $a_{\vec{p}}^{i,+}, a_{\vec{p}}^{i,+,*}$ bzw $a_{\vec{p}}^{i,-}, a_{\vec{p}}^{i,-,*}$ wegen $a_{\vec{p}}^{i,\pm,*} = a_{\vec{p}}^{i,\mp}$ aus $\phi^c = \phi$
- $\phi \in \mathbb{C}$ hat 4 unabhängige Koeffizienten $a_{\vec{p}}^{i,\pm}, a_{\vec{p}}^{i,\pm,*}$
- Anschaulich: Zusätzlicher Index \pm für das Vorzeichen der $U(1)$ -Ladung, die jedes komplexe Feld hat

- Lorentzinvariantes Integrationsmaß $\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}}$

(a) $d^4p \delta(p^2 - m^2) \Theta(p^0)$ ist manifest invariant unter \mathcal{L}_+^\uparrow

- $d^4p, \delta(p^2 - m^2)$ sind wegen Tensorstruktur invariant unter \mathcal{L}
- $\mathcal{L}_+^\uparrow = \mathcal{L} / \{\mathcal{P}, \mathcal{T}\} \Rightarrow \mathcal{P}$ -Transformationen (die das Vorzeichen von p^0 ändern würden) sind nicht in \mathcal{L}_+^\uparrow enthalten und $\Theta(p^0)$ ist invariant unter \mathcal{L}_+^\uparrow

(b) Forme lorentz-invarianten Term um $\int d^4p \delta(p^2 - m^2) \Theta(p^0) = \int d^3p \int dp^0 \delta(p^2 - m^2) \Theta(p^0) = \int d^3p \frac{1}{2E_{\vec{p}}}$

- Verwende $\delta(x)$ -Identitäten $\int_{\mathbb{R}} dp^0 \delta(p^2 - m^2) \Theta(p^0) = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{\delta(p^0 - \sqrt{m^2 + \vec{p}^2})}{2p^0} = \frac{1}{2\sqrt{m^2 + \vec{p}^2}} = \frac{1}{2E_{\vec{p}}}$

(c) Nehme Faktor $\frac{1}{(2\pi)^3}$ dazu, damit sich $(2\pi)^3$ aus $\int d^3p e^{ipx} = (2\pi)^3 \delta(x)$ weghebt

- Andere Formulierung: $\frac{1}{(2\pi)^3}$ ist der Normierungsfaktor aus der Fouriertransformation

- Geschickt renormiertes Integrationsmaß $\frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}}$

- Formal: Redefiniere $a_{\vec{p}}^{i,\pm}$ mit $\frac{1}{2E_{\vec{p}}} a_{\vec{p}}^{i,\pm} = \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} a_{\vec{p}}^{i,\pm}$ und $a_{\vec{p}}^{i,\pm} \rightarrow a_{\vec{p}}^{i,\pm}$
 - * Koeffizienten $a_{\vec{p}}^{i,\pm}$ und Integrationsmaß $\frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{p}}}}$ sind alleine nicht lorentzinvariant, aber das Produkt ist lorentzinvariant
- Vorteil: Normierungsfaktor $(2E_{\vec{p}})^n$ vereinfacht sich an vielen Stellen (zB in Quantisierungsbedingung)
- Nachteil: Integrationsmaß allein ist nicht mehr lorentzinvariant (aber der Gesamtausdruck)

- Notiz: Fourierkoeffizienten in Abhängigkeit der Felder: $a_{\vec{p}}^{i,\pm} = \int d^3x \sqrt{2E_{\vec{p}}} e^{ipx} \epsilon^{i,\pm,\dagger}(\vec{p}) \phi^\pm(x) \Big|_{p^2=m^2}$

- Anschaulich: Invertierung von $\phi^\pm(x) = \sum_i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2p^0}} \left(a_{\vec{p}}^{i,\pm} \epsilon^{i,\pm}(\vec{p}) e^{\mp ipx} + a_{\vec{p}}^{i,\mp,*} \epsilon^{i,\mp,*}(\vec{p}) e^{\pm ipx} \right) \Big|_{p^2=m^2}$

- Hermitesch konjugierte Relation: $a_{\vec{p}}^{i,\pm,\dagger} = \int d^3x \sqrt{2E_{\vec{p}}} e^{-ipx} \left(\phi^\mp(x) \right)^T \epsilon^{i,\pm}(\vec{p}) \Big|_{p^2=m^2}$

- Begründung: Einfach nachrechnen (verwende Orthonormalitätsrelation)

$$\begin{aligned}
 & * \int d^3x \sqrt{2E_{\vec{p}}} e^{ipx} \epsilon^{i,\pm,\dagger}(\vec{p}) \phi^\pm(x) \Big|_{p^2=m^2} \\
 &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int d^3x \frac{\sqrt{2E_{\vec{p}}}}{\sqrt{2E_{\vec{k}}}} \sum_j e^{ipx} \epsilon^{i,\pm,\dagger}(\vec{p}) \sum_j \left(a_{\vec{k}}^{j,\pm} \epsilon^{j,\pm}(\vec{k}) e^{-ikx} + a_{\vec{k}}^{j,\mp,\dagger} \epsilon^{j,\mp,*}(\vec{k}) e^{ikx} \right) \Big|_{k^2=p^2=m^2} \\
 &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int d^3x \sqrt{\frac{E_{\vec{p}}}{E_{\vec{k}}}} \sum_j \delta^{ij} a_{\vec{k}}^{j,\pm} e^{i(p-k)x} \Big|_{p^2=k^2=m^2} = \int d^3k \delta^3(\vec{p} - \vec{k}) \sqrt{\frac{E_{\vec{p}}}{E_{\vec{k}}}} a_{\vec{k}}^{i,\pm} \Big|_{p^2=k^2=m^2} = a_{\vec{p}}^{i,\pm}
 \end{aligned}$$

- Notiz: $(\partial_\mu \phi)^\dagger = \partial_\mu \phi^\dagger$

1. Schreibe $\phi = \phi_- + \phi_+$ mit $\phi_\pm = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2p^0}} \tilde{\phi}_\pm(\vec{p}) e^{\mp ipx} \Big|_{p^2=m^2} \Rightarrow \partial_\mu \phi_\pm = \pm i p_\mu \phi_\pm$

2. Entweder es trägt ϕ_+ oder ϕ_- bei, $(\phi_\pm)^\dagger = \phi_\mp$

3. Finde $(\partial_\mu \phi)^\dagger = \partial_\mu \phi^\dagger$

- $(\partial_\mu \phi_\pm)^\dagger = (\pm i p_\mu \phi_\pm)^\dagger = \mp i p_\mu \phi_\mp$
- $\partial_\mu (\phi_\pm)^\dagger = \partial_\mu \phi_\mp = \mp i p_\mu \phi_\mp$

- Verwirrung: Ergebnis passt nicht zur naiven Annahme $(\partial_\mu)^\dagger = -\partial_\mu$ (?)

- * Begründung der naiven Annahme: $\partial_\mu = i p_\mu$ ist antihermitescher Operator, weil p_μ hermitescher Operator ist

2.3.4 Lösung der Bewegungsgleichungen für typische Felder

- Komplexes Skalarfeld $\varphi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 \sqrt{2p^0}} \left(a_{\vec{p}} e^{-ipx} + b_{\vec{p}}^* e^{ipx} \right) \Big|_{p^2=m^2}$
 - Index i kann nur einen Wert annehmen
 - Basisvektoren $\epsilon^{i,\pm}(\vec{p}) = 1$ sind trivial
 - Zusammenhang mit allgemeiner Notation: $a_{\vec{p}} := a_{\vec{p}}^{1,+}$, $b_{\vec{p}} := a_{\vec{p}}^{1,-}$, $\epsilon^{i,\pm} = 1$
 - Spezialfall reelles skalares Feld: $b_{\vec{p}} = a_{\vec{p}}$
- Dirac-Spinorfeld $\psi^+(x) = \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 \sqrt{2p^0}} \left(a_{\vec{p}}^s u^s(\vec{p}) e^{-ipx} + b_{\vec{p}}^{s*} v^s(\vec{p}) e^{ipx} \right) \Big|_{p^2=m^2}$,
 $\psi^-(x) = \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 \sqrt{2p^0}} \left(b_{\vec{p}}^s v^s(\vec{p}) e^{-ipx} + a_{\vec{p}}^{s*} u^s(\vec{p}) e^{ipx} \right) \Big|_{p^2=m^2}$
 - Index i kann 2 Werte annehmen
 - * Interpretation: $i = s = \pm\frac{1}{2}$ ist Spin
 - Basisvektoren in beliebigem Bezugssystem: $u^s(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{p^0} \xi_s \\ \sqrt{p^0} \eta_s \end{pmatrix}$, $v^s(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{p^0} \eta_s \\ -\sqrt{p^0} \xi_s \end{pmatrix}$ mit Basisvektoren $\xi_s, \eta_s = \begin{pmatrix} 1/0 \\ 0/1 \end{pmatrix}$ im Weyl-Spinor-Raum
 - Zusammenhang mit allgemeiner Notation: $a_{\vec{p}}^s := a_{\vec{p}}^{s,+}$, $b_{\vec{p}}^s := a_{\vec{p}}^{s,-}$, $u^s := \epsilon^{s,+}$, $v^s := \epsilon^{s,-}$
- Masseloses Vektorfeld $A_\mu(x) = \sum_i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 \sqrt{2p^0}} \left(a_{\vec{p}}^i \epsilon_\mu^i(\vec{p}) e^{-ipx} + a_{\vec{p}}^{i*} \epsilon_\mu^i(\vec{p}) e^{ipx} \right) \Big|_{p^2=m^2}$
 - Index i kann 2 Werte annehmen (2 Polarisationen)
 - Parametrisierung für $(p^\mu) = (p^0, 0, 0, p^0)$: $(\epsilon_\mu^1) = (0, 1, 0, 0)$, $(\epsilon_\mu^2) = (0, 0, 1, 0)$
 - * Verwende Lorentz-Eichung $\partial_\mu A^\mu = 0 / p^\mu \epsilon_\mu = 0 \Rightarrow$ Lösungen sind ϵ_μ^i und $\epsilon_\mu^f \propto p_\mu$
 - ϵ_μ^f unphysikalisch: $\epsilon_\mu^f \propto p_\mu \Rightarrow A_\mu = \partial_\mu \phi$ ist äquivalent zu $A_\mu = 0 \Rightarrow$ Zustand ϵ_μ^f ist pure Eichung
 - * Alternative: Coulomb-Eichung $\partial_i A^i = 0$ liefert $(\epsilon_\mu^1) = (0, 1, 0, 0)$, $(\epsilon_\mu^2) = (0, 0, 1, 0)$ (lineare Polarisation) oder $(\epsilon_\mu^R) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, i, 0)$, $(\epsilon_\mu^L) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -i, 0)$ (zirkuläre Polarisation)
- Massives Vektorfeld $A_\mu(x) = \sum_i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 \sqrt{2p^0}} \left(a_{\vec{p}}^i \epsilon_\mu^i(\vec{p}) e^{-ipx} + a_{\vec{p}}^{i*} \epsilon_\mu^i(\vec{p}) e^{ipx} \right) \Big|_{p^2=m^2}$
 - Index i kann 3 Werte annehmen (3 Polarisationen)
 - Parametrisierung für $(p^\mu) = (p^0, 0, 0, p^3)$: $(\epsilon_\mu^1) = (0, 1, 0, 0)$, $(\epsilon_\mu^2) = (0, 0, 1, 0)$, $(\epsilon_\mu^3) = \frac{1}{m}(p^3, 0, 0, p^0)$
 - * Bestimme ϵ_μ^i aus zusätzlicher Bewegungsgleichung $\partial_\mu A^\mu = 0 / p^\mu \epsilon_\mu^i = 0$

2.3.5 Greensfunktionen der Bewegungsgleichungen = Propagatoren

- Definition: Propagator $\Delta(x)$ eines Felds $\phi(x)$ ist Greensfunktion der Bewegungsgleichung $\mathcal{D}\phi(x) = 0$ bzw erfüllt die Greensfunktion-Definition $\mathcal{D}\Delta(x) = -i\delta^4(x)$
 - Propagatoren im Impulsraum $\tilde{\Delta}^\pm(p)$: $\Delta(x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \tilde{\Delta}^\pm(p) e^{\mp ipx}$ bzw $\tilde{\Delta}^\pm(p) = \int d^4 x \Delta e^{\pm ipx}$
 - Achtung: Unterschiedliche Konventionen zur Definition der Greensfunktion
 - * Naive Definition: $\mathcal{D}\Delta(x) = \delta^4(x)$

- Übliche Definition der Greensfunktion
- * Sinnvolle Definition: $\mathcal{D}\Delta(x) = -i\delta^4(x)$ (im Folgenden verwendet)
 - Vorteil: Habe keine zusätzlichen Faktoren "i" im Formalismus für kanonische Quantisierung
 - Effektiv: Propagator hat zusätzlichen Faktor i relativ zur naiven Definition
- Naives Vorgehen zur Bestimmung von Propagatoren $\Delta(x)$
 1. Fouriertransformiere die Definitionsgleichung $\mathcal{D}\Delta(x) = -i\delta^4(x) \Rightarrow \tilde{\mathcal{D}}^\pm(p)\tilde{\Delta}^\pm(p) = -i$
 - Verwende $\delta^4(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ipx}$
 - $\mathcal{D}\Delta(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{\mathcal{D}}^\pm(p)\tilde{\Delta}^\pm(p)e^{ipx} \stackrel{!}{=} -i\delta^4(x) = -i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ipx} \Rightarrow \tilde{\mathcal{D}}^\pm(p)\tilde{\Delta}^\pm(p) = -i$
 2. Bestimme $\tilde{\Delta}^\pm(p)$ aus $\tilde{\mathcal{D}}^\pm(p)\tilde{\Delta}^\pm(p) = -i$
 - Allgemeiner lorentzinvarianter Ansatz für $\tilde{\Delta}^\pm(p) \Rightarrow$ Bestimme Koeffizienten mit $\tilde{\mathcal{D}}^\pm(p)\tilde{\Delta}^\pm(p) = -i$
 - * Allgemeiner lorentzinvarianter Ansatz: Linearkombination aller Objekte mit derselben Indexstruktur wie $\tilde{\Delta}^\pm(p)$, die man aus p^μ und Konstanten (zB $g^{\mu\nu}, \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}, \gamma_{\alpha\beta}^\mu, \sigma^\mu$ etc) konstruieren kann
 - * Achtung: $\tilde{\Delta}^\pm(p), \tilde{\mathcal{D}}^\pm(p)$ sind selbst Lorentz-Tensoren
 3. Fouriertransformation zurück in den Ortsraum $\Delta(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{\Delta}^\pm(p)e^{\mp ipx}$
- Hilfsgröße: Projektionsoperator \mathcal{P}
 - Anschaulich: \mathcal{P} ist Eigenschaft einer Darstellung der Poincaré-Gruppe (genau wie der **BGL**-Operator \mathcal{D}) und taucht an vielen Stellen auf
 - * Formal: \mathcal{P} ist der Unterschied zwischen der **BGL** $\mathcal{D}\phi = 0$ (spezifische Eigenschaft des Felds) und der Casimir-Eigenwertgleichung $(\partial^2 + m^2)\phi = \mathcal{P}\mathcal{D}\phi = 0$ (jedes Feld hat diese Eigenschaft)
 - * Namensgebung durch Theorem $\tilde{\mathcal{P}}^\pm = \sum_i \epsilon^{i,\pm,*}(\vec{p}) \epsilon^{i,\pm}(\vec{p})$
 - Definition: $\mathcal{P}\mathcal{D} = \partial^2 + m^2$
 - * Streng genommen ist die Relation $(\partial^2 + m^2)\mathbb{1} = \mathcal{P}\mathcal{D}$ mit dem Einheitsoperator $\mathbb{1}$ des Vektorraums des betrachteten Felds
 - * Impulsraum-Version der Definition: $\tilde{\mathcal{P}}^\pm \tilde{\mathcal{D}}^\pm = -p^2 + m^2$
 - Vorteil: Kann \mathcal{P} nicht nur zur Bestimmung des Propagators verwenden, sondern auch für andere Tricks
 - "Fouriertransformierte" $\tilde{\mathcal{P}}^\pm(p)$: $\tilde{\mathcal{P}}^\pm = \mathcal{P} \Big|_{\partial_\mu \rightarrow \pm i p_\mu}, \mathcal{P} = \tilde{\mathcal{P}}^\pm \Big|_{p_\mu \rightarrow \mp i \partial_\mu}$
 - Bestimmung von \mathcal{P}
 - * Anschaulich: Mache prinzipiell dasselbe wie bei naiver Bestimmung des Propagators $\Delta(x)$
 1. Bestimme $\tilde{\mathcal{P}}^\pm$ aus $\tilde{\mathcal{P}}^\pm \tilde{\mathcal{D}}^\pm = -p^2 + m^2$
 - * Benötige nur einen von $\tilde{\mathcal{P}}^\pm$, da diese trivial zusammenhängen ($p \rightarrow -p$)
 - (a) Allgemeiner lorentzinvarianter Ansatz (mit generischen Koeffizienten) für $\tilde{\mathcal{P}}^\pm(p)$
 - (b) Bestimme Koeffizienten mit $\tilde{\mathcal{P}}^\pm \tilde{\mathcal{D}}^\pm = -p^2 + m^2$
 2. Transformation in Ortsraum $\mathcal{P} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{\mathcal{P}}^\pm e^{\mp ikx}$
 - Theorem: $\tilde{\mathcal{P}}^\pm = \sum_i \epsilon^{i,\pm}(\vec{p}) \left(\epsilon^{i,\pm}(\vec{p}) \right)^\dagger$
 - * Theorem ist nachträgliche Bestätigung für den Namen "Projektionsoperator"
 - Ausdruck $\sum_i \epsilon^{i,\pm}(\vec{p}) \left(\epsilon^{i,\pm}(\vec{p}) \right)^\dagger$ erinnert an Vollständigkeitsrelation $\sum_i |i\rangle \langle i| \Rightarrow$ Operator $\tilde{\mathcal{P}}^\pm$ projiziert von beliebigen Ausdrücken auf Darstellungen der Poincaré-Gruppe
 - * Erhalte dieses Theorem aus der Forderung, dass die Definitionen des Propagators in klassischer Feldtheorie ($\mathcal{D}\Delta(x,y) = -i\delta^4(x-y)$) und in Quantenfeldtheorie ($\Delta(x,y) = \langle 0|T\{\phi^+(x)\phi^-(y)\}|0\rangle$) identisch sind (?)
 - * Direkte Herleitung aus Eigenschaften von $\tilde{\mathcal{P}}^\pm$ und $\epsilon^{i,\pm,*}(\vec{p})$ (?)- Alle Propagatoren haben die Form $\tilde{\Delta}^\pm(p) = \frac{i}{p^2 - m^2} \tilde{\mathcal{P}}^\pm$ bzw $\Delta(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} \tilde{\mathcal{P}}^\pm e^{\mp ipx}$

- Vorteil dieser Form: Keine Lorentzstrukturen im Nenner

* Naiver Propagator (mit Lorentzstruktur im Nenner): $\tilde{\Delta}^\pm = \frac{-i}{\tilde{D}^\pm}$ aus $\mathcal{D}\Delta = -i\delta^4(x)$ bzw $\tilde{D}^\pm \tilde{\Delta}^\pm = -i$

1. Grundlage: Alle Felder ϕ^\pm erfüllen die Klein-Gordon-Gleichung $(\partial^2 + m^2)\phi^\pm = 0$
 - Klein-Gordon-Gleichung ist die Eigenwert-Gleichung des Massen-Operators $p^2 = -\partial^2$, der Casimir-Operator der Poincaré-Gruppe ist: $p^2\phi^\pm = m^2\phi^\pm$
2. Kann Klein-Gordon-Operator $(\partial^2 + m^2)$ für den EOM-Operator \mathcal{D} eines beliebigen Felds ϕ schreiben als $\partial^2 + m^2 = \mathcal{P}\mathcal{D}$ mit einem Operator \mathcal{P}
 - Dann folgt aus $\mathcal{D}\phi = 0$ automatisch $(\partial^2 + m^2)\phi = \mathcal{P}\mathcal{D}\phi = 0$
3. Multipliziere $\tilde{D}^\pm \tilde{\Delta}^\pm = -i$ (Impulsraum-Definition des Propagators) mit $\tilde{\mathcal{P}}^\pm$ und finde $\tilde{\mathcal{P}}^\pm \tilde{D}^\pm \tilde{\Delta}^\pm = (-p^2 + m^2)\tilde{\Delta}^\pm = -i\tilde{\mathcal{P}}^\pm$ bzw $\tilde{\Delta}^\pm(p) = \frac{i}{p^2 - m^2} \tilde{\mathcal{P}}^\pm(p)$

- Notiz: $\frac{1}{p^2 - m^2} = -m^2 \frac{1}{1 - p^2/m^2} = -m^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{p^2}{m^2}\right)^k$ ist geometrische Reihe \Rightarrow Kann Propagator für kleine Impulse $\frac{p^2}{m^2} \ll 1$ einfach entwickeln

* Struktur von $\tilde{\mathcal{P}}^\pm$ spielt keine Rolle, da $\tilde{\mathcal{P}}^\pm$ in der Entwicklung faktorisiert

• $i0$ -Notation: Pole im Propagator und Kausalität

- Anschaulich: Ersetze im Nenner des Propagators $p^2 \rightarrow p^2 + i0$ und nenne ihn Feynman-Propagator
 - * Kann auch andere Ersetzungen durchführen, dann beschreibt der Propagator aber eine andere Kausalität (und bekommt einen anderen Namen, mehr unten)

- Notation: $i0$ ist Abkürzung für $i\epsilon$ mit $\lim_{\epsilon \rightarrow 0+}$ vor dem Ausdruck

* Kann ϵ wegen $\lim_{\epsilon \rightarrow 0+}$ vor dem Ausdruck beliebig reskalieren $\epsilon \rightarrow a\epsilon$ mit $a > 0$

* ϵ kann eine beliebige Einheit haben (nur das Vorzeichen zählt)

- Problem: Mit der naiven Herangehensweise sind Propagatoren im Ortsraum $\Delta(x)$ nicht wohldefiniert

1. Propagator hat die Form $\tilde{\Delta}^\pm(p) = i \frac{\tilde{\mathcal{P}}^\pm(p)}{p^2 - m^2}$, weil er die Klein-Gordon-Gleichung erfüllt

2. Schreibe Propagator um mit $\frac{1}{p^2 - m^2} = \frac{1}{(p^0 + E_{\vec{p}})(p^0 - E_{\vec{p}})} = \frac{1}{2E_{\vec{p}}} \left(\frac{1}{p^0 - E_{\vec{p}}} - \frac{1}{p^0 + E_{\vec{p}}} \right)$

* Verwende Partialbruchzerlegung und $E_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$

3. Propagator-Integral $\Delta(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int \frac{dp^0}{2\pi} \frac{\tilde{\mathcal{P}}^\pm(p)}{2E_{\vec{p}}} \left(\frac{1}{p^0 - E_{\vec{p}}} - \frac{1}{p^0 + E_{\vec{p}}} \right)$ ist nicht wohldefiniert, da der Integrand bei $p^0 = \pm E_{\vec{p}}$ divergiert

* Lösung: Ersetze $p^2 \rightarrow p^2 + i0$ für alle singulären Vorkommen von $p^2 \Rightarrow$ Integral ist wohldefiniert
 • Kann Integral dann mit Residuensatz berechnen

- Begründung 1: Wechsel in imaginäre Zeit $t \rightarrow t + i0$ (?)

* Anschaulich: Mathematik-Trick, um das Problem loszuwerden – aber legt nicht die Kausalität fest

- Begründung 2: Pfad-Integral-Formalismus liefert zusätzliche Terme $\propto i0$ in \mathcal{L} (...)

* Anschaulich: Ehrlicher Zugang – Erhalte die Terme automatisch und bekomme richtige Kausalität gratis dazu

* $\propto i0$ -Terme haben selbe Struktur wie die kinetischen Terme $\Rightarrow \propto i0$ -Terme bewirken $p^2 \rightarrow p^2 + i0$ im Propagator

- Interpretation des $i0$ -Terms: Legt Kausalität des Felds fest

* Lorentzinvariante Kausalitäten

• Fall $p^2 + i0$: Feynman-Propagator $\Delta(-x) = \Delta(x)$ (Lorentzinvariant, erwartete Kausalität)

• Fall $p^2 - i0$: Dyson-Propagator (Lorentzinvariant, ganz komisch)

* Nicht Lorentzinvariante Kausalitäten, die man oft in klassischer Physik verwendet

• Fall $p^2 + i0 \text{sgn}(p^0)$: Retardierter Propagator $\Delta(x) \propto \Theta(-x^0)$ (nicht Lorentzinvariant)

• Fall $p^2 - i0 \text{sgn}(p^0)$: Avancierter Propagator $\Delta(x) \propto \Theta(x^0)$ (nicht Lorentzinvariant)

* Notiz: Zeitumkehroperator \mathcal{T} ist antilinear ($\mathcal{T}i\mathcal{T} = -i$) $\Rightarrow \mathcal{T}$ wandelt Feynman- und Dyson-Propagator ineinander um

2.3.6 Feynman-Propagatoren für typische Felder

- Skalarfeld: $\tilde{\Delta}_F^\pm(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i0}$ bzw $\tilde{\mathcal{P}}^\pm = 1$
 - $\mathcal{P}^\pm = 1$ trivial wegen $\mathcal{D}^\pm = -p^2 + m^2$
- Dirac-Feld: $\tilde{\Delta}_F^\pm(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i0} (\pm \not{p} + m)$ bzw $\tilde{\mathcal{P}}^\pm = \pm \not{p} + m$
 1. $\mathcal{D} = -(i\not{\partial} - m) \Rightarrow \tilde{\mathcal{D}}^\pm = -(\pm \not{p} - m)$
 2. Allgemeiner lorentz-invarianter Ansatz mit dimensionslosen Koeffizienten $\tilde{\mathcal{P}}^\pm = A(\pm \not{p}) + Bm$
 3. $-p^2 + m^2 \stackrel{!}{=} \tilde{\mathcal{P}}^\pm \tilde{\mathcal{D}}^\pm = -(A(\pm \not{p}) + Bm)(\pm \not{p} - m) = -(Ap^2 \pm \not{p}m(B - A) - Bm^2) \Rightarrow A = 1, B = 1$
- Masseloses Vektorfeld: $\tilde{\Delta}_F^{\mu\nu,\pm}(p) = \frac{-i}{p^2 + i0} \left(g^{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right)$ bzw $\tilde{\mathcal{P}}^\pm = -\left(g^{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right)$
 1. $\mathcal{D} = -g^{\mu\nu} \partial^2 + (1 - \frac{1}{\xi}) \partial^\mu \partial^\nu \Rightarrow \tilde{\mathcal{D}}^\pm = g^{\mu\nu} p^2 - (1 - \frac{1}{\xi}) p^\mu p^\nu$
 2. Allgemeiner lorentz-invarianter Ansatz mit dimensionslosen Koeffizienten $\tilde{\mathcal{P}}^\pm = Ag_{\mu\nu} + B \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}$
 3. $-p^2 \delta_\nu^\mu \stackrel{!}{=} \tilde{\mathcal{P}}^\pm \tilde{\mathcal{D}}^\pm = \left(Ag_{\nu\rho} + B \frac{p_\nu p_\rho}{p^2} \right) \left(g^{\mu\rho} p^2 - (1 - \frac{1}{\xi}) p^\rho p^\mu \right) = A \delta_\nu^\mu p^2 - p^\mu p_\nu \left((A + B)(1 - \frac{1}{\xi}) - B \right) \stackrel{A=-1}{=} -p^2 \delta_\nu^\mu - p^\mu p_\nu \left(1 - \frac{B-1}{\xi} \right) \Rightarrow A = -1, B = 1 - \xi$
 - Notiz: Es macht keinen Unterschied, ob man den Pol in $\tilde{\mathcal{P}}$ mit einem zusätzlichen Kausalitäts-Term $+i0$ reguliert oder nicht
 - * Explizit: Mit Kausalitätsterm $\frac{1}{(p^2 + i0)(p^2 + i0)} = \frac{1}{p^4 + 2ip^2} = \frac{1}{p^4 + i0}$, ohne Kausalitätsterm $\frac{1}{(p^2 + i0)p^2} = \frac{1}{p^4 + i0p^2} = \frac{1}{p^4 + i0}$ (weil $i0$ beliebig reskalierbar ist, solange $p^2 \geq 0$)
- Massives Vektorfeld: $\tilde{\Delta}_F^{\mu\nu,\pm}(p) = \frac{-i}{p^2 - m^2 + i0} \left(g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{m^2} \right)$ bzw $\tilde{\mathcal{P}}^\pm = -\left(g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{m^2} \right)$
 1. $\mathcal{D} = -g^{\mu\nu} (\partial^2 + m^2) + \partial^\mu \partial^\nu \Rightarrow \tilde{\mathcal{D}}^\pm = g^{\mu\nu} (p^2 - m^2) - p^\mu p^\nu$
 2. Allgemeiner lorentz-invarianter Ansatz mit dimensionslosen Koeffizienten $\tilde{\mathcal{P}}^\pm = Ag_{\mu\nu} + B \frac{p_\mu p_\nu}{m^2}$
 3. $(-p^2 + m^2) \delta_\nu^\mu \stackrel{!}{=} \tilde{\mathcal{P}}^\pm \tilde{\mathcal{D}}^\pm = \left(Ag_{\mu\rho} + B \frac{p_\mu p_\rho}{m^2} \right) \left(g^{\rho\nu} (p^2 - m^2) - p^\rho p^\nu \right) = A \delta_\nu^\mu (p^2 - m^2) + B \frac{p_\mu p^\nu}{m^2} (p^2 - m^2) - A p_\mu p^\nu - B p^2 \frac{p_\mu p^\nu}{m^2} = A \delta_\nu^\mu (p^2 - m^2) + \frac{p_\mu p^\nu}{m^2} (B(p^2 - m^2) - A m^2 - B p^2) = -A \delta_\nu^\mu (-p^2 + m^2) - \frac{p_\mu p^\nu}{m^2} m^2 (A + B) \Rightarrow A = -1, B = 1$

2.4 Hamilton-Formalismus

2.4.1 Grundlagen

- Kanonischer Impuls $\Pi := \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_0 \Phi}$ für jedes Feld in Φ
 - Bosonische/Fermionische Felder: $\Pi(x) \sim \partial_0 \Phi(x) / \Pi(x) \sim \Phi^\dagger(x)$ (?)
 - Notation: $\pi = \Pi_i$ bzw $\Pi = (\pi_1, \pi_2, \dots)$ bzw $\pi := \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_0 \phi}$
 - Achtung: Wenn \mathcal{L} Wechselwirkungsterme mit Zeitableitungen der Felder enthält, hat $\Pi = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_0 \Phi(x)}$ außer dem Beitrag durch den freien Lagrangian (linear in Feldern) noch Beiträge mit höheren Potenzen von Feldern
 - Finde Fourierdarstellung von Π durch die (bekannte) Fourierdarstellung von Φ
- Hamilton-Dichte/Hamiltonian $\mathcal{H} := \Pi \partial_0 \Phi - \mathcal{L}$
 - Vorteil: Hamiltonian hat physikalische Bedeutung
 - * Hamiltonian ist $(0,0)$ -Komponente des Energie-Impuls-Tensors bzw die Energiedichte $\mathcal{H} = T^0_0$
 - Nachteil: \mathcal{H} ist kein Lorentzskalar (im Gegensatz zu \mathcal{L})

2.4.2 Kanonischer Impuls für typische freie Felder (...)

- Reelles Skalarfeld $\pi = \partial^0 \varphi = \partial_0 \varphi$
- Komplexes Skalarfeld $\pi = \partial^0 \varphi = \partial_0 \varphi$
- Dirac-Feld $\pi = i\psi^\dagger$
- Masseloses Vektorfeld $\pi = F^{\mu 0} - \frac{1}{\xi} g^{\mu 0} \partial_\nu A^\nu$
- Massives Vektorfeld $\pi = F^{\mu 0}$

2.4.3 Hamiltonian für typische freie Felder (...)

- Reelles Skalarfeld $\mathcal{H} = \frac{1}{2} ((\partial_0 \varphi)^2 - (\partial_i \varphi)^2) + \frac{m^2}{2} \varphi^2$
- Komplexes Skalarfeld $\mathcal{H} = (\partial_0 \varphi)^\dagger (\partial^0 \varphi) - (\partial_i \varphi)^\dagger (\partial^i \varphi) + \frac{m^2}{2} \varphi^\dagger \varphi$
- Dirac-Feld
- Masseloses Vektorfeld
- Massives Vektorfeld

2.5 Noether-Theorem

2.5.1 Noether-Theorem für Feldtheorie

- Aussage: Lagrangian invariant unter $x^\mu \rightarrow x^\mu + X_k^\mu \alpha^k$, $\Phi^a(x) \rightarrow \Phi^a(x) + Y_k^a(x) \alpha^k$
 $\Rightarrow j_k^\mu = -\mathcal{L} X_k^\mu + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \Phi^a} (X_k^\nu \partial_\nu \Phi^a - Y_k^a(x))$ ist Noetherstrom (erfüllt Kontinuitätsgleichung $\partial_\mu j_k^\mu = 0$)
 - Anschaulich: Invarianz unter einer kontinuierlichen Transformation \Rightarrow Kontinuitätsgleichung
 - Notation: Φ^a mit Index a für alle möglichen Komponenten von Φ (bezüglich Darstellungen der Lorentzgruppe und Eichgruppen)
 - Achtung: j_k^μ ist keine Erhaltungsgröße, dafür bräuchte es $\partial_t j_k^\mu = 0$
 - j_k^μ ist nicht eindeutig: $j_k^\mu \rightarrow j_k^\mu + l_k^\mu$ mit $\partial_\mu l_k^\mu = 0$ ist auch ein Noetherstrom
- Herleitung: Führe Transformation von Feldern und Koordinaten durch, die S invariant lässt $\Delta S = 0$
 - Idee: Totale Ableitungen erkennen und ausklammern
 - Notation: Δa für infinitesimale Transformation der Größe a : $a \rightarrow a + \Delta a$

1. Transformationen verstehen

- Raumzeit-Transformation $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \Delta x^\mu$ mit $\Delta x^\mu = X_k^\mu \alpha^k$
- Feld-Transformation $\Phi^a(x) \rightarrow \Phi'^a(x') = \Phi^a(x) + Y_k^a \alpha^k = \Phi^a(x) + \Delta \Phi^a(x) + \partial_\mu \Phi^a \Delta x^\mu$
 - * Anteil durch Raumzeit-Transformation (Taylorentwicklung) $\partial_\mu \Phi \Delta x^\mu = \partial_\mu \Phi X_k^\mu \alpha^k$
 - * Pure Transformation der Felder $\Delta \Phi^a(x) = \Phi'^a(x) - \Phi^a(x) = (Y_k^a - X_k^\mu \partial_\mu \Phi^a) \alpha^k$

$$2. \Delta \mathcal{L} = \mathcal{L}' - \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \Delta x^\mu + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Phi^a} \Delta \Phi^a + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \Phi^a} \partial_\mu \Delta \Phi^a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} X_k^\mu \alpha^k + \left(\partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \Phi^a} \right) \Delta \Phi^a + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \Phi^a} \partial_\mu \Delta \Phi^a = \partial_\mu \mathcal{L} + \partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \Phi^a} (Y_k^a - X_k^\nu \partial_\nu \Phi^a) \alpha^k \right)$$

- Verwende, dass Feldkonfiguration stabil ist: $\Delta S = 0 \Rightarrow$ Euler-Lagrange-Gleichungen gelten

$$3. \Delta d^4 x = |\det \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}| d^4 x - d^4 x = (|\det (\delta_\nu^\mu + \partial_\nu (X_k^\mu \alpha^k))| - 1) d^4 x \approx \partial_\mu (X_k^\mu \alpha^k) d^4 x$$

- Verwende $\det(1 + \epsilon) = 1 + \text{tr} \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)$

$$4. \Delta S = \Delta \int d^4 x \mathcal{L} = \int \Delta d^4 x \mathcal{L} + \int d^4 x \Delta \mathcal{L} = \int d^4 x \left(\mathcal{L} \partial_\mu (X_k^\mu \alpha^k) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} X_k^\mu \alpha^k + \partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \Phi^a} (Y_k^a - X_k^\nu \partial_\nu \Phi^a) \alpha^k \right) \right) = \int d^4 x \partial_\mu \left[\left(\mathcal{L} X_k^\mu + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \Phi^a} (Y_k^a - X_k^\nu \partial_\nu \Phi^a) \right) \alpha^k \right]$$

$$5. \Delta S = 0 \Rightarrow \partial_\mu j_k^\mu = 0 \text{ mit } j_k^\mu = \mathcal{L} X_k^\mu + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \Phi^a} (Y_k^a - X_k^\nu \partial_\nu \Phi^a)$$

- Begründung: Integral verschwindet für beliebigen Integrationsbereich (habe keine Anforderungen an diesen gemacht) \Rightarrow Integrand verschwindet $\partial_\mu j_k^\mu = 0$
- Bedingung: Transformation ist global (α^k unabhängig von x)
- Noetherladung $Q_k = \int d^3x j_k^0$ ist Erhaltungsgröße bzw $\partial_t Q_k = 0$
 - $\partial_t Q_k = \int d^3x \partial_t j_k^0 = - \int d^3x \partial_i j_k^i = - \oint df_i j_k^i = 0$
 - * Verwende Satz von Gauss und $j_k^i = 0$ für $r \rightarrow \infty$ (weil die Felder für $r \rightarrow \infty$ hinreichend schnell abfallen)

2.5.2 Energie-Impuls-Tensor

- Energie-Impuls-Tensor $T^\mu_\nu = -\mathcal{L}\delta^\mu_\nu + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\Phi}\partial_\nu\Phi$ ist Noetherladung aus Translationsinvarianz
 - Formal: Translationsinvarianz bedeutet $x^\mu \rightarrow x^\mu + \delta^\mu_\nu \alpha^\nu$, $\Phi(x) \rightarrow \Phi(x)$ bzw $X^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu$, $Y^a_\nu = 0$
 - Energie-Impuls-Tensor ist Noetherladung für jedes System mit Lorentz-Symmetrie
- Noetherladungen sind 4-Impulse $P_\mu = \int d^3x T^0_\mu$
 - $T^0_0 = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_0\Phi}\partial_0\Phi - \mathcal{L} = \mathcal{H}$ ist Energiedichte/Hamiltonian
 - $T^0_i = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_0\Phi}\partial_i\Phi = \Pi\partial_i\Phi$ ist Impulsdichte

2.6 Diskrete Transformationen

2.6.1 Grundlagen

- Siehe QM-Zusammenfassung für Grundlagen zu diskreten Transformationen
 - Wichtige Notation: Verwende $\mathcal{P}^\mu_\nu = g^{\mu\nu}$ für definierende Darstellung von \mathcal{P}, \mathcal{T}
- Was machen diskrete Transformationen $\mathcal{P}/\mathcal{C}/\mathcal{T}$ mit Prozessen?
 - \mathcal{P} : Vertauscht links- und rechtshändige Teilchen
 - \mathcal{C} : Vertauscht Teilchen und Antiteilchen
 - * Fermionen: \mathcal{C} ändert Chiralität, abhängig von der γ -Matrizen-Struktur
 - \mathcal{T} : Lässt den Prozess in umgekehrte Richtung ablaufen
 - \mathcal{CP} : Vertauscht Teilchen/Antiteilchen und links-/rechtshändige Teilchen
 - \mathcal{CPT} : Ändert nichts wegen \mathcal{CPT} -Theorem

2.6.2 Diskrete Transformationen von Fourier-Koeffizienten

- \mathcal{P} -Transformationen: $\mathcal{P}a_{\vec{p}}^{i,\pm}\mathcal{P}^\dagger = \xi_{\mathcal{P},\pm}a_{-\vec{p}}^{i,\pm}$
- \mathcal{C} -Transformationen: $\mathcal{C}a_{\vec{p}}^{i,\pm}\mathcal{C}^\dagger = \xi_{\mathcal{C},\pm}a_{\vec{p}}^{i,\mp}$
- \mathcal{T} -Transformationen: $\mathcal{T}a_{\vec{p}}^{i,\pm}\mathcal{T}^\dagger = \xi_{\mathcal{T},\pm}a_{-\vec{p}}^{i,\pm} (?)$
 - Wichtiger Unterschied zu \mathcal{P} : \mathcal{T} ist antiunitär
- Beziehung zwischen $\xi_{\mathcal{Z},+}$ und $\xi_{\mathcal{Z},-}$: $\xi_{\mathcal{Z},+} = \pm\xi_{\mathcal{Z},-}$ mit $+/-$ für bosonisches/fermionisches Feld (?)

2.6.3 Diskrete Transformationen für typische freie Felder

- Strategien zur Herleitung dieser Relationen
 - Intuitiv für Skalarfeld: Kann $\mathcal{P}/\mathcal{C}/\mathcal{T}$ -Transformationsverhalten eines Skalars einfach hinschreiben
 - Intuitiv für Dirac-Spinorfeld: Herleitung aus Invarianz der Dirac-Gleichung unter $\mathcal{P}/\mathcal{C}/\mathcal{T}$ -Transformationen
 - * Argument ist unschön, da man dafür annehmen muss, dass die Dirac-Gleichung $\mathcal{P}/\mathcal{C}/\mathcal{T}$ -invariant ist
 - Historisch wurde das so gemacht – Aber damals wusste man noch nicht, dass es überhaupt $\mathcal{P}/\mathcal{C}/\mathcal{T}$ -Verletzung in der Natur gibt
 - Formal: Herleitung aus dem Transformationsverhalten der Fourier-Koeffizienten
 1. Schreibe $\phi(x)$ in $\mathcal{Z}\phi(x)\mathcal{Z}^\dagger$ als Fouriertransformierte (abhängig von $a_{\vec{p}}^{i,\pm}$)
 2. In der Fourierdarstellung von $\phi(x)$ transformiert sich nur $a_{\vec{p}}^{i,\pm}$ unter $\mathcal{Z} \Rightarrow$ Verwende dieses Transformationsverhalten
 3. Vereinfache den Ausdruck (evtl Substitution $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$, verwende Relationen für die Basisvektoren $\epsilon^{i,\pm}(\vec{p})$)
- Skalarfeld
 - $\mathcal{P}\varphi(x)\mathcal{P}^\dagger = \xi_{\mathcal{P},\varphi}\varphi(\mathcal{P}x)$
 - $\mathcal{C}\varphi(x)\mathcal{C}^\dagger = \xi_{\mathcal{C},\varphi}\varphi^*(x)$
 - $\mathcal{T}\varphi(x)\mathcal{T}^\dagger = \xi_{\mathcal{T},\varphi}\varphi(-\mathcal{P}x)$
- Dirac-Spinorfeld
 - $\mathcal{P}\psi(x)\mathcal{P}^\dagger = \xi_{\mathcal{P},\psi}\gamma^0\psi(\mathcal{P}x)$
 - $\mathcal{C}\psi(x)\mathcal{C}^\dagger = \xi_{\mathcal{C},\psi}(-i)\gamma^2\psi^*(x) = \xi_{\mathcal{C},\psi}i\gamma^0\gamma^2\bar{\psi}^T(x)$
 - $\mathcal{T}\psi(x)\mathcal{T}^\dagger = \xi_{\mathcal{T},\psi}\gamma^1\gamma^2\psi(-\mathcal{P}x)$
 - Notiz: Transformationsverhalten nur bis auf Phase festgelegt \Rightarrow Es macht keinen Unterschied, ob man die Faktoren i mitnimmt oder nicht
 - * Konvention hier: Füge Phasen $i/-1/-i$ so ein, dass die Ergebnisse der Transformation reell sind
 - Notiz: Spinoren tauchen in Observablen nur in Form von Spinor-Bilinearen auf \Rightarrow Kann sagen, dass ich diese Ergebnisse nur noch benötig, um das Transformationsverhalten von Spinor-Bilinearen zu berechnen, und danach nur noch mit Spinor-Bilinearen arbeite
 - * Siehe Mathe-Zusammenfassung für Transformationsverhalten von Spinor-Bilinearen
- Masseloses Vektorfeld bzw Eichfeld
 - $T_a A_\mu^a$ transformiert sich wie $i\partial_\mu$
 - * Notation: T_a sind Generatoren der Eichtransformationen
 - * Begründung: Eichfelder A_μ^a tauchen immer in der kovarianten Ableitung D_μ in der Form $D_\mu = \partial_\mu + igT_a A_\mu^a$ auf
 - * Notiz: Eichfelder haben keine intrinsischen Phasen unter $\mathcal{C}/\mathcal{P}/\mathcal{T}$ (im Gegensatz zu Skalar- und Dirac-Spinorfeldern), da sie sich genau wie ∂_μ transformieren müssen
 - $\mathcal{P}: \mathcal{P}A_\mu^a(x)\mathcal{P}^\dagger = g^{\mu\mu}A_\mu^a(\mathcal{P}x)$
 - $\mathcal{C}: \mathcal{C}A_\mu^a(x)\mathcal{C}^\dagger = \pm g^{\mu\mu}A_\mu^a(x)$ mit $+/-$ für rein komplexen/rein reellen zugehörigen Generator T_a
 - * Anschaulich: Bei nichtabelschen Eichbosonen ist \mathcal{C} -Transformationsverhalten komplex, da es von der Art des zugehörigen Generators abhängt (und den kann man durch Eichtransformationen ändern)
 - $\mathcal{T}: \mathcal{T}A_\mu^a(x)\mathcal{T}^\dagger = g^{\mu\mu}A_\mu^a(-\mathcal{P}x)$

2.6.4 Diskrete Transformationen im Lagrangian

- Welche Terme in \mathcal{L} enthalten $\mathcal{C}/\mathcal{P}/\mathcal{T}$ -Verletzung?
 - Notiz: Verwende Flavour-Basis für Felder
 - * Flavour-Basis ist natürlicher als Massenbasis, aber weniger physikalisch
 - Bsp: Im SM sind flavourverletzende Quark-Kopplungen in der Flavour-Basis (unüblich) im Yukawa-Sektor (über Higgs-Bosonen) und in der Massen-Basis (üblich) in den eichkinetischen Quark-Kopplungen (über W^\pm -Bosonen)
 - Kinetische Terme von Eichfeldern $\mathcal{L} \supset -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}$ sind einzeln $\mathcal{C}/\mathcal{P}/\mathcal{T}$ -invariant
 - * Anschaulich: \mathcal{P}, \mathcal{T} -Invarianz sind trivial (gleich für alle Eichfeld-Komponenten), \mathcal{C} -Invarianz ist komplizierter (hängt davon ab, ob der Generator einer Eichfeld-Komponenten reell oder komplex ist)
 - * "Pur kinetische Terme" $\mathcal{L} \supset -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)(\partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu)$: Phasen ± 1 aus Transformation von $\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a$ und $\partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu$ kürzen sich immer weg
 - * Eichfeld-Selbstwechselwirkung (nur nichtabelsche Eichtheorie): Komponenten der Strukturkonstanten f^{abc} müssen so sein, dass die Eichfeld-Selbstwechselwirkungen für \mathcal{C} -verletzende Terme automatisch verschwinden
 - 3-Eichfeld-Selbstwechselwirkung $\mathcal{L} \supset (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)f^{abc}A_b^\mu A_c^\nu \Rightarrow$ Für $f^{abc} \neq 0$ muss eine Gerade Anzahl der Indizes a, b, c reellen Generatoren bzw Generatoren mit zusätzlicher Phase -1 entsprechen
 - 4-Eichfeld-Selbstwechselwirkung $\mathcal{L} \supset f_{abc}A_\mu^b A_\nu^c f^{ade}A_d^\mu A_e^\nu \Rightarrow$ Kann selbes Spiel spielen wie für 3-Eichfeld-Selbstwechselwirkung, ist aber komplizierter wegen $\propto f_{abc}f^{ade}$
 - Notiz: Kann diese Eigenschaft als Merkhilfe verwenden, welche Einträge der f^{abc} verschwinden müssen
 - Eichkinetische Terme von Skalaren und skalares Potential \Rightarrow Einzeln $\mathcal{C}, \mathcal{P}, \mathcal{T}$ invariant
 - * Begründung: Um eichinvariant zu sein, müssen die Terme immer gerade Potenzen des Skalarfelds enthalten (?)
 - Eichkinetische Terme von Fermionen $\mathcal{L} \supset \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi$
 - * Fermion ψ ist chiral \Rightarrow Diese Terme verletzen \mathcal{C} und \mathcal{P} einzeln maximal
 - Begründung: Unter \mathcal{P} - und \mathcal{C} -Transformationen ist $\bar{\psi}\gamma^\mu P_{L,R}\psi \rightarrow \bar{\psi}\gamma^\mu P_{R,L}\psi$ (außerdem Vorzeichen und Änderung der x -Abhängigkeit, aber die sind für dieses Argument nicht relevant) \Rightarrow Fermion-Chiralität ändert sich und \mathcal{P}, \mathcal{C} sind maximal verletzt
 - Fermion ψ heißt chiral $\iff \psi_L$ und ψ_R haben transformieren sich unter unterschiedlichen Darstellungen der Eichgruppe
 - Yukawa-Terme $\mathcal{L} \supset \dots$
 - * Yukawa-Terme enthalten als einzige Mischung zwischen Fermionen verschiedener Generationen (und damit h.c.-Terme) \Rightarrow Kann hier komplexe Koeffizienten und damit \mathcal{CP} - bzw \mathcal{T} -Verletzung haben

2.6.5 \mathcal{CPT} -Theorem

- Aussage: Jede lorentz-invariante lokale unitäre Quantenfeldtheorie hat \mathcal{CPT} -Symmetrie
 - Feldtheorie ist unitär $\iff \mathcal{S}$ -Matrix ist unitär $\iff \mathcal{L}$ ist hermitesch
 - Notiz: \mathcal{CPT} -Symmetrie ist besonders – Für $\mathcal{C}, \mathcal{P}, \mathcal{T}$ einzeln sind keine ähnlichen Aussagen möglich
 - Interpretation der Voraussetzungen Lorentz-Invarianz, Lokalität, Unitarität
 - * Verletzung von Unitarität \Rightarrow Wahrscheinlichkeiten sind nicht erhalten, Teilchen können verloren gehen
 - Bsp: Reibungs-Term, $2 \rightarrow 0$ -Prozess
 - * Verletzung von Lokalität \Rightarrow (?)
 - * Verletzung von Lorentz-Invarianz \Rightarrow (?)

- Formaler Beweis (Streater, Wightman) (...)
- Plausibilisierung
 - Interessant: Was geht in diesem Argument schief, wenn die Voraussetzungen Lorentz-Invarianz, Lokalität, Unitarität nicht erfüllt sind?
 - 1. Lagrangian-Level: \mathcal{CPT} -Transformation komplex konjugiert einen Term im Lagrangian und transformiert $x \rightarrow -x$
 - Begründung: Schaue mir an, wie \mathcal{CPT} -Transformationen konkret aussehen
 - 2. Die Wirkung $S = \int d^4x \mathcal{L}$ ist invariant unter dieser Transformation $\Rightarrow \mathcal{CPT}$ -Invarianz
 - Invariant unter komplex konjugieren, da \mathcal{L} per Definition reell sein muss
 - * Falls ein Term in \mathcal{L} komplex ist, kommt sein komplex konjugiertes in \mathcal{L} auch vor
 - Invariant unter $x \rightarrow -x$, da man in $S = \int d^4x \mathcal{L}$ $d^4x = d^4(-x)$ substituieren kann
- Experimentelle Tests für \mathcal{CPT} -Symmetrie
 - Vergleiche Eigenschaften von Teilchen und deren Antiteilchen
 - * Bsp: Masse, Lebensdauer, elektrische Ladung, anomales magnetisches Moment
 - Ergebnis: Keine Zeichen für Verletzung von \mathcal{CPT} -Symmetrie gefunden
 - * Stärkste Schranken aus Massen-Messung $\left| \frac{m_{e^+} - m_{e^-}}{m_{e^+} + m_{e^-}} \right| \lesssim 10^{-18}$

Kapitel 3

Kanonische Quantisierung

3.1 Grundlagen

3.1.1 Kanonische Quantisierung

- Idee: Felder $\Phi(x), \Pi(x)$ werden von Zahlen zu Operatoren
 - Mit den Feldern werden auch die zugehörigen Fourierkoeffizienten $a_{\vec{p}}^{i,\pm}$ zu Operatoren
 - * Schreibe a^\dagger statt a^* für die Fourierkoeffizienten, da diese nun Operatoren sind
- Eigenschaft der Operatoren festgelegt durch $[\phi(\vec{x}, t), \pi(\vec{y}, t)]_\pm = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y})\mathbb{1}$,
 $[\phi(\vec{x}, t), \phi(\vec{y}, t)]_\pm = [\pi(\vec{x}, t), \pi(\vec{y}, t)]_\pm = 0$ mit $-/+$ für bosonische/fermionische Felder
 - Anschaulich: Verallgemeinerung von $[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$ mit kontinuierlichen Indizes $(i, j) = (\vec{x}, \vec{y})$
 - Notationen
 - * Kommutator $[a, b] = [a, b]_- = ab - ba$, Antikommutator $\{a, b\} = [a, b]_+ = ab + ba$
 - * $\mathbb{1}$ für Einheitsmatrix bezüglich jedem Freiheitsgrad der Felder
 - Achtung: Begriff bosonisch/fermionisch bezieht sich nur auf die Statistik, die ja durch die Kommutatorrelationen festgelegt ist; Zusammenhang Statistik/Spin kommt erst später mit Spin-Statistik-Theorem
 - * Eigentlich ist die Aussage “mit $-/+$ für bosonische/fermionische Felder” doppelt gemoppelt, da “ $-/+$ ” durch Angabe der Statistik festgelegt ist
- Kommutatorrelationen für Fourierkoeffizienten: $[a_{\vec{p}}^{i,\pm 1}, a_{\vec{k}}^{j,\pm 2,\dagger}]_\pm = (2\pi)^3\delta^3(\vec{p} - \vec{k})\delta^{ij}\delta^{\pm 1\pm 2}$, $[a_{\vec{p}}^{i,\pm 1}, a_{\vec{k}}^{j,\pm 2}]_\pm = [a_{\vec{p}}^{i,\pm 1,\dagger}, a_{\vec{k}}^{j,\pm 2,\dagger}]_\pm = 0$
 - Folgt aus der Kommutatorrelation für Felder mit der Fourierdarstellung und der Annahme, dass die Kommutatorrelationen nicht kompliziert aussehen sollen (?)
 - Notation \pm_i : Ausdruck enthält unterschiedliche \pm -Freiheitsgrade

3.1.2 Teilchen-Zustände

- Vorbereitung: Zustände $|n\rangle$ der Operatoren a mit $[a, a^\dagger]_\pm = 1$
 - Ziel: Zustände $|n\rangle$ festlegen durch $N := a^\dagger a$ mit $N|n\rangle = n|n\rangle$
- 1. Verstehe Bedeutung von $a|n\rangle/a^\dagger|n\rangle$ durch Berechnung von $Na|n\rangle/Na^\dagger|n\rangle$
 - $[a, a^\dagger]_- = 1$: $Na|n\rangle = (n-1)a|n\rangle$, $Na^\dagger|n\rangle = (n+1)a^\dagger|n\rangle$
 - * Interpretation: $a|n\rangle \propto |n-1\rangle$ oder $a|n\rangle = 0$, $a^\dagger|n\rangle \propto |n+1\rangle$ oder $a^\dagger|n\rangle = 0$
 - $[a, a^\dagger]_+ = 1$: $Na|n\rangle = (1-n)a|n\rangle$, $Na^\dagger|n\rangle = (1-n)a^\dagger|n\rangle$
 - * Interpretation: $a|n\rangle \propto |1-n\rangle$ oder $a|n\rangle = 0$, $a^\dagger|n\rangle \propto |1-n\rangle$ oder $a^\dagger|n\rangle = 0$
- 2. Berechne Normierung von $a|n\rangle/a^\dagger|n\rangle$ mit $\langle n|n\rangle = 1$
 - Für alle Fälle: Habe $a|n\rangle = 0$ wegen $n = \langle an|an\rangle \geq 0$

- $[a, a^\dagger]_- = 1: a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$
 - * Interpretation: Beliebige viele Zustände $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}!}(a^\dagger)^n|0\rangle$
- $[a, a^\dagger]_+ = 1: a|n\rangle = \sqrt{n}|1-n\rangle, a^\dagger|n\rangle = \sqrt{(n+1)}|1-n\rangle$
 - * Interpretation: Nur zwei Zustände wegen $a^\dagger|1\rangle = |0\rangle$
- Ergebnis: Zustände $|n\rangle$ haben $n \in \mathbb{N}_0$ für $[a, a^\dagger]_- = 1$ bzw $n \in \{0, 1\}$ für $[a, a^\dagger]_+ = 1$
- Zustände $|n_{\vec{p}, i, \pm}\rangle$ der Operatoren $a_{\vec{p}}^{i, \pm}$ mit $[a_{\vec{p}}^{i, \pm 1}, a_{\vec{k}}^{j, \pm 2, \dagger}]_{\pm} = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{k}) \delta^{ij} \delta^{\pm 1 \pm 2}$
 - Wertebereich von n für festes (\vec{p}, i, \pm) : $n \in \mathbb{N}_0 ([a, a^\dagger]_- = 1)$ bzw $n \in \{0, 1\} ([a, a^\dagger]_+ = 1)$
 - Bedeutung von $|n_{\vec{p}, i, \pm}\rangle$: In $|\dots\rangle$ steht eine Liste von Termen $n_{\vec{p}, i, \pm}$ mit allen möglichen Kombinationen von (\vec{p}, i, \pm)
 - Kurznotation: $|\vec{p}\rangle := |0 \dots 0, 1_{\vec{p}, i, \pm}, 0, \dots 0\rangle$, Indizes i, \pm ergeben sich aus Zusammenhang
 - * Verallgemeinerung: $|\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots\rangle$, wobei $\vec{p}_i = \vec{p}_j$ erlaubt ist
 - Lorentz-invariante Normierung der Zustände $|\vec{p}\rangle = \sqrt{2E_{\vec{p}}} a_{\vec{p}}^{i, \pm, \dagger} |0\rangle$
 - * Erhalte lorentz-invariantes Skalarprodukt $\langle \vec{p} | \vec{k} \rangle = 2E_{\vec{p}} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{k})$
 - Zustände $|\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots \vec{p}_n\rangle = \sqrt{2E_{\vec{p}_1}} \dots \sqrt{2E_{\vec{p}_n}} a_{\vec{p}_1}^{i_1, \pm_1, \dagger} \dots a_{\vec{p}_n}^{i_n, \pm_n, \dagger} |0\rangle$ sind orthogonal wegen $a_{\vec{p}}^{i, \pm} |0\rangle = 0$

3.1.3 Spin-Statistik-Theorem

- Aussage: Darstellungen der Poincaré-Gruppe mit ganzzahligem/halbzahligem Spin sind Bosonen/Fermionen
 - Aussage ist nicht-trivial, da sie einen Zusammenhang zwischen Spin-Quantenzahlen (Poincaré-Symmetrie) und Statistik (Vielteilchen-Eigenschaft) liefert
 - Annahme: Symmetrisierungspostulat
 - Aussage: Darstellungen der Poincaré-Gruppe sind eindimensionale Darstellungen der Permutationsgruppe
 - * Anschaulich: Alle Teilchen sind entweder Bosonen oder Fermionen, es gibt nichts anderes
 - * Eindimensionale Darstellungen: Vertauschungsoperator liefert Faktor $-1/1$ bei einer Permutation von zwei Teilchen
 - * Könnte auch höherdimensionale Darstellungen der Poincaré-Gruppe haben (komplizierter)
 - Symmetrisierungspostulat ist ein Postulat und kein Theorem (lässt sich nicht beweisen)
 - * Postulat durch experimentelle Beobachtungen bestätigt
 - Plausibilisierung des Symmetrisierungspostulats
 - * Kein Beweis, da der Fall mehrerer Permutationen nicht berücksichtigt wird
 - * Betrachte Vielteilchenzustände $|\vec{p}_1, \vec{p}_2 \dots\rangle$ identischer Teilchen (\vec{p}, i, \pm)
 - Identische Teilchen: Festes (i, \pm) und variables \vec{p}
1. $|\dots \vec{p}_i \dots \vec{p}_j \dots\rangle$ und $P_{ij} |\dots \vec{p}_i \dots \vec{p}_j \dots\rangle = |\dots \vec{p}_j \dots \vec{p}_i \dots\rangle$ mit $\vec{p}_i \neq \vec{p}_j$ sind äquivalente Zustände
 - * Begründung: Identische Teilchen (i, \pm) sind ununterscheidbar
 - * Formal: Hilberträume der Einteilchenzustände vertauschen im direkten Produkt
 - * Folgerung: $|\dots \vec{p}_i \dots \vec{p}_j \dots\rangle = \alpha |\dots \vec{p}_j \dots \vec{p}_i \dots\rangle$ mit $\alpha \in \mathbb{C}, |\alpha| = 1$, da Zustände nur bis auf eine komplexe Phase α eindeutig sind (formal: Zustände sind Strahlen im Hilbertraum)
 2. $|\dots \vec{p}_i \dots \vec{p}_j \dots\rangle = P_{ij}^2 |\dots \vec{p}_i \dots \vec{p}_j \dots\rangle = \alpha^2 |\dots \vec{p}_i \dots \vec{p}_j \dots\rangle$ mit Phase α
 3. Finde erlaubte Werte $\alpha \in \{1, -1\} \Rightarrow$ Nur Bosonen ($\alpha = 1$) und Fermionen ($\alpha = -1$) möglich
 - * $\alpha = 1 \Rightarrow a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{k}}^\dagger = a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{p}}^\dagger$ bzw $[a_{\vec{p}}^\dagger, a_{\vec{k}}^\dagger]_- = 0$ und analog $[a_{\vec{p}}, a_{\vec{k}}]_- = 0$
 - * $\alpha = -1 \Rightarrow a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{k}}^\dagger = -a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{p}}^\dagger$ bzw $[a_{\vec{p}}^\dagger, a_{\vec{k}}^\dagger]_+ = 0$ und analog $[a_{\vec{p}}, a_{\vec{k}}]_+ = 0$
 - * $[a_{\vec{p}}, a_{\vec{k}}^\dagger]_{\pm} = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{k})$ folgt jeweils aus der Normierung der Zustände
- "Beweis" des Spin-Statistik-Theorems über Ausschlussprinzip

- Beweisidee: Ausschlussprinzip bzw probiere beide Möglichkeiten (Fermion/Boson) aus und sehe, dass nur eine der beiden Varianten physikalisch sinnvolle Ergebnisse liefert
 - * Unterschied zwischen den "Beweisen": Unterschiedliche Argumente, warum die falsche Statistik unphysikalische Ergebnisse liefert
 - * Einfache Rechnung meist nur für $s = 0, s = \frac{1}{2}$ möglich, Generalisierung ist Fleißarbeit
 - * "Beweise" sind nach abfallender Eleganz und Allgemeinheit sortiert
- "Beweis" über Lorentzinvarianz der S-Matrix $\langle 0|T\{\dots\}|0\rangle$
 - * Idee: Propagator der Darstellung berechnen und Lorentzinvarianz testen
 - * Knackpunkt: Zeitordnung bzw Kausalität
- "Beweis" über Stabilität
 - * Idee: Berechne Gesamtenergie des Felds $E = \int d^3x T_0^0$ und fordere, dass sie nach unten beschränkt ist
 - Bei nicht nach unten beschränkter Energie können Teilchen immer weiter zerfallen und das System hat keinen Grundzustand
 - * $s = 0$: $E = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sqrt{m^2 + \vec{p}^2} \left(a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} + b_{\vec{p}} b_{\vec{p}}^\dagger \right) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sqrt{m^2 + \vec{p}^2} \left(a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} \pm b_{\vec{p}}^\dagger b_{\vec{p}} \right)$
 - E ist positiv definit (nicht positiv definit) für Kommutator(Antikommutator)-Relationen
 - * $s = \frac{1}{2}$: $E = \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sqrt{m^2 + \vec{p}^2} \left(a_{\vec{p}}^{s,\dagger} a_{\vec{p}}^s - b_{\vec{p}}^s b_{\vec{p}}^{s,\dagger} \right) = \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sqrt{m^2 + \vec{p}^2} \left(a_{\vec{p}}^{s,\dagger} a_{\vec{p}}^s \mp b_{\vec{p}}^{s,\dagger} b_{\vec{p}}^s \right)$
 - E ist nicht positiv definit (positiv definit) für Kommutator (Antikommutator)-Relationen
 - * Verallgemeinerung auf ganzzahlige (halbzahlige) s : Bekomme Term $\left(a_{\vec{p}}^{s,\dagger} a_{\vec{p}}^{s,+} \pm a_{\vec{p}}^{s,-} a_{\vec{p}}^{s,-\dagger} \right)$ mit $+$ ($-$), da es zwei (eine) Zeitableitungen im Lagrangian gibt \Rightarrow Brauche Kommutator (Antikommutator)-Relationen für nach unten beschränkte Energie
- "Beweis" über Mikrokausalität
 - * Idee: Fordere $[O_1(x), O_2(y)] = 0$ für $(x - y)^2 < 0$ (Mikrokausalität)
 - Anschaulich: Observablen $O_1(x), O_2(y)$ mit räumlich getrennten Argumenten $(x - y)^2 < 0$ sind unabhängig (kommutieren miteinander)
 - Nachteil: Kausalität legt Spin-Statistik-Verbindung nur für ganzzahliges s fest
 - * Geradzahliges s : Feld $\phi(x)$ ist eine Observable \Rightarrow Berechne $[\phi(x), \phi(y)]_\pm$
 - Finde nach harter Rechnung, dass $[\phi(x), \phi(y)]_\pm$ für Kommutator(Antikommutator)-Relationen bei $(x - y)^2 < 0$ verschwindet (nicht verschwindet)
 - * Halbzahliges s : Observable ist bilinearer Ausdruck in Feldern \Rightarrow Berechne Kommutator
 - Rechnung \Rightarrow Kausalität ist erfüllt für Kommutator- und Antikommutatorrelationen
- "Beweis" über richtige Bewegungsgleichungen im Hamilton-Formalismus
 - * Idee: Leite Bewegungsgleichungen aus Hamilton-BGL $i\partial_t \varphi = [H, \varphi]_\pm$ ab
 - Falsche Statistik/Kommutatorrelation liefert andere BGL als im Lagrange-Formalismus
- "Beweis" über Vertauschung von Teilchen
 - * Idee: Vertauschung von 2 Teilchen $P_{ij}|\vec{p}_i \vec{p}_j\rangle = \alpha |\vec{p}_i \vec{p}_j\rangle$ wird beschrieben durch Drehung der beiden Einteilchen-Zustände um Winkel $\phi = \pi$: $P_{ij}|\vec{p}_i \vec{p}_j\rangle = \mathcal{D}_i(\phi) \mathcal{D}_j(\phi) |\vec{p}_i \vec{p}_j\rangle$
 - * Ganzzahliges s : Drehung um π liefert je Faktor $f = -1 \Rightarrow \alpha = f^2 = 1$ und Boson-Verhalten
 - * Halbzahliges s : Drehung um π liefert je Faktor $f = i \Rightarrow \alpha = f^2 = -1$ und Fermion-Verhalten

• Ausnahme: Geistfelder (Ghosts)

- Ghosts = Felder bzw Teilchen mit falscher Statistik (verletzen Spin-Statistik-Theorem)
- Formale Einführung von Ghosts kann den Formalismus vereinfachen
- Ghosts dürfen nicht als externe Zustände vorkommen
 - * Fazit: Ghosts spielen nur eine Rolle in Loops
 - * Begründung: Spin-Statistik-Theorem gilt nur für on-shell Zustände, nicht für virtuelle Teilchen
- Beispiele
 - * Nichtabelsche Eichtheorie: Ghosts versichern, dass Eichbosonen die richtige Anzahl an Freiheitsgraden haben
 - * Pauli-Villars-Regularisierung: Jedes Teilchen erhält einen Ghost-Partner mit großer Masse \Rightarrow Loop-Integrale werden regularisiert

3.2 Grundbegriffe Zeitentwicklung

3.2.1 Wichtige Operationen

- Normalordnung $N\{a_{\vec{p}}a_{\vec{k}}^\dagger\} =: a_{\vec{p}}a_{\vec{k}}^\dagger := a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{p}}$
 - Anschaulich: Objekte in $N\{\cdot\}$ werden so kommutiert/antikommutiert (für Boson-/Fermion-Feld), dass Erzeuger links und Vernichter rechts stehen
 - Alle Operatoren kommutieren/antikommutieren innerhalb von $N\{\cdot\}$ für Boson-/Fermion-Felder
 - Motivation für die Definition: Bekomme damit $\langle 0 | : \text{irgendwas} : | 0 \rangle = 0$
- Zeitordnung $T\{\phi(x)\phi(y)\} = \phi(x)\phi(y)\Theta(t_x - t_y) \pm \phi(y)\phi(x)\Theta(t_y - t_x)$ mit $+/-$ für Boson-/Fermionfeld
 - Anschaulich: x -abhängige Objekte in $T\{\cdot\}$ werden so kommutiert/antikommutiert (Boson-/Fermion-Feld), dass Objekte mit kleinem/großen x rechts/links stehen
 - Alle Operatoren kommutieren/antikommutieren innerhalb von $T\{\cdot\}$ für Boson-/Fermion-Felder

3.2.2 Wichtige Größen

- S -Matrix $S_{fi} = \langle f, t = \infty | i, t = -\infty \rangle = \langle f | S | i \rangle = \langle f | U(\infty, -\infty) | i \rangle = \langle f, t_f = \infty | U_I(\infty, -\infty) | i, t_i = -\infty \rangle$
 - Anschaulich: $|S_{fi}|^2$ ist Wahrscheinlichkeit für den Prozess $i \rightarrow f$
 - * S_{fi} enthält volle Information über den Prozess $i \rightarrow f \Rightarrow$ Ziel: S_{fi} berechnen
 - * Betrachte nur interessante Prozesse $i \neq f \Rightarrow$ Formalismus wird vereinfacht
 - $S := U(\infty, -\infty)$ ist spezieller Name für Zeitentwicklungsoperator $U(t_i, t_f)$ mit $t_i = -\infty, t_f = \infty$
 - * S -Matrix im Schrödinger-Bild: $S_{fi} = \langle f, t = \infty | i, t = -\infty \rangle$
 - * S -Matrix im Heisenberg-Bild: $S_{fi} = \langle f | U(\infty, -\infty) | i \rangle$
 - * S -Matrix im Wechselwirkungs-Bild: $S_{fi} = \langle f, t = \infty | U_I(\infty, -\infty) | i, t = -\infty \rangle$
 - Notiz: Berechnung von Matrixelementen macht erst nach Quantisierung Sinn, da dafür quantisierte Zustände nötig sind
- Matrixelemente \mathcal{M}_{fi} und Transfermatrix \mathcal{T}
 - Transfermatrix \mathcal{T} in $S = 1 + i\mathcal{T}$ ist geschickte Redefinition von S und enthält Information über Übergänge
 - Matrixelemente \mathcal{M}_{fi} in $S_{fi} = \delta_{fi} + (2\pi)^4 \delta^4(\sum_i p_i) i \mathcal{M}_{fi}$ enthalten die Essenz der Information von S_{fi}
 - * Faktorisiere $(2\pi)^4 \delta^4(\sum_i p_i)$ raus, da Information über Impulserhaltung trivial ist
 - * Notation $\sum_i p_i$ benutzt Konvention, dass auslaufende Impulse ein negatives Vorzeichen bekommen
 - Kann genauso gut $\sum_k p_k^i - \sum_k p_k^f$ schreiben mit einlaufenden/auslaufenden Impulsen p^i/p^f
 - Observablen Γ (Zerfallsrate), σ (Wirkungsquerschnitt) können über \mathcal{M}_{fi} ausgedrückt werden
- Korrelationsfunktion $\langle 0 | T\{\phi(x_1) \dots \phi(x_n)\} | 0 \rangle$
 - Slang: Korrelationsfunktion = n-Punkt-Funktion
 - Motivation: Nützliche Größen für Bestimmung der S -Matrix S_{fi}
 - * Muss n-Punkt-Funktionen nicht verwenden (ist aber eleganter und macht Formalismus kompakter)
 - Korrelationsfunktionen sind Lorentztensoren
 - * Benötige Zeitordnungsoperator T für diese Eigenschaft
 - Unterscheide Korrelationsfunktionen der WW-Theorie $\langle \Omega | T\{\phi(x_1) \dots \phi(x_n)\} | \Omega \rangle$ und Korrelationsfunktionen der freien Theorie $\langle 0 | T\{\phi(x_1) \dots \phi(x_n)\} | 0 \rangle$
 - * Unterscheide die beiden n-Punkt-Funktion-Typen mit der Notation des Grundzustands: $|0\rangle$ für freie Theorie vs $|\Omega\rangle$ für WW-Theorie

- $\langle 0|T\{\phi(x_1)\dots\phi(x_n)\}|0\rangle$ kann Skalar sein oder Indizes haben, je nach Feldern
- 1-Punkt-Funktionen liefern Vakuum-Erwartungswerte
 - * Für $n = 1$ ist Zeitordnung egal $\Rightarrow \langle 0|T\phi(x)|0\rangle = \langle 0|\phi(x)|0\rangle$ (Definition des Vakuum-Erwartungswerts)
 - * Feld hat verschwindenden Vakuum-Erwartungswert \Rightarrow 1-Punkt-Funktion verschwindet
- 2-Punkt-Funktionen $\langle 0|T\{\phi^+(x_1)\phi^-(x_2)\}|0\rangle$ heißen Propagatoren
 - * Aussage ist nicht-trivial, da das ein zweiter, unabhängiger Zugang zu den Propagatoren ist
 - Beweis, dass die beiden Zugänge äquivalent sind, folgt im nächsten Abschnitt
- Alternative Bezeichnung für $\langle 0|T\{\phi(x_1)\dots\phi(x_n)\}|0\rangle$: "Zeitgeordnete Greensfunktion"
 - * $n = 2$: Korrelationsfunktion entspricht dem Propagator, der als Greensfunktion des **BGL**-Operators definiert ist \Rightarrow Bezeichnung ist sinnvoll
 - * $n \neq 2$: Ausdruck "Greensfunktion" macht keinen Sinn (oder ich habe den Sinn noch nicht durchschaut), wird aber trotzdem verwendet

3.2.3 Die beiden Propagator-Definitionen sind äquivalent

- Annahmen für die Rechnung

- $x^0 > y^0$ in $\Delta(x, y) \Rightarrow$ Benötige keine $\Theta(x^0 - y^0)$ wegen Zeitordnungsoperator
- Betrachte der Einfachheit halber nur den Fall mit $\tilde{\mathcal{P}}^+ e^{-ipx}$, erhalte den Fall $\tilde{\mathcal{P}}^- e^{ipx}$ trivial durch Substitution $p \rightarrow -p$

1. Schreibe Propagator aus Greensfunktion des **EOM**-Operators um

- Grundlage: $\Delta(x, y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \tilde{\Delta}^+(p) e^{-ip(x-y)} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i\tilde{\mathcal{P}}^+}{p^2 - m^2 + i0} e^{-ip(x-y)}$
- Berechne dp^0 -Integral mit Residuensatz $\Rightarrow \Delta(x, y) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} \tilde{\mathcal{P}}^+ e^{-ip(x-y)} \Big|_{p^2=m^2}$
 - Spalte dp^0 -Integral ab: $\Delta(x, y) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} \int \frac{dp^0}{2\pi} \frac{i\tilde{\mathcal{P}}^+}{p^2 - m^2 + i0} e^{-ip^0(x^0 - y^0)}$
 - Schreibe Nenner um: $p^2 - m^2 + i0 = (p^0)^2 - \vec{p}^2 - m^2 + i0 = (p^0)^2 - E_{\vec{p}}^2 + i0 = (p^0 - (E_{\vec{p}} - i0))(p^0 + (E_{\vec{p}} - i0)) \Rightarrow$ Singularitäten bei $p^0 = \pm(E_{\vec{p}} - i0)$
 - Integrand im Bogen-Integral verschwindet mit Parametrisierung $p^0 = \rho e^{i\varphi}$, $\rho \rightarrow \infty$ und $\varphi \in [\pi, 2\pi]$ für $x^0 - y^0 > 0 \Rightarrow$ Schließe Kontur mit Bogen-Integral in der unteren Halbebene
 - Notiz: Für $x^0 < y^0$ wählt man $\varphi \in [0, \pi]$ bzw schließt die Kontur mit Bogen-Integral in der unteren Halbebene (führt zum selben Ergebnis wegen 2 zusätzlichen Minuszeichen von anderer Orientierung des Pfads und zusätzlichem Minuszeichen im Pol)
 - Explizit: Erhalte $\int \frac{dp^0}{2\pi} \frac{i\tilde{\mathcal{P}}^+}{p^2 - m^2 + i0} e^{-ip^0(x^0 - y^0)} = - \oint \frac{dp^0}{2\pi} \frac{i\tilde{\mathcal{P}}^+}{p^2 - m^2 + i0} e^{-ip^0(x^0 - y^0)}$ (Minuszeichen, damit der Pfad die richtige Orientierung hat)
 - Verwende Residuensatz:

$$\int \frac{dp^0}{2\pi} \frac{i\tilde{\mathcal{P}}^+}{p^2 - m^2 + i0} e^{-ip^0(x^0 - y^0)} = - \oint \frac{dp^0}{2\pi} \frac{i\tilde{\mathcal{P}}^+}{p^2 - m^2 + i0} e^{-ip^0(x^0 - y^0)} = \frac{\tilde{\mathcal{P}}^+}{p^0 + (E_{\vec{p}} - i0)} e^{-ip^0(x^0 - y^0)} \Big|_{p^0 = E_{\vec{p}} - i0}$$

$$= \frac{1}{2E_{\vec{p}}} \tilde{\mathcal{P}}^+ e^{-ip^0(x^0 - y^0)} \Big|_{p^0 = E_{\vec{p}}}$$

2. Schreibe Propagator aus zeitgeordnetem Matricelement um

- Grundlage $\Delta(x, y) = \langle 0|T\{\phi^+(x)(\phi^+(y))^\dagger\}|0\rangle$
- Berechne Matricelement $\Delta(x, y) = \langle 0|T\{\phi^+(x)(\phi^+(y))^\dagger\}|0\rangle = \sum_{i,j} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{E_{\vec{p}}E_{\vec{k}}}}$

$$\times \left\langle 0 \left| \left(a_{\vec{p}}^{i,+} \epsilon^{i,+}(\vec{p}) e^{-ipx} + a_{\vec{p}}^{i,-,\dagger} \epsilon^{i,-,*}(\vec{p}) e^{ipx} \right) \left(a_{\vec{k}}^{j,+} \epsilon^{j,+}(\vec{k}) e^{-iky} + a_{\vec{k}}^{j,-,\dagger} \epsilon^{j,-,*}(\vec{k}) e^{iky} \right)^\dagger \right| 0 \right\rangle \Big|_{p^2=k^2=m^2}$$

$$= \sum_{i,j} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{E_{\vec{p}}E_{\vec{k}}}}$$

$$\times \left\langle 0 \left| \left(a_{\vec{p}}^{i,+} \epsilon^{i,+}(\vec{p}) e^{-ipx} + a_{\vec{p}}^{i,-,\dagger} \epsilon^{i,-,*}(\vec{p}) e^{ipx} \right) \left(a_{\vec{k}}^{j,-} \epsilon^{j,-}(\vec{k}) e^{-iky} + a_{\vec{k}}^{j,+,\dagger} \epsilon^{j,+}(\vec{k}) e^{iky} \right) \right| 0 \right\rangle \Big|_{p^2=k^2=m^2}$$

$$= \sum_{i,j} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{E_{\vec{p}}E_{\vec{k}}}} \epsilon^{i,+}(\vec{p}) \epsilon^{j,+}(\vec{k}) e^{-ipx+iky} \langle 0|a_{\vec{p}}^{i,+} a_{\vec{k}}^{j,+,\dagger}|0\rangle \Big|_{p^2=k^2=m^2}$$

$$= \sum_{i,j} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{E_p E_k}} \epsilon^{i,+}(\vec{p}) \epsilon^{j,+\dagger}(\vec{k}) e^{-ipx+iky} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p}-\vec{k}) \delta^{ij} \Big|_{p^2=k^2=m^2}$$

$$= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-ip(x-y)} \sum_i \epsilon^{i,+}(\vec{p}) \epsilon^{i,+\dagger}(\vec{p}) \Big|_{p^2=m^2} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-ip(x-y)} \tilde{\mathcal{P}}^+ \Big|_{p^2=m^2}$$

- Schritt 1: Hermitesche Konjugation in zweiter Klammer ausführen
- Schritt 2: Verwende $a|0\rangle = \langle 0|a^\dagger = 0 \Rightarrow$ Nur ein Term bleibt übrig
- Schritt 3: Verwende $[a_{\vec{p}}^{i,+}, a_{\vec{k}}^{j,+\dagger}]_{\pm} = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p}-\vec{k}) \delta^{ij}$
- Verwende im letzten Schritt das Theorem $\tilde{\mathcal{P}}^\pm = \sum_i \epsilon^{i,\pm}(\vec{p}) \left(\epsilon^{i,\pm}(\vec{p}) \right)^\dagger$

3. Fazit: Erhalte mit beiden Definitionen dasselbe Ergebnis \Rightarrow Definitionen sind äquivalent

- Kann diese Rechnung alternativ auch als Herleitung für $\tilde{\mathcal{P}}^\pm = \sum_i \epsilon^{i,\pm}(\vec{p}) \left(\epsilon^{i,\pm}(\vec{p}) \right)^\dagger$ interpretieren

3.3 Formalismus Zeitentwicklung

3.3.1 Grundlagen

- Zeitentwicklung in der **QFT** komplett analog zur Zeitentwicklung in der QM
 - Stichworte: Zeitentwicklungsoperator, Heisenberg- und Wechselwirkungsbild
- Hamiltonian $H = H_0 + V$
 - $H = \int d^3x \mathcal{H} = \int d^3x \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_0 \Phi} \partial_0 \Phi - \mathcal{L} \right)$ mit $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{free}} + \mathcal{L}_{\text{int}}$
 - $H_0 = \int d^3x \left(\frac{\delta \mathcal{L}_{\text{free}}}{\delta \partial_0 \Phi} \partial_0 \Phi - \mathcal{L}_{\text{free}} \right)$ ist Beitrag der freien Theorie
 - * $\Pi_i \partial_0 \Phi_i$ ist Beitrag zum kinetischen Term der freien Theorie, da der Term bilinear in Feldern Φ_i ist und eine Ableitung enthält (aber was wenn \mathcal{L} höhere Potenzen von Feldern hat?)
 - $V = \int d^3x \left(\frac{\delta \mathcal{L}_{\text{int}}}{\delta \partial_0 \Phi} \partial_0 \Phi - \mathcal{L}_{\text{int}} \right)$ enthält Wechselwirkungsterme
 - * Achtung: Oft sieht man $V = - \int d^3x \mathcal{L}_{\text{int}}$ bzw. $\mathcal{H}_{\text{int}} = -\mathcal{L}_{\text{int}}$, das gilt aber nur im Spezialfall $\frac{\delta \mathcal{L}_{\text{int}}}{\delta \partial_0 \Phi} = 0$ (dieser Spezialfall kommt aber sehr oft vor)
 - Kann auch Hamilton-Dichten verwenden: $H = \int d^3x \mathcal{H} = \int d^3x (\mathcal{H}_{\text{free}} + \mathcal{H}_{\text{int}})$
- Ist Zeitentwicklung lösbar?
 - Zeitentwicklung der freien Theorie H_0 ist analytisch lösbar
 - * Schon mit der Lösung der freien **BGLs** der klassischen Theorie (Lagrange-Formalismus) gelöst
 - Zeitentwicklung der vollen Theorie $H = H_0 + V$ ist für $V \neq 0$ bzw. $\mathcal{H}_{\text{int}} \neq 0$ nicht analytisch lösbar
 - * Trick: Verwende zeitabhängige Störungstheorie (wie in QM)
- Physikalische Annahme: Wechselwirkung verschwindet adiabatisch für $t \rightarrow \pm\infty$
 - Anschaulich: Diese Annahme ist Voraussetzung dafür, dass die Rechnung möglich ist
 - Präzise Formulierung: Prozesse finden im Zeitintervall $[-T, T]$ statt mit $0 \ll T < \infty$
 - * Alternativ: Schreibe WW-Potential als $V(t, \Phi) = V(\Phi) \Theta(t+T) \Theta(T-t)$
 - Annahme erfüllt in Hochenergiephysik: Untersuche Prozesse mit wenigen Teilchen, die sich erst makroskopisch weit voneinander entfernt befinden, dann in einem mikroskopisch großen Bereich miteinander wechselwirken, und sich danach wieder makroskopisch weit voneinander entfernen \Rightarrow Für $t \rightarrow \pm\infty$ sind die Teilchen weit entfernt und die Wechselwirkungswahrscheinlichkeit deshalb extrem unterdrückt
 - Annahme nicht erfüllt, wenn die Teilchen auch für $t \rightarrow \pm\infty$ hinreichend nahe beieinander sind, um nicht-verschwindende Wechselwirkungswahrscheinlichkeiten zu verursachen

3.3.2 Zeitentwicklung im Heisenbergbild (H-Bild)

- H-Bild ist Ausgangssituation, wenn man vom Lagrange-Formalismus kommt: Operatoren $\phi(x)$ sind zeitabhängig, Zustände $|\vec{p}_1 \dots \vec{p}_n\rangle$ sind zeitunabhängig
 - Operatoren und Zustände im WW-Bild sind definiert für einen beliebigen aber festen Zeitpunkt t_0
 - * Zeitentwicklung findet ausgehend von diesem Zustand statt
 - Zeitentwicklungsoperator $U(t_i, t_j) = T \left\{ \exp \left(-i \int_{t_j}^{t_i} d\tau H(\tau) \right) \right\}$ aus $i\partial_t U_{ij} = H(t_i)U_{ij}$
 - Zeitentwicklung von Feldern: $\phi(\vec{x}, t) = U^\dagger(t, t_0)\phi(\vec{x}, t_0)U(t, t_0)$
 - * Begründung: $U(t, t_0)$ ist so definiert, dass er die Heisenberg-BGL $\partial_t U(t, t_0) = -i[U(t, t_0), H]$ erfüllt
 - Notiz: Kann Operatoren ϕ in wechselwirkender Theorie auch als Fouriertransformierte schreiben, dann steckt die Zeitentwicklung in den Koeffizienten $a_{\vec{p}}^{i,\pm}(t)$
- Freie Theorie: Fourierdarstellung aus klassischer Feldtheorie löst die Zeitentwicklung automatisch
 - Anschaulich: Mache Fourierkoeffizienten $a_{\vec{p}}^{i,\pm}$ von Zahlen zu Propagatoren \Rightarrow Fourierzerlegung von $\phi(x)$ löst Zeitentwicklung automatisch (im Lagrangianformalismus)
 - Konsistenzcheck mit Hamiltonformalismus
 1. Zeitentwicklung der Koeffizienten in QM beschrieben durch die Hamilton-BGL $i\partial_t a_{\vec{p}}^{i,\pm}(t) = -[H, a_{\vec{p}}^{i,\pm}(t)]$
 2. In freier Theorie gilt Energieerhaltung $[H, a_{\vec{p}}^{i,\pm}(t)] = E_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^{i,\pm}(t)$
 3. Hamilton-DGL ist lineare DGL \Rightarrow Finde Lösung $a_{\vec{p}}^{i,\pm}(t) = a_{\vec{p}}^{i,\pm}(t_0)e^{-iE_{\vec{p}}(t-t_0)}$
 - * Konvention: Absorbiere Koeffizient $e^{-iE_{\vec{p}}(t-t_0)}$ in $e^{-i\vec{p}\vec{x}}$ -Term in der Entwicklung und schreibe $a_{\vec{p}}^{i,\pm} \equiv a_{\vec{p}}^{i,\pm}(t_0)$
- WW-Theorie: Fourierdarstellung löst Zeitentwicklung nicht mehr, kann zusätzliche Zeitabhängigkeit aber durch $a_{\vec{p}}^{i,\pm} \rightarrow a_{\vec{p}}^{i,\pm}(t)$ beschreiben
 - Anschaulich: Die Koeffizienten $a_{\vec{p}}^{i,\pm}(t)$ haben eine zusätzliche (komplizierte) Zeitabhängigkeit, die die Abweichung von der freien Theorie ($a_{\vec{p}}^{i,\pm}(t)$ zeitunabhängig) beschreibt
 - Zum Ausgangspunkt der Zeitentwicklung t_0 gilt $a_{\vec{p}}^{i,\pm}(t_0) = a_{\vec{p}}^{i,\pm}$ mit den Koeffizienten $a_{\vec{p}}^{i,\pm}$ der freien Theorie
 - “Wechselwirkung verschwindet adiabatisch für $t \rightarrow \pm\infty$ ” \Rightarrow Für $t \rightarrow \pm\infty$ entsprechen die Operatoren $\phi(\vec{x}, t), a_{\vec{p}}^{i,\pm}(t)$ den jeweiligen Operatoren der freien Theorie

3.3.3 Zeitentwicklung im Wechselwirkungsbild (WW-Bild)

- Anschaulich: Wechsel ins WW-Bild ist Grundlage für Störungstheorie (wie in QM)
- Wechsel vom H-Bild ins WW-Bild
 - Notation: Operatoren und Zustände im H-Bild vs WW-Bild
 - * Operatoren (Felder ϕ , Zeitentwicklungsoperator U) im WW-Bild bekommen zusätzlichen Index “I”
 - * Zustände im WW-Bild bekommen zusätzliche Zeitabhängigkeit $|\alpha, t\rangle$
 - Für $t = t_0$ sind Größen im H-Bild und im WW-Bild identisch, für $t \neq t_0$ sind die Größen unterschiedlich
 - Feld-Operatoren $\phi_I(\vec{x}, t) = e^{iH_0(t-t_0)}\phi(\vec{x}, t_0)e^{-iH_0(t-t_0)}$
 - * Wichtigstes Bsp für Operatoren sind die Felder $\phi(\vec{x}, t)$, Operatoren können aber auch Produkte von Feldern oder ähnliches sein
 - * Kann zum Definitionszeitpunkt $t = t_0$ Felder als Fouriertransformation mit konstanten Koeffizienten $a_{\vec{p}}^{i,\pm}$ schreiben

- * Felder haben triviale Zeitentwicklung ausgehend von $t = t_0 \Rightarrow$ Fourierdarstellung gültig für alle $t \Rightarrow \phi_I(\vec{x}, t)$ verhalten sich wie Felder der freien Theorie
- Zeitentwicklungsoperator $U_I(t, t_0) = T \left\{ \exp \left(-i \int_{t_0}^t d\tau V_I(\tau) \right) \right\} = T \left\{ \exp \left(-i \int_t^{t_0} d^4x \mathcal{H}_{\text{int}}[\Phi_I] \right) \right\}$
 - * $V_I(t) = e^{iH_0(t-t_0)} V(t) e^{-iH_0(t-t_0)}$ ist Stör-Operator im WW-Bild
 - * Es gilt $V_I[\Phi] = e^{iH_0(t-t_0)} V[\Phi] e^{-iH_0(t-t_0)} = V[\Phi_I]$, da man zwischen allen Feldern im H-Bild ϕ in V_I $1 = e^{-iH_0(t-t_0)} e^{iH_0(t-t_0)}$ verwenden kann und dann alle Felder im WW-Bild bekommt
 - * Zugang 1: $U_I(t, t_0)$ löst Schrödinger-GL im WW-Bild $i\partial_t U_I = V_I U_I$
 - * Zugang 2: Zerlege Zeitentwicklungsoperator im H-Bild $U(t, t_0) = e^{-iH_0(t-t_0)} U_I(t, t_0)$
- Beziehung zwischen Feldern im H-Bild und im WW-Bild: $\phi(\vec{x}, t) = U_I^\dagger(t, t_0) \phi_I(\vec{x}, t) U_I(t, t_0)$
 - * Nachrechnen: $\phi(\vec{x}, t) = U^\dagger(t, t_0) \phi(\vec{x}, t_0) U(t, t_0) = U^\dagger(t, t_0) e^{-iH_0(t-t_0)} \phi_I(\vec{x}, t) e^{iH_0(t-t_0)} U(t, t_0) = U_I^\dagger(t, t_0) \phi_I(\vec{x}, t) U_I(t, t_0)$
 - Verwende invertierte Definition von $\phi_I(\vec{x}, t)$: $\phi_I(\vec{x}, t_0) = e^{-iH_0(t-t_0)} \phi_I(\vec{x}, t) e^{iH_0(t-t_0)}$
 - Verwende $U(t, t_0) = e^{-iH_0(t-t_0)} U_I(t, t_0)$
- Zeitentwicklung von Feldern $\phi_I(\vec{x}, t) = U_I^\dagger(t, t_0) \phi_I(\vec{x}, t_0) U_I(t, t_0)$
 - * Begründung: U_I wurde so definiert, dass $i\partial_t \phi_I = [\phi_I, V_I]$ bzw $i\partial_t U_I = [U_I, V_I]$ erfüllt wird
 - * Verwechslungsgefahr: Diese Gleichung beschreibt die Zeitentwicklung im WW-Bild (Beziehung zwischen $\phi_I(\vec{x}, t)$ und $\phi_I(\vec{x}, t_0)$), die Gleichung weiter oben beschreibt den Übergang zwischen H-Bild und WW-Bild (Beziehung zwischen $\phi_I(\vec{x}, t)$ und $\phi(\vec{x}, t_0)$)
- Freie Theorie: WW-Bild und H-Bild sind identisch
 - Problem exakt lösbar im H-Bild \Rightarrow Problem exakt lösbar im WW-Bild
 - Notation: Grundzustand der freien Theorie ist $|0\rangle$
- WW-Theorie: Unterschied zwischen WW-Bild und H-Bild
 - Achtung: Hilberträume der freien Theorie und der WW-Theorie sind unterschiedlich
 - * Vakua der freien Theorie $|0\rangle$ (mit $H_0|0\rangle = E_0|0\rangle$) und der WW-Theorie $|\Omega\rangle$ (mit $H|\Omega\rangle = E_\Omega|\Omega\rangle$) sind verschieden: $|0\rangle \neq |\Omega\rangle$
 - Beziehung zwischen $|\Omega\rangle$ und $|0\rangle$ hergeleitet in 3.4.5
 - * Massen der Impuls-Eigenzustände der WW-Theorie müssen nicht den Massen der freien Theorie (Koeffizienten der Massenterme im Lagrangian) entsprechen
 - * WW-Theorie kann gebundene Zustände haben (gibt es nicht in der freien Theorie)
 - Achtung: Zustände der WW-Theorie können in Zeitentwicklung miteinander wechselwirken
 - * Das ist in der Praxis am Interessantesten \Rightarrow Erhalte Feynman-Diagramme etc
 - * Formalismus zur Beschreibung von Zeitentwicklung im WW-Bild für WW-Theorie wird im nächsten Abschnitt entwickelt
 - "Wechselwirkung verschwindet adiabatisch für $t \rightarrow \pm\infty$ " \Rightarrow Zustände $|\alpha, \pm\infty\rangle$ sind Zustände der freien Theorie
 - * Insbesondere: Vakua $|0_I, \pm\infty\rangle$ sind Vakua der freien Theorie und damit $a_{\vec{p}}^{i,\pm}|0_I, \pm\infty\rangle = 0$
 - Achtung: $|0_I, \pm\infty\rangle$ sind im Allgemeinen unterschiedliche Zustände, da zwischen $t = -\infty$ und $t = \infty$ die nicht-triviale Zeitentwicklung liegt(?)
 - Notation: Schreibe manchmal kurz $|0_I\rangle$ für die beiden (unterschiedlichen) Zustände $|0_I, \pm\infty\rangle$, da diese dieselbe Eigenschaft $a_{\vec{p}}^{i,\pm}|0_I, \pm\infty\rangle$ haben

3.4 Berechnung der S-Matrix

3.4.1 Grundlagen

- S-Matrix im WW-Bild $S_{fi} = \langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_n | T \left\{ \exp \left(-i \int d^4x \mathcal{H}_{\text{int}}[\Phi_I] \right) \right\} | \vec{k}_1 \dots \vec{k}_m \rangle$
- 1. Definition $S_{fi} = \langle f, t = \infty | U_I(\infty, -\infty) | i, t = -\infty \rangle$

- Asymptotische Zustände sind Zustände der freien Theorie $\Rightarrow \mathcal{S}_{fi} = \langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_n | U_I(\infty, -\infty) | \vec{k}_1 \dots \vec{k}_m \rangle$
 – $|\vec{p}_1 \dots \vec{p}_n\rangle$ sind n-Teilchen-Zustände der freien Theorie
- $U_I(\infty, -\infty) = T \left\{ \exp \left(-i \int d^4x \mathcal{H}_{\text{int}}[\Phi_I] \right) \right\} \Rightarrow \mathcal{S}_{fi} = \langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_n | T \left\{ \exp \left(-i \int d^4x \mathcal{H}_{\text{int}}[\Phi_I] \right) \right\} | \vec{k}_1 \dots \vec{k}_m \rangle$

• Abkürzungen

- $\phi_i := \phi_I(x_i), \Delta_{ij} := \Delta_F(x_i - x_j)$
 * Anschaulich: Kurznotation für die Ortsabhängigkeit
- $\phi_i^\pm = \phi_{i,-}^\pm + \phi_{i,+}^\pm$ mit $\phi_{i,-}^\pm = \sum_j \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2p^0}} a_{\vec{p},I}^{j,\pm} \epsilon^{j,\pm}(\vec{p}) e^{-ipx_i} |_{p^2=m^2}$ und
 $\phi_{i,+}^\pm = \sum_j \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2p^0}} a_{\vec{p},I}^{j,\mp,\dagger} \epsilon^{j,\mp,*}(\vec{p}) e^{ipx_i} |_{p^2=m^2}$
 * Notation: Oberer Index +/– für Teilchen/Antiteilchen, unterer Index +/– für Erzeugung/Vernichtung

3.4.2 Schema X zur Berechnung von $i\mathcal{M}$ aus \mathcal{S}_{fi}

- Verwende suggestive Notation, um die Struktur der Ergebnisse zu skizzieren
 - Ideen in der Rechnung sind einfach, die Schwierigkeit ist die Kombinatorik
 - Kombinatorik ist kompliziert für Bosonen (Symmetriefaktoren) und Fermionen (Minuszeichen)
- Hilfsmittel für die Rechnung (Wick's Theorem etc) kommen unten

- Ausgangssituation: $\mathcal{S}_{fi} = \langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_n | T \left\{ \exp \left(-i \int d^4x \mathcal{H}_{\text{int}}[\Phi_I] \right) \right\} | \vec{k}_1 \dots \vec{k}_m \rangle$
- Wicks Theorem auf $T\{\dots\}$ anwenden: $\mathcal{S}_{fi} = \sum_l C_l \left(\prod_i \int d^4x_i \right) \left(\prod_{i,j} \Delta_{ij} \right) \times \langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_n | : \phi_1 \dots \phi_l : | \vec{k}_1 \dots \vec{k}_m \rangle$
 - Anschaulich: Wick-kontrahiere Felder in $T\{\dots\} \Rightarrow$ Summe von Termen mit $: \dots :$ und $\Delta_F(x_i, x_j)$
 - Schwierigkeit: Alle Wick-Kontraktionen (Faktoren Δ_{ij}) finden und zählen, wie oft sie auftauchen
 - Ortsvariablen, über die integriert wird, können vertauscht werden \Rightarrow Viele Terme werden gleich
 - Alle Indizes im Ausdruck müssen kontrahiert sein
 - $: \phi_1 \dots \phi_l :$ ist ein Lorentz-Skalar, da er ein Produkt von Lorentz-Skalaren (Terme aus $\mathcal{H}_{\text{int}}[\phi_I]$) ist
 - Grundidee von Störungstheorie: \mathcal{H}_{int} ist eine kleine Störung \Rightarrow Kann die Entwicklung der exp-Funktion nach endlich vielen Termen abbrechen
 - Achtung: Faktor $\frac{1}{n!}$ aus $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$ nicht vergessen
 - Bedeutung der Notation
 - Summe \sum_l über alle Terme aus Wicks Theorem und Entwicklung von exp
 - Konstanten C_l enthalten Koeffizienten von \mathcal{H}_{int} und Vorzeichen aus Feld-(Anti)-Kommutationen
 - Integrale $\int d^4x_i$ folgen aus Entwicklung von $\exp \left(-i \int d^4x \mathcal{H}_{\text{int}}[\Phi_I] \right)$
 - Feynman-Propagatoren Δ_{ij} folgen aus Wick-Kontraktionen

3. Terme in \mathcal{S}_{fi} mit Vakuum-Bubbles wegstreichen

- “Term mit Vakuum-Bubbles”: Term in \sum_l mit einer Menge A von Indizes mit der Eigenschaft, dass für Δ_{ij} mit $i \in A$ auch $j \in A$ ist und die Schnittmenge mit der Menge B der Indizes der Felder in $: \phi_1 \dots \phi_l :$ verschwindet
 - Bsp für Vakuum-Bubble-Term: $\dots D_{34} D_{43} : \phi_1 \phi_2 : \dots$ (“Felder 3 und 4 reden nicht mit externen Zuständen 1, 2”)
 - Bsp für kein Vakuum-Bubble-Term: $\dots D_{13} D_{23} : \phi_1 \phi_2 : \dots$ (“Feld 3 redet mit externen Zuständen 1, 2”)
- Begründung: Unterschied zwischen Vakuum-Matrixelementen der freien Theorie und der WW-Theorie (3.4.5)
 - Verwende hier implizit die Gleichung aus 3.4.5, wobei die Grundzustände der freien Theorie bzw WW-Theorie durch Zustände mit Feldern der freien Theorie bzw WW-Theorie ersetzt werden (triviale Verallgemeinerung)

4. Wicks Theorem für Zustände liefert $\langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_n | : \phi_1 \dots \phi_l : | \vec{k}_1 \dots \vec{k}_m \rangle = \sum \prod_{i,j} e^{\pm x_i p_j}$

\Rightarrow Finde $\mathcal{S}_{fi} = \sum_l C'_l \left(\prod_i \int d^4 x_i \right) \left(\prod_{i,j} \Delta_{ij} \right) \times \left(\sum \prod_{i,j} e^{\pm x_i p_j} \right)$

- Terme mit $l \neq n + m$ verschwinden wegen der Normierung der Zustände
 - Nur für $l = n + m$ können alle Felder mit Zuständen kontrahiert werden und man kann $\langle 0|0 \rangle = 1$ verwenden
 - Gilt nur für echte Streuprozesse (alle ein- und auslaufenden Impulse sind verschieden bzw jedes Teilchen wechselwirkt irgendwo)
 - * Für “unechte” Streuprozesse ist auch $l + 2k = n + m, k \in \mathbb{N}$ möglich, falls je k ein- und auslaufender Zustände dieselben Teilchen und selbe Impulse haben
 - * Unechte Streuprozesse sind physikalisch langweilig \Rightarrow Betrachte die nicht
- Bedeutung der Notation
 - Summe \sum_l über alle während der Rechnung aufgetauchten Terme
 - Koeffizienten C'_l entsprechen den Koeffizienten C_l aus dem ersten Schritt sowie Symmetriefaktoren
 - Produkt von Termen $e^{\pm x_i p_j}$ aus Wick-Kontraktion der Zustände mit $-/+$ für ein-/auslaufende Zustände

5. Fourierdarstellung von Δ_{ij} einsetzen und \mathcal{S}_{fi} vereinfachen

- Finde viele triviale Integrale $\int d^4 x e^{ipx} = (2\pi)^4 \delta^4(p)$ mit irgendeinem Ausdruck für p
- Faktorisiere Gesamt-Impulserhaltung $(2\pi)^4 \delta^4(\sum_i p_i) \Rightarrow$ Lese $i\mathcal{M}_{fi}$ ab aus $\mathcal{S}_{fi} = \delta_{fi} + (2\pi)^4 \delta^4(\sum_i p_i) i\mathcal{M}_{fi}$

3.4.3 Wicks Theorem

- Aussage: $T\{\phi_I(x_1) \dots \phi_I(x_n)\} = : \phi_I(x_1) \dots \phi_I(x_n) : + \sum$ alle möglichen Wick-Kontraktionen :
 - Anschaulich: Schreibe zeitgeordnetes Produkt $T\{\dots\}$ um in normalgeordnetes Produkt $: \dots :$ und Propagatoren Δ_{ij}
- Wick-Kontraktion: $\underbrace{\phi_i^+ \phi_j^-}_{\text{Wick-Kontraktion}} := [\phi_i^+, \phi_j^-]_{\pm} \Theta(t_i - t_j) \pm (-1)[\phi_j^-, \phi_i^+]_{\pm} \Theta(t_i - t_j) = \Delta_{ij}$ mit $-/+$ für Boson-/Fermionfeld
 - Anmerkungen zur Notation
 - * Wick-Kontraktionen von unterschiedlichen Darstellungen (m, s) von \mathcal{P} verschwinden
 - * Wick-Kontraktionen von Teilchen/Teilchen bzw Antiteilchen/Antiteilchen verschwinden (für komplexe Felder)
 - Achtung: Für nicht-skalare Felder ϕ ist Δ_{ij} eine Matrix im Raum der Lorentz-Tensoren
- “Alle möglichen Kontraktionen”: Alle Möglichkeiten (pure Kombinatorik), die Felder $\phi_1 \dots \phi_n$ mit Wick-Kontraktionen zu verbinden
 - Beliebige viele Wick-Kontraktionen erlaubt, jedes Feld ist nur an einer Wick-Kontraktion beteiligt
 - Achtung: Jede Fermion-Vertauschung innerhalb von $T\{\dots\}$ liefert einen Faktor -1
- Beweis
 - Direkt nachrechnen
 - * Anschaulich: Konzeptionell einfach, aber aufwändig wegen Kombinatorik
 - * Bsp 2-Punkt-Funktion für $t_1 > t_2$: $T\{\phi_1^+ \phi_2^-\} = \phi_1^+ \phi_2^- = \phi_{1,+}^+ \phi_{2,+}^- + \phi_{1,+}^+ \phi_{2,-}^- + \phi_{1,-}^+ \phi_{2,-}^- + \phi_{1,-}^+ \phi_{2,+}^- = (\phi_{1,+}^+ \phi_{2,+}^- + \phi_{1,+}^+ \phi_{2,-}^- + \phi_{1,-}^+ \phi_{2,-}^- + \phi_{2,+}^+ \phi_{1,-}^-) + [\phi_{1,-}^+, \phi_{2,+}^-]_{\pm} =: \phi_1^+ \phi_2^- : + \Delta_{ij}$
 - Trick: Addiere $0 = \phi_{2,+} \phi_{1,-} (1 - 1) \Rightarrow$ Kann $\Delta_{ij} = [\phi_{1,-}^+, \phi_{2,+}^-]_{\pm} = \Delta_{ij}$ identifizieren
 - Formal: Beweis durch vollständige Induktion (siehe [Nierste-Skript](#))
 - * Schwierigkeit: Formellen Ausdruck für alle möglichen Wick-Kontraktionen finden

3.4.4 Wicks Theorem für Zustände

- Aussage: $\langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_n | : \phi_1 \dots \phi_{n+m} : | \vec{k}_1 \dots \vec{k}_m \rangle = \sum$ alle möglichen Kontraktionen
 - Anschaulich: Zwingt Berechnung von $\langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_n | : \phi_1 \dots \phi_{n+m} : | \vec{k}_1 \dots \vec{k}_l \rangle$ in Wick-Kontraktion-Denken
 - Was eigentlich abgeht: Verwende Fourierentwicklung für freie Felder, um $\phi_{i,-} | \vec{p} \rangle$, $\langle \vec{p} | \phi_{i,+}$ zu berechnen
- Wick-Kontraktion für Zustände:

$$\phi_i^+ | \vec{p} \rangle := : \phi_i^+ : | \vec{p} \rangle = \phi_{i,-}^+ | \vec{p} \rangle = \epsilon^{i,+}(\vec{p}) e^{-ipx_i} |_{p^2=m^2} | 0 \rangle, \phi_i^- | \vec{p} \rangle := : \phi_i^- : | \vec{p} \rangle = \phi_{i,-}^- | \vec{p} \rangle = \epsilon^{i,-,*}(\vec{p}) e^{ipx_i} |_{p^2=m^2} | 0 \rangle,$$

$$\langle \vec{p} | \phi_i^+ := \langle \vec{p} | : \phi_i^+ : = \langle \vec{p} | \phi_{i,+}^+ = \langle 0 | \epsilon^{i,-,*}(\vec{p}) e^{ipx_i} |_{p^2=m^2}, \langle \vec{p} | \phi_i^- := \langle \vec{p} | : \phi_i^- : = \langle \vec{p} | \phi_{i,-}^- = \langle 0 | \epsilon^{i,+}(\vec{p}) e^{-ipx_i} |_{p^2=m^2}$$
 - Anschaulich: In normalgeordnetem Produkt von Feldern, das auf einen Zustand wirkt, trägt nur der "Vernichtungs-Term" bei \Rightarrow Ausdruck kann einfach berechnet werden
 - Anmerkungen zur Notation
 - * ϕ^+ / ϕ^- kann nur mit Teilchen-/Antiteilchen-Zustände nicht-verschwindendes Ergebnis liefern
 - Eigentlich müsste man für Zustände auch eine Notation für Teilchen/Antiteilchen und den Index i einführen, aber das würde die Notation unhandlich machen
 - * Wick-Kontraktion von Feldern/Zuständen zu unterschiedlichen Darstellungen (m, s) von \mathcal{P} verschwinden
 - Explizite Rechnung für $\phi_{i,-}^+ | \vec{p} \rangle$: $\phi_{i,-}^+ | \vec{p} \rangle = \sum_j \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 \sqrt{2k^0}} a_k^{j,+} \epsilon^{j,+}(\vec{k}) e^{-ikx_i} |_{k^2=m^2} \sqrt{2E_{\vec{p}}} a_{\vec{p}}^{j,+,\dagger} | 0 \rangle$

$$= \sum_j \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{2E_{\vec{p}}}{2E_{\vec{k}}}} e^{-ikx_i} \epsilon^{j,+}(\vec{k}) \left(\pm a_{\vec{p}}^{j,+,\dagger} a_k^{j,+} + (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{k}) \right) |_{k^2=m^2} | 0 \rangle = \epsilon^{i,+}(\vec{p}) e^{-ipx_i} |_{p^2=m^2} | 0 \rangle$$
 - * Abhängigkeit von \pm kommt von Boson-/Fermion-Eigenschaft des Teilchens, spielt aber im Ergebnis keine Rolle
 - Notiz: Kann auch Wick-Kontraktion für 2 Zustände betrachten $\langle \vec{p} \dots | \vec{k} \dots \rangle = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{k}) \langle \dots | \dots \rangle$
 - * Anschaulich: Zwingt auch Berechnung von inneren Produkten von Zuständen in Wick-Kontraktion-Denken
 - * In der Praxis nicht nützlich: Benötige Wick-Kontraktion für 2 Zustände nur, wenn Teilchen nicht an der Wechselwirkung teilnehmen bzw $\vec{p} = \vec{k}$, aber solche Fälle bezeichnet man nicht als Streuung (und berechnet sie daher nicht)
 - "Alle möglichen Kontraktionen": Alle Möglichkeiten (Kombinatorik), die Felder $\phi_1, \dots, \phi_{n+m}$ mit Impulsen $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n, \vec{k}_1, \dots, \vec{k}_m$ zu verbinden
 - Summand verschwindet, wenn nicht alle Impulse und Felder kontrahiert sind
 - * Begründung: Zustände sind orthonormal \Rightarrow Wenn nicht alle Felder und Zustände kontrahiert sind, verschwindet das Matricelement
 - Achtung: Jede Fermion-Vertauschung liefert einen Faktor -1 für den Term

3.4.5 Zusammenhang zwischen Greensfunktionen der freien Theorie und der WW-Theorie

- Aussage: $\langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \dots \} | \Omega \rangle = \frac{\langle 0 | T \{ \phi_I(x_1) \phi_I(x_2) \dots e^{-i \int d^4 x_i \mathcal{H}_{\text{int}}[\Phi_I]} \} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \{ e^{-i \int d^4 x_i \mathcal{H}_{\text{int}}[\Phi_I]} \} | 0 \rangle}$
 - Links: Greensfunktionen der WW-Theorie mit Feldern im Heisenbergbild
 - * Wechselwirkungs-Effekte stecken hier direkt in den Feldern und Zuständen
 - * Kann diesen Ausdruck nicht mit first principles berechnen (benötige dazu diese Relation)
 - Rechts: Greensfunktionen der freien Theorie mit Feldern im Wechselwirkungsbild
 - * Wechselwirkungs-Effekte stecken hier in den Faktoren $\exp \left(-i \int d^4 x \mathcal{H}_{\text{int}}[\Phi_I] \right)$
 - * Kann diesen Ausdruck mit Rechenregeln für die freie Theorie perturbativ berechnen
 - Bedingung: $\mathcal{H}_{\text{int}}[\Phi_I]$ muss auf irgendeine Art klein sein, sodass man die exp-Funktion entwickeln kann
- Interpretation

- Interpretation mit Feynman-Diagrammen: Vakuum-Bubbles kürzen sich raus
 - * Nenner enthält pure Vakuum-Bubbles
 - * Zähler ist ein Produkt aus Vakuum-Bubbles und Termen ohne Vakuum-Bubbles
- Formale Begründung, warum Vakuum-Bubbles unphysikalisch sind
 1. Vakuum-Bubbles faktorisieren in \mathcal{S}_{fi} , da jeder Beitrag zu \mathcal{S}_{fi} dieselben Vakuum-Bubbles hat
 2. Zusätzlicher Faktor durch Vakuum-Bubbles ist eine Konstante (da er nicht von äußeren Impulsen abhängt)
- Zusammenhang gilt nur für $\lim_{T \rightarrow \infty(1-i\delta)}$
 - Begründung für $T \rightarrow \infty$: Bin nur an einer Beziehung zwischen $|\Omega\rangle$ und $|0\rangle$ für $T \rightarrow \infty$ interessiert, finde für andere t keinen einfachen Zusammenhang
 - Begründung für Faktor $(1-i\delta)$: Quantenfeldtheorie nur im euklidischen Raum ($t \rightarrow -it, \vec{x} \rightarrow \vec{x}$) wohldefiniert \Rightarrow Benötigte Reskalierung $\infty \rightarrow \infty(1-i\delta)$ für analytische Fortsetzung in den euklidischen Raum
 - Nenne den Parameter δ und nicht ϵ , da es einen anderen Grund (euklidisch vs Minkowski) hat als der Kausalitätsparameter $i\epsilon$ bzw $i0$ im Nenner des Propagators
- Herleitung über euklidische vs minkowskische Zeit
 1. Verwende Vollständigkeitsrelation für Zustände in der WW-Theorie $e^{-iH(T-t_0)}|0\rangle$

$$= (\sum_n |n_I\rangle\langle n_I|) |0\rangle = \sum_n e^{-iE_n(T-t_0)} |n_I\rangle\langle n_I|0\rangle = e^{-iE_\Omega(T-t_0)} |\Omega\rangle\langle\Omega|0\rangle + \sum_{n \neq \Omega} e^{-iE_n(T-t_0)} |n_I\rangle\langle n_I|0\rangle$$
 - Notation: $|n_I\rangle$ für Zustände der WW-Theorie, $|\Omega\rangle$ für Grundzustand der WW-Theorie
 - Verwende Eigenwertgleichung der WW-Theorie $H|n_I\rangle = E_n|n_I\rangle$ (und $H|\Omega\rangle = E_\Omega|\Omega\rangle$)
 - Lege Reskalierungs-Freiheitsgrad der Energieachse fest durch $H_0|0\rangle = 0$ (also $E_\Omega \neq 0$)
 - * Kann auch $E_\Omega = 0$ und $H_0|0\rangle \neq 0$ wählen, Grundprinzip funktioniert gleich
 - Wichtig: t_0 ist kein beliebiger Zeitpunkt, sondern der Zeitpunkt, zu dem das WW-Bild relativ zum H-Bild definiert wird
 2. Betrachte den Grenzfall $T \rightarrow \infty(1-i\delta)$: $\lim_{T \rightarrow \infty(1-i\delta)} e^{-iH(T-t_0)}|0\rangle$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\delta)} \left(e^{-iE_\Omega(T-t_0)} |\Omega\rangle\langle\Omega|0\rangle + \sum_{n \neq \Omega} e^{-iE_n(T-t_0)} |n_I\rangle\langle n_I|0\rangle \right) = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\delta)} e^{-iE_\Omega(T-t_0)} |\Omega\rangle\langle\Omega|0\rangle$$
 - Verwende hier, dass der Grenzfall $\lim_{T \rightarrow \infty(1-i\delta)}$ betrachtet wird \Rightarrow Schreibe das hier explizit hin
 - Wegen $\forall_n E_n > E_\Omega$ ist jeder Term in $\sum_{n \neq \Omega} e^{-iE_n(T-t_0)} |n_I\rangle\langle n_I|0\rangle$ stärker unterdrückt als $e^{-iE_\Omega(T-t_0)} |\Omega\rangle\langle\Omega|0\rangle$
 - * Die e-Funktionen sind unterdrückt für $\delta > 0$ wegen $-iE_n \infty(1-i\delta) = -E_n \infty(\delta-i)$
 3. Ausdruck umformen $\Rightarrow |\Omega\rangle = \frac{e^{-iH(T-t_0)}}{e^{-iE_\Omega(T-t_0)}\langle\Omega|0\rangle} |0\rangle = \frac{e^{-iH(T-t_0)} e^{iH_0(T-t_0)}}{e^{-iE_\Omega(T-t_0)}\langle\Omega|0\rangle} |0\rangle = \frac{U(t_0, -T)}{e^{-iE_\Omega(T-t_0)}\langle\Omega|0\rangle} |0\rangle$
 - Verwende $H_0|0\rangle = 0$ und damit $|0\rangle = e^{iH_0(T-t_0)}|0\rangle$
 - Verwende $U(t_0, T) = e^{-iH(t_0-T)} = e^{iH(T-t_0)} = U_I(t_0, T) e^{iH_0(T-t_0)} \Rightarrow U_I(t_0, T) = e^{-iH(T-t_0)} e^{iH_0(T-t_0)}$
 4. Gleiche Argumentation führt auf selben Zusammenhang für Bras: $\langle\Omega| = \langle 0| \frac{U(T, t_0)}{e^{-iE_\Omega(T-t_0)}\langle\Omega|0\rangle}$
 5. Lege Normierung der $|\Omega\rangle$ fest: $1 = \langle\Omega|\Omega\rangle = \frac{\langle 0|U_I(T, t_0)U_I(t_0, -T)|0\rangle}{e^{-2iE_\Omega(T-t_0)}|\langle\Omega|0\rangle|^2} \Rightarrow |\langle\Omega|0\rangle|^2 e^{-2iE_\Omega(T-t_0)} = \langle 0|U_I(T, -T)|0\rangle$
 - Verwende $U_I(T, t_0)U_I(t_0, -T) = U_I(T, -T)$
 6. Verwende Gleichungen für $\langle\Omega|$ und $|\Omega\rangle$ für zeitgeordnete Matrixelemente:

$$\langle\Omega|T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\dots\}|\Omega\rangle = \frac{\langle 0|T\{\phi_I(x_1)\phi_I(x_2)\dots e^{-i\int d^4x \mathcal{H}_{\text{int}}[\Phi_I]}\}|0\rangle}{\langle 0|T e^{-i\int d^4x \mathcal{H}_{\text{int}}[\Phi_I]}|0\rangle}$$
 - Idee: Verwende Gleichungen für $|\Omega\rangle$, $\langle\Omega|$ und Relation aus Normierung
 - Achtung Verwechslungsgefahr: Zeitpunkt T mit $T \rightarrow \infty(1-i\delta)$ vs Zeitordnungsoperator T
 - (a) $\langle\Omega|T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\dots\}|\Omega\rangle = \frac{\langle 0|U_I(T, t_0)T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\dots\}U_I(t_0, -T)|0\rangle}{e^{-2iE_\Omega(T-t_0)}|\langle\Omega|0\rangle|^2}$

$$= \frac{\langle 0|U_I(T, t_0)T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\dots\}U_I(t_0, -T)|0\rangle}{\langle 0|U_I(T, -T)|0\rangle} \text{ mit } |\langle\Omega|0\rangle|^2 \text{-Relation aus der Normierung}$$
 - (b) oBdA $x_1^0 > x_2^0$: $U_I(T, t_0)T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\dots\}U_I(t_0, -T) \stackrel{x_1^0 > x_2^0}{=} U_I(T, t_0)\phi(x_1)\phi(x_2)U_I(t_0, -T)$

$$= U_I(T, t_0)U_I(t_0, x_1^0)\phi_I(x_1)U_I(x_1^0, t_0)U_I(t_0, x_2^0)\phi_I(x_2)U_I(x_2^0, t_0)U_I(t_0, T)$$

$$= U_I(T, x_1^0)\phi_I(x_1)U_I(x_1^0, x_2^0)\phi_I(x_2)U_I(x_2^0, -T) = T\{\phi_I(x_1)\phi_I(x_2)U_I(T, -T)\}$$

– Verwende Zusammenhang $\phi(\vec{x}, t) = U_I^\dagger(t, t_0)\phi_I(\vec{x}, t)U_I(t, t_0)$ und $U_I^\dagger(t, t_0) = U(t_0, t)$
(c) $U_I(T, -T) = e^{-i \int d\tau V[\Phi_I](\tau)} = e^{-i \int d^4x \mathcal{H}_{\text{int}}[\Phi_I]}$

- Alternative Herleitung: $e^{-iH_0(T-t_0)}|0\rangle \propto U(T, t_0)|\Omega\rangle$ wegen $a_p^{i,\pm}(t_0) = a_{p,I}^{i,\pm}(t_0)$
 - Ausführlich: Für t_0 ist Vernichtungsoperator $a_p^{i,\pm}$ der freien Theorie und der WW-Theorie identisch \Rightarrow Vakua $e^{-iH-0(t-t_0)}|0\rangle$ und $U(T, t_0)|\Omega\rangle$ zu diesem Zeitpunkt werden beide durch $a_p^{i,\pm}$ vernichtet und müssen daher proportional zueinander sein
 - Konkret: Verwende Ansatz $e^{-iH_0(T-t_0)}|0\rangle = N_i U(T, t_0)|\Omega\rangle$, $\langle 0|e^{iH_0(T-t_0)} = N_f \langle \Omega|U(-T, t_0)$
 - * Bestimme Proportionalitätskonstanten $N_i N_f$ aus $\langle \Omega|\Omega\rangle = 1$
- Verallgemeinerung auf Zustände mit Feldern (...)
 - Notiz: Bekannt als Gell-Mann-Low-Theorem ([Gell-Mann, Low, 1951](#))

3.5 Alternative Methoden zur Berechnung der \mathcal{S} -Matrix

3.5.1 Übersicht

- Übersicht über Methoden zur Berechnung von \mathcal{S}_{fi}
 - \mathcal{S}_{fi} direkt berechnen
 - * Anschaulich: Naiver Formalismus – Ist konzeptionell am Einfachsten und wird daher für formale Argumente in mathematischer Physik verwendet
 - Benötigte n -Punkt-Funktion $\langle 0|T\{\dots\}|0\rangle$ berechnen, dann mit LSZ-Formel auf \mathcal{S}_{fi} schließen
 - * Anschaulich: Systematischer Formalismus, da er den physikalisch interessanten Teil (Berechnung der n -Punkt-Funktionen) vom langweiligen Teil (Kontraktion mit externen Zuständen – LSZ-Formel) trennt
 - Feynman-Regeln aus dem Lagrangian ablesen und \mathcal{S}_{fi} bzw \mathcal{M}_{fi} direkt hinschreiben
 - * Anschaulich: In der Praxis verwendete Methode, beruht eigentlich auf Erfahrungswerten (= Feynmanregeln) aus den oberen beiden “ehrlichen” Methoden
 - * Kann auch Feynman-Regeln mit Computerprogrammen (zB FeynRules) bestimmen

3.5.2 LSZ-Formel

- Aussage:

$$\mathcal{S}_{fi} = i^n \left(\int \prod_{k=1}^n d^4x_k \right) \left(\prod_{k=m+1}^n e^{ip_k x_k} \epsilon^{i_k, \pm_k, \dagger}(\vec{p}_k) \mathcal{D}_k \right) \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \} | \Omega \rangle \left(\prod_{k=1}^m e^{-ip_k x_k} \mathcal{D} \epsilon^{i_k, \pm_k}(\vec{p}_k) \right)$$

- Anmerkungen zur Notation
 - * Indizes $1, \dots, m/m+1 \dots n$ für einlaufende/auslaufende Teilchen
 - * Felder $\phi(x_i)$ in $\langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \} | \Omega \rangle$ sind so transponiert/nicht transponiert, dass der Ausdruck insgesamt skalar ist
 - * $\mathcal{D}_k, \epsilon_k^{i,\pm}(\vec{p})$ sind BGL-Operator und Basisvektoren des k -ten Felds in $\langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \} | \Omega \rangle$
- Anschaulich: Reduziere Problem der Bestimmung von \mathcal{S}_{fi} auf Problem der Bestimmung von Greensfunktionen $\langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \} | \Omega \rangle$ der WW-Theorie
 - Greensfunktion $\langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \} | \Omega \rangle$ enthält Information über den Prozess und abstrahiert davon, welche Teilchen $\phi(x_i)$ ein- oder auslaufend sind
 - Operatoren $\left(i \int d^4x_i e^{\pm i p_i x_i} \mathcal{D}_k \right)$ erzwingen, dass das Teilchen zum Feld $\phi(x_i)$ auf der Massenschale liegt und ein- oder auslaufend ist
 - * Im Ergebnis: \mathcal{D}_i kürzt sich mit Propagator von $\phi(x_i)$ aus der Greensfunktion

- Herleitung

- Situation: Bestimme \mathcal{S}_{fi} für Prozess mit n Teilchen, bei dem die Teilchen $1, 2, \dots, m$ einlaufend und die Teilchen $m+1, \dots, n$ auslaufend sind

1. $\mathcal{S}_{fi} = \langle f, t = \infty | i, t = -\infty \rangle = \langle f | \mathcal{S} | i \rangle$
 $= \sqrt{2E_1 2E_2 \dots 2E_n} \langle \Omega | a_{\vec{p}_{m+1}}^{i_{m+1}, \pm_{m+1}}(\infty) \dots a_{\vec{p}_n}^{i_n, \pm_n}(\infty) a_{\vec{p}_1}^{i_1, \pm_1, \dagger}(-\infty) \dots a_{\vec{p}_m}^{i_m, \pm_m, \dagger}(-\infty) | \Omega \rangle$
 - Stelle Zustände durch Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $a_{\vec{p}}^{i, \pm, (\dagger)}$ dar
 - Notation: i_k, \pm_k für die Freiheitsgrade der ein- und auslaufenden Teilchen
2. Nullen addieren: $\sqrt{2E_1 2E_2 \dots 2E_n} \langle \Omega | a_{\vec{p}_{m+1}}^{i_{m+1}, \pm_{m+1}}(\infty) \dots a_{\vec{p}_n}^{i_n, \pm_n}(\infty) a_{\vec{p}_1}^{i_1, \pm_1, \dagger}(-\infty) \dots a_{\vec{p}_m}^{i_m, \pm_m, \dagger}(-\infty) | \Omega \rangle$
 $= \langle \Omega | T \left\{ \left(a_{\vec{p}_{m+1}}^{i_{m+1}, \pm_{m+1}}(\infty) - a_{\vec{p}_{m+1}}^{i_{m+1}, \pm_{m+1}}(-\infty) \right) \dots \left(a_{\vec{p}_n}^{i_n, \pm_n}(\infty) - a_{\vec{p}_n}^{i_n, \pm_n}(-\infty) \right) \right.$
 $\times \left. \left(a_{\vec{p}_1}^{i_1, \pm_1, \dagger}(-\infty) - a_{\vec{p}_1}^{i_1, \pm_1, \dagger}(\infty) \right) \dots \left(a_{\vec{p}_m}^{i_m, \pm_m, \dagger}(-\infty) - a_{\vec{p}_m}^{i_m, \pm_m, \dagger}(\infty) \right) \right\} | \Omega \rangle$
 - Trick: Zeitordnung ordnet alle neuen Terme so um, dass man $\langle \Omega | a_{\vec{p}}^{i, \pm, \dagger}(\infty) = 0$ oder $a_{\vec{p}}^{i, \pm}(-\infty) | \Omega \rangle = 0$ verwenden kann und die Terme verschwinden \Rightarrow Ausdruck bleibt gleich
3. Identität $i \int d^4x e^{ipx} \epsilon^{i, \pm, \dagger}(\vec{p}) \mathcal{D} \phi^\pm(x) = \sqrt{2E_{\vec{p}}} \left(a_{\vec{p}}^{i, \pm}(\infty) - a_{\vec{p}}^{i, \pm}(-\infty) \right) (\dots)$
 - Hermitesch konjugierte Identität: $-i \int d^4x e^{-ipx} \left(\phi^\mp(x) \right)^T \epsilon^{i, \pm}(\vec{p}) = \sqrt{2E_{\vec{p}}} \left(a_{\vec{p}}^{i, \pm, \dagger}(\infty) - a_{\vec{p}}^{i, \pm, \dagger}(-\infty) \right)$
 - Im Folgenden: Beweis für skalares Feld (allgemeiner Beweis steht noch aus) (...)
 - (a) Partielle Integration in \vec{x} : $i \int d^4x e^{ipx} \epsilon^{i, \pm}(\vec{p}) \mathcal{P}^{-1}(\partial^2 + m^2) \phi^\pm(x) \stackrel{P.I.}{=} i \int d^4x e^{ipx} \epsilon^{i, \pm}(\vec{p}) \mathcal{P}^{-1}(\partial_t^2 + p^2 + m^2) \phi(x) = i \int d^4x e^{ipx} \epsilon^{i, \pm}(\vec{p}) \mathcal{P}^{-1}(\partial_t^2 + E_{\vec{p}}^2) \phi(x) (?)$
 - Umformung funktioniert für Felder $\phi^\pm(x)$, die am Rand hinreichend schnell abfallen (= alle Felder, für die wir uns interessieren)
 - (b) $\partial_t (e^{ipx} (i\partial_t + E_p) \phi(x)) = (iE_p e^{ipx} (i\partial_t + E_p) + e^{ipx} (i\partial_t^2 + E_p \partial_t)) \phi(x) = i e^{ipx} (\partial_t^2 + E_p^2) \phi(x)$
 - Anschaulich: Mischterme mit $E_p \partial_t$ kürzen sich weg
 - (c) $i \int d^4x e^{ipx} (\partial_t^2 + m^2) \phi(x) = \int dt \partial_t (e^{iE_p t} \int d^3x e^{-i\vec{p}\vec{x}} (i\partial_t + E_p) \phi(x)) = e^{iE_p t} \int d^3x e^{-i\vec{p}\vec{x}} (i\partial_t + E_p) \phi(x) \Big|_{t=-\infty}^{t=\infty}$
 - Kann $\int dt$ -Integral wegen totaler Ableitung berechnen
 - (d) $\int d^3x e^{-i\vec{p}\vec{x}} (i\partial_t + E_p) \phi(x) \Big|_{t=-\infty}^{t=\infty} = \int d^3x e^{-i\vec{p}\vec{x}} (i\partial_t + E_p) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{2k^0}} \left(a_k^i(t) e^{-ikx} + a_k^{i, \dagger}(t) e^{ikx} \right) \Big|_{k^2=m^2} \Big|_{t=-\infty}^{t=\infty}$
 $= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{2k^0}} \int d^3x \left((k^0 + E_p) a_k^i(t) e^{-ikx} e^{-i\vec{p}\vec{x}} + (-k^0 + E_p) a_k^{i, \dagger}(t) e^{ikx} e^{-i\vec{p}\vec{x}} \right) \Big|_{k^2=m^2} \Big|_{t=-\infty}^{t=\infty}$
 $= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{2k^0}} e^{-ik^0 t} 2E_p a_k^i \int d^3x e^{i\vec{x}(\vec{k}-\vec{p})} \Big|_{k^2=m^2} \Big|_{t=-\infty}^{t=\infty} = \sqrt{2E_p} (a_p^i(\infty) - a_p^i(-\infty))$
 - Vorgehen: Setze Fourierdarstellung von $\phi(x)$ ein und berechne das Integral nach allen Regeln der Kunst
 - Verwende $\partial_t a_k^i(t) = \partial_t a_k^{i, \dagger}(t) = 0$ für $t = \pm\infty$
 - Trick: Einer der beiden Terme $(\pm k^0 + E_p)$ verschwindet wegen $\int d^3x e^{i\vec{x}(\vec{k}-\vec{p})} = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{p})$
4. Setze für jeden Term (\dots) in 2. eine der beiden Identitäten aus 3. ein \Rightarrow Finde LSZ-Formel
 - Kann in $\pm \int d^4x e^{\pm ipx} (\partial^2 + m^2) \phi(x)$ alles außer $\phi(x)$ aus dem Matrixelement ziehen, da Matrixelement und Zeitordnung nur auf Operatoren wirken und alles außer $\phi(x)$ Zahlen sind

- Verallgemeinerung auf (skalare) Operatoren $\mathcal{B}(x)$:

$$\mathcal{S}_{fi} = i^n \left(\prod_{k=1}^n dx_k \right) \left(\prod_{k=1}^m e^{-ip_k x_k} \right) \left(\prod_{k=m+1}^n e^{ip_k x_k} \right) \left(\prod_{k=1}^n (\partial_k^2 + m^2) \right) \langle \Omega | T \{ \mathcal{B}(x_1) \dots \mathcal{B}(x_n) \} | \Omega \rangle$$

- Anschaulich: LSZ-Formel gilt nicht nur für elementare Teilchen (Felder $\phi(x)$), sondern auch für Feldoperatoren $\mathcal{B}(x)$
 - * Mehr Informationen über Feldoperatoren $\mathcal{B}(x)$ in 3.6
- Herleitung funktioniert genau gleich wie für skalare Felder $\varphi(x)$
 - * Anschaulich: Ersetze in der "allgemeinen" Formel $\mathcal{D}_k \rightarrow \partial_k^2 + m_k^2$ und $\epsilon^{i, \pm}(\vec{p}) \rightarrow 1$

3.5.3 Greensfunktionen berechnen im Lagrangeformalismus (...)

- Formalismus aktuell nur für skalare Felder $\phi = \varphi$, wird noch verallgemeinert (...)
 - Idee: Benutze Greensfunktion-Eigenschaft des Feynman-Propagators und Schwinger-Dyson-Gleichungen, um Greensfunktionen schrittweise zu berechnen
 - Schwinger-Dyson-Gleichungen verwenden Euler-Lagrange-Bewegungsgleichungen für WW-Theorie
 - Abkürzungen: $\phi_i := \phi(x_i)$, $\Delta_{ij} := D_F(x_i - x_j)$, $\delta_{ij} := \delta^4(x_i - x_j)$, $\langle \dots \rangle := \langle \Omega | T \{ \dots \} | \Omega \rangle$ bzw. $\langle 0 | T \{ \dots \} | 0 \rangle$, $\mathcal{D}_i := \partial_i^2 + m^2$
 - Im Lagrange-Formalismus berechnet man $\langle 0 | T \{ \dots \} | 0 \rangle (\mathcal{L}_{\text{int}} = 0)$ oder $\langle \Omega | T \{ \dots \} | \Omega \rangle (\mathcal{L}_{\text{int}} \neq 0)$
 - Lagrange-Formalismus arbeitet mit Bewegungsgleichungen \Rightarrow Klein-Gordon-Operator \mathcal{D}_i wichtig
 - Schwinger-Dyson-Gleichungen $\mathcal{D}_i \langle \phi_i \phi_1 \dots \phi_n \rangle = \langle \frac{\delta \mathcal{L}_{\text{int}}}{\delta \phi_i} \phi_1 \dots \phi_n \rangle - i \sum_j \delta_{ij} \langle \phi_1 \dots \phi_{j-1} \phi_{j+1} \dots \phi_n \rangle$
 - Herleitung in kurz: Berücksichtige, dass Zeitableitung auch auf Zeitordnungsoperator wirkt, und verwende Euler-Lagrange-Gleichungen für WW-Theorie
1. $\partial_t \langle \phi_x \phi_1 \rangle = \langle \partial_t \phi_x \phi_1 \rangle$
 - Anschaulich: Kann Zeitableitung ∂_t nicht einfach in Greensfunktion reinziehen, da Greensfunktion wegen Zeitordnung auch noch andere Zeitabhängigkeit hat
 - Achtung: ∂_t wirkt nur auf $\phi_x := \phi(x)$ und nicht auf ϕ_1
 - Produktregel $\partial_t \langle \Omega | T \{ \phi_x \phi_1 \} | \Omega \rangle = \langle \Omega | T \{ \partial_t \phi_x \phi_1 \} | \Omega \rangle + \langle \Omega | \phi_x \phi_1 | \Omega \rangle \partial_t \Theta(t - t_1) + \langle \Omega | \phi_1 \phi_x | \Omega \rangle \partial_t \Theta(t_1 - t) = \langle \Omega | T \{ \partial_t \phi_x \phi_1 \} | \Omega \rangle + \langle \Omega | [\phi_x, \phi_1]_- | \Omega \rangle \partial_t \delta(t - t_1)$
 - Für $t \neq t_1$ verschwindet der zweite Term wegen $\delta(t - t_1) = 0$
 - Für $t = t_1$ verschwindet der zweite Term wegen $[\phi(x), \phi(x_1)]_- = 0$
 2. $\partial_t^2 \langle \phi_x \phi_1 \rangle = \langle \partial_t^2 \phi_x \phi_1 \rangle - i \delta_{x1}$
 - Gleiche Rechnung wie bei 1), bekomme aber anderen Kommutator $[\partial_t \phi(x), \phi(x_1)] = -i \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_1)$ für $t = t_1$
 3. Kann ∂_i^2 und m^2 einfach in Greensfunktion ziehen: $\mathcal{D}_i \langle \phi_i \phi_1 \rangle = \langle \mathcal{D}_i \phi_i \phi_1 \rangle - i \delta_{i1}$
 - Addiere auf beiden Seiten von 3) $(\partial_i^2 + m^2) \langle \phi(x) \phi(x_1) \rangle = \langle (\partial_i^2 + m^2) \phi(x) \phi(x_1) \rangle$
 - Wechsle in Kurznotation mit $x_i := x$
 4. Verwende Bewegungsgleichung für WW-Theorie $\mathcal{D}_i \phi(x) = \frac{\delta \mathcal{L}_{\text{int}}}{\delta \phi(x)} \Rightarrow \mathcal{D}_i \langle \phi_i \phi_1 \rangle = \langle \frac{\delta \mathcal{L}_{\text{int}}}{\delta \phi_i} \phi_1 \rangle - i \delta_{i1}$
 - Allgemeines skalares Feld hat Lagrangian $\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) + \frac{m^2}{2} \phi^2 + \mathcal{L}_{\text{int}}(\phi)$, wobei $\mathcal{L}_{\text{int}}(\phi)$ nur von ϕ und nicht von $\partial_\mu \phi$ abhängt
- (a) Verallgemeinerung für $n > 1$ folgt mit gleichem Konzept, aber mehr Rechenaufwand
- Feynman-Propagator Δ_{ij} ist definiert durch $(\partial^2 + m^2) \langle 0 | T \{ \phi_i \phi_j \} | 0 \rangle = \mathcal{D}_i \Delta_{ij} = -i \delta_{ij}$
 - Berechnung von $\langle \phi_1 \dots \phi_n \rangle := \langle 0 | T \{ \phi_1 \dots \phi_n \} | 0 \rangle$ für freie Theorie $\mathcal{L}_{\text{int}} = 0$
 - Greensfunktionen eindeutig bestimmt mit $\langle \phi_1 \dots \phi_n \rangle = \sum_j D_{j1} \langle \phi_2 \dots \phi_{j-1} \phi_{j+1} \dots \phi_n \rangle$
 - * Schwinger-Dyson-Gleichung wird zu $\mathcal{D}_i \langle \phi_1 \dots \phi_n \rangle = -i \sum_j \delta_{ij} \langle \phi_1 \dots \phi_{j-1} \phi_{j+1} \dots \phi_n \rangle$
 - * $\langle \phi_1 \dots \phi_n \rangle = \int d^4 x_i \delta_{i1} \langle \phi_1 \phi_2 \dots \phi_n \rangle = \int d^4 x_i (i \mathcal{D}_i D_{i1}) \langle \phi_i \phi_2 \dots \phi_n \rangle \stackrel{PI}{=} i \int d^4 x_i D_{i1} \mathcal{D}_i \langle \phi_i \phi_2 \dots \phi_n \rangle$
 - $\stackrel{SDE}{=} \sum_j \int d^4 x_i D_{i1} \delta_{ij} \langle \phi_2 \dots \phi_{j-1} \phi_{j+1} \phi_n \rangle = \sum_j D_{j1} \langle \phi_2 \dots \phi_{j-1} \phi_{j+1} \dots \phi_n \rangle$
 - * Achtung: Partielle Integration(PI) für $\int d^4 x_i$ liefert Faktor $(-1)^4 = 1$
 - Anschaulich: Kann mit jeder Anwendung der Gleichung 2 Felder aus der Greensfunktion in Feynman-Propagatoren Δ_{ij} umwandeln
 - Berechnung von $\langle \phi_1 \dots \phi_n \rangle := \langle \Omega | T \{ \phi_1 \dots \phi_n \} | \Omega \rangle$ für WW-Theorie $\mathcal{L}_{\text{int}} \neq 0$
 - Finde beliebig genaues Ergebnis für Greensfunktion, wenn $\mathcal{L}_{\text{int}} \propto \lambda \ll 1$ ist
 - * Anschaulich: Entwickle Ergebnis in λ , vernachlässige Terme $\propto \lambda^n$ mit $n > m$ für festes m

- Hilfspgleichung $\langle \phi_1 \dots \phi_n \rangle = i \int d^4x_i D_{i1} \langle \frac{\delta \mathcal{L}_{\text{int}}}{\delta \phi_i} \phi_2 \dots \phi_n \rangle + \sum_j D_{j1} \langle \phi_2 \dots \phi_{j-1} \phi_{j+1} \dots \phi_n \rangle$
 - * Herleitung funktioniert gleich wie für freie Theorie aber mit $\mathcal{L}_{\text{int}} \neq 0$
- 1. Verwende Hilfspgleichung mehrfach \Rightarrow Schreibe $\langle \phi_1 \dots \phi_n \rangle$ als Entwicklung in λ bis Ordnung m
 - Rechnung kann sehr aufwändig sein
 - Terme mit Ordnung $n < m$ enthalten keine Greensfunktionen, sonst Hilfspgleichung anwenden
 - Enthalte Terme ohne Greensfunktionen nur aus $\langle \rangle = \langle \Omega | \Omega \rangle = 1$
- 2. Näherung: Vernachlässige für Ordnung m den Unterschied zwischen $\langle 0 | T \{ \dots \} | \Omega \rangle$ und $\langle \Omega | T \{ \dots \} | \Omega \rangle$ und ersetze $\langle \Omega | T \{ \dots \} | \Omega \rangle$ durch $\langle 0 | T \{ \dots \} | 0 \rangle$
 - Greensfunktionen der freien Theorie $\langle 0 | T \{ \dots \} | 0 \rangle$ sind eindeutig bekannt

3.6 Verallgemeinerung von Feldern – Feldoperatoren

3.6.1 Feldoperatoren

- Motivation: Möchte **QFT** ohne Annahmen über Darstellungen der Poincaré-Gruppe erarbeiten
 - Anschaulich: Gehe nicht auf explizite Darstellungen der Poincaré-Gruppe (bzw Lagrangians) ein, verwende lediglich die Casimir-Operatoren der Poincaré-Gruppe (also $P^2 = m^2$)
 - * Annahmen über Darstellungen der Poincaré-Gruppe sind Hauptursache der Komplexität von **QFT** (Fourierentwicklung von Feldern, Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren, LSZ-Formel etc) \Rightarrow Feldoperator-Zugang zu **QFT** spart viel Aufwand
 - Vorteil dieses Ansatzes: Kann nicht-perturbative Effekte beschreiben
 - * In der Praxis meint man damit meist Bindungszustände (zB Hadronen, Positronium)
 - Beschreibe Feldoperatoren formal wie Skalarfelder $\varphi(x)$
- Definition: $\mathcal{B}(x)$ heißt Feldoperator : $\iff \langle \Omega | \mathcal{B}(x) | \vec{p} \rangle = N_{\mathcal{B}} e^{-ipx} |_{p^2=m_{\mathcal{B}}^2}$
 - Interpretation der Gleichung: Feldoperator $\mathcal{B}(x)$ erzeugt Zustand $|\vec{p}\rangle$ aus dem Vakuum $|\Omega\rangle$
 - Notation: $|\vec{p}\rangle$ ist angeregter Zustand des \mathcal{B} -Feldoperators mit Masse $m_{\mathcal{B}}$, $N_{\mathcal{B}}$ ist Normierungsfaktor
- Verwende in der Praxis $\langle \Omega | \mathcal{B}(0) | \vec{p} \rangle = N_{\mathcal{B}}$
 - Anschaulich: x -Abhängigkeit von $\langle \Omega | \mathcal{B}(x) | \vec{p} \rangle$ ist trivial \Rightarrow Schreibe sie nicht explizit aus
 - Hängt mit dem vollständigen Ausdruck zusammen über $\langle \Omega | \mathcal{B}(x) | \vec{p} \rangle = e^{-ipx} \langle \Omega | \mathcal{B}(0) | \vec{p} \rangle |_{p^2=m_{\mathcal{B}}^2}$
 - * Explizit nachrechnen mit Translationsoperator $e^{i\hat{P}x}$: $\langle \Omega | \mathcal{B}(x) | \vec{p} \rangle = \langle \Omega | e^{i\hat{P}x} e^{-i\hat{P}x} \mathcal{B}(x) e^{i\hat{P}x} e^{-i\hat{P}x} | \vec{p} \rangle = \langle \Omega | e^{i\hat{P}x} \mathcal{B}(0) e^{-i\hat{P}x} | \vec{p} \rangle = e^{-ipx} \langle \Omega | \mathcal{B}(0) | \vec{p} \rangle |_{p^2=m_{\mathcal{B}}^2}$
 - Verwende Translations-Eigenschaft $e^{-i\hat{P}x} \mathcal{B}(x) e^{i\hat{P}x} = \mathcal{B}(0)$, Vakuum hat verschwindenden Impuls $\hat{P}^\mu |\Omega\rangle = 0$, $\hat{P}^\mu |\vec{p}\rangle = p^\mu |\vec{p}\rangle |_{p^2=m_{\mathcal{B}}^2}$
- Anmerkungen zu Konventionen zur Definition von $\mathcal{B}(x)$ bzw den zugehörigen Zuständen $|\vec{p}\rangle$
 - $\langle \Omega | \mathcal{B}(x) | \Omega \rangle = 0$
 - * Kann das immer durch Redefinition $\mathcal{B}(x) \rightarrow \mathcal{B}(x) - \langle \Omega | \mathcal{B}(x) | \Omega \rangle$ erreichen
 - Zustände $|\vec{p}\rangle$ bilden einen vollständigen Hilbertraum
 - * Orthonormierung $\langle \vec{p} | \vec{k} \rangle = 2E_{\vec{p}} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{k})$
 - * Vollständigkeit $1 = \sum_X \int d\Phi_X |\vec{p}_X\rangle \langle \vec{p}_X|$ mit Phasenraumfaktor $d\Phi_X = \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}}$
 - Notation: Summe \sum_X läuft über alle möglichen Zustände ("Teilchen") X im Hilbertraum

3.6.2 Spektraldichte

- Definition der Spektraldichte $\rho_B(p^2)$: $2\pi\Theta(p^0)\rho_B(p^2) := \sum_X \int d\Phi_X (2\pi)^4 \delta^4(p - p_X) |\langle \Omega | \mathcal{B}(0) | \vec{p}_X \rangle|^2$
 - Interpretation von $\rho_B(p^2)$
 - * Terme $\rho_B(p^2) \supset Z\delta(p^2 - m^2)$: Teilchen
 - Teilchen können "elementare" Felder aus dem Lagrangian sein ($Z = 1$), aber auch andere Dinge wie zB 2-Teilchen-Bindungszustand mit $m = m_1 + m_2 - E$ (2 Teilchen m_1, m_2 und Bindungsenergie E)
 - Notiz: Kann auch nicht-triviales Residuum $Z \neq 1$ haben
 - * Terme $\rho_B(p^2) \supset \Theta(p^2 - (2m)^2)\rho'_B(p^2)$: Kontinuumszustand
 - Anschaulich: Schwächere Singularitäten in Δ_B als die δ -Distributionen für Teilchen
 - Eigenschaften von $\rho_B(p^2)$
 - * $\rho_B(p^2) \geq 0$
 - Folgt direkt aus der Definition wegen $|\cdot| \geq 0$
 - * $p^2 \leq 0 \Rightarrow \rho_B(p^2) = 0$ (?)
 - Ziehe deshalb den Faktor $\Theta(p^0)$ raus
 - Motivation für diese Definition: Erhalte $\langle \Omega | \mathcal{B}(x) \mathcal{B}(y) | \Omega \rangle \equiv \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \Theta(p^0) \rho_B(p^2) e^{-ip(x-y)}$
 1. Zerlege $\langle \Omega | \mathcal{B}(x) \mathcal{B}(y) | \Omega \rangle$ mit Vollständigkeitsrelation $1 = \sum_X \int d\Phi_X |\vec{p}_X\rangle \langle \vec{p}_X|$
 - * $\langle \Omega | \mathcal{B}(x) \mathcal{B}(y) | \Omega \rangle = \langle \Omega | \mathcal{B}(x) \sum_X \int d\Phi_X |\vec{p}_X\rangle \langle \vec{p}_X| \mathcal{B}(y) | \Omega \rangle = \sum_X \int d\Phi_X e^{-ip_X(x-y)} |\langle \Omega | \mathcal{B}(0) | \vec{p}_X \rangle|^2 \Big|_{p_X^2 = m_B^2}$
(verwende Translationsoperatoren)
 2. Ziehe p -Integral $\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \delta^4(p - p_X)$ raus
 - * $\sum_X \int d\Phi_X e^{-ip_X(x-y)} |\langle \Omega | \mathcal{B}(0) | \vec{p}_X \rangle|^2 \Big|_{p_X^2 = m_B^2} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \left(\sum_X \int d\Phi_X (2\pi)^4 \delta^4(p - p_X) |\langle \Omega | \mathcal{B}(0) | \vec{p}_X \rangle|^2 \Big|_{p_X^2 = m_B^2} \right)$
 - * Lese $2\pi\Theta(p^0)\rho_B(p^2) = \left(\sum_X \int d\Phi_X (2\pi)^4 \delta^4(p - p_X) |\langle \Omega | \mathcal{B}(0) | \vec{p}_X \rangle|^2 \Big|_{p_X^2 = m_B^2} \right)$
 - Beispiele
 - * (Elementares) freies Feld mit Masse m : $\rho(p^2) = \mathcal{P}^\pm \delta(p^2 - m^2)$ mit Projektionsoperator \mathcal{P}^\pm
- Källen-Lehmann-Spektraldarstellung: $\Delta_B(p^2) := \int dq^2 \frac{i}{p^2 - q^2 + i0} \rho(p^2)$
 - Anschaulich: Källen-Lehmann-Spektraldarstellung ist Verallgemeinerung des Propagators auf Feldoperatoren
 - Motivation für diese Definition: $\langle \Omega | T \{ \mathcal{B}(x) \mathcal{B}(y) \} | \Omega \rangle = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ip(x-y)} \Delta_B(p^2)$
- $\rho_B(p^2) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \Delta_B(p^2)$
 - Anschaulich: Einfache Relation zwischen (verallgemeinertem) Propagator und Spektraldichte
 - * Für freie Felder ist dieser Zusammenhang der einfachste Weg, um $\rho(p^2)$ zu erhalten
 - * Verwende Cutting rules (siehe 5.8.2), um $\text{Im} \mathcal{M}$ zu erhalten
 - Herleitung: Folgt aus Identität $\text{Im} \frac{1}{p^2 - m^2 + i0} = -\pi \delta(p^2 - m^2)$ (siehe 5.8.2) mit $\rho_B(p^2) \in \mathbb{R}$

Kapitel 4

Pfadintegralquantisierung

4.1 Grundlagen

4.1.1 Überblick

- Aufbau dieses Kapitels
 1. Zeige, dass Pfadintegral-Formalismus und kanonische Quantisierung äquivalent sind
 - Strategie: Leite Pfadintegral-Formalismus jeweils für einzelnes bosonisches und für einzelnes fermionisches Feld aus dem kanonischen Formalismus ab
 - * Verallgemeinerung auf Theorie mit mehreren bosonischen und fermionischen Feldern ist trivial
 - * Gehe von generischer Theorie aus, also auch WW-Terme (?)
 - * Müsste streng genommen auch kanonischen Formalismus aus dem Pfadintegralformalismus herleiten, um zu zeigen, dass die beiden äquivalent sind (?)
 - Ziel: Formaler (!) Beweis der Äquivalenz der beiden Ansätze \Rightarrow Nicht relevant, wenn man nur rechnen will
 - * Abschnitt ist noch recht unvollständig, wird evtl später formalisiert
 - Arbeite in diesem Abschnitt mit \mathcal{S} -Matrix-Elementen, später nur noch mit Korrelationsfunktionen
 - * Selbes Thema wie in kanonischer Quantisierung: \mathcal{S} -Matrix-Elemente sind nützlich für Erarbeitung des Formalismus, Korrelationsfunktionen sind nützlich für praktische Rechnungen
 2. Matrixelemente im Pfadintegral-Formalismus berechnen
 - Hier werden Rechenmethoden eingeführt \Rightarrow Das ist der relevante Abschnitt

4.1.2 Interpretation des Pfadintegrals

4.1.3 Klassischer Grenzfall – method of stationary phase

4.2 Pfadintegral-Formalismus und kanonische Quantisierung sind äquivalent

4.2.1 Bosonisches Pfadintegral in der Quantenmechanik

- Betrachte System mit bosonischen Orts- und Impulsoperatoren $[Q_a, P_b] = i\delta_{ab}$, $[Q_a, Q_b] = [P_a, P_b] = 0$
 - Ziel: Index a wird zu einer kontinuierlichen Variable \Rightarrow Eigenwerte von Q_a, P_a werden zu Quantenfeldern
- 1. Definiere Eigenzustände und Eigenwerte von X_a : $X_a|x\rangle = x_a|x\rangle$ mit $x \in \{q, p\}$, $X \in \{P, Q\}$
 - Eigenzustände und Eigenwerte von P_a, Q_a haben selbe Eigenschaften \Rightarrow Verwende Notation x, X mit $x \in \{p, q\}$ und $X \in \{P, Q\}$
 - $\{x_1, \dots, x_n\}$ bilden ein vollständiges System kommutierender Observablen \Rightarrow Kann gemeinsame Eigenzustände und Eigenwerte finden
 - Keine Einschränkungen an Eigenwerte der beiden Operatoren außer Hermitezität \Rightarrow Erhalte $x_a \in \mathbb{R}$

- Notation: Eigenzustände $|x\rangle$ haben einen Vektor x mit allen x_a -Eigenwerten als Index
- Eigenzustände sind orthonormal $\langle x|x'\rangle = \prod_a \delta(x_a - x'_a) =: \delta(x - x')$ und vollständig $1 = \int \prod_a dx_a |x\rangle \langle x|$
- $|q\rangle$ und $|p\rangle$ hängen zusammen über $\langle q|p\rangle = \prod_a \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{iq_a p_a}$
 - Begründung: In Quantenmechanik folgt $\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ipx}$ aus $[X, P] = i(\hbar = 1)$
 - Notation: Bekomme Faktor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ für jeden Term im Produkt

2. Verwende Heisenbergbild für Zeitentwicklung

- Operatoren im Heisenbergbild $X_a(t) = e^{iHt} X_a e^{-iHt}$ mit $X \in \{Q, P\}$
- Zustände im Heisenbergbild $|x, t\rangle = e^{iHt} |x\rangle$ mit $x \in \{q, p\}$
- Zustände im Heisenbergbild haben wegen $e^{iHt} e^{-iHt} = 1$ dieselben Relationen
 $\langle x', t|x, t\rangle = \delta(x' - x)$, $\int \prod_a dx_a |x, t\rangle \langle x, t| = 1$, $\langle q, t|p, t\rangle = \prod_a \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ip_a q_a}$ mit $x \in \{q, p\}$
- Hamilton-Operator H ist gleich im Schrödingerbild(zeitunabhängige Operatoren) und Heisenbergbild(zeitabhängige Operatoren): $e^{iHt} H e^{-iHt} = H$ wegen $[H, H] = 0$

3. Übergangsamplitude für infinitesimale Zeitschritte

$$\langle q', t + dt|q, t\rangle = \int \prod_a \frac{dp_a}{2\pi} e^{-iH(q', p)dt + i\sum_a (q'_a - q_a)p_a}$$

- Benutze Definition der Zustände im Heisenberg-Bild $\langle q', t + dt|q, t\rangle = \langle q', t|e^{-iH(Q, P)dt}|q, t\rangle$
- Drücke Hamilton-Operator durch P -/ Q -Operatoren im Heisenbergbild aus: $H(Q, P) = e^{iHt} H e^{-iHt} = H(Q(t), P(t)) \Rightarrow \langle q', t + dt|q, t\rangle = \langle q', t|e^{-iH(Q(t), P(t))dt}|q, t\rangle$
 - Benutze $[H, H] = 0$ (erster Schritt) und $e^{-iHt} e^{iHt} = 1 \Rightarrow$ Beliebige Q_a, P_a -Abhängigkeiten W haben $W(t) = e^{iHt} W e^{-iHt}$ (zweiter Schritt)
 - Kommutiere die Q_a, P_a -Operatoren in H so, dass $Q_a(t)$ -Operatoren links von $P_a(t)$ -Operatoren stehen
 - Funktioniert genauso mit links \leftrightarrow rechts, das Ergebnis hängt nicht davon ab
- Verwende $1 = \int \prod_a dp_a |p, t\rangle \langle p, t| \Rightarrow \langle q', t + dt|q, t\rangle = \int \prod_a dp_a \langle q', t|e^{-iH(Q(t), P(t))dt}|p, t\rangle \langle p, t|q, t\rangle$
- Verwende $Q_a(t)|q, t\rangle = q_a|q, t\rangle$, $P_a(t)|p, t\rangle = p_a|p, t\rangle \Rightarrow \langle q', t + dt|q, t\rangle = \int \prod_a dq_a e^{-iH(q', p)dt} \langle q', t|p, t\rangle \langle p, t|q, t\rangle$
- Verwende $\langle q, t|p, t\rangle = \prod_a \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ipx} \Rightarrow \langle q', t + dt|q, t\rangle = \int \prod_a \frac{dp_a}{2\pi} e^{-iH(q', p)dt + i\sum_a (q'_a - q_a)p_a}$

4. Übergangsamplitude für makroskopische Zeitschritte

$$\langle q', t'|q, t\rangle = \int_{q_a(t)=q_a}^{q'_a(t')=q'_a} \left(\prod_{\tau, a} dq_a(\tau) \right) \left(\prod_{\tau, a} \frac{dp_a(\tau)}{2\pi} \right) \exp \left\{ i \int_t^{t'} d\tau \left(\sum_a \dot{q}_a(\tau) p_a(\tau) - H(q(\tau), p(\tau)) \right) \right\}$$

- Zerlege Zeitintervall $t' - t = (N + 1)dt$ mit Zwischenschritten t_1, t_2, \dots, t_N und $t_0 = t, t_{N+1} = t'$
- Zerlege Übergangsamplitude $\langle q', t'|q, t\rangle = \int dq_1 \dots dq_N \langle q', t'|q_N, t_N\rangle \langle q_N, t_N|q_{N-1}, t_{N-1}\rangle \dots \langle q_1, t_1|q, t\rangle$
 - Verwende für jeden Zwischenschritt t_i $1 = \int \prod_a dq_a |q, t\rangle \langle q, t|$ (kann eine Basis von Eigenzuständen der Q_a für jeden Zeitpunkt t definieren)
- Setze für jede Übergangsamplitude die Relation für $\langle q', t + dt|q, t\rangle$ mit $dt = \frac{t' - t}{N+1} = t_{i+1} - t_i$ ein \Rightarrow
 $\langle q', t'|q, t\rangle = \int_{q_0, a=q_a}^{q_{N+1}, a=q'_a} \left(\prod_{k=1}^N \prod_a dq_{k,a} \right) \left(\prod_{k=0}^N \prod_a \frac{dp_{k,a}}{2\pi} \right)$
 $\times \exp \left\{ i \sum_{k=1}^{N+1} \left(\sum_a (q_{k,a} - q_{k-1,a}) p_{k-1,a} - H(q_k, p_{k-1}) dt \right) \right\}$
 - Schreibe Randbedingungen $q_{N+1,a} = q'_a, q_{0,a} = q_a$ explizit ans Integralzeichen
- Führe Kontinuumslimit $N \rightarrow \infty$ durch:
 $\langle q', t'|q, t\rangle = \int_{q_a(t)=q_a}^{q_a(t')=q'_a} \left(\prod_{\tau, a} dq_a(\tau) \right) \left(\prod_{\tau, a} \frac{dp_a(\tau)}{2\pi} \right) \exp \left\{ i \int_t^{t'} d\tau \left(\sum_a \dot{q}_a(\tau) p_a(\tau) - H(q(\tau), p(\tau)) \right) \right\}$
 - Definiere Verbindungsfunktionen $x_a(\tau)$, $x \in \{p, q\}$ durch $x_a(t_k) = x_{k,a}$
 - Für kontinuierliches τ gilt $\sum_{k=1}^{N+1} dt \rightarrow \int_t^{t'} d\tau$, $\frac{q_{k,a} - q_{k-1,a}}{dt} \rightarrow \partial_\tau q_a(\tau) =: \dot{q}_a(\tau)$

5. Matricelement für mikroskopische Zeitschritte

$$\langle q', t + dt | \mathcal{O}_A(P(t), Q(t)) | q, t \rangle = \int \prod_a \frac{dp_a}{2\pi} e^{-iH(q', p)dt + i \sum_a (q'_a - q_a) p_a} \mathcal{O}(p, q)$$

- (a) Kommutiere die Q_a, P_a -Operatoren in $\mathcal{O}_A(P(t), Q(t))$ so, dass $P_a(t)$ -Operatoren links von $Q_a(t)$ -Operatoren stehen

- Funktioniert genauso mit rechts→links, muss aber die entgegengesetzte Reihenfolge wie in H sein

- (b) Verwende selbe Schritte wie bei der Übergangsamplitude für mikroskopische Zeitschritte:

$$\begin{aligned} \langle q', t + dt | \mathcal{O}(P(t), Q(t)) | q, t \rangle &= \int \prod_a dp_a \langle q', t | e^{-iH(Q(t), P(t))dt} | p, t \rangle \langle p, t | \mathcal{O}(P(t), Q(t)) | q, t \rangle \\ &= \int \prod_a dp_a \langle q', t | e^{-iH(q', p)dt} | p, t \rangle \langle p, t | \mathcal{O}(p, q) | q, t \rangle = \int \prod_a \frac{dp_a}{2\pi} e^{-iH(q', p)dt + i \sum_a (q'_a - q_a) p_a} \mathcal{O}(p, q) \end{aligned}$$

- Wichtig: $P_a(t)$ - und $Q_a(t)$ -Operatoren in \mathcal{O} müssen zum Zeitpunkt t ausgewertet werden wie die Zustände $|q, t\rangle$, da sonst die Eigenwertgleichungen $Q_a(t)|q, t\rangle = q_a|q, t\rangle, P_a(t)|p, t\rangle = p_a|p, t\rangle$ nicht verwendet werden können

6. Matricelemente für makroskopische Zeitschritte $\langle q', t' | T \{ \mathcal{O}_A(P(t_A), Q(t_A)) \cdots \} | q, t \rangle$

$$= \int_{q_a(t)=q_a}^{q'_a(t')=q'_a} \left(\prod_{\tau, a} dq_a(\tau) \right) \left(\prod_{\tau, a} \frac{dp_a(\tau)}{2\pi} \right) \exp \left\{ i \int_t^{t'} d\tau \left(\sum_a \dot{q}_a(\tau) p_a(\tau) - H(q(\tau), p(\tau)) \right) \right\} \mathcal{O}_A(p(t_A), q(t_A)) \cdots$$

- Notation: \cdots für weitere Operatoren $\mathcal{O}_I(P(t_I), Q(t_I))$ bzw deren Eigenwerte $\mathcal{O}_I(p(t_I), q(t_I))$
- Notation: $T\{\cdots\}$ für zeitgeordnetes Produkt

- (a) Zerlege Zeitintervall und füge Vollständigkeitsrelationen $1 = \int \prod_a dq_a |q, t\rangle \langle q, t|$ ein

- Funktioniert nur mit Zeitordnungsoperator, da dann die Operatoren $\mathcal{O}_I(P(t_I), Q(t_I))$ in derselben zeitlichen Reihenfolge ausgewertet werden wie die eingefügten Vollständigkeitsrelationen
- Erhalte Produkt von Matricelementen für mikroskopische Zeitschritte, in denen manchmal(wenn die Zeiten passen) ein Operator steht

- (b) Setze für jedes Matricelement die Relation für $\langle q', t + dt | \mathcal{O}_A(P(t), Q(t)) | q, t \rangle$ oder $\langle q', t + dt | q, t \rangle$ ein

- (c) Führe Kontinuumsliches durch analog zur Rechnung für Übergangsamplituden

- Interpretation des Ergebnisses $\langle q', t' | T \{ \mathcal{O}_A(P(t_A), Q(t_A)) \cdots \} | q, t \rangle$

$$= \int_{q_a(t)=q_a}^{q'_a(t')=q'_a} \left(\prod_{\tau, a} dq_a(\tau) \right) \left(\prod_{\tau, a} \frac{dp_a(\tau)}{2\pi} \right) \exp \left\{ i \int_t^{t'} d\tau \left(\sum_a \dot{q}_a(\tau) p_a(\tau) - H(q(\tau), p(\tau)) \right) \right\} \mathcal{O}_A(p(t_A), q(t_A)) \cdots$$

- Pfadintegral enthält die Information über Zeitordnung von Prozessen implizit
 - * Matricelement enthält explizite Zeitordnung durch Zeitordnungsoperator $T\{\cdots\}$
 - * Pfadintegral enthält keine explizite Information über Zeitordnung, ist aber äquivalent zum Matricelement und muss daher die Zeitordnung implizit enthalten
- Achtung: Integrationsvariablen $q_a(t), p_a(t)$ sind nicht die physikalische Orte und Impulse der klassischen Mechanik, weil sie die Hamilton-Bewegungsgleichungen nicht erfüllen
 - * Anschaulich: $q_a(t), p_a(t)$ sind beliebige Integrationsvariablen – Pfadintegral berücksichtigt alle möglichen Konfigurationen, nicht nur die klassisch erlaubten

4.2.2 Bosonisches Pfadintegral in der Quantenfeldtheorie

1. Quantenfeldtheorie ist Quantenmechanik mit unendlich vielen Freiheitsgraden

- Idee: Quantenfeldtheorie-Pfadintegral = Quantenmechanik-Pfadintegral mit einem Multiindex $a = (\vec{x}, m, s, i)$, wobei \vec{x} ein kontinuierlicher Index ist
 - Ausführlich: Ortsvariable \vec{x} , Masse m , Spin s und Spin-Ausrichtung(Spinor- und/oder Vektor-Indizes) i
- Notation: Operatoren $\phi_k(\vec{x}, t) := Q_a(t), \pi_k(\vec{x}, t) := P_a(t)$ und Eigenwerte $\phi_k(\vec{x}, t) := q_a(t), \pi_k(\vec{x}, t) := p_a(t)$ mit Multiindex $k = (m, s, i)$ für Lorentz-Quantenzahlen

- Kurznotation $\phi(t) := Q(t), \pi(t) := P(t)$ für die P/Q -Abhängigkeiten der Operatoren H, \mathcal{O}_I und $\phi(t) := q(t), \pi(t) := p(t)$ für die p/q -Abhängigkeit der Eigenwerte der Operatoren H, \mathcal{O}_I

- Erhalte mit dieser Notation $\langle \phi', t' | T \{ \mathcal{O}_A(\pi(t_A), \phi(t_A)) \cdots \} | \phi, t \rangle = \int_{\phi_k(\vec{x}, t) = \phi_k(\vec{x})}^{\phi_k(\vec{x}, t') = \phi'_k(\vec{x})} \left(\prod_{\tau, \vec{x}, k} d\phi_k(\vec{x}, \tau) \right) \left(\prod_{\tau, \vec{x}, k} \frac{d\pi_k(\vec{x}, \tau)}{2\pi} \right) \exp \left\{ i \int_t^{t'} d\tau \left(\sum_k \int d^3x \dot{\phi}_k(\vec{x}, \tau) \pi_k(\vec{x}, \tau) - H(\phi(\tau), \pi(\tau)) \right) \right\} \mathcal{O}_A(\pi(t_A), \phi(t_A)) \cdots$
- Verwende für die weiteren Rechnungen die alte Notation (ein Index $a = (\vec{x}, k)$), da die Rechnungen damit kompakter sind

2. Matricelemente von asymptotischen Zuständen $\langle f, \infty | T \{ \mathcal{O}_A(P(t_A), Q(t_A)) \cdots \} | i, -\infty \rangle$

$$= \int \left(\prod_{\tau, a} dq_a(\tau) \right) \left(\prod_{\tau, a} \frac{dp_a(\tau)}{2\pi} \right) \langle f, \infty | q(\infty), \infty \rangle \langle q(-\infty), -\infty | i, -\infty \rangle \\ \times \exp \left\{ i \int_t^{t'} d\tau \left(\sum_a \dot{q}_a(\tau) p_a(\tau) - H(q(\tau), p(\tau)) \right) \right\} \mathcal{O}_A(p(t_A), q(t_A)) \cdots$$

- Motivation: Habe bisher Matricelemente von Eigenzuständen $|q, t\rangle$ der Quantenfelder Q_a berechnet, messe im Experiment aber Matricelemente von asymptotischen Zuständen $|f, \infty\rangle$ und $|i, -\infty\rangle$
 - Anschaulich: Berechne Überlappung zwischen den Zuständen $|q, t\rangle$ der WW-Theorie und den asymptotischen Zuständen $|i/f, \pm\infty\rangle$ der freien Theorie
- Entwicklung der asymptotischen Zustände in Orts-Eigenzuständen $|q, t\rangle$ liefert $\langle f, \infty | T \{ \mathcal{O}_A(P(t_A), Q(t_A)) \cdots \} | i, -\infty \rangle = \int \left(\prod_a dq'_a(-\infty) \right) \left(\prod_a dq_a(\infty) \right) \times \langle f, \infty | q', \infty \rangle \langle q', \infty | T \{ \mathcal{O}_A(P(t_A), Q(t_A)) \cdots \} | q, -\infty \rangle \langle q, -\infty | i, -\infty \rangle$
- Kann Pfadintegral-Ergebnis für $\langle q', \infty | T \{ \mathcal{O}_A(P(t_A), Q(t_A)) \cdots \} | \phi, -\infty \rangle$ verwenden
- Zusatzfaktoren $\langle f, \infty | q', \infty \rangle \langle q, -\infty | i, -\infty \rangle$ müssen noch berechnet werden
- Integriere zusätzlich über die Anfangs- und Endkonfigurationen q, q' im Pfadintegral \Rightarrow Integrationsbedingungen $q_a(t') = q'_a, q_a(t) = q_a$ fallen weg

3. Zusatzfaktor $\langle f, \infty | q(\infty), \infty \rangle \langle q(-\infty), -\infty | i, -\infty \rangle$ für Vakuum-Vakuum-Matricelemente $f = i = 0$ liefert $i\epsilon$ -Terme im Lagrangian, die die Kausalität des Systems festlegen (damit Propagatoren wohldefiniert sind):

$$\langle f, \infty | T \{ \mathcal{O}_A(P(t_A), Q(t_A)) \cdots \} | i, -\infty \rangle \propto \int \left(\prod_{\tau, a} dq_a(\tau) \right) \left(\prod_{\tau, a} \frac{dp_a(\tau)}{2\pi} \right) \\ \times \exp \left\{ i \int_t^{t'} d\tau \left(\sum_a \dot{q}_a(\tau) p_a(\tau) - H(q(\tau), p(\tau)) + i\epsilon \text{ terms} \right) \right\} \mathcal{O}_A(p(t_A), q(t_A)) \cdots$$

- Anschaulich: Die asymptotischen Zustände bewirken, dass man zusätzliche $+i\epsilon$ -Terme im Lagrangian hat, die die Kausalität festlegen bzw die Propagatoren wohldefiniert machen
- Einschränkung auf $i = f = 0$ ist nicht wirklich eine Einschränkung, da es für die Bestimmung beliebiger Matricelemente genügt, wenn man Vakuum-Vakuum-Matricelemente bestimmen kann
- Rechnungen sind aufwändig \Rightarrow Es reicht zu wissen, dass hier die $+i\epsilon$ -Terme generiert werden
- Bsp: Zusatzfaktor für ein reelles skalares Feld (siehe 4.2.6) $(\mathcal{E}(\vec{x}, \vec{y}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p e^{ip(\vec{x}-\vec{y})})$:

$$\langle 0, \infty | \phi(\infty), \infty \rangle \langle \phi(-\infty), -\infty | i, -\infty \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} |N|^2 \exp \left(-\frac{\epsilon}{2} \int d^3x d^3y d\tau \mathcal{E}(\vec{x}, \vec{y}) \phi(\vec{x}, \tau) \phi(\vec{y}, \tau) e^{-\epsilon|\tau|} \right)$$

- Im Lagrangian in $e^{i \int d^3x \mathcal{L}}$ hat der zusätzliche Term den Vorfaktor $+i\epsilon$
- Bekomme außerdem einen konstanten Vorfaktor, dessen Wert aber keinen Einfluss auf Matricelemente hat

4. Übergang zum Lagrange-Formalismus bzw Berechnung der $\left(\prod_{\tau, a} \frac{dp_a(\tau)}{2\pi} \right)$ -Integrale:

$$\langle f, \infty | T \{ \mathcal{O}_A(Q(t_A)) \cdots \} | i, -\infty \rangle \\ \propto \int \left(\prod_{\tau, a} dq_a(\tau) \right) (\det(2\pi i \mathcal{A}[q]))^{-1/2} \exp \left\{ i \int d\tau (L(q(\tau), \dot{q}(\tau)) + i\epsilon \text{ terms}) \right\} \mathcal{O}_A(q(t_A)) \cdots$$

- Einschränkungen an den Hamiltonian für den Übergang zum Lagrangeformalismus: H hat die Form $H(Q, P) = \frac{1}{2} \sum_{a,b} \mathcal{A}_{ab}(Q) P_a P_b + \sum_a \mathcal{B}_a(Q) P_a + \mathcal{C}(Q)$
 - Anschaulich: H ist quadratisch in Impulsoperatoren $P_a \Rightarrow$ Kann Gauss-Integration für die Eigenwerte im Pfadintegral verwenden
 - Matrix \mathcal{A} muss reell, symmetrisch, positiv-definit und invertierbar sein

– Wie restriktiv ist die Bedingung?

- Interpretation des $(\det(2\pi i \mathcal{A}(q)))^{-1/2}$ -Terms mit $\mathcal{A}_{(a,\tau),(b,\tau')}(q) = \mathcal{A}_{ab}(q(\tau))\delta(\tau - \tau')$
 - $\mathcal{A}(q) = \mathcal{A}$ ist konstant \Rightarrow det-Term ist nicht feldabhängig und damit eine Konstante, die nicht zu Matricelementen beiträgt
 - $\mathcal{A}(q)$ ist abhängig von Feldern \Rightarrow det-Term liefert Beitrag zur Lagrangefunktion $L(q(t), \dot{q}(t))$
 - * Verwende Identität $\det \mathcal{A} = \exp(\text{tr} \log \mathcal{A}) \Rightarrow (\det \mathcal{A})^{-1/2} = \exp(-\frac{1}{2} \text{tr} \log \mathcal{A}) \Rightarrow \Delta L = \frac{i}{2} \text{tr} \log \mathcal{A}$
 - * Verwende $\log(1 + A) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{A^k}{k} = A - \frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{3} A^3 - \mathcal{O}(A^4)$
 - Es kann auch nützlich sein, zusätzliche Felder künstlich einzuführen, um ein Problem natürlicher zu beschreiben
 - * Bsp: A^0 für Lorentzinvarianz von A^μ , Geistfelder in $SU(n)$ Eichtheorie

- (a) Formel für multidimensionale Gauss-Integrale $\int (\prod_k dx_k) \exp\left(-\frac{i}{2} \sum_{i,j} A_{ij} x_i x_j - i \sum_i B_i x_i - iC\right) = (\det(\frac{iA}{2\pi}))^{-1/2} \exp\left(-\frac{i}{2} \sum_{i,j} A_{ij} y_i y_j - i \sum_i B_i y_i - iC\right)$ mit stationärem Punkt $y_i = -\sum_j (A^{-1})_{ij} B_j$
- Bedingungen: Matrix A ist reell, symmetrisch, positiv-definit und invertierbar
 - Stationärer Punkt: Extrempunkt der Gaussfunktion (genauer ein Maximum, da A positiv-definit ist)

- (b) Exponent des Pfadintegrals umschreiben: $\int d\tau \{\sum_a \dot{q}_a(\tau) p_a(\tau) - H(q(\tau), p(\tau))\} = -\frac{1}{2} \sum_{a,b} \int d\tau d\tau' \mathcal{A}_{(a,\tau),(b,\tau')}(q) p_a(\tau) p_b(\tau') - \sum_a \int d\tau \mathcal{B}_{(a,\tau)}(q) p_a(\tau) - \mathcal{C}(q)$
- Definiere geschickte Abkürzungen $\mathcal{A}_{(a,\tau),(b,\tau')}(q) := \mathcal{A}_{ab}(q(\tau))\delta(\tau - \tau')$, $\mathcal{B}_{(a,\tau)}(q) = \mathcal{B}_a(q(\tau)) - \dot{q}_a$, $\mathcal{C}(q) = \int d\tau \mathcal{C}(q(\tau))$
 - Vorteil: Diese Größen hängen nur von Multiindizes der Struktur (a, τ) ab

- (c) Stationärer Punkt des Pfadintegrals $\bar{p}_a(\tau)$ bestimmt durch $\dot{q}_a(\tau) = \frac{\delta H(q(\tau), p(\tau))}{\delta p_a(\tau)}|_{p=\bar{p}}$
- Anschaulich: Wenn die $(\prod_{\tau,a} \frac{dp_a(\tau)}{2\pi})$ -Integrationen durchgeführt werden, muss man in der Multidimensional-Gauss-Integrations-Formel für y_i Funktionen $\bar{p}_a(\tau)$ einsetzen, die die gefundene Bedingung erfüllen
 - i. Integrand des Pfadintegrals hat Extremwert an der Stelle, an der das Argument von \exp einen Extremwert hat
 - ii. $0 \stackrel{!}{=} \frac{\delta}{\delta p_a(\tau)} \int d\tau' (\sum_a \dot{q}_a(\tau') p_a(\tau') - H(q(\tau'), p(\tau')) + i\epsilon \text{ terms}) = \dot{q}_a(\tau) - \frac{\delta H(q(\tau), p(\tau))}{\delta p_a(\tau)}$

- (d) Formel für multidimensionale Gauss-Integrale für die $(\prod_{\tau,a} \frac{dp_a(\tau)}{2\pi})$ -Integration verwenden:
- $$\left(\prod_{\tau,a} \frac{dp_a(\tau)}{2\pi}\right) \exp\left\{i \int d\tau (\sum_a \dot{q}_a(\tau) p_a(\tau) - H(q(\tau), p(\tau)) + i\epsilon \text{ terms})\right\}$$
- $$= (\det(2\pi i \mathcal{A}(q)))^{-1/2} \exp\left\{i \int d\tau (L(q(\tau), \dot{q}(\tau)) + i\epsilon \text{ terms})\right\}$$
- Verwende Formel für multidimensionale Gauss-Integrale mit dem Multiindex $i = (\tau, a)$
 - Identifiziere Lagrangefunktion $L[q(\tau), \dot{q}(\tau)] = (\sum_a \dot{q}_a(\tau) p_a(\tau) - H[q(\tau), p(\tau)])|_{p_a(\tau) = \frac{\delta H(q(\tau), p(\tau))}{\delta p_a(\tau)}}$

- (e) Erweiterung auf Matricelemente mit Operatoren: Muss auch über Operatoren $\mathcal{O}_A(q(t_A), q(t_A))$ integrieren \Rightarrow Beschränkung auf $\mathcal{O}_A(p(t_A), q(t_A)) = \mathcal{O}_A(q(t_A))$
- Problem: Kann Formel für Gauss-Integration nicht verwenden, wenn π -abhängige Koeffizienten vor der \exp -Funktion stehen
 - Lösung: Könnte p -abhängige Koeffizienten als Ableitung der \exp -Funktion schreiben und nach Anwendung der Gauss-Integral-Formel das Ergebnis wieder ableiten (Feynman-Trick)
 - Beschränkung auf q -abhängige Operatoren ist nicht schlimm, da man \dot{q} als Differenzenquotient darstellen und damit rechnen kann
 - Alternativ: Leite die Formel mit q -abhängigen Operatoren nach τ ab und erhalte damit \dot{q} -abhängige Operatoren aus der Lagrangefunktion

5. Typische Feldtheorie-Notation verwenden: $\langle f, \infty | T\{\mathcal{O}_A(\phi(t_A)) \cdots\} | i, -\infty \rangle$
- $$\propto \int \left(\prod_{\tau, \vec{x}, k} d\phi_k(\vec{x}, \tau)\right) (\det(2\pi i \mathcal{A}[\phi]))^{-1/2} \exp\left\{i \int d\tau \left(L(\phi(\tau), \dot{\phi}(\tau)) + i\epsilon \text{ terms}\right)\right\} \mathcal{O}_A(\phi(t_A)) \cdots$$

- Wende oben vorgestellte Notation an, nachdem die Rechnungen durchgeführt wurden

- Kurznotation: $\langle f, \infty | T \{ \mathcal{O}_A(\phi(t_A)) \cdots \} | i, -\infty \rangle \propto \int \mathcal{D}\phi e^{iS[\Phi]} \mathcal{O}_A(\phi(t_A)) \cdots$
 - Abkürzung für Differential $\mathcal{D}\phi := \left(\prod_{\tau, \vec{x}, k} d\phi_k(\vec{x}, \tau) \right) (\det(2\pi i \mathcal{A}[\phi]))^{-1/2}$
 - * Könnte den Determinanten-Term auch nicht in $\mathcal{D}\phi$ redefinieren, das würde aber die Notation unhandlicher machen
 - Abkürzung für Wirkung $S[\Phi] = \int d\tau (L(\phi(\tau), \dot{\phi}(\tau)) + i\epsilon \text{ terms}) = \int d^4x (\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) + i\epsilon \text{ terms})$
 - * In \mathcal{L} muss noch über d^3x integriert werden, daher können auch räumliche Ableitungen auftauchen \Rightarrow Schreibe $\partial_\mu \phi$ statt nur $\dot{\phi} = \partial_t \phi$

4.2.3 Fermionisches Pfadintegral in der Quantenmechanik

- Betrachte System mit fermionischen Orts- und Impulsoperatoren $\{Q_a, P_b\} = i\delta_{ab}, \{Q_a, Q_b\} = \{P_a, P_b\} = 0$
 - In physikalischen Anwendungen hängen Q_a und P_a oft zusammen, das muss in der Rechnung aber nicht vorausgesetzt werden
 - * Bsp: Für Dirac-Spinoren gilt $\pi = i\psi^\dagger$ bzw P_a ist die Adjungierte von Q_a
 - Achtung: Wegen Antikommutator-Eigenschaft ist $(\langle a |)^\dagger = |a\rangle$ nicht mehr trivial bzw man muss Bras und Kets getrennt behandeln
 - * Muss streng genommen immer Bras und Kets getrennt behandeln, aber in den meisten Fällen verhalten sie sich wie $(\langle a |)^\dagger = |a\rangle$
1. Definition der Vakuum-Zustände $|0\rangle, \langle 0|$ mit $Q_a|0\rangle = 0, \langle 0|P_a = 0$
 - Konstruiere explizit $|0\rangle \propto (\prod_a Q_a) |f\rangle, \langle 0| \propto \langle g| (\prod_a P_a)$
 - Wegen $P_a^2 = Q_a^2 = 0$ erhält man automatisch $Q_a|0\rangle = 0, \langle 0|P_a = 0$
 - * Explizit: $2P_a^2 = \{P_a, P_a\} = 0$
 - Wähle für $|f\rangle, \langle g|$ irgendwelche Zustände, sodass $|0\rangle, \langle 0|$ nicht verschwindet
 - Normiere die beiden Zustände mit $\langle 0|0\rangle = 1$
 - Achtung: Definition des Vakuums ist nicht-trivial
 - $Q_a|0\rangle = 0, \langle 0|Q_a = 0$ geht schief wegen $i\delta_{ab}\langle 0|0\rangle = \langle 0|\{Q_a, P_b\}|0\rangle = \langle 0|Q_a P_b|0\rangle + \langle 0|P_b Q_a|0\rangle = 0$ und damit $\langle 0|0\rangle = 0$
 2. Basis für Zuständen ausgehend von $|0\rangle, \langle 0|$: $\langle a, b, \dots | := P_a P_b \cdots |0\rangle, \langle a, b, \dots | := \langle 0| \cdots (-iQ_b)(-iQ_a)$ mit $a \neq b \neq \dots$
 - Falls mehrere Indizes in a, b, \dots gleich sind, verschwindet der Zustand wegen $Q_a^2 = 0$
 - Basis ist sinnvoll, da man mit Q_a, P_a alle Zustände erzeugen und vernichten kann
 - Kets: P_a erzeugt Zustände $P_a|b, c, \dots\rangle = |a, b, c, \dots\rangle$ (Definition) vs $-iQ_a$ vernichtet Zustände $Q_a|a, b, c, \dots\rangle = |b, c, \dots\rangle$ (wegen $\{Q_a, P_a\} = i$)
 - Bras: Q_a erzeugt Zustände $\langle b, c, \dots | (-iQ_a) = \langle a, b, c, \dots |$ vs P_a vernichtet Zustände $\langle a, b, c, \dots | P_a = \langle b, c, \dots |$
 - Zustände sind normiert $\langle a, \dots | b, \dots \rangle = \begin{cases} 0 & \{a, \dots\} \neq \{b, \dots\} \\ 1 & \{a, \dots\} = \{b, \dots\} \end{cases}$
 - Begründung: $\langle a, \dots | b, \dots \rangle = \langle 0| \cdots (-iQ_a) P_b \cdots |0\rangle$, verwende $Q_a|0\rangle = 0, \langle 0|P_a = 0, \{Q_a, P_b\} = i\delta_{ab}$
 3. Eigenzustände und Eigenwerte von X_a : $X_a|x\rangle = x_a|x\rangle, \langle x|X_a = \langle x|x_a$ mit $x \in \{p, q\}, X \in \{P, Q\}$
 - Eigenwerte sind Grassmann-Zahlen
 - $0 = \{Q_a, Q_b\}|q\rangle = (Q_a Q_b + Q_b Q_a)|q\rangle = (q_a q_b + q_b q_a)|q\rangle \Rightarrow q_a q_b + q_b q_a = 0$ bzw $q_a q_b = -q_b q_a$, das ist die definierende Eigenschaft von Grassmannzahlen
 - Definiere Eigenzustände von Q_a und P_a : $|q\rangle := e^{-i \sum_a P_a q_a} |0\rangle, \langle q| := \langle 0| (\prod_a Q_a) e^{-i \sum_b q_b P_b}$ und $|p\rangle := e^{-i \sum_a Q_a p_a} (\prod_a P_a) |0\rangle, \langle p| := \langle 0| e^{-i \sum_a p_a Q_a}$
 - Produkt \prod_a von Operatoren oder Zahlen reiht Terme in einer beliebigen aber festen Reihenfolge aneinander

- Ausführlich: $(Q_a - q_a)|q\rangle = (Q_a - q_a)e^{-i\sum_b P_b q_b}|0\rangle = (Q_a - q_a)e^{-iP_a q_a}e^{-i\sum_{b\neq a} P_b q_b}|0\rangle = (Q_a - q_a)(1 - iP_a q_a)e^{-i\sum_{b\neq a} P_b q_b}|0\rangle (Q_a - q_a - iP_a q_a + iP_a q_a)e^{-i\sum_{b\neq a} P_b q_b}|0\rangle = (-i\{Q_a, P_a\}q_a - q_a)e^{-i\sum_{b\neq a} P_b q_b}|0\rangle = (q_a - q_a)e^{-i\sum_{b\neq a} P_b q_b}|0\rangle = 0$
 - * Verwende $e^x = 1 + x$ für Grassmann-Zahlen x wegen $x^2 = -x^2 = 0$
 - * $Q_a|0\rangle = 0 \Rightarrow Q_a e^{\dots}|0\rangle = 0$, addiere $0 = iP_a Q_a q_a e^{\dots}|0\rangle$
 - * Rechnung funktioniert analog für $P_a|p\rangle = p_a|p\rangle$

- Skalarprodukt gleicher Zustände $\langle q'|q\rangle = \prod_a (q_a - q'_a)$, $\langle p'|p\rangle = \prod_a (p'_a - p_a)$
 - Ausführlich: $\langle q'|q\rangle = \langle q'|(\prod_a Q_a)e^{i\sum_b P_b (q'_b - q_b)}|0\rangle = \langle 0|(\prod_a Q_a)(\prod_b (1 + iP_b (q'_b - q_b)))|0\rangle = \prod_a (q_a - q'_a)$
 - Verwende im letzten Schritt $Q_a|0\rangle = 0$ und $Q_a P_b = i\delta_{ab} - P_b Q_a \Rightarrow$ Aus den beiden Produkten (über a und b) überlebt nur der Term mit $a = b$
- Skalarprodukt verschiedener Zustände $\langle p|q\rangle = \prod_a e^{-ip_a q_a}$, $\langle q|p\rangle = \chi_N \prod_a e^{-iq_a p_a}$ mit $\chi_N = i^N (-1)^{N(N-1)/2}$
 - $\langle p|q\rangle = \langle 0|e^{-i\sum_a p_a Q_a}|q\rangle = e^{-i\sum_a p_a q_a}\langle 0|q\rangle = e^{-i\sum_a p_a q_a}\langle 0|e^{-i\sum_b P_b q_b}|0\rangle = e^{-i\sum_a p_a q_a} = \prod_a e^{-ip_a q_a}$ wegen $Q_a|0\rangle = 0$
 - $\langle q|p\rangle = \langle q|e^{-i\sum_a Q_a p_a}(\prod_b P_b)|0\rangle = e^{-i\sum_a q_a p_a}\langle q|(\prod_b P_b)|0\rangle = e^{-i\sum_a q_a p_a}\langle 0|(\prod_b Q_b)e^{-i\sum_c q_c P_c}(\prod_d P_d)|0\rangle = e^{-i\sum_a q_a p_a}\langle 0|(\prod_b Q_b)(\prod_c (1 - iq_c P_c))(\prod_d P_d)|0\rangle = e^{-i\sum_a q_a p_a}\langle 0|(\prod_b Q_b)(\prod_c P_c)|0\rangle = \chi_N \prod_a e^{-iq_a p_a}$
 - * $-i\sum_c q_c P_c$ -Term verschwindet im Matrixelement wegen $\langle 0|P_a = 0$, da er ein zusätzliches P_a hat, das später nicht wegkommutiert werden kann
 - * $\chi_N = \langle 0|(\prod_a Q_a)(\prod_b P_b)|0\rangle = i^N (-1)^{\sum_{k=1}^N k} = i^N (-1)^{N(N-1)/2}$: Kommutiere alle Q_a nach rechts und alle P_a nach links und verwende $Q_a|0\rangle = 0$, $\langle 0|P_a = 0 \Rightarrow$ Nur die i -Faktoren (N Stück, also i^N) aus $\{Q_a, P_a\} = i$ überleben, bekomme Minus-Vorzeichen (k beim k -ten mal durchkommutieren $\Rightarrow (-1)^{\sum_{k=1}^N k} = (-1)^{N(N-1)/2}$)

4. Definition von Berezin-Integration: $\int (\tilde{\prod}_a dx_a) f(x) = c$ mit $f(x) = (\prod_a x_a)^c + \text{Terme mit weniger } x_a\text{-Faktoren}$

- Das ist eine nützliche Art, über Grassmann-Zahlen zu integrieren (man kann sich auch andere Definitionen ausdenken)
- $\tilde{\prod}$ -Notation: Produkte $\tilde{\prod}$ über Differentiale werden in der entgegengesetzten Ordnung geschrieben wie Produkte \prod über normale Variablen
 - Damit ist das Integral antisymmetrisch und die Differentiale dx_a sind auch Grassmann-Zahlen
- Koeffizienten c können auch Grassmann-Zahlen sein, die mit den Integrationsvariablen x_a antikommutieren \Rightarrow Wichtig, dass die Position von c in $f(x)$ festgelegt wird
- Berezin-Integration ist linear (Summe, Faktor von links und rechts)
- Bsp: Integrale einer Funktion mit zwei Grassmann-Variablen $f(x_1, x_2) = x_1 x_2 c_{12} + x_1 c_1 + x_2 c_2 + d$
 - $\int dx_2 dx_1 f(x_1, x_2) = c_{12}$, $\int dx_1 f(x_1, x_2) = x_2 c_{12} + c_1$, $\int dx_1 f(x_1, x_2) = -x_1 c_{12} + c_2$
- Verschiebung um eine Konstante ändert nichts $\int (\tilde{\prod}_a dx_a) f(x + x') = \int (\tilde{\prod}_a dx_a) f(x)$
 - Begründung: Konstante Verschiebung $x \rightarrow x + x'$ verändert nur Terme in $f(x)$, die nicht die maximale Anzahl an x -Faktoren haben und daher für das Integral egal sind
- Substitutionsregel $\int (\tilde{\prod}_a dx'_a) f = (\det \mathcal{S})^{-1} \int (\tilde{\prod}_a dx_a) f$ für $x'_a = \sum_b \mathcal{S}_{ab} x_b$
 - Bedingung: Transformationsmatrix \mathcal{S} muss invertierbar sein bzw $\det \mathcal{S} \neq 0$
 - Das ist die Substitutionsregel für normale Zahlen, aber mit $(\det \mathcal{S})^{-1}$ statt $(\det \mathcal{S})^1$
- (a) Für Produkt von Variablen gilt $\prod_a x'_a = \sum_{b_1, b_2, \dots} \prod_a \mathcal{S}_{ab_a} x_{b_a} = (\sum_{b_1, b_2, \dots} (\prod_a \mathcal{S}_{ab_a}) \epsilon_b) \prod_a x_a = (\det \mathcal{S}) \prod_a x_a$ mit Faktor $\epsilon_b = +1/-1$ für gerade/ungerade Permutation der Indizes $a \rightarrow b_a$ und der Definition der Determinante $\det \mathcal{S} = \sum_{b_1, b_2, \dots} \epsilon_b (\prod_a \mathcal{S}_{ab_a})$
- (b) Funktion transformiert sich als $f(x') = (\prod_a x'_a) c + \dots = (\det \mathcal{S}) (\prod_a x_a) c + \dots = (\det \mathcal{S}) f(x)$
- (c) Integral $\int (\tilde{\prod}_a dx_a) f(x)$ soll invariant unter der Substitution sein bzw $\int (\tilde{\prod}_a dx_a) f(x) = \int (\tilde{\prod}_a dx'_a) f(x') \Rightarrow \tilde{\prod}_a dx'_a = (\det \mathcal{S})^{-1} \tilde{\prod}_a dx_a$

5. Vollständigkeitsrelationen $1 = \int |q\rangle (\tilde{\prod}_a - dq_a) \langle q|$, $1 = \int |p\rangle (\tilde{\prod}_a dp_a) \langle p|$

- Rechnung hier nur für die $|q\rangle$ -Eigenzustände, funktioniert analog für die $|p\rangle$

- (a) Kann Zustände $|f\rangle$ entwickeln: $|f\rangle = \int (\tilde{\Pi}_a dq_a) |q\rangle f(q)$
- Idee: Kann jeden Zustand $|f\rangle$ als Superposition von Zuständen in $|q\rangle = e^{-i \sum_a P_a q_a} |0\rangle = \prod_a (1 - i P_a q_a) |0\rangle$ schreiben
 - Zustände werden durch P_a erzeugt, $|q\rangle$ enthält alle möglichen Kombinationen von P_a
 - Problem: Benötige für beliebige Zustände $|f\rangle$ noch Koeffizienten, mit denen die Objekte in $|q\rangle$ gewichtet werden
 - Lösung: Definiere Funktion $f(q)$ mit passenden Koeffizienten und gewichte Zustände $|q\rangle$ mit den Koeffizienten $f(q)$ durch Berezin-Integration
 - Erleuchtendes Bsp: $a \in \{1, 2\}$
 - $f(q)$ hat die allgemeine Form $f(q) = q_1 q_2 c_{12} + q_1 c_1 + q_2 c_2 + c$
 - $|q\rangle = e^{-i \sum_a P_a q_a} |0\rangle = \prod_a (1 - i P_a q_a) |0\rangle = (1 - i P_1 q_1 - i P_2 q_2 - P_1 q_1 P_2 q_2) |0\rangle$
 - Aufsammeln $\int (\tilde{\Pi}_a dq_a) |q\rangle f(q) = \int dq_2 dq_1 (1 - i P_1 q_1 - i P_2 q_2 - P_1 q_1 P_2 q_2) |0\rangle (q_1 q_2 c_{12} + q_1 c_1 + q_2 c_2 + c)$
 $= \int dq_2 dq_1 (1 + i q_1 P_1 + i q_2 P_2 - q_1 q_2 P_2 P_1) (q_1 q_2 c_{12} + q_1 c_1 + q_2 c_2 + c) |0\rangle$
 - Produkt ausmultiplizieren und nur Terme behalten, die nicht im Integral verschwinden (also Term $\propto q_1 q_2$) $\dots = \int dq_2 dq_1 (q_1 q_2 c_{12} - i q_1 q_2 P_1 c_2 + i q_1 q_2 P_2 c_1 + q_1 q_2 P_1 P_2 c) |0\rangle$
 - Integral berechnen $\dots = (c_{12} - i P_1 c_2 + i P_2 c_1 + P_1 P_2 c) |0\rangle = c_{12} |0\rangle - i c_2 |1\rangle + i c_1 |2\rangle - c |1, 2\rangle$
 \Rightarrow Finde allgemeinen Zustand $|f\rangle$
- (b) Multipliziere Entwicklungsgleichung mit einem Bra $\langle q' | \Rightarrow \langle q' | f \rangle = \int (\tilde{\Pi}_a - dq_a) (\prod_b (q_b - q'_b)) f(q')$
- Kann $|q\rangle$ im Ausdruck beliebig verschieben, da $|q\rangle = e^{-i \sum_a P_a q_a} |0\rangle$ eine gerade Anzahl antikommutierender Größen enthält $\Rightarrow \langle q' | f \rangle = \langle q' | \int (\tilde{\Pi}_a dq_a) |q\rangle f(q) = \int \langle q' | q \rangle (\tilde{\Pi}_a dq_a) f(q)$
 - Verwende Skalarprodukt der Zustände $\langle q' | q \rangle = \prod_a (q_a - q'_a) \Rightarrow \dots = \int (\prod_a (q_a - q'_a)) (\tilde{\Pi}_a dq_a) f(q) = \int (\tilde{\Pi}_a - dq_a) (\prod_a (q_a - q'_a)) f(q)$
 - Entwickle $f(q) = f(q' + (q - q'))$ in $(q - q')$: $(\prod_a (q_a - q'_a)) f(q) = (\prod_a (q_a - q'_a)) (f(q') + f(q')(q - q') + \dots) = (\prod_a (q_a - q'_a)) f(q')$, da höhere Terme in der Entwicklung verschwinden wegen $q_a^2 = 0$
- (c) Berechne $\langle q' | f \rangle = \int (\tilde{\Pi}_a - dq_a) (\prod_b (q_b - q'_b)) f(q')$ durch direkte Integration $\Rightarrow \langle q' | f \rangle = (-1)^N f(q')$
- $\langle q' | f \rangle = \int (\tilde{\Pi}_a - dq_a) (\prod_b (q_b - q'_b)) f(q') = (-1)^N \int (\tilde{\Pi}_a dq_a) (\prod_b q_b + \dots) f(q') = (-1)^N f(q')$, weil alle Terme aus $\prod_a (q_a - q'_a)$ außer $\prod_a q_a$ nicht die maximale Anzahl an q_a s enthält und daher im Integral verschwindet
- (d) Setze $f(q) = (-1)^N \langle q | f \rangle$ in Ausgangsgleichung ein $\Rightarrow |f\rangle = \int |q\rangle (\tilde{\Pi}_a dq_a) f(q) = (-1)^N \int |q\rangle (\tilde{\Pi}_a dq_a) \langle q | f \rangle$ bzw in Operatornotation $1 = \int |q\rangle (\tilde{\Pi}_a - dq_a) \langle q |$

6. Verwende Heisenbergbild für Zeitentwicklung

- Definiere analog zum bosonischen Fall $X_a(t) := e^{iHt} X_a e^{-iHt}$, $|x, t\rangle := e^{iHt} |x\rangle$, $\langle x, t| := \langle x| e^{-iHt}$ mit $x \in \{q, p\}$, $X \in \{Q, P\}$
- Definiere Hamilton-Operator $H(P, Q)$ so, dass alle P -Operatoren nach links und alle Q -Operatoren nach rechts kommutiert sind und dass die Produkte von P - und Q -Operatoren einzeln auch eine feste Reihenfolge haben
- Jeder Term im Hamiltonian muss eine gerade Anzahl antikommutierender Operatoren P, Q enthalten, da sonst Kommutatorrelationen mit anderen Observablen (Drehimpuls etc) keinen Sinn machen

7. Übergangsamplituden und Matrixelemente prinzipiell gleich wie bei bosonischen Feldern

- Muss in den Rechnungen mit zusätzlichen Minuszeichen aufpassen, aber die prinzipiellen Schritte sind dieselben
- Infinitesimale Übergangsamplitude $\langle q', t+dt | q, t \rangle = \langle q' | e^{-iHdt} | q \rangle = \langle q' | \left(\int |p\rangle (\tilde{\Pi}_a dp_a) \langle p| \right) e^{-iH(P,Q)dt} | q \rangle = \int \langle q' | p \rangle (\tilde{\Pi}_a dp_a) \langle p | q \rangle e^{-iH(p,q)dt} = i^N \int (\tilde{\Pi}_a dp_a) e^{i \sum_a p_a (q'_a - q_a) - iH(p,q)dt}$
- Makroskopische Übergangsamplituden und mikroskopische Matrixelemente nach gewohntem Schema
- Makroskopische Matrixelemente $\langle q', t' | T \{ \mathcal{O}_A(P(t_A), Q(t_A)) \dots \} | q, t \rangle$
 $= (-i)^n \chi_N \int_{q_a(t)=q_a}^{q_a(t')=q'_a} (\tilde{\Pi}_a dq_a(\tau) dp_a(\tau)) \mathcal{O}_A(p(t_A), q(t_A)) \dots \exp \left\{ i \int_t^{t'} d\tau (\sum_a p_a(\tau) \dot{q}_a(\tau) - H(p(\tau), q(\tau))) \right\}$
 - Bekomme Vorfaktoren $(-1)^N$ (von $-dq_a$ in Vollständigkeitsrelation), i^N (?) und χ_N (aus $\langle q | p \rangle$)
 - Vorfaktor ist gleich für alle Matrixelemente und spielt daher in Observablen keine Rolle

4.2.4 Fermionisches Pfadintegral in der Quantenfeldtheorie

1. Übergang und Zusatzfaktor analog zu bosonischen Feldern

- Analog: Quantenfeldtheorie ist Quantenmechanik mit unendlich vielen Freiheitsgraden \Rightarrow Führe Multiindex $a = (\vec{x}, m, s, i)$ ein und kann Feld-Operatoren definieren
- Erhalte wieder zusätzliche $i\epsilon$ -Terme in \exp für Matricelemente von asymptotischen Zuständen

2. Übergang zum Lagrange-Formalismus(trivial)

- Muss für fermionische Felder nicht die dp_a -Integration ausführen, um die Lagrangefunktion zu erhalten
 - Ausdruck $\int d^3x \sum_a p_a \dot{q}_a - H(p, q) = L(q, \dot{q})$ ist einfach die Lagrangefunktion
 - * Einzige \dot{q} -Abhängigkeit in $L(q, \dot{q})$ kommt durch $\int d^3x \sum_a p_a \dot{q}_a$
 - * Schreibe $L(q, \dot{q})$ statt $L(p, q, \dot{q})$, da $p \propto \dot{q}^\dagger$ ist
 - Grund: Für Fermionen hängen Impuls-Eigenwerte $p_a(t)$ nicht mit $\dot{q}_a(t)$ zusammen, sondern sind proportional zu $q_a^\dagger(t)$
 - * Anschaulich: Fermionische Felder sind im Gegensatz zu bosonischen Feldern immer komplex \Rightarrow Benötige keine Ableitungen von Feldern, um zwei unabhängige Freiheitsgrade $p_a(t), q_a(t)$ zu bekommen
- Hier dürfen daher die \mathcal{O} -Operatoren auch von den P_a abhängen

3. Typische Feldtheorie-Notation verwenden: $\langle f, \infty | T \{ \mathcal{O}_A(\phi(t_A), \pi(t_A)) \cdots \} | i, -\infty \rangle$

$$\propto \int \left(\prod_{\tau, \vec{x}, k} d\phi_k(\vec{x}, \tau) d\pi_k(\vec{x}, \tau) \right) \mathcal{O}_A(\phi(t_A), \pi(t_A)) \cdots \exp \left\{ i \int d\tau (L(\pi(\tau), \phi(\tau)) + i\epsilon \text{ terms}) \right\}$$

- Kurznotation: $\langle f, \infty | T \{ \mathcal{O}_A(\pi(t_A), \phi(t_A)) \cdots \} | i, -\infty \rangle \propto \int \mathcal{D}\phi \mathcal{O}_A(\phi(t_A)) \cdots e^{iS[\Phi]}$
 - Abkürzung für Differential $\mathcal{D}\phi := \prod_{\tau, \vec{x}, k} d\phi_k(\vec{x}, \tau) d\pi_k(\vec{x}, \tau)$
 - Abkürzung für Wirkung $S[\Phi] := \int d\tau (L(\phi, \dot{\phi}) + i\epsilon \text{ terms}) = \int d^4x (\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) + i\epsilon \text{ terms})$
- Interpretation des Ergebnisses $\langle f | T \{ \mathcal{O}_A(\phi(t_A), \pi(t_A)) \cdots \} | i \rangle \propto \int \mathcal{D}\phi e^{iS[\Phi]} \mathcal{O}_A(\phi(t_A), \pi(t_A)) \cdots$
 - Notiz: Triviale Jacobi-Determinante für Fermion-Felder (kein \mathcal{A} -Term)

4.2.5 Fazit: Pfadintegral für eine generische Quantenfeldtheorie

- Pfadintegral konstruieren
 - Argument: Mache "Superposition" der obigen Beschreibung für alle Felder der Theorie \Rightarrow Erhalte Differentiale $\mathcal{D}\phi$ für alle Felder und erhalte die klassische Wirkung $S[\Phi]$ im Exponent des Pfadintegrals
 - Notation: $\mathcal{D}\Phi = \prod \mathcal{D}\phi$ ist Pfadintegral-Differential für alle Felder
 - Zusätzliche Komplikationen
 - * Eichtheorie: Muss sicherstellen, dass Eichfelder die richtige Anzahl an Freiheitsgraden haben \Rightarrow Erhalte zusätzliche Terme im Lagrangian und Ghost-Felder

4.2.6 Bonus: Zusatzfaktor $\langle 0, \infty | \phi(\infty), \infty \rangle \langle \phi(-\infty), -\infty | i, -\infty \rangle$ für ein skalares Feld bestimmen

- Startbedingung: Vakuum-Zustände erfüllen die Bedingung $a_{\vec{p}} |0, \pm\infty\rangle = 0$ für alle Felder der Theorie
1. Drücke a durch Felder ϕ, π aus, indem ich die Fourierdarstellung der Felder invertiere
 - Für $t \rightarrow \pm\infty$ erhält man Felder der freien Theorie(asymptotische Zustände sind frei) \Rightarrow Es gilt $\pi = \partial_t \phi$
 - Finde $a_{\vec{k}} = e^{iE_{\vec{k}}t} \int d^3x \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{k}}}} e^{-i\vec{k}\vec{x}} (E_{\vec{k}}\phi(\vec{x}) + i\pi(\vec{x}))$ mit Feldoperatoren ϕ, π
 2. Finde Startbedingung für Felder: $0 = \int d^3x e^{-i\vec{k}\vec{x}} \left(E_{\vec{k}}\phi(\vec{x}) + \frac{\delta}{\delta\phi(\vec{x})} \right) \langle \phi(\pm\infty), \pm\infty | 0, \pm\infty \rangle$

- Ausführlich: $0 = \langle \phi(\pm\infty), \pm\infty | 0, \pm\infty \rangle = \int d^3x \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{k}}}} e^{-i\vec{k}\vec{x}} \langle \phi(\pm\infty), \pm\infty | E_{\vec{k}}\phi(\vec{x}) + i\pi(\vec{x}) | 0, \pm\infty \rangle$
 $= \int d^3x \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{k}}}} e^{-i\vec{k}\vec{x}} \left(E_{\vec{k}}\phi(\vec{x}) + \frac{\delta}{\delta\phi(\vec{x})} \right) \langle \phi(\pm\infty), \pm\infty | 0, \pm\infty \rangle$
- Benutze im letzten Schritt die Eigenwertgleichungen der Operatoren $\phi(\vec{x}), \pi(\vec{x})$ für die ϕ -Eigenzustände: $\phi(\vec{x})|\phi, t\rangle = \phi(\vec{x})|\phi, t\rangle, \pi(\vec{x})|\phi, t\rangle = -i\frac{\delta}{\delta\phi(\vec{x})}|\phi, t\rangle$

3. Gaussansatz $\langle \phi(\pm\infty), \pm\infty | 0, \pm\infty \rangle = N \exp \left(-\frac{1}{2} \int d^3x d^3y \mathcal{E}(\vec{x}, \vec{y}) \phi(\vec{x}) \phi(\vec{y}) \right) =: F[\phi]$
 \Rightarrow Bedingung für Parameter $\mathcal{E}(\vec{x}, \vec{y})$: $0 = \int d^3x e^{-i\vec{k}\vec{x}} \left(E_{\vec{k}}\phi(\vec{x}) - \int d^3y \mathcal{E}(\vec{x}, \vec{y}) \phi(\vec{y}) \right)$

- Motivation: Startbedingung erinnert an DGL $(\partial_x - ax)y(x) = 0$ mit Lösung $y(x) = Ne^{-\frac{1}{2}ax^2}$
- Bedingung herleiten: $0 = \int d^3x e^{-i\vec{k}\vec{x}} \left(E_{\vec{k}}\phi(\vec{x}) + \frac{\delta}{\delta\phi(\vec{x})} \right) F[\phi]$
 $= \int d^3x e^{-i\vec{k}\vec{x}} \left(E_{\vec{k}}\phi(\vec{x}) - \frac{1}{2} \int d^3y d^3z \mathcal{E}(\vec{y}, \vec{z}) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \phi(\vec{z}) - \frac{1}{2} \int d^3y d^3z \mathcal{E}(\vec{y}, \vec{z}) \phi(\vec{y}) \delta^3(\vec{x} - \vec{z}) \right) F[\phi]$
 $= \int d^3x e^{-i\vec{k}\vec{x}} \left(E_{\vec{k}}\phi(\vec{x}) - \int d^3y \mathcal{E}(\vec{x}, \vec{y}) \phi(\vec{y}) \right) F[\phi] \Rightarrow 0 = \int d^3x e^{-i\vec{k}\vec{x}} \left(E_{\vec{k}}\phi(\vec{x}) - \int d^3y \mathcal{E}(\vec{x}, \vec{y}) \phi(\vec{y}) \right)$
- Verwende Kurznotation $\phi(\vec{x})$ für $\phi(\vec{x}, t = \pm\infty)$, um Platz zu sparen
- Normierungskonstante N kürzt sich in Observablen und wird daher nicht weiter benötigt (könnte N aber aus Normierungsbedingung des Vakuums bestimmen)

4. Parameter $\mathcal{E}(\vec{x}, \vec{y})$ bestimmen $\mathcal{E}(\vec{x}, \vec{y}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} e^{i\vec{p}(\vec{y}-\vec{x})}$

- Bedingung umformulieren in $e^{-i\vec{k}\vec{x}} E_{\vec{k}} = \int d^3y e^{-i\vec{k}\vec{y}} \mathcal{E}(\vec{y}, \vec{x})$:
 $\int d^3x d^3y e^{-i\vec{k}\vec{x}} \mathcal{E}(\vec{x}, \vec{y}) \phi(\vec{y}) \stackrel{\vec{x} \leftrightarrow \vec{y}}{=} \int d^3x \phi(\vec{x}) \int d^3y e^{-i\vec{k}\vec{y}} \mathcal{E}(\vec{y}, \vec{x})$
 $\Rightarrow 0 = \int d^3x e^{-i\vec{k}\vec{x}} \left(E_{\vec{k}}\phi(\vec{x}) - \int d^3y \mathcal{E}(\vec{x}, \vec{y}) \phi(\vec{y}) \right) = \int d^3x \phi(\vec{x}) \left(e^{-i\vec{k}\vec{x}} E_{\vec{k}} - \int d^3y e^{-i\vec{k}\vec{y}} \mathcal{E}(\vec{y}, \vec{x}) \right)$
- Bedingung lösen mit Fouriertransformation bzw $\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\vec{z}}$ auf jeder Seite:
 $\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\vec{z}} \int d^3y e^{-i\vec{k}\vec{y}} \mathcal{E}(\vec{y}, \vec{x}) = \int d^3y \mathcal{E}(\vec{y}, \vec{x}) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}(\vec{z}-\vec{y})} = \int d^3y \mathcal{E}(\vec{y}, \vec{x}) \delta^3(\vec{y} - \vec{z}) = \mathcal{E}(\vec{z}, \vec{x})$
 $\stackrel{!}{=} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}(\vec{z}-\vec{x})} E_{\vec{k}}$

5. Verwende Ergebnis für $\langle \phi(\pm\infty), \pm\infty | 0, \pm\infty \rangle$, um den Zusatzfaktor zu bestimmen:

$$\langle 0, \infty | \phi(\infty), \infty \rangle \langle \phi(-\infty), -\infty | i, -\infty \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} |N|^2 \exp \left(-\frac{\epsilon}{2} \int d^3x d^3y d\tau \mathcal{E}_k(\vec{x}, \vec{y}) \phi_k(\vec{x}, \tau) \phi_k(\vec{y}, \tau) e^{-\epsilon|\tau|} \right)$$

- Ergebnis für $\langle \phi(\pm\infty), \pm\infty | 0, \pm\infty \rangle$ einsetzen:
 $\langle \phi(\pm\infty), \pm\infty | 0, \pm\infty \rangle = |N|^2 \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^3x d^3y \mathcal{E}(\vec{x}, \vec{y}) (\phi(\vec{x}, \infty) \phi(\vec{y}, \infty) + \phi(\vec{x}, -\infty) \phi(\vec{y}, -\infty)) \right\}$
- Verwende Relation $f(\infty) + f(-\infty) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \epsilon \int d\tau f(\tau) e^{-\epsilon|\tau|}$ für $f(t) = \phi(\vec{x}, t) \phi(\vec{y}, t)$
 – Relation gilt für hinreichend stetige Funktionen f

4.3 Matricelemente berechnen

4.3.1 Übersicht

- Zusammenhang Korrelationsfunktionen/Pfadintegral

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \} | \Omega \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\Phi \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) e^{iS[\Phi]}}{\int \mathcal{D}\Phi e^{iS[\Phi]}}$$

1. Ergebnis aus letztem Abschnitt: $\langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \} | \Omega \rangle = N \int \mathcal{D}\Phi \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) e^{iS[\Phi]}$
2. Fordere Normierung $\langle \Omega | \Omega \rangle = 1 \Rightarrow$ Normierungsfaktor $N = \frac{1}{\int \mathcal{D}\Phi e^{iS[\Phi]}}$ festgelegt

4.3.2 Erzeugendes-Funktional-Formalismus

- Typisches Vorgehen

1. Berechne Korrelationsfunktionen, indem ich Funktional-Ableitungen vom erzeugenden Funktional berechne
2. Berechne S -Matrizelemente bzw \mathcal{M} , indem ich Korrelationsfunktionen in LSZ-Formel einsetze

1. Definition Erzeugendes Funktional $Z[J] := \frac{\int \mathcal{D}\Phi \exp \left(iS[\Phi] + i \int d^4x J(x)\Phi(x) \right)}{\int \mathcal{D}\Phi \exp \left(iS_{\text{free}}[\Phi] \right)}$

- Notation: $J(x)\Phi(x)$ ist Kontraktion der Funktionen J und Φ , sodass zu jedem Φ ein J gehört
- Zentraler Kniff: Addiere Quellterme $J(x)\Phi(x)$ (bzw Quellen $J(x)$) zum Lagrangian
- Notiz: Zerlege Wirkung gemäß $S = S_{\text{free}} + S_{\text{int}}$
- Notiz: Theorie ohne WW-Terme $S_{\text{int}} = 0$ hat $Z[0] = 1$

2. Master-Gleichung: $\left\langle \Omega \left| T \{ \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \} \right| \Omega \right\rangle = (-i)^n \frac{\delta^n Z}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0}$

- Herleitung: Relation folgt trivial aus Definition des erzeugenden Funktional und Definition des Pfadintegrals
 - Ausführlich: Leite $Z[J]$ nach Quelltermen $J(x_i)$ ab und setze danach $J \rightarrow 0$
 \Rightarrow Erhalte $\int \mathcal{D}\Phi \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) e^{iS[\Phi]}$, mit den Vorfaktoren findet man die rechte Seite der Gleichung aus dem letzten Abschnitt
- Notation: $J(x_i)$ ist die zum Feld $\phi(x_i)$ gehörende Quelle

3. Drücke erzeugendes Funktional $Z[J]$ durch erzeugendes Funktional der freien Theorie $Z_{\text{free}}[J]$ aus:

$$Z[J] = \exp \left(i \int d^4y \mathcal{L}_{\text{int}} \left[\frac{\delta}{i\delta J(y)} \right] \right) Z_{\text{free}}[J] \text{ mit } \mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{free}} + \mathcal{L}_{\text{int}}$$

- Anschaulich: Reduziere Problem in der WW-Theorie auf Problem in der freien Theorie und (noch mehr) Funktional-Ableitungen
 - Dieser Schritt ist der konzeptionelle Knackpunkt, da er unendlich viele WW-Theorien auf (triviale) Ableitungen und (endlich viele) erzeugende Funktionale freier Theorien $Z_{\text{free}}[J]$ zurückführt
- Formal: Vereinfache Integral, indem ich eine Ableitung identifiziere
 - Selbe Idee wie in $\int dx x e^{\alpha x} = \partial_\alpha \int dx e^x$

4. Berechne erzeugendes Funktional der freien Theorie: $Z_{\text{free}}[J] = \exp \left(A \int d^4x d^4y J(x) \Delta(x, y) J(y) \right), A \in \mathbb{R}$

- Vorgehen: Substituiere Felder im Zähler-Pfadintegral $\Phi(x) = \tilde{\Phi}(x) + \int d^4y \Delta(x, y) J(y)$
 - Achtung Notation: $\mathcal{D}\Phi$ (Pfadintegral-Differential) vs \mathcal{D} (Bewegungsgleichung-Differentialoperator des Felds Φ)
 - Pfadintegral-Differential ist invariant $\mathcal{D}\Phi = \mathcal{D}\tilde{\Phi}$, da die Substitution nur eine Verschiebung ist
 - Motivation für diese Substitution: Erhalte in \mathcal{L}_{int} keine $\tilde{\Phi}/J$ -Kopplungsterme
 - Rechenschritte für die explizite Rechnung (Explizite Beispiele in 4.3.3)
 - (a) Per Konstruktion von $\tilde{\Phi}$ kürzen sich die linearen Terme in $\tilde{\Phi}$ gerade raus
 - (b) Quadratische Terme in $\tilde{\Phi}$ haben exakt dieselbe Form wie $\int \mathcal{D}\tilde{\Phi} e^{iS_{\text{free}}[\tilde{\Phi}]}$ im Nenner \Rightarrow Pfadintegrale kürzen sich raus
 - (c) Übrig bleibt quadratischer Term in J von der Form $\exp \left(A \int d^4x d^4y J(x) \Delta(x, y) J(y) \right), A \in \mathbb{R}$
- Werte für A : $A = \frac{1}{2}$ (reelles Skalarfeld), $A = 1$ (komplexes Skalarfeld), $A = 1$ (Dirac-Fermionfeld), $A = \frac{1}{2}$ (Eichboson-Feld)
- Fazit: Bin das Pfadintegral losgeworden \Rightarrow Kann beliebige Matrizelemente berechnen, indem ich Funktional-Ableitungen $\frac{\delta}{\delta J(x_i)}$ berechne

5. Korrelationsfunktionen berechnen

- Korrelationsfunktionen für freie Theorie
 - Vorfaktor $\exp\left(i \int d^4y \mathcal{L}_{\text{int}}\left[\frac{\delta}{i\delta J(y)}\right]\right)$ in $Z[J]$ ist $= 1 \Rightarrow$ Kann Funktionalableitungen direkt berechnen und erhalte exaktes Ergebnis
- Korrelationsfunktionen für Theorie mit Wechselwirkungs-Termen
 - Vorfaktor $\exp\left(i \int d^4y \mathcal{L}_{\text{int}}\left[\frac{\delta}{i\delta J(y)}\right]\right)$ in $Z[J]$ verschwindet nicht \Rightarrow Entwickle Vorfaktor in einer kleinen Kopplungskonstanten
 - * Entwicklung in kleiner Kopplungskonstanten liefert zusätzliche $\frac{\delta}{i\delta J(x_i)}$ -Ableitungen

• Anmerkungen

- Erzeugendes Funktional für zusammenhängende Korrelationsfunktionen ist $W[J] = -i \log Z[J]$ bzw $Z[J] = e^{iW[J]}$
 - * Freie Theorie: $W[J] = -i \log \exp\left(A \int d^4x d^4y J(x) \Delta(x, y) J(y)\right) = -iA \int d^4x d^4y J(x) \Delta(x, y) J(y)$
 - Korrelationsfunktionen aus diesem erzeugenden Funktional verschwinden nur dann nicht, wenn 2 Felder beteiligt sind \Rightarrow Interpretation als “Erzeugendes Funktional für zusammenhängende Korrelationsfunktionen” passt
 - * WW-Theorie: Keine Vereinfachung für $W[J]$ möglich (?)
 - * Formaler Beweis: TTP2 2020/21 Aufgabe 10.1

4.3.3 Erzeugendes Funktional der freien Theorie $Z_{\text{free}}[J]$ für typische Felder

- Reelles Skalarfeld: $Z_{\text{free}}[J] = \exp\left(\frac{1}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta(x, y) J(y)\right)$
 - Explizit: $\mathcal{L}_{\text{free}}\left[\tilde{\varphi}(x) + \int d^4y \Delta(x, y) J(y)\right] + \left(\tilde{\varphi}(x) + \int d^4y \Delta(x, y) J(y)\right) J(x)$

$$= -\frac{1}{2} \left(\tilde{\varphi}(x) + \int d^4y \Delta(x, y) J(y)\right) \mathcal{D} \left(\tilde{\varphi}(x) + \int d^4z \Delta(x, z) J(z)\right) + \left(\tilde{\varphi}(x) + \int d^4y \Delta(x, y) J(y)\right) J(x)$$

$$= -\frac{1}{2} \tilde{\varphi}(x) \mathcal{D} \tilde{\varphi}(x) - \frac{1}{2} \int d^4y \left(\tilde{\varphi}(x) \mathcal{D} \Delta(x, y) J(y) + \Delta(x, y) J(y) \mathcal{D} \tilde{\varphi}(x)\right) + \tilde{\varphi}(x) J(x)$$

$$- \frac{1}{2} \int d^4y d^4z \Delta(x, y) J(y) \mathcal{D} \Delta(x, z) J(z) + \int d^4y J(x) \Delta(x, y) J(y)$$

$$= -\frac{1}{2} \tilde{\varphi}(x) \mathcal{D} \tilde{\varphi}(x) + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1\right) \tilde{\varphi}(x) J(x) + \left(-\frac{1}{2} + 1\right) \int d^4y J(x) \Delta(x, y) J(y)$$

$$= \mathcal{L}_{\text{free}}[\tilde{\varphi}] + \frac{1}{2} \int d^4y J(x) \Delta(x, y) J(y)$$
 - * Verwende Abkürzungen $\mathcal{D} = \partial^2 + m^2$, $\Delta(x, y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i0} e^{ip(x-y)}$
- Komplexes Skalarfeld: $Z_{\text{free}}[J, J^\dagger] = \exp\left(\int d^4x d^4y J^\dagger(x) \Delta(x, y) J(y)\right)$
 - Rechnung sehr ähnlich wie beim reellen Skalarfeld, aber mit 2 Quellen J, J^\dagger
- Dirac-Fermionfeld: $Z_{\text{free}}[J, \bar{J}] = \exp\left(\int d^4x d^4y \bar{J}(x) \Delta(x, y) J(y)\right)$
 - Explizit: $\mathcal{L}_{\text{free}}\left[\tilde{\psi}(x) + \int d^4y \Delta(x, y) J(y)\right] + \left(\tilde{\bar{\psi}}(x) + \int d^4y \Delta(x, y) \bar{J}(y)\right) J(x) + \bar{J}(x) \left(\tilde{\psi}(x) + \int d^4y \Delta(x, y) J(y)\right)$

$$= -\left(\tilde{\bar{\psi}}(x) + \int d^4y \Delta(x, y) \bar{J}(y)\right) \mathcal{D} \left(\tilde{\psi}(x) + \int d^4z \Delta(x, z) J(z)\right)$$

$$+ \left(\tilde{\bar{\psi}}(x) + \int d^4y \Delta(x, y) \bar{J}(y)\right) J(x) + \bar{J}(x) \left(\tilde{\psi}(x) + \int d^4y \Delta(x, y) J(y)\right)$$

$$= -\tilde{\bar{\psi}}(x) \mathcal{D} \tilde{\psi}(x) - \int d^4y \left(\tilde{\bar{\psi}}(x) \Delta(x, y) J(y) + \bar{J}(y) \Delta(x, y) \tilde{\psi}(x)\right) + \tilde{\bar{\psi}}(x) J(x) + \bar{J}(x) \tilde{\psi}(x)$$

$$- \int d^4y d^4z \bar{\Delta}(x, y) \bar{J}(y) \mathcal{D} \Delta(x, z) J(z) + 2 \int d^4y \bar{J}(y) \Delta(x, y) J(x)$$

$$= -\tilde{\bar{\psi}}(x) \mathcal{D} \tilde{\psi}(x) + (-1 + 1) \left(\tilde{\bar{\psi}}(x) J(x) + \bar{J}(x) \tilde{\psi}(x)\right) + (-1 + 2) \int d^4y \bar{J}(y) \Delta(x, y) J(x)$$

$$= -\tilde{\bar{\psi}}(x) \mathcal{D} \tilde{\psi}(x) + \int d^4y \bar{J}(y) \Delta(x, y) J(x)$$
 - * Verwende Abkürzungen $\mathcal{D} = -i\not{\partial} + m$
- Eichboson-Feld: $Z_{\text{free}}[J_\mu] = \exp\left(\frac{1}{2} \int d^4x d^4y J_\mu(x) \Delta^{\mu\nu}(x, y) J_\nu(y)\right)$
- Hinweise zur Rechnung

- Folge den Schritten in 4.3.2
- Verwende $\mathcal{D}\Delta(x, y) = \delta^4(x - y)$
- Kann Position des Differentialoperators \mathcal{D} beliebig wechseln, da 4 Differentiale d^4x beteiligt sind und partielle Integration daher immer ein gerades zusätzliches Vorzeichen (also +) liefert
 - * Notiz: Totale Ableitung aus der partiellen Integration ist unphysikalisch

4.3.4 Schwinger-Dyson-Gleichungen im Pfadintegralformalismus herleiten (...)

Kapitel 5

Observablen

5.1 Grundlagen

5.1.1 Grundlagen

- Mögliche Prozesse bzw Observablen
 - $1 \rightarrow m$ -Prozesse (Zerfälle) – Zerfallsrate
 - $2 \rightarrow m$ -Prozesse (Streuung) – Wirkungsquerschnitt
 - $n \rightarrow m$ -Prozesse mit $n > 2$ (Mehr-Teilchen-Streuung) (?)
 - * Spielen keine Rolle in typischen Teilchenphysik-Experimenten (Collider, kosmische Strahlung etc), da nur mikroskopisch viele Teilchen verfügbar sind und die Wahrscheinlichkeit für $n > 2$ -Teilchen-Kollision damit stark unterdrückt ist
 - * Relevant in Systemen mit hoher Teilchendichte (zB stellare Objekte, kondensierte Materie etc) (?)
- Vorgehen zur Berechnung von Observablen
 1. Feynman-Regeln der Theorie aus Lagrangian bestimmen
 2. Matricelement \mathcal{M}_{fi} des zu untersuchenden Prozesses $i \rightarrow f$ mit Feynman-Regeln berechnen
 3. Observable berechnen mit Phasenraumintegration über \mathcal{M}_{fi}
- Überblick über Symmetriefaktoren/Multiplizitäten
 - Anschaulich: Habe identische Teilchen in den Rechnungen \Rightarrow Muss manuell sicherstellen, dass Prozesse, die durch Vertauschung identischer Teilchen auseinander hervorgehen, nur einmal gezählt werden \Rightarrow Teile durch Anzahl der Möglichkeiten, identische Teilchen zu vertauschen und denselben Prozess zu behalten
 - Nur Bosonen führen zu nicht-verschwindenden Symmetriefaktoren/Multiplizitäten
 - * Kann wegen Dirac-Statistik nicht mehr als ein identisches Fermion im selben Zustand haben
 - Berücksichtigung von Symmetriefaktoren im Formalismus
 - * Einlaufende (reelle) Teilchen: Füge Multiplizität manuell hinzu
 - Kommt selten vor (nur Eichboson-Streuung, Skalar-Streuung)
 - * Auslaufende (reelle) Teilchen: Multiplizität im Phasenraumfaktor
 - Kommt oft vor (Produktion von identischen Teilchen)
 - * Virtuelle Teilchen: Symmetriefaktor im Matricelement
 - Relevant bei Prozessen mit Loops (keine Symmetriefaktoren für Baumgraphen)

5.1.2 Kinematik

- Parametrisierung der Impulse
 - Notation: P_1, P_2, \dots mit $P_i^2 = M_i^2$ für einlaufende Impulse, p_1, p_2, \dots mit $p_i^2 = m_i^2$ für auslaufende Impulse, $P = \sum_i P_i = \sum_i p_i$ mit $P^2 = s$ für Gesamtimpuls

- * Notiz: $s = P^2$ ist Verallgemeinerung der Mandelstam-Variable für $2 \rightarrow 2$ -Streuung
- Konvention 1: Ein- und auslaufende Impulse mit unterschiedlichem Vorzeichen
 - * Physikalisch intuitivere Konvention
- Konvention 2: Ein- und auslaufende Impulse mit selbem Vorzeichen
 - * Erlaubt einfachere Notation $p_1 + \dots + p_n = 0$ für Impulserhaltung
- Kinematische Parameter: $m_{ij}^2 := (p_i + p_j)^2, i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $i < j$ für n -Teilchen-Endzustände
 - Interpretation: $m_{ij}^2 = s_{ij}$ ist Mandelstam-Variable s für den s -Kanal-Prozess, der den Impuls des Systems der Teilchen i und j transportiert
 - Parameter bilden (für $n < 4$) minimale Basis zur Beschreibung der kinematischen Freiheitsgrade
 1. Observablen Γ, σ sind Lorentz-Skalare \Rightarrow Kinematische Parameter sollten auch Lorentzskalare sein
 2. Kann aus Impulsen p_i nur die Lorentzskalare $p_i^2, p_i p_j (i \neq j)$ konstruieren
 - * Achtung: Für n -Körper-Endzustände mit $n > 3$ sind auch $\binom{n}{4}$ Konstruktionen $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p_i^\mu p_j^\nu p_k^\rho p_l^\sigma$ möglich (verschwinden für 2- und 3-Körper-Endzustände wegen Impulserhaltung und Antisymmetrie von $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$) (?)
 3. $p_i^2 = m_i^2$ bestimmt \Rightarrow Nur $p_i p_j, i \neq j$ sind echte Freiheitsgrade
 4. $m_{ij}^2 = (p_i + p_j)^2 = m_i^2 + m_j^2 + 2p_i p_j$ ist Redefinition von $p_i p_j$ und damit geeigneter Parameter
 - Motivation für diese Wahl: Parameter m_{ij}^2 sind Lorentzskalare
 - * Alternative: "Anschauliche" Variablen wie zB Energien der zerfallenden Teilchen im Schwerpunktsystem (sind aber keine Lorentzskalare)
 - Erweiterung: Zusätzliche ausgezeichnete Achsen $\vec{n}_i, i \in \{1, \dots, m\} \Rightarrow$ Definiere zusätzliche kinematische Parameter m_{ij}^2 mit $p_i = (0, \vec{n}_i), i \in \{n+1, n+m\}$ (?)
 - * Bsp: Bei Streuung ist die Achse der einfallenden Teilchen ausgezeichnet (\vec{P} im Schwerpunktsystem $P_1 = (E_1, \vec{P}), P_2 = (E_2, -\vec{P})$), bei polarisierten Prozessen ist die Polarisationsachse \vec{n} ausgezeichnet
- Nützliche Kinematik-Relation: $M^2 + \sum_i m_i^2 = \sum_{i < j} m_{ij}^2$
 - Anschaulich: $M^2 + \sum_i m_i^2 = \sum_{i < j} m_{ij}^2$ legt einen der Parameter m_{ij}^2 fest
 - Rechnung: $M^2 + \sum_i m_i^2 = P^2 + \sum_i p_i^2 = (\sum_i p_i)^2 + \sum_i p_i^2 = \sum_i p_i^2 + 2 \sum_{i < j} p_i p_j + \sum_i p_i^2 = 2 \sum_i p_i^2 + 2 \sum_{i < j} p_i p_j = \sum_{i < j} (p_i + p_j)^2$
 - * Verwende binomische Formel $(\sum_i p_i)^2 = \sum_i p_i^2 + 2 \sum_{i \neq j} p_i p_j$
 - * Letzten Schritt $2 \sum_i p_i^2 + 2 \sum_{i < j} p_i p_j = \sum_{i < j} (p_i + p_j)^2$

5.1.3 Phasenräume

- Lorentz-invarianter Phasenraum $d\Phi_n(P; m_1, \dots, m_n) := \frac{1}{M} (2\pi)^{4-3n} \delta^4(P - \sum_i p_i) \prod_{j=1}^n dp_j^4 \delta(p_j^2 - m_j^2) \theta(p_j^0)$
 - Anschaulich: Integriere über Freiheitsgrade aller Endzustände $\prod_{j=1}^n d^3 p_j$, berücksichtige Impulserhaltung $(2\pi)^4 \delta^4(\sum_i p_i)$, restliche Faktoren machen den Ausdruck lorentzinvariant
 - Anmerkungen zur Notation
 - * P ist Summe der einlaufenden Impulse, m_i sind Massen der auslaufenden Teilchen
 - * Schreibe Argumente in $d\Phi(m_1, \dots, m_n; P, p_1, \dots, p_n)$ nur aus, wenn es nötig ist
 - Anwendung: Differentiale aller kinematischen Größen $d\sigma, d\Gamma$ sind proportional zum lorentz-invarianten Phasenraumelement $d\Phi_n$
 - Anschaulichere Form: $d\Phi_n(P; m_1 \dots m_n) = (2\pi)^4 \delta^4(P - \sum_i p_i) \prod_{j=1}^n \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j}$
 - Multiplizität $M = \prod_i n_i$ berücksichtigt Statistik-Effekte identischer Teilchen
 - * Begründung: Ohne Multiplizitäten zählt man identische Teilchen mit vertauschten Impulsen als unterschiedliche Konfigurationen, diese sind aber äquivalent \Rightarrow Muss den Fehler-Faktor M wegdividieren

* M hängt von der Art der Teilchen im Endzustand ab \Rightarrow Keine allgemeine Notation möglich \Rightarrow Schreibe Multiplizitäten nicht explizit dazu

* $M = \prod_i n_i$ mit Anzahl n_i identischer Teilchen vom Typ i im Endzustand (Bedingung $\sum_i n_i = n$)

- Phasenraum rekursiv berechnen $d\Phi_n(P; m_1 \dots m_n) = \frac{ds}{2\pi} d\Phi_{r+1}(P; \sqrt{s}, m_1, \dots, m_r) d\Phi_{n-r}(q; m_{r+1}, \dots, m_n)$
 - Interpretation: Zerlege Prozess $P \rightarrow p_1 \dots p_n$ in 2 Stufen – Zuerst $P \rightarrow p_1 \dots p_r q$, dann $q \rightarrow p_{r+1} \dots p_n$
 - Nachrechnen: $\frac{ds}{2\pi} d\Phi_{r+1}(P; \sqrt{s}, m_1, \dots, m_r) d\Phi_{n-r}(q; m_{r+1}, \dots, m_n)$

$$= \frac{ds}{2\pi} \left((2\pi)^{4-3(r+1)} \delta^4(P - q - \sum_{i=1}^r p_i) d^4q \delta(q^2 - s) \theta(q^0) \prod_{i=1}^r d^4p_i \delta(p_i^2 - m_i^2) \theta(p_i^0) \right)$$

$$\times \left((2\pi)^{4-3(n-r)} \prod_{i=r+1}^n \delta(p_i^2 - m_i^2) \theta(p_i^0) \right)$$

$$= (2\pi)^{4-3n} ds d^4q \delta(q^2 - s) \delta^4(q - \sum_{i=r+1}^n p_i) \delta^4(P - q - \sum_{i=1}^r p_i) ds d^4q \prod_{i=1}^r d^4p_i \delta(p_i^2 - m_i^2) \theta(p_i^0)$$

$$\stackrel{\int d^4q}{=} (2\pi)^{4-3n} ds \delta\left(\left(\sum_{i=1}^r p_i\right)^2 - s\right) \delta^4(P - \sum_{i=1}^n p_i) \prod_{i=1}^n d^4p_i \delta(p_i^2 - m_i^2) \theta(p_i^0)$$

$$\stackrel{\int ds}{=} (2\pi)^{4-3n} \delta^4(P - \sum_{i=1}^n p_i) \prod_{i=1}^n d^4p_i \delta(p_i^2 - m_i^2) \theta(p_i^0) = d\Phi_n(P; m_1, \dots, m_n)$$
 - * $(2\pi)^{-1+4-3(r+1)+4-3(n-r)} = (2\pi)^{4-3n}$
 - * $\theta(q^0) = 1$ wegen $\theta(p_i^0)$ und $\delta^4(q - \sum_{i=1}^r p_i)$
 - Wenn $\forall_i p_i^0 > 0$ gilt und $q = \sum_{i=1}^r p_i$, dann ist auch $q^0 > 0$
 - Notiz: Multiplizitäten faktorisieren $M = M_1 M_2$ in die Beiträge der beiden Sub-Phasenräume

- Phasenraum für $n = 2$: $d\Phi_2(P; m_1, m_2) = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{p_0}{\sqrt{s}} d\Omega = \frac{1}{32\pi^2} d\Omega \sqrt{\left(1 - \left(\frac{m_1+m_2}{\sqrt{s}}\right)^2\right) \left(1 - \left(\frac{m_1-m_2}{\sqrt{s}}\right)^2\right)}$ mit $s = P^2$

- Ergebnis ist nützlich, da man mit der rekursiven Beziehung $d\Phi_n = \frac{ds}{2\pi} d\Phi_{r+1} d\Phi_{n-r}$ alle Phasenräume $d\Phi_n$ auf Faktoren $\frac{ds}{2\pi}$ und $d\Phi_2$ reduzieren kann, die dann keine “trivialen” δ -Distributionen mehr enthalten
- Betrag der auslaufenden Impulse $p_0 = \frac{\sqrt{s}}{2} \sqrt{\left(1 - \left(\frac{m_1+m_2}{\sqrt{s}}\right)^2\right) \left(1 - \left(\frac{m_1-m_2}{\sqrt{s}}\right)^2\right)}$ ist durch Kinematik festgelegt
- Anmerkung: Gehe in der Rechnung davon aus, dass der Ausdruck $d\Phi_2$ in einem Integral steht (in dem auch noch andere (p_1, p_2) -abhängige Terme stehen können)
 - * Kann deshalb nur δ -Distribution-Integrationen durchführen
 - * Motivation: Diese Rechenschritte sind nötig bei Berechnung von Observablen σ, Γ

1. Definition $d\Phi_2 = (2\pi)^4 \delta^4(P - p_1 - p_2) \frac{d^4p_1}{(2\pi)^3} \delta(p_1^2 - m_1^2) \theta(p_1^0) \frac{d^4p_2}{(2\pi)^3} \delta(p_2^2 - m_2^2) \theta(p_2^0)$

2. dp_i^0 -Integration $\Rightarrow d\Phi_2 = \frac{1}{(4\pi)^2} \delta^4(P - p_1 - p_2) \frac{d^3p_1}{\sqrt{m_1^2 + \vec{p}_1^2}} \frac{d^3p_2}{\sqrt{m_2^2 + \vec{p}_2^2}}$

- δ -Distributionen umschreiben: $\delta(p_i^2 - m_i^2) \theta(p_i^0) = \frac{\delta(p_i^0 - \sqrt{m_i^2 + \vec{p}_i^2})}{2\sqrt{m_i^2 + \vec{p}_i^2}} \theta(p_i^0) = \frac{\delta(p_i^0 - \sqrt{m_i^2 + \vec{p}_i^2})}{2\sqrt{m_i^2 + \vec{p}_i^2}}$
- Integration ist trivial mit $\delta(p_i^0 - E_i)$

3. Wähle Schwerpunktskoordinaten $P = (\sqrt{s}, \vec{0})$

$$\Rightarrow d\Phi_2 = \frac{1}{(4\pi)^2} \delta(\sqrt{s} - \sqrt{m_1^2 + \vec{p}_1^2} - \sqrt{m_2^2 + \vec{p}_2^2}) \delta^3(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) \frac{d^3p_1}{\sqrt{m_1^2 + \vec{p}_1^2}} \frac{d^3p_2}{\sqrt{m_2^2 + \vec{p}_2^2}}$$

- Anmerkung: $s = P^2$ ist eine der Mandelstam-Variablen und entspricht der Schwerpunktsenergie, für Zerfall ist $\sqrt{s} = M$

4. d^3p_2 -Integration $\Rightarrow d\Phi_2 = \frac{1}{(4\pi)^2} \delta(\sqrt{s} - \sqrt{m_1^2 + \vec{p}_1^2} - \sqrt{m_2^2 + \vec{p}_2^2}) \frac{d^3p_1}{\sqrt{m_1^2 + \vec{p}_1^2}} \frac{1}{\sqrt{m_2^2 + \vec{p}_1^2}}$

- Integration ist trivial mit $\delta^3(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)$

5. Wechsel in Kugelkoordinaten $d^3p_1 = p^2 dp d\Omega$

$$\Rightarrow d\Phi_2 \frac{1}{(4\pi)^2} \delta(\sqrt{s} - \sqrt{m_1^2 + p^2} - \sqrt{m_2^2 + p^2}) p^2 dp d\Omega \frac{1}{\sqrt{m_1^2 + p^2}} \frac{1}{\sqrt{m_2^2 + p^2}}$$

6. dp -Integration $\Rightarrow d\Phi_2 = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{p_0}{\sqrt{s}} d\Omega = \frac{1}{32\pi^2} d\Omega \sqrt{\left(1 - \left(\frac{m_1+m_2}{\sqrt{s}}\right)^2\right) \left(1 - \left(\frac{m_1-m_2}{\sqrt{s}}\right)^2\right)}$

- δ -Distribution umschreiben: $\delta(\sqrt{s} - \sqrt{m_1^2 + p^2} - \sqrt{m_2^2 + p^2}) = \frac{\delta(p-p_0)}{\frac{p_0}{\sqrt{m_1^2 + p_0^2}} + \frac{p_0}{\sqrt{m_2^2 + p_0^2}}}$
 $= \delta(p - p_0) \frac{1}{p_0} \frac{\sqrt{m_1^2 + p_0^2} \sqrt{m_2^2 + p_0^2}}{\sqrt{m_1^2 + p_0^2} + \sqrt{m_2^2 + p_0^2}} = \delta(p - p_0) \frac{1}{p_0 \sqrt{s}} \sqrt{m_1^2 + p_0^2} \sqrt{m_2^2 + p_0^2}$
 - * p_0 ist definiert durch $\left(\sqrt{s} - \sqrt{m_1^2 + p^2} - \sqrt{m_2^2 + p^2} \right) \Big|_{p=p_0} = 0$
- $p_0 = \frac{\sqrt{s}}{2} \sqrt{\left(1 - \left(\frac{m_1 + m_2}{\sqrt{s}}\right)^2\right) \left(1 - \left(\frac{m_1 - m_2}{\sqrt{s}}\right)^2\right)}$ erfüllt $\sqrt{s} - \sqrt{m_1^2 + p_0^2} - \sqrt{m_2^2 + p_0^2} = 0$
 - * Vorbereitung: $p_0^2 = \left(\frac{\sqrt{s}}{2}\right)^2 \left(1 - \left(\frac{m_1 + m_2}{\sqrt{s}}\right)^2\right) \left(1 - \left(\frac{m_1 - m_2}{\sqrt{s}}\right)^2\right) = \left(\frac{\sqrt{s}}{2}\right)^2 \left(1 - 2\frac{m_1^2 + m_2^2}{s} + \frac{(m_1^2 - m_2^2)^2}{s^2}\right) = \left(\frac{\sqrt{s}}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{m_1^2 - m_2^2}{s}\right)^2 - m_2^2 = \left(\frac{\sqrt{s}}{2}\right)^2 \left(1 + \frac{m_1^2 - m_2^2}{s}\right)^2 - m_1^2$
 - * Nachrechnen: $\sqrt{m_1^2 + p_0^2} + \sqrt{m_2^2 + p_0^2} = \frac{\sqrt{s}}{2} \left(1 - \frac{m_1^2 - m_2^2}{s}\right) + \frac{\sqrt{s}}{2} \left(1 + \frac{m_1^2 - m_2^2}{s}\right) = \sqrt{s}$

5.1.4 Observablen abschätzen mit Dimensionsanalyse

- Matricelement abschätzen (optimierbar)
 1. Koeffizienten aus den Feynman-Regeln
 2. Loop-Faktor $\frac{1}{16\pi^2} \sim 10^{-2}$ für jeden Loop
 3. Mit Potenzen der größten Massenskala M im Feynman-Diagramm auffüllen, sodass das Matricelement die richtige Dimension hat
 - Korrekturen zu diesem Ergebnis sind unterdrückt mit $\mathcal{O}(\frac{m}{M})$, wobei m kleinere Massenskalen im Problem sind
 - Dimension eines Matricelements ist $[\mathcal{M}] = 4 - n$ für n ein-/auslaufende Teilchen
 - Notiz: Größte Massenskala im Feynman-Diagramm kann auch von einem virtuellen Teilchen kommen
 - Große Kunst: Erkennen, von welcher Massenskala die Effekte kommen (schweres Teilchen im Loop oder später in Phasenraumintegration)
 4. Optimierung: Symmetriefaktor des Diagramms
 5. Advanced: Spezielle Eigenschaften der Theorie berücksichtigen
 - Bsp: GIM-Mechanismus, Chiralitätseffekte
- Gründe, warum Abschätzungen schlecht sein können
 - * Mehrere Diagramme tragen bei \Rightarrow Diagramme können konstruktiv oder destruktiv interferieren
 - * Mehrere ähnliche Massenskalen im Diagramm \Rightarrow Differenzen von Massen können bedeutend von der typischen Massenskala abweichen
 - * Loop-Integrale \Rightarrow Komplexe Abhängigkeiten von Impulsen im Loop
- Observablen (Γ, σ) abschätzen
 1. Matricelement abschätzen, Ergebnis betragsquadrieren
 2. Genereller Faktor $\frac{1}{16\pi}$ für 2-Teilchen-Endzustand, zusätzlicher Faktor $\frac{1}{16\pi^2}$ für jedes zusätzliche Teilchen
 3. Optimierung: Multiplizitätsfaktor des Endzustands
 4. Massendimension auffüllen mit typischer Massenskala im Prozess (nur reelle Teilchen)
 - Zerfallsraten haben $[\Gamma] = 1$, Wirkungsquerschnitte haben $[\sigma] = -2$
- Gründe, warum Abschätzungen schlecht sein können
 - * Mehrere ähnliche Massenskalen im Diagramm \Rightarrow Differenzen von Massen können bedeutend von der typischen Massenskala abweichen
 - * Nicht-triviale Effekte im Phasenraum-Integral

5.1.5 Formale Grundlage für Beschreibung von Zerfall und Streuung

• Vorbereitungen

- Verwende endliches Raumzeitintervall (T, V) als Regulator
 - * Notation: T ist Wechselwirkungs-Zeitraum; V ist Volumen, in dem die Wechselwirkung stattfinden kann
 - * Zwischenergebnisse hängen von T, V ab und sind damit formal unendlich, Endergebnis (Observablen) ist aber von T, V unabhängig
- Wahl des Bezugssystems
 - * Verwende für die Rechnungen das Schwerpunktsystem
 - * Am Ende der Rechnungen folgen Bemerkungen, wie man Ergebnisse in anderen Bezugssystemen erhält

• Wechselwirkungswahrscheinlichkeit für $n \rightarrow m$ -Prozesse: $dP = TV \left(\prod_{j=1}^n \frac{1}{2E_j V} \right) |\mathcal{M}_{fi}|^2 d\Phi_m$

1. Ansatz $dP = \frac{|\langle f | \mathcal{S} | i \rangle|^2}{\langle i | i \rangle \langle f | f \rangle} d\Phi$ mit $d\Phi = \prod_{j=1}^m \frac{V}{(2\pi)^3} dp_j$

- Ansatz analog zur Übergangsrate in Quantenmechanik: (Infinitesimaler) Phasenraumfaktor $d\Phi$, gewichtet mit normierter Wahrscheinlichkeit $\frac{|\langle f | \mathcal{S} | i \rangle|^2}{\langle i | i \rangle \langle f | f \rangle}$
- $d\Phi = \prod_{j=1}^m \frac{V}{(2\pi)^3} dp_j$ ist Ausdruck für Phasenraumelement aus statistischer Physik

2. Normierungsfaktoren: $\langle p_1 \dots p_l | p_1 \dots p_l \rangle = \prod_{j=1}^l (2E_j V)$

- Folgt aus Normierung der Zustände in kanonischer Quantisierung: $\langle p | p \rangle = 2E_p (2\pi)^3 \delta^3(0) = 2E_p \int_V d^3x e^{i0x} = 2E_p \int_V d^3x = 2E_p V$
- Hier: $\langle i | i \rangle = \prod_{j=1}^n (2E_j V)$, $\langle f | f \rangle = \prod_{j=1}^m (2E_j V)$

3. Matricelement: $|\langle f | \mathcal{S} | i \rangle|^2 = (2\pi)^4 \delta^4(\sum_i p_i) TV |\mathcal{M}_{fi}|^2$

(a) Mit $\mathcal{S} \equiv 1 + (2\pi)^4 \delta^4(\sum_i p_i) i\mathcal{M}$ und $i \neq f$ folgt

$$\langle f | \mathcal{S} | i \rangle = \langle f | 1 + (2\pi)^4 \delta^4(\sum_i p_i) i\mathcal{M} | i \rangle = (2\pi)^4 \delta^4(\sum_i p_i) i \langle f | \mathcal{M} | i \rangle$$

- Fall $i = f$ ("nichts passiert") ist langweilig und wird daher nicht betrachtet

(b) Betragsquadrat: $|\langle f | \mathcal{S} | i \rangle|^2 = (2\pi)^8 \delta^4(\sum_i p_i) \delta^4(0) |\langle f | \mathcal{M} | i \rangle|^2 = (2\pi)^4 \delta^4(\sum_i p_i) VT |\langle f | \mathcal{M} | i \rangle|^2$

- $(\delta^4(\sum_i p_i))^2 = \delta^4(\sum_i p_i) \delta^4(0)$, da dieser Ausdruck nur unter dem Integral definiert ist und hier durch eine der δ^4 schon $\sum_i p_i = 0$ ausgewertet wird
- $(2\pi)^4 \delta^4(0) = \int_{V,T} d^4x e^{i0x} = \int_{V,T} d^4x = TV$

(c) Führe Abkürzung $\mathcal{M}_{fi} := \langle f | \mathcal{M} | i \rangle$ ein

• Spezialfälle bzw n festlegen

- Anschaulich: Definiere Observable $dX = C dP$ so mit Proportionalitätskonstante $C(T, V)$ so, C die T/V -Abhängigkeiten in dP wegkürzt
- Zerfall bzw $n = 1$: Zerfallsrate $d\Gamma := \frac{1}{T} dP = \frac{1}{2M} |\mathcal{M}_{fi}|^2 d\Phi_m$
 - * Konvention: Definiere Γ im Ruhesystem des zerfallenden Teilchens
- Streuung bzw $n = 2$: Wirkungsquerschnitt $d\sigma := \frac{V}{T} \frac{2E_1 2E_2}{F} dP = \frac{1}{F} |\mathcal{M}_{fi}|^2 d\Phi_m$
 - * Möller-Flussfaktor $F := 4\sqrt{(P_1 P_2)^2 - M_1^2 M_2^2}$
 - * Im Schwerpunktsystem $P_1 = (E_1, \vec{P})$, $P_2 = (E_2, -\vec{P})$ ist $d\sigma = \frac{V}{T} \frac{1}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} dP$
 - Verwende $F = 4\sqrt{(E_1 E_2 + \vec{P}^2) - (E_1^2 - \vec{P}^2)(E_2^2 - \vec{P}^2)} = 4\sqrt{\vec{P}^2(E_1 + E_2)} = 4|\vec{P}|(E_1 + E_2)$

$$= 4E_1 E_2 |\vec{P}| \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) = 2E_1 2E_2 \left(\frac{|\vec{P}|}{E_1} + \frac{|\vec{P}|}{E_2} \right) = 2E_1 2E_2 \left| \frac{\vec{P}_1}{E_1} - \frac{\vec{P}_2}{E_2} \right| \stackrel{\vec{P}_i = E_i \vec{v}_i}{=} 2E_1 2E_2 |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|$$

5.1.6 Anmerkungen

- Totale Zerfallsrate $\Gamma := \sum_i \Gamma_i$
 - Γ ist eine fundamentale Eigenschaft jedes instabilen Teilchens
 - Notation: Γ_i ist Zerfallsrate des i -ten Zerfallskanals des betrachteten Teilchens, \sum_i läuft über alle möglichen Zerfallskanäle
 - Lebensdauer des Teilchens $\tau := \frac{1}{\Gamma}$
 - * τ ist die Zeitskala im exponentiellen Zerfallsgesetz des Teilchens $N(t) = N(0)e^{-t/\tau}$ bzw $\partial_t N = -\frac{1}{\tau}N$
- Totaler Wirkungsquerschnitt für Streuung von 2 Teilchen $\sigma := \sum_i \sigma_i$
 - σ ist eine fundamentale Eigenschaft für jedes Teilchenpaar
 - * Bessere Notation wäre σ_{ab} für Streuung der Teilchen a, b
 - Notation: σ_i ist Wirkungsquerschnitts des i -ten Streu-Prozesse der beiden betrachteten Teilchen, \sum_i läuft über alle möglichen Streu-Prozesse

5.2 Feynman-Diagramme

5.2.1 Klassifikation von Feynman-Diagrammen

- Slang: Diagramm = Feynman-Diagramm
- Tree-level-/Baum-Diagramm: Feynman-Diagramm, das keine Loops enthält
- Tadpole-Diagramm = Diagramm mit nur einem externen Teilchen
- Zusammenhängendes Feynman-Diagramm: Feynman-Diagramm, bei dem man entlang der Linien jeden Punkt erreicht
 - Gegensatz: Vakuum-Bubble-Diagramm = Nicht-zusammenhängendes Feynman-Diagramm
 - Matricelemente \mathcal{M}_{fi} von nicht-zusammenhängenden Diagrammen faktorisieren
 - Nach zB 3.4.5 tragen nur zusammenhängende Feynman-Diagramme zu Observablen bei
 - * Formaler Grund: cluster decomposition principle (siehe 1.4)
- Amputated Diagramm: Diagramm ohne Basisvektoren für die externen Zustände
 - Nützliche Zerlegung, da Basisvektoren langweilig sind
 - Formal: Zerlege “normales” Diagramm \mathcal{M} gemäß $\mathcal{M} = \prod_{i=1}^n \epsilon_{j_i} \mathcal{M}^{j_1 \dots j_n}$ in amputated Diagramm $\mathcal{M}^{j_1 \dots j_n}$ und Einheitsvektoren ϵ_{j_i}
 - Notation: Streiche “amputated” externe Linien durch
- Off-shell Diagramm: Amputated Diagramm, bei dem die externen Zustände beliebige Impulse (also off-shell) haben
 - Benötige nur on-shell-Diagramme zur Berechnung von Observablen
 - Arbeiten mit off-shell Diagrammen ist nützlich, da man damit größere Matricelemente aus kleineren zusammensetzen kann
- 1PI-Diagramm (one particle irreducible): Off-shell-Diagramm, bei dem Loop-Impulse durch alle internen Linien laufen
 - Anschauliche Definition: Diagramm, das man mit Durchschneiden eines Propagators zu einem nicht-zusammenhängenden Diagramm machen kann
 - Motivation für Verwendung von 1PI diagrams
 - * 1PI-Diagramme sind nützlich, um Diagramme (insbesondere Quellen von UV-Divergenzen) zu klassifizieren
 - * Kann jede Greensfunktion aus 1PI-Diagrammen aufbauen (mit Propagatoren dazwischen)
 - Bsp Propagator: Berücksichtige alle 1PI-Beiträge zum exakten Propagator durch geometrische Reihe

5.2.2 Begriffe für Feynman-Diagramme

- Teilchen: Interpretiere jede Linie in einem Impulsraum-Feynman-Diagramm als Teilchen
- Reelles Teilchen: Teilchen, dessen Linie aus dem Diagramm ein- oder ausläuft
 - Formale Definition: Reale Teilchen p_i liegen auf der Massenschale bzw $p_i^2 = m^2$ mit der Masse m des Teilchens
 - * Massenschale: $m_i^2 = p_i^2 \Rightarrow E_i = \sqrt{m_i^2 + \vec{p}_i^2}$ sieht aus wie eine Schale
 - Reale Teilchen können im Experiment detektiert werden (deshalb “real”)
- Virtuelles Teilchen: Teilchen, dessen Linien nicht aus dem Diagramm ein- oder auslaufen
 - Formale Definition: Virtuelle Teilchen liegen nicht auf der Massenschale bzw $p_i^2 \neq m^2$
 - * Virtuelle Teilchen haben passende 4-Impulse, sodass Impulserhaltung an den Vertices gilt
 - Virtuelle Teilchen können nicht in einem Experiment gemessen werden, sie sind pures Theorie-Konstrukt
 - * Alternative zu “virtuellen Teilchen” (übliche Beschreibung in QM): Alle Teilchen haben $p^2 = m^2$ bzw sind reell, aber Energieerhaltung wird an den Vertices verletzt
 - * Notiz: Virtuelle Teilchen können nicht detektiert werden, haben aber sehr wohl reelle Auswirkungen (ohne sie wäre QFT langweilig)
- Loop: Menge von virtuellen Teilchen, die einen geschlossenen Pfad bilden (enthalten Impuls-Freiheitsgrad k)
 - Für jeden Loop mit Impuls-Freiheitsgrad k gibt es ein Integral $\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}$, das alle Möglichkeiten für den umlaufenden Impuls k berücksichtigt
 - Für n interne Linien und V Vertices gibt es $L = n - V + 1$ Loops im Feynman-Diagramm

5.2.3 Darstellung von Termen im Matrixelement \mathcal{M}_{fi} als Feynman-Diagramme

- Idee: Stelle einzelne Terme in \mathcal{M}_{fi} graphisch dar
- Matrixelemente im Orts- und Impulsraum
 - Feynman-Diagramm = Feynman-Diagramm im Impulsraum
 - * Impulsraum ist die “natürliche Wahl” für Rechnungen mit Teilchen $|p_1 \dots p_n\rangle$, da diese durch ihre Impulse definiert sind
 - * Ortsraum ist anschaulicher, aber Matrixelemente haben hässlichere Form
 - Feynman-Diagramm im Ortsraum ist Fouriertransformierte von Feynman-Diagramm im Impulsraum
 - Struktur von Matrixelementen im Impulsraum
 - * Anschaulich: Einfachste Art, ein Matrixelement hinzuschreiben
 - * Ausdruck hängt nicht von Orten, sondern nur von Impulsen ab
 - * Integrationen nur über Loop-Impulse
 - Struktur von Matrixelementen im Ortsraum
 - * Anschaulich: Erzwingt Ortsraum-Interpretation für ein Matrixelement
 - * Integration über Wechselwirkungspunkte x_i
 - * Ortsabhängigkeiten im Integrand stecken nur in Feynman-Propagatoren $\Delta_F(x_i - x_j)$
- \mathcal{M}_{fi} darstellen als Feynman-Diagramme im Ortsraum
 - Idee: Stelle Summanden in \mathcal{M}_{fi} im Ortsraum $x = (t, \vec{x})$ dar als Reihenfolge von Wechselwirkungen an Orten x_i
 - * Vorteil: Kann Feynman-Diagramme einfacher interpretieren
 - Argumente von Feynman-Propagatoren x_i sind Orte, an denen die Wechselwirkung stattfindet (zeichne die Orte ein)

- * In \mathcal{M}_{fi} wird über alle möglichen Orte bzw räumliche und zeitliche Reihenfolge der Wechselwirkungen integriert
- Feynman-Propagator $\Delta_F(x_i - x_j)$ für Verbindungslinie zwischen x_i und x_j
- Terme $e^{\pm i p_i x_j}$ für Verbindung vom Ort x_j zum externen Zustand $|p_i\rangle$
 - * Vorzeichen $+/-$ und Teilchen-/Antiteilchen-Eigenschaft des Zustands bestimmt, ob $|p_i\rangle$ ein ein- oder auslaufender Zustand ist
- \mathcal{M}_{fi} darstellen als Feynman-Diagramme im Impulsraum
 - Idee: Stelle Summanden in \mathcal{M}_{fi} im Impulsraum dar als Teilchen mit bestimmten Impulsen
 - * Schreibe Impuls des Teilchens an jeden Propagator
 - 1. Linie für jedes externe Teilchen, schreibe den Impuls p_i an die Linie
 - 2. Linie für jeden Feynman-Propagator in \mathcal{M}_{fi} , schreibe den Impuls k_i an die Linie
 - 3. Verbinde die Linien miteinander und wähle die k_i so, dass an jedem Verbindungspunkt Impulserhaltung gilt
 - Anmerkungen zur Notation
 - * Pfeile an einer Linie für komplexe Felder
 - Interpretation: Komplexe Felder haben eine Ladung, die Pfeilrichtung gibt den Ladungsfluss an
 - Notiz: Teilchen-/Antiteilchen-Name an den Propagator schreiben macht nur begrenzt Sinn, da man den Propagator je nach Interpretation der Richtung, in die er propagiert, als Teilchen- oder Antiteilchen-Propagator interpretieren kann
 - * Pfeile neben einer Linie für Impulsrichtung, schreibe den Impuls an den Pfeil

5.2.4 Relationen aus der Graphentheorie

- Graphentheorie-Relationen erlauben einfache Topologie-Aussagen über Feynman-Diagramme
 - Nützlich für Ablesen der Loop-Ordnung, Berechnung des naiven Divergenzgrads (siehe 6.1.3)
- Größen: Anzahl der Propagatoren P , Anzahl der Vertices V , Anzahl der externen Linien E , Anzahl der Loops L
- $L = P - (V - 1)$ (Euler-Theorem)
 - Informeller Beweis
 1. L ist Anzahl der nicht durch 4-Impulserhaltung festgelegten Impulse im Feynman-Diagramm (= muss noch darüber integrieren)
 2. P ist die Anzahl der insgesamt im Diagramm vorkommenden Impulse (ohne Verwendung von 4-Impulserhaltung)
 3. $L - P = V - 1$ Impulse sind durch 4-Impulserhaltung festgelegt: Habe V δ^4 -Distribution (für jeden Vertex), aber eine δ^4 -Distribution wird benötigt für 4-Impulserhaltung der externen Impulse (faktoriisiert im Endergebnis) \Rightarrow Nur $V - 1$ verwendbare δ^4 -Distribution im Matrixelement
- $2P + E = \sum_n n V_n$
 - Notation: \sum_n läuft über die Anzahl n der aus einem Vertex auslaufenden Propagatoren; V_n ist die Anzahl der Vertices mit n auslaufenden Teilchen ($\sum_n V_n = V$)
 - Kombination mit Euler-Theorem: $L = 1 + \frac{2V + \sum_n n V_n - E}{2}$
 - * Interpretation: Kann Anzahl der Loops direkt aus Anzahl der externen Linien und Anzahl der Knoten ablesen
 - Informeller Beweis

1. Idee: Suche Anzahl der Enden von Linien im Diagramm (Eigenschaft der Propagatoren und externen Zuständen) und Anzahl der aus Vertices auslaufenden Linien (Eigenschaft der Vertices) \Rightarrow Diese Zahlen sind gleich
2. Habe $2P + E$ verfügbare Enden von Linien im Diagramm ($2P$ Enden von Propagatoren, E Enden von externen Linien)
3. V_n in $\sum_n n V_n$ ist so definiert, dass $\sum_n n V_n$ gerade die Anzahl der aus Vertices auslaufenden Linien ist

5.3 Bestimmung von Feynman-Regeln

5.3.1 Definition von Feynman-Regeln

- Feynman-Regel = Äquivalenz zwischen minimalem Element eines Feynman-Diagramms (Propagator/externer Zustand/Vertex) und dessen Beitrag zu $i\mathcal{M}$
- Klassifikation von Feynman-Regeln
 - Feynman-Regeln für externe Zustände – Faktor $\epsilon^{i,\pm,(\dagger)}(\vec{p})$
 - * Ausdrücke für externe Zustände hängen nur von Eigenschaften des Teilchens (Quantenzahlen) ab \Rightarrow In jeder QFT gleich
 - Feynman-Regeln für Propagatoren – Faktor $\frac{i\tilde{P}^\pm}{p^2 - m^2 + i0}$
 - * Ausdrücke für Propagatoren folgen direkt aus Poincaré-Eigenschaften, Propagatoren sind Einheitsmatrizen für interne Symmetrien
 - * Achtung in Eichtheorie: Eichboson-, Goldstoneboson- und Ghost-Propagatoren hängen von Eichparameter ξ ab
 - Feynman-Regeln für Vertices – nicht-trivial
 - * Diese Feynman-Regeln machen eine Theorie einzigartig – Im Folgenden kommen Methoden, diese Feynman-Regeln zu bestimmen
- Konvention zur Normierung der Kopplungskonstanten: Normiere Kopplungskonstante in \mathcal{L} so, dass die zugehörige Feynman-Regel keine numerischen Vorfaktoren mehr enthält
 - Wichtig für Kopplungen mit Boson-Feldern, da hier sonst Symmetriefaktoren kompliziert werden
 - * Verwende diese Konvention nicht \Rightarrow In $i\mathcal{M}$ tauchen viele weitere numerische Faktoren auf
 - Bsp ϕ^4 -Theorie: WW-Term $\mathcal{L} \supset \frac{1}{4!} \lambda \phi^4 \Rightarrow$ Feynman-Regel $i\mathcal{M} = i\lambda$

5.3.2 Ehrliche Methode

1. $i\mathcal{M}$ für tree-level-Prozess mit dem gesuchten WW-Term ehrlich berechnen
 - Methoden: Kanonische Quantisierung oder Pfadintegral-Methode
2. Basisvektoren für externe Zustände weglassen ("amputate") \Rightarrow Finde Feynmanregel

5.3.3 Ablese-Methode

1. Kopplungskonstante abschreiben, zusätzlicher Faktor i
 - Anschaulich: $i c$ für Term $c \cdots$ im Lagrangian
 - Begründung für Faktor i : Entwickle $\mathcal{S}_{fi} \propto i\mathcal{M}_{fi}$, $\mathcal{S}_{fi} = \langle f | T e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{int}}} | i \rangle$ bis zur ersten Ordnung
 - Ersetze Ableitungsoperatoren $\partial_\mu \rightarrow -ip_\mu$ mit dem Impuls p_μ des Teilchens, auf den der Ableitungsoperator wirkt
 - Muss in Notation der Feynman-Regeln irgendwie kenntlich machen, zu welchem Teilchen der Impuls gehört
2. Gruppentheorie-Struktur

- Anschaulich: Streiche in A aus $\mathcal{L}_{\text{int}} \supset cA, c \in \mathbb{C}$ alle Felder weg \Rightarrow Erhalte die Gruppentheorie-Struktur des Terms

3. Symmetriefaktor bestimmen (sollte = 1 sein)

- Anschaulich: Wieviele Möglichkeiten gibt es, die aus dem Vertex kommenden Linien mit den externen Linien zu verbinden?
- Kontrolle: Sollte Kopplungskonstanten in \mathcal{L} so definiert haben, dass es keinen Zahlen-Faktor in der Feynman-Regel gibt

4. Erhalte einen Ausdruck aus jedem Schritt, multipliziere die jetzt zusammen

5.3.4 Software verwenden

- FeynRules (Standard-Software)
 - Funktionsweise
 1. Input: “model file” (enthält Lagrangian sowie Auflistung der Felder, Kopplungskonstanten, Eichgruppen und weiterer Informationen über das Modell)
 2. Direkter Output: Liste mit allen Feynman-Regeln
 3. Zusätzlicher Output: Maschinenlesbare Darstellung der Feynman-Regeln
 - * Nützlich für Programme auf höherer Abstraktionsebene, die für ein bestimmtes Modell alle zu einem bestimmten Prozess beitragenden Feynman-Diagramme berechnet (zB FeynArts) oder sogar direkt Observablen wie Wirkungsquerschnitt oder Zerfallsrate berechnet (zB Sherpa, Madgraph)
 - Algorithmus basiert auf kanonischer Quantisierung

5.4 Anwendung von Feynman-Regeln – Matricelemente berechnen

5.4.1 Feynman-Regeln anwenden

1. Erlaubte Feynman-Diagramme für $|i\rangle = |k_1 \dots k_n\rangle, |f\rangle = |p_1 \dots p_m\rangle, \mathcal{L}$ bis zur Ordnung n zeichnen
 - Anschaulich: Topologie-Aufgabe (erlaubte Vertices werden von \mathcal{L}_{int} vorgegeben)
- (a) Asymptotische Zustände $|i\rangle = |k_1 \dots k_n\rangle, |f\rangle = |p_1 \dots p_m\rangle$ legen Randbedingungen für die erlaubten Topologien fest
 - Achtung: Alle Möglichkeiten, auslaufende Impulse von identischen Teilchen aus unterschiedlichen Vertices mit dem “inneren Diagramm” zu verbinden, entsprechen unterschiedlichen Diagrammen
 - Notiz: Kann dieses Spiel prinzipiell auch für einlaufende Teilchen spielen – Ist aber nur für $n > 2$ nicht-trivial, und dieser Fall ist nicht interessant für Teilchenphysik
 - In der Praxis: Meist nur eine Möglichkeit, die Impulse zuzuordnen (Produktion mehrerer identischer Teilchen aus unterschiedlichen Vertices ist selten)
 - Achtung: Für n auslaufende Teilchen gibt es $\leq n!$ Möglichkeiten, die auslaufenden Impulse zuzuordnen, da aus demselben Vertex auslaufende Impulse nicht unterschieden und daher nicht doppelt gezählt werden können
 - Notiz: Matricelemente für Diagramme, die sich nur durch die Zuordnung der externen Impulse unterscheiden, kann man einfach auseinander ableiten
 - Explizit: Permutation der äußeren Impulse, Faktoren -1 für vertauschte Fermionen (“Crossing-Symmetrie”)
- (b) \mathcal{L}_{int} legt erlaubte Wechselwirkungen fest \Rightarrow Verbinde die asymptotischen Zustände auf alle möglichen Arten mit maximal n Wechselwirkungen (gebe n vor)
 - Lese aus jedem Summand in \mathcal{L}_{int} ab, wieviele und welche Teilchen an dieser Wechselwirkung teilnehmen

- Für jedes Teilchen in der Wechselwirkung (Linie, die vom Vertex wegläuft), gibt es ein Feld im Term in \mathcal{L}_{int}
- Jede mögliche Kombination von Verbindungen ist ein Feynman-Diagramm

2. Feynman-Regeln anwenden – Vom Feynman-Diagramm zum Summand in \mathcal{M}_{fi}

- Faktor $\epsilon^{i,\pm,(\dagger)}(p)$ für ein asymptotisches Teilchen vom Typ (p, i, \pm)
 - $\epsilon^{i,+}(p)/\epsilon^{i,+, \dagger}(p)$ für ein einlaufendes/auslaufendes Teilchen bzw $(p, i, +)$
 - $\epsilon^{i,-, \dagger}(p)/\epsilon^{i,-}(p)$ für ein einlaufendes/auslaufendes Antiteilchen bzw $(p, i, -)$
- Faktor $\tilde{\Delta}(p)$ für ein virtuelles Teilchen mit Impuls p
- Feynmanregel-Faktor für jeden Vertex einer Wechselwirkung
- Intuitiv: Dirac-Strukturen entgegen dem Spin-Fluss aufsammeln
 - Reihenfolge, in der man die Terme hinschreibt, ist hier wichtig – Matrizen kommutieren nicht
 - Alternative: Fermion-Indizes aus den Feynman-Regeln explizit ausschreiben \Rightarrow Finde selbes Ergebnis

3. Symmetriefaktoren

- Anschaulich: Berücksichtige, dass man durch Vertauschung von identischen Teilchen dasselbe Feynman-Diagramme erhalten kann \Rightarrow Teile durch Symmetriefaktor
 - Formal: Identische Teilchen sind ununterscheidbar \Rightarrow Darf durch Vertauschung von identischen Teilchen erhaltene Feynman-Diagramme nicht doppelt zählen
 - Symmetriefaktoren werden vom Formalismus (Wick-Kontraktionen oder Pfadintegral-Ableitungen) reproduziert \Rightarrow Muss nicht über identische Teilchen nachdenken, wenn ich diese Methoden verwende
 - Symmetrie-Faktoren sind ein Loop-Effekt (Baumgraphen haben immer Symmetriefaktor 1)
- Symmetriefaktoren erraten
 - Anschaulich: Denke über identische Teilchen nach und füge Symmetriefaktoren manuell ein \Rightarrow Einfachste Regel, verwende das in der Praxis
 - Formale Grundlage: Faktor $\frac{1}{n}$ für n Permutationen von Propagatoren (und den damit verbundenen Vertices), die dasselbe Diagramm liefern
 - Je ein Faktor $\frac{1}{n!}$ für zwei Vertices, die durch n identische Propagatoren verbunden sind (kann auch ganze Subdiagramme vertauschen)
 - Je ein Faktor $\frac{1}{2^n}$ für einen Vertex, der durch n Propagatoren mit sich selbst verbunden ist
- Symmetriefaktoren aus Wick-Kontraktionen: Zähle alle möglichen Wick-Kontraktionen für Felder/Felder, Felder/Zustände und mögliche Vertauschungen der Orts-Integrationsvariablen in $\int d^4x \mathcal{L}_{\text{int}}$
 - Idee: Gehe alle Propagatoren (Paare von Feld-Operatoren) ab und zähle, wieviele Möglichkeiten es noch gibt, diese Feld-Operatoren mit anderen Feld-Operatoren zu wick-kontrahieren; manche Kombinationen sind redundant \Rightarrow Zähle die nicht doppelt, erhalte zusätzlichen Faktor $\frac{1}{n} < 1$
- (a) Gehe nacheinander alle internen Linien durch und schreibe Faktoren $n_i \times m_i$ an die Linie i für je n_i und m_i offene identische Felder an den Vertices am Ende der Linie (die einzelnen Faktoren $n_i \times m_i$ hängen natürlich von der gewählten Reihenfolge ab, in der man die Vertices abklappert, deren Produkt ist aber immer gleich)
- (b) Zusätzlichen Faktor b für die Anzahl der Möglichkeiten, die externen Linien mit internen Linien zu verbinden
- (c) Symmetriefaktor ist $\left(\prod_j \frac{1}{k_j! \alpha_j^{k_j}} \right) \times b \left(\prod_i n_i m_i \right)$ für Feynman-Diagramm der Ordnungen k_i mit Symmetriefaktoren α_j in den Feynman-Regeln; i zählt alle Vertices, j zählt Art der Vertices (gleiche Feynman-Regel \Rightarrow gleiche Art)
- Symmetriefaktoren aus dem Pfadintegral: Exakt selbe Überlegung wie bei Wick-Kontraktionen, aber mit Funktionalableitungen statt Wick-Kontraktionen

4. Relative Minuszeichen für Feynman-Diagramme mit Fermionen

- Berücksichtige Vorzeichen durch Antikommutatoren von Fermionfeldern

- Relativer Faktor (-1) für jeden Fermion-Loop
 - Begründung (Wick-Kontraktionen): Erhalte Wick-Kontraktionen der Form $\bar{\psi}\psi\bar{\psi}\psi\cdots\psi \Rightarrow$ Muss für eine Wickkontraktion ein Fermion an einer ungeraden Anzahl von Fermionen vorbeikommutieren \Rightarrow Erhalte Faktor $(-1)^{2n+1} \stackrel{n \in \mathbb{N}}{=} -1$
- Relativer Faktor (-1) zwischen zwei Diagrammen, die durch Vertauschung von 2 externen Fermionen zusammenhängen (“Crossing-Symmetrie”)
 - Begründung: Vertauschung von zwei externen Fermionen liefert Faktor -1 wegen $a_{\vec{p}_1}^\dagger a_{\vec{p}_2}^\dagger = -a_{\vec{p}_2}^\dagger a_{\vec{p}_1}^\dagger$ für $p_1 \neq p_2$
 - Bildlich: Vertauschung von 2 externen Fermionen = Kreuzung von 2 externe-Fermion-Linien
- Faktorisierte Phasen sind unphysikalisch, da sie im Betragsquadrat wegfallen
 - Fazit: Vorzeichen sind nur wichtig, falls mehrere Diagramme zum Matrixelement beitragen

5.4.2 Konsistenzchecks

- Dimensionsanalyse für \mathcal{M}
 - Argument: \mathcal{M} hat Massendimension $4 - (n + m)$ für $n \rightarrow m$ -Prozess
 - * Herleitung: Kann Dimension von \mathcal{M} ablesen aus $dP = TV \left(\prod_{in,=1}^n \frac{1}{2E_j V} \right) |\mathcal{M}|^2 d\Phi_m = TV \left(\prod_{in,=1}^n \frac{1}{2E_j V} \right) |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(P - \sum_i p_i) \prod_{out,j=1}^m \frac{d^3 p_j}{2E_j}$
 - Notiz: Kann auch von einem anderen Ausdruck mit \mathcal{M} ausgehen
 - 1. dP hat Dimension 0
 - 2. $TV \delta^4(P - \sum_i p_i)$ hat Dimension $-1 - 3 - 4 = -8$
 - 3. $\prod_{in} \frac{1}{E_j V}, \prod_{out} \frac{d^3 p_j}{E_j}$ haben Dimension $2n, 2m$
 - 4. $|\mathcal{M}|^2$ hat Dimension $2[\mathcal{M}] \Rightarrow$ Finde $0 = 2([\mathcal{M}] + n + m - 4) \Rightarrow [\mathcal{M}] = 4 - (n + m)$
 - * Notiz: n, m dürfen nur in der Form $n + m$ vorkommen, da man in Feynman-Diagrammen ein- und auslaufende Teilchen nicht unterscheiden kann
 - Anwendung: Dimensionscheck für alle Ausdrücke, die bei Berechnung von Matrixelementen auftreten
 - * Achtung: Dieses Argument gilt nur für nicht-truncated-Matrixelement (bzw Matrixelemente mit Feld-Basisvektoren), da nur diese für Observablen verwendet werden können
 - Verwirrungsgefahr nur für Spinorfelder (dimensionsbehaftete Basisvektoren $[u] = [v] = \frac{1}{2}$ sind Konvention), nicht für Skalar- und Vektorfelder (dimensionslose Basisvektoren)
- \mathcal{M} enthält keine Divergenzen
 - Präziser: Alle Divergenzen wurden durch Renormierung in counterterms absorbiert
 - Kontrolle: UV-Limit (alle Massen = 0) darf Konvergenz-Verhalten nicht ändern
 - * Anschaulich: UV-Limit ist der Teil des Integrals, der die UV-Divergenzen verursacht (großes k^2) \Rightarrow Hier kann man wegen $\frac{m_i^2}{k^2} \ll 1$ effektiv alle Massen auf 0 setzen
 - Ungerade Terme im Loop-Impuls k liefern keine Divergenz
 1. Einführung der Feynman-Parameter bzw Substitution $k = q + f(p_i)$ ändert nichts am Divergenzverhalten (beschrieben durch k bzw q)
 2. Integral über ungerade Terme in k verschwindet wegen Symmetrisch+Antisymmetrisch-Argument
- \mathcal{M} hängt nicht von der Wahl der Eichung (bzw ξ) ab
 - In der Praxis nicht sehr nützlich, da die ξ -Abhängigkeit sich meist auf komplexe Art rauskürzt
 - Argumente, wie sich die ξ -Abhängigkeit kürzen kann
 - * Abelsche Eichtheorie: Ward-Identität
 - * Nicht-abelsche Eichtheorie (?)
 - * Theorien mit Higgs-Mechanismus (?)
- Ward-Identitäten für $U(1)$ -Eichtheorie müssen erfüllt sein

- Notiz: In der Praxis sind nur Ward-Identitäten für $U(1)$ -Eichtheorie nützlich, die Ward-Identitäten für nichtabelsche Eichtheorie (bzw Slavnov-Taylor-Identitäten) sind viel zu komplex, als dass sie eine einfache Kontrolle erlauben

* Ward-Identität für $U(1)$ -Eichtheorie: $k_\mu \mathcal{M}^\mu = 0$ für Matricelemente der Form $\mathcal{M} = \epsilon_\mu \mathcal{M}^\mu$

5.4.3 Vorarbeit für Observablen

1. Quadriertes Matricelement $|\mathcal{M}|^2 = \mathcal{M} \mathcal{M}^\dagger$

- Notiz: Matricelemente sind Zahlen, keine Operatoren bzw $\mathcal{M}^\dagger = \mathcal{M}^*$
 - Die Notation \mathcal{M}^\dagger ist nützlicher, da sie Verwirrung vorbeugt
 - (a) Matricelemente sind meist Skalarprodukte $\mathcal{M} = \vec{a}^\dagger \vec{b}$
 - (b) Rechnung: $(\vec{a}^\dagger \vec{b})^* = \vec{a}^T \vec{b}^* = \vec{b}^\dagger \vec{a} \left(= (\vec{a}^\dagger \vec{b})^\dagger \right)$, wobei der 2te Schritt in Indexnotation klar wird
 $\vec{a}^T \vec{b}^* = a_i b_i^* = b_i^* a_i = \vec{b}^\dagger \vec{a}$
 - (c) Notiz: Falls spin-gemittelt werden soll (= Polarisationsvektor-Vollständigkeitsrelation verwenden), benötigt man die Konstruktion $\epsilon^{i,\pm}(\vec{p})(\epsilon^{i,\pm}(\vec{p}))^\dagger$ und nicht $\epsilon^{i,\pm}(\vec{p})(\epsilon^{i,\pm}(\vec{p}))^* \Rightarrow$ Falls $\mathcal{M} \epsilon^{i,\pm}(\vec{p})$ enthält, sollte $\mathcal{M}^* \left(\epsilon^{i,\pm}(\vec{p}) \right)^\dagger$ enthalten
 - (d) Bevorzuge Ausdruck 4 ($\mathcal{M}^\dagger = (\vec{a}^\dagger \vec{b})^\dagger$) über Ausdruck 1 ($\mathcal{M}^* = (\vec{a}^\dagger \vec{b})^*$), um automatisch die vorteilhaftere Version ($\vec{b}^\dagger \vec{a}$) zu erhalten

2. Spin-gemittelttes Matricelement $\overline{|\mathcal{M}|^2} := \frac{1}{n_{\text{in}}} \sum_{\text{pol}} |\mathcal{M}|^2$

- Anschaulich: Betrachte Prozesse mit unpolarisierten Teilchen \Rightarrow Muss $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ statt $|\mathcal{M}|^2$ in die Observable einsetzen
 - Intuitiv: $|\mathcal{M}|^2$ enthält Informationen über Polarisierungen der externen Teilchen (beschrieben durch die Polarisationsvektoren) \Rightarrow Muss diese Information irgendwie loswerden
- Notation: n_{in} ist die Anzahl der Polarisierungen der einlaufenden Teilchen; \sum_{pol} summiert über die Indizes aller Polarisationsvektoren im Ausdruck
- Formal: Middle über Polarisierungen der einlaufenden Teilchen, summiere über Polarisierungen der auslaufenden Teilchen
 - Begründung: Das ist die intuitive Beschreibung von Prozessen mit unpolarisierten (= alle Polarisierungen gleich wahrscheinlich) Teilchen
 - Die Definition sagt genau das: $\overline{|\mathcal{M}|^2} := \frac{1}{n_{\text{in}}} \sum_{\text{pol}} |\mathcal{M}|^2 = \left(\frac{1}{n_{\text{in}}} \sum_{\text{pol, in}} \right) \left(\sum_{\text{pol, out}} \right) |\mathcal{M}|^2$
- Explizites Vorgehen
 - Beispiele für n_{in}
 - * Lorentz-Polarisationen: Reelles Skalarfeld (1), Masseloses Eichboson (2), Massives Eichboson (3), Weyl-Fermion (je 1 für Teilchen und Antiteilchen), Dirac-Fermion (je 2 für Teilchen und Antiteilchen)
 - * Polarisierungen durch innere Symmetrien (Eichsymmetrien, Flavour-Symmetrien)
 - Externe Skalare: Keine Polarisierungen \Rightarrow Muss über nichts summieren
 - Externe Fermionen: Verwende Vollständigkeitsrelationen
 $\sum_s u(p, s) \bar{u}(p, s) = \not{p} + m$, $\sum_s v(p, s) \bar{v}(p, s) = \not{p} - m$ mit $p^2 = m^2$
 - Externe masselose Eichbosonen: Verwende $\sum_i \epsilon_\mu^i(p) \epsilon_\nu^{i*}(p) = \tilde{\mathcal{P}} = -g_{\mu\nu} + (1 - \xi) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}$
 - * Spezialfall $U(1)$ -Eichboson: Wegen der Ward-Identität verschwindet der zweite Term immer \Rightarrow Habe $\sum_i \epsilon_\mu^i(p) \epsilon_\nu^{i*}(p) = -g_{\mu\nu}$
 - * Notiz: Form von $\tilde{\mathcal{P}}$ abhängig von der gewählten Eichung (die angegebene Form gilt für die kovariante Eichung $G^a(A_\mu^a) = \partial^\mu A_\mu^a$)
 - Achtung: Teilchen hat auch Nicht-Lorentz-Freiheitsgrade (zB colour, Generationsindex) \Rightarrow Erhalte einen Vorfaktor in den letzten 3 Punkten

- Graphische Darstellung und Feynman-Regeln für quadrierte und spin-gemittelte Matricelemente

- Anschaulich: Verwende Feynman-Regeln direkt zur Bestimmung $\overline{|\mathcal{M}|^2}$
 - * Nützlich: Wenn man die Feynman-Regeln für $i\mathcal{M}$ verstanden hat, kann man mit diesem Trick direkt $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ ablesen
 - Notiz: Dieser Formalismus (on-shell-Propagatoren bzw Cuts) wird auch allgemeiner für Manipulationen von $i\mathcal{M}$ verwendet
 - * Bsp: Cutting rules zur Bestimmung von $\text{Im}\mathcal{M}$ bzw $\text{Disc}i\mathcal{M}$ (5.8.2)
1. Feynman-Diagramme für $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ zeichnen
 - (a) Zeichne Feynman-Diagramm für $i\mathcal{M}$ (normal)
 - (b) Zeichne Feynman-Diagramm für $(i\mathcal{M})^\dagger = \text{Feynman-Diagramm für } i\mathcal{M} \text{ mit den Ersetzungen Teilchen/Antiteilchen und überall umgekehrten Impulsen}$
 - (c) Verbinde zusammengehörende externe Linien von $i\mathcal{M}$ und $(i\mathcal{M})^\dagger$
 - Geht per Konstruktion des Feynman-Diagramms von $(i\mathcal{M})^\dagger$ genau auf (zu jedem auslaufenden Teilchen gibt es ein einlaufendes Teilchen mit selbem Impuls)
 - (d) Markiere externe Linien mit einem “Cut”, der durch alle externen Linien geht
 - Notiz: Kann den Cut per Konstruktion so zeichnen, dass er keine internen Linien schneidet
 2. $N\overline{|\mathcal{M}|^2}$ ablesen mit normalen Feynman-Regeln
 - Notation: N ist Mittelungsfaktor in $\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{N} \sum_{\text{pol}} |\mathcal{M}|^2$, den man später manuell hinzufügen muss
 - Zusätzliche Feynman-Regel für externe (“cutted”) Linien: Nur $\tilde{\mathcal{P}}^\pm$ statt “vollständigem Propagator” $\frac{i\tilde{\mathcal{P}}^\pm}{p^2 - m^2 + i0}$
 - * Begründung mit “Projektor-Theorem” (2.3.5) $\mathcal{P}^\pm = \sum_i \epsilon^{i,\pm}(\vec{p}) \left(\epsilon^{i,\pm}(\vec{p}) \right)^\dagger$: Wenn ich naiv $N\overline{|\mathcal{M}|^2} = \sum_{\text{pol}} |\mathcal{M}|^2$ berechne, erhalte ich \mathcal{P}^\pm aus \sum_{pol}
 - * Begründung mit LSZ-Formel (3.5.2): Externe Zustände werden on-shell gesetzt bzw $(\partial^2 + m^2) \frac{\tilde{\mathcal{P}}^\pm}{p^2 - m^2} e^{ipx} = \tilde{\mathcal{P}}^\pm$
 - * Notiz: Per Konstruktion der $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ -Diagramme sind alle Fermion-Linien geschlossen (Faktor -1 für Fermion-Loop nicht vergessen!) \Rightarrow Erhalte Dirac-Spuren automatisch
 - Notiz: Erhalte Faktoren i hier anders (aber ebenso richtig)
 - * Normal: In $(i\mathcal{M})^\dagger$ werden alle Faktoren i geflippt bzw. $i \rightarrow -i$
 - * Hier: Erhalte gerade Potenz von Faktoren i (jedes i kommt doppelt vor), zusätzliche Faktoren -1 durch Fermion-Loops führen zu $N\overline{|\mathcal{M}|^2} \in \mathbb{R}$
 3. Mittelungs-Faktor N hinzufügen: $\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{N} \times N\overline{|\mathcal{M}|^2}$
 - Problem: Feynman-Diagramme für $\overline{|\mathcal{M}|^2}$ unterscheiden nicht zwischen ein- und auslaufenden externen Teilchen \Rightarrow Muss Mittelungs-Faktor manuell hinzufügen
 - Trick, um Schritt 3 zu umgehen: Verbinde nur externe Propagatoren von auslaufenden Teilchen, verwende für Polarisierungen von einlaufenden Teilchen immer noch $\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{N} \sum_{\text{pol}} |\mathcal{M}|^2$
 - * Formal: Kein Mittelungsfaktor $\frac{1}{N}$ für auslaufende Teilchen

5.4.4 Weitere Themen

- Arbeite mit $i\mathcal{M}$ statt \mathcal{M}
 - Begründung: Feynman-Regeln liefern direkt $i\mathcal{M}$ wegen Definition von \mathcal{M} ($\mathcal{S} = 1 + (2\pi)^4 \delta^4(\sum_i p_i) i\mathcal{M}$)
 - Macht für Observablen keinen Unterschied, da $|i\mathcal{M}| = |\mathcal{M}|$
- Intuition für Chiralitätsfluss in Diagrammen mit chiralen Fermionen
 - Anschaulich: Intuition dafür entwickeln, welche Chiralität Teilchen in Feynman-Diagrammen haben und wo diese sich ändert
 - Vertex mit gerader/ungerader Anzahl von γ^μ -Matrizen lässt gleich/ändert die Chiralität eines Fermions

- * Begründung: $\gamma^\mu P_L = P_R \gamma^\mu$; erhalte immer +1 γ -Matrix wegen $\bar{u} = u^\dagger \gamma^0$
- * Konkret: $1, \sigma^{\mu\nu}, \gamma_5$ ändern Chiralität eines Fermions, $\gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma_5$ ändern Chiralität nicht
- "Mass insertions" ändern die Chiralität eines Fermions während der Propagation
 - * Formal: Fermion-Propagator $\frac{i}{p^2 - m^2 + i0}(\pm \not{p} + m)$ enthält γ^μ -Term (ändert Chiralität nicht) und $m\mathbb{1}$ -Term (ändert Chiralität) \Rightarrow Beide Terme können im Matricelement beitragen (falls das keine Probleme mit Chiralitäts-Erhaltung verursacht), in Spezialfällen kann aber auch nur einer der Beiden beitragen
 - * Graphische Darstellung einer mass insertion: Kreuz als Massen-WW-Term
 - * Faustregel: Für Hochenergie-Prozesse sind mass insertions gegenüber \not{p} -Termen unterdrückt (wegen $p \gg m$) und Chiralität ändert sich während Propagation nicht, für Niedrigenergie-Prozesse (Streuung von schweren Teilchen mit ähnlicher Masse) ist es umgekehrt
- An einem Vertex können nur Fermionen einer bestimmten Chiralität wechselwirken \Rightarrow Kann minimal notwendige Potenz an Fermion-Massen aus mass insertions ablesen
 - * Konkret: Kann ausgehend von den Quellen der "bevorzugten Chiralität" (= chirale Vertices) nötige Chiralitäten der Fermionen rekonstruieren \Rightarrow Lege fest, wo mass insertions nötig sind
 - * Nützlich, um in Loop-Diagrammen das Divergenzverhalten abzulesen
 - Argument: Fermion-Propagatoren mit mass insertions sind höchstens $\sim \frac{1}{p^2}$, Fermion-Propagatoren ohne mass insertions nur höchstens $\sim \frac{1}{p}$
 - * Bsp $SU(2)_L$ -WW im SM: Mit W -Bosonen wechselwirkende Fermionen müssen L-Chiralität haben
- Feynman-Diagramme mit Flavour-Eigenzuständen (...)
 - Bsp: Viele Leute arbeiten in Neutrinophysik mit Flavor- statt Massen-Eigenzuständen in Diagrammen

5.4.5 Tricks, um Matricelemente zu vereinfachen

- **BGLs** für Polarisationsvektoren verwenden
 - Argument: Polarisationsvektoren (von externen Zuständen) müssen die **BGLs** erfüllen
 - Für welche Felder ist das nützlich?
 - * Skalare: Triviale **BGL** $p^2 = m^2 \Rightarrow$ Bringt nichts
 - * Fermionen: $(\pm \not{p} - m)\epsilon^\pm(p) = 0 \Rightarrow$ Sehr nützlich (\not{p} kommt oft vor)
 - * Eichbosonen: $\left(-g^{\mu\nu}p^2 + (1 - \frac{1}{\xi})p^\mu p^\nu\right)\epsilon_\mu(p) = 0 \Rightarrow$ Semi-nützlich (diese Konstruktion kommt selten vor)
- Ward-Identität verwenden (für $U(1)$ -Eichtheorie)

5.5 Weitere Themen auf Diagramm-Ebene

5.5.1 Tadpole-Diagramme

- Benennung: Tadpole = Kaulquappe
 - Tadpole-Diagramm auf 1-Loop mit Propagator nach unten und Loop oben erinnert an Kaulquappe
- Formaler Hintergrund: Tadpole-Diagramme entsprechen 1-Punkt-Greensfunktionen
 - Kann Wert des Tadpole-Diagramms als Vakuum-Erwartungswert des zugehörigen Felds interpretieren
- Skalar-Tadpole
 - Tadpole ohne Loop hängt von Vakuum-Erwartungswert des Skalars ab
 - * Skalar hat verschwindenden/nicht verschwindenden Vakuum-Erwartungswert \Rightarrow Tadpole ohne Loop verschwindet/verschwindet nicht

- Begründung: Skalar-Tadpole entspricht dem Vakuum-Erwartungswert des Skalars
- Tadpole mit virtuellem Skalar/Fermion/Eichboson hängt von der Theorie ab (?)
- Fermion-Tadpole
 - Fermion-Tadpole verschwindet
 - * Intuitive Begründung: Fermion-Fluss funktioniert nicht (wohin geht der Fermion-Pfeil im Tadpole?)
 - * Formale Begründung: Kann aus einem einzelnen Fermionen keinen Lorentz-Skalar konstruieren
- Eichboson-Tadpole
 - Tadpole mit virtuellem Eichboson verschwindet
 - * Abelsche Eichtheorie: 3-Eichboson-Vertex existiert nicht \Rightarrow Diagramm existiert nicht
 - * Nicht-abelsche Eichtheorie: 3-Eichboson-Vertex ist proportional zu (antisymmetrischen) Strukturkonstanten, Eichboson-Propagator enthält Eichgruppen-Einheitsmatrix \Rightarrow Diagramm ist symmetrisch und antisymmetrisch in Eichgruppen-Indizes und verschwindet daher
 - Tadpole mit virtuellem Fermion/Skalar verschwindet, weil die Generatoren spurlos sind $\text{tr} T^a = 0$ (?)
 - * Eichboson kann nur über kovariante Ableitung an Fermionen/Skalare koppeln, diese enthalten einen Eichgruppen-Generator T^a

5.5.2 Summation von 1PI-Diagrammen (...)

5.6 Zerfall

5.6.1 Grundlagen

- Bevorzugtes Bezugssystem: Ruhesystem des zerfallenden Teilchens $P = (M, \vec{0})$
 - Konkret: Kann $P p_i = M E_i$ verwenden
- Für unpolarisierten n -Teilchen-Zerfall gibt es $f_n = \frac{n(n-1)}{2} - 1 + \binom{n}{4}$ unabhängige Parameter (?)
 - Anschaulich: f_n ist die Anzahl an nicht-trivialen (keine δ -Distribution) Integrationen, die zur Berechnung von Γ durchgeführt werden müssen
- 1. Wegen $m_{ii}^2 = m_i^2, m_{ij}^2 = m_{ji}^2$ gibt es $\frac{n(n-1)}{2}$ unabhängige Kinematik-Parameter m_{ij}^2 für n -Teilchen-Zerfall
- 2. Relation $M^2 + \sum_i m_i^2 = \sum_{i < j} m_{ij}^2$ legt einen weiteren Parameter fest
- 3. Für $n \geq 4$ sind zusätzlich $\binom{n}{4}$ nicht-verschwindende Konstruktionen mit $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ möglich
- Beispiele
 - * $n = 2$: $f_n = 0 \Rightarrow$ Kinematik von unpolarisiertem 2-Teilchen-Zerfall ist trivial
 - * $n = 3$: $f_n = 2$
 - * $n = 4$: $f_n = 6$ (?)
 - * $n = 5$: $f_n = 14$ (?)
- Für polarisierten Zerfall (zusätzliche ausgezeichnete Achse \vec{n}) existieren auch Terme der Form $\vec{n} \vec{p}_i$ und die Parameter m_{ij}^2 beschreiben nicht mehr alle Freiheitsgrade
- Für Streuung (zusätzliche ausgezeichnete Achse \vec{P} , zB im Schwerpunktsystem $P_1 = (E_1, \vec{P}), P_2 = (E_2, -\vec{P})$) existieren auch Terme der Form $\vec{P} \vec{p}_i$ und die Parameter m_{ij}^2 beschreiben nicht mehr alle Freiheitsgrade
 - * Polarisierte Streuung: Zwei ausgezeichnete Achsen $\vec{n}, \vec{P} \Rightarrow$ Noch mehr Freiheitsgrade

5.6.2 2-Körper-Zerfall

- Unpolarisierter 2-Körper-Zerfall: $\Gamma = \frac{1}{16\pi M} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \sqrt{\left(1 - \left(\frac{m_1+m_2}{M}\right)^2\right) \left(1 - \left(\frac{m_1-m_2}{M}\right)^2\right)}$
- Polarisierter 2-Körper-Zerfall: $d\Gamma = \frac{1}{64\pi^2 M} \sqrt{\left(1 - \left(\frac{m_1+m_2}{M}\right)^2\right) \left(1 - \left(\frac{m_1-m_2}{M}\right)^2\right)} d\Omega |\mathcal{M}_{fi}|^2$
 - Muss noch über Raumwinkel $d\Omega$ integrieren

5.6.3 3-Körper-Zerfall

- Wahl der Kinematik-Parameter
 - Konvention: Wähle m_{12}^2, m_{23}^2
 - * Erhalte Relationen für andere Wahl der Parameter durch Ersetzung $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ bzw $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$
 - Kinematisch erlaubter Bereich
 - * “Absolute” Schranken (unabhängig von m_{12}^2): $m_{12}^2 \in [(m_1 + m_2)^2, (M - m_3)^2], m_{23}^2 \in [(m_2 + m_3)^2, (M - m_1)^2]$ (?)
 - * “Relative” Schranken (abhängig von m_{12}^2): $m_{23}^2 \in [(E_2^{\text{CM}} + E_3^{\text{CM}}) - (p_2^{\text{CM}} - p_3^{\text{CM}}), (E_2^{\text{CM}} + E_3^{\text{CM}}) - (p_2^{\text{CM}} + p_3^{\text{CM}})]$ mit $E_2^{\text{CM}} = \frac{m_{12}^2 - m_1^2 + m_2^2}{2m_{12}}, E_3^{\text{CM}} = \frac{M^2 - m_{12}^2 + m_3^2}{2m_{12}}, p_i^{\text{CM}} = \sqrt{(E_i^{\text{CM}})^2 - m_i^2}$ (?)
 - Unpolarisierter 3-Körper-Zerfall $d\Gamma = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{32M^3} |\mathcal{M}_{fi}|^2 dm_{12}^2 dm_{23}^2 = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{8M} |\mathcal{M}_{fi}|^2 dE_1 dE_3$
 - Herleitung anschaulich: $|\mathcal{M}_{fi}|^2$ kann nur von m_{12}^2, m_{23}^2 bzw E_1, E_3 abhängen \Rightarrow Kann alle anderen Phasenraum-Integrale ausführen
 - * In der Praxis recht kompliziert (Challenge: Integrale geschickt parametrisieren) – Habe es noch nicht geschafft, das direkt nachzurechnen
1. $d\Gamma = \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{1}{16M} |\mathcal{M}_{fi}|^2 dE_1 dE_3 d\alpha d\cos\beta d\gamma$
 - Plausibilisierung: $d\Gamma$ kann nur von E_1, E_3 (bzw m_{12}^2, m_{23}^2) und den Euler-Winkeln α, β, γ abhängen $\Rightarrow d\Gamma$ hat diese Form (?)
 2. $d\Gamma = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{8M} |\mathcal{M}_{fi}|^2 dE_1 dE_3$
 - Verwende hier, dass der Zerfall unpolarisiert ist
 - Argument: $|\mathcal{M}_{fi}|^2$ hängt nur von E_1, E_3 bzw m_{12}^2, m_{23}^2 ab \Rightarrow Kann Winkelintegration mit $\alpha, \gamma \in [0, 2\pi]$ und $\cos\beta \in [-1, 1]$ durchführen
 - Müsste dieses Ergebnis auch direkt aus der Definition von $d\Gamma$ ableiten können (?)
 3. Substitution von E_1, E_3 zu $m_{12}^2, m_{23}^2 \Rightarrow$ Finde $d\Gamma = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{32M^3} |\mathcal{M}_{fi}|^2 dm_{12}^2 dm_{23}^2$
 - Benutze obige Relation und $dm_{12}^2 = d(p_1 + p_2)^2 = d(P - p_3)^2 = d(M^2 + m_3^2 - 2ME_3) = -2MdE_3, dm_{23}^2 = d(p_2 + p_3)^2 = d(P - p_1)^2 = d(M^2 + m_1^2 - 2ME_1) = -2MdE_1$
- Dalitz-Plot-Formalismus (Dalitz, 1953)
 - Dalitz-Plot = Graphische Darstellung des Phasenraums (m_{12}^2, m_{23}^2) für 3-Körper-Zerfall
 - * Jeder Punkt im Dalitz-Plot entspricht einer möglichen Konfiguration der Kinematik-Parameter
 - * m_{13}^2 entspricht der diagonalen Achse im Raum aufgespannt durch m_{12}^2, m_{23}^2
 - Zerfall über Resonanzen
 - * Anschaulich: Zerfall $P \rightarrow p_1 p_2 p_3$ kann über Resonanzen ablaufen, die dann einen Einfluss auf die Wahrscheinlichkeiten für die möglichen Konfigurationen der Parameter m_{12}^2, m_{23}^2 haben
 - Bsp: $P \rightarrow q p_3 \rightarrow p_1 p_2 p_3$ mit Resonanz q , die durch $q \rightarrow p_1 p_2$ zerfällt \Rightarrow Erwarte erhöhte Wahrscheinlichkeit für $m_{12}^2 = m_q^2$
 - * Zerfall ohne Resonanzen/“Phasenraum-Zerfall” \Rightarrow Alle Konfigurationen (m_{12}^2, m_{23}^2) gleich wahrscheinlich

- Im Dalitz-Plot: Sehe keine Bänder
- * Zerfall mit Resonanzen \Rightarrow Ausgezeichnete Konfigurationen für $m_{12}^2/m_{23}^2/m_{13}^2$ mit erhöhter Wahrscheinlichkeit
 - Im Dalitz-Plot: Sehe Bänder für konstante Werte von $m_{12}^2/m_{23}^2/m_{13}^2$, Breite der Bänder hängt von Lebensdauer der Resonanz ab
 - Form der Bänder bestimmt durch Spin S der Resonanz (Zerfallsamplitude ist Legendre-Polynom \Rightarrow Band hat S Nullstellen)
 - Mehrere Resonanzen \Rightarrow Bänder überlagern sich, erhalte komplexes Bild
- * Fazit: Kann im Dalitz-Plot schön Interferenzen von Zerfallsamplituden über verschiedene Resonanzen erkennen \Rightarrow Nützlich für CPV-Analysen

5.7 Streuung

5.7.1 Grundlagen

- Motivation für Wirkungsquerschnitt $d\sigma$: $dN = L d\sigma$
 - Interpretation: Zerlege Gesamt-Information (dN) in Information über Teilchenstrahl (“Luminosität” L) und Information über zugrundeliegenden physikalischen Prozess ($d\sigma$)
 - L ist durch diese Relation definiert
- Bevorzugtes Bezugssystem: Schwerpunktsystem bzw $\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = 0$ für die beiden zerfallenden Teilchen

5.7.2 $2 \rightarrow 2$ -Streuung

- Mandelstam-Variablen $s := (P_1 + P_2)^2 = (p_1 + p_2)^2$, $t := (P_1 - p_1)^2 = (P_2 - p_2)^2$, $u := (P_1 - p_2)^2 = (P_2 - p_1)^2$
 - Anschaulich: Nützliche Abkürzung für häufig auftauchende kinematische Freiheitsgrade
 - * Vorteil: s, t, u sind lorentzinvariant
 - * Konkret: Mit s, t, u nehmen die Propagatoren für die 3 möglichen Topologien (“s-channel”, “t-channel”, “u-channel”) die Form $\propto \frac{1}{s-m_M^2}, \frac{1}{t-m_M^2}, \frac{1}{u-m_M^2}$ mit dem Mediator-Teilchen M an
 - s, t, u erfüllen die Beziehung $s + t + u = \sum_i M_i^2 + \sum_i m_i^2$
 - Achtung: Der Name “Mandelstam-Variablen” impliziert, dass s, t, u Variablen sind – Mit gegebenem P_1, P_2 und $s + t + u = \sum_i M_i^2 + \sum_i m_i^2$ sind sie aber festgelegt
 - Notiz: Mandelstam-Variable $s := (\sum_i p_i)^2 = (\sum_i P_i)^2$ wird oft auch allgemeiner als Schwerpunktsenergie $E^{\text{CM}} = \sqrt{s}$ verwendet
 - Typischer Wertebereich
 - * $s > 0$ gilt immer (logisch wegen Interpretation $E_{\text{CM}} = \sqrt{s}$)
 - * $t < 0$: Typisch in Hochenergie-Kollisionen, folgt formal für $m_1 = m_3$ oder $m_2 = m_4$
 - * $u < 0$: Typisch in Hochenergie-Kollisionen, folgt formal für $m_1 = m_4$ oder $m_2 = m_3$
- Kinematik im Schwerpunktsystem $\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$
 - Parametrisierung: $P_1 = (E_1, \vec{P}_1), P_2 = (E_2, -\vec{P}_1), p_1 = (E_{p_1}, \vec{p}_1), p_2 = (E_{p_2}, -\vec{p}_1)$ und $\vec{P}_1 \vec{p}_1 = P p \cos \theta$ mit $P = |\vec{P}_1|, p = |\vec{p}_1|$
 - * Anschaulich: θ ist Streuwinkel zwischen ein- und auslaufenden Teilchen
 - $P, p, E_1, E_2, E_{p_1}, E_{p_2}$ alle bestimmt durch s
 - * Explizit: $P = \frac{\sqrt{s}}{2} \sqrt{1 - 2 \frac{M_1^2 + M_2^2}{s} + \frac{(M_1^2 - M_2^2)^2}{s^2}}, p = \frac{\sqrt{s}}{2} \sqrt{1 - 2 \frac{m_1^2 + m_2^2}{s} + \frac{(m_1^2 - m_2^2)^2}{s^2}}, E_1 = \sqrt{P^2 + M_1^2}, E_2 = \sqrt{P^2 + M_2^2}, E_{p_1} = \sqrt{p^2 + m_1^2}, E_{p_2} = \sqrt{p^2 + m_2^2}$
 - $\cos \theta$ ist äquivalent zu t bzw u
 - * t und u sind abhängig wegen $s + t + u = M_1^2 + M_2^2 + m_1^2 + m_2^2$
 - * Explizit: $t = (P_1 - p_1)^2 = M_1^2 + m_1^2 - 2(E_1 E_{p_1} - p P \cos \theta), u = (P_1 - p_2)^2 = M_1^2 + m_2^2 - 2(E_1 E_{p_2} + p P \cos \theta)$

- Wirkungsquerschnitt $d\sigma = \frac{1}{128\pi^2} \frac{1}{\sqrt{(P_1 P_2)^2 - M_1^2 M_2^2}} \sqrt{\left(1 - \left(\frac{m_1 + m_2}{\sqrt{s}}\right)^2\right) \left(1 - \left(\frac{m_1 - m_2}{\sqrt{s}}\right)^2\right)} d\Omega |\mathcal{M}_{fi}|^2$
 - Achtung: Bei Streuung ist die Winkelintegration i.A. nicht-trivial (im Gegensatz zum Zerfall)
 - Kurzform: $d\sigma = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{p}{P} |\mathcal{M}|^2 d\Omega$
 - Alternativ: $d\sigma = \frac{1}{64\pi s} \frac{1}{P^2} |\mathcal{M}|^2 d\Omega$ mit $t \in [M_1^2 + m_1^2 - 2(E_1 E_{p_1} + 2pP), M_1^2 + 2m_1^2 - 2(E_1 E_{p_1} - 2pP)]$
- Prozesse im “s/t/u-Kanal” \iff Mediator-Teilchen hat Impulsquadrat $p^2 = s/t/u \iff \sigma \propto \frac{1}{s}/\frac{1}{t}/\frac{1}{u}$

5.7.3 Produktion und Zerfall von instabilen Teilchen

- Typischer Prozess am Collider: Produktion und Zerfall von instabilen Teilchen
 - Bsp: Z-Bosonen (zB LEP-1), Higgs-Bosonen (zB LHC), top-Quarks (zB Tevatron)
 - Kinematik-Eigenschaften des Teilchens beschrieben durch m, Γ (instabiles Teilchen hat $\Gamma > 0$)
 - * $\frac{\Gamma}{m}$ ist ein Maß dafür, wie instabil das Teilchen ist (kleines $\frac{\Gamma}{m} \Rightarrow$ stabiler) \Rightarrow Arbeite im Grenzfall $\frac{\Gamma}{m} \ll 1$
- Exakte Behandlung
 - Anschaulich: Exakte Beschreibung ist das naive allgemeine Vorgehen, das oben beschrieben wurde
 - * Problem: Rechnung meist aufwändig
 - Matrixelement enthält Propagator des instabilen Teilchens $\tilde{\Delta}^\pm \propto \frac{1}{p^2 - m^2 + 2im\Gamma}$
 - * Form des Propagators $\tilde{\Delta}^\pm \propto \frac{1}{p^2 - m^2 + im\Gamma}$: Führe in $\tilde{\Delta}^\pm \propto \frac{1}{p^2 - m^2}$ die Ersetzung $m \rightarrow m - \frac{i}{2}\Gamma$ durch und behalte nur führenden Term in $\frac{\Gamma}{m} \ll 1$
 - Begründung für $m \rightarrow m - \frac{i}{2}\Gamma$: Berücksichtige Zerfallseffekte $e^{-\frac{1}{2}\Gamma t}$ (Faktor $\frac{1}{2}$, damit $|\phi|^2 \sim e^{-\Gamma t}$) im Fourier-Faktor $e^{-ipx} \stackrel{CM}{=} e^{-imt} \Rightarrow e^{-imt} e^{-\frac{1}{2}\Gamma t} = e^{-i(m - \frac{i}{2}\Gamma)t} = e^{-im_{\text{eff}}t}$
 - Explizit: $p^2 - m_{\text{eff}}^2 = p^2 - (m - \frac{i}{2}\Gamma)^2 = p^2 - m^2 + im\Gamma + \frac{1}{4}\Gamma^2 = p^2 - m^2 + im\Gamma + \mathcal{O}(\frac{\Gamma}{m})^2$
 - Notiz: $im\Gamma$ (und nicht $-m^2$) ist der führende Term in $\frac{\Gamma}{m}$, da $p^2 - m^2 = 0$ für on-shell-Teilchen
 - * Notiz: Observable enthält Breit-Wigner-Verteilung $|\tilde{\Delta}^\pm|^2 \propto \frac{1}{p^2 - m^2 + im\Gamma} = \frac{1}{(p^2 - m^2)^2 + m^2\Gamma^2}$
 - Struktur von Matrixelementen für Streuprozess $AB \rightarrow ad \rightarrow abc$ mit instabilem Teilchen d :

$$\mathcal{M}(AB \rightarrow abc) = \frac{\mathcal{M}(AB \rightarrow ad)\mathcal{M}(d \rightarrow bc)}{p_{bc}^2 - m_d^2 + im_d\Gamma_d}$$
 - Narrow width approximation (NWA)
 - Anschaulich: Für on-shell-Teilchen faktorisieren Produktion und Zerfall des instabilen Teilchens in führender Ordnung in $\frac{\Gamma}{m} \Rightarrow$ Rechnung wird stark vereinfacht
 - * NWA ist Grundlage für die meisten Rechnungen am Collider
 - * Große Kunst: Systematisch Korrekturen zur NWA bestimmen
 - Formal: $\frac{1}{(p^2 - m^2) + m^2\Gamma^2} = \frac{\pi}{m\Gamma} \delta(p^2 - m^2) + \mathcal{O}(\frac{\Gamma}{m}) \Rightarrow$ Phasenraum-Integration über p^2 ist trivial
 1. Herleitung mit $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + x^2} = \pi \delta(x)$: $\frac{1}{(p^2 - m^2) + m^2\Gamma^2} = \frac{1}{m^3\Gamma} \frac{\frac{\Gamma/m}{\left(\frac{p^2 - m^2}{m^2}\right)^2 + (\Gamma/m)^2}} = \frac{1}{m^3\Gamma} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}$
 $\stackrel{\epsilon = \Gamma/m \ll 1}{=} \frac{1}{m^3\Gamma} \pi \delta\left(\frac{p^2 - m^2}{m^2}\right) = \frac{1}{m^3\Gamma} \pi m^2 \delta(p^2 - m^2) = \frac{\pi}{m\Gamma} \delta(p^2 - m^2)$ (halte $m^3\Gamma = \text{const}$ während $\frac{\Gamma}{m} \rightarrow 0$)
 - * $\mathcal{O}(\frac{\Gamma}{m})$ steht für Korrekturen zum exakten Ausdruck für $\frac{\Gamma}{m} \rightarrow 0$
 - * Interpretation: Für den führenden Beitrag zum Matrixelement (Entwicklung in $\frac{\Gamma}{m} \ll 1$) ist das instabile Teilchen on-shell
 2. Phasenraum-Integration über Impuls p^2 des instabilen Teilchens in σ ist trivial: $\int dp^2 \left| \frac{1}{q^2 - m^2 + im\Gamma} \right| = \frac{\pi}{m\Gamma} \int dp^2 \delta(p^2 - m^2) = \frac{\pi}{m\Gamma}$
 - Formale Voraussetzungen für Verwendung der NWA (siehe [NWA review](#), [NWA für NP](#))
 - * $\frac{\Gamma}{m} \ll 1$

- * Massen m_i der Zerfallsprodukte von m sind klein $\frac{m_i}{m} \ll 1$
- * Streuung bei hohen Energien $\frac{m}{E_{\text{CM}}} \ll 1$
- * Keine Komplikationen im Matrixelement (Interferenz-Effekte, Propagator kann nicht ausfaktoriert werden etc)
- * Fazit: Erfüllt für $W/Z, t, h$ am Hochenergie-Collider, aber für viele andere Prozesse nicht
- In der Praxis: $\sigma_{\text{NWA}} = \sigma_{\text{prod}} \times \mathcal{B}$ mit branching ratio $\mathcal{B} = \frac{\Gamma_{\text{dec}}}{\Gamma_{\text{tot}}}$
 - * NWA für mehrere instabile Teilchen im Prozess: $\sigma_{\text{NWA}} = \sigma_{\text{prod}} \times \prod_i \mathcal{B}_i$ mit den jeweiligen branching ratios $\mathcal{B}_i = \frac{\Gamma_{\text{dec},i}}{\Gamma_{\text{tot},i}}$
- NWA vereinfacht Rechnungen
 - * Anzahl der nötigen Phasenraum-Integrationen wird reduziert
 - * Kann Produktion und Zerfall getrennt berechnen \Rightarrow Konzeptionell einfacher
 - Loop-Rechnungen werden vereinfacht, da viele Loop-Diagramme (Loops, die Produktion und Zerfall beinhalten) wegfallen
- Achtung: NWA gilt nur für on-shell-Teilchen \Rightarrow Darf nur experimentelle Daten von on-shell-Teilchen verwenden, um NWA-Vorhersagen zu testen
 - * In der Praxis: Fordere Bedingungen ("cuts") an Kinematik-Größen der Teilchen im Prozess
- Notiz: Konzept Zerfallsrate ist streng genommen überflüssig und sogar formal inkonsistent
 - Ehrliches Vorgehen: Betrachte Produktion, Propagation und Zerfall eines instabilen Teilchens als einen gemeinsamen Prozess
 - Begründung für "überflüssig": Jedes instabile Teilchen muss irgendwo in einem Streu-Prozess aus stabilen Teilchen produziert worden sein \Rightarrow Es ist besser (und konsistenter), Produktion, Propagation und Zerfall des instabilen Teilchens als einen gemeinsamen Prozess zu beschreiben
 - Begründung für "inkonsistent": Konzept asymptotischer Zustände (verwendet zur Definition der Matrixelemente) macht für instabile Teilchen keinen Sinn, da ein asymptotischer Zustand eines instabilen Teilchens bereits unendlich lange propagiert und es daher schon zerfallen sein müsste
 - ABER: Konzept Zerfallsrate ist nützlich, da es Rechnungen vereinfacht
 - * Ein instabiles Teilchen ist ungefähr on-shell \Rightarrow Kann makroskopisch lange propagieren (...)
 - Begründung von "ungefähr": Instabiles propagierendes Teilchen wird durch Energie-Zeit-Unschärfe beschrieben, diese erlaubt eine kleine Verletzung der Energieerhaltung bzw on-shell-ness für kurze Propagationszeiten
 - Formalisierung dieser Überlegung: narrow width approximation (siehe 5.7.3)

5.8 Tricks mit $\text{Disc}\mathcal{M}$

5.8.1 Übersicht

- Zentrale Größe: $\text{Disc}i\mathcal{M}(k^0) = i\mathcal{M}(k^0 + i0) - i\mathcal{M}(k^0 - i0) = -2\text{Im}\mathcal{M}(k^0)$
 - Anschaulich: $\text{Im}i\mathcal{M}$ enthält die Unstetigkeiten (= interessant) in $i\mathcal{M}$
 - "Disc" steht für discontinuities (Unstetigkeiten)
- Rechentricks mit $\text{Disc}i\mathcal{M}$
 - Berechne $\text{Disc}\mathcal{M}$: Cutting rules
 - Verbindung zwischen $\text{Disc}\mathcal{M}$ und Observablen: Optisches Theorem
- $i\mathcal{M}$ aus $\text{Disc}i\mathcal{M}$ (siehe Melnikov TTP2 lec3)
 - $i\mathcal{M} = \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{ds'}{s-s'} \text{Im}i\mathcal{M} + \text{polynom in } s \dots$

5.8.2 Cutting rules

- Anwendung der Cutting rules

- Anschaulich: Cutting rules sind Trick, um Imaginärteile von Diagrammen mit Loops zu berechnen
 - * Feeling: Tausche Loop-Integration gegen Kombinatorik
 - * Funktioniert auch für Diagramme ohne Loops, ist dort aber trivial

- Kurzversion: $\text{Disc} i\mathcal{M} = \sum_{\text{cuts}} i\mathcal{M} \Big|_{\frac{1}{p_i^2 - m_i^2 + i0} \rightarrow -2i\pi\delta(p_i^2 - m_i^2)\Theta(p_i^0)}$

1. Summiere über alle möglichen Cuts durch das Diagramm $i\mathcal{M}$, für die man alle gecutteten Propagatoren on-shell setzen kann, ohne 4-Impulserhaltung zu verletzen
2. Ersetze jeden gecutteten Propagator $\frac{1}{p_i^2 - m_i^2 + i0} \rightarrow -2i\pi\delta(p_i^2 - m_i^2)\Theta(p_i^0)$
3. Das Ergebnis entspricht $\text{Disc} i\mathcal{M}$

- Cutting rules nachrechnen

- Anschaulich: Cutting rules sind eher ein Erfahrungswert als ein Theorem – Könnte sie explizit nachrechnen, die Rechnung ist aber trivial und daher verwendet man die Merkgeln
 - * Selbes Prinzip wie bei Feynman-Regeln

1. Relation $\text{Im} \frac{1}{p^2 - m^2 + i0} = -\pi\delta(p^2 - m^2)$

- Interpretation: Propagator ist reell, außer für $p^2 = m^2$
- Rechnung ist nicht wild, kann man direkt (unter dem Integral) nachrechnen

(a) $\text{Im} \frac{1}{p^2 - m^2 + i0} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{p^2 - m^2 + i0} - \frac{1}{p^2 - m^2 - i0} \right) = \frac{1}{2i} \left(\frac{p^2 - m^2 - i0}{(p^2 - m^2)^2 + 0^2} - \frac{p^2 - m^2 + i0}{(p^2 - m^2)^2 + 0^2} \right) = \frac{-0}{(p^2 - m^2)^2 + 0^2}$ ("0" steht für ϵ mit $\lim_{\epsilon \rightarrow 0}$)

(b) $p^2 \neq m^2 \Rightarrow \text{Im} \frac{1}{p^2 - m^2 + i0} = \frac{-0}{(p^2 - m^2)^2 + 0^2} = 0$

(c) Vorsichtiger für $p^2 = m^2$: $\int_0^\infty dp^2 \frac{-0}{(p^2 - m^2)^2 + 0^2} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty dp^2 \frac{-\epsilon}{(p^2 - m^2)^2 + \epsilon^2}$
 $\stackrel{u=p^2-m^2}{=} -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-m^2}^\infty du \frac{\epsilon}{u^2 + \epsilon^2} = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \arctan \frac{u}{\epsilon} \Big|_{-m^2}^\infty = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{-m^2}{\epsilon} \right) = -\pi$

(d) Vergleich mit $\int_0^\infty dp^2 (-\pi)\delta(p^2 - m^2) = -\pi \Rightarrow$ Finde die gesuchte Relation

2. Relation $\Delta_F(k) = \Delta_R(k) + \frac{\pi}{E_{\vec{k}}} \delta(k^0 - E_{\vec{k}})$

- Interpretation: Feynman- und retardierter Propagator sind identisch, außer für $p^2 = m^2$ bzw $k^0 = E_{\vec{k}}$

- Notation: Δ_F / Δ_R für Feynman-Propagator/retardierten Propagator

- * Unterschied der beiden Objekte: Unterschiedliche Kausalität bzw unterschiedliche Pole in der komplexen Ebene

- * Definitionen: $\Delta_F = \frac{i}{k^2 - m^2 + i0} = \frac{i}{2E_{\vec{k}}} \left(\frac{1}{k^0 - E_{\vec{k}} + i0} - \frac{1}{k^0 + E_{\vec{k}} - i0} \right),$

$$\Delta_R = \frac{i}{k^2 - m^2 + i0 \text{sgn}(k^0)} = \frac{i}{2E_{\vec{k}}} \left(\frac{1}{k^0 - E_{\vec{k}} - i0} - \frac{1}{k^0 + E_{\vec{k}} - i0} \right)$$

- Verwende $\frac{1}{k^0 - E_{\vec{k}} + i0} - \frac{1}{k^0 + E_{\vec{k}} - i0} = -2\pi i \delta(k^0 - E_{\vec{k}})$

- * Dieses Ergebnis ist ein Zwischenschritt aus der Rechnung für Relation 1)

3. Verwende in beliebigem Matricelement $i\mathcal{M}$ für jeden Propagator die Relation $\Delta_F = \Delta_R + \frac{\pi}{E_{\vec{k}}} \delta(k^0 - E_{\vec{k}})$ und multipliziere aus

- Der Term ohne δ -Distributionen verschwindet

- * Argument: Alle Pole des Ausdrucks liegen in der komplexen Ebene auf derselben Seite der reellen Achse \Rightarrow Kann Integral über Loop-Impuls mit Residuensatz berechnen, indem ich Kurve auf der anderen Seite der komplexen Ebene schließe, und finde $= 0$ für das Integral

- Alle Terme mit zwei oder mehr δ -Distributionen verschwinden

- * Argument: Habe hier mehrere δ -Distributionen mit Loop-Impulsen im Argument \Rightarrow Habe nicht genug Integrationen, um alle δ -Distributionen zu erfüllen \Rightarrow Ausdruck verschwindet

- Fazit: Erhalte nur Terme mit retardierten Propagatoren und je einer δ -Distribution

4. Verwende die "effektive Relation" $\Delta_R = \Delta_F$ (gilt unter dem Integral)
 - Eigentlich gilt $\Delta_R = \Delta_F - \frac{\pi}{E_k} \delta(k^0 - E_k)$, aber alle Terme mit zusätzlichen δ -Distributionen verschwinden
 5. Berechne Imaginärteil des Ausdrucks und verwende $\text{Im}\Delta_F = -i\pi\delta(p^2 - m^2)$ (Relation 1) \Rightarrow Erhalte selbes Ergebnis wie mit Cutting rules
 - Feynman-Propagatoren sind die einzigen nicht-reellen Objekte in diesem Ausdruck (das ist der Zweck all dieser Umformungen) \Rightarrow Benötige nur $\text{Im}\Delta_F = -i\pi\delta(p^2 - m^2)$, um Imaginärteil zu berechnen
- Feynman tree theorem: Kann Matrixelement mit off-shell Zuständen und Energieerhaltung immer durch Matrixelement mit on-shell Zuständen und Verletzung der Energieerhaltung ausdrücken
 - Anschaulich: Feynman tree theorem ist Zusammenhang zwischen "modernem" QFT-Formalismus mit virtuellen (off-shell) Zuständen und Energieerhaltung und "altmodischem" QM-Formalismus mit on-shell Zuständen und Verletzung der Energieerhaltung
 - Beweis: Schritte 1-4 beim Nachrechnen der Cutting rules
 - * Habe nach Schritt 4 einen Ausdruck, in dem in jedem Term eine δ -Distribution steht \Rightarrow Kann dk^0 -Integrationen (für alle Loop-Impulse k) ausführen und erhalte Matrixelement mit on-shell Zuständen und Verletzung der Energieerhaltung

5.8.3 Optisches Theorem

- Anschaulich: Unitarität macht nicht-perturbative Aussagen über Matrixelemente etc \Rightarrow Mächtiges Werkzeug
 - Begriff "Unitarität" bezieht sich auf Unitarität der \mathcal{S} -Matrix
 - Formal: Wahrscheinlichkeitserhaltung $\Rightarrow \mathcal{S}$ -Matrix ist unitär $\mathcal{S}^\dagger \mathcal{S} = 1$
 - * Standard-Aussage, bekannt aus Quantenmechanik
 - 1. Wahrscheinlichkeitserhaltung: $\langle i|i \rangle \stackrel{!}{=} \langle f|f \rangle$
 - 2. Definition der \mathcal{S} -Matrix: $|f \rangle = \mathcal{S}|i \rangle$
 - 3. Kombiniere beides: $\langle f|f \rangle = \langle i|\mathcal{S}^\dagger \mathcal{S}|i \rangle \stackrel{!}{=} \langle i|i \rangle \Rightarrow \mathcal{S}^\dagger \mathcal{S} = 1$
 - Allgemeines optisches Theorem: $\mathcal{M}_{fi} - \mathcal{M}_{if}^* = i \sum_X \int d\Phi_X (2\pi)^4 \delta^4(p_i - p_X) \mathcal{M}_{Xi} \mathcal{M}_{Xf}^*$
 - Interpretation: Zusammenhang zwischen tree-level- und Loop-Diagrammen
 - * Begründung: Gleichung muss Ordnung für Ordnung in Störungstheorie gelten, aber linke/rechte Seite ist linear/quadratisch in Matrixelementen
 - Bsp: Wenn rechte Seite tree-level Diagramme enthält ($\mathcal{M} \sim \lambda \Rightarrow \mathcal{M}^2 \sim \lambda^2$), muss linke Seite 1-Loop-Diagramme enthalten ($\mathcal{M} \sim \lambda^2$)
 - * Fazit: Benötige Loops, eine Theorie ohne Loops verletzt Unitarität
1. \mathcal{S} -Matrix ist unitär $\mathcal{S}^\dagger \mathcal{S} = 1$
 2. Definiere Transfermatrix \mathcal{T} durch $\mathcal{S} \equiv 1 + i\mathcal{T} \Rightarrow i(\mathcal{T}^\dagger - \mathcal{T}) = \mathcal{T}^\dagger \mathcal{T}$
 - $1 = \mathcal{S}^\dagger \mathcal{S} = (1 - i\mathcal{T}^\dagger)(1 + i\mathcal{T}) = 1 + i(\mathcal{T} - \mathcal{T}^\dagger) + \mathcal{T}^\dagger \mathcal{T} \Rightarrow i(\mathcal{T}^\dagger - \mathcal{T}) = \mathcal{T}^\dagger \mathcal{T}$
 3. Schreibe Ausdruck in ein $\langle f|\dots|i \rangle$ -Matrixelement und forme geschickt um
 - Verwende Definition $\langle f|\mathcal{T}|i \rangle = \mathcal{T}_{fi} \equiv (2\pi)^4 \delta^4(p_i - p_f) \mathcal{M}_{fi}$, $\langle f|\mathcal{T}^\dagger|i \rangle = (2\pi)^4 \delta^4(p_i - p_f) \mathcal{M}_{if}^*$
 - Verwende Vollständigkeitsrelation für den betrachteten Hilbertraum $1 = \sum_X \int d\Phi_X |X\rangle \langle X|$
 - * Anschaulich: Summiere über alle Zustände X des Hilbertraums (wie in QM)
 - * Notation: $d\Phi_X = \prod_{j \in X} \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_j}$ ist Phasenraumfaktor eines beliebigen Zustands X mit den zugehörigen Teilchen $j \in X$
 - $\langle f|i(\mathcal{T}^\dagger - \mathcal{T})|i \rangle = i(2\pi)^4 \delta^4(p_i - p_f) (\mathcal{M}_{if}^* - \mathcal{M}_{fi})$
 - $\langle f|\mathcal{T}^\dagger \mathcal{T}|i \rangle = \sum_X \int d\Phi_X \langle f|\mathcal{T}|X\rangle \langle X|\mathcal{T}|i \rangle = \sum_X (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_X) (2\pi)^4 \delta^4(p_i - p_X) \int d\Phi_X \mathcal{M}_{Xi} \mathcal{M}_{Xf}^* = (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) \sum_X (2\pi)^4 \delta^4(p_i - p_X) \int d\Phi_X \mathcal{M}_{Xi} \mathcal{M}_{Xf}^*$

- Spezialfall $|i\rangle = |f\rangle \equiv |A\rangle$: $2\text{Im}\mathcal{M}_{AA} = \sum_X \int d\Phi_X (2\pi)^4 \delta^4(p_A - p_X) |\mathcal{M}_{XA}|^2$
 1. $\mathcal{M}_{fi} - \mathcal{M}_{if}^* = \mathcal{M}_{AA} - \mathcal{M}_{AA}^* = 2i\text{Im}\mathcal{M}_{AA}$
 2. $i \sum_X \int d\Phi_X (2\pi)^4 \delta^4(p_i - p_X) \mathcal{M}_{Xi} \mathcal{M}_{Xf}^* = i \sum_X \int d\Phi_X (2\pi)^4 \delta^4(p_A - p_X) |\mathcal{M}_{XA}|^2$
- Spezialfälle: Streuung und Zerfall
 - Optisches Theorem für Zerfall: $\text{Im}\mathcal{M}_{AA} = m_A \sum_X \Gamma_{XA} = m_A \Gamma_{A,\text{tot}}$
 - * Interpretation: Zusammenhang zwischen Propagator und Lebensdauer eines Zustands
 - Notiz: \mathcal{M}_{AA} ist der Propagator des Zustands A
 - * Begründung: $|A\rangle$ ist 1-Teilchen-Zustand \Rightarrow Identifiziere Definition der Zerfallsrate Γ_{XA}
 - Optisches Theorem für Streuung: $\text{Im}\mathcal{M}_{AA} = \frac{F}{2} \sum_X \sigma_{XA} = \frac{F}{2} \sigma_{A,\text{tot}}$
 - * Interpretation: Zusammenhang zwischen Matrixelement für Vorwärtsstreuung und Gesamt-Wirkungsquerschnitt
 - * Notiz: \mathcal{M}_{AA} ist das Matrixelement für Vorwärts-Streuung $A \rightarrow A$ (Anfangs- und Endzustand der Streuung sind identisch)
 - * Begründung: $|A\rangle$ ist 2-Teilchen-Zustand \Rightarrow Identifiziere Definition des Wirkungsquerschnitts σ_{XA}

5.8.4 Schranken an Wirkungsquerschnitte aus Unitarität

- Allgemein: Ausdruck für Wirkungsquerschnitt darf nicht beliebig stark ansteigen bei hohen Energien
 - Begründung: Optisches Theorem (Beziehung zwischen Wirkungsquerschnitt und Matrixelement)
 - * Verwende optisches Theorem irgendwo in Konstruktion der Schranke
- Naiv: $|\mathcal{M}| \lesssim 1$ aus optischem Theorem
 - Argument: Optisches Theorem sagt $\text{Im}i\mathcal{M} \lesssim |\mathcal{M}|^2 \Rightarrow |\mathcal{M}|^2 \lesssim 1$
- Froissart bound: $\sigma_{\text{tot}} \lesssim \log^2 s$
- Partial wave unitarity bound
 - Anschaulich: Schranke an $|\mathcal{M}|$ für $2 \rightarrow 2$ -Streuung
 - Beispiel: Streuung $AB \rightarrow AB$
 1. Zerlege $\mathcal{M} = 16\pi \sum_{j=0}^{\infty} a_j (2j+1) P_j(\cos\theta)$
 2. Berechne Wirkungsquerschnitt $\sigma_{AB \rightarrow AB} = \frac{1}{32\pi s} \int d\cos\theta |\mathcal{M}|^2 = \frac{16\pi}{s} \sum_{j=0}^{\infty} (2j+1) |a_j|^2$
 - * Verwende Orthogonalität der Legendrepolynome $\int_{-1}^1 d\cos\theta P_j(\cos\theta) P_k(\cos\theta) = \frac{2}{2j+1} \delta_{jk}$ und $P_j(1) = 1$
 3. Verwende optisches Theorem $\sigma = 2\sqrt{s} |\vec{p}_i| \sum_X \sigma_{AB \rightarrow X} \geq 2\sqrt{s} |\vec{p}_i| \sigma_{AB \rightarrow AB}$
 4. Umstellen liefert $\sum_{j=0}^{\infty} (2j+1) \text{Im}a_j \geq \frac{2|\vec{p}_i|}{\sqrt{s}} \sum_{j=0}^{\infty} (2j+1) |a_j|^2$
 - * Interpretation: Wegen $|a_j| \geq \text{Im}a_j$ (per Definition des Imaginärteils) kann $|a_j|$ nicht beliebig groß werden

5.8.5 Potentiale aus QFT (...)

- $V(r) =$
 - Interpretation: Austausch-WW zwischen 2 Teilchen (“Potential”) komplett charakterisiert durch den Propagator des Austauschteilchens
 - In der Praxis: Finde elliptische Integrale

Kapitel 6

Regularisierung

6.1 Grundlagen

6.1.1 Grundbegriffe

- Entwicklung in Anzahl der Loops
 - Anschaulich: Beiträge mit unterschiedlicher Anzahl an Loops können sich nicht auslöschen
 - Praktisch: Berechne Matrixelemente in jeder Ordnung von Loops getrennt
 - * Konsistenzchecks (endliches Ergebnis, Eichinvarianz etc) müssen in jeder Ordnung von Loops erfüllt sein
 - * Berechne auch Counterterms werden für jede Ordnung von Loops separat
 - * Notiz: Es wäre fatal, wenn Beiträge mit unterschiedlicher Anzahl an Loops einen Einfluss aufeinander hätten – Typische **QFT**-Rechnungen würden nicht mehr funktionieren
 - Formale Begründung: Anzahl der Loops entspricht Ordnung des Matrixelements in \hbar
 - * Idee: Lasse \hbar beliebig \Rightarrow Ausdrücke mit unterschiedlicher Potenz von \hbar können sich nicht auslöschen
 - 1. Ausdruck für Anzahl L der Loops im Matrixelement: $L = P - (V - 1)$ mit Anzahl P der internen Propagatoren und Anzahl V der Vertices (siehe 5.2.4)
 - 2. Quellen von \hbar im Matrixelement
 - * Propagatoren $\propto \hbar$: $\Pi^\pm = \frac{-i\hbar}{p^2 - m^2 + i0} \mathcal{D}^\pm$ mit \hbar aus $[\phi(\vec{x}, t)\phi(\vec{y}, t)]_\pm = i\hbar\delta^3(\vec{x} - \vec{y})$
 - * Vertices $\propto \hbar^{-1}$: $\frac{i}{\hbar} \int d^4x \mathcal{L}_{\text{int}}$ aus Entwicklung von $\exp\left(\frac{i}{\hbar} \int d^4x \mathcal{L}_{\text{int}}\right)$
 - * Externe Zustände $\propto \hbar$: (?)
 - * Massen $\propto \hbar^{-1}$: $\hbar \neq 1$ führt zu $m \rightarrow \frac{m}{\hbar}$ wegen Klein-Gordon-Gleichung für $\hbar, c \neq 1$ $\left(\partial^2 + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right)\phi = 0$ (für diese Überlegung nicht weiter relevant) (?)
 - 3. Gesamtpotenz von \hbar im Matrixelement: $i\mathcal{M} \propto \hbar^P \hbar^{-V} = \hbar^{P-V} = \hbar^{L-1}$
 - * Vernachlässige Faktoren von \hbar durch externe Zustände und Massen (?)
- Entwicklung in Potenz der Kopplungskonstanten
 - Für Theorien mit nur einer Kopplungskonstanten entspricht Anzahl der Loops/Potenz von \hbar der Potenz der Kopplungskonstante
 - * Explizit: Kenne Beziehung zwischen I und V (Eigenschaft der Theorie) \Rightarrow Kann I in $L = I - (V - 1)$ eliminieren und finde Ausdrücke der Form $V = L + C$, wobei C nur von der Anzahl der externen Zustände abhängt

6.1.2 Divergenzen in QFT-Rechnungen

- Grundidee: Nur Observablen müssen endlich sein
 - 1. Zwischenergebnisse in **QFT**-Rechnungen können formal unendlich sein \Rightarrow Das liegt daran, dass die Zwischenergebnisse keine physikalischen Größen sind

2. Problem: Kann mit unendlichen Zwischenergebnissen nicht weiterrechnen
 - Keine Rechenregeln für Unendlichkeiten: $\infty - \infty$ kann alles sein
 3. Herausforderung: Methoden(Regulatoren) einführen, die die Zwischenergebnisse endlich machen
- UV-Divergenzen
 - Anschaulich: Physikalische Theorien haben immer eine maximale Energieskala, bis zu der sie gültig sind
 - * Maximale Energieskala bzw Cutoff Λ ist UV-Regulator mit bester physikalischer Interpretation
 - Formal: Parameter im Lagrangian haben unendlich große Korrekturen relativ zu den physikalischen Parametern
 - UV = ultra violet: Loop-Integral divergiert für große Werte von k
 - Ursache: Arbeite mit formal unendlichen Kopplungskonstanten \Rightarrow Muss Kopplungskonstanten renormieren, um endliche Ergebnisse zu erhalten
 - UV-Divergenzen sind unphysikalisch, da sie in Differenzen zwischen Greensfunktionen/Matrixelementen bei unterschiedlichen Skalen rausfallen
 - Behandlung von UV-Divergenzen: Renormierung der Parameter
 - IR-Divergenzen
 - Anschaulich: Mehrere Feynman-Diagramme tragen zu einem Prozess bei \Rightarrow Einzelne Feynman-Diagramme haben keine Bedeutung, nur deren Summe macht Sinn
 - IR = infra red: Loop-Integral divergiert für kleine Werte von k
 - Ursache: Propagatoren von masselosen Teilchen
 - * Propagatoren von masselosen Teilchen $\frac{1}{k^2+i0}$ sind singulär für kleine k
 - IR-Divergenzen sind unphysikalisch, da sie in Summen von unterschiedlichen Diagrammen(die zum selben Matrixelement beitragen) rausfallen
 - Behandlung von IR-Divergenzen: Berücksichtige alle beitragenden Feynman-Diagramme
 - * Konkret: Berücksichtige Diagramme für Abstrahlung von masselosen Eichbosonen von den externen Teilchen
 - Typisch: “soft photons” in QED, “soft gluons” in QCD
 - Kinoshita-Lee-Nauenberg-Theorem: IR-Divergenzen fallen in jeder unitären Quantenfeldtheorie raus, wenn man über alle möglichen Anfangs- und Endzustände in einem endlichen Energiebereich summiert
 - * Muss Anfangs- und Endzustände berücksichtigen, da vor oder nach dem interessanten Prozess masselose Eichbosonen emittiert werden können
 - Achtung: Loop-Integrale können auch UV- und IR-divergent sein
 - Dimensional regularization: Führe 2 Parameter $\epsilon_{UV}, \epsilon_{IR}$ ein

6.1.3 Naiver (UV-)Divergenzgrad $\omega = (\text{Exponent von } k \text{ im Zähler}) - (\text{Exponent von } k \text{ im Nenner})$ für Loop-Impulse k eines Diagramms/Matrixelements

- Idee: Für große k zählen nur die Potenzen von k im Integral \Rightarrow Wie verhält sich der Integrand?
- Anwendung: $\omega \geq 0 \Rightarrow$ Matrixelement ist UV-divergent
 - $\omega > 0 \Rightarrow$ Polynomielle UV-Divergenz $\propto \Lambda^\omega$
 - $\omega = 0 \Rightarrow$ Logarithmische UV-Divergenz $\propto \log \Lambda$
 - $\omega < 0 \Rightarrow$ Keine UV-Divergenz
- Ehrliche Argumentation
 - Problem: Integrationsvariable k^μ ist ein Objekt im Minkowski-Raum(nicht im euklidischen Raum) \Rightarrow Kann nicht einfach in sphärische Koordinaten wechseln

1. Wechsel zu euklidischen Koordinaten(Wick-Rotation $k^0 \rightarrow i k^0$) liefert $k^2 = -k_E^2$ mit euklidischer Variable k_E in 4 Raumzeit-Dimensionen
 2. Wechsel in sphärische Koordinaten für k_E
 - Ergebnis: Integriere über skalare Größe $|k_E| \Rightarrow$ Kann bekannte Regeln verwenden
- “Naiver” Divergenzgrad: Berücksichtige, dass Divergenzen während der Rechnung wegfallen oder dazukommen können
 - Divergenzen können wegfallen durch Symmetrien(zB Ward-Identität)
 - Divergenzen können dazukommen durch divergente Subdiagramme(für mehr als 1 Loop)
 - * Verbesserung: Berechne naiven Divergenzgrad für jedes Subdiagramm
 - “Maximaler” Divergenzgrad: Maximum der naiven Divergenzgrade aller Subdiagramme eines Diagramms
 - * “Maximal”, da durch Berücksichtigung aller Subdiagramme keine schlimmeren Divergenzen dazukommen können
 - Faustregeln für den naiven Divergenzgrad
 - Fermion-Loops(Propagator $\propto \frac{1}{k}$) sind schlimmer als Boson-Loops(Propagator $\propto \frac{1}{k^2}$)
 - Diagramme mit mehr als 4 Propagatoren im Loop sind endlich
 - Spielerei: Für bestimmte Theorie Ausdruck für ω in Abhängigkeit von Diagramm-Parametern herleiten (siehe 5.2.4)
 - Diagramm-Parameter: Anzahl Loops, Anzahl Vertizes(verschiedene Typen möglich), Anzahl externer Teilchen(verschiedene Typen möglich), Anzahl Propagatoren(verschiedene Typen möglich)

6.2 Regularisierung

6.2.1 Grundlagen

- Regularisierung = Zusätzliche Parameter einführen, sodass man mit formal divergenten Integralen rechnen kann
 - Anschaulich: Zusätzliche Parameter parametrisieren die Divergenz, in einem bestimmten Grenzfall($\Lambda \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0, \dots$) erhält man den ursprünglichen Fall
 - * Parameter kann Gewichtungsfunktion, Variierung der Dimension weg von 4, neues Teilchen etc sein
 - Idee: Berechne physikalische Größen mit den Regularisierungs-Parametern \Rightarrow Physikalische Größen sind unabhängig von den Regularisierungs-Parametern
 - Regularisierung ist purer mathematischer Trick, keine physikalische Bedeutung
 - * Kann Regulatoren trotzdem danach klassifizieren, wie gut man sie physikalisch interpretieren kann
 - Regulator = Methode, wie zusätzliche Parameter eingeführt werden
 - Notiz: Jeder Regulator führt eine dimensionsabhängige Größe ein
 - * Diese dimensionsabhängige Größe bricht Skaleninvarianz (falls sie noch nicht vorher gebrochen wurde) (?)
 - * Bsp: Cutoff Λ für Cutoff-Regularisierung, Renormierungsskala μ für dimensional regularisation, Ghost-Masse Λ für Pauli-Villars regularization
- Verwende Regularisierung \Rightarrow Kann mit divergenten Integralen rechnen und physikalische Ergebnisse erhalten
 - IR-divergente Integrale: Divergenzen kürzen sich automatisch, wenn man Observablen berechnet

- UV-divergente Integrale: Führe Renormierung durch
- Anforderungen an einen guten Regulator
 - Möglichst einfache Rechnungen
 - Erhält Symmetrien der Theorie während der kompletten Rechnung (zB Eichsymmetrie, Lorentz-Symmetrie)
 - * Nützlich, da man dann auch in Zwischenschritten die Symmetrien verwenden kann
 - Optional: Einfache physikalische Interpretation

6.2.2 Hard cutoff regularization(UV)

- Überblick
 - Idee: Integriere in $\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}$ nur bis zu einer maximalen Massenskala Λ
 - Anschaulich: Erlaubt schöne Interpretation, aber nicht sinnvoll für Rechnungen
 - Vorteil: Einfache Interpretation möglich - “Jede Theorie hat eine maximale Massenskala Λ , bis zu der sie gültig ist” \Rightarrow Darf nur bis Λ integrieren, da das der Gültigkeitsbereich der Theorie ist
 - Nachteil: k^μ sind vier unabhängige Variablen \Rightarrow Unklar, wie “Integration bis Massenskala Λ ” in der Praxis aussehen kann
 - * Notiz: Es gibt Möglichkeiten, “Integration bis Λ ” präzise zu formulieren
 - Nachteil: Sehr ungeschickt in praktischen Rechnungen
 - * Bsp: Rechnungen sind komplex, verletzt Eichinvarianz, verletzt Lorentzinvarianz (?)
- Funktionsweise des Regulators
 - Schneide den divergenten Bereich des Integrals ab durch obere Integrationsgrenze \Rightarrow Integral wird konvergent
- Verallgemeinerung der Idee: Gewichte Integrand $f(k)$ mit einer Funktion $g(k)$, sodass $\int g(k)f(k)$ konvergent ist
 - Hard cutoff: $g(k)$ ist Stufenfunktion
 - Andere Möglichkeiten: e-Funktion, Gauss-Funktion, ζ -Funktion

6.2.3 Dimensional regularization(UV, IR)

- Überblick
 - Idee: Rechne in $D \in \mathbb{C}$ statt 4 Dimensionen \Rightarrow Integrale werden formal konvergent für irgendein $D \in \mathbb{C}$
 - * Formal: Vermeide Pole von $\Gamma(-n)$ bei $n \in \mathbb{N}$, indem ich in kleinem Abstand zum Pol entwickle
 - Anschaulich: Purer Mathematik-Trick, keine physikalische Interpretation
 - Vorteil: Praktisch für Rechnungen
 - * Berechnung von Loop-Integralen über Feynman-Integrale ist sehr effektiv(Schema X existiert)
 - * Aktuell einziges Regularisierungs-Schema, das nötige Kompaktheit für Präzisionsrechnungen hat
 - Nachteil: Keine physikalische Interpretation
 - * “Was bedeutet es, in D Dimensionen zu rechnen?” “Was hat $D < 4/D > 4$ mit UV-/IR-Verhalten zu tun?”
 - Nachteil: Konsistente Erweiterung von γ_5 auf D Dimensionen ist kompliziert
- Funktionsweise des Regulators
 - Grundlage: Loop-Integrale sind innerhalb ihres Definitionsbereichs analytische Funktionen in $D \in \mathbb{C}$ \Rightarrow Verwende analytische Fortsetzung (siehe Mathe-Zsf)

- UV-Regulator: Finde für jedes Feynman-Integral $\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k^2)^r k^{\mu_1} \dots k^{\mu_s}}{(k^2 - R^2 + i0)^n}$ ein $D \in \mathbb{C}$, für das das Integral konvergiert \Rightarrow Integral ist auch für $D = 4$ eindeutig festgelegt durch analytische Fortsetzung
 - * Muss hier $D \in \mathbb{C}$ klein wählen: Irgendwann macht der k^{D-1} -Term aus $d^D k = dk k^{D-1}$ das Integral konvergent im Bereich großer k
 - * Explizit: $\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k^2)^r k^{\mu_1} \dots k^{\mu_s}}{(k^2 - R^2 + i0)^n} \sim \int \frac{dk}{k} k^{D+2r+s-2n} \Rightarrow$ Integral ist konvergent für $D < 2n - 2r - s$, da der Integrand dann schneller als $\frac{1}{k}$ abfällt
 - Muss für dieses Argument streng genommen Wick-Rotation zu euklidischen Impulsen mit Betrag $k_E^2 = (k^0)^2 + \vec{k}^2$ machen
- IR-Regulator: Finde für jedes IR-divergente Loop-Integral ein $D \in \mathbb{C}$, für das das Integral konvergiert \Rightarrow Integral ist auch für $D = 4$ eindeutig festgelegt durch analytische Fortsetzung
 - * Muss hier $D \in \mathbb{C}$ groß wählen: Irgendwann macht der k^{D-1} -Term aus $d^D k = dk k^{D-1}$ das Integral konvergent im Bereich kleiner k
- Kann dimensional regularization gleichzeitig als UV- und IR-Regulator verwenden
- Berechnung von Matrixelementen mit dimensional regularization
 1. Schreibe das Loop-Integral um von 4 Dimensionen in D Dimensionen
 - Offensichtliche Veränderung: $\frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \rightarrow \frac{d^D k}{(2\pi)^D}$
 - Implizite Veränderung: Lorentz-Indizes laufen über D statt 4 Komponenten
 - Optionale Veränderung: Ersetze $c \rightarrow \mu^{[c]} c$ für alle Kopplungskonstanten c mit Massendimension $[c]$
 - * Idee: Separiere Kopplungskonstante von ihrer Dimensions-Eigenschaften durch Einführung einer neuen Massenskala μ ($[\mu] = 1$)
 - * Massendimensionen der Größen im Lagrangian sind abhängig von $D \Rightarrow$ Kopplungskonstanten in D Dimensionen können dimensionsbehaftet sein, obwohl sie in $D = 4$ nicht dimensionsbehaftet sind
 - * Alternative: Rechne mit dimensionsbehafteten Kopplungskonstanten \Rightarrow Erhalte unschöne Ergebnisse (insbesondere Logarithmen mit dimensionsbehafteten Argumenten)
 - * Massenskala μ ist eine Hilfsgröße (unphysikalisch, Ergebnisse dürfen nicht von ihr abhängen)
 2. Loop-Integral nach Schema X berechnen (siehe 6.3)
 3. Ergebnis in $\epsilon \ll 1$ mit $D = 4 - 2\epsilon$ entwickeln bis $\mathcal{O}(\epsilon)$
 - Anschaulich: Für $D = 4$ divergente Beiträge $\propto \frac{1}{\epsilon^n}$, $n > 0$ müssen in Observablen rausfallen, Terme $\propto \epsilon^0$ liefern physikalische Größen, Terme $\mathcal{O}(\epsilon)$ sind für $\epsilon \ll 1$ vernachlässigbar
 - Typische Größen, die in $\epsilon \ll 1$ entwickelt werden: $\Gamma(\epsilon)$, $(R^2 + i0)^{n+\epsilon}$, $\frac{1}{(4\pi)^{2-\epsilon}}$, $\mu^{2\epsilon}$
 - Kann auch $D = 4 - \epsilon$ wählen, bekomme dann aber unhandliche Faktoren $\frac{1}{2}$
 - Nützliche Redefinition der Massenskala μ : $\tilde{\mu}^2 := 4\pi e^{-\gamma_E} \mu^2$
 - Kontrolle: Observablen dürfen nicht von den (unphysikalischen) Hilfsgrößen ϵ, μ abhängen

6.2.4 Pauli-Villars regularization(UV)

- Überblick
 - Idee: Für jedes Feld ein zusätzliches Feld(Geistfeld) mit entgegengesetzter Statistik, Masse Λ und sonst gleichen Quantenzahlen und Kopplungen
 - * Externe Zustände können keine Geistfelder beinhalten, da sonst Unitarität verletzt wird(?)
 - * Muss Geistfeld-Beiträge in Loops berücksichtigen
 - * Formal: Zusätzliche Terme im Lagrangian durch die Geistfelder
 - * Effektiv: Ersetzung $\frac{1}{k^2 - m^2 + i0} \rightarrow \frac{1}{k^2 - m^2 + i0} - \frac{1}{k^2 - \Lambda^2 + i0}$ im Matrixelement für jeden Propagator eines Teilchens mit Masse m
 - Diese Ersetzung berücksichtigt für jeden Propagator einzeln, dass hier auch ein Geistfeld beteiligt sein kann

- Zweiter Term kommt vom Geistfeld: Unterschiedliche Masse M und entgegengesetzte Statistik(liefert relativen Faktor -1)
- Ergebnisse hängen ab von der Geistfeld-Masse Λ
- Vorteil: Behandle UV-Divergenz durch Veränderung der Theorie im UV-Bereich \Rightarrow Physikalisch sinnvoll
 - * Geistfelder mit großen Massen $\Lambda \gg m$ sind eine Veränderung im UV-Bereich
- Nachteil: Geistfeld-Propagatoren führen auf lange Ausdrücke \Rightarrow Unpraktisch für komplexe Matrixelemente
- Warum funktioniert der Regulator?
 - Für große $k^2 (k^2 \gg m^2, \Lambda^2)$ verschwinden alle Terme $\frac{1}{k^2 - m^2 + i0} - \frac{1}{k^2 - \Lambda^2 + i0}$ und der Integrand verschwindet \Rightarrow Das Integral wird UV-konvergent
- Vorgehen
 1. Im Matricelement Zusatzterme durch Geistfelder dazugaddieren
 2. Wick-Rotation \Rightarrow Integral hat die Form $\int_0^\infty dk_E f(k_E)$
 3. Berechne bestimmtes Integral über Stammfunktion
 - Muss $\int_0^\infty \int dk_E f(k_E) = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c dk_E f(k_E)$ schreiben, die divergenten Terme heben sich für $\lim_{c \rightarrow \infty}$ weg

6.2.5 Derivative regularization(UV)

- Überblick
 - Anschaulich: Berechne Loop-Integrale mit dem Feynman-Trick(Ableitung und Integration vertauschen)
 - Nachteil: Keine Information über Zusammenhänge zwischen den Integrationskonstanten
 - * Zusammenhänge zwischen den Integrationskonstanten sind wichtig, da sich dadurch Divergenzen wegheben können
 - * Problem: Ableitung und Integration sind keine Inversen zueinander, da bei Ableitung Information verloren geht, die bei Integration nicht wiederhergestellt werden kann(“Stammfunktion nur bis auf Konstante bestimmt”)
 - * Bsp: Mehrere unterschiedliche Loop-Integrale liefern unterschiedliche Integrationskonstanten, quadratisch UV-divergente Loop-Integrale haben zwei Integrationskonstanten
- Warum funktioniert der Regulator?
 - Ableitungen $\partial_{R^2}^n I$ eines Loop-Integrals haben höhere Potenz von k^2 im Nenner und werden deshalb (ab einem bestimmten n) konvergent
- Vorgehen
 1. Schreibe Loop-Integral um in Superposition von Feynman-Integralen
 2. Leite in $D = 4$ divergente Feynman-Integrale so lange nach dem Parameter R^2 ab, bis sie konvergent sind
 3. Berechne Ableitungen der Feynman-Integrale
 4. Integriere Ergebnisse unbestimmt, um wieder auf das gesuchte Loop-Integral zu kommen
 - Schreibe Integrationskonstanten in Abhängigkeit von einer Cutoff-Skala Λ , sodass die Argumente von Logarithmen dimensionslos werden

6.2.6 Photon mass regularization(IR)

- Überblick
 - Idee: Gebe masselosen Teilchen eine kleine Masse m
 - Effektiv: Ersetze Propagatoren von masselosen Teilchen $\frac{1}{k^2+i0} \rightarrow \frac{1}{k^2-m^2+i0}$
 - Einfacher und sinnvoller IR-Regulator
- Warum funktioniert der Regulator?
 - Propagatoren der masselosen Teilchen sind nicht mehr singulär für kleine k^2 , wenn eine kleine Masse m verwendet wird

6.2.7 Lattice regularization(UV, IR)

- Überblick
 - Idee: Definiere Theorie auf einem endlich ausgedehnten Raumzeit-Gitter
 - * Selbe Idee wie beim Cutoff-Regulator
 - * Effektiv: Beschränke mögliche Impulse nach unten und oben
 - Führe Rechnungen dann auf einem Computer durch(Nicht-perturbative Methode)
- Warum funktioniert der Regulator?
 - UV-Regulator: Gitter-Punkte haben endlich Abstände
 - * UV-Divergenzen kommen von beliebig großen Impulsen bzw beliebig kleinen Abständen \Rightarrow Gibt es nicht im Gitter
 - IR-Regulator: Gitter hat endliche Ausdehnung
 - * IR-Divergenzen kommen von beliebig kleinen Impulsen bzw beliebig großen Abständen \Rightarrow Gibt es nicht im Gitter

6.3 Berechnung von 1-Loop-Integralen in dimensional regularization

6.3.1 Vorgehen

- Feeling: Rechne immer in dimensional regularization und freue mich, wenn mal direkt (ohne Renormierung) etwas Endliches rauskommt
 - Endliche Integrale und Regulatoren mit $D = 4$ sind Spezialfälle
 - * Wenn das Ergebnis in $D = 4$ endlich ist, benötigt man keinen Regulator
 - * Wenn man einen Regulator außer dimensional regularization verwendet, ist das Ergebnis für $D = 4$ endlich
- 1. Feynman-Regeln liefern für Matrixelement Summe von Ausdrücken der Form $\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^{\mu_1} \dots k^{\mu_r}}{\prod_a (q_a^2 - m_a^2 + i0)}$
- 2. Integral mit Feynman-Parametern umschreiben \Rightarrow Erhalte zusätzliche Integrationen und Nenner in der Form $(\dots)^n$
 - m Loop-Propagatoren im Matrixelement \Rightarrow Benötige $m - 1$ Feynman-Parameter
- 3. Quadratische Ergänzung im Nenner \Rightarrow Nenner hat die Form $((k - q)^2 - R^2 + i0)^n$
 - Größen: Loop-Parameter k , konstante Verschiebung q , Konstante R^2
 - Schreibe R^2 , um deutlich zu machen, dass R^2 die Dimension mass^2 hat
 - Quadratische Ergänzung kann beliebig hässlich werden, ist aber straight forward
- 4. Substitution $k - q \rightarrow k \Rightarrow$ Nenner hat die Form $(k^2 - R^2 + i0)^n$

- Wegen "Integral = -Integral" unter $k \rightarrow -k$ verschwinden alle Terme im Zähler mit ungerader Potenz von k
- Fazit: Habe Matricelement in Superposition von Feynman-Integralen $\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^{\mu_1} k^{\mu_2} \dots}{(k^2 - R^2 + i0)^n}$ umgeformt

5. Verwende Masterformeln für Feynman-Integrale

6. Verwende $D = 4 - 2\epsilon$ und entwickle in $\epsilon \ll 1$ bis ausschließlich $\mathcal{O}(\epsilon)$

6.3.2 Feynman-Parameter x, y, \dots

- Zweck: Loop-Integrale in Feynman-Integrale umformen
 - Ausführlich: Schreibe Integral mit Produkt von Propagatoren $\prod_a (q_a^2 - m_a^2 + i0)$ im Nenner um in Integral mit nur einem Propagator $(k^2 - R^2 + i0)^n$ im Nenner
 - * Kann Integrale mit nur einem Propagator im Nenner recht einfach berechnen
 - * Preis: Bekomme zusätzliche Integrale über Feynman-Parameter
 - Feynman-Parameter sind für numerische Rechnungen nützlicher als Schwinger-Parameter, da numerische Integration über $[0, 1]$ besser umsetzbar ist als über $[0, \infty)$
- Grundgleichung ($\text{Im} A, \text{Im} B > 0$): $\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{(xA + (1-x)B)^2}$
 - Methode 1: Direkte Rechnung
 - * $\text{Im} A, \text{Im} B > 0 \Rightarrow$ Integrand ist für $x \in [0, 1]$ wohldefiniert
 - * $\int_0^1 \frac{dx}{(xA + (1-x)B)^2} = \int_0^1 \frac{dx}{(B + x(A-B))^2} = -\frac{1}{A-B} \frac{1}{B + x(A-B)} \Big|_0^1 = -\frac{1}{A-B} \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) = \frac{1}{A-B} \frac{A-B}{AB} = \frac{1}{AB}$
 - Methode 2: Substitution von Schwinger-Parametern
 - * Substituiere $\tau = t + s, x = \frac{s}{t+s}$ in die analoge Gleichung für Schwinger-Parameter $\frac{i^2}{AB} = \left(\int_0^\infty ds e^{isA} \right) \left(\int_0^\infty dt e^{itB} \right)$ und berechne (einfaches) Integral über $d\tau$
- Verallgemeinerungen
 - Verallgemeinerung: $\frac{1}{A_1 A_2 \dots A_n} = \left(\prod_{i=1}^n \int_0^\infty dx_i \right) \frac{\delta(1 - \sum_{j=1}^n x_j)}{(\sum_{j=1}^n x_j A_j)^n}$
 - Weitere Verallgemeinerung: $\frac{1}{A_1^{m_1} A_2^{m_2} \dots A_3^{m_3}} = \frac{\Gamma(\sum_{k=1}^n m_k)}{\prod_{k=1}^n \Gamma(m_k)} \left(\prod_{i=1}^n \int_0^\infty dx_i x_i^{m_i-1} \right) \frac{\delta(1 - \sum_{j=1}^n x_j)}{(\sum_{j=1}^n x_j A_j)^{\sum_{l=1}^n m_l}}$
- Schwinger-Parameter $s, t \dots$
 - Zweck: Schwinger-Parameter erlauben einfache Interpretation der Feynman-Parameter(...)
 - Grundgleichung: $\frac{i}{A} = \int_0^\infty ds e^{isA}$ für $\text{Im} A > 0$
 - * Benötige $\text{Im} A > 0$, damit das Integral konvergiert
 - * $\int_0^\infty ds e^{isA} = \frac{1}{iA} e^{isA} \Big|_0^\infty = \frac{i}{A}$ mit $\text{Im} A > 0$ im letzten Schritt
 - Verallgemeinerung: $\frac{i^n}{A_1 A_2 \dots A_n} = \prod_{i=1}^n \left(\int_0^\infty ds_i e^{is_i A_i} \right)$
 - * Folgt trivial daraus, dass man Grundgleichungen miteinander multipliziert (mit unterschiedlichen Integrationsvariablen, versteht sich)

6.3.3 Masterformeln für 1-Loop-Integrale in D Dimensionen

- Vorüberlegung: Loop-Integrale im D -Raum sind wohldefiniert, auch wenn sie nicht konvergent sind
 - Begründung: Argumentation, warum dimensional regularization ein Regulator ist
- Skalare 1-Loop-Integrale $\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k^2)^r}{(k^2 - R^2 + i0)^n} = (-1)^{n+r} \frac{i}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(r+D/2) \Gamma(n-r-D/2)}{\Gamma(D/2) \Gamma(n)} (R^2 - i0)^{D/2+r-n}$
 1. Wick-Rotation $\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k^2)^r}{(k^2 - R^2 + i0)^n} = i(-1)^{r+n} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k_E^2)^r}{(k_E^2 + R^2 - i0)^n}$ mit $k_E^2 = (k^0)^2 + \vec{k}^2$
 - Idee: Verwende Residuensatz (bzw Cauchy-Integral-Theorem), um Integral über k^0 in Integral über $i k^0$ umzuschreiben

– Schreibe nur das Integral $\int dk^0$ um, die restlichen Integrale $\int d^3k$ bleiben unverändert

(a) Funktion $f(k^0) := \frac{((k^0)^2 - \vec{k}^2)^r}{((k^0)^2 - \vec{k}^2 - R^2 + i0)^n}$ hat keine Polstellen im vom Integrationsweg γ eingeschlossenen Bereich $\Rightarrow \int_{\gamma} dk^0 f(k^0) = 0$

(b) Zerlege Wegintegral $\int_{\gamma} dk^0 f(k^0) = \int_{-\infty}^{\infty} dk^0 f(k^0) + \int_{i\infty}^{-i\infty} dk^0 f(k^0) + \text{Bogen-Integrale}$

(c) Bogen-Integrale verschwinden:

$$\begin{aligned} \text{Bogen-Integrale} &= \lim_{\rho \rightarrow \infty} \left(\int_0^{\pi/2} d\phi i \rho e^{i\phi} \frac{(\rho^2 e^{2i\phi} - \vec{k}^2)^r}{(\rho^2 e^{2i\phi} - \vec{k}^2 - R^2 + i0)^n} - \int_{\pi}^{3\pi/2} d\phi i \rho e^{i\phi} \frac{(\rho^2 e^{2i\phi} - \vec{k}^2)^r}{(\rho^2 e^{2i\phi} - \vec{k}^2 - R^2 + i0)^n} \right) \\ &= \lim_{\rho \rightarrow \infty} \left(\int_0^{\pi/2} d\phi i \rho^{2(r-n)+1} e^{(2(r-n)+1)i\phi} - \int_{\pi}^{3\pi/2} d\phi i \rho^{2(r-n)+1} e^{(2(r-n)+1)i\phi} \right) = 0 \end{aligned}$$

(d) Schreibe Integral über komplexe Achse um mit $k^4 = ik^0$: $i \int_{i\infty}^{-i\infty} dk^0 f(k^0) = -i \int_{-\infty}^{\infty} dk^4 f(-ik^4) = -i \int dk^4 f(-ik^4) \stackrel{k^0=k^4}{=} -i \int dk^0 f(-ik^0)$

(e) Aufsammeln liefert $\int dk^0 f(k^0) = i \int dk^0 f(-ik^0)$

2. Wechsel in D -dimensionale Polarkoordinaten:

$$i(-1)^{r+n} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k_E^2)^r}{(k_E^2 + R^2 - i0)^n} = i(-1)^{r+n} \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)} \frac{1}{(2\pi)^D} \int_0^{\infty} dk_E \frac{k_E^{2r}}{(k_E^2 + R^2 - i0)^n}$$

– Integrand hängt nicht von Raumparametern $d^{D-1}\Omega$ ab \Rightarrow Verwende Volumen der D -dimensionalen Kugel $\int d^{D-1}\Omega = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)}$

* Berechnung von $\int d^{D-1}\Omega$:

$$\begin{aligned} \left(\int dk e^{-k^2} \right)^D &= (\sqrt{\pi})^D \text{ und } \left(\int dk e^{-k^2} \right)^D = \int d^D k e^{-k^2} = \int d^{D-1}\Omega \int_0^{\infty} dk k^{D-1} e^{-k^2} \\ &\stackrel{u=k^2}{=} \left(\int d^{D-1}\Omega \right) \int_0^{\infty} \frac{du}{2k} u^{(D-1)/2} e^{-u} = \left(\int d^{D-1}\Omega \right) \frac{1}{2} \int_0^{\infty} du u^{D/2-1} e^{-u} = \left(\int d^{D-1}\Omega \right) \frac{1}{2} \Gamma(D/2) \end{aligned}$$

3. Drücke Integral durch Gamma-Funktionen aus:

$$i(-1)^{r+n} \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)} \frac{1}{(2\pi)^D} \int_0^{\infty} dk_E \frac{k_E^{2r}}{(k_E^2 + R^2 - i0)^n} = (-1)^{r+n} \frac{i}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(r+D/2)\Gamma(n-r-D/2)}{\Gamma(D/2)\Gamma(n)} (R^2 - i0)^{D/2+n-r}$$

– Idee: Verwende Relation $\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \int_0^{\infty} dx \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}}$

– Definition Gamma-Funktion $\Gamma(a) := \int_0^{\infty} dx x^{a-1} e^{-x}$ für $\text{Re } a > 0$

* Anschaulich: Erweiterung der Fakultät auf komplexe Argumente: $\Gamma(a+1) = a!$

– Definition Beta-Funktion $\beta(a, b) := \int_0^1 dx x^{a-1} (1-x)^{b-1}$ für $\text{Re } a, \text{Re } b > 0$

– Zusammenhang Beta- und Gamma-Funktion $\beta(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$

$$\begin{aligned} * \Gamma(a)\Gamma(b) &= \int_0^{\infty} dx x^{a-1} e^{-x} \int_0^{\infty} dy y^{b-1} e^{-y} \stackrel{x=st, y=s(1-t)}{=} \int_0^1 ds \int_0^1 dt s(st)^{a-1} (s(1-t))^{b-1} e^{-(st+s(1-t))} \\ &= \left(\int_0^{\infty} ds s^{a+b-1} e^{-s} \right) \left(\int_0^1 dt t^{a-1} (1-t)^{b-1} \right) = \Gamma(a+b) \beta(a, b) \end{aligned}$$

– Beta-Funktion umschreiben: $\beta(a, b) = \int_0^{\infty} dy \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}}$

$$\begin{aligned} * \beta(a, b) &= \int_0^1 dx x^{a-1} (1-x)^{b-1} \stackrel{x=y/(y+1)}{=} \int_0^{\infty} \frac{dy}{(1+y)^2} \left(\frac{y}{y+1} \right)^{a-1} \left(\frac{1}{1+y} \right)^{b-1} = \int_0^{\infty} dy y^{a-1} (1+y)^{-(a+b)} \\ &= \int_0^{\infty} dy \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}} \end{aligned}$$

• 1-Loop-Tensor-Integrale $\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^{\mu_1} \dots k^{\mu_r}}{(k^2 - R^2 + i0)^n}$

– Strategie: Leite Tensor-Integrale aus skalaren Integralen her

1. Erkenntnis: Tensor-Integrale können wegen Lorentz-Symmetrie nur von $g^{\mu\nu}$ und $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ abhängen

* Ergebnis darf nicht von k^{μ} abhängen, da über k^{μ} integriert wird; außer k^{μ} gibt es keine Lorentz-Tensoren im Tensor-Integral

2. Mache allgemeinen Ansatz für Tensor-Integral: Alle Linearkombinationen aus $g^{\mu\nu}$ und $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$, die die passende Anzahl Indizes haben

3. Bestimme freie Parameter im Ansatz: Multipliziere den Ansatz mit Lorentz-Tensoren $g^{\mu\nu}$, $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ und verwende skalare 1-Loop-Integrale

– Wichtiges Bsp: $\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^{\mu} k^{\nu}}{(k^2 - R^2 + i0)^n} = -\frac{1}{2} (-1)^n \frac{i}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(n-1-D/2)}{\Gamma(n)} (R^2 - i0)^{1-n+D/2} g^{\mu\nu}$

– Notiz: Systematische Beschreibung von 1-Loop-Tensor-Integralen mit Passarino-Veltman-Funktionen

6.3.4 Passarino-Veltman functions

- Definition der fundamentalen PV functions

- $A_0(m) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 - m^2}$
 - $B_0(p^2, m_1, m_2) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 - m_1^2)((k+p)^2 - m_2^2)}$
 - $C_0(p_1^2, p_2^2, (p_2 - p_1)^2, m_1, m_2, m_3) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 - m_1^2)((k+p_1)^2 - m_2^2)((k+p_2)^2 - m_3^2)}$

- Definition der abgeleiteten PV functions

- Abgeleitete PV functions = PV functions mit etwas außer "0" im Index
 - * Motivation: Führe abgeleitete PV functions ein, um Tensorintegrale zu parametrisieren
 - Tensorintegrale müssen wegen Lorentz-Invarianz durch 4-Vektoren der externen Impulse parametrisiert werden können
 - * Kann abgeleitete PV functions mit PV reduction durch fundamentale PV functions ausdrücken

- Notation

- * Anzahl der unteren Indizes = Anzahl der Loop-Impulse im Nenner des zugehörigen Tensorintegrals
 - * Werte der unteren Indizes = Werte der externen Impulse, die das Integral als Koeffizient hat
 - * Gebe 1- bis 3-Punkt-Funktionen als Beispiele an, dann gehts es mit gleichem Prinzip weiter
 - * (...) für Argumente der PV functions

- 1-Punkt PV functions

- * $A^\mu(m) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^\mu}{k^2 - m^2} = 0$
 - Verschwindet trivial, da Integral antisymmetrisch unter $k \rightarrow -k$ ist
 - * $A^{\mu\nu}(m) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^\mu k^\nu}{k^2 - m^2} = g^{\mu\nu} A_{00}(\dots)$

- 2-Punkt PV functions

- * $B^\mu(p^2, m_1, m_2) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^\mu}{(k^2 - m_1^2)((k+p)^2 - m_2^2)} \equiv p^\mu B_1(\dots)$
 - * $B^{\mu\nu}(p^2, m_1, m_2) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 - m_1^2)((k+p)^2 - m_2^2)} \equiv g^{\mu\nu} B_{00}(\dots) + p^\mu p^\nu B_{11}(\dots)$

- 3-Punkt PV functions

- * $C^\mu(p_1^2, p_2^2, (p_2 - p_1)^2, m_1, m_2, m_3) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^\mu}{(k^2 - m_1^2)((k+p_1)^2 - m_2^2)((k+p_2)^2 - m_3^2)} = p_1^\mu C_1(\dots) + p_2^\mu C_2(\dots)$
 - * $C^{\mu\nu}(p_1^2, p_2^2, (p_2 - p_1)^2, m_1, m_2, m_3) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 - m_1^2)((k+p_1)^2 - m_2^2)((k+p_2)^2 - m_3^2)}$
 $= g^{\mu\nu} C_{00}(\dots) + p_1^\mu p_1^\nu C_{11}(\dots) + p_1^\mu p_1^\nu C_{11}(\dots) + p_2^\mu p_2^\nu C_{22}(\dots) + (p_1^\mu p_2^\nu + p_2^\mu p_1^\nu) C_{12}(\dots)$

- Passarino-Veltman reduction

- Aussage: Kann abgeleitete PV functions durch fundamentale PV functions ausdrücken können
 - Mach das in der Praxis nicht von Hand, sondern verwende Computer-Programme
 - Formales Vorgehen (?)
 - * Anschaulich: Muss für n -Punkt Tensorintegral mit m Lorentzindizes $\binom{m}{n}$ -dimensionales lineares Gleichungssystem lösen
- 1. Multipliziere $X^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_m}$ mit allen möglichen Kombinationen aus externen Impulsen $p_1^\mu, p_2^\mu \dots p_n^\mu$
 \Rightarrow Erhalte $\binom{m}{n}$ -dimensionales lineares Gleichungssystem
 2. Löse lineares Gleichungssystem

- Passarino-Veltman functions mit $n > 4$ Propagatoren

- Aussage: Kann PV function mit $n > 4$ Propagatoren als Summe über PV functions mit $(n - 1)$ und $(n - 2)$ Propagatoren ausdrücken
 - Fazit: Kann beliebige PV functions durch PV functions mit $n \leq 4$ Propagatoren ausdrücken

- Moderner Zugang: [Unitarity-cut inspired methods](#)

- Vorteil: Vermeidet numerische Instabilitäten

6.3.5 Rechenmethoden für dimensional regularization

- Massendimensionen in D Dimensionen

- Notation: $[c] \in \mathbb{R}$ ist die Massendimensionen der Größe c
- Massendimensionen von Feldern
 - * Skalarfeld ϕ hat $[\phi] = \frac{D}{2} - 1 = 1 + \frac{D-4}{2} = 1 - \epsilon$
 - * Spinorfeld ψ hat $[\psi] = \frac{D-1}{2} = \frac{3}{2} + \frac{D-4}{2} = \frac{3}{2} - \epsilon$
 - * Vektorfeld A^μ hat $[A^\mu] = [\phi]$
 - * Herleitung: Betrachte kinetische Terme der Felder und verwende $[\mathcal{L}] = D, [\partial_\mu] = 1$
 - Per Definition ist $[x] = -1$ und damit $[\partial_\mu] = 1$
 - $0 = [S] = [\int d^D x \mathcal{L}] = D[x] + [\mathcal{L}] = -D + [\mathcal{L}]$
- Kann aus den Massendimensionen der Felder mit $[\mathcal{L}] = D$ die Massendimensionen der Kopplungskonstanten bestimmen
 - * Massen: $[m] = 1$ (folgt direkt aus Lagrangian)
 - * Eich-Kopplungskonstanten: $[g] = -\frac{D-4}{2} = \epsilon$ wegen $[\partial^\mu] = 1 = [gA^\mu]$

- Clifford-Algebra in D Dimensionen

- Definition der Clifford-Algebra $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$
 - * γ^μ ist 4×4 -Matrix mit Lorentz-Index mit D Komponenten
 - * Hier geht alles gut bei Verallgemeinerung auf D Dimensionen
- Schwierigkeiten mit naiver Behandlung von γ_5
 - * Definition in $D = 4$ $\gamma_5 := i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ ist intrinsisch 4-dimensionale Definition \Rightarrow Kann nicht einfach die Definition verallgemeinern
 - * Für Rechnungen benötigte Relationen: $\gamma_5^2 = 1, \{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0, \text{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_5) = 4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$
 - * Problem: Relationen 2 und 3 können für $D \neq 4$ nicht gleichzeitig erfüllt werden
 - Nehme $\{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0$ an $\Rightarrow e_{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_5) = (D-4)e_{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_5) = 0 \Rightarrow \text{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_5) = 0$ (Widerspruch zur dritten Relation)
- Naive dimensional regularisation scheme (NDimensional Regularization (DR)): $\{\gamma^\mu, \gamma_5\} \equiv 0$
 - * Idee: $\{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0$ ist nützlicher in Rechnungen \Rightarrow Postuliere $\{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0$ statt $\text{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_5) = 4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$
 - * Nachteil: Spuren nicht mehr zyklisch \Rightarrow Position von γ_5 in der Spur ist wichtig
 - * Nachteil: Finde evtl Inkonsistenzen
- Breitenlohner-Maison-t'Hooft-Veltman scheme (BMHV)¹: Verwende selbe Clifford-Algebra wie in $D = 4$ durch die Zerlegung $D = 4 + (D-4)$
 - * Verwende explizite Definition $\gamma_5 := -\frac{i}{4!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma$
 - * Vorteil: Aktuell einzige konsistente Methode (Konsistenz wurde formal bewiesen)
 - * Nachteil: Eichinvarianz wird in Zwischenschritten gebrochen
 - Eichinvarianz kann durch Addition von zusätzlichen Termen (counterterms) im Lagrangian wiederhergestellt werden
 - * Nachteil: Bricht Ward-Identitäten
 - * Explizit: Zerlege Lorentz-Vektoren gemäß $a^\mu = \bar{a}^\mu + \hat{a}^\mu$ bzw $D = 4 + (D-4)$
 - \bar{a}^μ hat verschwindende Einträge in den letzten $D-4$ Komponenten
 - \hat{a}^μ hat verschwindende Einträge in den ersten 4 Komponenten
 - * Eigenschaften von γ_5 : $\{\gamma_5, \bar{\gamma}^\mu\} = 0, [\gamma_5, \hat{\gamma}^\mu] = 0, \{\gamma_5, \hat{\gamma}^\mu\} = 2\gamma_5\hat{\gamma}^\mu, [\gamma_5, \bar{\gamma}^\mu] = 2\gamma_5\bar{\gamma}^\mu$

- Entwickle Ausdrücke in $\epsilon \ll 1$

- Entwickle Gamma-Funktionen mit $\Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \mathcal{O}(\epsilon)$
 - * Kann Ausdrücke für $\Gamma(-n + \epsilon)$ für $n \in \mathbb{N}^0$ rekursiv herleiten mit $\Gamma(z) = z\Gamma(z-1)$

¹<https://arxiv.org/abs/2004.14398>

- Explizit: $\Gamma(-n+1+\epsilon) = (-n+\epsilon)\Gamma(-n+\epsilon) \Rightarrow \Gamma(-n+\epsilon) = \frac{1}{-n+\epsilon}\Gamma(-n+1+\epsilon) = -\frac{n+\epsilon}{n^2}\Gamma(-n+1+\epsilon)$
- Bsp: $\Gamma(-1+\epsilon) = -\left(\frac{1}{\epsilon} + 1 - \gamma_E\right) + \mathcal{O}(\epsilon)$, $\Gamma(-2+\epsilon) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{3}{2} - \gamma_E\right) + \mathcal{O}(\epsilon)$,
 $\Gamma(-3+\epsilon) = -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{\epsilon} + \frac{11}{6} - \gamma_E\right) + \mathcal{O}(\epsilon)$
- * Geschlossener Ausdruck: $\Gamma(-n+\epsilon) = \frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{1}{\epsilon} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \gamma_E\right)$ für $n \geq 0$
- Notiz: Für $n = 0$ ist $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 0$
- Entwickle Potenzen in ϵ mit $X^\epsilon = e^{\epsilon \log X} = 1 + \epsilon \log X + \mathcal{O}(\epsilon^2)$
- * Schreibe komplexere Potenzen als ϵ um mit $X^{a+\epsilon} = X^a X^\epsilon$

6.3.6 Übersicht über Programme zur Berechnung von Loop-Integralen

- Konventionen für Vorfaktoren von Loop-Integralen
 - Naive Konvention: $\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D}$
 - Package-X Konvention: $\left(\frac{ie^{-\gamma_E \epsilon}}{(4\pi)^{D/2}}\right)^{-1} \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D}$
 - LoopTools Konvention: $\frac{1}{i\pi^{2-\epsilon}} \frac{\Gamma(1-2\epsilon)}{\Gamma^2(1-\epsilon)\Gamma(1+\epsilon)} \mu^{2\epsilon} \int d^D k$
- Programme für 1-Loop-Integrale
 - Analytische Lösung
 - * Package-X
 - * FeynCalc
 - Numerische Lösung
 - * Schwierigkeit: Numerische Instabilität in Bereichen mit $\det G = 0$ mit Gram-Determinante G (?)
 - * LoopTools
 - * OneLoop
 - * golem95
 - * Collier (Versuch, das $\det G = 0$ -Problem in numerischen Rechnungen zu lösen)
 - * QCDDLoop (nur skalare Integrale)
- Programme für Multi-Loop-Integrale
 - pySecDec (sector decomposition)

6.4 Multi-Loop-Integrale

6.4.1 Grundlagen

- Grundproblem: Für die meisten Multi-Loop-Integrale gibt es keine analytischen Lösungen
 - Luxus in 1-Loop-Rechnungen: Kann alle Integrale mit PV-Reduktion durch Master-Integrale ausdrücken
 \Rightarrow Alle Integrale sind bekannt
- Liste von einfachen Dingen, die sich im Vergleich zu 1-Loop-Rechnungen ändern
 - Erhalte für n -Loop-Rechnung im Allgemeinen $\frac{1}{\epsilon^n}$ -Divergenzen \Rightarrow Muss Entwicklung in ϵ bis zur n -fach unterdrückten Ordnung machen, um endliche Beiträge zu erhalten
- Fälle, in denen eine einfache Rechnung möglich ist
 - Multi-Loop-Integrale faktorisieren in 1-Loop-Integrale
 - Hinreichend viele Massen der virtuellen Teilchen verschwinden \Rightarrow Multi-Loop-Integrale vereinfachen sich

6.4.2 Überblick über Methoden

6.4.3 Integration-of-parts reduction

6.4.4 Method of regions

6.4.5 Mellin Barnes technique

6.4.6 Sector Decomposition

- Anschaulich: Numerische Methode, die immer funktioniert, aber evtl nur langsam konvergiert

Kapitel 7

Renormierung

7.1 Grundlagen

7.1.1 Grundlagen

- Renormierung = Parameter der Theorie ändern(“renormieren”), sodass UV-Divergenzen rausfallen
 - Vorbereitung: Benutze Regulator, um Unendlichkeiten zu parametrisieren
 - Grundidee: Parameter im Lagrangian k_0 sind formal unendlich, im Gegensatz zu den endlichen(“renormierten”) Parametern k_R
 - * Beispiele für Parameter: Normierung der Felder, Massen, Kopplungskonstanten
 - * Wenn k_0 unendlich sind, können Matrixelemente endlich sein nach dem Prinzip $\infty - \infty = \text{endlich}$
 - * Kann endliche Parametern k_R gleich wie die physikalischen(im Experiment gemessen) Parameter wählen, muss ich aber nicht(Stichwort Substraktionsschemata)
 - * Bild:¹ Theorie- und Experiment-Größen zueinander in Beziehung setzen (Beziehung ist nicht Äquivalenz)
 - Problem: Wie kommt man auf den Zusammenhang zwischen k_0 und k_R ?
 - * Zusammenhang ist essentiell, da sonst keine Vorhersagen gemacht werden können und die Theorie damit nutzlos ist
 - Lösung: Renormierung bzw bestimme δ_k in $k_0 = Z_k k_R = (1 + \delta_k) k_R$
 - * Anschaulich: $k_R = \frac{k_0}{Z_k} = \frac{\infty}{\infty} = \text{endlich}$
 - Warum der Begriff “Renormierung”?
 - * Für Massen und Kopplungskonstanten ist Renormierung ein schlechter Begriff, da für sie noch keine Normierung gewählt wurde
 - Renormierung liefert hier Zusammenhang zwischen den Massen und Kopplungskonstanten im Lagrangian und den physikalischen Masse und Kopplungskonstanten
 - Erwarte naiv, dass Parameter im Lagrangian den physikalischen Parametern entsprechen \Rightarrow Kann mit etwas gutem Willen von Renormierung sprechen
 - * Felder werden tatsächlich “renormiert”, da ihre Normierung durch deren Kommutatorrelationen festgelegt ist
 - Bsp: Renormierte Skalarfelder ϕ_R in $\phi = Z_\phi \phi_R$ erfüllen nicht mehr $[\phi(\vec{x}, t), \pi(\vec{y}, t)] = \delta^3(\vec{x} - \vec{y})$, sondern $[\phi_R(\vec{x}, t), \pi_R(\vec{y}, t)] = Z_\phi^{-2} \delta^3(\vec{x} - \vec{y})$
- Renormierbarkeits-Begriffe
 - Einfache Begriffe “naive Renormierbarkeit” und “Kopplungs-Renormierbarkeit” können schnell abgelesen werden, müssen aber nicht der “richtigen” Renormierbarkeit entsprechen
 - * Beweis von “richtiger” Renormierbarkeit ist komplex, da alle Ordnungen Störungstheorie berücksichtigt werden müssen
 - Für die Renormierbarkeits-Beweise von QED und der EW-Theorie gab es je einen Nobelpreis

¹Schön erklärt in Zee - Quantum Field Theory in a Nutshell

- Achtung: Unterschied zwischen “Renormierbarkeit” und “Renormierung”
 - * Auch nicht-renormierbare Theorien können renormiert werden, benötigt dafür aber unendlich viele Parameter(und unendlich viele Messungen) für beliebig hohe Genauigkeit
- Nicht-renormierbare Theorien = Effektive Theorien
 - * Anschaulich: Unendlich viele Vorhersagen und unendlich viele Parameter, aber mehr Vorhersagen als Parameter
 - Kann auch quadratische Divergenzen haben
 - * Theorie heißt nicht renormierbar : \iff Benötige unendlich viele Parameter(bzw Counterterme), um alle Divergenzen durch Renormierung dieser Parameter zu absorbieren
 - * Theorie heißt naiv-nicht-renormierbar : \iff Theorie ist weder super-renormierbar noch renormierbar
 - * Theorie heißt Kopplungs-nicht-renormierbar : \iff Es gibt Kopplungskonstanten mit positiver Massendimension
 - * Behandle Renormierung von nicht-renormierbaren Theorien im Kapitel Effektive Feldtheorien
- Renormierbare Theorien
 - * Anschaulich: Unendlich viele Vorhersagen mit endlich vielen Messungen
 - Eigenschaft “Renormierbarkeit” ist konzeptionell sehr befriedigend
 - Tatsächlich sind alle Amplituden höchstens logarithmisch divergent
 - * Theorie heißt renormierbar : \iff Alle Divergenzen können durch Renormierung einer endlichen Anzahl von Parametern(bzw Countertermen) entfernt werden
 - * Theorie heißt naiv-renormierbar : \iff Endliche Anzahl von Amplituden mit $\omega \geq 0$
 - Bsp QED: Endlich viele Amplituden mit $\omega \geq 0$ (Photon-Tadpole, Photon-Propagator, Elektron-Propagator, 3γ -Vertex, 4γ -Vertex, $e^+e^-\gamma$ -Vertex) \Rightarrow QED ist naiv-renormierbare Theorie
 - Amplituden bestehen aus unendlich vielen Diagrammen \Rightarrow Schwächer als super-renormierbar
 - * Theorie heißt Kopplungs-renormierbar : \iff Alle Kopplungskonstanten haben höchstens Massendimension 0
- Super-renormierbare Theorien
 - * Theorie heißt naiv-super-renormierbar : \iff Endliche Anzahl von Diagrammen mit $\omega \geq 0$
 - * Theorie heißt Kopplungs-super-renormierbar : \iff Alle Kopplungskonstanten haben negative Massendimension
 - * Super-renormierbare Theorien sind renormierbar

7.2 Renormierung

7.2.1 Renormierung von renormierbaren Theorien

- Kann Vorgehen bis zu beliebiger Ordnung n in Störungstheorie anwenden
1. Definiere renormierte Parameter(Felder, Massen, Kopplungskonstanten) $k_0 = Z_k k_R$ mit $Z_k = 1 + \delta_k$
 - Ziel von Renormierung: δ_k bestimmen \Rightarrow Kenne Zusammenhang zwischen k_0 und k_R
 - Index k läuft über alle Felder, Massen und Kopplungskonstanten
 - Idee: Entwickle Counterterme δ_k in l_R mit Kopplungskonstanten-Index l
 - Renormierte Kopplungskonstanten l_R sind gute Entwicklungskoeffizienten, da sie klein sind
 - Entwicklung der Counterterme δ_k beginnt mit Ordnung $(l_R)^1$
 - Je nach Anwendung werden unterschiedliche Konventionen für Definition der Counterterme verwendet: $k_0 = (1 + \delta_k)k_R, k_0 = k_R + \delta_k, \dots$
 - Kann triviale(aus Zusammenhängen im Lagrangian) und nicht-triviale(aus Symmetrien, zB Ward-Identität) Zusammenhänge zwischen den Counterterms δ_k haben
 2. Feynman-Regeln für Counterterme ablesen

- Behandle Counterterme wie Wechselwirkungsterme

3. Berechne divergente Amplituden mit der bevorzugten Renormierungsstrategie

- Renormierungsstrategie = Konvention, wie $k_0 = (1 + \delta_k)k_R$ in der Rechnung berücksichtigt wird
- Kontrolle: Renormierbare Theorie hat so viele divergente Amplituden wie Parameter(bzw Counterterme)
 - Anschaulich: Für jede Divergenz einen Counterterm, der sie absorbiert
 - Achtung: Einzelne Counterterme können auch verschwinden(wegen Symmetrien, zB Lorentz-Invarianz)
 - ⇒ Habe weniger "effektive" Counterterme

4. Bestimme Counterterme δ_k mit dem bevorzugten Subtraktionsschema

- Subtraktionsschema = Konvention, welche Anteile von $k_0 = (1 + \delta_k)k_R$ in k_R und welche in δ_k absorbiert werden
- Renormierungsstrategie
 - Renormierungsstrategie = Art und Weise, wie die Zerlegung $k_0 = Z_k k_R$ in der Berechnung der Matrixelemente berücksichtigt wird
 - Naive Renormierung
 - * Aussage: Berechne Matrixelement naiv mit k_0 und verwende am Ende der Rechnung $k_0 = Z_k k_R$
 - * Anschaulich: Naive Herangehensweise
 - Renormierte Störungstheorie
 - * Aussage: Zerlege im Lagrangian $k_0 = k_R + \delta_k k_R$ und unterscheide dann Feynmanregeln für renormierte Terme(k_R) und Counterterme($\delta_k k_R$)
 - * Anschaulich: Physikalisch sinnvoller und einfacher implementierbar
 - * Physikalisch sinnvoller, da Störungstheorie hier in renormierten Kopplungskonstanten l_R (kleine Parameter) durchgeführt wird und nicht in nicht-renormierten Kopplungskonstanten l_0 (formal unendlich)
 - In der Praxis wird quasi ausschließlich renormierte Störungstheorie verwendet
- Subtraktionsschemata
 - Subtraktionsschema = Konvention, wie die renormierten Parameter k_R relativ zu den Lagrangian-Parametern k_0 definiert werden bzw wie δ_k definiert wird
 - * Anschaulich: Welche endlichen Terme in $k_0 = (1 + \delta_k)k_R$ kommen in k_R und welche in δ_k ?
 - On-shell subtraction(OS)
 - * Aussage: Renormierte Parameter entsprechen den physikalischen(bzw im Experiment gemessenen) Parametern
 - * Forderung "renormierte Parameter entsprechen physikalischen Parametern" ist nicht-trivial(im Gegensatz zu $\overline{MS}/\overline{MS}$) ⇒ Beschreibe Forderung durch Renormierungsbedingungen
 - Renormierungsbedingungen = Explizite Bedingungen für Matrixelemente, die versichern, dass die renormierten Parameter den physikalischen Parametern entsprechen
 - Eine Renormierungsbedingung für jede divergente Amplitude(nur endlich viele divergente Amplituden für renormierbare Theorie)
 - * Vorteil: Erlaubt leichte Interpretation der renormierten Parameter k_R
 - * Ergebnis hängt explizit von der Skala ab, bei der die Renormierungsbedingungen formuliert werden
 - Minimal subtraction(MS) und modified minimal subtraction(\overline{MS})
 - * Aussage: Counterterms enthalten nur divergente Beiträge(MS) bzw divergente Beiträge und die immer auftretenden Terme $\log 4\pi - \gamma_E(\overline{MS})$
 - * Vorteil von \overline{MS} im Vergleich zu MS: In dimensional regularization wird im Vergleich zu MS $\tilde{\mu}^2 = 4\pi e^{-\gamma_E} \mu^2$ durch μ^2 ersetzt ⇒ Einfachere Notation

- * Vorteil: Praktisch in der Anwendung, da man nicht über Renormierungsbedingungen nachdenken muss
- * Nachteil: Renormierte Parameter sind nicht die physikalischen Parameter
- * Form des Ergebnisses hängt vom verwendeten Regulator ab
 - Dimensional regularization: Ergebnis hängt von Renormierungsskala μ ab
 - Regulator mit UV-Skala Λ (zB Pauli-Villars): Ergebnis enthält Logarithmus mit dimensionsbehaftetem Argument \Rightarrow Muss formal eine Massenskala einführen, damit das Logarithmus-Argument dimensionslos wird
- Auch andere Subtraktionsschemata möglich, die auf bestimmte Anwendungsbereiche spezialisiert sind
 - * Bsp: Pythia-Schema, für Multiloop-Rechnungen optimierte Subtraktionsschemata
- In der Praxis werden fast ausschließlich OS und $\overline{\text{MS}}$ verwendet
- Kann mit $\delta_k(k_R)$ die Definition $k_0 = k_R + \delta_k k_R$ formal umkehren zu $k_R = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(k_0)^i$
 - Anschaulich: In $k_R = k_0 - k_R \delta_k$ kürzen sich die Unendlichkeiten in k_0 und δ_k raus
 - Vorgehen: Setze Ausdruck für k_R rekursiv in $k_R = k_0 - k_R \delta_k$ mit $\delta_k = \delta_k(k_R)$ ein
 - Entwicklung in k_0 ist formal fragwürdig, da k_0 kein kleiner Parameter ist(sondern unendlich)

7.3 Laufende Kopplungen

7.3.1 Renormierungsgruppe

- Grundlagen
 - Grundidee: Observablen sind unabhängig von den Renormierungsparametern μ bzw Λ
 - Renormierungsgruppe erlaubt einfachen Zugang zu Abhängigkeit der renormierten Größen von den Renormierungsparametern
 - * Abhängigkeit wird beschrieben durch Renormierungsgruppengleichungen
 - Renormierungsgruppe als Gruppe
 - * Analogie zu Gruppentheorie: Transformationen der Gruppe = Änderung des Renormierungsparameters
 - * Besserer Begriff: "Renormierungssymmetrie"
 - Begriff "Renormierungsgruppe" ist unpassend, da die Transformationseigenschaften des Renormierungsparameters nicht im Fokus stehen
 - Die Botschaft ist, dass Observablen invariant unter Änderungen der Renormierungsparameter sind(eine Symmetrie)
- Formulierungen der Renormierungsgruppe
 - Unterschied der Formulierungen: Arbeite mit unterschiedlichen Renormierungsparametern
 - Kontinuum-Renormierungsgruppe (CRG) \Rightarrow Arbeite mit μ
 - * Renormierungsparameter ist eine Skala, die zur Definition der renormierten Größen definiert wird
 - Bsp: μ in dimensional regularization mit MS, Skala der Renormierungsbedingungen in OS
 - * Verwende die Notation μ für den Renormierungsparameter
 - Nützlich, da in der Praxis fast ausschließlich dimensional regularization mit $\overline{\text{MS}}$ -Subtraktion verwendet wird
 - Wilson-Renormierungsgruppe (WRG) \Rightarrow Arbeite mit Λ
 - * Renormierungsparameter ist die UV-Cutoff-Skala Λ der Theorie
- Renormierungsgruppengleichungen (RGG) für CRG

- Idee: Observablen und Größen der nicht-renormierten Theorie X sind unabhängig von einem Renormierungsparameter $\mu \Rightarrow \frac{dX}{d\mu} = 0$
- RGGs aufstellen
 - * Viele mögliche Wahlen für X , aber alle Wahlen liefern dieselben RGGs für die renormierten Parameter k_R
 - * Vorgehen
 1. Wähle Observable oder Größe der nicht-renormierten Theorie X und berechne sie und Loop-Beiträge bis zu einer beliebigen Ordnung (Regulator führt μ -Abhängigkeit ein)
 2. Drücke X durch renormierte Parameter k_R aus
 3. Schreibe $\frac{\partial X}{\partial \mu} = 0$ und lese RGGs (Form: $\mu \frac{\partial k_R}{\partial \mu} = \dots$) für die renormierten Parameter k_R ab
 - * RGG aus Lagrangian-Parametern
 - Lagrangian-Parameter sind formal unendlich und werden durch die Renormierung nicht beeinflusst (nur zerlegt in endliche und unendliche Teilchen) \Rightarrow Kann Lagrangian-Parameter als X verwenden
 - Einfachster Zugang zu RGGs
 - * RGG aus Greensfunktionen
 - Greensfunktionen der "naiven" Theorie (ohne Renormierung) hängen nicht von Renormierungs-Dingen ab \Rightarrow Kann Greensfunktionen als X verwenden
 - Bezeichne die erhaltenen Gleichungen je nach gewähltem Subtraktionsschema als Callan-Symanzik-Gleichung, Gell-Mann-Low-Gleichung, 't Hooft-Weinberg-Gleichung, Georgi-Politzer-Gleichung, ...
 - * RGG aus Observablen
 - Observablen sind unabhängig vom Renormierungsschema \Rightarrow Kann Observablen als X verwenden
 - Umständlicher Zugang zu RGGs (muss zuerst die Observablen berechnen), aber am besten motiviert (Observablen sind physikalisch und müssen daher unabhängig von Renormierungs-Dingen sein)
- Bezeichnungs-Konventionen für RGGs
 - * Schreibe RGGs in der Form $\mu \frac{\partial k_R}{\partial \mu} = \frac{\partial \mu}{\partial \log \mu} \frac{\partial k_R}{\partial \mu} = \frac{\partial k_R}{\partial \log \mu} = \dots$
 - Grund 1: μ -Abhängigkeiten in renormierte Größen haben immer die Form $\log \mu \Rightarrow \frac{\partial k_R}{\partial \log \mu}$ ist einfacher zu berechnen bzw $\log \mu$ ist natürlichere Variable als μ
 - Grund 2: $\frac{\partial k_R}{\partial \log \mu} = \mu \frac{\partial k_R}{\partial \mu}$ hat dieselbe Einheit wie k_R
 - * RGG für Kopplungskonstanten k_R : β -Funktion in $\mu \frac{\partial k_R}{\partial \mu} = \beta(k_R)$
 - Anschaulich: β -Funktion der Kopplungskonstante k_R charakterisiert die μ -Abhängigkeit von k_R
 - * RGG für Massen und Feld-Normierungen k_R : Anomale Dimension γ_k in $\mu \frac{\partial k_R}{\partial \mu} = \gamma_k(k_R) k_R$
 - Anschaulich: Anomale Dimension γ_k der Masse/Feld-Normierung k_R charakterisiert die μ -Abhängigkeit von k_R
 - "Dimension": γ_k ist einheitenlos; γ_k ist Skalierung von k_R mit μ (für $k_R = \mu^\rho$ ist $\gamma_k = \rho$)
 - In klassischer Theorie ist $\gamma_k = 0$, da es keine Loop-Effekte gibt \Rightarrow Kann γ_k als Maß für Abweichung von der klassischen Theorie interpretieren

7.4 Renormierung von nicht-renormierbaren Theorien

Kapitel 8

Eichtheorie

8.0.1 Einführung

- Eichtheorie = Theorie mit Invarianz unter einer lokalen Transformation
 - “Lokale Transformation”: Transformationsparameter α haben beliebige Ortsabhängigkeit: $\alpha(x)$
 - Eichtheorie-Formalismus funktioniert für beliebige Lie-Gruppen
- Eichsymmetrie = Invarianz unter lokalen Transformationen
 - Anschaulich: Eichsymmetrie ist Redundanz in Freiheitsgraden eines masselosen Vektorfelds A_μ
 - * Masseloses Vektorfeld (Darstellung der Poincaré-Gruppe) hat 2 Freiheitsgrade und wird in Darstellung A_μ der Lorentz-Gruppe eingebettet \Rightarrow 2 redundante Freiheitsgrade
 - * Eichsymmetrie heißt Symmetrie, da die Physik invariant unter Transformation der redundanten Freiheitsgraden von A_μ ist
 - Kann Eichsymmetrie theoretisch entfernen, indem ich eine geschickte Parametrisierung der Eichfelder A_μ wähle, die nur 2 Freiheitsgrade übrig lässt
- Motivation für Eichtheorie
 - Zugang 1: Theorie soll “lokale Symmetrie” haben
 - * Praktisch aus Theorie-Perspektive, da Konstruktion von Lagrangians nach dem Prinzip “alle invarianten Terme konstruieren” funktioniert
 - Zugang 2: Theorie soll masselose Vektorfelder beinhalten
 - * Praktisch aus physikalischer Perspektive, da man in der Natur Teilchen und ihre Massen beobachtet (Eichsymmetrie ist viel abstrakter)
 - Die beiden Zugänge sind äquivalent
 - * $1 \rightarrow 2$: Eine lokale Symmetrie erfordert zwangsweise sogenannte Eichbosonen (= masselose Vektorfelder)
 - Aussage ist nicht-trivial, ausführliche Argumentation kommt unten
 - * $2 \rightarrow 1$: Um ein masseloses Vektorfeld (Darstellung der Poincaré-Gruppe, 2 Freiheitsgrade) in eine Darstellung der Lorentzgruppe (Vektorfeld A^μ , 4 Freiheitsgrade) einzubetten, benötigt man einen Lagrangian mit einer lokalen Symmetrie
 - Die 2 unphysikalischen Freiheitsgrade von A^μ werden durch eine lokale Symmetrie entfernt
 - Kein formales Argument, eher Ausschlussprinzip (“Benötige eine lokale Symmetrie, damit man die richtige Anzahl an Freiheitsgraden erhält”)
 - Gibt wohl auch speziell designte Ausnahmen, die sind aber eher unnatürlich (?)
- Globale Transformationen sind ein Spezialfall von lokalen Transformationen
 - Ausführlich: Kann die Parameter einer lokalen Transformation an jedem Ort gleich wählen \Rightarrow Bekomme eine globale Transformation
 - Folgerung: Noether-Theorem liefert auch Erhaltungsgrößen für lokale Transformationen
- Eichtheorie in bekannten Modellen

- $U(1)$ (QED)
- $SU(3)$ (QCD)
- $SU(5), SO(10), E_6$ (GUTs)
- Notiz: Nichtperturbative Effekte von Eichtheorien (großes Thema) werden im Kapitel zu Nichtperturbativen Effekten behandelt

8.1 Grundlagen und Eichfelder

8.1.1 Grundlagen

- Idee: Behandle Eichtheorie-Formalismus so allgemein wie möglich \Rightarrow Behandle die Ideen nur einmal, aber dafür gründlich
 - Klassische Eichtheorie = Führe kovariante Ableitung und Eichfelder ein, quantisiere die Eichfelder aber nicht
- Lie-Gruppen sind die allgemeinsten Gruppen, für die Eichtheorie Sinn macht
 - Benötige für Eichtheorie Generatoren, mit denen Eichfelder kontrahiert werden können \Rightarrow Nur möglich für Lie-Gruppen (?)
- Eichtransmutationsverhalten eines Felds unter der fundamentalen Darstellung $\phi^i \xrightarrow{\alpha} U^i_j \phi^j = (e^{iT_a \alpha^a})^i_j \phi^j$
 - Definierende Eigenschaft von Lie-Gruppen: Kann Transformation über Generatoren beschreiben $U^i_j = (e^{iT_a \alpha^a})^i_j$
 - * Achtung: Generatoren vertauschen nur für $f^{ab}_c = 0$ in $[T^a, T^b] = f^{ab}_c T^c$
 - * Verwende allgemeine Normierung (Parameter η) für Generatoren $(T_a)^i_j (T_b)^j_i = \text{tr} T_a T_b = \eta \delta_{ab}$
 - Notation: $\xrightarrow{\alpha}$ für Eichtransformationen mit dem Parameter $\alpha = \alpha(x)$
 - * Summiere über obere und untere Indizes und berücksichtige damit die Metrik der Lie-Gruppe (mehr dazu in Gruppentheorie-Zusammenfassung)
 - Indexnotation: $i, j, k \dots / a, b, c \dots$ sind Indizes der fundamentalen/adjungierten Darstellung der Lie-Gruppe
 - * Könnte Indizes der fundamentalen Darstellung nicht ausschreiben (Standard in Lehrbüchern), aber das birgt Verwirrungsgefahr
 - Erweiterung auf Felder $\phi^{ijk\dots}$, die sich unter einer beliebigen Darstellung transformieren: Jeder Index transformiert sich unter der fundamentalen Darstellung $\phi^{ijk\dots} \xrightarrow{\alpha} U^i_{i_1} U^j_{j_1} U^k_{k_1} \dots \phi^{i_1 j_1 k_1 \dots}$
- Anmerkungen zu Konventionen
 - Definition der Eichkopplung g
 - * Meine Konvention: $D_\mu = \partial_\mu - ig A_\mu^a T_a$
 - * Alternative: $g \rightarrow -g$
 - Definition der Eichfelder A_μ^a bzw $D_\mu = \partial_\mu + ig A_\mu^a T_a$
 - * Meine Konvention: $\mathcal{L} \supset -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}$ (üblich in Phänomenologie)
 - * Alternative: $A_\mu^a \rightarrow \frac{1}{g} A_\mu^a$ bzw $\mathcal{L} \supset -\frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}$ (üblich in mathematischer Physik)
 - Vorteil: Faktor $\frac{1}{g^2}$ faktorisiert für Eichboson-Effekte $\mathcal{L} \supset \frac{1}{g^2} \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (H^\mu A_\mu^a)^2 \right) \Rightarrow$ Erhalte einfachen klassischen ($g \rightarrow 0$) bzw stark gekoppelten ($g \rightarrow \infty$) Grenzfall
 - Vorteil: Erhalte nur g^2 -Abhängigkeiten in diesem Formalismus \Rightarrow Sehe, dass $g \rightarrow -g$ die Physik nicht ändert
 - Nützliche Redefinition der Eichkopplung: $\alpha := \frac{g^2}{4\pi}$
 - * Verwende g^2 : Observablen sind $\propto |\mathcal{M}|^2 \Rightarrow g$ taucht in Observablen typischerweise quadratisch auf

- Ausnahme: Interferenzterme von Eichboson-Effekten mit anderen Effekten
- Notiz: Oft auch schon g^2 im Matricelement (zB bei virtuellem Photon)
- Weiterer Grund: Vorzeichen von g ist unphysikalisch (siehe oben) \Rightarrow Nur g^2 ist eine Observable
- * Verwende $\frac{1}{4\pi}$: Absorbiere Loop-Faktoren $\frac{1}{16\pi^2}$ und Phasenraum-Faktoren $\frac{1}{16\pi}$

8.1.2 Kovariante Ableitung $(D_\mu)^i_j := \delta^i_j \partial_\mu - ig(T_a)^i_j A_\mu^a$

- Definierende Eigenschaft der kovarianten Ableitung: $(D_\mu)^i_l \xrightarrow{\alpha} U^i_j (D_\mu)^j_k (U^{-1})^k_l = (UD_\mu U^{-1})^i_j$
 - Anschaulich: D_μ transformiert sich unter lokalen Transformationen so wie unter globalen Transformationen
 - * Für globale Transformationen folgt das Transformationsverhalten aus der Indexstruktur, für lokale Transformationen kann das Transformationsverhalten komplexer sein (Begründung: Topologie-Effekte der Eichgruppe)
 - Definition aus dem Titel ist die allgemeinste Form, die die definierende Eigenschaft erfüllt
 - * Notiz: Muss Transformationsverhalten von A_μ^a dafür passend wählen
 - Praxis-Perspektive: $(D_\mu)^i_j$ mit dieser Eigenschaft macht es einfach, einen Lagrangian eichinvariant zu machen wegen $(D_\mu)^i_j \phi^j \xrightarrow{\alpha} U^i_j (D_\mu)^j_k \phi^k$ analog zu globalen Transformationen
 1. Bringe Felder der Theorie in Darstellungen der Eichgruppe unter \Rightarrow Ersetzung $\phi \rightarrow \phi^i$
 2. Ersetze $\partial_\mu \rightarrow (D_\mu)^i_j$ und addiere die kinetischen Terme $-\frac{1}{4} \text{tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ der Eichfelder (mehr unten)
 - Topologie-Perspektive: Kovariante Ableitung berücksichtigt die Topologie der Lie-Gruppe und ist damit die natürliche Art, nach Objekten abzuleiten, die sich unter Darstellungen der Lie-Gruppe transformieren
- Transformationsverhalten der Eichfelder $(T_a)^i_j A_\mu^a \xrightarrow{\alpha} U^i_k (T_a)^k_l \left(A_\mu^a + \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha^a \right) (U^{-1})^l_j$
 - Achtung: Kann Transformationsverhalten der Eichfelder unter lokalen Transformationen nicht aus der Indexstruktur ablesen (das geht nur für globale Transformationen)
 1. $(D_\mu)^i_j \phi^j = \left(\delta^i_j \partial_\mu - ig(T_a)^i_j A_\mu^a \right) \phi^j \xrightarrow{\alpha} \left(\delta^i_j \partial_\mu - ig(T_a)^i_j A_\mu^a \right) U^j_k \phi^k$
 2. $\dots = \left(U^i_k \partial_\mu + U^i_j i(T_a)^j_k \partial_\mu \alpha^a - ig(T_a)^i_j A_\mu^a U^j_k \right) \phi^k$
 - Benutze Produktregel und $\partial_\mu U^i_j = U^i_k i(T_a)^k_j \partial_\mu \alpha^a$
 3. $\dots = U^i_j \left(\delta^j_k \partial_\mu + i(T_a)^j_k \partial_\mu \alpha^a - ig(U^{-1})^j_l (T_a)^l_m A_\mu^a U^m_k \right) \phi^k$
 - Identifiziere $\delta^i_l = U^i_j (U^{-1})^j_l$ im letzten Term, da das U^m_k nicht mit $(T_a)^l_m A_\mu^a$ kommutiert
 4. Ablesen $\Rightarrow (A'_\mu)^l_m = (T_a)^l_m A_\mu^a$ muss die obige Form haben, damit die definierende Eigenschaft erfüllt ist
 - Kann mit $\text{tr} T_a T_b = \eta \delta_{ab}$ auch das Transformationsverhalten von A_μ^a berechnen, das führt aber auf kein schöneres Ergebnis
- Erweiterung auf Felder $\phi^{ijk\dots}$: Benötige einen Term $-ig(T_a)^i_j A_\mu^{a,n}$ und damit einen kompletten Satz Eichfelder für jeden Index des Felds $\phi^{ijk\dots}$
 - Index n der Eichfelder läuft über die Anzahl der Indizes von $\phi^{ijk\dots}$
 - Eichfelder $A_\mu^{a,n}$ mit selbem (a, μ) und unterschiedlichem n haben dieselben Eigenschaften, sind aber unabhängig

8.1.3 Eichfelder mit adjungierten Indizes A_μ^a vs Eichfelder mit fundamentalen Indizes $(A_\mu)^i_j$

- Anschaulich: Eichfelder sind entweder Vektoren in der adjungierten Darstellung oder Matrizen in der fundamentalen Darstellung
 - Notation: A_μ^a für Vektor, A_μ für Matrix (mit den Komponenten $(A_\mu)^i_j$)
- Zusammenhang über Generatoren: $(A_\mu)^i_j := (T_a)^i_j A_\mu^a$ und $A_\mu^a = \frac{1}{\eta} (T^a)^i_j (A_\mu)^j_i = \frac{1}{\eta} \text{tr} T^a A_\mu$
 - Umkehrung folgt durch Multiplikation mit $(T^b)^j_i$: $(T^b)^j_i (A_\mu)^i_j = (T^b)^j_i (T_a)^i_j A_\mu^a = \eta \delta_{ab} A_\mu^a = \eta A_\mu^b$
- Vorteil der Eichfelder mit adjungierten Indizes: A_μ^a enthält die minimale Information der Eichfelder
 - $(A_\mu)^i_j$ hat mehr Komponenten als A_μ^a und muss daher zusätzliche Bedingungen erfüllen
 - * Bsp $SU(n)$: $\text{tr} A_\mu = (A_\mu)^i_i = (T_a)^i_i A_\mu^a = A_\mu^a \text{tr} T_a = 0$ als zusätzliche Bedingung für A_μ , da A_μ mit $n \times n$ Komponenten eine Komponente mehr hat als A_μ^a mit $n^2 - 1$ Komponenten
- Vorteil der Eichfelder mit fundamentalen Indizes: Einfaches Transformationsverhalten, wenn man mit Generatoren der fundamentalen Darstellung T_a arbeitet
 - Bekomme $A_\mu \xrightarrow{\alpha} U \left(A_\mu + \frac{1}{g} T_a \partial_\mu \alpha^a \right) U^{-1}$
- Fazit: A_μ^a enthält minimale Information, A_μ ist nützlicher für Rechnungen

8.1.4 Infinitesimale Eichtransformationen von Eichfeldern

- Infinitesimale Eichtransformationen ($\alpha \ll 1$) $U = \mathbb{1} + iT_a \alpha^a$
- Eichfelder mit fundamentalen Indizes $A_\mu \xrightarrow{\alpha} A_\mu + \frac{1}{g} T_a \partial_\mu \alpha^a + i[T_a, A_\mu] \alpha^a$
 - $A_\mu \xrightarrow{\alpha} U(A_\mu - \frac{1}{g} T_a \partial_\mu \alpha^a) U^{-1} = (1 + iT_b \alpha^b) (A_\mu + \frac{1}{g} T_a \partial_\mu \alpha^a) (1 - iT_c \alpha^c) = A_\mu + \frac{1}{g} T_a \partial_\mu \alpha^a + i[T_a, A_\mu] \alpha^a$
- Eichfelder mit adjungierten Indizes $A_\mu^a \xrightarrow{\alpha} A_\mu^a + \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha^a - \frac{1}{\eta} f^a_{bc} A_\mu^c \alpha^b$
 - $A_\mu^a = \frac{1}{\eta} \text{tr} T^a A_\mu \xrightarrow{\alpha} \frac{1}{\eta} \text{tr} T^a \left(A_\mu + \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha^a - \frac{1}{\eta} f^a_{bc} A_\mu^c \alpha^b \right) = A_\mu^a + \frac{1}{\eta g} \text{tr}(T^a T_b) \partial_\mu \alpha^b + \frac{i}{\eta} \text{tr}(T^a [T_b, A_\mu]) \alpha^b$
 $= A_\mu^a + \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha^a - \frac{1}{\eta} f^a_{bc} A_\mu^c \alpha^b$
 - * Verwende $\frac{1}{\eta} \text{tr}(T^a T_b) = \delta^a_b$ und (mit Zyklichkeit der Spur)
 $\text{tr}(T^a [T_b, A_\mu]) = \text{tr}(T^a T_b A_\mu) - \text{tr}(T^a A_\mu T_b) = \text{tr}([T^a, T_b] A_\mu) = i f^a_{bc} \text{tr}(T^c A_\mu) = i f^a_{bc} A_\mu^c$
 - Notiz: Kann man über kovariante Ableitung in der adjungierten Darstellung $(D_\mu)^a_b = \delta^a_b \partial_\mu - \frac{g}{\eta} f^a_{bc} A_\mu^c$ ausdrücken: $A_\mu^a \xrightarrow{\alpha} A_\mu^a + \frac{1}{g} (D_\mu)^a_b \alpha^b$

8.1.5 Eigenschaften von Eichfeldern A_μ^a

- Eichfelder transformieren sich unter der $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ -Darstellung (Vektor-Darstellung) der Lorentz-Gruppe
 - Begründung: A_μ^a muss sich wegen $(D_\mu)^i_j = \delta^i_j \partial_\mu - ig(T_a)^i_j A_\mu^a$ wie ∂_μ unter Lorentztransformationen transformieren, und ∂_μ transformiert sich unter $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ wegen $\partial_\mu x^\mu = 4$
 - Kann das Lorentz-Transformationsverhalten von A_μ^a frei wählen, da die Definition von A_μ^a keine Bedingungen an Lorentz-Transformationen enthält
 - Folgerung: Eichfelder haben Spin 1, da das die einfachste Darstellung der Poincaré-Gruppe ist, in die $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ -Darstellungen der Lorentz-Gruppe eingebettet werden können
- Eichfelder A_μ^a transformieren sich unter der adjungierten Darstellung der Lie-Gruppe
 - Transformationsverhalten von A_μ^a ist durch definierende Eigenschaft der kovarianten Ableitung festgelegt \Rightarrow Muss zeigen, dass dieses Transformationsverhalten dasselbe ist wie das der adjungierten Darstellung – Intuitiv: Jedem Generator ist ein Eichfeld zugeordnet \Rightarrow Eichfelder transformieren sich unter der adjungierten Darstellung der Eichgruppe, da diese dieselbe Anzahl an Freiheitsgraden hat wie es Generatoren gibt

1. Betrachte Spezialfall globaler ($\partial_\mu \alpha = 0$) infinitesimaler ($\alpha \ll 1$) Transformation
 - Rechne in diesem Spezialfall, da Eigenschaften von Lie-Algebren auf diese Art definiert sind – Wenn Relationen in diesem Spezialfall gelten, gelten sie immer
2. Transformationsverhalten von A_μ^a : $A_\mu^a \xrightarrow{\alpha} A_\mu^a - \frac{1}{\eta} f_{bc}^a A_\mu^c \alpha^b$
 - Verwende infinitesimales Transformationsverhalten von A_μ^a mit $\partial_\mu \alpha^a = 0$
3. Identifiziere Generatoren der adjungierten Darstellung $(X^a)^b_c = -if_{bc}^a \Rightarrow A_\mu^a \xrightarrow{\alpha} A_\mu^a + \frac{i}{\eta} (X^a)_{bc} A_\mu^c \alpha^b$
 - Fazit: A_μ^a transformiert sich mit den Generatoren X^a der adjungierten Darstellung (und einem verschleppten Normierungsfaktor) $\Rightarrow A_\mu^a$ transformiert sich unter der adjungierten Darstellung der Lie-Gruppe

• Eichfelder sind reell

- Intuitives Argument: ∂_μ ist hermitescher Operator $\Rightarrow D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a T_a$ sollte auch hermitescher Operator sein $\Rightarrow A_\mu^a \in \mathbb{R}$
- Intuitives Argument: Eichfelder A_μ^a haben 1:1-Zusammenhang mit Generatoren T^a der adjungierten Darstellung der Eichgruppe, jeder Generator steht für einen reellen Transformations-Freiheitsgrad der Eichgruppe (bzw 1 reeller Transformationsparameter) $\Rightarrow A_\mu^a \in \mathbb{R}$ genügt, um die Theorie invariant unter lokalen Transformationen zu machen

• Eichfelder sind masselos

1. Massenterm $A_\mu^a A_\mu^a$ wäre nicht eichinvariant
 - $A_\mu^a A_\mu^a \xrightarrow{\alpha} \left(A_\mu^a + \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha^a - \frac{1}{\eta} f_{bc}^a A_\mu^c \alpha^b \right) \left(A_\mu^a + \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha^a - \frac{1}{\eta} f_{de}^a A_\mu^e \alpha^d \right)$
 $= A_\mu^a A_\mu^a + \frac{2}{g} A_\mu^a \partial_\mu \alpha^a - \frac{2}{\eta} f_{bc}^a A_\mu^a A_\mu^c \alpha^b \neq A_\mu^a A_\mu^a$
 - Kann das auch für Massenterm mit fundamentalen Indizes $\text{tr} A_\mu A_\mu = \text{tr} T_a A_\mu^a T^b A_\mu^b = A_\mu^a A_\mu^a \text{tr} T_a T^b = A_\mu^a A_\mu^a \eta \delta_a^b = \eta A_\mu^a A_\mu^a$ nachrechnen (umständlicher)
2. Argument: Eichfeld-Massenterme sind nicht eichinvariant \Rightarrow Eichfeld-Massenterm in einer Eichtheorie nicht erlaubt \Rightarrow Eichfelder sind masselos
 - Notiz: Kann Massenterme für beliebige Eichfelder durch den Higgs-Mechanismus generieren
 - * Eichsymmetrie wird dadurch nicht verletzt, da andere Terme im Lagrangian (außer dem Massenterm) ebenfalls nicht eichinvariant sind und sich deren zusätzliche Terme unter Eichtransformationen mit den zusätzlichen Termen des Massenterms wegheben
 - Notiz: Kann Massenterme für $U(1)$ -Eichfelder durch den Stückelberg-Mechanismus generieren (8.3.3)

• Transformationsverhalten unter diskreten Transformationen C, P, T

- Transformationsverhalten von A_μ^a festgelegt durch Transformationsverhalten von ∂_μ
 1. A_μ^a ist definiert durch die Konstruktion $D_\mu = \partial_\mu - igT_a A_\mu^a \Rightarrow A_\mu^a$ wird in \mathcal{L} in dieser Form vorkommen
 2. Transformationsverhalten von ∂_μ unter C, P, T ist bekannt: $\partial_\mu \xrightarrow{C} (\partial_\mu)^*$, $\partial_\mu \xrightarrow{P} g_{\mu\mu} \partial_\mu$, $\partial_\mu \xrightarrow{T} g_{\mu\mu} \partial_\mu$
 3. $iT_a A_\mu^a$ hat selbes Transformationsverhalten wie ∂_μ , iT_a ist bekannt \Rightarrow Finde Transformationsverhalten von A_μ^a
- P-Transformation: $A_\mu^a \xrightarrow{P} g_{\mu\mu} A_\mu^a$
- T-Transformation: $A_\mu^a \xrightarrow{T} g_{\mu\mu} A_\mu^a$
- C-Transformation: $A_\mu^a \xrightarrow{C} \pm A_\mu^a$ mit $\begin{cases} + & (iT_a)^* = iT_a \\ - & (iT_a)^* = -iT_a \end{cases}$
 - * Kann die Generatoren T_a immer so definieren, dass $(iT_a)^* = \pm iT_a$ gilt bzw dass sie entweder reell oder imaginär sind
 - * Notiz: Eichbosonen in nichtabelscher Eichtheorie haben meist unterschiedliches C-Transformationsverhalten (wenn die Gruppe reelle und imaginäre Generatoren hat)

8.1.6 Feldstärketensor $F_{\mu\nu} := \frac{i}{g}[D_\mu, D_\nu]$

- Übergang zwischen fundamentalen und adjungierten Indizes: $(F_{\mu\nu})^i_j = F_{\mu\nu}^a (T_a)^i_j$, $F_{\mu\nu}^a = \frac{1}{\eta} \text{tr} T^a F_{\mu\nu}$
 - Komplet analog zu den Eichfeldern A_μ/A_μ^a
- Motivation: $F_{\mu\nu} \xrightarrow{\alpha} U F_{\mu\nu} U^{-1} \Rightarrow \text{tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \xrightarrow{\alpha} \text{tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ ist invariant
 - $\text{tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ ist invariant unter Eichtransformationen \Rightarrow Verwende $\text{tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ als kinetischen Term
 - Transformation von $F_{\mu\nu}$: $F_{\mu\nu} = \frac{i}{g}[D_\mu, D_\nu] \xrightarrow{\alpha} \frac{i}{g}[U D_\mu U^{-1}, U D_\nu U^{-1}] = U \frac{i}{g}[D_\mu, D_\nu] U^{-1} = U F_{\mu\nu} U^{-1}$
 - Transformation von $\text{tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$: $\text{tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \xrightarrow{\alpha} \text{tr} U F_{\mu\nu} U^{-1} U F^{\mu\nu} U^{-1} = \text{tr} F_{\mu\nu} U^{-1} U F^{\mu\nu} U^{-1} U = \text{tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$
 - Infinitesimales Transformationsverhalten von $F_{\mu\nu}/F_{\mu\nu}^a$ einsetzen liefert selbes Ergebnis (ist aber umständlicher)
- Feldstärketensor explizit berechnen
 - In fundamentalen Indizes: $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu]$
 - * $F_{\mu\nu} = \frac{i}{g}[D_\mu, D_\nu] = \frac{i}{g}[\partial_\mu - igA_\mu, \partial_\nu - igA_\nu] = \frac{i}{g}(-ig[\partial_\mu, A_\nu] - ig[A_\mu, \partial_\nu] - g^2[A_\mu, A_\nu])$
 $= [\partial_\mu, A_\nu] - [\partial_\nu, A_\mu] - ig[A_\mu, A_\nu] = (\partial_\mu A_\nu) - (\partial_\nu A_\mu) - ig[A_\mu, A_\nu]$
 - * Verwende Produktregel $[\partial_\mu, A_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = (\partial_\mu A_\nu) + A_\nu \partial_\mu - A_\nu \partial_\mu = (\partial_\mu A_\nu)$
 - In adjungierten Indizes: $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c$
 - * $F_{\mu\nu}^a = \frac{1}{\eta} \text{tr} T^a F_{\mu\nu} = \frac{1}{\eta} \text{tr} (T^a \partial_\mu A_\nu - T^a \partial_\nu A_\mu - ig T^a [A_\mu, A_\nu])$
 $= \partial_\mu \frac{1}{\eta} \text{tr} T^a A_\nu - \partial_\nu \frac{1}{\eta} \text{tr} T^a A_\mu - \frac{ig}{\eta} A_\mu^b A_\nu^c \text{tr} T^a [T_b, T_c] = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c$
 - * Verwende $\text{tr} T^a [T_b, T_c] = if_{bcd} \text{tr} T^a T^d = i\eta f_{bcd} \delta^{ad} = i\eta f_{bc}^a = i\eta f_{bc}^a (f^{abc} \text{ total antisymmetrisch, kann im Ausdruck Indizes heben und senken und so } f^{abc} \text{ erhalten})$
- Infinitesimale Eichtransformationen des Feldstärketensors
 - Beobachtung: Feldstärketensor transformiert sich unter Eichtransformationen so wie unter klassischen Transformationen (keine Abhängigkeiten von g oder $\partial_\mu \alpha^a$)
 - In fundamentalen Indizes: $F_{\mu\nu} \xrightarrow{\alpha} F_{\mu\nu} + i[T_a, F_{\mu\nu}] \alpha^a$
 - * $F_{\mu\nu} \xrightarrow{\alpha} (1 + iT_a \alpha^a) F_{\mu\nu} (1 - iT_a \alpha^a) = F_{\mu\nu} + i[T_a, F_{\mu\nu}] \alpha^a$
 - * Notiz: ∂_μ in $F_{\mu\nu}$ wirkt nur auf $A_\nu \Rightarrow$ Bekomme keine zusätzlichen $\partial_\mu \alpha^a$ -Terme
 - In adjungierten Indizes: $F_{\mu\nu}^a \xrightarrow{\alpha} F_{\mu\nu}^a - f_{bc}^a F_{\mu\nu}^c \alpha^b$
 - * $F_{\mu\nu}^a = \frac{1}{\eta} \text{tr} T^a F_{\mu\nu} \xrightarrow{\alpha} \frac{1}{\eta} \text{tr} (T^a F_{\mu\nu} + T^a i[T_b, F_{\mu\nu}] \alpha^b) = F_{\mu\nu}^a - f_{bc}^a F_{\mu\nu}^c \alpha^b$
 - * Verwende $\text{tr} T^a [T_b, F_{\mu\nu}] = \text{tr} [T^a, T_b] F_{\mu\nu} = if_{bc}^a \text{tr} T^c F_{\mu\nu} = i\eta f_{bc}^a F_{\mu\nu}^c$ im zweiten Term
 - Notiz: Transformationsverhalten von A_μ in Ausdruck für $F_{\mu\nu}$ einsetzen führt auf dasselbe Ergebnis (ist aber umständlicher)

8.1.7 Geometrischer Zugang zu Eichfeldern

1. Definition der Wilson-Linie $W(x, y)$ durch Transformationsverhalten $W(x, y) \xrightarrow{\alpha} e^{i\alpha_a(x)T^a} W(x, y) (e^{i\alpha_a(y)T^a})^\dagger$
 - Notiz: $W(x, y)$ hängt vom gewählten Weg P zwischen den Punkten x, y ab
 - Könnte das explizit berücksichtigen durch Notation $W_P(x, y)$
 - Interpretation: $W(x, y)$ verschiebt $y \rightarrow x$ in $\phi(y) \Rightarrow W(x, y)\phi(y) - \phi(x)$ transformiert sich wie ein Feld ausgewertet am selben Ort
 - Naiv (ohne Wilson-Linie): Differenz von Feldern an verschiedenen Orten $\phi(x) - \phi(y)$ ist abhängig von Wahl der Eichung
 - * Andere Formulierung: $\phi(x) - \phi(y)$ ändert sich bei Eichtransformationen
 - * Notiz: Ableitung von Feldern auch eichabhängig, da sie durch Differenzen von Feldern an verschiedenen Orten definiert sind
 - Mit Wilson-Linie: Betrachte $W(x, y)\phi(y) - \phi(x)$ statt $\phi(y) - \phi(x)$, diese Größe ist eichunabhängig

* Explizit: $W(x, y)\phi(y) - \phi(x) \xrightarrow{\alpha} e^{i\alpha_a(x)T^a} W(x, y) \left(e^{i\alpha_a(y)T^a} \right)^\dagger e^{i\alpha_a(y)T^a} \phi(y) - e^{i\alpha_a(x)T^a} \phi(x) = e^{i\alpha_a(x)T^a} \left\{ W(x, y)\phi(y) - \phi(x) \right\}$

- Notiz: Wilson-Linien gibt es für jede beliebige Darstellung von Feldern ϕ , die durch Wilson-Linien verschoben werden sollen
 - Explizit: Ändere die Darstellung des Generators T^a in der impliziten oder expliziten Definition der Wilson-Linie

2. Definition von kovarianter Ableitung über Wilson-Linie: $D_\mu \phi(x) \equiv \lim_{y \rightarrow x} \frac{W(x, y)\phi(y) - \phi(x)}{y^\mu - x^\mu}$

- Da $W(x, y)\phi(y) - \phi(x)$ per Definition von $W(x, y)$ eichunabhängig ist, ist diese Definition von D_μ auch eichunabhängig (im Gegensatz zu ∂_μ in $\partial_\mu \phi(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{\phi(y) - \phi(x)}{y^\mu - x^\mu}$)
- Diese Definition von D_μ erfüllt wegen der Definitionseigenschaft D_μ die oben verwendete Definition von D_μ : $D_\mu \phi(x) \xrightarrow{\alpha} e^{i\alpha_a(x)T^a} D_\mu \phi(x)$
- Interpretation von $F_{\mu\nu} := \frac{i}{g}[D_\mu, D_\nu]$: Unterschied zwischen μ - und ν -Richtung bei Verschiebung eines Feldes von x nach y
 - Notiz: $F_{\mu\mu} = 0$, da es für $\mu = \nu$ keinen Unterschied macht ob man zuerst in μ - oder ν -Richtung geht
 - Bildlich: Unterschied zwischen dem (μ, ν) - und dem (ν, μ) -Pfad von x zu y

3. Definition des Eichfelds über infinitesimale Wilson-Linie $W(x, y) \equiv 1 - ig(y - x)^\mu A_\mu^a T_a + \mathcal{O}(y - x)^2$

- Interpretation: Eichfeld ist ein Zusammenhang/connection (Begriff aus Differentialgeometrie)
 - Notiz: Christoffel-Symbole sind connections in allgemeiner Relativitätstheorie
- Einsetzen in Definition der kovarianten Ableitung liefert $D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a T_a$

$$D_\mu \phi(x) \equiv \lim_{y \rightarrow x} \frac{W(x, y)\phi(y) - \phi(x)}{y^\mu - x^\mu} = \lim_{y \rightarrow x} \frac{(1 - ig(y - x)^\mu A_\mu^a T_a) \phi(y) - \phi(x)}{y^\mu - x^\mu} = \lim_{y \rightarrow x} \frac{\phi(y) - \phi(x)}{y^\mu - x^\mu} - igA_\mu^a T_a \phi(x) = \left(\partial_\mu - igA_\mu^a T_a \right) \phi(x)$$

- Finde infinitesimales Transformationsverhalten von Eichfeldern $A_\mu^a \xrightarrow{\alpha} A_\mu^a + \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha^a - \frac{1}{\eta} f_{bc}^a A_\mu^b A_\mu^c$
 - $1 + i(y - x)^\mu A_\mu^a T_a = W(x, y) \xrightarrow{\alpha} e^{i\alpha_a(x)T^a} W(x, y) \left(e^{i\alpha_a(y)T^a} \right)^\dagger = \left\{ 1 + i\alpha^a(x)T_a \right\} \left(1 + i(y - x)^\mu A_\mu^a T_a \right) \left\{ 1 - i\alpha^a(y)T_a \right\} = \dots = 1 + i(y - x)^\mu T_a \left(A_\mu^a + \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha^a - \frac{1}{\eta} f_{bc}^a A_\mu^b A_\mu^c \right) (\dots)$

4. Expliziter Ausdruck für Wilson-Linie mit Eichfeldern: $W(x, y) = P \exp \left(ig \int_x^y dz^\mu A_\mu^a T_a \right)$

- Notation: P ist Pfadordnungs-Operator
 - Benötige Pfadordnungs-Operator nur für nicht-abelsche Eichgruppen
 - Integrationsoperator $\int_x^y dz^\mu$ ordnet die Felder A_μ^a entlang des gewählten Pfades von x nach y , aber nicht die Generatoren $T^a \Rightarrow$ Schreibe Pfadordnungs-Operator P dazu, um das explizit zu machen

• Implizite Definition erfüllt: $W(x, y) = P \exp \left(ig \int_x^y dz^\mu A_\mu^a T_a \right) \xrightarrow{\alpha} P \exp \left(ig \int_x^y dz^\mu \left(A_\mu^a + \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha^a - \frac{1}{\eta} f_{bc}^a A_\mu^b A_\mu^c \right) T_a \right) = \dots = e^{i\alpha_a(x)T^a} W(x, y) \left(e^{i\alpha_a(y)T^a} \right)^\dagger (\dots)$

- Notiz: Wilson-Linie für $y = x$ heißt Wilson-Loop $W(x, x) = P \exp \left(ig \oint dz^\mu A_\mu^a T_a \right)$
 - Stokes-Theorem liefert $W(x, x) = P \exp \left(ig \oint dz^\mu A_\mu^a T_a \right) = P \exp \left(\frac{ig}{2} \int da^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right)$
 - * Notation: $\oint da^{\mu\nu}$ für Oberflächenintegral um die durch P eingeschlossene Fläche
 - * Notiz: $W(x, x)$ ist offensichtlich eichunabhängig (im Gegensatz zu $W(x, y)$ für $x \neq y$), da es nur von $F_{\mu\nu}$ abhängt

8.1.8 Eichfelder haben 2 Freiheitsgrade

- Erwarte naiv 4 Freiheitsgrade, Eichfelder haben aber nur 2 Freiheitsgrade
 - Erwarte 4 Freiheitsgrade: $(s_1, s_2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ -Darstellung der Lorentz-Gruppe ("Vektor" A^μ) hat $(2\frac{1}{2} + 1) \times (2\frac{1}{2} + 1) = 4$ Freiheitsgrade
 - Habe 2 Freiheitsgrade: $(s, m) = (1, 0)$ -Darstellung der Poincaré-Gruppe hat 2 Freiheitsgrade (siehe Gruppentheorie-Zsf)
- Ein Freiheitsgrad festgelegt durch Eichfeld-Dynamik
 - Anschaulich: Diese Redundanz wird automatisch durch den gewählten Lagrangian berücksichtigt
 - Formal: Es gibt keinen $\partial_0 A^0$ -Term im Lagrangian $\Rightarrow A^0$ -Feld ist statisch (und festgelegt durch A^i) durch $A^0(\vec{x}, t) = \int d^3y \frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|} \partial_t \partial_i A^i(\vec{y}, t)$
 1. $\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ umschreiben führt auf $\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_0 A^i + \partial_i A^0)^2 \Rightarrow A^0$ ist statisches Feld
 2. **BGL** $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$ führt für $\nu = 0$ auf $\vec{\nabla}^2 A^0 = -\partial_0 \partial_i A^i$
 3. Lösung von $\vec{\nabla}^2 A^0 = -\partial_0 \partial_i A^i$ ist $A^0(\vec{x}, t) = \int d^3y \frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|} \partial_t \partial_i A^i(\vec{y}, t)$
 - * Begründung: Das ist allgemeine Lösung der Poisson-Gleichung $\vec{\nabla}^2 \phi(\vec{x}, t) = -\rho(\vec{x}, t)$ (folgt zB mit Greensfunktionen)
- Ein Freiheitsgrad ist unphysikalisch wegen Eichfreiheit
 - Anschaulich: Hier ist die Situation komplexer (Eichfixierung...)
 - Formal: Redefinition $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu c$ mit beliebiger ortsabhängiger Funktion $c(x)$ lässt Bewegungsgleichungen und Lagrangian (und damit die Physik) invariant
 - * Redefinition hat einen Parameter $c \Rightarrow 1$ Freiheitsgrad kann durch diese Redundanz festgelegt werden

8.2 Quantenfeldtheorien mit Eichsymmetrie

8.2.1 Grundlagen

- Trennung in klassische Feldtheorie und Quantenfeldtheorie verkompliziert die Situation in Eichtheorie \Rightarrow Rede direkt über Quantenfeldtheorie
 - Problem: Zusätzliche Komplikationen in Eichtheorie tauchen schon in der klassischen Theorie auf (zB undefinierte Propagatoren), entfalten ihre volle Bedeutung aber erst in der Quantenfeldtheorie (zB Eichfeld-Loops)
- Komplikationen bei **QFT** mit Eichsymmetrie
 - Naives Vorgehen $[A_\mu(\vec{x}, t), \Pi^\nu(\vec{y}, t)] = i\delta_\mu^\nu \delta^3(\vec{x} - \vec{y})$ mit $\Pi^\nu = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_0 A_\nu}$ funktioniert nicht, weil A^μ und Π^μ besondere Eigenschaften haben
 - * Anschaulich: Das ist die Wurzel allen Übels
 - * $\Pi^0 = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_0 A_0} = 0$ (weil es keinen $\partial_0 A_0$ -Term in \mathcal{L} gibt)
 - * Fazit: Kann nicht einfach kanonische Kommutatorrelationen hinschreiben, da diese die Eichfreiheit nicht berücksichtigen \Rightarrow Muss irgendwie Eichfreiheit in den Mechanismus einbauen
 - Eichfeld-Propagatoren
 - * Problem: Eichfeld-Propagator ist nicht wohldefiniert, weil **BGL**-Operator des Eichfelds keine Inverse hat
 - Intuitiv: Eichfelder A_μ^a sind nur bis auf Eichfreiheit $A_\mu^a \rightarrow A_\mu^a + \partial_\mu \alpha^a$ mit Eichtransformations-Parameter α^a festgelegt \Rightarrow Es darf gar nicht festgelegt sein, wie Eichfelder propagieren (sonst gäbe es keine Eichfreiheit)
 - Formal: Für den Eichfeld-Propagator $\Pi_a^{\mu\nu}$ im Impulsraum gilt $(-p^2 g_{\mu\nu} + p_\mu p_\nu) \Pi_a^{\nu\rho} = g_\mu^\rho$, diese Gleichung ist nicht invertierbar wegen $p^\mu (-p^2 g_{\mu\nu} + p_\mu p_\nu) = -p^2 p_\nu + p^2 p_\nu = 0$ (bzw Matrix $-p^2 g_{\mu\nu} + p_\mu p_\nu$ hat Eigenvektor p^μ mit Eigenwert 0)

- * Lösung: Führe Eichfixierungs-Term $\mathcal{L} \supset -\frac{1}{2\xi}(G^a)^2$ mit Eichbedingung $G^a(A_\mu^a)$ ein
 - Wahl einer geschickten Eichbedingung $G^a(A_\mu^a)$ hängt von Eigenschaften der Eichsymmetrie ab (zB Gruppenstruktur, **Spontaneous Symmetry Breaking (SSB)**)
- Methoden zur Quantisierung von Eichtheorien
 - Manuell Eichbedingung fordern (8.2.5)
 - * Anschaulich: Fordere eine Eichbedingung “manuell” und stelle sicher, dass alle Zwischenergebnisse in der Rechnung diese Bedingung erfüllen
 - * Vorteil: Konzeptionell einfach (minimale Erweiterung zum normalen Kanonische-Quantisierung-Formalismus)
 - * Problem: Ergebnisse sind nicht explizit lorentz-invariant, extrem kompliziert für nicht-abelsche Eichtheorie
 - Faddeev-Popov-Methode bzw Eichbedingung in den Lagrangian einbauen (8.2.2)
 - * Anschaulich: Faddeev-Popov-Methode (Pfadintegralformalismus-Spielerei) generiert zusätzliche Terme im Lagrangian, die die Eichbedingung berücksichtigen
 - * Elegante Methode, da Lorentzsymmetrie nicht verletzt wird und alle gewünschten Ergebnisse (Eichfixierungsterm, Ghosts) direkt aus der Rechnung folgen
 - * Das ist die in der Praxis verwendete Methode (da sie auch für nicht-abelsche Eichtheorien relativ einfach ist)

8.2.2 Faddeev-Popov-Methode

- Zusammenfassung
 - Problem: Wenn man naiv das Pfadintegral für eine Eichtheorie berechnet, integriert man über alle unter Eichtransformationen äquivalenten Eichfeld-Konfigurationen \Rightarrow Muss manuell den Integrationsbereich (über A_μ^a) einschränken, sodass jede physikalisch äquivalente Eichfeld-Konfiguration nur einmal ins Integral eingeht
 - * Slang: Äquivalente Eichfeld-Konfigurationen liegen auf “gauge orbits”
 - Lösung: Faddeev-Popov-Methode (siehe unten)
 - Fazit: Erhalte zusätzliche Terme im Eichfeld-Lagrangian $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(H^\mu A_\mu^a)^2 + \frac{1}{g}\bar{\eta}_a H^\mu (D_\mu)^a_b \eta^b$
 - * Zusätzliche Felder η_a sind “Faddeev-Popov-Ghosts”
 - Anschaulich: Skalarfelder mit Fermion-Statistik (deshalb “Ghosts”) und Eichtheorie-Index a
 - * Operator H^μ folgt aus Eichbedingung $G^a(A_\mu^a) = H^\mu A_\mu^a + B^a$
 - B^a enthält keine Eichfelder, kann aber andere Felder der Theorie (zB Goldstone-Bosonen) enthalten
- Prinzip der Faddeev-Popov-Methode
 - Gut erklärt in Serman - An introduction to Quantum Field Theory
 - Anschaulich: Faddeev-Popov-Methode ist Trick, um Integrale zu vereinfachen, die invariant unter einer bestimmten Transformation der Integrationsvariablen sind
 - * Konkret: Faddeev-Popov-Methode führt eine Bedingung an den Integrationsbereich ein, ohne den Wert des Integrals zu ändern
 - Bedingung an den Integrationsbereich im Pfadintegral heißt Eichbedingung bzw Eichfixierung
 - * Bildlich: Im Integrationsbereich gibt es geschlossene Pfade (“gauge orbits”), entlang denen sich der Integrand nicht verändert \Rightarrow Berechne Integral, indem ich pro Pfad nur je einen Punkt berücksichtige und am Ende mit einem Volumen-Faktor für jeden Pfad multipliziere
 - * Kann Faddeev-Popov-Methode als Verallgemeinerung der Substitutions-Methode interpretieren
 - Ausgangssituation
 - * Ziel: Berechne $I = \int dx f(x)$
 - * Notation: x ist Vektor von beliebig vielen Integrationsvariablen

- Im Pfadintegral steht x für ein Feld \Rightarrow Unendlich viele Integrationsvariablen
- * $f(x)$ ist invariant unter der Transformation $x \rightarrow h(x)$ bzw $f(h(x)) = f(x)$
 - Interpretation: Transformation $x \rightarrow h(x)$ entspricht der Bewegung entlang eines gauge orbits
- Naives Vorgehen: Substitution zu geschickten Variablen, führe Integration über "Winkel-Variable" aus
 - * Anschaulich: Faddeev-Popov-Methode kommt mit weniger Annahmen (explizite Substitution nicht nötig) zum selben Ergebnis, der Preis ist komplexerer Formalismus (siehe unten)
 - * Geschickte Variablen = Integral faktorisiert in viele einzelnen Integrale (zb Integral über Konstante $\int dx^1$)
 - Bsp: Polarkoordinaten für sphärisch symmetrisches Problem
 - * Problem: Muss für dieses Vorgehen die Substitution explizit durchführen können, für Pfadintegrale kann das aber extrem komplex sein

1. Wähle eine Bedingung $g(x, \phi) = x_{\phi,0} = 0$, um das Integral zu vereinfachen

- Notation

- * x : "Normale" Variablen im Integral $I = \int dx f(x)$
- * ϕ : Neue Variable (können auch mehrere Variablen sein), die sich bei der "Eich"-Transformation $x \rightarrow h(x)$ ändert (Bsp: Winkel in sphärisch symmetrischem Problem)
- * $x_{\phi,0}$: ϕ -abhängige Parametrisierung für x_0 (eine der Variablen in x)

- Notwendig: $g(x, \phi) = 0$ kann nach x_0 aufgelöst werden

- * Vorteil der Faddeev-Popov-Methode: Muss das Auflösen nicht explizit machen – Es reicht, zu wissen, dass es möglich ist
- * Interpretation: Finde für jedes ϕ einen Punkt $x_{\phi,0}$ im x_0 -Integrationsbereich \Rightarrow Eine Liste von Werten für ϕ legt einen Pfad $x_{\phi,0}$ im x_0 -Integrationsbereich fest
- * Notiz: $g(x, \phi) = 0$ darf auch mehrere Lösungen haben

2. Füge $1 = \Delta(x) \int d\phi \delta(g(x, \phi))$ in $I = \int dx f(x)$ ein

$$\Rightarrow I = \int d\phi \int dx f(x) \Delta(x) \delta(g(x, \phi))$$

- Anschaulich: Definiere $\Delta(x)$ als Inverse von $\int d\phi \delta(g(x, \phi))$
- $\Delta(x)$ ist ϕ -unabhängig, da auch der andere Term $\int d\phi \delta(g(x, \phi))$ in der Definition ϕ -unabhängig ist
- Explizit: $\Delta(x) = \left(\int dx_{\phi,0} \frac{\delta(x_{\phi,0})}{|dg(x, \phi)/d\phi|} \right)^{-1} = \left| \frac{dg(x, \phi)}{d\phi} \right|$

3. Substituiere $x \rightarrow x'$ mit $x'_0 = x_{\phi,0} \Rightarrow$ Integral vereinfacht sich zu

$$I = \left(\int d\phi \right) \times \int dx' f(x') \Delta(x') \delta(x'_0)$$

- Anschaulich: Substitution ändert den Wert der Winkel-Variable ϕ so, dass man anschließend direkt $\delta(x'_0)$ verwenden kann
- Per Konstruktion von $f(x)$, $\Delta(x)$ hängen diese nicht von der Winkel-Variable ϕ ab: $f(x) = f(x')$, $\Delta(x) = \Delta(x')$
- Fazit: $d\phi$ -Integral (konstanter Vorfaktor) und dx' -Integral faktorisieren und dx' -Integral erhält eine δ -Distribution, die eine kostenlose Integration über eine Variable erlaubt

- Bsp: Faddeev-Popov-Methode zur Berechnung des Gauss-Integrals $\int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dy e^{-(x^2+y^2)} = \pi$

* Naive Lösung: Substituiere direkt in Polarkoordinaten

$$\int dx dy e^{-(x^2+y^2)} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty dr r e^{-r^2} = 2\pi \int_0^\infty dr r e^{-r^2} = 2\pi \times \left(-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right) \Big|_0^\infty = 2\pi \times \frac{1}{2} = \pi$$

1. Wähle $g(x, y, \phi) = x \cos \phi + y \sin \phi = x_\phi$

2. Berechne $\Delta = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + y^2}$

(a) $0 = x \cos \phi + y \sin \phi$ führt auf $\phi = \arctan\left(-\frac{x}{y}\right)$, für $\phi \in [0, 2\pi)$ gibt es 2 Lösungen $\phi_1 = \pi - \arctan \frac{x}{y}$, $\phi_2 = 2\pi - \arctan \frac{x}{y}$

(b) $\left. \frac{\partial g}{\partial \phi} \right|_{\phi_i} = -x \sin \phi + y \cos \phi \Big|_{\phi_i} = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$

(c) $1 = \Delta(x, y) \int_0^{2\pi} d\phi \delta(x \cos \phi + y \sin \phi) = \Delta(x, y) \int_0^{2\pi} d\phi \sum_i \frac{\delta(\phi - \phi_i)}{\left| \frac{\partial g}{\partial \phi} \right|_{\phi_i}}$
 $= \Delta(x, y) \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \int_0^{2\pi} \left(\delta(\phi - \phi_1) + \delta(\phi - \phi_2) \right) = \Delta(x, y) \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Rightarrow \Delta(x, y) = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + y^2}$

* Notiz: $\Delta(x, y) = \frac{1}{2}r \Rightarrow \Delta(x, y)$ ist ϕ -unabhängig, wie erwartet \Rightarrow Wahl von $g(x, y, \phi)$ war gut

3. $I = \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dy e^{-(x^2+y^2)} = \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dy e^{-(x^2+y^2)} \times \Delta(r) \int_0^{2\pi} d\phi \delta(x_\phi)$
 $= \int_0^{2\pi} d\phi \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dy \Delta(x, y) e^{-(x^2+y^2)} \delta(x_\phi)$
4. Substitution $x \rightarrow x' = x_\phi, y \rightarrow y' = y$: $I = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{\mathbb{R}} dx' \int_{\mathbb{R}} dy' \Delta(x', y') e^{-(x'^2+y'^2)} \delta(x')$
5. Berechne die 3 Integrale: $I = \left(\int_0^{2\pi} d\phi \right) \int_{\mathbb{R}} dx' \int_{\mathbb{R}} dy' \frac{1}{2} \sqrt{x'^2 + y'^2} e^{-(x'^2+y'^2)} \delta(x')$
 $= \pi \int_{\mathbb{R}} dy' \sqrt{y'^2} e^{-y'^2} = \pi \int_{-\infty}^{\infty} dy' y' e^{-y'^2} = 2\pi \int_0^{\infty} dy' y' e^{-y'^2} = 2\pi \left(-\frac{1}{2} e^{-y'^2} \right) \Big|_0^{\infty} = \pi$

1. Erzeugendes Funktional für pure Eichtheorie einer beliebigen Lie-Gruppe

$$Z[J] = \int_{\text{res}} \mathcal{D}A_\mu^a \exp \left\{ i \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + A_\mu^a J_a^\mu \right) \right\}$$

- Erhalte $Z[J]$ für Eichfeld durch selbe Schritte wie für skalares Feld mit $\int_{\text{res}} \mathcal{D}A_\mu^a$ statt $\int \mathcal{D}A_\mu^a$
 - Gleiches Vorgehen wie für Skalarfeld möglich, da dort die einzige Annahme Bose-Statistik war
 - Besonderheit: Eichfelder sind nur bestimmt bis auf Eichfreiheit $A_\mu^a \xrightarrow{\alpha} A_\mu^a + \frac{1}{g} D_\mu \alpha^a \Rightarrow$ Muss bei der Berechnung des Pfadintegrals berücksichtigen, dass nur über Konfigurationen der Eichfelder integriert wird, die nicht durch Eichtransformationen zusammenhängen
 - * Verwende Notation "res" für den eingeschränkten Integrationsbereich des Pfadintegrals über Eichfelder
- Ziel der weiteren Schritte: $\int_{\text{res}} \mathcal{D}A_\mu^a$ umschreiben in $\int \mathcal{D}A_\mu^a$ und Zusatzterme im Lagrangian
 - Kann auch mit $\int_{\text{res}} \mathcal{D}A_\mu^a$ weiterrechnen, muss dann aber immer berücksichtigen, dass A_μ^a eine Redundanz $A_\mu^a \xrightarrow{\alpha} A_\mu^a + \frac{1}{g} D_\mu \alpha^a$ in der Beschreibung hat (das macht man in 8.2.5) \Rightarrow Unpraktisch für automatisierte Rechnungen
- Behandle erst nur pure Eichtheorie (keine weiteren Felder), später kommt Verallgemeinerung

2. Wähle Eichbedingung $G^a(A_\mu^a) = 0$

- Anschaulich: Wähle eine Eichtransformation mit Parametern α^a so, dass für $A_\mu'^a = A_\mu^a + \frac{1}{g} D_\mu \alpha^a$ gilt, dass $G^a(A_\mu'^a) = 0$
- Formale Bedingung: $G^a(A_\mu^a + \frac{1}{g} D_\mu \alpha^a) = 0$ muss eindeutig nach α^a in Abhängigkeit von A_μ^a auflösbar sein
- Für weitere Schritte nützliche Zerlegung: $G^a(A_\mu^a) = H^\mu A_\mu^a + B^a$
 - Notation: H^μ und B^a enthalten keine Eichfelder (können aber andere Felder der Theorie enthalten, zB Goldstonebosonen in Theorien mit SSB)
 - Notiz: Kann oBdA immer diese Form verwenden (Begründung folgt)

3. Multipliziere mit $1 = \int \mathcal{D}\alpha^a \det \left(\frac{\delta G^a(A_\mu^a + \frac{1}{g} (D_\mu)^a_b \alpha^b)}{\delta \alpha^a} \right) \delta(G^a(A_\mu^a + \frac{1}{g} (D_\mu)^a_b \alpha^b))$

- Zwischenergebnis:

$$Z[J] = \int_{\text{res}} \mathcal{D}A_\mu^a \mathcal{D}\alpha^a \Delta_{FP}(A_\mu^a) \delta \left(G^a(A_\mu^a + \frac{1}{g} (D_\mu)^a_b \alpha^b) \right) \exp \left\{ i \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + A_\mu^a J_a^\mu \right) \right\}$$

- Bedeutung der Funktionaldeterminante $\Delta_{FP}(A_\mu^a) := \det \left(\frac{\delta G^a(A_\mu^a + \frac{1}{g} (D_\mu)^a_b \alpha^b)}{\delta \alpha^a} \right)$
 - Schreibe Argument von $\det \left(\frac{\delta G^a(A_\mu^a + \frac{1}{g} (D_\mu)^a_b \alpha^b)}{\delta \alpha^a} \right)$ ohne Indizes, da die Determinante sowieso ein Skalar ist
 - Notiz: $M^a_b(x, y) := \frac{\delta G^a(A_\mu^a + \frac{1}{g} (D_\mu)^a_b \alpha^b)(x)}{\delta \alpha^b(y)}$ ist eine Matrix bezüglich (a, b) und bezüglich (x, y)
 - Notiz: $\Delta_{FP}(A_\mu^a)$ hängt nicht von α^a ab (Argument gleich wie oben)
- Formal: Verwendete Identität $1 = \dots$ ist Verallgemeinerung von $1 = \Delta(x) \int d\phi g(x, \phi)$ für Pfadintegrale

- $\int d\phi \rightarrow \int \mathcal{D}\alpha^a$, da statt nur über einen Freiheitsgrad ϕ jetzt über unendlich viele (für jeden Punkt im Raum, da α^a Felder sind) Variablen α^a integriert wird
- $g(x, \phi) \rightarrow G^a(A_\mu^a + \frac{1}{g}(D_\mu)^a_b \alpha^b)$ ist von A_μ^a, α^a abhängige Eichbedingung
- $\Delta(x) \rightarrow \Delta_{FP}(A_\mu^a) = \det\left(\frac{\delta G(A_\mu^a + \frac{1}{g}(D_\mu)^a_b \alpha^b)}{\delta \alpha}\right)$ (det ist die Verallgemeinerung davon, wie Δ definiert ist)

4. Variablentransformation im Pfadintegral $A_\mu^a + \frac{1}{g}(D_\mu)^a_b \alpha^b \rightarrow A_\mu^a$

- Zwischenergebnis:

$$Z[J] = N \int \mathcal{D}A_\mu^a \Delta_{FP}(A_\mu^a) \Big|_{\alpha^a=0} \delta(G^a(A_\mu^a)) \exp\left\{i \int d^4x \left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + A_\mu^a J_a^\mu\right)\right\}$$

- Benötige jetzt kein $\int_{\text{res}} \mathcal{D}A_\mu^a$ mehr wegen $\delta(G^a(A_\mu^a))$
 - * Durch $\delta(G^a(A_\mu^a))$ trägt aus jeder Gruppe von unter Eichtransformationen äquivalenten Eichfeld-Konfigurationen nur eine Eichfeld-Konfiguration bei, und zwar die mit $G^a(A_\mu^a) = 0$

- Anschaulich: $A_\mu^a + \frac{1}{g}(D_\mu)^a_b \alpha^b \rightarrow A_\mu^a$ ist eine Eichtransformation mit Transformationsparameter $-\alpha^a$

(a) $\exp\{i \int d^4x (-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + A_\mu^a J_a^\mu)\}$ ist invariant unter der Transformation

- Begründung: Lagrangian ist per Definition von Eichtheorie invariant unter Eichtransformationen

(b) $\Delta_{FP}(A_\mu^a) = \det\left(\frac{\delta G(A_\mu^a + \frac{1}{g}(D_\mu)^a_b \alpha^b)}{\delta \alpha}\right) \rightarrow \Delta_{FP}(A_\mu^a) \Big|_{\alpha^a=0} = \det\left(\frac{\delta G(A_\mu^a + \frac{1}{g}(D_\mu)^a_b \alpha^b)}{\delta \alpha}\right) \Big|_{\alpha^a=0}$ ist invariant

- Formal: Folgt aus der Definition von Δ_{FP}
- Notiz: Kann $A_\mu^a + \frac{1}{g}(D_\mu)^a_b \alpha^b \rightarrow A_\mu^a$ nicht explizit durchführen, da dann das Argument der Ableitung nicht mehr von α^a abhängt \Rightarrow Führe erst Ableitung aus und dann die Eichtransformation, die den Ausdruck unabhängig von α^a macht bzw schreibe $\det\left(\frac{\delta G(A_\mu^a + \frac{1}{g}(D_\mu)^a_b \alpha^b)}{\delta \alpha}\right) \Big|_{\alpha^a=0}$
 - Wegen $\Big|_{\alpha^a=0}$ erhält man nur die infinitesimale Komponente einer beliebigen(makroskopischen) Eichtransformation mit Parameter α^a (nachträgliche Begründung dafür, dass es genügt, infinitesimale Eichtransformationen zu betrachten)

(c) Differential $\mathcal{D}A_\mu^a$ ist invariant unter der Variablentransformation

- Explizit: $\mathcal{D}A_\mu^a \mathcal{D}\alpha^a = \det\left(\frac{\delta(A_\mu^a + \frac{1}{g}(D_\mu)^a_b \alpha^b)}{\delta \alpha^b} \quad \frac{\delta \alpha^a}{\delta A_\mu^b}\right) \mathcal{D}(A_\mu^a - \frac{1}{g}(D_\mu)^a_b \alpha^b) \mathcal{D}\alpha^a$ mit

$$\det\left(\frac{\delta(A_\mu^a + \frac{1}{g}(D_\mu)^a_b \alpha^b)}{\delta \alpha^b} \quad \frac{\delta \alpha^a}{\delta A_\mu^b}\right) = \det\left(\begin{matrix} \delta_b^a \delta_\mu^\nu + \frac{1}{\eta g} f_{cd}^a \delta_b^d \delta_\mu^\nu \alpha^c & 0 \\ \frac{1}{\eta g} f_{cd}^a A_\mu^d \delta_b^c & \delta_b^a \end{matrix}\right) = \det\left(\delta_b^a \delta_\mu^\nu - \frac{1}{\eta g} f_{bc}^a \delta_\mu^\nu \alpha^c\right) = 1$$
 - Ausdruck verstehen: Blockmatrix links oben ist $(4 \times n) \times (4 \times n)$ -Matrix (Minkowski-Indizes laufen von 0 bis 3, Lie-Gruppen-Indizes laufen von 1 bis n mit Anzahl n der Generatoren), links unten $(n) \times (4 \times n)$ -Blockmatrix und so weiter; schreibe Blockmatrizen in Indexnotation
 - In der Determinante verschwinden Beiträge durch Nebendiagonal-Einträge $-\frac{1}{\eta g} f_{bc}^a \delta_\mu^\nu \alpha^c$ und $\frac{1}{\eta g} f_{bc}^a A_\mu^c$ (nebendiagonal, weil f^{abc} total antisymmetrisch ist) wegen den normalen Determinanten-Regeln (?)
- "Integrationsgrenzen" ändern sich nicht, da immer noch über alle Konfigurationen integriert wird
- Fazit: Integrand ist unabhängig von $\alpha^a \Rightarrow$ Kann Integration ausführen $\int \mathcal{D}\alpha^a = N$
 - N ist eine (formal unendliche) Konstante, die aber bei der Berechnung von Matrixelementen rausfällt

5. Berechne $\int \mathcal{D}h^a \exp\left\{-\frac{i}{2\xi} \int d^4x (h^a)^2\right\} Z[J]$

- Zwischenergebnis:

$$Z[J] = \frac{N}{N_\xi} \int \mathcal{D}A_\mu^a \Delta_{FP}(A_\mu^a) \Big|_{\alpha^a=0} \exp\left\{i \int d^4x \left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} \left(G^a(A_\mu^a)\right)^2 + A_\mu^a J_a^\mu\right)\right\}$$

- Direkt: $\int \mathcal{D}h^a \exp \left\{ -\frac{i}{2\xi} \int d^4x (h^a)^2 \right\} Z[J] = Z[J] \int \mathcal{D}h^a \exp \left\{ -\frac{i}{2\xi} \int d^4x (h^a)^2 \right\} = N_\xi Z[J]$
 - $Z[J]$ hängt nicht von h^a ab \Rightarrow Kann $Z[J]$ vor das Integral ziehen
 - Integral liefert (formal unendliche) Konstante $N_\xi \Rightarrow$ Uninteressant für Matrixelemente
 - Wähle Gewichtungsfaktor $\exp \left\{ -\frac{i}{2\xi} \int d^4x (h^a)^2 \right\}$, da das Pfadintegral auf dieser Seite sonst nicht konvergiert

• Mit bearbeitetem Ausdruck für $Z[J]$: $\int \mathcal{D}h^a \exp \left\{ -\frac{i}{2\xi} \int d^4x (h^a)^2 \right\} Z[J]$

$$= N \int \mathcal{D}h^a \mathcal{D}A_\mu^a \Delta_{FP}(A_\mu^a) \delta(G^a(A_\mu^a)) \exp \left\{ i \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (h^a)^2 + A_\mu^a J_\mu^a \right) \right\}$$

$$= N \int \mathcal{D}h^a \mathcal{D}A_\mu^a \Delta_{FP}(A_\mu^a) \delta(G^a(A_\mu^a) - h^a) \exp \left\{ i \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (h^a)^2 + A_\mu^a J_\mu^a \right) \right\}$$

$$= N \int \mathcal{D}A_\mu^a \Delta_{FP}(A_\mu^a) \exp \left\{ i \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} \left(G^a(A_\mu^a) \right)^2 + A_\mu^a J_\mu^a \right) \right\}$$

(a) Zwischenergebnis für $Z[J]$ einsetzen

(b) Verschiebe $G^a(A_\mu^a) \rightarrow G^a(A_\mu^a) - h^a$

- Interpretation: Redefiniere G^a um konstante Funktion h^a , um geschickter Umformen zu können (neues G^a hat nicht mehr die schöne Eigenschaft $G^a(A_\mu^a) = 0$)
- $\Delta_{FP}(A_\mu^a) = \det \left(\frac{\delta G^a(A_\mu^a + \frac{1}{g}(D_\mu)^a_b \alpha^b)}{\delta \alpha^b} \right)$ ändert sich nicht, da $\frac{\delta h^a(x)}{\delta \alpha^b(y)} = 0$

(c) Führe Integration $\mathcal{D}h^a$ mit $\delta(G^a(A_\mu^a) - h^a)$ aus

6. Berechne $\Delta_{FP}(A_\mu^a) \Big|_{\alpha^a=0} = \int \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\bar{\eta} \exp \left\{ i \int d^4x d^4y \bar{\eta}_a(x) \frac{\delta G^a(A_\mu^a + \frac{1}{g}(D_\mu)^a_b \alpha^b)(x)}{\delta \alpha^b(y)} \eta^b(y) \right\}$

- Endergebnis (für $G^a(A_\mu^a) = H^\mu A_\mu^a + B^a$):

$$Z[J] = \frac{N}{N_\xi} \int \mathcal{D}A_\mu^a \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\bar{\eta} \exp \left\{ i \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (H^\mu A_\mu^a + B^a)^2 + \frac{1}{g} \bar{\eta}_a H^\mu (D_\mu)^a_b \eta^b + A_\mu^a J_\mu^a \right) \right\}$$

- Grundlage: Identität $\det M = \int \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\bar{\eta} \exp \left\{ i \int d^4x d^4y \bar{\eta}_a(x) M^a_b(x, y) \eta^b(y) \right\}$

– Gilt für Felder $\eta, \bar{\eta}$ mit Fermion-Statistik

- Mit $G^a(A_\mu^a) = H^\mu A_\mu^a + B^a$ folgt $\Delta_{FP}(A_\mu^a) = \int \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\bar{\eta} \exp \left\{ i \int d^4x \frac{1}{g} \bar{\eta}_a H^\mu (D_\mu)^a_b \eta^b \right\}$

– Nachträgliche Begründung für die Parametrisierung $G^a(A_\mu^a) = H^\mu A_\mu^a + B^a$

(a) Wegen $\Big|_{\alpha^a=0}$ tragen nur α^a -unabhängige Terme aus $\frac{\delta G^a(A_\mu^a + \frac{1}{g}(D_\mu)^a_b \alpha^b)}{\delta \alpha^b}$ bzw lineare Terme in α^a in $G^a(A_\mu^a + \frac{1}{g}(D_\mu)^a_b \alpha^b)$ bei

(b) α^a und A_μ^a tauchen in derselben Potenz auf \Rightarrow Nur lineare Terme in A_μ^a sind relevant \Rightarrow Kann G^a taylorentwickeln $G^a(A_\mu^a) = H^\mu A_\mu^a + B^a$ und nur der Term mit H^μ wird im Ergebnis beitragen

(c) Erlaube zusätzlich einen Term B^a , der nicht von A_μ^a abhängt (B^a hat nur Effekte durch den Term $-\frac{1}{2\xi} (G^a(A_\mu^a))^2$)

* Warum kein $(A_\mu^a)^2$ -Term? ...

– Verwende $\frac{\delta G^a(A_\mu^a + \frac{1}{g}(D_\mu)^a_b \alpha^b)(x)}{\delta \alpha^b(y)} \Big|_{\alpha^a=0} = \frac{\delta H^\mu (A_\mu^a(x) + \frac{1}{g}(D_\mu)^a_b \alpha^b(x))}{\delta \alpha^b(y)} = \frac{1}{g} H^\mu (D_\mu)^a_b \delta^4(x - y)$

- Verallgemeinerung auf Theorie mit weiteren Feldern ist trivial

– Integration über zusätzliche Felder ändert hat keinen Einfluss auf den Mechanismus

* Zusätzliche Felder sind unabhängig von A_μ^a und werden daher nicht durch die Eichtransformationen mit α^a beeinflusst

– Zusätzliche Terme im Lagrangian haben keinen Einfluss auf den Mechanismus

* Zusätzliche Terme im Lagrangian sind per Annahme "Eichtheorie" auch eichinvariant und ändern sich damit unter der Transformation in Schritt 4) ebenfalls nicht

8.2.3 Eichfixierung in der Praxis

- Interpretation von Faddeev-Popov-Ghosts
 - Anschaulich: Faddeev-Popov-Ghosts sind mathematisches Konstrukt, das sicherstellt, dass Eichbosonen die richtige Anzahl an Freiheitsgraden (nämlich 2) haben
 - * Intuitiv: Ghost-Freiheitsgrade verhalten sich wie negative Freiheitsgrade
 - Im naiven Formalismus hätten Eichbosonen 3 Freiheitsgrade, Ghosts “fressen” einen Freiheitsgrad auf
 - Formaler Grund: Ghosts haben negative Norm
 - Faddeev-Popov-Ghosts sind unphysikalisch bzw können nicht als on-shell Freiheitsgrade existieren
 - * Begründungen: Ghosts haben negative Norm, Ghosts verletzen Spin-Statistik-Theorem
 - Faddeev-Popov-Ghosts sind nur relevant in Eichfeld-Loops in nicht-abelscher Eichtheorie
 - * Explizit: Ghosts-Effekte beschrieben durch $\mathcal{L} \supset \frac{1}{g} \bar{\eta}_a H^\mu (D_\mu)^a_b \eta^b = \frac{1}{g} \bar{\eta}_a H^\mu \left(\partial_\mu \delta_b^a - i g (T_c)^a_b A_\mu^c \right) \eta^b \supset -\bar{\eta}_a H^\mu f_c^a_b A_\mu^c \eta^b$
 - Verwende Generator $(T_c)^a_b = -i f_c^a_b$
 - In abelscher Eichtheorie ist $f^{abc} = 0 \Rightarrow$ Ghost-Eichfeld-Kopplung verschwindet
- Interpretation des Eichfixierungs-Parameters ξ
 - ξ als Gewichtung des Eichfixierungs-Terms
 - * Anschaulich: Steuern mit Koeffizient $\frac{1}{2\xi}$ des Terms $\frac{1}{2\xi} (G^a)^2$, wie stark die Bedingung $G^a = 0$ für physikalische Zustände verletzt sein darf
 - Je größer der Koeffizient $\frac{1}{2\xi}$ ist, desto “teurer” ist es bei der Minimierung der Wirkung, die Bedingung $G^a = 0$ zu verletzen
 - * Grenzfall $\xi \rightarrow 0$: Koeffizient $\frac{1}{2\xi} \rightarrow \infty \Rightarrow$ Bedingung $G^a = 0$ muss immer erfüllt sein
 - * Grenzfall $\xi \rightarrow \infty$: Koeffizient $\frac{1}{2\xi} \rightarrow 0 \Rightarrow$ Bedingung $G^a = 0$ hat keine Relevanz
 - ξ als Lagrange-Multiplikator (analog zum Formalismus für Extremierung mit Nebenbedingungen)
 - * Mein aktuelles Verständnis: Diese Analogie hängt
 - Seltsam: Viele Leute verwenden die Bezeichnung Lagrange-Multiplikator (zB Schwartz, Nierste, Heinrich)
 - Ich freue mich über Anregungen, falls das jemand anders sieht
 - * Begründung, warum diese Analogie hängt
 - Der Lagrange-Multiplikator wird durch die **BGLs** festgelegt, der Eichparameter ξ bleibt aber eine freie Größe
 - Der Eichfixierungsterm enthält die quadrierte Zwangsbedingung statt die lineare Zwangsbedingung (wie bei Extremierung mit Nebenbedingungen), daher liefern die **BGLs** nicht $G^a = 0$, sondern eine komplexere Bedingung (kann die lineare Zwangsbedingung nicht verwenden, da der Propagator dann nicht wohldefiniert wäre, ξ eine Einheit bekommen würde etc)
 - * Fazit: Kann ξ als Lagrange-Multiplikator bezeichnen (es geht ja um Extremierung mit Nebenbedingungen), die Minimierung funktioniert aber anders als in klassischer Mechanik
- Kovariante Eichungen bzw R_ξ -Eichungen $G^a = \partial^\mu A_\mu^a$
 - Anschaulich: Eleganteste Wahl für die Eichbedingung, in der Praxis fast ausschließlich verwendet
 - Erweiterung für **SSB** $G \rightarrow H$: $G^a = \partial^\mu A_\mu^a - g \xi F_i^a \phi^i$
 - * $F_i^a = (T^a)_i^j \langle \phi_j \rangle$ mit Generatoren $(T^a)_i^j$ von $G \setminus H$ und Vakuum-Erwartungswerten $\langle \phi_i \rangle$
 - * Summe über i läuft über alle Skalarfelder der Theorie, die zur **SSB** beitragen
 - * Eichsymmetrie nicht spontan gebrochen \Rightarrow Keine Generatoren von $G \setminus H$ und keine nicht-verschwindenden Vakuum-Erwartungswerte $\langle \phi_i \rangle \Rightarrow$ Zusatzterm $-g \xi F_i^a \phi^i = 0$
 - * Notiz: Zusatzterm $-g \xi F_i^a \phi^i$ ist eindeutig festgelegt durch die Bedingung, dass der Eichfixierungsterm die Eichboson-Goldstoneboson-Mischterme aus $(D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi)$ wegheben muss
 - Unitäre Eichung $\xi \rightarrow \infty$

- * Namensgebung: Theorie ist unitär, da nur physikalische Freiheitsgrade propagieren
 - Unphysikalische Freiheitsgrade (Ghost-Felder, evtl Goldstone-Bosonen im Higgsmechanismus) haben unendlich große Masse $m \propto \sqrt{\xi} \Rightarrow$ Haben keine physikalischen Effekte
- * Vorteil: Weniger Felder \Rightarrow Weniger Feynman-Diagramme
- Feynman-Eichung $\xi = 1$
 - * Vorteil: Eichboson-Propagator hat einfache Form
 - Vermeide formale Divergenzen durch $\propto \frac{p^\mu p^\nu}{p^2}$ -Term im Eichboson-Propagator
 - Divergenzen kürzen sich immer raus, machen aber die Rechnung umständlich
 - * Nachteil: Theorie ist nicht manifest unitär wegen Ghost-Feldern
- Landau-Eichung/Lorentz-Eichung $\xi = 0$
 - * Erzwingt mit $\xi \rightarrow 0$, dass die Eichbedingung $G^a = 0$ erfüllt ist \Rightarrow Einfach interpretierbar
- Yennie-Eichung $\xi = 3$
 - * Anschaulich: Bsp für eine weitere, nicht-triviale Wahl der Eichung, die nützlich ist für eine bestimmte Anwendung
 - * Vereinfacht bestimmte QED-Rechnungen mit gebundenen Zuständen
- Axiale Eichung $G^a = n^\mu A_\mu^a$
 - Anschaulich: Wie R_ξ -Eichung, aber mit $\partial_\mu \rightarrow n_\mu$ mit einem Referenzvektor n^μ
 - * Verwende andere Notation für den Eichfixierungs-Parameter: $\xi \rightarrow \lambda$
 - Benötige Vorschrift, wie man mit $n^\mu p_\mu \rightarrow 0$ umgeht (relevant für Loop-Rechnungen) (?)
 - Notiz: **BGL**-Operator \mathcal{D} und Projektionsoperator \mathcal{P} ändern sich
 - * $\tilde{\mathcal{D}}^\pm = \dots$
 - * $\tilde{\mathcal{P}}^\pm = -\left(g^{\mu\nu} - \frac{p_\mu n_\nu + p_\nu n_\mu}{(pn)} + \frac{(n^2 + \xi p^2)p_\mu p_\nu}{(pn)^2}\right)$
 - Lightcone Eichung $\lambda = 0, n^2 = 0$
 - * Anschaulich: Erzwingt mit $\lambda = 0$ die Bedingung $n^\mu A_\mu^a = 0$, Referenzvektor n^μ ist lichtartig $n^2 = 0$
 - * Feature: Feynman-Diagramme mit ghosts verschwinden in dieser Eichung
 1. Ghosts koppeln nur an Eichbosonen, Feynman-Regel für diese Kopplung enthält einen Faktor n^μ
 2. Kopplung an on-shell Eichbosonen: $\mathcal{M} \propto n^\mu \Delta_{\mu\nu}^{ab}(p) = -i\lambda\delta^{ab}\frac{p_\nu}{(pn)} \stackrel{\lambda=0}{=} 0$ mit Eichboson-Propagator $\Delta_{\mu\nu}^{ab}(p)$ (Relation kann man schnell nachrechnen)
 3. Kopplung an off-shell Eichbosonen: $\mathcal{M} \propto n^\mu \epsilon_\mu^a(p) = 0$ (wähle hier $n^\mu = p^\mu$)

8.2.4 BRST-Symmetrie

- Anschaulich: BRST-Symmetrie ist eine exakte Symmetrie des Eichfeld-Lagrangians $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(H^\mu A_\mu^a)^2 + \frac{1}{g}\bar{\eta}_a H^\mu (D_\mu)^a_b \eta^b$
 - Notiz: BRST-Symmetrie ist Supersymmetrie-artig (mischt Felder mit unterschiedlicher Statistik)
 - Notiz: Eichsymmetrie (ortsabhängige Parameter $\alpha(x)$) in \mathcal{L} wegen Eichfixierungsterm $-\frac{1}{2\xi}(H^\mu A_\mu^a)^2$ verletzt
- Explizit: Transformation für Materie-, Eich- und Ghost-Felder
 - Transformationsparameter θ ist Grassmann-Zahl $\theta^2 = 0$
 - Materie- und Eichfelder: Eichtransformation mit Parameter $\alpha^a(x) = \theta\eta^a(x)$ mit Ghost-Feldern $\eta^a(x)$
 - Ghost-Felder: $\bar{\eta}^a \rightarrow \bar{\eta}^a - \frac{1}{g\xi}\theta\partial^\mu A_\mu^a, \eta^a \rightarrow \eta^a - \frac{1}{2}\theta f^a_{bc}\eta^b\eta^c$
 - Invarianz von \mathcal{L} explizit nachrechnen
 - * BRST-Transformationen sind spezielle Eichtransformationen \Rightarrow Terme in \mathcal{L} ohne Eichfixierung und Ghosts ist automatisch invariant unter BRST-Transformationen
 - * Zusatzterme von BRST-Transformationen aus dem Eichfixierungs- und Ghost-Term in \mathcal{L} heben sich exakt weg (...)

- Formal: Eigenschaften des Slavnov-Operators (...)
- Anwendungen
 - Grundlage für Symmetrie-Eigenschaften von Eichtheorie (zB Slavnov-Taylor-Identitäten)
 - Wichtig für Renormierung von nicht-abelschen Eichtheorien
 - * Nur BRST-invariante Counterterms in höheren Ordnungen Störungstheorie erlaubt

8.2.5 Manuelle Quantisierung von Eichtheorien

- Idee: Lege den Eich-Freiheitsgrad explizit durch eine Bedingung an A^μ fest
 - Eichbedingung ist nicht in Lagrangian eingebaut, sondern wird zusätzlich gefordert
 - Vorteil: Konzeptionell minimale Umstellung vom “normalen” Formalismus für Nicht-Eichfelder
 - Nachteil: Notation ist nicht explizit lorentz-invariant
 - Diskutiere hier nur Quantisierung von $U(1)$ -Eichtheorie (Nicht-Abelsche Eichtheorie zu komplex)
- Coulomb-Eichung $\partial_i A^i = 0$
 1. Finde $A^0 = 0 \Rightarrow$ “temporal gauge”
 - Dieses Ergebnis (habe effektiv nur 3 unabhängige Felder) ist der große Vorteil der Coulomb-Eichung
 - Explizit: $A^0(\vec{x}, t) = \int d^3y \frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|} \partial_0 \partial_i A^i(\vec{x}, t) = 0$
 2. Fourier-Ansatz $\vec{A}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_k}} \sum_\lambda \left(a_k^\lambda \vec{\epsilon}_\lambda(\vec{k}) e^{-ikx} + a_k^{\lambda\dagger} \vec{\epsilon}_\lambda(\vec{k}) e^{ikx} \right) \Big|_{k^2=0}$ führt auf $\vec{\epsilon}_k^\lambda \vec{k} = 0$
 - $\vec{\epsilon}_k^\lambda \vec{k} = 0$ hat 2 unabhängige Lösungen $\vec{\epsilon}_k^\lambda, \lambda \in \{1, 2\}$
 3. Für $a_k^\lambda, \lambda \in \{1, 2\}$ gelten kanonische Kommutatorrelationen \Rightarrow Der Rest ist wie gewohnt
- Lorentz-Eichung $\partial_\mu A^\mu = 0$
 - Problem mit naivem Vorgehen $[a_p^\lambda, a_k^{\lambda'\dagger}] = (-\eta_{\lambda\lambda'}) (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p}-\vec{k})$: Erhalte Zustände mit negativer Norm
 - * Explizit: a_p^0 ist Vernichtungsoperator für Zustände mit negativer Norm (wegen $-\eta_{00} = -1$)
 - * Kanonische Quantisierung in Coulomb-Eichung hat dieses Problem nicht, da dort $A^0 = 0$ gilt und es damit keinen a_p^0 -Operator gibt
 - Lösung: Gupta-Bleuler-Formalismus
 - * Idee:
 - * Notiz: Es gibt noch weitere Möglichkeiten, Eichtheorien mit $\partial_\mu A^\mu = 0$ zu quantisieren – Aber der Gupta-Bleuler-Formalismus ist am Elegantesten
 1. Fordere für alle Zustände $|\psi\rangle$ zusätzlich die Gupta-Bleuler-Bedingung $(\partial_\mu A^\mu)^+ |\psi\rangle = 0$
 - * Anschaulich: Fordere die Eichbedingung nur auf der niedrigsten nötigen Ebene (die der Zustände) \Rightarrow Bin möglichst allgemein
 - * Notation: $(\partial_\mu A^\mu)^+ = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda=0}^3 (-ip_\mu) \epsilon_\lambda^\mu(\vec{p}) a_p^\lambda e^{-ipx}$ für Zustände mit positiver Frequenz
 - * Notiz: Die Kommutatorrelationen $[a_p^\lambda, a_k^{\lambda'\dagger}] = (-\eta_{\lambda\lambda'}) (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p}-\vec{k})$ gelten unverändert
 2. Beobachtung: Zu k^μ transversale Komponenten von a_k^λ erzeugt physikalische Zustände, zu k^μ longitudinale Komponenten liefern unphysikalische Effekte
 - * Konkretes Bsp: $k^\mu = (k, 0, 0, k)$
 1. Für Zustand $|\psi\rangle = \sum_{\lambda=0}^3 c_\lambda a_k^{\lambda\dagger} |0\rangle$ führt die Gupta-Bleuler-Bedingung auf $c_0 + c_3 = 0$
 2. Allgemeinster möglicher Zustand (berücksichtige $c_0 + c_3 = 0$):

$$|\psi\rangle = \left(\sum_{\lambda=1,2} c_\lambda a_k^{\lambda\dagger} + c(a_k^{0\dagger} - a_k^{3\dagger}) \right) |0\rangle \equiv |\psi_T\rangle + c|\phi\rangle$$
 3. Effekte von $|\phi\rangle$ sind unphysikalisch bzw habe Äquivalenzrelation $|\psi_T\rangle \sim |\psi_T\rangle + c|\phi\rangle$: Liefern keine Beiträge zu Energie und Impuls, $(\langle\psi_T^{(1)}| + d\langle\phi|)(|\psi_T^{(2)}\rangle + c|\phi\rangle) = \langle\psi_T^{(1)}|\psi_T^{(2)}\rangle$

8.3 Abelsche Eichtheorie

8.3.1 Grundlagen

- Abelsche Eichtheorie = Eichtheorie mit Eichgruppe $U(1)$
 - Formal: $U(1)$ hat per Definition nur einen Generator $T \Rightarrow$ Kommutatorrelation $[T, T] = 0 \Rightarrow U(1)$ ist abelsch
 - Kann man auch komplexere abelsche Lie-Algebren konstruieren? \Rightarrow Vermutlich nicht
- Verwende Ergebnisse für allgemeine Eichtheorie für Spezialfall $U(1)$
 - Anschaulich: Relationen für $U(1)$ -Eichtheorie sind deutlich einfacher als für allgemeine Eichtheorie
 - Gruppentheorie: $U(1)$ ist Lie-Gruppe mit $f^{abc} = 0$
 - * $U(1)$ ist die einzige abelsche Lie-Gruppe
 - * $U(1)$ hat nur einen Generator \Rightarrow Nur ein Gruppenindex, den man damit auch weglassen kann
 - * $U(1)$ hat nur eine (eindimensionale) irreduzible Darstellung \Rightarrow Keine Unterscheidung zwischen fundamentalen und adjungierten Darstellungen und Indizes
 - Effektiv: Erhalte Relationen für $U(1)$ -Eichtheorie, indem ich Eichfeld-Index weglasse und $f^{abc} = 0$ setze

8.3.2 Ward-Identität

- Aussage: Habe off-shell-Matrixelement $\mathcal{M} = \epsilon_\mu(p) \mathcal{M}^\mu$ mit $U(1)$ -Eichboson-Polarisationsvektor $\epsilon_\mu(p) \Rightarrow p_\mu \mathcal{M}^\mu = 0$
 - Interpretation
 - * Stellt sicher, dass Eichbosonen nicht zu viele Polarisationen haben (will 2, nicht 3)
 - * Eichinvarianz auf Matrixelement-Level (siehe “Plausibilisierungs-Herleitung” unten)
 - Notizen zur Gültigkeit
 - * Gilt für Matrixelemente mit (beliebig vielen) externen $U(1)$ -Eichbosonen
 - * Gilt auch für On-shell-Matrixelemente, da diese Grenzfall von off-shell-Matrixelementen sind
- “Einfache” Herleitungen der Ward-Identität
 - Plausibilisierung über Invarianz des Matrixelements unter Eichtransformationen
 - * Achtung: Das ist eine Plausibilisierung, kein formales Argument
 - 1. Eichtransformationen $A_\mu \xrightarrow{\alpha} A_\mu + \partial_\mu \alpha$ haben im Impulsraum die Form $\epsilon_\mu(p) \xrightarrow{\alpha} \epsilon_\mu(p) + C p_\mu$
 - * $C = C(\alpha)$ ist uninteressante Proportionalitätskonstante, interessant ist $\propto p_\mu$
 - 2. Unter Eichtransformationen findet man damit $\mathcal{M} = \epsilon_\mu(p) \mathcal{M}^\mu \xrightarrow{\alpha} \epsilon_\mu(p) \mathcal{M}^\mu + C p_\mu \mathcal{M}^\mu \Rightarrow$ Benötige $p_\mu \mathcal{M}^\mu = 0$, damit \mathcal{M} invariant unter Eichtransformationen sein kann
 - Formales Argument über Zustände im Hilbertraum (Schwartz 8.4.2)
 - * Anschaulich: Ward-Identität verletzt \Rightarrow Eichtransformationen generieren Zustände, die nicht im Hilbertraum liegen
 - Achtung: Eher Ausschlussargument als formale Begründung (benötige $p_\mu \mathcal{M}^\mu = 0$, um Eichinvarianz nicht zu verletzen)
- Herleitung der Ward-Identität aus der Ward-Takahashi-Identität
 1. Herleitung der Ward-Takahashi-Identität $i p_\mu \mathcal{M}^\mu(p, q_1, q_2) = \mathcal{M}_0(q_1 + p, q_2) - \mathcal{M}_0(q_1, q_2 - p)$ (Schwartz 14.8)
 - Verwendete Größen
 - * $\mathcal{M}^\mu(p, q_1, q_2) := \int d^4x d^4x_1 d^4x_2 e^{ipx} e^{iq_1 x_1} e^{-iq_2 x_2} \langle j^\mu(x) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \rangle$ mit $j^\mu(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x)$
 - * $\mathcal{M}_0(q_1, q_2) := \int d^4x_1 d^4x_2 e^{iq_1 x_1} e^{-iq_2 x_2} \langle \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \rangle$
 2. Ward-Identität als Spezialfall der Ward-Takahashi-Identität (Schwartz 14.8.3)

- Verallgemeinerte Ward-Takahashi-Identität (Schwartz 14.8)
- Diagrammatischer Beweis der Ward-Identität (Nierste TTP p120)
- Anwendungen
 - Einfaches Werkzeug, um Matricelemente mit $U(1)$ -Eichfeldern zu vereinfachen
 - Wichtig für Renormierungs-Beweis von Eichtheorie

8.3.3 Stückelberg-Mechanismus – Massen für $U(1)$ -Eichfelder

8.3.4 Weitere Themen

- $U(1)$ -Eichbosonen sind C -ungerade bzw $A_\mu \xrightarrow{C} -A_\mu$
 - Begründung
 1. ∂_μ ist C -gerade $\Rightarrow D_\mu = \partial_\mu - igTA_\mu$ ist C -gerade
 2. i ist C -ungerade (weil komplex), T ist C -gerade (weil reell) $\Rightarrow A_\mu$ ist C -ungerade
 - Notiz: Eichbosonen in nichtabelscher Eichtheorie haben unterschiedliches C -Transformationsverhalten
- Furry's Theorem
 - Aussage: Diagramm mit ungerader Anzahl an Photonen verschwindet bzw $\langle \Omega | T \{ A_{\mu_1}(x_1) \cdots A_{\mu_n}(x_n) \} | \Omega \rangle = 0$ für ungerades n
 - Beweis
 1. $U(1)$ -Eichtheorie ist ladungserhaltend bzw $C|\Omega\rangle = |\Omega\rangle$
 2. $A_\mu \xrightarrow{C} CA_\mu C^\dagger = -A_\mu$ (siehe oben)
 3. $\langle \Omega | T \{ A_{\mu_1}(x_1) \cdots A_{\mu_n}(x_n) \} | \Omega \rangle = \langle \Omega | C^\dagger T \{ CA_{\mu_1}(x_1) C^\dagger \cdots CA_{\mu_n}(x_n) C^\dagger \} C | \Omega \rangle$
 $= (-1)^n \langle \Omega | T \{ A_{\mu_1}(x_1) \cdots A_{\mu_n}(x_n) \} | \Omega \rangle \stackrel{n \text{ ungerade}}{=} -\langle \Omega | T \{ A_{\mu_1}(x_1) \cdots A_{\mu_n}(x_n) \} | \Omega \rangle = 0$
 - Notiz: Furry's Theorem gilt nur für abelsche Eichtheorie, im Allgemeinen verletzt für nichtabelsche Eichtheorie
 - * Begründung: Nichtabelsche Eichbosonen können unterschiedliches C -Transformationsverhalten haben \Rightarrow Beweis funktioniert nicht
 - * Bsp: 3-Gluon-Streuung (QCD-Effekt) ist möglich, Diagramm ist $\propto f^{abc}$
- Ghosts in $U(1)$ -Eichtheorie
 - Anschaulich: Benötige Ghosts zur Formulierung der Theorie, sie haben aber keine physikalischen Effekte
 - Formal: Ghosts können nicht als on-shell Zustände existieren und können auch nicht erzeugt werden
 - * $f^{abc} = 0 \Rightarrow$ Ghosts koppeln nicht an Eichbosonen
 - * Ghosts haben negative Norm \Rightarrow Ghosts können nicht als on-shell Zustände existieren, sondern nur als off-shell Zustände in Loops
- BRST-Invarianz in $U(1)$ -Eichtheorie
 - BRST-Invarianz vereinfacht sich in $U(1)$ -Eichtheorie
 - * Explizit: Wegen $f^{abc} = 0$ transformieren sich die $\bar{\eta}$ -Ghosts nicht unter BRST-Transformationen
 - Zusammenhang von BRST-Invarianz mit der Ward-Identität (?)

8.4 Nicht-abelsche Eichtheorie

8.4.1 Grundlagen

- Wichtigstes (und einfachstes) Beispiel: $SU(n)$ -Eichtheorie
 - $SU(n)$ hat einfachste Gruppenstruktur aller einfachen kompakten Lie-Algebren (vgl Gruppentheorie/Dynkin Diagramme)
 - QCD bzw $SU(3)$ ist die einzige experimentell bestätigte nicht spontan gebrochene nicht-abelsche Eichtheorie \Rightarrow Verwende für $SU(n)$ oft den QCD-Slang (die Regeln gelten aber allgemeiner)
 - * Bsp für QCD-Slang: Gluon/Eichboson, Quark/Fermion, Farbe/fundamentale Indizes etc

8.4.2 Slavnov-Taylor-Identitäten

- Slavnov-Taylor-Identitäten = Analogon zur Ward-Takahashi-Identität für nicht-abelsche Eichtheorien ([Slavnov, 2010](#))
 - Anschaulich: Relationen zwischen Matrixelementen, die sicherstellen, dass diese Matrixelemente BRST-invariant sind
 - Slavnov-Taylor-Identitäten sind komplexer als Ward-Takahashi-Identität, da hier auch Ghost-Effekte beitragen
- Herleitung der Slavnov-Taylor-Identitäten (siehe Itzykson, Zuber 12.4)
- Anwendungen
 - Formaler Renormierungs-Beweis für nichtabelsche Eichtheorie
 - * Moderner Zugang: Arbeite direkt mit BRST-Invarianz, vermeide Slavnov-Taylor-Identitäten

8.4.3 Colour-Algebra – Feynman-Regeln für $SU(n)$ -Generatoren

- Motivation: Trenne Colour-Struktur und kinematische Struktur $\mathcal{M} = \sum_i c_i \mathcal{A}_i$
 - Intuitiv: Arbeite getrennt an Colour-Struktur c_i und kinematischer Struktur $\mathcal{A}_i \Rightarrow$ Zerlege Problem
 - Für $|\mathcal{M}|^2$: $|\mathcal{M}|^2 = \sum_{i,j} \mathcal{M}_i^\dagger c_{ij} \mathcal{M}_j$ mit $c_{ij} = \sum_{\text{col}} c_i^\dagger c_j$
 - Notiz: Es gibt unterschiedliche Konventionen (Faktoren 2) dafür, was Colour- und was Kinematik-Struktur ist
 - Notiz: Rede hier nur über Colour-Effekte, nicht über Kinematik \Rightarrow Wenn man zB von “zusätzlichem Fermion-Loop” spricht, meint das nicht einen Loop im Kinematik-Sinne, sondern lediglich die Colour-Struktur
- Nützliche Relationen
 - Notation: $i, j \dots / a, b \dots$ für fundamentale/adjungierte Indizes, t_{ij}^a für Generatoren in der fundamentalen Darstellung, $(F^{ab})^c = -if^{abc}$ für Generatoren in der adjungierten Darstellung T^a für Generatoren einer beliebigen Darstellung
 - 1. $(T^a)^\dagger = T^a$ (U in $SU(n)$ steht für unitär)
 - 2. $\text{tr} T^a = 0$ (S in $SU(n)$ steht für speziell)
 - 3. $\text{tr} T^a T^b = T_R \delta^{ab}$ mit $T_F = \frac{1}{2}$ (wähle Orthogonalbasis für Generatoren)
 - Notiz: T_R legt relative Normierung der Darstellung R fest
 - Konvention ist $T_F = \frac{1}{2} \Rightarrow T_R$ für alle anderen Darstellungen R ist festgelegt
 - 4. $[T^a, T^b] = if^{abc} T^c$ (Definition einer Lie-Algebra)
 - f^{abc} sind total antisymmetrisch
 - $f^{abc} \in \mathbb{R}$
 - * Folgt aus $(t^a)^\dagger = t^a$: $[t^a, t^b]^\dagger = t^b t^a - t^a t^b = -[t^a, t^b] = -if^{abc} t^c \stackrel{!}{=} (if^{abc} t^c)^\dagger = -i(f^{abc})^* t^c$

5. $t_{ij}^a t_{kl}^a = T_F(\delta_{il}\delta_{jk} - \frac{1}{n}\delta_{ij}\delta_{kl})$ ("Fierz-Identität")
 - Folgt daraus, dass Generatoren der fundamentalen Darstellung und Identitätsmatrix eine Basis für hermitesche $n \times n$ -Matrizen bilden
 - (a) Beliebige hermitesche $n \times n$ -Matrix: $M = m_0 \mathbb{1} + m_a t^a$
 - (b) $\text{tr} M = m_0 \text{tr} \mathbb{1} + m_a \text{tr} t^a = \frac{1}{n} m_0 \Rightarrow m_0 = \frac{1}{n} \text{tr} M$
 - (c) $\text{tr}(t^a M) = m_0 \text{tr} t^a + m_b \text{tr}(t^a t^b) = m_b T_F \delta^{ab} = T_F m_a \Rightarrow m_a = \frac{1}{T_F} \text{tr}(t^a M)$
 - (d) $M_{ij} = \frac{1}{n} \text{tr} M \delta_{ij} + \frac{1}{T_F} t_{kl}^a M_{lk} t_{ij}^a = M_{lk} \left(\frac{1}{n} \delta_{kl} \delta_{ij} + \frac{1}{T_F} t_{kl}^a t_{ij}^a \right) \stackrel{!}{=} M_{lk} \delta_{il} \delta_{jk} \Rightarrow t_{kl}^a t_{ij}^a = T_F(\delta_{il}\delta_{jk} - \frac{1}{n}\delta_{ij}\delta_{kl})$
6. $(t^a t^a)_{ij} = C_F \delta_{ij}$ mit $C_F = \frac{n^2-1}{2n}$ (Casimir-Operator für t^a)
 - Herleitung der Form von C_F : Setze $j = k$ in Fierz-Identität
 - * $(t^a t^a)_{ij} = t_{ik}^a t_{kj}^a = T_F(\delta_{ij}\delta_{kk} - \frac{1}{n}\delta_i\delta_{kj}) = T_F(n\delta_{ij} - \frac{1}{n}\delta_{ij}) = \delta_{ij} \frac{n^2-1}{n} T_F$
7. $(F^c F^c)_{ab} = C_A \delta_{ab}$ mit $C_A = 2T_F n$ (Casimir-Operator für F^a)
 - Alternative Notation: $(F^c F^c)_{ab} = (-if^{cad})(-if^{cdb}) = -f^{cad} f^{bcd} = f^{acd} f^{bcd}$
 - Herleitung der Form von C_A (?)
8. $\{T^a, T^b\} = \frac{2T_R}{n} \delta^{ab} + d^{abc} T^c$ (symmetrische Strukturkonstanten)
 - Eigenschaften: $d^{aac} = 0, d^{abc} d^{abd} = \frac{n^2-4}{n} \delta^{cd}$ (?)

• Graphische Darstellung der Relationen – Siehe Visualisierung

• Colour decomposition

- Ziel: Will alle kontrahierten Farb-Indizes durch T_R, C_R ausdrücken

1. Eliminiere 3-Gluon-Vertices mit Kommutator-Relation $[F^a, F^b] = if^{abc} F^c$
 - Graphisch: Schreibe 3-Gluon-Vertex um in 2 Quark-Loops mit unterschiedlicher Impuls-Richtung
2. Eliminiere Gluon-Propagatoren mit Fierz-Identität
 - Voraussetzung für diesen Schritt: Keine 3-Gluon-Propagatoren
 - Graphisch: Schreibe Gluon-Propagator (zwischen externen Fermionen) um in alle Möglichkeiten, die externen Fermionen durch interne Fermionen zu verbinden
- Vorteile von Colour decomposition
 - * Vereinfacht Struktur von IR-Divergenzen
 - * Sehe direkt, welcher Term in der $\frac{1}{n}$ -Entwicklung dominiert
- Notiz: Im Allgemeinen erhält man durch colour decomposition erstmal mehr Terme, aber oft kürzen sich Terme wieder weg
 - * Erhalte mehr Terme, da 3-Gluon-Vertices und Gluon-Propagatoren jeweils als Summe von 2 Quark-Diagrammen ausgedrückt werden

8.4.4 Farbfluss-Diagramme für $SU(n)$

- Anschaulich: Alternative Art, Feynman-Diagramme mit Eichbosonen zu zeichnen
 - Anschaulich: Fokus liegt auf Art der Indizes (fundamental vs adjungiert) statt auf Teilchen-Eigenschaft
 - * Intuitiver Vorteil: Benötige nur Pfeile in den Feynman-Diagrammen, keine adjungierten Indizes für Eichbosonen
 - Explizit: Eichboson in Feynman-Diagrammen als 2 zusammenhängende Fermion-Linien statt einer gekringelten Linie
 - Formaler Hintergrund: Adjungierte Darstellung (= Eichbosonen) besteht aus zwei ladungskonjugierten fundamentalen Darstellungen (= typische Fermionen) \Rightarrow Stelle Eichbosonen auch in Feynman-Diagrammen so dar
- Feynman-Diagramme bestehen nur noch aus Fermion-Linien (= fundamentale Darstellung der Eichgruppe) \Rightarrow Kann "Eichgruppen-Ladung" ("Farbladung" in QCD) durch gesamtes Diagramm verfolgen

- Achtung: Es gibt mehrere Möglichkeiten, wie der Farbfluss laufen kann \Rightarrow Ein Diagramm mit Eichboson führt zu mehreren Farbfluss-Diagrammen
 - * Formal: Adjungierte Indizes werden kontrahiert gemäß $T^a_{ij}T^a_{kl} = \frac{1}{2}\delta_{im}\delta_{jk} - \frac{1}{2n}\delta_{ik}\delta_{jl} \Rightarrow$ Anzahl der Farbfluss-Diagramm verdoppelt sich für jedes virtuelle Eichboson
 - * Koeffizienten der Diagramme sind Maß für deren Wahrscheinlichkeit

- Anwendungen

- Intuitives Verständnis von Diagrammen durch “Farbfluss-Konzept”

8.4.5 Grenzfall $n \rightarrow \infty$ in $SU(n)$

- Anschaulich: $SU(n)$ -Eichtheorie vereinfacht sich für $n \rightarrow \infty$, nicht-perturbative Aussagen sind möglich
 - Formal: Betrachte Ergebnisse von $SU(n)$ -Eichtheorie als Entwicklung in $\frac{1}{N} \lesssim 1$
 - Typische Anwendung: QCD bzw $n = 3$ bzw Entwicklung in $\frac{1}{3}$
 - * In der Praxis führende Korrekturen meist in $\frac{1}{N^2}$ auf \Rightarrow Vernachlässigung von mit $\frac{1}{N^2} \sim 10^{-1}$ unterdrückten Termen ist okay
 - Notiz: Exakte Aussagen für $SU(n)$ -Eichtheorie sehr schwierig \Rightarrow Ergebnisse für $n \rightarrow \infty$ sind meist schwer zu testen
 - Notiz: $SU(n)$ -Eichtheorie mit $n \rightarrow \infty$ hat selbe Topologie wie String-Theorie (?)
 - Notiz: Betrachtung von $n \rightarrow \infty$ vereinfacht auch andere unendliche Mengen von einfachen kompakten Lie-Algebren ($SO(n), Sp(2n)$)
- Formal: 't-Hooft-Limit $n \rightarrow \infty$ mit festem “t-Hooft-Kopplungsparameter” $\lambda := g^2 n$
 - Anschaulich: Muss festlegen, welche Parameter bei $n \rightarrow \infty$ festgehalten werden, sonst ist der Grenzwert nicht wohldefiniert
 - Motivation für festes $\lambda = g^2 n$
 - 1-Loop-Rechnung für RGE running von g liefert $\log \frac{\Lambda_{\text{QCD}}}{\Lambda_{\text{UV}}} = -\frac{3}{22} \frac{(4\pi)^2}{g^2 n}$
 - Beobachtung: Erhalte $\Lambda_{\text{QCD}} = \Lambda_{\text{UV}}$ für $n \rightarrow \infty$ mit konstantem $g \Rightarrow$ In diesem Grenzwert ist die Theorie langweilig, da es wegen $\Lambda_{\text{QCD}} = \Lambda_{\text{UV}}$ kein Confinement geben kann
 - Besserer Grenzwert: $n \rightarrow \infty$ mit konstantem $\lambda = g^2 n$
 - * Andere Perspektive: $g = \sqrt{\frac{\lambda}{n}} \rightarrow 0$ simultan zu $n \rightarrow \infty$
- Anwendung: Relevanz von Feynman-Diagrammen abschätzen
 - Anschaulich: “Farb-Unterdrückung” – Sind Farb-Freiheitsgrade der Endzustände festgelegt oder nicht?
 - * Grundlage: Hadronen müssen farb-neutral sein \Rightarrow Bedingungen an Farb-Freiheitsgrade der Quarks
 - * Farb-Freiheitsgrade nicht festgelegt, wenn Quarks aus demselben Produktionsvertex ein Hadron bilden
 - * Farb-Freiheitsgrade festgelegt, wenn Quarks aus unterschiedlichen Produktionsvertices ein Hadron bilden
 - * Farbfluss-Diagramme machen diese Überlegungen graphisch
 - Abschätzung für Feynman-Regeln von $SU(n)$ -Eichtheorie
 - * Trick: Verwende die Basis mit $\mathcal{L} \supset -\frac{1}{4g^2} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu}$ bzw reskaliertem $A^a_\mu \rightarrow \frac{1}{g} A^a_\mu \Rightarrow$ Finde $\mathcal{L} = -\frac{n}{4\lambda} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu}$
 - Vorteil dieser Basis: Alle n -Abhängigkeiten in Feynman-Regeln stecken in Eichboson-Effekten (Eichboson-Propagator, Eichboson-Selbstwechselwirkungen)
 - Alternativ: Arbeite in “normaler” Feld-Basis (g -Abhängigkeit bzw je Faktor $n^{-1/2}$ aus Fermion-Eichboson-Wechselwirkung und Eichboson-Selbstwechselwirkungen) \Rightarrow Finde selber Ergebnisse, weniger elegant
 - * Kontraktion von Farb-Indizes \Rightarrow Faktor n
 - Sehe kontrahierte Farb-Indizes in Farbfluss-Diagrammen als geschlossener Farb-Loop (8.4.4)

- * Eichboson-Selbstwechselwirkungen $\propto n$
 - Feynman-Regeln aus $\mathcal{L} \supset -\frac{n}{4\lambda} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}$: $i\mathcal{M} \propto n$
- * Eichboson-Propagator $\propto n^{-1}$
 - **BGL**-Operator hat $\mathcal{D} \propto n \Rightarrow$ Inverse (Propagator) hat $\Delta \sim \mathcal{D}^{-1} \propto n^{-1}$
- Planare Diagramme dominieren
 - * Planares Diagramm = Diagramm, das man ohne Überkreuzung von Propagatoren zeichnen kann
 - * Grund: Nicht-planare Diagramme haben weniger Kontraktionen von Indizes der adjungierten Darstellung
- OZI-Regel
 - * Aussage: OZI-Bedingung für ein Feynman-Diagramm erfüllt \Rightarrow Entsprechender QCD-Prozess ist unterdrückt
 - OZI-Bedingung physikalisch: Zu einem beliebigen Zeitpunkt befindet sich die gesamte Energie des Anfangszustands in Gluonen
 - OZI-Bedingung graphisch: Kann das zugehörige Feynman-Diagramm durch Durchschneiden von Gluon-Linien in einen Teil mit allen Anfangszustands-Teilchen und einen Teil mit allen Endzustands-Teilchen zerlegen kann
 - * Begründung 1: Farb-Unterdrückung
 - Diagramme mit erfüllter OZI-Bedingung haben mehr Quark-Loops (Farbe fest) \Rightarrow Relative Unterdrückung mit $\frac{1}{n^m}$ mit $m \geq 1$ zusätzlichen Quark-Loops
 - * Begründung 2: Laufende Kopplung von QCD
 - Zwischenzeitlich steckt die gesamte Anfangszustand-Energie in den Gluonen (das folgt direkt aus der Bedingung für Anwendung der OZI-Rule) \Rightarrow Gluonen sind hochenergetisch, muss α_c bei hoher Energie auswerten
 - Nicht sicher, ob dieses Argument so gut ist... Farb-Unterdrückung vermutlich besser
 - * Anmerkung: Die beiden Begründungen sind nicht komplementär, sondern ergänzen sich
 - * Anschaulich: OZI-Regel ist empirische Regel zur Abschätzung von QCD-Prozessen (gefunden in 1960ern)
 - Formale Begründungen möglich, kann darüber **viel nachdenken**
- Matricelement-Faktorisierung in hadronischen Meson-Zerfällen (...)
- Das 't-Hooft-Limit ist der klassische Grenzfall von Eichtheorie (...)

8.4.6 Weitere Themen

- Weinberg-Witten-Theorem
 - Aussage: Nicht-abelsche Eichtheorie hat keine eichinvarianten Erhaltungsgrößen
 - Plausibilisierung
 - * Notiz: Kein Beweis – Zeige nur, warum die üblichen Versuche für eichinvariante Erhaltungsgrößen nicht funktionieren
 - * Erhaltener Strom $j_\mu^a = -\bar{\psi}\gamma_\mu T^a \psi + f_{bc}^a A^{b,\nu} F_{\mu\nu}^c$ aus dem Noether-Theorem ist nicht eichinvariant
 - Begründung für “nicht eichinvariant”: j_μ^a enthält Term linear in A_μ^a
 - Kann aus j_μ^a eine Erhaltungsgröße $Q^a = \int d^3x j_0^a$ konstruieren
 - * Eichinvarianter Strom $j_\mu^a = -\bar{\psi}\gamma_\mu T^a \psi$ liefert keine Erhaltungsgröße
 - Dieser Strom erfüllt $D^\mu j_\mu^a = 0$, erhalte damit nicht $\partial_t Q^a = 0$ aus $Q^a = \int d^3x j_0^a$
 - Notiz: Allgemeinere Aussagen über Konstruktion von Erhaltungsgrößen in den 2 Weinberg-Witten-Theoremen (**Weinberg, Witten, 1980**)

Kapitel 9

Symmetriebrechung

9.0.1 Arten der Symmetriebrechung

- Explizite Symmetriebrechung (**Explicit Symmetry Breaking (ESB)**)
 - Bedeutung: Symmetrie ist gebrochen
 - * Auswirkungen: Erhaltungsgröße der Symmetrie nicht mehr erhalten
 - Explizite Symmetriebrechung durch Terme im Lagrangian
 - * Klassischer Symmetriebrechungsprozess (\mathcal{L} ist klassisches Objekt)
 - Explizite Symmetriebrechung durch Anomalien
 - * Interessant: In der klassischen Theorie ist die Symmetrie exakt, sie wird erst durch Quanteneffekte (Vakuumstruktur) gebrochen
 - * Bsp: Chirale Anomalie, Skalenanomalie
- Spontane Symmetriebrechung (**SSB**)
 - Bedeutung: Grundzustand der Theorie nicht invariant unter der Symmetrietransformation
 - * Ursache: Ein Feld hat einen nicht-verschwindenden Vakuum-Erwartungswert (**vacuum expectation value (vev)**)
 - * Problem: Grundzustand der Theorie muss eindeutig sein
 - * Lösung des Problems: Fordere, dass alle Grundzustände der Theorie physikalisch äquivalent sind
 - * Achtung: Der Lagrangian ist immer noch invariant unter der Symmetrie
 - “Statische” Symmetriebrechung: **vev** für fundamentales Feld
 - Dynamische Symmetriebrechung: **vev** für composite Operator

9.1 Spontane Symmetriebrechung

9.1.1 Grundlagen

- Definition: Theorie hat spontane Symmetriebrechung von Symmetriegruppe G auf Symmetriegruppe $H \subset G$: \Longleftrightarrow Vakuum der Theorie nur invariant unter Symmetrietransformationen von H (nicht unter $G \setminus H$)
 - Notation: $G \rightarrow H$
 - Notiz: Lagrangian ist invariant unter der vollen Symmetriegruppe G , es geht hier nur um Symmetrien des Vakuums
 - Problem: Vakuum der Theorie muss eindeutig sein \Rightarrow Identifiziere alle (verschiedenen) Vakua miteinander
 - * Formal: Zeichne eines der durch Transformationen miteinander verbundenen Vakua aus
 - Definition von “Vakuum der Theorie” unterschiedlich in Lagrange- und Hamilton-Formalismus
 - Statische Symmetriebrechung: Fundamentales Feld ϕ hat **vev** $\phi_0^i \neq 0$
 - * **SSB** meint immer statische Symmetriebrechung, außer wenn es explizit um dynamische Symmetriebrechung geht

- * Statische Symmetriebrechung ist assoziiert mit Skalarfeldern $\phi = \varphi$
 - Argument: Skalarfelder sind die einzigen Felder in renormierbaren Theorien, für die nicht-triviale Potentiale natürlich sind (“natürlich” bezieht sich auf naturalness im **EFT**-Weltbild)
 - Fazit: Nehme für statische Symmetriebrechung immer an, dass ϕ ein Skalarfeld ist
- Dynamische Symmetriebrechung: Operator O hat **vev** $O_0 = \langle \Omega | O | \Omega \rangle \neq 0$
 - * Anschaulich: Dynamische Symmetriebrechung ist ein **EFT**-Effekt und relevant bei stark gekoppelten Systemen
 - * **EFT**-Weltbild: Es ist möglich, dass der composite Operator eine **EFT**-Beschreibung eines fundamentalen Felds ist \Rightarrow Statische Symmetriebrechung kann bei niedrigen Energieskalen wie dynamische Symmetriebrechung aussehen
- **SSB** im Lagrange-Formalismus vs **SSB** im Hamilton-Formalismus
 - Definition des Vakuums unterscheidet sich in den beiden Fällen, Beschreibung sind aber äquivalent
 - **SSB** im Lagrange-Formalismus (bzw Pfadintegral-Formalismus): Vakuum ϕ_0^i (= Feldkonfiguration) definiert durch $\left. \frac{\delta V}{\delta \phi^i} \right|_{\phi^i = \phi_0^i} = 0$
 - * Generatoren $(T^a)^i_j$ von H lassen ϕ_0^i invariant: $(T^a)^i_j \phi_0^j = 0$ bzw $\left(e^{iT^a \alpha_a} \right)^i_j \phi_0^j = \phi_0^i$
 - **SSB** im Hamilton-Formalismus (bzw kanonische Quantisierung): Vakuum $|\Omega\rangle$ (= Zustand) definiert durch Eigenwertgleichung $H|\Omega\rangle = E_0|\Omega\rangle$ mit minimalem Wert E_0
 - * Generatoren T^a von H lassen $|\Omega\rangle$ invariant: $T^a|\Omega\rangle = 0$ bzw $e^{iT^a \alpha_a}|\Omega\rangle = |\Omega\rangle$
 - * Notiz: Vakuum-Feldkonfiguration im Lagrange-Formalismus ϕ_0^i entspricht dem **vev** $\langle \Omega | \phi^i | \Omega \rangle$ bzw $\phi_0^i = \langle \Omega | \phi^i | \Omega \rangle$
- Bild zu **SSB**
 - Grundlage: Potential $V(\phi^i)$ graphisch vorstellen
 - * Einfaches Bsp: Komplexes Feld $\phi = \varphi \Rightarrow 3$ Dimensionen genügen
 - Theorie hat keine **SSB**/hat **SSB** \Rightarrow Minimum von V ist ein einziger Punkt/Minimum von V an mehreren Punkten bzw ein “Tal”
 - * 1:1-Beziehung: Generatoren von $G \setminus H \leftrightarrow$ Richtungen des Tals \leftrightarrow Goldstonebosonen
 - * 1:1-Beziehung: Generatoren von $H \leftrightarrow$ Wege, aus dem Tal zu klettern \leftrightarrow Radiale Moden
- Klassifikation von **SSB** nach Eigenschaften von G
 - G ist diskret
 - * Relativ langweilig, **SSB** sieht ähnlich aus wie **ESB**
 - G ist kontinuierlich und global
 - * Goldstone-Theorem \Rightarrow Theorie enthält masselose Skalarfelder (Goldstonebosonen)
 - G ist kontinuierlich und geeicht
 - * Higgs-Mechanismus \Rightarrow Eichfelder werden massiv

9.1.2 SSB für kontinuierliche globale Symmetrien – Goldstone-Theorem

- Aussage: Theorie hat **SSB** $G \rightarrow H$ mit globaler Symmetrie $G \Rightarrow$ Theorie hat $\dim G - \dim H$ masselose Skalarfelder (Goldstone, Salam, Weinberg, 1962)
 - Bezeichne die masselosen Skalarfelder als Goldstone-Bosonen (**Goldstone Boson (GB)**)
- Situation: Reelle Skalarfeld ϕ^i , das sich unter fundamentaler Darstellung der Gruppe G transformiert
 - Formal: $\phi^i \xrightarrow{G} \left(e^{i\alpha_a T^a} \right)^i_j \phi^j = \phi^i + i(T^a)^i_j \alpha_a \phi^j + \mathcal{O}(\alpha^2)$
 - Verallgemeinerung auf komplexe Skalarfelder ist trivial, da sich komplexe Skalarfelder durch reelle Skalarfelder ausdrücken lassen

- Bedingung für **SSB** erfüllt: Feldkonfiguration ϕ_0^i erfüllt Vakuum-Bedingung $\left. \frac{\delta V}{\delta \phi^i} \right|_{\phi^i=\phi_0^i} = 0$

• Beweis im Lagrange-Formalismus

- Potential ist invariant unter Transformationen der globalen Symmetrie: $0 = \frac{\delta V}{\delta \alpha^a} = \frac{\delta V}{\delta \phi^i} \frac{\delta \phi^i}{\delta \alpha^a} = \frac{\delta V}{\delta \phi^i} i(T_a)^i_j \phi^j$
 - Anschaulich: Das ist die Bedingung, dass G eine Symmetrie der Theorie ist
- Wende $\frac{\delta}{\delta \phi^k}$ auf den Ausdruck an: $0 = \frac{\delta}{\delta \phi^k} \left(\frac{\delta V}{\delta \phi^i} i(T_a)^i_j \phi^j \right) = \frac{\delta^2 V}{\delta \phi^i \delta \phi^k} (T_a)^i_j \phi^j + \frac{\delta V}{\delta \phi^i} (T_a)^i_j \delta_k^j = \frac{\delta^2 V}{\delta \phi^i \delta \phi^k} (T_a)^i_j \phi^j + \frac{\delta V}{\delta \phi^i} (T_a)^i_k$
- Wende $\left|_{\phi^i=\phi_0^i}$ auf den Ausdruck an und verwende $\left. \frac{\delta V}{\delta \phi^i} \right|_{\phi^i=\phi_0^i} = 0 \Rightarrow \left. \frac{\delta^2 V}{\delta \phi^i \delta \phi^k} \right|_{\phi^i=\phi_0^i} (T_a)^i_j \phi_0^j = 0$
- Interpretiere $\left. \frac{\delta^2 V}{\delta \phi^i \delta \phi^j} \right|_{\phi^i=\phi_0^i} = m_{ij}^2$ als Massenmatrix der Felder ϕ^i
 - Begründung: Entwickle V um ϕ_0^i für $(\phi^i - \phi_0^i) \ll 1 \Rightarrow V(\phi^i) = V(\phi_0^i) + \frac{1}{2} \left. \frac{\delta^2 V}{\delta \phi^i \delta \phi^j} \right|_{\phi^i=\phi_0^i} (\phi^i - \phi_0^i)(\phi^j - \phi_0^j) + \mathcal{O}(\phi^i)^3$
- Bestimme Eigenwerte von m_{ij}^2 mit Bedingung $m_{ij}^2 (T_a)^j_k \phi_0^k = 0$
 - m_{ij}^2 ist symmetrisch \Rightarrow Kann Basis wählen, in der m_{ij}^2 diagonal ist \Rightarrow Bedingung wird zu $m_{ii}^2 (T_a)^i_j \phi_0^j = 0$
 - Transformationen von H lassen ϕ_0^i invariant (per Definition) $\Rightarrow (T^{\hat{a}})^i_j \phi_0^j = 0$ mit Indizes $\hat{a} = 1 \dots \dim H$ der Untergruppe $H \Rightarrow$ Bedingung automatisch erfüllt
 - Transformationen von $G \setminus H$ lassen ϕ_0^i nicht invariant (per Definition) $\Rightarrow (T^{\tilde{a}})^i_j \phi_0^j \neq 0$ mit Indizes $\tilde{a} = \dim H + 1 \dots \dim G$ von $G \setminus H \Rightarrow$ Benötige $m_{ii}^2 = 0$ für diese $\dim G - \dim H$ Indizes \Rightarrow Finde masselose Zustände

• Beweis in **QFT** mit Hamilton-Formalismus

- Noether-Theorem für Symmetrie G liefert Noetherströme $j_a^\mu = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \phi^i} \frac{\delta \phi^i}{\delta \alpha^a}$ mit $\partial_\mu j_a^\mu = 0$
 - Formal: Verwende $X_a^\mu = 0, Y_a^i = \frac{\delta \phi^i}{\delta \alpha^a}$ im Noether-Theorem 2.5.1
- Noetherströme j_a^μ führen auf Noetherladungen $Q_a = \int d^3x j_a^0 = \int d^3x \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_0 \phi^i} \frac{\delta \phi^i}{\delta \alpha^a} = \int d^3x \pi_i \frac{\delta \phi^i}{\delta \alpha^a}$ mit $\partial_0 Q_a = 0$ und kanonischem Impuls $\pi_i = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_0 \phi^i}$
- Noetherladungen Q_a erfüllen $[H, Q_a] = 0$
 - Begründung: $[H, Q_a] = i \partial_0 Q_a = 0$
- Vakuum der Theorie ist $|\Omega\rangle$ mit $H|\Omega\rangle = E_0|\Omega\rangle$
 - Theorie hat **SSB** $G \rightarrow H \Rightarrow$ Generatoren $Q_{\tilde{a}}$ von $G \setminus H$ haben $Q_{\tilde{a}}|\Omega\rangle \neq 0$ ($\tilde{a} = \dim H + 1, \dots \dim G$)
- $G \setminus H$ -Transformationen ändern die Energie nicht $H Q_{\tilde{a}}|\Omega\rangle = ([H, Q_{\tilde{a}}] + Q_{\tilde{a}} H)|\Omega\rangle = Q_{\tilde{a}} H|\Omega\rangle = E_0 Q_{\tilde{a}}|\Omega\rangle \Rightarrow$ Mit den Transformationen assoziierte Teilchen sind masselos
 - Argument funktioniert nicht für H -Transformationen, da die $Q_{\hat{a}}|\Omega\rangle = 0$ haben für $\hat{a} = 1, \dots \dim H$
 - Formales Argument
 - Konstruiere die mit $G \setminus H$ assoziierten Teilchen $|\vec{p}, a\rangle = \alpha \int d^3x e^{i\vec{p}\vec{x}} j_a^0|\Omega\rangle$ (mit beliebiger Normierung α)
 - $H|\vec{p}, a\rangle = \alpha \int d^3x e^{i\vec{p}\vec{x}} H j_a^0|\Omega\rangle = \int d^3x e^{i\vec{p}\vec{x}} ([H, j_a^0] + j_a^0 H)|\Omega\rangle = \int d^3x e^{i\vec{p}\vec{x}} (E(\vec{p}) j_a^0 + E_0 j_a^0)|\Omega\rangle = (E(\vec{p}) + E_0)|\vec{p}, a\rangle$ mit $\lim_{\vec{p} \rightarrow a} E(\vec{p}) = 0$ ($E(\vec{p})$ ansonsten beliebig) \Rightarrow Zustände $|\vec{p}, a\rangle$ (**GBs**) müssen masselos sein
 - * Notiz: Für Goldstonebosonen $|\vec{p}, a\rangle$ gilt $\langle \vec{p}, a | j_b^0(\vec{y}) | \Omega \rangle = \frac{2E_{\vec{p}}}{\alpha} e^{i\vec{p}\vec{y}} \delta_a^b$ (verwende Normierung $\langle \vec{p}, a | \vec{q}, b \rangle = 2E_{\vec{p}}(2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{q})$) bzw allgemeiner $\langle \vec{p}, a | j_b^\mu(\vec{y}) | \Omega \rangle = \frac{2p^\mu}{\alpha} e^{i\vec{p}\vec{y}}$

• Beschreibung von Theorien mit **SSB**

- Erkenne Theorie mit **SSB** daran, dass manche Felder ϕ_0^i in der Vakuum-Feldkonfiguration nicht-verschwinden **vev** $\phi_0^i \neq 0$ haben
- Reparametrisierung $\phi^i = \phi^i(\rho^i, \Pi^i)$ mit reellen Skalarfeldern ρ^i und Goldstone-Bosonen Π^i

- Bedingung an Reparametrisierung: Kinetische Terme der reellen Skalarfelder ρ^i, Π^i sollten konventionelle Normierung haben (Faktor $\frac{1}{2}$)
- Typisch: $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \sum_i \rho_i) \exp(iT^a \Pi_a / f)$
- * Finde einfaches Transformationsverhalten $\rho^i \xrightarrow{G \setminus H} \rho^i, \Pi^i \xrightarrow{G \setminus H} \Pi^i + \alpha^i$

3. Setze Reparametrisierung in \mathcal{L} ein

- Invarianz von \mathcal{L} unter $G \setminus H$ ist in der neuen Parametrisierung versteckt
- Symmetrie $\Pi^i \rightarrow \Pi^i + \alpha^i$ verbietet Massenterm für **GBs** \Rightarrow Einfache Bestätigung für das Goldstone-Theorem

9.1.3 SSB für geeichte Symmetrien – Higgs-Mechanismus

• Higgs-Mechanismus

- Aussage: Theorie hat **SSB** $G \rightarrow H$ mit geeichter Symmetrie $G \Rightarrow$ Theorie hat $\dim G - \dim H$ massive Eichbosonen
- 1. Goldstone-Theorem gilt auch hier \Rightarrow Erhalte $\dim G - \dim H$ masselose Skalarfelder
- 2. Unterschied zu **SSB** für globale Symmetrien: Durch Reparametrisierung der kinetischen Terme $(D_\mu \phi_i)(D^\mu \phi^i)$ werden auch Kopplungen der Eichbosonen reparametrisiert
 - **vev**-Term aus Reparametrisierung liefert Eichboson-Massenterme $\propto A_\mu^a A_a^\mu$
- 3. Eichfixierung \Rightarrow Mischterme zwischen Π^i und A_μ^a fallen raus
 - Problem: Habe Mischterme zwischen Π^i und A_μ^a
 - Lösung: Wähle Eichfixierungs-Bedingung $G^a(A_\mu^a)$ so, dass diese Mischterme sich wegkürzen
 - Notiz: Erhalte außerdem eich-abhängige (bzw ξ -abhängige) Massenterme für die Goldstonebosonen
- 4. Bestimme physikalische Zustände durch Diagonalisierung der Massen-Matrix für A_μ^a, Π^i
 - Bsp SM: Physikalische Zustände sind W_μ^\pm, Z_μ, A_μ und nicht W_μ^i, B_μ
- 5. Wähle Eichung \Rightarrow Physikalische Interpretation möglich
 - Viele Eigenschaften der Theorie (zB **GB**-Propagator, Ghost-Propagator) hängen von der Eichung ab
 - Unitäre Eichung: Keine **GBs**, erhalte $\dim G - \dim H$ massive Eichbosonen
 - * Slang: "Eichbosonen essen die Goldstone-Bosonen"
 - Lorentz-Eichung: $\dim G - \dim H$ **GBs**, alle Eichbosonen masselos
 - * Intuitiv: Goldstonebosonen verhalten sich wie die longitudinalen Freiheitsgrade der Eichbosonen
 - Beliebige Eichung: $\dim G - \dim H$ **GBs**, $\dim G - \dim H$ massive Eichbosonen, aber in expliziten Rechnungen kürzen sich diese Effekte gerade weg
 - Konsistenzcheck: Anzahl der Freiheitsgrade in jeder Eichung identisch

• Goldstone-Boson-Äquivalenz-Theorem

- Aussage: Für Eichboson-(Radial-Skalar)-Streuung im Grenzfall hoher Energien dominieren in Feynman-Eichung die **GB**-Beiträge
 - * Anschaulich: Rechentrick für Eichboson-Streuung (kann mit Skalaren statt Eichbosonen rechnen)
 - Typische Anwendung: Eichboson-Higgs-Streuung
 - * Ausführlich: In Feynman-Eichung müssen zusätzlich Goldstone-Boson-Beiträge berücksichtigt werden \Rightarrow Erhalte zunächst deutlich mehr Diagramme, aber alle mit Eichbosonen sind unterdrückt
 - * Effektiv: Kann im Lagrangian $A_\mu^a \rightarrow \frac{1}{v} \partial_\mu \Pi^a$ ersetzen mit Eichbosonen A_μ^a , **vev** v und **GBs** Π^a
- Interpretation: Goldstonebosonen und longitudinale Freiheitsgrade der Eichbosonen verursachen dieselben Effekte und dominieren im Grenzfall hoher Energien

9.1.4 Bsp-Modelle für SSB

- Linear σ model ($l\sigma m$)
 - Anschaulich: Naives Bsp für **SSB** (enthält Radial- und Goldstone-Moden) – Keine anderen Felder beteiligt
 - Modell: $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_i)(\partial^\mu \phi^i) - \frac{m^2}{8v^2}(\phi_i \phi^i - v^2)^2$
 - * Felder ϕ^i transformieren sich unter fundamentaler Darstellung einer Gruppe G
 - Potential $V(\phi)$ hat Minimum bei $\phi_i \phi^i = v^2 \Rightarrow$ Parametrisiere $\phi = \begin{pmatrix} \vec{\pi} \\ v + \sigma \end{pmatrix}$
 - * Finde $\dim G - 1$ masselose **GBs** π^i und ein Skalarfeld σ mit Masse m
 - Bezeichnung “linear σ ” wegen linearer Parametrisierung des Skalarfelds
- Nonlinear σ model ($nl\sigma m$)
 - Anschaulich: Modell zur Beschreibung von **GBs** aus **SSB**
 - * Simpler als $l\sigma m$, da keine Radial-Moden enthalten sind
 - * **EFT**-Argument: Radiale Freiheitsgrade haben große Masse \Rightarrow Nicht interessant bei niedrigen Energien
 - * Kann ein $nl\sigma m$ aus dem $l\sigma m$ generieren (Radial-Moden ausintegrieren bzw “decoupling limit”), aber das Konzept des $nl\sigma m$ ist allgemeiner
 - Modell: Generische Theorie aus Goldstone-Boson-Matrix $\Sigma^{i_1 \dots i_n} = U^{i_1}_{j_1} \dots U^{i_n}_{j_n} \Sigma_0^{j_1 \dots j_n}$
 - * Notation: **vev** Σ_0 , **GB**-Matrizen $U = e^{iT_i \Pi^i / f}$ mit **GBs** Π^i mit Generatoren T_i
 - * Allgemeines Modell: Σ transformiert sich unter beliebiger Darstellung von G
 - * **EFT**-Modell: Modell benötigt keine Erklärung, wie der **vev** Σ_0 generiert wird
 - Bezeichnung “non-linear σ ” wegen nicht-linearer Parametrisierung des Skalarfelds (Goldstoneboson-Matrix ist Exponentialfunktion)

9.1.5 CPT-Eigenschaften von Goldstonebosonen (...)

- Zusammenhang zwischen Ableitungs-Kopplungen und Paritäts-Eigenschaften
- **GBs** aus Brechung von kompakten Symmetrien sind pseudoskalar
- **GBs** aus Brechung von nicht-kompakten Symmetrien sind skalar

9.2 Explizite Symmetriebrechung durch chirale Anomalien

9.2.1 Grundbegriffe

- Anomale Symmetrie(Anomalie) = Klassische Symmetrie, die durch Quanteneffekte gebrochen wird
 - Besonderheit: Symmetriebrechungs-Effekt, für dessen Beschreibung das Noether-Theorem(klassische Beschreibung) nicht genügt
 - Klassische Symmetrie = Wirkung ist invariant unter der Transformation
 - Anomale Symmetriebrechung ist ein Beispiel für explizite Symmetriebrechung
 - Klassifiziere Anomalien nach den Quanteneffekten, die die klassische Symmetrie brechen
 - * Chirale Anomalie: Axiale Symmetrie(links- und rechtshändige Fermionen haben unterschiedliches Transformationsverhalten)
 - * Skalenanomalie: Skalensymmetrie bzw conformal symmetry
- Zentrale Relation für chirale Anomalien: $\partial_\mu (j_A)^\mu_a = -\frac{g^2}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^b F_{\rho\sigma}^c \text{tr}(T_a^A \{T_b^G, T_c^G\})$ führen
 - 2 Zugänge zu Anomalien: Fujikawa-Methode(Pfadintegral-Formalismus), Dreiecks-Diagramme(Störungstheorie)

- * Zugänge sind äquivalent, da sie beide auf die zentrale Relation $\partial_\mu (j_A)^\mu_a = -\frac{g^2}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^b F_{\rho\sigma}^c \text{tr}(T_a^A \{T_b^G, T_c^G\})$ führen
- Dreiecks-Diagramme historisch wichtig bei Entdeckung der chiralen Anomalie
- Fujikawa-Methode ermöglicht intuitives Verständnis der chiralen Anomalie durch Zusammenhang mit Noether-Theorem
- Formale Voraussetzungen für chirale Anomalie
 1. Symmetrie A
 - A ist die Symmetrie, die anomal gebrochen ist
 2. Eichfelder einer Gruppe G
 - Benötige für die chirale Anomalie nur die Eichfelder, nicht die Eichtransformation \Rightarrow Eichfelder können auch "Hintergrundfelder" sein
 - * Hintergrundfelder = Nicht-dynamische Felder (keine "Variablen" in der Wirkung, sondern fest von außen vorgegeben)
 - * Wenn die G -Eichfelder Hintergrundfelder sind, ist G nicht geeicht (präziser: Der Lagrangian ist nicht invariant unter lokalen Transformationen von G , da es zB keine kinetischen Terme der G -Eichfelder gibt)
 - Mehrere Eichgruppen in der Theorie \Rightarrow Zwei verschiedene Eichgruppen G_1, G_2 können an Anomalie beteiligt sein
 - * Wenn man nur einfache Lie-Gruppen betrachtet, ist $A = G_1 = G_2 = U(1)$ (alle 3 Symmetrien mit unterschiedlichen Quantenzahlen) der einzige Fall mit $G_1 \neq G_2$, in dem die Anomalie nicht verschwindet
 - * Triviale Verallgemeinerung, die aber die Notation verkompliziert \Rightarrow Bleibe bei $G_1 = G_2$
 - Eine von A, G muss chiral sein
 - * Interessante Beobachtung, dass A für chirale Anomalie nicht chiral sein muss
 - Bsp für chirale Anomalie mit Vektorsymmetrie A : Baryonzahlverletzung durch $U(1)_B SU(2)_L^2$ -Anomalie
 - Bezeichne Generatoren von A, G mit T_a^A, T_a^G (Indizes immer in dieser Position)
 - * Besser wäre $(T^A)_a, (T^G)_a$, aber dann werden die Ausdrücke lang
- Betrachtete Theorie hat eine AG^2 -Anomalie : $\iff \text{tr}(T_a^A \{T_b^G, T_c^G\}) \neq 0$
 - Falls $\text{tr}(T_a^A \{T_b^G, T_c^G\}) = 0$, sind alle zugehörigen Effekte proportional zu 0
 - Terme in $\partial_\mu (j_A)^\mu_a$ außer $\text{tr}(T_a^A \{T_b^G, T_c^G\})$ können nicht verschwinden
 - Bildlich: Zur AG^2 -Anomalie gehört ein Dreiecksdiagramm mit einem A -Vertex und 2 G -Vertices
- Anwendungen von chiralen Anomalien in Phänomenologie
 - Ausführliche Diskussion der 3 Fälle kommt unten
 - Globale anomale Symmetrie: G geeicht, A global
 - Geeichte anomale Symmetrie: G und A geeicht
 - 't Hooft-Anomalie: G und A global
- Masselose vs massive chirale Fermionen
 - Folgende Rechnungen funktionieren auch mit Fermion-Massenterm \Rightarrow Anomalie ist unabhängig von der Fermion-Masse
 - * Bekomme mit Fermion-Massenterm zusätzliche explizite Symmetriebrechung $2im\bar{\psi}\gamma_5\psi$ in $(j_A)^\mu_a$
 - Falls unter axialer Symmetrie transformierende Fermionen masselos sind: Chirale Anomalie ist einziger Prozess, der die axiale Symmetrie explizit bricht
 - * Fall kommt öfter vor, da Fermionen in typischen Theorien masselos sind (bzw ihre Masse durch **SSB** generiert wird)
 - Unter axialer Symmetrie transformierende Fermionen sind massiv \Rightarrow Fermion-Massenterm bricht axiale Symmetrie (durch Noether-Theorem beschrieben), chirale Anomalie ist Zusatzeffekt

9.2.2 Fujikawa-Methode – Anomalien aus Transformation des Pfadintegrals

- Axiale Transformationen $\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)\gamma_5}\psi(x)$ mit $\alpha = T_a^A \alpha^a$
 - Anschaulich: Links- und rechtshändige Komponenten von $\psi(x)$ transformieren sich unterschiedlich wegen $\gamma_5 = \begin{pmatrix} -\mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_2 \end{pmatrix}$
 - Gegensatz zu vektoriellen Transformationen $e^{i\alpha(x)}\psi(x)$
 - Kann mit Linearkombinationen von vektoriellen und axialen Transformationen beliebige Transformationen der Weyl-Spinoren konstruieren
 - * Weyl-Spinoren sind irreduzible Darstellungen der Lorentz-Gruppe \Rightarrow Kann Weyl-Spinoren unterschiedlich reskalieren
 - * Achtung: Darf Dirac-Struktur der Weyl-Spinoren nicht ändern
 - Bsp: $\psi \rightarrow e^{i\alpha\Gamma}\psi$ mit Matrix Γ , die nicht blockdiagonal ist (mischt links- und rechtshändige Weylspinoren) oder deren Einträge in den Blockdiagonalen nicht $\propto \mathbb{1}_2$ sind (mischt Komponenten innerhalb von Weyl-Spinoren)
 - Kann globale (α konstant) oder lokale ($\alpha = \alpha(x)$) axiale Transformationen betrachten
 - * Rechne hier mit lokalen Transformationen, kann am Ende den Spezialfall $\alpha(x)$ konstant wählen
 - Behandle beliebige Lie-Gruppen-Struktur der Transformation $\alpha^i_j = (T_a^A)^i_j \alpha^a$
 - * Verwende in der Rechnung α^i_j (fundamentale Indizes) statt α^a (adjungierte Indizes), um die Anzahl der Indizes zu reduzieren (schreibe fundamentale Indizes nicht explizit aus)
- Betrachte axiale Transformation des Pfadintegrals $\int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{iS} \Rightarrow \partial_\mu (j_A)_a^\mu = -\frac{g^2}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^b F_{\rho\sigma}^c \text{tr}(T_a^A \{T_b^G, T_c^G\})$
 - Beobachtung: Habe in der Rechnung nicht in $g \ll 1$ entwickelt \Rightarrow Ergebnis ist exakt bzw gilt in allen Ordnungen Störungstheorie
- 1. Transformation der Wirkung $S = \int d^4x \mathcal{L} \rightarrow \int d^4x \mathcal{L} + \int d^4x \alpha^a \partial_\mu (j_A)_a^\mu$
 - Folgt aus Noether-Theorem: Unter infinitesimalen Transformationen $x^\mu \rightarrow x^\mu + X_k^\mu \alpha^k, \phi^a \rightarrow \phi^a + Y_k^a \alpha^k$ transformiert sich die Wirkung gemäß $S = \int d^4x \mathcal{L} \rightarrow \int d^4x \mathcal{L} + \alpha^a \int d^4x \partial_\mu j_a^\mu$
 - * Typische Anwendung des Noether-Theorems: S ist invariant $\Rightarrow \partial_\mu j_a^\mu = 0$
 - * Form von j_a^μ hängt vom Lagrangian ab \Rightarrow Kein allgemeinerer Ausdruck für j_a^μ
- 2. Transformation des Differentials $\mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \rightarrow \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp\left(i \frac{g^2}{32\pi^2} \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \alpha^a F_{\mu\nu}^b F_{\rho\sigma}^c \text{tr}(T_a^A \{T_b^G, T_c^G\})\right)$
 - Rechnung unten
- 3. Sammle Ergebnisse auf $\Rightarrow \partial_\mu j_a^\mu = -\frac{g^2}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^b F_{\rho\sigma}^c \text{tr}(T_a^A \{T_b^G, T_c^G\})$
 - (a) Transformation des gesamten Pfadintegrals:

$$\int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{iS} \rightarrow \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp\left(iS + i \int d^4x \alpha^a \partial_\mu j_a^\mu + i \int d^4x \frac{g^2}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \alpha^a F_{\mu\nu}^b F_{\rho\sigma}^c \text{tr}(T_a^A \{T_b^G, T_c^G\})\right)$$
 - (b) Redefinition der Integrationsvariablen ändert das Integral nicht:

$$\int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp\left(iS + i \int d^4x \alpha^a \partial_\mu j_a^\mu + i \int d^4x \frac{g^2}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \alpha^a F_{\mu\nu}^b F_{\rho\sigma}^c \text{tr}(T_a^A \{T_b^G, T_c^G\})\right) \stackrel{!}{=} \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{iS}$$
 - Argument: Im Pfadintegral werden über alle Feldkonfigurationen integriert, eine Redefinition der Felder ändert daher nichts
 - (c) Klammere $i \int d^4x \alpha^a$ aus $\Rightarrow \partial_\mu j_a^\mu = -\frac{g^2}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^b F_{\rho\sigma}^c \text{tr}(T_a^A \{T_b^G, T_c^G\})$
- Transformationsverhalten des Pfadintegral-Differentials

$$\mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \rightarrow \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp\left(\frac{ig^2}{32\pi^2} \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \alpha^a F_{\mu\nu}^b F_{\rho\sigma}^c \text{tr}(T_a^A \{T_b^G, T_c^G\})\right)$$

1. Schreibe $\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)\gamma_5}\psi(x)$ in Matrixnotation: $\psi(x) \rightarrow \int d^4y J(x,y)\psi(y)$ mit $J(x,y) = \delta^4(x-y)e^{i\alpha(x)\gamma_5}$
 - Vorteil: $J(x,y)$ ist eine Matrix (mit überabzählbar vielen Zeilen und Spalten) \Rightarrow Kann analog zu Integration mit endlich vielen Variablen vorgehen
 - Anschaulich: $\psi'(x) = \int d^4y J(x,y)\psi(y)$ entspricht Matrixmultiplikation $\psi'_x = \sum_y J_{xy}\psi_y$

2. Transformationsverhalten des Pfadintegral-Differentials $\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi} \rightarrow \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi}(\det J)^{-2} = \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi}e^{-2\text{tr}\log J}$
 - Allgemeiner Ausdruck: $\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi} \rightarrow \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi}(\det J_\psi)^{-1}(\det J_{\bar{\psi}})^{-1}$
 - * Multipliziere inverse Jacobideterminanten $(\det J)^{-1}$, da $\psi, \bar{\psi}$ Grassmann-Felder sind
 - * Verwende $J := J_\psi = J_{\bar{\psi}}$, da $\psi \rightarrow e^{i\alpha\gamma_5}\psi$ und $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0 \rightarrow (e^{i\alpha\gamma_5}\psi)^\dagger\gamma^0 = \psi^\dagger e^{-i\alpha\gamma_5}\gamma^0 = \bar{\psi}e^{i\alpha\gamma_5}$ sich gleich transformieren
 - Jacobideterminante mit $\log \det J = \text{tr} \log J$ in Exponentialfunktion umschreiben $(\det J)^{-2} = (e^{\log \det J})^{-2} = e^{-2\log \det J} = e^{-2\text{tr} \log J}$
 - * Kann Argumente von \det und tr immer durch einen Basiswechsel diagonalisieren \Rightarrow Muss nur über Diagonalmatrizen nachdenken
 - * $\log \det J = \text{tr} \log J$ mit diagonalem J , $\log J$ ist Verallgemeinerung von $\log ab = \log a + \log b$
 3. Spur berechnen: $\text{tr} \log J = \text{tr} (\delta^4(x-y)i\alpha\gamma_5) = i \int d^4x \delta^4(x-x) \text{tr} (\alpha\gamma_5)$
 - $\log J = \log (\delta^4(x-y)e^{i\alpha(x)\gamma_5}) = \delta^4(x-y)i\alpha(x)\gamma_5$
 - * Diagonalmatrix im Funktionenraum $\delta^4(x-y)$ wird durch \log nicht geändert(?)
 - Achtung: tr meint Spur über alle Freiheitsgrade von $\log J$
 - * Freiheitsgrade von $\log J = \delta^4(x-y)i\alpha(x)\gamma_5$: Funktionen-Indizes x, y (in $\delta^4(x-y)$), Dirac-Indizes (in γ_5), Lie-Algebra-Indizes (in $\alpha = T_a^A \alpha^a$)
 - * Spur für (kontinuierlichen) Funktionen-Index x ist Integral $\int d^4x (\log J)(x, x)$
 - * Notation während dieser Rechnung: tr_D bzw tr_L für Spur über Dirac-Indizes bzw Lie-Indizes und $\text{tr} := \text{tr}_D \text{tr}_L$ für Spur über beide Indizes
 - Problem: Erhalte $\delta^4(x-x)\text{tr}(\alpha\gamma_5) \sim \infty \times 0 \Rightarrow$ Benötige Regulator
 - * $\delta^4(x-x) = \delta^4(0) \sim \infty, \text{tr}\gamma_5 = 0$
 4. Regulator einführen: $\dots = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} i\Lambda^4 \int d^4x \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} \left(\alpha\gamma_5 e^{-k^2} e^{D^2/\Lambda^2 - 2ikD/\Lambda} e^{-\frac{g}{2}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}/\Lambda^2} \right)$
 - Regulator: $\delta^4(x-y) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} e^{D^2/\Lambda^2} \delta^4(x-y)$
 - * Regulator funktioniert: Für $\Lambda \rightarrow \infty$ wird $e^{D^2/\Lambda^2} \rightarrow e^0 = 1$
 - * Anschaulich: Regulator ersetzt Term $\delta^4(x-y)$ unter dem Integral durch Gaußfunktion(?)
 - * Regulator ist recht allgemeinen: Kann Vorfaktoren in Exponentialfunktion durch Redefinition von Λ absorbieren
 - * Kann auch andere Regulator-Formulierungen verwenden, das Ergebnis hängt nicht vom Regulator ab (solange der Regulator ein endliches Ergebnis liefert)
 - Führe Feldstärketensoren der Gruppe G ein: $F_{\mu\nu} = (T^G)_a F_{\mu\nu}^a$
 - * Verwende während der Rechnung fundamentale Indizes $(F_{\mu\nu})^i_j$ und lasse die Indizes implizit (kürzere Ausdrücke), wechsele am Ende zu adjungierten Indizes $F_{\mu\nu}^a$
- (a) $e^{D^2/\Lambda^2} \delta^4(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{D^2/\Lambda^2} e^{ikx}$
 - (b) $\dots = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{D^2/\Lambda^2} e^{ik(x-y)}$
 - Setze Integral-Darstellung der δ -Distribution ein $\delta^4(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ikx}$
 - (c) $\dots = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik(x-y)} e^{(\not{D} + i\not{k})^2/\Lambda^2}$
 - Verwende $f(\partial_\mu) e^{ikx} = e^{ikx} f(\partial_\mu + ik_\mu)$ (anschaulich: ∂_μ ist Translationsoperator)
 - (d) $\dots = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik(x-y)} e^{(\not{D}^2 - \not{k}^2 + i\{\not{D}, \not{k}\})/\Lambda^2} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik(x-y)} e^{(-k^2 + D^2 - 2ikD - \frac{g}{2}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu})/\Lambda^2}$
 - $(\not{D} + i\not{k})^2 = \not{D}^2 + (i\not{k})^2 + \not{D}i\not{k} + i\not{k}\not{D} = \not{D}^2 - \not{k}^2 + i\{\not{D}, \not{k}\}$
 - $\not{k}^2 = \gamma^\mu \gamma^\nu k_\mu k_\nu = \frac{1}{2} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} k_\mu k_\nu = g^{\mu\nu} k_\mu k_\nu = k^2$ wegen Vertauschungssymmetrie von $k_\mu k_\nu$
 - $\not{D}^2 = \gamma^\mu \gamma^\nu D_\mu D_\nu = \frac{1}{2} ([\gamma^\mu, \gamma^\nu] + \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}) D_\mu D_\nu = \frac{1}{2} (\frac{2}{i}\sigma^{\mu\nu} + 2g^{\mu\nu}) D_\mu D_\nu = (g^{\mu\nu} - i\sigma^{\mu\nu}) D_\mu D_\nu = D^2 - i\sigma^{\mu\nu} D_\mu D_\nu = D^2 - i\sigma^{\mu\nu} \frac{1}{2} [D_\mu, D_\nu] = D^2 - i\sigma^{\mu\nu} \frac{1}{2} \frac{g}{i} F_{\mu\nu} = D^2 - \frac{g}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ wegen $F_{\mu\nu} = \frac{i}{g} [D_\mu, D_\nu]$
 - $\{\not{D}, \not{k}\} = \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} D_\mu k_\nu = 2g^{\mu\nu} D_\mu k_\nu = 2kD$
 - Notiz: k_μ und D_μ vertauschen miteinander, da D_μ nur auf Orte wirkt
 - (e) Reskaliere $k^\mu \rightarrow \frac{k^\mu}{\Lambda} \Rightarrow \dots = \Lambda^4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik(x-y)/\Lambda} e^{-k^2} e^{D^2/\Lambda^2 - 2ikD/\Lambda} e^{-\frac{g}{2}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}/\Lambda^2}$
 - Nützlich, um zu sehen, was die führende Ordnung in Λ ist

– Fazit: $\delta^4(x-x) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \Lambda^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-k^2} e^{D^2/\Lambda^2 - 2ikD/\Lambda} e^{-\frac{g}{2} \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu}/\Lambda^2}$

* $\delta^4(x-x)$ hat wegen $e^{-\frac{g}{2} \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu}/\Lambda^2}$ nicht-triviale Dirac-Struktur \Rightarrow Muss $\delta^4(x-x)$ wieder in die Spur schreiben

– Achtung: Spur über Lie-Algebra-Indizes tr_L läuft jetzt über die Indizes von C und G

5. Spur vereinfachen: $\dots = \frac{ig^2}{8} \left(\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-k^2} \right) \int d^4 x \text{tr} (\alpha \gamma_5 (\sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu})^2)$

(a) Terme $\mathcal{O}(\frac{1}{\Lambda^5})$ in der Spur verschwinden für $\lim_{\Lambda \rightarrow \infty}$

– Fazit: Kann exp-Funktionen in der Spur entwickeln bis $\mathcal{O}(\frac{1}{\Lambda^5})$ und erhalte exaktes Ergebnis

(b) Argument 2: Spuren mit γ_5 und weniger als 4 γ -Matrizen verschwinden

– Einziger Term in der Spur, der in $\mathcal{O}(\frac{1}{\Lambda^5})$ 4 γ -Matrizen enthalten kann: $e^{-\frac{g}{2} \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu}/\Lambda^2}$

– Fazit: In der Entwicklung von $e^{D^2/\Lambda^2 - 2ikD/\Lambda} \times e^{-\frac{g}{2} \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu}/\Lambda^2}$ in Λ liefert nur der Term $1 \times \frac{1}{2} \left(-\frac{g}{2} \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu}/\Lambda^2 \right)^2$ einen nicht-verschwindenden Beitrag in der Spur

– Damit kürzen sich die Λ^4 -Terme in $\delta^4(x-x)$ und $\lim_{\Lambda \rightarrow \infty}$ muss nicht mehr ausgeschrieben werden

– Bemerkung: Einzige k -Abhängigkeit steckt in $e^{-k^2} \Rightarrow k$ -Integral faktorisiert

6. Finale Umformungsschritte $\Rightarrow (\det J)^{-2} = e^{-2\text{tr} \log J} = \exp \left(i \frac{g^2}{32\pi^2} \int d^4 x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \alpha^a F_{\mu\nu}^b F_{\rho\sigma}^c \text{tr}_L (T_a^A \{T_b^G, T_c^G\}) \right)$

(a) Zerlege Spuren $\text{tr} \log J = \frac{ig^2}{8} \left(\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-k^2} \right) \int d^4 x \text{tr} (\alpha \gamma_5 (\sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu})^2)$

$$= \frac{ig^2}{8} \left(\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-k^2} \right) \int d^4 x \text{tr}_D (\gamma_5 \sigma^{\mu\nu} \sigma^{\rho\sigma}) \text{tr}_L (\alpha F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma})$$

(b) $\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-k^2} = i \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} e^{-(k_E)^2} = \frac{i\pi^2}{(2\pi)^4} = \frac{i}{16\pi^2}$

– Wick-Rotation $\int d^4 k f(k) = i \int d^4 k_E f(k_E)$ für Minkowski-Vektor k und euklidischen Vektor k_E liefert $\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-k^2} = i \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} e^{-(k_E)^2}$

$$- \int d^4 k_E e^{-(k_E)^2} = \left(\int dx e^{-x^2} \right)^4 = \sqrt{\pi}^4 = \pi^2$$

(c) Identität $\text{tr}_D (\sigma^{\mu\nu} \sigma^{\rho\sigma} \gamma_5) = 4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$

– Folgt aus $\text{tr}_D (\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_5) = 4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$

(d) $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr}_L (\alpha F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}) = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \alpha^a F_{\mu\nu}^b F_{\rho\sigma}^c \text{tr}_L (T_a^A T_b^G T_c^G) = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \alpha^a F_{\mu\nu}^b F_{\rho\sigma}^c \text{tr}_L (T_a^A \{T_b^G, T_c^G\})$

i. Setze Entwicklung der Matrizen in Generatoren der jeweiligen Lie-Algebra $\alpha = \alpha^a T_a^A, F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a T_a^G$ ein

ii. $\text{tr}_L (T_a^A T_b^G T_c^G) = \frac{1}{2} \text{tr}_L (T_a^A [T_b^G, T_c^G]) + \frac{1}{2} \text{tr}_L (T_a^A \{T_b^G, T_c^G\})$

iii. $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^b F_{\rho\sigma}^c$ ist symmetrisch unter $b \leftrightarrow c$ (vertausche $\mu \leftrightarrow \rho, \nu \leftrightarrow \sigma$), $\text{tr}_L (T_a^A [T_b^G, T_c^G])$ ist antisymmetrisch unter $b \leftrightarrow c \Rightarrow$ Kommutator-Term verschwindet

(e) Aufsammeln $\Rightarrow \text{tr} \log J = -i \frac{g^2}{64\pi^2} \int d^4 x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \alpha^a F_{\mu\nu}^b F_{\rho\sigma}^c \text{tr}_L (T_a^A \{T_b^G, T_c^G\})$

– Keine Spur über Dirac-Indizes tr_D mehr \Rightarrow Verwende außerhalb dieser Rechnung $\text{tr} \equiv \text{tr}_L$

– Randnotiz: Für vektorielle Transformationen $\psi \rightarrow e^{i\alpha} \psi$ gilt $\mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \rightarrow \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \Rightarrow$ Keine Anomalie

1. Transformationsverhalten $\psi \rightarrow e^{i\alpha} \psi, \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} e^{-i\alpha}$

2. Jacobi-Determinanten $\det J_\psi = e^{\text{tr} \log J} = e^{i \int d^4 x \delta^4(0) \text{tr} 1} = e^{4i \int d^4 x \delta^4(0)}, \det J_{\bar{\psi}} = (\det J_\psi)^\dagger$

3. Insgesamt $(\det J_\psi \det J_{\bar{\psi}})^{-1} = e^{4i \int d^4 x \delta^4(0) - 4i \int d^4 x \delta^4(0)} = 1$

• Verallgemeinerungen der Diskussion \Rightarrow Finde allgemeine Form der chiralen Anomalie

$$\partial_\mu (j_A)^\mu = -\frac{1}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \sum_{i,j} g_i g_j F_{i,\mu\nu}^b F_{j,\rho\sigma}^c (2 - \delta_{ij}) \sum_f \text{tr} \left(T_a^{A,f,R} \{T_b^{G,i,f,R}, T_c^{G,j,f,R}\} - T_a^{A,f,L} \{T_b^{G,i,f,L}, T_c^{G,j,f,L}\} \right)$$

– Bisher: Ein Fermion, eine Eichgruppe $\Rightarrow \partial_\mu (j_A)^\mu = -\frac{g^2}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^b F_{\rho\sigma}^c \text{tr} (T_a^A \{T_b^G, T_c^G\})$

* Jetzt: Verallgemeinere obige Diskussion mit kleinen Änderungen zum allgemeinen Fall

– $P_{L,R}$ statt $1, \gamma_5$: $\text{tr} (T_a^A \{T_b^G, T_c^G\}) \rightarrow \left(\text{tr} (T_a^{A,R} \{T_b^{G,R}, T_c^{G,R}\}) - \text{tr} (T_a^{A,L} \{T_b^{G,L}, T_c^{G,L}\}) \right)$

* Motivation: Irreduzible Darstellungen der Lorentz-Gruppe sind links- und rechtshändige Weyl-Spinoren und nicht vektor- und axialvektorartige Dirac-Spinoren

- Praktisches Argument: In chiralen Theorien wird Transformationsverhalten von links-/rechtshändige Fermionen angegeben ($P_{L,R}\psi_{L,R} = \psi_{L,R}$), nicht das von vektor-/axialvektorartigen Fermionen ($\gamma_5\psi = \pm\psi$)
- * Unterscheidungen “links-/rechtshändige Transformationen” und “Vektor-/Axialvektorartige Transformationen” hängen zusammen wegen $P_{L,R} = \frac{1\pm\gamma_5}{2}$
- 1. Ersetzung $T_a^A\gamma_5 = T_a^{AR}P_R - T_a^{AL}P_L$ führt zum richtigen Transformationsverhalten von $\psi_{L,R}$
 - * Argument: Ersetze $\gamma_5 = P_R - P_L$, muss dann die Generatoren-Koeffizienten von P_R, P_L so wählen, dass sie mit dem Transformationsverhalten $\psi_{L,R} \xrightarrow{A} e^{i\alpha_a T_a^{A,L,R}} \psi_{L,R}$ zusammenpassen
 - * Nachrechnen: $e^{i\alpha_a T_a^A\gamma_5}\psi_R = e^{i\alpha_a T_a^{AR}P_R - i\alpha_a T_a^{AL}P_L}\psi_R = e^{i\alpha_a T_a^{AR}P_R}\psi_R$ und analog für ψ_L
- 2. Zerlegung in Transformation von ψ_R und ψ_L zieht sich durch die gesamte Rechnung
 - * Muss bei den Feldstärketensoren $F_{\mu\nu}^a T_a^G$ auch für T_G^a die unterschiedlichen Generatoren $T_a^{G,L,R}$ für $\psi_{L,R}$ berücksichtigen
- Mehrere Fermionen: $\left(\text{tr}(T_a^{AR}\{T_b^{GR}, T_c^{GR}\}) - \text{tr}(T_a^{AL}\{T_b^{GL}, T_c^{GL}\})\right)$
 $\rightarrow \sum_f \left(\text{tr}(T_a^{Af,R}\{T_b^{Gf,R}, T_c^{Gf,R}\}) - \text{tr}(T_a^{Af,L}\{T_b^{Gf,L}, T_c^{Gf,L}\})\right)$
 - * Erhalte für jedes Fermion-Differential $\mathcal{D}\psi_f \mathcal{D}\bar{\psi}_f$ denselben Term, aber mit unterschiedlichen Generatoren \Rightarrow Muss in der Exponentialfunktion die einzelnen Terme addieren
 - * $T_a^{Xf,L/R}$: Generator für links-/rechtshändige Transformation des Fermions f unter Gruppe X
- Mehrere Eichgruppen: $g^2 F_{\mu\nu}^b F_{\rho\sigma}^c \sum_f \left(\text{tr}(T_a^{Af,R}\{T_b^{Gf,R}, T_c^{Gf,R}\}) - \text{tr}(T_a^{Af,L}\{T_b^{Gf,L}, T_c^{Gf,L}\})\right)$
 $\rightarrow \sum_{i,j} g_i g_j F_{i,\mu\nu}^b F_{j,\rho\sigma}^c (2 - \delta_{ij}) \sum_f \left(\text{tr}(T_a^{Af,R}\{T_b^{Gi,f,R}, T_c^{Gj,f,R}\}) - \text{tr}(T_a^{Af,L}\{T_b^{Gi,f,L}, T_c^{Gj,f,L}\})\right)$
 - * Notation: g_i für Kopplungskonstanten der Eichtheorien G_i
 - * Notiz: Gemischte Anomalien $AG_1 G_2$ sind möglich
- 1. Kommutator $[D_\mu, D_\nu]$ liefert Summe von Feldstärketensoren $\frac{i}{g}[D_\mu, D_\nu] = \sum_{G_i} F_{G_i,\mu\nu}^a T_a^{G_i} =: F_{\mu\nu}$
 - * Notiz: $F_{\mu\nu} = \sum_{G_i} F_{G_i,\mu\nu}^a T_a^{G_i}$ hat Indizes von allen Eichgruppen der Theorie
 - * Struktur des Terms ($F_{\mu\nu}$) ändert sich nicht \Rightarrow Unterschiede in der Rechnung erst im letzten Schritt, wenn $F_{\mu\nu} = \sum_i F_{i,\mu\nu}^a T_a^{G_i}$ eingesetzt wird
- 2. Berechne $\text{tr}_L(\alpha F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}) = \frac{1}{2}\alpha^a \text{tr}_L((T_a^{AR} - T_a^{AL})F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}) \Rightarrow$ Langer Ausdruck
 - * $\text{tr}((T_a^{AR} - T_a^{AL})F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}) = \text{tr}(T_a^{AR} - T_a^{AL}) \left(\sum_{G_i} F_{G_i,\mu\nu}^b T_b^{G_i}\right) \left(\sum_{G_j} F_{G_j,\rho\sigma}^c T_c^{G_j}\right)$
 $= \sum_{G_i, G_j} F_{G_i,\mu\nu}^b F_{G_j,\rho\sigma}^c (2 - \delta_{G_i G_j}) \text{tr}(T_a^{AR} - T_a^{AL}) T_b^{G_i} T_c^{G_j} (?)$
 - * Beschreibe Faktor 2 für Mischterme mit $(2 - \delta_{ij})$
- 3. Vorfaktor g^2 wird zu $g_i g_j$

9.2.3 Dreiecks-Diagramme – Anomalien aus direkter Rechnung in Störungstheorie

- Nachteile gegenüber der Pfadintegral-Methode
 - Zusammenhang mit Noether-Theorem wird nicht klar
 - Benötige mehr Rechen-Kniffe
 - * Konkret: Loop-Impuls-Parametrisierung für linear divergente Integrale(oder anderen Regulator)
 - Ergebnis gilt nur in erster Ordnung Störungstheorie
 - * Kann beweisen, dass keine weiteren Korrekturen in höherer Ordnung Störungstheorie dazukommen, aber das ist aufwändig
- Berechne Anomalie direkt in Störungstheorie $\Rightarrow \partial_\mu (j_A)_a^\mu = -\frac{g^2}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^b F_{\rho\sigma}^c \text{tr}(T_a^A \{T_b^G, T_c^G\})$
 1. Betrachte freie Eichtheorie mit einem chiralen Fermion $\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + \bar{\psi} i \not{D} P_{L,R} \psi (?)$
 - \mathcal{L} invariant unter axialer Transformation $\psi \rightarrow e^{i\alpha\gamma_5} \psi \Rightarrow$ Noethertheorem liefert Erhaltungsgröße Axialvektorstrom $(j_A)_a^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 T_a^A \psi$
 - \mathcal{L} invariant unter Eichsymmetrie \Rightarrow Noethertheorem liefert Erhaltungsgröße $(j_G)_a^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu T_a^G \psi$

2. Berechne Matrixelement des Axialvektor-Stroms in Störungstheorie:

$$\left\langle (p, \lambda, b), (q, \lambda', c) \left| \partial_\rho (j_A)_a^\rho(z) \right| 0 \right\rangle = -\frac{g^2}{4\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_\mu^\lambda(\vec{p}) \epsilon_\nu^{\lambda'}(\vec{q}) p_\rho q_\sigma e^{-i(p+q)z} \text{tr}(T_a^A \{T_b^G, T_c^G\})$$

– Kompliziert, benötige Regulator für den Fermion-Loop(Rechnung kommt unten)

3. Finde für $\left\langle (p, \lambda, b), (q, \lambda', c) \left| -\frac{g^2}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^b(z) F_{\rho\sigma}^c(z) \text{tr}(T_a^A \{T_b^G, T_c^G\}) \right| 0 \right\rangle$ gleiches Ergebnis wie für

$$\left\langle (p, \lambda, b), (q, \lambda', c) \left| \partial_\rho (j_A)_a^\rho(z) \right| 0 \right\rangle \Rightarrow \text{Folgere } \partial_\mu (j_A)_a^\mu = -\frac{g^2}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^b F_{\rho\sigma}^c \text{tr}(T_a^A \{T_b^G, T_c^G\})$$

– Einfach, da man nur mit externen Zuständen kontrahieren muss(Rechnung kommt unten)

– Notiz: Für nicht-chirale Theorien(links- und rechtshändige Fermionen mit identischen Eigenschaften) verschwinden Dreiecks-Diagramme wegen C -Symmetrie

– Notiz: Matrixelement mit dem Anomalieterm als externem Strom $(j_A)_a^\mu$ verschwindet nicht

* Könnte das als Widerspruch zum “Anomalien haben nur nicht-perturbative Effekte” verstehen(siehe unten)

* Auflösung: Externer Strom $(j_A)_a^\mu$ trägt Impuls ins System \Rightarrow Impulserhaltung gilt nicht und Argument von unten funktioniert nicht

$$\bullet \left\langle (p, \lambda, b), (q, \lambda', c) \left| \partial_\rho (j_A)_a^\rho(z) \right| 0 \right\rangle = -\frac{g^2}{4\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_\mu^\lambda(\vec{p}) \epsilon_\nu^{\lambda'}(\vec{q}) p_\rho q_\sigma e^{-i(p+q)x} \text{tr}(T_a^A \{T_b^G, T_c^G\})$$

– Vorgehen: Berechne zuerst Matrixelement von $(j_A)_a^\mu$ und nehme dann die Ableitung $\partial_\mu (j_A)_a^\mu$

* Ableitung berechnen ist trivial, da im Impulsraum gerechnet wird

1. Parametrisiere Matrixelement: $\left\langle (p, \lambda, b), (q, \lambda', c) \left| (j_A)_a^\rho(z) \right| 0 \right\rangle = (ig)^2 \epsilon_\mu^\lambda(\vec{p}) \epsilon_\nu^{\lambda'}(\vec{q}) C_{abc}^{\mu\nu\rho}(p, q, l) e^{-i(p+q)z} \Big|_{l=p+q}$

(a) Schreibe Matrixelement um in Greensfunktion mit LSZ-Formel für Eichbosonen:

$$\left\langle (p, \lambda, b), (q, \lambda', c) \left| (j_A)_a^\rho(z) \right| 0 \right\rangle = (ig)^2 \epsilon_\mu^\lambda(\vec{p}) \epsilon_\nu^{\lambda'}(\vec{q}) \int d^4x d^4y e^{-i(px+qy)} \left\langle 0 \left| T \left\{ (j_G)_b^\mu(x) (j_G)_c^\nu(y) (j_A)_a^\rho(z) \right\} \right| 0 \right\rangle$$

(b) Definiere Greensfunktion im Impulsraum $C_{abc}^{\mu\nu\rho}(p, q, l)$ über Greensfunktion im Ortsraum durch

$$(2\pi)^4 \delta^4(p+q-l) C_{abc}^{\mu\nu\rho}(p, q, l) = \int d^4x d^4y d^4z e^{i(-px-qy+lz)} \left\langle 0 \left| T \left\{ (j_G)_b^\mu(x) (j_G)_c^\nu(y) (j_A)_a^\rho(z) \right\} \right| 0 \right\rangle$$

(c) Integriere Definition von $C_{abc}^{\mu\nu\rho}(p, q, l)$ über $\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4}$ und setze Ergebnis in die LSZ-Formel ein \Rightarrow Erhalte Ergebnis von oben

$$\begin{aligned} & - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(p+q-l) C_{abc}^{\mu\nu\rho}(p, q, l) = C_{abc}^{\mu\nu\rho}(p, q, l) \Big|_{l=-(p+q)} \\ & = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int d^4x d^4y d^4z e^{i(-px-qy+lz)} \left\langle 0 \left| T \left\{ (j_G)_b^\mu(x) (j_G)_c^\nu(y) (j_A)_a^\rho(z) \right\} \right| 0 \right\rangle \\ & = \int d^4x d^4y e^{-i(px+qy)} \left\langle 0 \left| T \left\{ (j_G)_b^\mu(x) (j_G)_c^\nu(y) (j_A)_a^\rho(z) \right\} \right| 0 \right\rangle \end{aligned}$$

2. Benutze Feynmanregeln, um $C^{\mu\nu\rho}(p, q, l)$ hinzuschreiben:

$$iC_{abc}^{\mu\nu\rho}(p, q, l) = \frac{i}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\text{tr}(T_a^A \{T_b^G, T_c^G\})}{k^2(k+q)^2(k-p)^2} \text{tr}(\gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu (\not{k} + \not{q}) \gamma^\rho \gamma_5 (\not{k} - \not{p})) + \begin{pmatrix} \mu \leftrightarrow \nu \\ p \leftrightarrow q \\ b \leftrightarrow c \end{pmatrix}$$

– Feynmanregeln für Vertices: $(j_A)_a^\mu$ -Vertex liefert $\gamma^\mu \gamma_5 T_a^A$, $(j_G)_a^\mu$ -Vertex liefert $\gamma^\mu T_a^G$

– Faktor (-1) wegen Fermion-Loop

– Vertexfaktoren und Fermion-Propagatoren werden in Richtung des Fermion-Flusses kontrahiert

– Feynmanregeln ausführlich anwenden liefert

$$iC_{abc}^{\mu\nu\rho}(p, q, l) = (-1) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} \left(\gamma^\mu T_b^G \frac{i \not{k}}{k^2} \gamma^\nu T_c^G \frac{i(\not{k} + \not{q})}{(k+q)^2} \gamma^\rho \gamma_5 T_a^A \frac{i(\not{k} - \not{p})}{(k-p)^2} \right) + \begin{pmatrix} \mu \leftrightarrow \nu \\ p \leftrightarrow q \\ b \leftrightarrow c \end{pmatrix}$$

– Lie-Gruppen-Struktur ist unabhängig vom Rest und muss daher symmetrisch unter $b \leftrightarrow c$ sein $\Rightarrow \text{tr}(T_a^A T_b^G T_c^G) = \frac{1}{2} \text{tr}(T_a^A \{T_b^G, T_c^G\})$

3. Berechnung von linear divergenten Integralen

– Integral ist linear divergent $\sim d^4k \frac{k^3}{k^6} \sim k \Rightarrow$ Benötige Regulator

* Anforderung an Regulator: Soll Eichinvarianz(genauer: Ward-Identitäten) gültig lassen, da das am Ende der Rechnung benötigt wird \Rightarrow Viele Regulatoren fallen raus

- * Dimensional regularization ist ungeschickt, da Erweiterung von γ_5 auf D Dimensionen kompliziert ist
- * Historisch wichtige Regulatoren für dieses Problem: Pauli-Villars, Schwinger-Regulator
- * Wir verwenden Redefinition der Integrationsvariablen als Regulator (ganz anderer Typ Regulator wie die üblichen Kandidaten)
- Achtung bei linear divergenten Integralen: Konstante Verschiebungen der Integrationsvariable in additiven Termen lässt Integral nicht invariant
 - * Bsp: $\int_{\mathbb{R}} dx (f(x+a) - f(x)) = \int_{\mathbb{R}} dx (f(x) - f(x)) = 0$ sollte nicht gelten, wenn $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \text{konstant}$
- Integrationsvariablen-Regulator für normale Funktionen $f(x)$:

$$\int_{\mathbb{R}} dx (f(x+a) - f(x)) = a (f(\infty) - f(-\infty))$$
 - * Annahme: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \text{konstant}$
 - (a) Entwickle $f(x+a)$ in $x+a$ um $a=0$: $f(x+a) = f(x) + \partial_x f(x)a + \mathcal{O}(a^2)$
 - (b) Einsetzen in Integral: $\int_{\mathbb{R}} dx (f(x+a) - f(x)) = a \int_{\mathbb{R}} dx \partial_x f(x)$, höhere Terme in der Entwicklung verschwinden wegen $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \text{konstant}$
 - (c) Kann Integral einer totalen Ableitung berechnen: $a \int_{\mathbb{R}} dx \partial_x f(x) = a [f(x)]_{-\infty}^{\infty} = a (f(\infty) - f(-\infty))$
- Integrationsvariablen-Regulator für Lorentz-Tensoren $f^\Gamma(k)$:

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (f^\Gamma(k+a) - f^\Gamma(k)) = \frac{i}{8\pi^2} a^\rho \lim_{|k_E| \rightarrow \infty} |k_E|^2 (k_E)_\rho f^\Gamma(k_E)$$
 - * Notation: Γ ist Liste von Lorentz-Indizes
 - * Annahme: $\lim_{|k_E| \rightarrow \infty} |k_E|^3 f^\Gamma(k) = \text{konstant}$
 - (a) Entwickle $f^\Gamma(k+a)$ in $k+a$ um $a=0$: $f^\Gamma(k+a) = f^\Gamma(k) + a^\rho \frac{\partial f^\Gamma(k)}{\partial k^\rho} + \mathcal{O}(a^2)$
 - (b) Einsetzen in Integral: $\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (f^\Gamma(k+a) - f^\Gamma(k)) = a^\rho \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\partial f^\Gamma(k)}{\partial k^\rho}$, höhere Terme in der Entwicklung verschwinden wegen $\lim_{|k_E| \rightarrow \infty} |k_E|^3 f^\Gamma(k) = \text{konstant}$
 - (c) Wick-Rotation $a^\rho \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\partial f^\Gamma(k)}{\partial k^\rho} = i a^\rho \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \frac{\partial f^\Gamma(k_E)}{\partial (k_E)^\mu}$ mit $(k_E)^4 = i k^0$, $(k_E)^i = k^i$ und $i \in \{1, 2, 3\}$
 - (d) Verwende Satz von Gauss: $i a^\rho \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \frac{\partial f^\Gamma(k_E)}{\partial (k_E)^\mu} = i a^\rho \lim_{|k_E| \rightarrow \infty} \int \frac{dS_\rho}{(2\pi)^4} f^\Gamma(k_E)$
 - (e) Berechne Integral in 4-dim Kugelkoordinaten $dS_\rho = |k_E|^2 (k_E)_\rho d\Omega_4$ mit $\int d\Omega_4 = 2\pi^2$:

$$i a^\rho \lim_{|k_E| \rightarrow \infty} |k_E|^2 (k_E)_\rho f^\Gamma(k_E) \int \frac{d\Omega_4}{(2\pi)^4} = \frac{i}{8\pi^2} a^\rho \lim_{|k_E| \rightarrow \infty} |k_E|^2 (k_E)_\rho f^\Gamma(k_E)$$

4. Berechne $C_{abc}^{\mu\nu\rho}(p, q, l) (\dots)$

- Ergebnisse (vorläufig reverse engineered)
 - * $p_\mu C_{abc}^{\mu\nu\rho}(p, q, l) = -\frac{i}{4\pi^2} T_{abc} (1-c) \epsilon^{\nu\rho\alpha\beta} q_\alpha l_\beta$, selbes Ergebnis mit Vertauschungen für $q_\nu C_{abc}^{\mu\nu\rho}(p, q, l)$
 - * $l_\rho C_{abc}^{\mu\nu\rho}(p, q, l) = -\frac{i}{4\pi^2} T_{abc} (2c) \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_\alpha q_\beta$
- Trick: Berechne direkt die benötigten Größen $l_\rho C_{abc}^{\mu\nu\rho}(p, q, l), p_\mu C_{abc}^{\mu\nu\rho}(p, q, l) \Rightarrow$ Muss Spuren über 6 γ -Matrizen nicht berechnen und vermeide so die bei der naiven Rechnung nötige Kombinatorik
- Notation: $T_{abc} = \frac{1}{2} \text{tr}(T_a^A \{T_b^G, T_c^G\})$
- Führe Regularisierungsparameter c (beliebig) ein

5. Wähle Regularisierungsparameter c sinnvoll: $c = 1$

- Ward-Identität $p_\mu C_{abc}^{\mu\nu\rho}(p, q, l) = 0$ muss erfüllt sein, da sonst Eichsymmetrie von G verletzt ist und die Theorie damit inkonsistent wird \Rightarrow Erfüllt für $c = 1$
- * Falls A auch geeicht ist, müssen die A -Quantenzahlen der Fermionen so gewählt sein, dass $T_{abc} = 0$

6. Aufsammeln \Rightarrow Finde $\langle (p, \lambda, b), (q, \lambda', c) | \partial_\rho (j_A)_a^p(z) | 0 \rangle = -\frac{g^2}{4\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_\mu^\lambda(\vec{p}) \epsilon_\nu^{\lambda'}(\vec{q}) p_\rho q_\sigma e^{-i(p+q)x} \text{tr}(T_a^A \{T_b^G, T_c^G\})$

- Verwende Ergebnis für $l_\rho C_{abc}^{\mu\nu\rho}(p, q, l)$ und $\partial_\rho C_{abc}^{\mu\nu\rho}(p, q, l) e^{-i(p+q)z} = i l_\rho C_{abc}^{\mu\nu\rho}(p, q, l) e^{-i(p+q)z}$

$$\bullet \langle (p, \lambda, b), (q, \lambda', c) | -\frac{g^2}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^b F_{\rho\sigma}^c \text{tr}(T_a^A \{T_b^G, T_c^G\}) | 0 \rangle = -\frac{g^2}{4\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_\mu^\lambda(\vec{p}) \epsilon_\nu^{\lambda'}(\vec{q}) p_\rho q_\sigma e^{-i(p+q)x} \text{tr}(T_a^A \{T_b^G, T_c^G\})$$

- Fazit: Erhalte selbes Ergebnis wie in direkter Berechnung der Dreiecksdiagramme $\Rightarrow \theta$ -Term beschreibt die Dreiecksdiagramme
- Anmerkungen zur Notation

- * Zustände $|(p, \lambda, a)\rangle$ für Eichboson A_μ^a mit 4-Impuls $p(p^2 = 0)$, Polarisation λ und Eichsymmetrie-Index a
 - * In diesem Abschnitt hängen alle Felder $F_{\mu\nu}^a, A_\mu^a$ von x ab
 - * Alle Felder in der Rechnung hängen von x ab \Rightarrow Schreibe Orts-Argument nicht immer explizit aus
1. Ziehe Konstanten $-\frac{g^2}{32\pi^2}$ und $\text{tr}(T_a^A \{T_b^G, T_c^G\})$ aus dem Matricelement
 2. Berechne Fourier-Entwicklung von $F_{\mu\nu}^a$
 - (a) Normale Feld-Entwicklung $A_\mu^a = \sum_\lambda \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_k}} \left(\epsilon_\mu^{\lambda,*}(\vec{k}) a_{\vec{k}}^{\lambda,a} e^{ikx} + \epsilon_\mu^\lambda(\vec{k}) a_{\vec{k}}^{\lambda,a,\dagger} e^{-ikx} \right) \Big|_{k^2=0}$
 - (b) Im Matricelement nur zwei externe Felder \Rightarrow 2-Eichboson-Term in $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c$ verschwindet im Matricelement
 - (c) Fourier-Entwicklung des Feldstärketensors $F_{\mu\nu}^a \stackrel{\text{in } \langle \cdot \rangle}{=} \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a$

$$= i \sum_\lambda \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_k}} \left(a_{\vec{k}}^{\lambda,a} (k_\mu \epsilon_\nu^{\lambda,*}(\vec{k}) - k_\nu \epsilon_\mu^{\lambda,*}(\vec{k})) e^{ikx} + a_{\vec{k}}^{\lambda,a,\dagger} (k_\nu \epsilon_\mu^\lambda(\vec{k}) - k_\mu \epsilon_\nu^\lambda(\vec{k})) e^{-ikx} \right) \Big|_{k^2=0}$$
 3. Berechne Matricelement: $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \langle (p, \lambda, b), (q, \lambda', c) | F_{\mu\nu}^b F_{\rho\sigma}^c | 0 \rangle = -8\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_\mu^\lambda(\vec{p}) \epsilon_\nu^{\lambda'}(\vec{q}) p_\rho q_\sigma e^{-i(p+q)x}$
 - Rechnung ist lang und wenig lehrreich, skizziere daher nur die nötigsten Schritte
 - (a) $\langle (p, \lambda, b), (q, \lambda', c) | = \sqrt{2E_p} \sqrt{2E_q} \langle 0 | a_{\vec{p}}^{\lambda,b} a_{\vec{q}}^{\lambda',c}$
 - (b) Fourierentwicklung einsetzen

$$\langle (p, \lambda, b), (q, \lambda', c) | F_{\mu\nu}^b F_{\rho\sigma}^c | 0 \rangle = \sum_\alpha \sum_{\alpha'} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_k}} \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{k'}}} \sqrt{2E_p} \sqrt{2E_q} \times \langle 0 | a_{\vec{p}}^{\lambda,b} a_{\vec{q}}^{\lambda',c}$$

$$\times \left(a_{\vec{k}}^{\alpha,b} \dots + a_{\vec{k}}^{\alpha,b,\dagger} (k_\nu \epsilon_\mu^{\alpha,*}(\vec{k}) - k_\mu \epsilon_\nu^{\alpha,*}(\vec{k})) e^{-ikx} \right) \left(a_{\vec{k}'}^{\alpha',c} \dots + a_{\vec{k}'}^{\alpha',c,\dagger} (k'_\sigma \epsilon_\rho^{\alpha'}(\vec{k}') - k'_\rho \epsilon_\sigma^{\alpha'}(\vec{k}') e^{-ik'x}) \right) | 0 \rangle$$
 - Schreibe \dots für Koeffizienten der Vernichtungsoperatoren $a_{\vec{k}}^{\alpha,b}$, da diese sowieso im Matricelement verschwinden
 - (c) Matricelement berechnen mit $[a_{\vec{p}}^{\lambda,b}, a_{\vec{q}}^{\lambda',c,\dagger}] = (2\pi)^3 \delta^{\lambda\lambda'} \delta^3(\vec{p} - \vec{q})$
 - Finde δ 's \Rightarrow In Summen über α, α' und Integralen über \vec{k}, \vec{k}' trägt nur jeweils ein Term bei
 - Finde $(2\pi)^6 \left(\delta^{\alpha\lambda} \delta^{\alpha'\lambda'} \delta^3(\vec{p} - \vec{k}) \delta^3(\vec{q} - \vec{k}') + \delta^{\alpha\lambda'} \delta^{\alpha'\lambda} \delta^3(\vec{q} - \vec{k}) \delta^3(\vec{p} - \vec{k}') \right)$

$$\times (k_\nu \epsilon_\mu^{\alpha,b}(\vec{k}) - k_\mu \epsilon_\nu^{\alpha,b}(\vec{k})) (k'_\sigma \epsilon_\rho^{\alpha',c}(\vec{k}') - k'_\rho \epsilon_\sigma^{\alpha',c}(\vec{k}')) e^{-i(k+k')x}$$
 - (d) Summen und Integrale mit δ 's berechnen \Rightarrow Kombinatorik
 - Koeffizienten der Differentiale $\frac{1}{(2\pi)^3 \sqrt{2E}}$ kürzen sich weg mit Termen aus dem Matricelement
 - Erhalte 8 Terme der Struktur $\epsilon_\mu \epsilon_\nu p_\rho q_\sigma$, die wegen Kontraktion mit $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ alle identisch sind mit dem Wert $-\epsilon_\mu^\lambda(\vec{p}) \epsilon_\nu^{\lambda'}(\vec{q}) p_\rho q_\sigma$
 4. Aufsummieren \Rightarrow Finde oben gegebenes Ergebnis für das Matricelement

9.2.4 Schwinger-Modell – Anomalien in $U(1)$ -Eichtheorie mit einem Fermion in 2 Dimensionen

- Idee: $U(1)$ -Eichtheorie in 2D ist einfachstes denkbare Modell mit chiraler Anomalie \Rightarrow Kann Bild malen
- Verwendetes Modell: $\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} i \not{D} \psi$ mit $D_\mu = \partial_\mu - ig A_\mu$ in 2 Dimensionen
 - Wahl der Clifford-Algebra: $\gamma^0 = \sigma_2, \gamma^1 = -i\sigma_1, \gamma_5 = -\sigma_3$ mit Pauli-Matrizen σ_i
 - * Achtung: Spinoren haben damit nur 2 Komponenten, im Gegensatz zu 4 Komponenten in 4D
 - * Unterscheidung in rechtshändige ($\gamma_5 \psi_R = \psi_R$) und linkshändige ($\gamma_5 \psi_L = -\psi_L$) Fermionen mit γ_5 -Eigenwerten (wie in 4D)
 - Erhaltungsgrößen aus globalen Transformationen
 - * Vektor-Transformation $\psi \rightarrow e^{i\alpha} \psi \Rightarrow$ Strom $(j_V)^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ und Ladung $Q_V = \int dx (j_V)^0$
 - Vektor-Transformation \Rightarrow Links- und rechtshändige Teilchen $\psi_{L,R}$ haben selbe Ladungen
 - Konvention: $Q_{V,L} = Q_{V,R} = 1$
 - * Axialvektor-Transformation $\psi \rightarrow e^{i\alpha\gamma_5} \psi \Rightarrow$ Strom $(j_A)^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi$ und Ladung $Q_A = \int dx (j_A)^0$
 - Axialvektor-Transformation \Rightarrow Links- und rechtshändige Teilchen $\psi_{L,R}$ haben unterschiedliche Ladungen
 - Konvention: $Q_{A,L} = -Q_{A,R} = -1$

- * Fermionfelder $\psi_{L,R}$ sind komplex \Rightarrow Komplex konjugierte Felder(bzw Antiteilchen) haben entgegengesetzte Ladungen
 - Notation: $Q_{V/A,\bar{L}/\bar{R}}$
 - Explizit: $Q_{V,\bar{L}} = Q_{V,\bar{R}} = -1, Q_{A,\bar{L}} = -Q_{A,\bar{R}} = 1$
- Einschränkung: Betrachte Grenzfall $gL \ll 1$, damit Elektrostatis-Effekte keine Rolle spielen und effektiv $A_0 = 0$
 - * Anschaulich: A_0 (Analog zum Coulomb-Potential in 2D) führt zu Elektrostatis-Effekten
 - * Elektrostatis-Effekte sind nicht interessant für chirale Anomalie \Rightarrow Betrachte Grenzfall $gL \ll 1$, damit Elektrostatis-Effekte vernachlässigbar sind
 - Hintergrund: Elektrostatis-Effekte sind proportional zu $gL(\dots)$
 - * Kann diese Vereinfachung auch weglassen \Rightarrow Kompliziertere Rechnung, aber selbes Ergebnis
- Einschränkung: $F_{\mu\nu}$ hat eine extern vorgegebene Zeitabhängigkeit $\Rightarrow A_\mu(x, t) = A_\mu(x)$
 - * Wähle externe Zeitabhängigkeit so, dass A_μ nicht zeitabhängig ist
 - * Formal: Lasse kinetischen Term von A_μ im Lagrangian weg
- Herleitung der Anomalie $\partial_\mu(j_A)^\mu = -\frac{g}{2\pi}\epsilon^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$
 - Anschaulich: $\partial_\mu(j_A)^\mu = -\frac{g}{2\pi}\epsilon^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ ist Äquivalent von $\partial_\mu(j_A)_a^\mu = -\frac{g^2}{32\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}^b F_{\rho\sigma}^c \text{tr}(T_a^A \{T_b^G, T_c^G\})$ für 2D statt 4D und $C = G = U(1)$
- 1. Führe IR-Regulator ein: Endliches Volumen $x \in [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$, periodische Randbedingungen
 - Endliches Volumen ist IR-Regulator, da damit beliebig große Wellenzahlen k verhindert werden
 - Periodische Randbedingungen: $\Phi(t, -\frac{L}{2}) = \Phi(t, \frac{L}{2})$ für $\Phi \in \{\psi, A_\mu\}$
- 2. Arten von Eichtransformationen $A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu\alpha(t, x)$
 - "Kleine" Eichtransformationen: $\alpha(t, x)$ periodisch in x
 - * α muss periodisch in x sein, damit $A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu\alpha$ auch periodische Randbedingungen hat
 - "Große" Eichtransformationen: $\alpha(t, x) = \frac{2\pi}{L}nx$ mit $n \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$
 - * Anschaulich: Große Eichtransformation bewirkt konstante Verschiebung von A_1 wegen $A_0 = 0, \partial_0\alpha = 0, \partial_1\alpha = \frac{2\pi}{L}n = \text{const}$
 - * Große Eichtransformationen verletzen periodische Randbedingungen nicht, da sie nur eine Konstante auf A_1 addieren
 - * Alle Konfigurationen $\{A_1 + n\frac{2\pi}{gL} : n \in \mathbb{Z}\}$ von A_1 sind äquivalent $\Rightarrow A_1$ ist eine Winkelvariable
 - * Beobachtung: Möglichkeit für große Eichtransformationen sind eine Folge des Regulators L , für $L \rightarrow \infty$ verschwinden die großen Eichtransformationen
 - Bezug zu winding number n : Kleine/große Eichtransformationen haben $n = 0/n \neq 0$
- 3. Kann $A_1 = \text{const}$ wählen wegen kleinen Eichtransformationen(?)
- 4. Energieniveaus des Fermionfelds aus der Dirac-Gleichung $i\mathcal{D}\psi = 0$: $E_{k,L} = -\frac{2\pi}{L}k + A_1, E_{k,R} = \frac{2\pi}{L}k - A_1$
 - Diracgleichung $(i\partial_t + \gamma_5(i\partial_x + A_1))\psi = 0 \Rightarrow$ Hamiltonian $H = -\gamma_5(i\partial_x + A_1)$
 - (a) $0 = i\mathcal{D}\psi = i(\gamma^0 D_0 + \gamma^1 D_1)\psi$
 - (b) Multipliziere von links mit γ^0 und verwende $(\gamma^0)^2 = g^{00} = 1, \gamma^0\gamma^1 = \gamma_5 \Rightarrow (i\partial_0 + \gamma_5(i\partial_1 + A_1))\psi$
 - Schreibe Hamiltonian für links- und rechtshändige Felder einzeln:

$$H\psi_L = (i\partial_x + A_1)\psi_L, H\psi_R = -(i\partial_x + A_1)\psi_R$$
 - * Verwende $\gamma_5 = -\sigma_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\psi = \psi_L + \psi_R$ mit $\psi_L = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \psi_R = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$
 - Lese Energie-Eigenfunktionen $\psi_{k,L/R}$ und Energie-Eigenwerte $E_{k,L/R}$ für stationäre Zustände

$$\psi(t, x) = \sum_k e^{-iE_k t} \psi_k(x) \text{ ab: } \psi_{k,L/R}(x) = A_{k,L/R} e^{i\frac{2\pi}{L}kx} \text{ und } E_{k,L} = -\frac{2\pi}{L}k + A_1, E_{k,R} = \frac{2\pi}{L}k - A_1$$
 - Führe UV-Regulator $|E_{k,L/R}| < \Lambda$ ein
 - * Energie-Cutoff ist UV-Regulator, da er beliebig kleine Wellenzahlen k ausschließt
- 5. Erhaltungsgrößen bei großen Eichtransformationen $\alpha = \frac{2\pi}{L}x \Rightarrow A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{2\pi}{gL}$

- Anschaulich: Große Eichtransformationen erzeugen linkshändige Teilchen und rechtshändige Löcher aus dem Vakuum ("Level flow")
 - * Begründung: Die Zustände A_1 und $A_1 + \frac{2\pi}{gL}$ sind nicht unterscheidbar (weil sie über eine Eichtransformation zusammenhängen), aber in $A_1 + \frac{2\pi}{gL}$ enthält einen linkshändigen Teilchen-Zustand und einen rechtshändigen Antiteilchen-Zustand mehr
 - * Gut sichtbar, wenn man die Energieniveaus $E_{k,L/R}$ über A_1 aufträgt und zwei Punkte mit $\Delta A_1 = \frac{2\pi}{gL}$ betrachtet
 - * Benötige UV-Regulator für dieses Argument, da man sonst unendlich viele Energieniveaus unter und über dem Vakuum hat und die Verschiebung eines Energieniveaus damit keinen Unterschied macht ($\infty \pm 1 = \infty$)
 - Betrachte den Spezialfall $n = 1$ von großen Eichtransformationen $\alpha = \frac{2\pi}{L} nx$ mit $n \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$, Diskussion funktioniert genauso für andere große Eichtransformationen
 - * Änderung von Q_V : $\Delta Q_V = Q_{V,L} + Q_{V,\bar{R}} = 1 + (-1) = 0$
 - * Änderung von Q_A : $\Delta Q_A = Q_{A,L} + Q_{A,\bar{R}} = -1 + (-1) = -2$
 - Chirale Anomalie verbindet UV- und IR-Aspekte
 - * IR-Aspekt: An der Oberfläche des Dirac-Sees (kleine Wellenzahlen k) taucht ein Teilchen-Antiteilchen-Paar auf
 - * UV-Aspekt: Für $E \approx \Lambda$ und $E \approx -\Lambda$ entsteht jeweils ein neues Teilchen aus dem Nichts
6. Relation $\partial_\mu (j_A)^\mu = -\frac{g}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ herleiten
- (a) $\Delta Q_A = -2 = -\frac{gL}{\pi} \frac{2\pi}{gL} = -\frac{gL}{\pi} \Delta A_1$
- (b) Teile durch Übergangsdauer Δt und betrachte Grenzfall $\Delta t \rightarrow 0 \Rightarrow \partial_0 Q_A = -\frac{gL}{\pi} \partial_0 A_1$
- (c) Finde Erhaltungsgröße $Q_A + \frac{gL}{\pi} A_1 = \int dx (j_A)^0 + \frac{gL}{\pi} A_1 = \int dx ((j_A)^0 + \frac{g}{\pi} A_1) = \int dx ((j_A)^0 + \frac{g}{\pi} \epsilon^{0\nu} A_\nu)$ und den zugehörigen erhaltenen Strom $(j_A)^\mu + \frac{g}{\pi} \epsilon^{\mu\nu} A_\nu$
- Verwende $\epsilon^{0\nu} A_\nu = \epsilon^{00} A_0 + \epsilon^{01} A_1 = A_1$ wegen $\epsilon^{00} = 0, \epsilon^{01} = 1$
- (d) Berechne Divergenz des erhaltenen Stroms $\partial_\mu ((j_A)^\mu + \frac{g}{\pi} \epsilon^{\mu\nu} A_\nu) = \partial_\mu (j_A)^\mu + \frac{g}{\pi} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu = \partial_\mu (j_A)^\mu + \frac{g}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$
- Verwende $\epsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = 2\epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu$

9.2.5 Physikalische Effekte von Anomalien

- Nützliche Abkürzung: $N_{abc}^{AGG} := \sum_{f_R} \text{tr} T_a^{A_{f_R}} \{T_b^{G_{f_R}}, T_c^{G_{f_R}}\} - \sum_{f_L} \text{tr} T_a^{A_{f_L}} \{T_b^{G_{f_L}}, T_c^{G_{f_L}}\}$
 - Theorie hat AG^2 -Anomalie $\iff N_{abc}^{AGG} \neq 0$
 - N_{abc}^{AGG} ist Verallgemeinerung von $\text{tr} T_a^A \{T_b^G, T_c^G\}$ für mehrere links- und rechtshändige Fermionen
 - Anomaliegleichung hat damit die Form $\partial_\mu (j_A)_a^\mu = -\frac{g^2}{32\pi^2} N_{abc}^{AGG} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^b F_{\rho\sigma}^c$
- Anomalie-Koeffizienten $\text{tr}(T_a^A \{T_b^{G_1}, T_c^{G_2}\})$ berechnen
 - Anschaulich: Anomalie-Koeffizienten sind pure Gruppentheorie-Eigenschaft \Rightarrow Rechnung ist Formsache
 - $A = G_1 = G_2 =: G \Rightarrow \text{tr}(T_a^R \{T_b^R, T_c^R\}) = \frac{1}{2} A(R) d^{abc}$
 - * Definition von $A(R) d^{abc}$ aus Gruppentheorie(...)
 - * Spezialfall: $SU(2)$ hat $d^{abc} = 0 \Rightarrow$ Keine $SU(2)^3$ -Anomalien
 - $T_a^R = \sigma_a$ mit Paulimatrizen σ_a (kann auch andere Normierung wählen)
 - $\text{tr}(\sigma_a \{\sigma_b, \sigma_c\}) = \text{tr} \sigma_a 2\delta_{bc} = 2\delta_{bc} \text{tr} \sigma_a = 0$
 - $A \neq G_1 = G_2 =: G, A = U(1) \Rightarrow \text{tr}(T_a^A \{T_b^{G_1}, T_c^{G_2}\}) = Q_A \text{tr}(T_b^{G_1}, T_c^{G_2})$ mit $U(1)_A$ -Ladung Q_A
 1. Wegen $A \neq G$ haben T_a^A, T_a^G unterschiedliche Freiheitsgrade \Rightarrow Spuren faktorisieren $\text{tr}(T_a^A \{T_b^G, T_c^G\}) = (\text{tr} T_a^A) (\text{tr} \{T_b^G, T_c^G\})$
 2. Eigenwerte von $U(1)$ -Generatoren sind Zahlen $Q_A := T_a^A \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{tr} T_a^A = Q_A$
 - $A \neq G_1 = G_2 =: G, A \neq U(1) \Rightarrow \text{tr}(T_a^A \{T_b^{G_1}, T_c^{G_2}\}) = 0$
 1. Spuren faktorisieren mit gleichem Argument wie $A = U(1) \Rightarrow \text{tr}(T_a^A \{T_b^G, T_c^G\}) = (\text{tr} T_a^A) (\text{tr} \{T_b^G, T_c^G\})$

2. Für jede einfache nichtabelsche Eichtheorie gilt $\text{tr} T_a^A = 0(?)$
- $A \neq G_1 \neq G_2$ und mindestens eine von A, G_1, G_2 nicht-abelsch $\Rightarrow \text{tr}(T_a^A \{T_b^{G_1}, T_c^{G_2}\}) = 0$
 - * Spur verschwindet, da die Gruppen unterschiedlich sind und die Spuren für jede Gruppe einzeln gebildet werden müssen
 - Verwende $\text{tr} T_a^X = 0$ für die nicht-abelschen Gruppen
 - $A \neq G_1 \neq G_2$ und $A, G_1, G_2 = U(1) \Rightarrow \text{tr}(T_a^A \{T_b^{G_1}, T_c^{G_2}\}) = 2Q_A Q_{G_1} Q_{G_2}$
 - * Anschaulich: A, G_1, G_2 sind alles $U(1)$ -Gruppen, aber alle 3 haben unterschiedliche Quantenzahlen für die Fermionen
 - * Alle Generatoren sind Einheitsmatrizen \Rightarrow Spur nicht nötig, Rechnung ist trivial
 - $A = G_1 \neq G_2 \Rightarrow$ Verwende $\text{tr}(T_a^A \{T_b^{G_1}, T_c^{G_2}\}) = \text{tr}(T_a^{G_2} \{T_b^A, T_c^{G_1}\})$ und Ergebnisse von $A \neq G_1 = G_2$
 - * Verwende Zyklizität der Spur $\Rightarrow \text{tr}(T_a^A \{T_b^{G_1}, T_c^{G_2}\}) = \text{tr}(T_a^{G_2} \{T_b^A, T_c^{G_1}\})$
 - * $A = G_2 \neq G_1$ ist derselbe Fall, da Problem symmetrisch unter $G_1 \leftrightarrow G_2$ ist
 - Crosscheck: $\text{tr}(T_a^{A_R} \{T_b^{G_R}, T_c^{G_R}\}) - \text{tr}(T_a^{A_L} \{T_b^{G_L}, T_c^{G_L}\}) = 0$ für vektorartige Symmetrien
 - * In vektorartigen Symmetrien (links- und rechtsändige Felder transformieren sich identisch) sind der erste und der zweite Term gleich und die Differenz verschwindet daher
 - Anmerkung: Mit Ausdrücken der Form " $A = G_1$ " ist gemeint, dass die Gruppen identisch sind (gleiche Lie-Gruppe und gleiche Quantenzahlen)
 - * Bsp im SM: $U(1)_Y = U(1)_Y$ sind identisch, aber $U(1)_Y \neq U(1)_Q$
- Bedeutung von Anomalien: Verändern den θ -Term der Eichtheorie(?)
- Beobachtung: Anomalieterm hat selbe Form wie θ -Term (bekannt aus Eichtheorie)
 - Anomalie-Term ist kein Term im Lagrangian, sondern eine Nicht-Invarianz unter einer Transformation \Rightarrow Anomalieterm kann nicht als Lagrangian-Term behandelt werden
 - * Anomalie-Term ändert aber einen Lagrangian-Term, daher erwartet man von Anomalien dieselben Effekte wie vom entsprechenden Lagrangian-Term
 - θ -Term in Eichtheorie hat keine Effekte in Störungstheorie, kann aber nicht-perturbative Prozesse verursachen
- Änderung der Erhaltungsgröße durch topologische Effekte(?)

9.2.6 Globale anomale Symmetrien

- Globale Symmetrie ist nicht spontan gebrochen und Anomaliekoeffizient verschwindet nicht \Rightarrow Globale Symmetrie ist explizit gebrochen durch die chirale Anomalie
 - Explizite Symmetriebrechung hat physikalische Effekte
 - Physikalische Effekte sind nicht-perturbativ
 - * Folgerung: Anomale Effekte können nicht durch perturbative QFT (Feynmandiagramme etc) beschrieben werden
 - Aber: Kann effektive Theorie konstruieren, die die anomalen Effekte perturbativ behandelt (zB für Sphalerons)
 - * Begründung:
 1. Anomalie-Term kann umgeschrieben werden in totale Ableitung $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^a F_{\rho\sigma, a} = \partial_\mu K^\mu$ mit $K^\mu = 2\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (A_\nu^a F_{\rho\sigma, a} - \frac{g}{3} f_{abc} A_\nu^a A_\rho^b A_\sigma^c)$
 2. Feynmanregel für Anomalie-Term enthält Faktor $\partial_\mu e^{ix \sum_i p_i} \propto \sum_i p_i = 0$
 - Bsp: B -Verletzung im SM durch Sphalerons aus $U(1)_B SU(2)_L^2$ -Anomalie
- Spontan gebrochene globale Symmetrie mit Anomalie unter einer Eichsymmetrie \Rightarrow Goldstonebosonen der spontanen Symmetriebrechung koppeln an θ -Term der Eichfelder
 - Anwendung: Chirale Anomalien machen keine explizite Symmetriebrechung, wenn die Theorie schon spontan gebrochen ist

- * Begründung: Lagrangian ist wegen dem Term $\mathcal{L}_{\Pi FF}$ durch **SSB** nicht mehr invariant unter der chiralen Symmetrie, die Änderung in $\mathcal{L}_{\Pi FF}$ hebt sich aber per Definition genau mit der Änderung durch die Anomalie weg
- * Explizite Rechnung
 1. Neues Transformationsverhalten: $\mathcal{L} \xrightarrow{A} \mathcal{L} - A$ in $S = \int d^4x \mathcal{L}$ mit $A = \frac{g^2}{32\pi^2} N_{abc}^{AGG} \alpha^a \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^b F_{\rho\sigma}^c$
 2. Analog zur Fujikawa-Methode: $\mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{iS} \xrightarrow{A} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp \left\{ i \left(S - \int d^4x A + \alpha^a \partial_\mu (j_A)_a^\mu \right) + i \int d^4x A \right\} = \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \left\{ iS + \int d^4x \alpha^a \partial_\mu (j_A)_a^\mu \right\} \Rightarrow \partial_\mu (j_A)_a^\mu = 0$
- Herleitung des Kopplungsterms $\mathcal{L}_{\Pi FF} = -\frac{g^2}{32\pi^2} \frac{\Pi^a}{f_\Pi} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^b F_{\rho\sigma}^c \text{tr}(T_a^A \{T_b^G, T_c^G\})$
 - * Betrachte globale Transformation $\psi \rightarrow e^{i\alpha_a(T_A)^a} \psi$
 - 1. Symmetrie A ist spontan gebrochen \Rightarrow Erhalte Goldstonebosonen Π_a mit Transformationsverhalten $\Pi_a \rightarrow \Pi_a + f_\Pi \alpha_a$
 - * f_G ist Goldstoneboson-Zerfallskonstante
 - 2. Geschickte Redefinition der Fermionfelder, sodass sie invariant unter Transformationen sind: $\psi := \psi' = e^{-i\Pi_a(T_A)^a/f_G} \psi$
 - * Rechnung: $\psi' = e^{-i\Pi_a(T_A)^a/f_\Pi} \psi \rightarrow e^{-i(\Pi_a + f_\Pi \alpha_a)(T_A)^a/f_\Pi} e^{i\alpha_a(T_A)^a} \psi = e^{-i\Pi_a(T_A)^a/f_G} \psi = \psi'$
 - 3. Verwende Noethertheorem $\partial_\mu (j_A)_a^\mu = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \alpha^a} \Rightarrow \partial_\mu (j_A)_a^\mu = f_\Pi \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Pi^a}$
 - * Rechnung: $\partial_\mu (j_A)_a^\mu = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \alpha^a} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \Pi^b} \frac{\delta \partial_\mu \Pi^b}{\delta \alpha^a} + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Pi^b} \frac{\delta \Pi^b}{\delta \alpha^a} = f_\Pi \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Pi^a}$
 - * Verwende $\frac{\delta \Pi^b}{\delta \alpha^a} = f_\Pi \delta_a^b$ wegen $\Pi_a \rightarrow \Pi_a + f_\Pi \alpha_a$, $\frac{\delta \partial_\mu \Pi^b}{\delta \alpha^a} = 0$ wegen $\partial_\mu \Pi^b \rightarrow \partial_\mu \Pi^b$ mit $\partial_\mu \alpha_a = 0$ für globale Transformationen
 - 4. Habe auch andere Relation für $\partial_\mu (j_A)_a^\mu$: $\partial_\mu (j_A)_a^\mu = -\frac{g^2}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^b F_{\rho\sigma}^c \text{tr}(T_a^A \{T_b^G, T_c^G\})$
 - 5. Fazit: Der Lagrangian enthält einen Term $\mathcal{L}_{\Pi FF} = -\frac{g^2}{32\pi^2} \frac{\Pi^a}{f_\Pi} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^b F_{\rho\sigma}^c \text{tr}(T_a^A \{T_b^G, T_c^G\})$
 - * Begründung: Dieser Term erfüllt $f_\Pi \frac{\delta \mathcal{L}_{\Pi FF}}{\delta \Pi^a} = -\frac{g^2}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^b F_{\rho\sigma}^c \text{tr}(T_a^A \{T_b^G, T_c^G\})$
 - * Einziger anderer Π^a -abhängiger Term im Lagrangian ist kinetischer Term der Π^a , und der hängt nur von $\partial_\mu \Pi^a$ ab
- Andere Perspektive: Noetherstrom der durch Anomalie gebrochenen Symmetrie erzeugt Goldstonebosonen $\langle 0 | \partial_\mu (j_A)_a^\mu(x) | \Pi^a(p) \rangle = -i f_\Pi p_\mu e^{-ipx}$
 1. Nur Π_a transformiert sich unter globaler Symmetrie \Rightarrow Noethertheorem liefert $(j_A)_a^\mu = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \Pi^b} \frac{\delta \Pi^b}{\delta \alpha^a}$
 - * Verwende Feldbasis, in der Fermionen ψ sich nicht unter der globalen Symmetrie transformieren (siehe oben)
 - * Verwende $\Pi_a \rightarrow \Pi_a + f_\Pi \alpha_a$ mit $\alpha_a \ll 1$ im Noethertheorem
 2. Rechne Term aus: $\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \Pi^b} \frac{\delta \Pi^b}{\delta \alpha^a} = f_\Pi \partial^\mu \Pi_a$
 - * $\frac{\delta \Pi^b}{\delta \alpha^a} = f_\Pi \delta_a^b$ wegen $\Pi_a \rightarrow \Pi_a + \alpha_a$
 - * $\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \Pi^b} = \partial^\mu \Pi_b + \dots$: Term $\partial^\mu \Pi_b$ aus kinetischem Term von Π^b im Lagrangian, erhalte evtl weitere Terme ... durch $\partial_\mu \Pi_b$ -Kopplungen in Wechselwirkungstermen (fallen später raus)
 3. $\langle 0 | (j_A)_a^\mu(x) | \Pi^a(p) \rangle = \langle 0 | f_\Pi \partial_\mu \Pi_a(x) + \dots | \Pi^a(p) \rangle = -i f_\Pi p_\mu e^{-ipx}$
 - * Berechne Matrixelement: Setze Fourierdarstellung von $\Pi_a(x)$ (skalares Feld) und $|\Pi^a(p)\rangle = \sqrt{2E_p} a_p^{a\dagger} |0\rangle$ ein und verwende Kommutatorrelationen
 - * ... -Terme fallen weg, da sie aus Wechselwirkungstermen mit $\partial_\mu \Pi_b$ -Kopplung kommen (weitere Felder außer Π_b beteiligt, verschwindet daher in $\langle 0 | \dots | \Pi^a(p) \rangle$)

9.2.7 Geeichte anomale Symmetrien

- Theorien mit geeichten anomalen Symmetrien sind inkonsistent
 - Formales Argument: Ward-Identität der Eichtheorie durch Anomalie-Effekte verletzt \Rightarrow Verletzung von Unitarität
 - * Verletzung von Ward-Identitäten führt zu Verletzung von Unitarität(?)
 - Ward-Identitäten versichern, dass die Eichfelder die richtige Anzahl an Freiheitsgraden haben \Rightarrow Ward-Identitäten sind absolut notwendig für konsistente Theorie

- * Einfaches Argument für $U(1)$ -Eichtheorie
 - Ward-Identität: $p_\mu M^\mu = 0$ für alle Matrixelemente $\epsilon_\mu M^\mu$ mit Eichfeldern ϵ_μ
 - Rechnung für Dreiecksdiagramm liefert $p_\mu C_{abc}^{\mu\nu\rho} \neq 0 \Rightarrow$ Ward-Identität für dieses Diagramm ist verletzt
- * Einfluss von Anomalien auf allgemeine Ward-Identitäten(?)
- Anomaliefreiheit als Bedingung für Konstruktion von Eichtheorien
 - Argument: Für eine Menge von Eichgruppe $\{G_i\}$ müssen die Generatoren $T_a^{G_i}$ der Fermionen unter den Eichtransformationen so gewählt sein, dass der Anomaliekoeffizient $\sum_f \text{tr} \left(T_a^{G_i, f, R} \{T_b^{G_j, f, R}, T_c^{G_k, f, R}\} - T_a^{G_i, f, L} \{T_b^{G_j, f, L}, T_c^{G_k, f, L}\} \right)$ für jede Kombination (i, j, k) verschwindet
 - * Wenn das nicht
- Spezialfälle (... Tong)
 - Anomalien in $U(1)$ -Eichtheorie
 - Anomalien in nichtabelscher Eichtheorie
 - Gemischte Anomalien für direkte Produkte von Eichgruppen
 - Gemischte Anomalien mit Gravitation

9.2.8 't Hooft Anomalien

- 't Hooft Anomalie = Anomalie AG^2 mit 3 globalen Symmetrien
 - Anschaulich: 3 globale Symmetrien in AG^2 mit $N_{abc}^{AGG} \neq 0$
 - * 't Hooft Anomalien haben keine physikalischen Effekte, da G keine Eichfelder hat
 - * Aber: Kann 't Hooft Anomalien verwenden für 't Hooft Anomaly Matching
 - Idee: Kein Unterschied zwischen 3 globalen Symmetrien und 3 schwach geeichten Symmetrien
 - * Andere Formulierung: Kein Unterschied zwischen 't Hooft Anomalie mit schwach geeichten Symmetrien und Eichanomalien
 - Formale Beschreibung einer "schwach geeichten Symmetrie"
 - * Führe Eichfelder ein mit Kopplung $g \ll 1$
 - $g \ll 1 \Rightarrow$ Prozesse mit Eichbosonen haben keinen physikalischen Effekt
 - * Führe zusätzliche masselose Fermionen(spectator fermions) mit passend gewählten Quantenzahlen ein
 - Wähle Anzahl und Quantenzahlen der spectator fermions so, dass sie nur an die Eichfelder koppeln und die (nun geeichte) Theorie keine Eich-Anomalien hat(mit beliebig vielen spectator fermions kein Problem): $N_{abc}^{AGG} + (N_{abc}^{AGG})_{sp} = 0$ mit Beitrag N_{abc}^{AGG} durch normale Fermionen und $(N_{abc}^{AGG})_{sp}$ durch spectator fermions
 - Verwende spectator fermions in der Argumentation nicht weiter, sie werden nur dazu benötigt, die Eichanomalie zu verhindern
 - Sinn davon, 't Hooft Anomalien zu betrachten: 't Hooft Anomaly Matching
 - * 't Hooft Anomalien sind ein sehr abstraktes Konzept... aber haben eine nützliche Anwendung
 - Typisches Anwendungsbeispiel: $A = G$
 - * Kann auch 3 verschiedene Symmetrien A, G_1, G_2 haben, Argumentation funktioniert analog
 - * Für beliebige Kombinationen (A, G_1, G_2) gibt es immer eine 't Hooft Anomalie mit $A = G_1 = G_2 \Rightarrow$ Fall $A = G$ ist besonders wichtig
- 't Hooft Anomaly Matching
 - Anwendungsbereich: Stark gekoppelte Eichtheorien mit chiralen Fermionen
 - * Physikalische Aussagen für solche Theorien sind schwierig, da man keine Störungstheorie verwenden kann

- Grundidee: Anomalien ändern sich nicht bei einem Phasenübergang
 - * Konkret: Anomaliekoeffizient vor und nach Phasenübergang müssen identisch sein
 - * Betrachte Phasenübergänge von schwach(elementare Teilchen) zu stark (composite Teilchen) gekoppelten Theorien
 - * Phase mit $\alpha \ll 1$: Anomalie ist einfach zu sehen, da Fermionen sich unter fundamentaler Darstellung der jeweiligen Gruppe transformieren
 - * Phase mit $\alpha \gtrsim 1$: Anomalie muss immer noch da sein \Rightarrow Wie kommt sie zum Ausdruck
- Anwendung von 't Hooft Anomaly Matching: Vorhersage von spontaner Symmetriebrechung
 - Argument: Benötige $n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ composite Fermionen in einer bestimmten Darstellung, um den richtigen Anomaliekoeffizient zu erhalten \Rightarrow Symmetrie muss für $\alpha \gtrsim 1$ spontan gebrochen sein
 - * Schwierigkeit: Nachrechnen, ob composite Fermionen mit richtigen Quantenzahlen konstruiert werden können
 - Szenario 1: Symmetrie ist nicht spontan gebrochen
 - * Anschaulich: Finde nicht-triviale Bedingung $N_{abc}^{AGG} = (N_{abc}^{AGG})_{\text{comp}}$ an Quantenzahlen/Darstellungen der composite Fermionen
 - * Anomaliefreiheit durch passende Wahl der Quantenzahlen der composite Fermionen bzw $N_{abc}^{AGG} = (N_{abc}^{AGG})_{\text{comp}}$
 - $N_{abc}^{AGG} / (N_{abc}^{AGG})_{\text{sp}}$ ist Anomaliekoeffizient durch fundamentale Fermionen für $\alpha \ll 1$ /composite Fermionen für $\alpha \gtrsim 1$
 - Spectator fermions mischen nicht mit normalen Fermionen \Rightarrow Composite spectator fermions für $\alpha \gtrsim 1$ haben denselben Anomaliekoeffizient $(N_{abc}^{AGG})_{\text{sp}}$
 - Szenario 2: Symmetrie ist spontan gebrochen
 - * Anschaulich: \mathcal{L}_{IFF} kümmert sich um die Anomalie unabhängig von $(N_{abc}^{AGG})_{\text{comp}}$
 - * Anomaliefreiheit durch Goldstoneboson-Eichboson-Kopplungsterm \mathcal{L}_{IFF}
 - \mathcal{L}_{IFF} produziert unter axialen Transformationen einen Zusatzterm, der sich mit dem Term aus der chiralen Anomalie kürzt
 - * Präziser: Symmetrie ist dynamisch gebrochen(vev ist composite Operator)
- Andere Anwendung: Seilberg Dualities in supersymmetrischen Eichtheorien(...)

9.2.9 Globale $SU(2)$ -Anomalien (...)

9.2.10 Andere Arten von Anomalien (...)

- Skalen-Anomalie (...)
- Anomalien in diskreten Symmetrien (...)

Kapitel 10

Effektive Feldtheorie

10.1 Das EFT-Weltbild

10.1.1 Grundlagen

- Effektive Feldtheorie := Feldtheorie nach den Kriterien 2.2.1 ohne die Forderung "Renormierbarkeit"
- **EFT**-Lagrangian $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{free}} + \sum_{n=3, i}^{n_{\text{max}}} \frac{c_{n,i}}{\Lambda^{n-4}} O_{n,i}$
 - Notation: Index n für Massendimension des Operators $O_{n,i}$, Index i zählt Operatoren in \mathcal{L} mit selber Massendimension
 - Wilson-Koeffizienten: (Dimensionslose) Koeffizienten $c_{n,i}$
 - Massenskala Λ ist Skala der UV-Effekte, die die Operatoren generieren
 - * Kann auch mehrere Massenskalen Λ_i verwenden (dann wird die Notation aber hässlich)
 - n_{max} beschreibt Genauigkeit des **EFT**-Lagrangians
 - * Betrachte Energien E mit $E \ll \Lambda \Rightarrow$ Habe kleinen Parameter $\frac{E}{\Lambda} \ll 1$
 - * Genauigkeit n_{max} kann beliebig erhöht werden
- Die Kunst: Finde **EFT** mit den relevanten Freiheitsgraden (= Feldern)
 - Fokus auf die wesentlichen Freiheitsgrade \Rightarrow Vermeide unnötigen Aufwand
 - * Kann auch mit der vollständigen Theorie rechnen, das ist aber komplizierter
 - Bsp für nicht-relevante Freiheitsgrade
 - * Teilchen X zu schwer (typisch): Betrachte Prozesse bei Energie E mit $E < m_X \Rightarrow$ Teilchen X kann nicht produziert werden
 - * Teilchen X zu leicht (?)
- **EFT**-Weltbild: Jede Feldtheorie ist eine **EFT**
 - Argument: Es gibt keinen physikalischen Grund, warum Renormierbarkeit ein Kriterium für **QFT**s sein sollte
 - Folgerung: Zu jeder Theorie gehört ein Gültigkeitsbereich (Energieintervall)
 - * Außerhalb des Gültigkeitsbereichs muss eine andere **EFT** verwendet werden
 - * Klassifiziere Theorien nach Größe ihres Gültigkeitsbereichs
 - "UV-Theorie" = Gültige Theorie bei hohen Energieskalen
 - "IR-Theorie" = Gültige Theorie bei geringen Energieskalen
 - * Gute **EFT** = Relativ großer Gültigkeitsbereich mit relativ geringer Anzahl an Freiheitsgraden
 - Folgerung: Renormierung von nicht-renormierbaren Theorien ist ein wichtiges Thema
 - Erhält man bei hohen Energien irgendwann eine renormierbare Theorie?
 - * Naiv: Antwort auf diese Frage ist egal, da solch eine Theorie auch durch **EFT** beschrieben wird
 - * Unwahrscheinlich, da Quantengravitation per Definition nicht-renormierbar ist (?)
 - * Beschreibung bei hohen Energien könnte sich dramatisch ändern (zB Stringtheorie)

- Matching = Übergang zwischen zwei EFTs
 - Formal: Bestimme “Matching conditions” (Beziehungen zwischen den Wilson-Koeffizienten der beiden Theorien)
- Top-Down vs Bottom-Up
 - Anschaulich: Zwei Zugänge, wie man EFTs nutzen kann, um NP-Effekte zu untersuchen
 - Top-Down-Zugang: NP-Theorie bekannt \Rightarrow Matching NP-Theorie/bekannte Theorie
 - * Kann mit EFT Schranken an NP-Parameter bestimmen
 - * Schwierigkeit: Matching
 - Bottom-Up-Zugang: NP-Theorie unbekannt \Rightarrow Beschreibe bekannte Theorie bei Energie E , berücksichtige NP-Effekte mit Unsicherheit ϵ
 - * Anschaulich: “Parametrizing ignorance”
- 1. Naiv: Effekte der Massendimension- n -Operatoren $\sum_i \frac{c_{n,i}}{\Lambda^n} \mathcal{O}_{n,i}$ bei Energie E sind unterdrückt mit $\left(\frac{E}{\Lambda}\right)^n$
- 2. Maximale Genauigkeit $\epsilon \Rightarrow$ Benötige nur Operatoren bis Massendimension n_ϵ mit $\epsilon \stackrel{!}{=} \left(\frac{E}{\Lambda}\right)^{n_\epsilon}$ bzw. $n_\epsilon = -\frac{\log \epsilon}{\log(M/E)}$
 - * Notiz: Kann E, ϵ frei wählen
 - * Es gibt nur endlich viele Operatoren mit Massendimension $n < n_\epsilon$

10.1.2 Decoupling

- Decoupling = Effekte bei Energieskala E' mit $E' \gg E$ (oder $E' \ll E$?) sind irrelevant für Effekte bei Energieskala E
 - Decoupling ist formale Grundlage für das EFT-Weltbild
- Decoupling theorem (Appelquist, Carazzone, 1975) (...)

10.1.3 Power Counting (...)

- Power counting = Klassifizierung von Termen im Lagrangian nach der Skalierung mit E (?)
- Meist mehrere Entwicklungsparameter \Rightarrow Power counting ist nicht-trivial
 - Entwicklung in Ableitungsoperatoren
 - Entwicklung in Feldern
 - Entwicklung in “large logs”

10.1.4 Naturalness – The paradigm of $\mathcal{O}(1)$ numbers

- Annahme: Alle dimensionslosen Parameter einer Theorie sind $\mathcal{O}(1)$ Zahlen
 - Anschaulich: Naturalness ist eine optionale Annahme, die die Vorhersagefähigkeit einer Theorie erhöht
 - * Naturalness ist kein Theorie-Argument, sondern ein Schönheits-Argument
 - * Ohne naturalness gibt es keinen Grund, warum höherdimensionale Operatoren unterdrückt sein sollten (ihre Wilson-Koeffizienten könnten immer so groß sein, dass sie gegen die Skalenunterdrückung gewinnen)
 - Plausibilisierung: Falls in der Theorie extrem kleine/große Zahlen auftauchen, bedürfen sie einer tieferen Erklärung (Schönheits-Argument)
 - Naturalness problem = Dimensionsloser Parameter ist keine $\mathcal{O}(1)$ -Zahl, sondern extrem klein/groß
 - * Bessere Bezeichnung: “puzzle” – Diese Probleme sind ein Konflikt zwischen uns und unserem Bild eines einfachen Universums (das Universum könnte auch kompliziert sein)

- * Bsp: Strong CP problem ($\theta_c \lesssim 10^{-10}$), flavour problem (Hierarchie in Yukawa-Kopplungen), hierarchy problem (Higgs hat kleine Masse), cosmological constant problem ($\Lambda \ll m_P^2$)
- * Dynamische Lösung: Identifiziere Zahl als Skalarfeld, dessen Wert durch ein Potential festgelegt wird
 - Bsp: QCD axion, relaxion
- Naturalness von Wilson-Koeffizienten
 - Argument: Parametrisiere effektive Operatoren als $\frac{c_n}{\Lambda^{n-4}} O_n$ mit Energieskala Λ des erzeugenden Effekts \Rightarrow Erwarte $c_n \sim 1$
 - Weiterführung der Naturalness-Idee: Dimensionslose Parameter sind zufallsverteilt, Natur wählt zufällig einen der Werte aus – Kann Statistik machen
 - * Parameter mit Wertebereich $\in \mathbb{R}$: Parametrisierung mit Log-Normal-Verteilung
 - Bsp: Yukawa-Kopplungen
 - * Parameter mit endlichem Wertebereich: Parametrisierung mit Gleichverteilung
 - Bsp: θ_c
- Naturalness von Teilchenmassen
 - Argument: Erwarte, dass Massenskala eines Felds dieselbe Ordnung hat wie die dominierenden Quantenkorrekturen
 - * Anschaulich: Vorhersage für Parameter der Theorie (Masse), die von anderen Parametern der Theorie (Parameter der Teilchen im Loop) abhängt \Rightarrow Tolles Konzept, da es einen Konsistenzcheck der Parameter erlaubt bzw die Anzahl der unabhängigen Parameter weiter einschränkt
 - * Achtung: Naturalness ist kein Renormierungs-Konzept (“Quantenkorrekturen sind divergent”), sondern ein **EFT**-Konzept (“erwarte generische schwere Teilchen bei hohen Massenskalen”)
 - Natürliche Massenskala eines Skalars $m = \Lambda$
 - * Begründung: Widerspruchs-“Beweis”
 - Situation: Betrachte Theorie mit leichtem Skalar (Masse m) und generischem schwerem Teilchen (Masse M)
 - 1. Quantenkorrekturen zum Propagator des leichten Skalars haben die Form $\Delta m^2 = -\alpha M^2$ (wegen Dimensionsanalyse)
 - 2. Renormierte Masse hat die Form $m_r^2 = m^2 + \Delta m^2 = m^2 - \alpha M^2$ (für Lagrangian-Parameter $m^2 = \alpha M^2 + m_r^2$ mit $\alpha > 0$)
 - 3. $M^2 \gg m_r^2 \Rightarrow m^2 = \alpha M^2 + m_r^2$ ist Fine-Tuning und damit ungewollt
 - Lösung: Wähle $M^2 \sim m_r \sim m \Rightarrow$ Kein fine-tuning benötigt
 - * Bsp SM-Higgs und Quantengravitation: $m_r \sim 100 \text{ GeV}$, $M \sim 10^{19} \text{ GeV} \Rightarrow m^2 = \alpha 10^{38} (1 + \frac{1}{\alpha} 10^{-34}) \text{ GeV}^2$ ist $\sim 10^{-34}$ fine-tuning Effekt
 - * Ausnahme: Skalar ϕ ist Goldstoneboson \Rightarrow Massenterm bricht Shift-Symmetrie $\phi \rightarrow \phi + \alpha$
 - Natürliche Massenskala eines Dirac-Fermions $m = 0$
 - * Begründung: Massenterm bricht chirale Symmetrie explizit
 - Natürliche Massenskala eines Majorana-Fermions $m = \Lambda$
 - * Gleiches Argument wie für Skalarfeld – Keine Symmetrie, die die Masse des Teilchens schützt
 - Natürliche Massenskala eines Eichbosons: $m = 0$
 - * Begründung: Massenterm bricht Eichsymmetrie explizit
 - * Natürliche Massenskala für massive Eichbosonen aus Higgs-Mechanismus: Energieskala des **SSB**-Mechanismus
 - Hierarchy problem/Naturalness problem/Fine tuning problem: Theorie enthält Skalare, die keine Goldstone-Bosonen sind
 - * Elegante Lösung: Jeder leichte Skalar hat eine Symmetrie, die Massenterme verbietet
 - Bsp: **SSB** (Goldstonebosonen haben Shift-Symmetrie), Supersymmetrie (Superpartner haben chiralen Symmetrie)

- * Naive Lösung: Veltman condition (Quantenkorrekturen kürzen sich gegenseitig)
 - Veltman condition ist unnatürlich, da man keine Beziehung zwischen den Effekten erwartet, die die Quantenkorrekturen verursachen
- * Naive Lösung: Schwere Teilchen haben keine Tree-Level-Kopplungen an leichte Teilchen
 - Hierarchy problem dadurch nicht gelöst, sondern nur in höhere Ordnungen Störungstheorie verschoben
- * Sophisticated Lösung: Mache Skalar-Masse zu einem neuen Feld (Relaxion)

10.1.5 Abschätzungen des Parameterraums mit Dimensionsanalyse

- Cutoff Λ der Theorie abschätzen
 - Argument: Bei $E = \Lambda$ sind Tree-Level- und Loop-Beiträge gleich relevant
 - * Für $E \lesssim \Lambda$ dominieren Tree-Level-Beiträge \Rightarrow Theorie ist perturbativ
 - Naive Erwartung: $\Lambda \sim 4\pi f$ mit größter Skala der Theorie f
 - * Erhalte Faktor $\sim 4\pi$ aus Loop-Integration
 - Wilson-Koeffizienten abschätzen (?)
 - Funktioniert nur für Theorien mit Feldern mit Skalenbezug (zB Goldstonebosonen)
- Schreibe Felder mit Skalenbezug als dimensionslose Felder um
 - Bsp: Goldstonebosonen Π tauchen immer als $\frac{\Pi}{v}$ mit dem **vev** v auf \Rightarrow Führe dimensionslose Größe $\tilde{\Pi} := \Pi/v$ ein
 - Restliche Dimensionseffekte verursacht durch Massen m der schweren Teilchen in der Theorie
 - Annahmen über Massen (?)
 - Definiere dimensionslose Größen für restliche Felder $\tilde{\phi} := \frac{\phi}{m}$
 - Definiere dimensionslose Größen für Ableitungen $\tilde{\partial} := \frac{\partial}{m}$
 - Konstruiere dimensionslosen Lagrangian \mathcal{L}' aus dimensionslosen Größen
 - Bestimme Lagrangian \mathcal{L} aus \mathcal{L}' mit $\mathcal{L} = \alpha \mathcal{L}'$
 - Bestimme α aus Bedingung, dass kinetische Terme der Felder mit Skalenbezug richtig normiert sind
 - Bsp Goldstonebosonen: $\alpha = m^2 f^2$ für kinetischen Term $(\tilde{\partial}_\mu \tilde{\Pi})^2 = m^2 f^2 (\partial_\mu \Pi)^2$

10.1.6 Globale Symmetrien werden bei hohen Energieskalen explizit gebrochen

- **EFT**-Weltbild: Globale Symmetrien werden durch unbekannte Effekte bei hohen Energieskalen explizit gebrochen
 - Argument: Es gibt keinen tieferen Grund für globale Symmetrien \Rightarrow Globale Symmetrien müssen explizit gebrochen sein (die Frage ist, wie stark der Effekt unterdrückt ist)
 - * Notiz: Eichsymmetrien haben einen tieferen Grund – Die Existenz eines masselosen Eichbosons
 - Symmetriebrechende Operatoren sind unterdrückt mit der Skala der symmetriebrechenden Effekte
 - Konvention: Spreche immer noch von “globaler Symmetrie”, auch wenn der Ausdruck streng genommen falsch ist (da die Symmetrie gebrochen sind)
- Alle globalen Symmetrien werden durch Quantengravitation-Effekte explizit gebrochen
 - Naives Argument: Es gibt keine fundamentale Begründung für globale Symmetrien \Rightarrow Globale Symmetrien sind nur näherungsweise Symmetrien (explizit gebrochen durch stark unterdrückte Operatoren)
 - * Argument funktioniert nicht für Eichsymmetrien: Eichsymmetrie ist wichtig, um eine konsistente Theorie zu erhalten (...)

- Gedankenexperiment: Virtuelle schwarze Löcher können Ladungen von globalen Symmetrien absorbieren (siehe [Susskind et al, 1995](#), [Alvey, Escudero, 2020](#))
 - * Achtung: Das ist kein formales Argument, sondern ein Gedankenexperiment
 - Es gibt keine konsistente Theorie für Quantengravitation \Rightarrow Kann das nicht formalisieren
- 1. Wenn Quantengravitation-Effekte wichtig sind, spielen virtuelle schwarze Löcher eine große Rolle
- 2. Schwarze Löcher können Information vernichten, indem sie Teilchen (und damit Ladung) absorbieren \Rightarrow Schwarze Löcher können Erhaltungsgrößen globaler Symmetrien verletzen
 - * Bsp Baryonzahlerhaltung (kontinuierlich): Bei einem Prozess wird ein Baryon-Antibaryon-Paar erzeugt, eines der Baryonen wird von einem virtuellen schwarzen Loch absorbiert \Rightarrow Prozess verletzt Baryonzahlerhaltung
 - * Bsp Axion mit Z_2 -Symmetrie (diskret): Bei einem Prozess werden 2 Axions erzeugt, eines wird von einem virtuellen schwarzen Loch absorbiert \Rightarrow Prozess verletzt Z_2 -Symmetrie
 - * Schwarze Löcher geben Energie durch Hawking-Strahlung ab und verdampfen irgendwann \Rightarrow Von den globalen Ladungen bleibt nichts übrig
- 3. Notiz: Schwarze Löcher können keine Erhaltungsgrößen von lokalen Symmetrien verletzen
 - * Formal (für QED, funktioniert ähnlich für andere Eichsymmetrien): Wegen dem Gaußschen Gesetz $\partial_i E_i = \rho$ wird nach Absorption der Ladung im schwarzen Loch ein EM-Feld um das schwarze Loch herum aufgebaut
 - * Andere (spekulativere) Möglichkeit, durch Gravitationseffekte globale Symmetrien zu verletzen: Wurm Löcher (nichtperturbative Effekte) transportieren Ladung in andere Universen (?)
- Folgerung: Es gibt keine exakten globalen Symmetrien – Globale Symmetrien werden durch die Wilson-Koeffizienten charakterisiert, die ihre explizite Brechung beschreiben

• Spurions

- Anschaulich: Spurions sind formale Methode, um explizit gebrochene globale Symmetrien zu beschreiben
- Grundlage: Gebe einer symmetriebrechenden Kopplungskonstante das richtige Transformationsverhalten \Rightarrow Symmetrie wieder exakt
 - * Anschaulich: “Die Symmetrie ist nicht exakt... aber wenn sie exakt wäre, würde der Lagrangian genau so aussehen” (?)
 - * Bezeichne die Kopplungskonstante mit Transformationsverhalten als “Spurion”
 - * Physikalischen Interpretation: Spurion ist ein schweres Feld, das bei der betrachteten Energieskala einen **vev** hat
 - Bsp: Fermion-Massenterme $\mathcal{L} \supset -\frac{vy^f}{\sqrt{2}} \bar{f} f$ sehen bei niedrigen Energien $E \ll m_h$ so aus, als würden sie $SU(2)_L \times U(1)_Y$ explizit brechen; bei $E \sim m_h$ merkt man aber, dass v der **vev** eines schweren Felds (dem Higgs-Feld) ist, wodurch die Symmetrie wieder exakt wird
 - * Notiz: Ähnlich wie Dimensionsanalyse
 - Spurion-Trick für Lagrangians $\hat{=}$ Dimensionsanalyse für Gleichungen
- Vorgehen
 - * Situation: Habe Operator CO im Lagrangian, der eine Symmetrie explizit bricht
 - Notation: Kopplungskonstante C , Feld-Operator O
 - Triviale Verallgemeinerung: Mehrere Operatoren $C_i O_i$, die Symmetrien explizit brechen \Rightarrow Führe den Formalismus für jeden Parameter C_i einzeln durch
 - 1. Finde richtiges Transformationsverhalten für C
 - * Bedingung: C muss sich so transformieren, dass CO invariant ist
 - * Achtung: Transformationsverhalten von C kann beliebig hässlich sein
 - 2. Behandle C wie ein Feld bei Konstruktion der Wechselwirkungsterme des Lagrangians
 - * Effektiv: Füge dem “naiven” Lagrangian alle invarianten Terme hinzu, die man mit C konstruieren kann
 - 3. Berechnung von Observablen: Behandle C wieder wie eine Konstante

- Beispiele
 - * ChPT: Quarkmassen und -ladungen als Spurions von chiraler Symmetriebrechung
 - * SM: Yukawa-Kopplungen als Spurions der Flavor-Symmetrie-Brechung im SM (“Minimal flavor violation”)

10.1.7 Einschränkung von Wilson-Koeffizienten

- Obere Schranken aus dem Experiment
 - Argument: Wilson-Koeffizient kann höchstens so groß sein, da man den Effekt sonst schon gemessen hätte
 - Spezialfall: Nur ein Wilson-Koeffizient trägt zum Prozess bei
 - * Einfach: Löse analytischen Ausdruck für Observable nach dem Wilson-Koeffizient auf
 - Abschätzung für Prozessen mit mehreren Wilson-Koeffizienten
 - * Anschaulich: Keine einfache Rechnung möglich, muss zusätzliche physikalische Annahmen einfließen lassen
 - * Vorgehen: Setze einzeln alle Wilson-Koeffizienten bis auf einen auf 0 und bestimme dann Schranke für diesen Wilson-Koeffizient
 - Begründung: Nehme an, dass es einen dominanten Prozess gibt (steile These)
 - * Achtung: Schranken hängen stark von Wahl der Parameterbasis ab
 - * Interpretation des Ergebnisses: Größenordnungs-Abschätzung
 - Ehrliches Vorgehen für Prozesse mit mehreren Wilson-Koeffizienten: Global Fits
 - * Observablen und deren analytischen Ausdrücke bilden Gleichungssystem für die Wilson-Koeffizienten
 - Achtung: Arbeite nicht nur mit absoluten Werten, sondern auch mit Unsicherheiten
 - * Methoden: Best Fit (suche wahrscheinlichste Kombination der Wilson-Koeffizienten) vs Schranken für jeden Wilson-Koeffizient
 - * Notiz: Benötige mindestens so viele Observablen wie Wilson-Koeffizienten, um Ergebnisse zu erhalten
- Obere Schranke aus perturbativity
 - Argument: Wilson-Koeffizient kann höchstens so groß sein, weil seine Effekte sonst nicht mit Störungstheorie beschrieben werden können
 - Achtung: Funktioniert nur für Dimension-4-Operatoren (?)
 - Perturbativity bound: $c \lesssim 4\pi$
 - * Begründung: Beiträge mit mehr Loops sind unterdrückt mit einem Faktor $\sim \frac{c^2}{16\pi^2} = \left(\frac{c}{4\pi}\right)^2 \Rightarrow$ Benötige $\frac{c}{4\pi} \lesssim 1$, damit Störungstheorie Sinn macht
 - Faktor c^2 , da man pro Loop typischerweise 2 Vertices des Operators braucht
 - Faktor $\frac{1}{16\pi^2}$ ist typischer Loop-Unterdrückungsfaktor
 - Notiz: Das ist eher Abschätzung als formales Argument

10.1.8 Minimale Operatorbasis

- **EFT** = Jonglieren mit höherdimensionalen Operatoren \Rightarrow Wahl einer minimalen Operatorbasis ist wichtig
 - Ziel: Schreibe Lagrangian geschickt um, um einen Wilson-Koeffizienten (“abhängiger Wilson-Koeffizient”) durch andere Wilson-Koeffizienten auszudrücken
 - * Kann dann die Wilson-Koeffizienten so redefinieren, dass der Lagrangian den Operator mit “abhängigem” Wilson-Koeffizient nicht mehr enthält
 - Bestimmung einer minimalen Operatorbasis ist hochgradig nicht-trivial
- Möglichkeiten, Lagrangians umzuschreiben
 - Totale Ableitungen addieren

- EOMs verwenden
- Algebra-Relationen
 - * Bsp: Fierz-Identitäten (für Fermion-Bilineare)
 - Anschaulich: Kann mit Fierz-Identitäten Reihenfolge der Spinoren in doppelten Spinor-Bilinearen $(\bar{a}\Gamma_1 b)(\bar{c}\Gamma_2 d)$ verändern
- Systematische Methode: [Hilbert series](#)

10.1.9 Spontane Symmetriebrechung im EFT-Weltbild (...)

10.2 Tree-level Matching

10.2.1 Grundlagen

- Ziel: Finde Beziehungen zwischen den Wilson-Koeffizienten zweier EFTs, sodass die EFTs äquivalent sind
- Komplikationen
 - Prozess ist in einer Theorie nicht tree-level in führender Ordnung
 - * Benötige Matricelement-Matching
 - Matching von Termen, die Beiträge zu kinetischen Termen beinhalten
 - * Lösung: Redefiniere den "normalen" kinetischen Term, sodass der gesamte kinetische Term die richtige Normierung hat
 - * Bsp: $\mathcal{L} \supset c(\partial_\mu a)^2 H^\dagger H \supset c(\partial_\mu a)^2 \frac{v^2}{2} \Rightarrow$ Wenn ich naiv den "normalen" kinetischen Term $\frac{1}{2}(\partial_\mu a)^2$ hinschreibe, erhalte ich insgesamt $(1 + cv^2) \times \frac{1}{2}(\partial_\mu a)^2$ (falsche Normierung) \Rightarrow Sollte für den "normalen" kinetischen Term $(1 - cv^2) \times \frac{1}{2}(\partial_\mu a)^2$ wählen, sodass der gesamte kinetische Term $(1 - cv^2 + cv^2) \times \frac{1}{2}(\partial_\mu a)^2 = \frac{1}{2}(\partial_\mu a)^2$ (richtige Normierung) ist

10.2.2 Matching mit Matricelementen

- Grundlage: Zwei Theorien sind identisch, wenn sie dieselben Matricelemente generieren
 - Anschaulich: Naiver Zugang zu Matching, funktioniert immer
 - Matricelemente enthalten volle Information über physikalische Prozesse
 - * Forderung "gleiche Wirkungsquerschnitte, Zerfallsraten etc" ist äquivalent, aber umständlicher (viel mehr Objekte beteiligt)
- Vorgehen
 - Voraussetzung: Kenne Lagrangians für beide Theorien
 - 1. Berechne "alle" Matricelemente für beide Theorien in führender Ordnung
 - In der Praxis genügen endlich viele Matricelemente, da man jeweils "alle" Matricelemente aus (endlich vielen) "fundamentalen" Matricelementen konstruieren kann
 - Achtung: Führende Ordnung kann in einer Theorie tree-level und in der anderen 1-loop sein
 - 2. Setze die zueinander passenden Matricelemente gleich \Rightarrow Bedingungen an Wilson-Koeffizienten
- Vor- und Nachteile
 - + : Konzeptionell einfach, funktioniert immer (auch für Loop-Rechnungen etc)
 - - : Muss Lagrangians beider Theorien kennen

10.2.3 Matching mit Bewegungsgleichungen

- Grundlage: Entwickle Propagator eines schweren Felds X in $\frac{E}{m_X} \ll 1$
 - Diese Methode ist eher “Generation neuer EFTs” als “Matching von bekannten EFTs”
 - Interpretation: Virtuelle X -Zustände propagieren nur über sehr kurze Strecke
 - * Führender Term $\frac{1}{m_X^2}$ im Propagator entspricht einer Punkt-Wechselwirkung
- Vorgehen
 - Verwende Notationen $\mathcal{D}, \mathcal{P}, \Delta$ für EOM-Operator, Projektor und Propagator aus 2.3.5
 - Situation: Habe Theorie (bzw Lagrangian \mathcal{L}) mit schwerem Feld X
 - 1. Stelle EOM für das Feld X auf: $\mathcal{D}X = \frac{\delta \mathcal{L}_{\text{int}}}{\delta X} - \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}_{\text{int}}}{\delta \partial_\mu X}$
 - Kontrolle: Terme auf der rechten Seite müssen mindestens Massendimension 2 haben
 - 2. Löse EOM nach X auf: $X = \frac{1}{m_X^2} \frac{\mathcal{P}}{1 + \frac{\partial^2}{m_X^2}} \left(\frac{\delta \mathcal{L}_{\text{int}}}{\delta X} - \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}_{\text{int}}}{\delta \partial_\mu X} \right)$
 - Vorgehen: $\mathcal{D}X = y \Rightarrow \mathcal{P}y = \mathcal{P}\mathcal{D}X = (\partial^2 + m^2)X \Rightarrow X = \frac{\mathcal{P}}{\partial^2 + m^2} y$
 - Kann Ergebnis mit Propagator Δ ausdrücken: $X = i\Delta \left(\frac{\delta \mathcal{L}_{\text{int}}}{\delta X} - \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}_{\text{int}}}{\delta \partial_\mu X} \right)$
 - * Interpretation: Feld X propagiert (Δ) und wechselwirkt anschließend ($i \left(\frac{\delta \mathcal{L}_{\text{int}}}{\delta X} - \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}_{\text{int}}}{\delta \partial_\mu X} \right)$)
 - $\frac{E}{m_X} \ll 1 \Rightarrow$ Entwickel Ausdruck in $\frac{E}{m_X} \ll 1$
 - 3. Setze Ausdruck für X in \mathcal{L} ein
 - Neuer Lagrangian enthält X nicht mehr \Rightarrow Finde effektive Theorie von \mathcal{L} ohne X
 - Achtung: Ersetzung auch für quadratische Terme von X bzw $\mathcal{L} - \mathcal{L}_{\text{int}}$
 - Kann Werte der Wilson-Koeffizienten direkt aus dem erhaltenen Lagrangian ablesen
 - Bedeutung von $X = \frac{1}{m_X^2} \frac{\mathcal{P}}{1 + \frac{\partial^2}{m_X^2}} \left(\frac{\delta \mathcal{L}_{\text{int}}}{\delta X} - \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}_{\text{int}}}{\delta \partial_\mu X} \right)$
 - * X -Abhängigkeiten in $\frac{\delta \mathcal{L}_{\text{int}}}{\delta X} - \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}_{\text{int}}}{\delta \partial_\mu X} \Rightarrow$ Setze X rekursiv ein
 - * Entwicklung des Propagators: $\frac{1}{1 + \frac{\partial^2}{m_X^2}} = \frac{1}{1 - (-\partial^2/m_X^2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{\partial^2}{m_X^2} \right)^k$
- Vor- und Nachteile
 - + : Muss den Lagrangian der zweiten Theorie nicht kennen, sondern erhalte ihn automatisch (inklusive aller höheren Korrekturen)
 - + : Rechnung auf Lagrangian-Level (eleganter als Matricelement-Level)
 - - : Funktioniert nur für tree-level matching, nicht auf loop-level
 - - : Schwierigkeit: Führende Operatoren in EFT-Lagrangian identifizieren

10.2.4 Matching mit Hintergrund-Feldern (...)

10.2.5 Operator Product Expansion (OPE) (?)

- Aussage: $\lim_{x \rightarrow y} O_1(x) O_2(y) = \sum_n C_n(x - y) P_n(x)$
 - Anschaulich: Ortsraum-Äquivalent zu EOM-Matching (formuliert für Operatoren statt Felder)
 - Alternative Form: $\int d^4x e^{iqx} O(x) O(0) = \sum_n \tilde{C}_n(q) P_n(0)$
 - * Führe fouriertransformierte Koeffizienten \tilde{C}_n ein mit $\tilde{C}_n(q) = \int d^4x e^{iqx} C_n(x)$

10.2.6 Methode: Berechnung von 1-loop-Wilson-Koeffizienten

- Anwendung: Matricelement-Matching von 1-loop-Effekt auf tree-level-Effekt
- Vorgehen
 - Anschaulich: Normale 1-loop-Rechnung – Muss aber Tricks anwenden, damit das Ergebnis dieselbe Form hat wie in der **EFT**
 - Ziel: Matricelement ohne komplexe Kinematik-Abhängigkeiten aus dem Loop erhalten
 - * Typisch: Loop-Integral liefert komplexe Abhängigkeit von externen Impulsen
 - * Wilson-Koeffizient muss eine Zahl sein \Rightarrow Darf nicht von externen Impulsen abhängen
 - Trick: Rechne zur führenden Ordnung in externen Impulsen
 - * Anschaulich: Das ist die **EFT**-Grundidee – Kann IR-Skala der externen Impulse (im Gültigkeitsbereich der **EFT**) im Vergleich zu UV-Skala der Loop-Impulse (abstrahiere davon in der **EFT**) vernachlässigen
 - * Schwierigkeit: Kann externe Impulse nicht einfach auf 0 setzen (da **EFT**-Matricelement auch von externen Impulsen abhängen kann)
- Typisches Bsp: Penguin-Diagramme in Flavourphysik

10.3 Matching at higher loops (...)

10.3.1 Renormierung

10.3.2 RGE improvement

10.4 Andere Methoden zur Konstruktion effektiver Feldtheorien

10.4.1 Semiklassischer Grenzfall (...)

- Grundlage: Schreibe $\phi = \phi_0 + \phi_1$ mit klassischem Feld ϕ (erfüllt **EOM**) und kleiner Korrektur ϕ_1
 - Anschaulich: Entwickle in kleinen Quantenkorrekturen $\frac{\phi_1}{\phi_0} \ll 1$
 - ϕ_0 ist festgelegt durch die **EOMs** und damit kein dynamischer Freiheitsgrad der **EFT**
 - Strategie: Schreibe \mathcal{L} als Taylorreihe in ϕ_1
 - * $\phi_1 \ll \phi_0 \Rightarrow$ Kann Entwicklung nach endlich vielen Termen abbrechen
 - Allgemeiner: Geschickte Zerlegung $\phi = \phi(\phi_0, \phi_1)$, die Eigenschaften (zB Symmetrien) des Felds ϕ berücksichtigt

10.4.2 Nichtrelativistischer Grenzfall (...)

- Grundlage: Schreibe $\phi = e^{-imt} \phi_1$ mit Masse m des Felds ϕ und nichtrelativistischem Feld ϕ_1
 - Anschaulich: Entwickle in nichtrelativistischem Grenzfall $\frac{E}{m} \ll 1$ (?)
 - Strategie: Drücke \mathcal{L} durch ϕ_1 aus

10.5 Effektive Beschreibung von stark gekoppelten Theorien (...)

10.5.1 Grundlagen

10.5.2 Explizite Symmetriebrechung durch stark gekoppeltes Kondensat (...)

- Anschaulich: Weiterer Mechanismus für explizite Brechung globaler Symmetrien (zusätzlich zum **EFT**-Argument)

10.5.3 Symmetriebrechungsmechanismen

- Dynamische Symmetriebrechung
- Kollektive Symmetriebrechung

10.5.4 Partial compositeness

Kapitel 11

Nichtperturbative Effekte

11.1 Grundlagen

11.1.1 Der Ursprung von nicht-perturbativen Effekten

11.2 Instantons

11.3 Solitons

11.3.1 Skyrmions

11.3.2 Magnetische Monopole

11.3.3 Domain walls

11.3.4 Cosmic strings

11.4 Effekte des θ -Terms in Eichtheorie

11.4.1 Überblick

- Physikalische Relevanz des θ -Terms
 - θ -Term hat physikalische Bedeutung, falls man aus θ eine invariante Größe $\bar{\theta}$ konstruieren kann
 - θ -Term ist totale Ableitung

11.4.2 Grundlagen

- Pure gauge configurations
- Kleine vs große Eichtransformationen
- Winding number

11.5 Matching auf perturbative Effekte (...)

Kapitel 12

Quantenfeldtheorie in N Dimensionen

Kapitel 13

Thermische Quantenfeldtheorie

Kapitel 14

Supersymmetrische Quantenfeldtheorien

Abkürzungen

BGL Bewegungsgleichung

CFT Classical Field Theory

DR Dimensional Regularization

EFT Effective Field Theory

EOM Equations of Motion

ESB Explicit Symmetry Breaking

GB Goldstone Boson

OPE Operator Product Expansion

QFT Quantum Field Theory

SSB Spontaneous Symmetry Breaking

vev vacuum expectation value