Modelle für Teilchenphysik

Jonas Spinner
16. Mai 2022

Bitte nicht diese pdf weiterverbreiten,
sondern den Link https://www.jspinner.de.
Dort gibts die aktuelle Version!

Dies ist eine privat erstellte Zusammenfassung und richtet sich an einen Studenten, der das Thema bereits aus einer Einführungsvorlesung kennt. Übersichtlichkeit und Struktur sind mir besonders wichtig, deshalb schreibe ich in Stichpunkten. Ich kommentiere die Themen, die ich wichtig finde und zeige die Rechnungen, die ich lehrreich finde. Insbesondere versuche ich, Aussagen zu verallgemeinern und direkt zu formulieren, was sicherlich manchmal schief geht. Ich freue mich über Rückmeldungen!

Im Folgenden eine kleine Liste von Quellen, auf die ich beim Anfertigen dieser Zusammenfassung zurückgegriffen habe. Die Punkte sind nach abnehmender Relevanz geordnet.

- Vorlesung New light particles beyond the Standard Model(Ziegler 2020/21)
- Vorlesung TTP2(Heinrich 2020/21)
- Überschneidungen mit QFT-Zusammenfassung
- Vorlesungen Gruppen und Symmetrien(Nierste 2019/20), Flavorphysik(Nierste 2021), Non-supersymmetric extensions of the SM(Blanke, 2021)

Überblick

- Wie definiert man ein Modell?
  - Modell(in Quantum Field Theory (QFT)) $=$ Bestimmte Quantenfeldtheorie
    * Anschaulich: Habe in QFT-Zusammenfassung alle modellunabhängigen Themen gesammelt, hier folgen die relevanten Beispiele
  - Möglichkeit 1: Eichsymmetrien, globale Symmetrien und Felder-Liste angeben
  - Möglichkeit 2: Lagrangian hinschreiben
  - Die beiden Möglichkeiten sind äquivalent, da der Lagrangian alle Lorentz-, Symmetrie- und eichinvarianten Terme enthalten muss
    * Wenn der Lagrangian nicht alle Lorentz-, Symmetrie und eichinvarianten Terme enthält, gibt es Probleme mit Renormierbarkeit
    * $1 \to 2$: Konstruiere alle möglichen Lorentz-, Symmetrie und eichinvarianten Terme aus den Feldern und schreibe Lagrangian als Summe der Terme mit beliebigen Koeffizienten(und vereinfache den Ausdruck)
    * $2 \to 1$: Kann Eichgruppe, globale Symmetrien und Felder-Liste aus dem Lagrangian ablesen
  - In der Praxis ist Möglichkeit 1 geschickter, da sie kompakter ist
- Struktur
  1. Standard-Modell und Probleme des Standard-Modells(Kapitel 1)
     - Standard-Modell(Standard Model (SM)) $=$ State-of-the-art-Theorie für Teilchenphysik
  2. Effektive Theorien zur Beschreibung des SM in bestimmten Grenzfällen(Kapitel 2 bis n)
     - Modelle sind grob nach Relevanz geordnet
  3. Modelle für neue Physik(Kapitel n bis m)
     - Modelle sind grob nach Komplexität der Erweiterung geordnet
     - Neue Physik(NP) $=$ Überbegriff für Modelle, die Probleme des SM lösen

  - Noch viele losen Enden(notiert als “$(...)$”), die irgendwann vervollständigt werden

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundlagen

Kapitel 2

Standard-Modell

2.1 Grundlagen

2.1.1 Definition des Standardmodells

- Symmetrien
  - Eichgruppe $U(1)_Y \times SU(2)_L \times SU(3)_c$
    * Verwende Indizes für die einzelnen Gruppen, um unterschiedliche Gruppen mit demselben formalen Namen zu unterscheiden
      · Bsp: $U(1)_Y, U(1)_Q, U(1)_B$ wirken auf unterschiedliche Felder, haben aber dieselbe Struktur
  - Zufällige globalen Symmetrien im SM $U(1)_B, U(1)^3_{L_i}$
- Auflistung der Felder
  - Charakterisiere Felder mit den Quantenzahlen (für $U(1)$) bzw Darstellungen (für $SU(n)$) der Eichgruppen: $(n_{SU(3)_c}, n_{SU(2)_L}, n_{U(1)_Y})$
    * Notation für $SU(n)$-Darstellungen: $n/\bar{n}$ für fundamentale/antifundamentale Darstellung, n^2-1 für adjungierte Darstellung
    * $n_{U(1)_Y}$ sind $U(1)_Y$-Quantenzahlen der Felder
    * Alternative Notation: $(n_{SU(3)_c}, n_{SU(2)_L})_{n_{U(1)_Y}}$
  - Fermionen
    * Zu jedem Fermion gibt es ein Antifermion mit entgegengesetztem Transformationsverhalten
      · Explizit: $\bar{n}$ statt n für $SU(n)$, $-n_{U(1)_Y}$ statt $n_{U(1)_Y}$ für $U(1)$
    * Linkshändige Quarks $Q_{L,i} = \begin{pmatrix} u_{L,i} \\ d_{L,i} \end{pmatrix}$ mit $(3, 2, \frac{1}{6})$
      · Notiz: Position der beiden Felder im $SU(2)_L$-Duplett festgelegt durch Parametrisierung $\langle H \rangle = \frac{v}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
    * Rechtshändige up-type Quarks $U_{R,i}$ mit $(3, 1, \frac{2}{3})$
    * Rechtshändige down-type Quarks $D_{R,i}$ mit $(3, 1, -\frac{1}{3})$
    * Linkshändige Leptonen $L_{L,i} = \begin{pmatrix} \nu_{L,i} \\ e_{L,i} \end{pmatrix}$ mit $(1, 2, -\frac{1}{2})$
    * Rechtshändige Elektronen $E_{R,i}$ mit $(1, 1, -1)$
      · Achtung: Keine rechtshändigen Neutrinos $N_{R,i}$, da diese totale Singlets $(1, 1, 0)$ und damit nicht direkt detektierbar wären (will sowas nicht in einem minimalen Modell)
    * Links- und rechtshändige Fermionen haben unterschiedliche Transformationseigenschaften $\Rightarrow$ SM ist chirale Theorie
    * Alle Fermion-Felder sind masselosg
      · Majorana-Massenterme sind nicht invariant, da alle Fermionen $U(1)_Y$-Ladung haben
      · Dirac-Massenterme sind nicht invariant, weil das Standardmodell eine chirale Theorie ist
      · Effektive Massenterme durch Higgs-Mechanismus generiert

- Higgs-Dublett H mit $(1,2,\frac{1}{2})$
  * Komponenten des Higgs-Dubletts sind Q-Eigenzustände $H = \begin{pmatrix} H^+ \\ H^0 \end{pmatrix}, H^\dagger = (H^-, H^{0*})$
  * $SU(2)_L$-konjugiertes Higgs-Dublett: $\tilde{H} = \epsilon H^*$
    · Achtung: $SU(2)_L$-konjugiertes Higgs-Dublett $\tilde{H}$ ist nicht $\mathcal{C}$-konjugiertes Higgs-Dublett $H^c = H^*$
- Eichbosonen
  * Eichbosonen sind eigentlich schon durch die Angabe der Eichgruppe festgelegt
    · Gluonen/$SU(3)_c$-Eichbosonen G^a_μ mit $(8,1,0)$
    · $SU(2)_L$-Eichbosonen W^i_μ mit $(1,3,0)$
    · $U(1)_Y$-Eichboson B_μ mit $(1,1,0)$
  * Eichbosonen habenShift-Transformationsverhalten unter Eichtransformationen $\Rightarrow$ Unterscheiden sich fundamental von den anderen Feldern
  * Eichbosonen sind masselos, da Eichboson-Massenterme nicht eichinvariant sind
    · $SU(2)_L$-Eichbosonen erhalten effektive Massenterme durch Higgs-Mechanismus
- Freiheitsgrade der Felder
  * Felder der Theorie haben viele möglichen Freiheitsgrade (bzw Indizes) $\Rightarrow$ Schreibe manche explizit aus, andere nicht
    · Hier verwendete Wahl ist die übliche Konvention
  * Lorentz-Indizes für Vektorfelder $\mu, \nu, \dots$ werden ausgeschrieben
  * Lorentz-Indizes für Spinorfelder (van-der-Waerden-Notation) werden nicht ausgeschrieben
    · Arbeite in dieser Diskussion ausschließlich mit Dirac-Spinoren, könnte das Ganze auch mit Weyl-Spinoren formulieren
  * Eichtheorie-Indizes für Eichfelder werden ausgeschrieben
  * $SU(2)_L$- und $SU(3)_c$-Indizes für nicht-Eichfelder werden nicht ausgeschrieben
  * Generationsindex/Flavorindex $i \in \{1,2,3\}$ für Fermionen wird ausgeschrieben

• Freie Parameter: 19
- Freie Parameter werden nicht durch die Theorie vorhergesagt, sondern müssen experimentell bestimmt werden
- ElectroWeak (EW)-Theorie (4): g_Y, g_L, v, m_h
  * $v = \frac{\mu}{\sqrt{2\lambda}}, m_h = \sqrt{2}\mu$ können durch die Lagrangian-Parameter μ, λ ausgedrückt werden
  * Lagrangian-Parameter müssen $\mu^2 > 0, \lambda > 0$ haben, damit Spontaneous Symmetry Breaking (SSB) stattfindet
  * In der Praxis verwendete Parameter: $G_F, \alpha, m_Z, \cos\theta_W$
    · Verwende diese Parameter, da sie besonders einfach experimentell zugänglich und daher mit geringer Unsicherheit bekannt sind
    · Konkret: Globale Fits, Renormierungsschemata etc
    · Beziehungen: $G_F = \frac{1}{\sqrt{2}v^2}, \tan\theta_W = \frac{g_Y}{g_L}, m_Z = \frac{v}{2\cos\theta_W}, \alpha = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{g_L^2 \sin^2\theta_W}{4\pi}$
- Quantum Chromodynamics (QCD) (2): $g_c, \bar{\theta} = \theta_c + \arg\det(M_u M_d)$
  * In der Fermion-Massenbasis ist $\bar{\theta} = \theta_c$
- Flavor-Sektor (13): Fermion-Massen (9 Parameter), CKM-Matrix (4 Parameter)
- Achtung: Parameter sind energieabhängig (Renormierung)
  * Angabe eines Parameters bei einer bestimmten Energie genügt, kann den Parameter bei allen restlichen Energien durch Lösung dessen Renormierungsgruppengleichung bestimmen
  * Ausnahme: $\bar{\theta}$ ist topologischer Parameter $\Rightarrow$ Erhält keine Quantenkorrekturen

2.1.2 Lagrangian des Standardmodells $\mathscr{L}_{\text{SM}} = \mathscr{L}_{\text{gauge}} + \mathscr{L}_{\text{ferm}} + \mathscr{L}_{\text{higgs}} + \mathscr{L}_{\text{pot}} + \mathscr{L}_{\text{yuk}} + \mathscr{L}_{\text{fix}} + \mathscr{L}_{\theta}$

- Notiz: Lagrangian ist eindeutig festgelegt durch Eichsymmetrien, Liste der Felder und Forderung nach Renormierbarkeit
  - Erweiterung auf nicht-renormierbare Terme bekannt unter Standard Model Effective Field Theory (Standard Model Effective Field Theory (SMEFT))
- Kinetische Terme der Eichfelder $\mathscr{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}W^i_{\mu\nu}W_i^{\mu\nu} - \frac{1}{4}G^a_{\mu\nu}G_a^{\mu\nu}$
  - Feynman-Diagramme: Kinetische Terme der Eichfelder, Eichfeld-Selbstwechselwirkungen für $SU(2)_L, SU(3$
  - Verwende Feldstärketensoren $B_{\mu\nu}, W^i_{\mu\nu}, G^a_{\mu\nu}$ der Eichfelder B_μ, W^i_μ, G^a_μ
    * Feldstärketensoren haben die Form $A^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f^a{}_{bc} A^b_\mu A^c_\nu$ für $A \in \{B, W, G\}$
  - Eichbosonen $W^i_{\mu\nu}$ und $G^a_{\mu\nu}$ haben Wechselwirkungsterme, B_μ hat keine Wechselwirkungsterme
    * Feldstärketensoren durch Eichfelder ausdrücken liefert für $A \in \{B, W, G\}$: $-\frac{1}{4}A^a_{\mu\nu}A_a^{\mu\nu}$ $= -\frac{1}{2}\left((\partial_\mu A^a_\nu)(\partial^\mu A_a^\nu) - (\partial_\mu A^a_\nu)(\partial^\nu A_a^\mu)\right) - \frac{g}{2} f^a{}_{bc} A^b_\mu A^c_\nu (\partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu) - \frac{g^2}{4} f^a{}_{bc} f_a{}^{de} A^b_\mu A^c_\nu A^\mu_d A^\nu_e$
      · $f^a{}_{bc}$ sind die antisymmetrischen Strukturkonstanten der jeweiligen Gruppe
      · $U(1)_Y$ hat $f^{abc} = 0 \Rightarrow$ Keine Wechselwirkungsterme
- Eichkinetische Terme der Fermionen
  $\mathscr{L}_{\text{ferm}} = \left(\bar{Q}_{L,i} i\not{D} Q_{L,i} + \bar{U}_{R,i} i\not{D} U_{R,i} + \bar{D}_{R,i} i\not{D} D_{R,i} + \bar{L}_{L,i} i\not{D} L_{L,i} + \bar{E}_{R,i} i\not{D} E_{R,i}\right)$
  - Feynman-Diagramme: Kinetische Terme der Fermionen, Fermion-Eichfeld-Wechselwirkungen
  - Kovariante Ableitung des Felds X: $D_\mu = \partial_\mu + i g_Y Y_X B_\mu + i g_L (T_X)_i W^i_\mu + i g_c (T_X)^a G^a_\mu$
    * Y_X ist die Hyperladung von X, $(T_X)^k$ sind die Generatoren der Darstellung von X unter der Gruppe mit dem Index k
    * Generatoren der trivialen Darstellung von $SU(2)_L, SU(3)_c$ sind $0 \Rightarrow$ Fermion-Eichfeld-Wechselwirkungen nur, falls die Fermionen sich unter nichttrivialen Darstellungen der Eichgruppen transformieren
  - Kinetische Terme der Fermionen mischen links- und rechtshändige Terme nicht $\bar{a} i\not{D} a = \bar{a}_L i\not{D} a_L + \bar{a}_R i\not{D} a_R \Rightarrow$ Kann kompakt zwischen links- und rechtshändigen Fermionfeldern unterscheiden
- Kinetische Terme des Higgs-Dubletts $\mathscr{L}_{\text{higgs}} = (D_\mu H)^\dagger (D^\mu H)$
  - Feynman-Diagramme: Kinetische Terme der Higgs-Felder, Eichboson-Massenterme, Higgs-Eichfeld-Wechselwirkungen
  - Kovariante Ableitung hat selbe Form wie für kinetische Terme der Fermionen
  - Term ändert sich stark durch $U(1)_Y \times SU(2)_L \to U(1)_Q$
- Potentielle Terme des Higgs-Dubletts $\mathscr{L}_{\text{pot}} = \mu^2 H^\dagger H - \lambda (H^\dagger H)^2$
  - Feynman-Diagramme: Higgs-Massenterm, Higgs-Selbstwechselwirkungen, Higgs-Goldstone-Wechselwirku
  - Term ändert sich stark durch Symmetriebrechung $U(1)_Y \times SU(2)_L \to U(1)_Q$
- Yukawa-Terme $\mathscr{L}_{\text{yuk}} = -Y^U_{ij} \bar{Q}_{L,i} U_{R,j} \epsilon H^* - Y^D_{ij} \bar{Q}_{L,i} D_{R,j} H - Y^L_{ij} \bar{L}_{L,i} E_{R,j} H +$ h.c.
  - Feynman-Diagramme: Fermion-Massenterme, Fermion-Higgs-Wechselwirkungen
  - $\tilde{H} = \epsilon H^*$ ist $SU(2)_L$-konjugiertes Higgs-Dublett mit Quantenzahlen $(1, 2, -\frac{1}{2})$
- Eichfixierungs- und Geistfeldterme $\mathscr{L}_{\text{fix}}$ (...)
- θ-Terme der Eichfelder $\mathscr{L}_\theta = \theta_Y \frac{g_Y^2}{16\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} B_{\mu\nu} B_{\rho\sigma} + \theta_L \frac{g_L^2}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} W^i_{\mu\nu} W_{\rho\sigma,i} + \theta_c \frac{g_c^2}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} G^a_{\mu\nu} G_{\rho\sigma,a}$(...)
- Übersicht über weitere Umformungen, um auf die übliche Form zu kommen
  - Anschaulich: Die hier angegebene Form enthält alle Informationen, ist aber für die Praxis nicht sehr nützlich

      * Weitere Umformungsschritte folgen aus speziellen Eigenschaften der Terme und sind daher aufwändig $\Rightarrow$ Werden in den folgenden Abschnitten einzeln behandelt
  - EW-SSB durch geeignete Parametrisierung des Higgs-Dubletts H beschreiben
  - Umparametrisierung der EW-Eichfelder B_μ, W_μ^i zu Massen- und Ladungseigenzustände $A_\mu, Z_\mu, W_\mu^\pm$
  - Redundante Freiheitsgrade in Yukawa-Matrizen Y^u, Y^d, Y^ℓ eliminieren und Flavor- oder Massenbasis für Quarks wählen
  - Minimale Anzahl physikalischer Parameter in den θ-Termen finden

2.1.3 Zufällige globale Symmetrien im Standardmodell

- Im Standardmodell keine tiefere Begründung für die globalen Symmetrien $U(1)_B$ und $U(1)_{L_i}^3$
- Baryonzahl-Erhaltung $U(1)_B$
  - Definition Baryonzahl B
    * Quarks haben $B = \frac{1}{3}$
    * Antiquarks haben $B = -\frac{1}{3}$
    * Alle anderen Teilchen haben $B = 0$
  - Motivation für Reskalierung mit Faktor $\frac{1}{3}$: Beobachte im Experimente Baryonen und keine Quarks
    * Mit dieser Definition findet man $B = 1$ für Baryonen, $B = -1$ für Antibaryonen und $B = 0$ für Mesonen
- Leptonfamilienzahl-Erhaltung $U(1)_{L_1} \times U(1)_{L_2} \times U(1)_{L_3}$
  - Definition Leptonfamilienzahl L_i mit Flavor-Index $i \in \{1, 2, 3\}$
    * Leptonen der i-ten Generation haben $L_i = 1$
    * Antileptonen der i-ten Generation haben $L_i = -1$
    * Alle anderen Teilchen (auch Leptonen mit Generation $i \neq j$) haben $L = 0$
  - Anschaulich: Leptonfamilienzahlerhaltung statt nur Leptonzahlerhaltung, da es im SM keine flavorändernden Prozesse im Leptonsektor gibt (im Gegensatz zum Quarksektor)
- Leptonzahl-Erhaltung $U(1)_L$
  - Definition Leptonzahl L
    * Leptonen haben $L = 1$
    * Antileptonen haben $L = -1$
    * Alle anderen Teilchen haben $L = 0$
  - Leptonzahl-Erhaltung folgt trivial aus Leptonfamilienzahl-Erhaltung

2.1.4 Effektive Feldtheorien des Standardmodells

- Standard model effective field theory (SMEFT)
  - Anschaulich: $\mathscr{L}_{\text{SMEFT}} = \mathscr{L}_{\text{SM}} + \mathscr{L}_{5+}$ mit Operatoren aus SM-Feldern ab Massendimension 5 in $\mathscr{L}_{5+}$
  - Feld-Inhalt: $H, B, W, G, Q_L, U_R, D_R, L_L, E_R$
  - Übliche Parametrisierung: Warschau-Basis
  - Anwendung: Systematische Suche nach Abweichungen von SM-Vorhersagen (Standard in LHC-Physik etc)
- Higgs effective field theory (Higgs Effective Field Theory (HEFT))
  - Anschaulich: Wie SMEFT, aber mit reparametrisiertem Higgs-Dublett $H = \frac{v_h + h}{\sqrt{2}} U$ mit reellem Higgs-Skalar h und Goldstoneboson-Matrix U
  - Feld-Inhalt: $h, U, B, W, G, Q_L, U_R, D_R, L_L, E_R$

- HEFT $\neq$ SMEFT (Is SMEFT Enough?)
  - HEFT ist allgemeiner als SMEFT (es gibt HEFT-Operatoren, die in SMEFT nicht erlaubt sind)
  - HEFT-Topologie $\mathbb{R} \times S^3 \neq$ SMEFT-Topologie $\mathbb{R}^4$

- Soft collinear effective theory (Soft Collinear Effective Theory (SCET))
  - Anschaulich: Entwicklung in $\frac{\Lambda_{\text{QCD}}}{E}$ mit Energie E eines Quarks
  - Anwendung: Soft- und collinear Limit von harten Streuprozessen

- Heavy quark effective theory (Heavy Quark Effective Theory (HQET))
  - Anschaulich: Entwicklung in $\frac{\Lambda_{\text{QCD}}}{m_Q} \ll 1$ mit schweren Quarks Q
    - Modelliere Effekte von Gluonen und leichten Quarks als "muck"
  - Feld-Inhalt: A, Q
    - $Q = c, b$ ist schweres Quark
    - A ist Photon-Feld
  - Anwendung: Beschreibung von Hadronen mit c- und b-Quarks

- Chiral perturbation theory (Chiral Perturbation Theory (ChPT))
  - Anschaulich: Entwicklung in $\frac{m_q}{\Lambda_{\text{QCD}}} \ll 1$ mit leichten Quarks q
  - Feld-Inhalt: A, G, Q, U
    - Q ist Quark-Vektor und enthält 2 (u, d) oder 3 (u, d, s) Quarks
    - U ist Goldstoneboson-Matrix aus Brechung der Flavor-Symmetrie (enthält Mesonen)
    - Kann statt mit Quarks auch mit Hadronen (generischen Baryonen und Mesonen) arbeiten
  - Anwendung: Hadronen bei $E \lesssim 100\,\text{MeV}$

2.2 EW-Theorie/GSW-Modell $U(1)_Y \times SU(2)_L$

2.2.1 Motivation für Symmetriegruppe $U(1)_Y \times SU(2)_L$ und spontane Symmetriebrechung

- Motivation für $SU(2)_L$
  - Maximale P-Verletzung für schwache Prozesse experimentell beobachtet (Wu, Goldhaber) $\Rightarrow$ Erwarte chirale Theorie
  - Beobachte 4 elektroschwache Eichbosonen im Experiment ($A, Z, W^{\pm}$) $\Rightarrow$ Können mit Eichgruppe $SU(2) \times U(1)$ erklärt werden
    - Vor Entdeckung des Z-Bosons war $SU(2)$ mit SSB $SU(2) \to U(1)$ prominente Alternative
  - $SU(2)_L$-Darstellungen der Teilchen sind mit "Nur linkshändige Teilchen machen schwache Wechselwirkung" festgelegt
    - Konkret: Linkshändige Fermionen transformieren sich unter fundamentaler Darstellung von $SU(2)_L$, rechtshändige Fermionen transformieren sich unter trivialer Darstellung von $SU(2)_L$
      - Könnte auch andere Darstellung als die fundamentale Darstellung für linkshändige Fermionen haben
    - Reihenfolge der Felder in den $SU(2)_L$-Dubletts ist dadurch noch nicht festgelegt

- Hyperladungen Y der Felder finden
  - Naive Methode: SM muss QED als Niedrigenergie-Grenzfall enthalten $\Rightarrow$ Konsistenzbedingungen
    - Bedingungen: Neutrinos haben $Q = 0$, QED hat P-Symmetrie bzw $Q_L = Q_R$ für alle Fermionen (2 Bedingungen), Yukawa-Terme sind invariant
  - Gruppentheorie-Methode 1: Konsistente Quantenfeldtheorie darf keine chiralen Anomalien haben
    - Anomaliefreiheit mit den anderen Eichgruppen($SU(2)_L, SU(3)_c$ und Gravitation) liefert Gleichungssystem für die Hyperladungen, das nur zwei nicht-triviale Lösung hat $\Rightarrow$ Wähle die in der Natur realisierte aus

- Gruppentheorie-Methode 2: Verwende $Q = T_3 + Y$
  - Bedingung folgt aus Parametrisierung des Higgs-Dubletts bei SSB
  - Kenne Q aus QED und T_3 aus "nur linkshändige Teilchen machen schwache Wechselwirkung"

- Motivation für spontane Symmetriebrechung
  - Beobachte massive Eichbosonen und massive Fermionen im Experiment $\Rightarrow$ Kann nur durch Higgs-Mechanismus erklärt werden
    - Explizite Fermion- und Eichboson-Massenterme nicht erlaubt wegen Eichsymmetrie

- Motivation für Quantenzahlen des Higgs-Bosons
  - Quantenzahlen des Higgs-Bosons $(1, 2, \frac{1}{2})$ sind dadurch festgelegt, dass man Yukawa-Terme bzw Massenterme mit dem Higgs-Dublett konstruieren kann

2.2.2 Spontane Symmetriebrechung und Higgs-Mechanismus

1. Eigenschaften der spontanen Symmetriebrechung aus dem Lagrangian ablesen: $\langle H \rangle = \frac{v}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow U(1)_Y \times SU(2)_L \to U(1)_Q$
   - Vorteil dieser Konvention für v: Finde $\langle h \rangle = v$ für das physikalische Higgs-Feld h
     - "Diese Konvention" ist auch Konvention der PDG $\Rightarrow$ Bevorzuge diese Konvention
     - Alternative Konvention: $\langle H \rangle = v \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bzw $\langle h \rangle = \sqrt{2} v$

   (a) Higgs-Potential $V(H) = -\mu^2 H^\dagger H + \lambda (H^\dagger H)^2$ hat für $\mu^2, \lambda > 0$ ein Minimum bei $H^\dagger H = \frac{\mu^2}{2\lambda} =: \frac{v^2}{2}$ bzw $\mu^2 = \lambda v^2$
      - Für $\mu^2 < 0$ hätte das Potential ein eindeutiges Minimum $H^\dagger H = 0$ und es gäbe keine SSB

   (b) Problem hat $SU(2)_L$-Eichsymmetrie $\Rightarrow$ Alle Feldkonfigurationen mit $H^\dagger H = \frac{v^2}{2}$ sind äquivalent, kann Grundzustand von H mit $\langle H \rangle = \frac{v}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ parametrisieren

   (c) $\langle H \rangle = \frac{v}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ lässt nur QED-Generator $Q = T_3 + Y$ und $SU(3)_c$-Generatoren ungebrochen
      - $Q\langle H \rangle = (T_3 + Y)\langle H \rangle = \frac{v}{\sqrt{2}} \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \mathbb{1} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \frac{v}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$
      - $SU(3)_c$-Generatoren bleiben trivial ungebrochen, da $\langle H \rangle$ nur auf dem $SU(2)_L$-Raum arbeitet

2. SSB-Parametrisierung finden: Parametrisiere Higgs-Dublett für kleine Auslenkungen vom Grundzustand $H = \begin{pmatrix} iG^+ \\ \frac{v+h-iG^0}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$
   - Goldstonebosonen G^i haben Shift-Symmetrie $G^i \to G^i + v\alpha^i$ unter $SU(2)_L$-Transformation $H \to \exp\left(iT_i \alpha^i\right) H$
   - Schreibe Goldstonebosonen G^i um als Q-Eigenzustände: $\sum_a G_i T^i = G^+ T^+ + G^- T^- + G^0 T^3$
     - Definiere $T^\pm = \frac{T^1 \pm i T^2}{\sqrt{2}}$(allgemeines Prinzip für $SU(2)$) und $G^\pm := \frac{G^1 \mp i G^2}{\sqrt{2}}, G^0 := G^3$
     - Q-Eigenzustände: $Q(T^\pm G^\pm) = [Q, T^\pm G^\pm] = [Q, T^\pm] G^\pm = \pm T^\pm G^\pm$($[T^3, T^\pm] = \pm T^\pm$), $Q(T^3 G^0) = [Q, T^3] G^0 = 0 T^3 G^0$($[T^3, T^3] = 0$) (geht auch in der adjungierten Darstellung)
     - $G^\pm$ ist ein komplexes Feld(statt 2 reelle Felder G^1, G^2) mit der Eigenschaft $(G^\pm)^\dagger = G^\mp$
   - Finde Masse des Higgs-Bosons $m_h^2 = \lambda v^2$
     - Setze $H^\dagger H = \frac{1}{2}(v+h)^2$ in das Higgs-Potential ein:
       $V = -\frac{\mu^2}{2}(v+h)^2 + \frac{\lambda}{4}(v+h)^4 \supset -\frac{\mu^2}{2} h^2 + \lambda v^2 h^2 = \frac{h^2}{2}\Big(-\mu^2 + 2\lambda v^2 \Big) = \frac{\lambda v^2}{2} h^2 \equiv \frac{m_h^2}{2} h^2$
   - Alternative: Nichtlineare Parametrisierung $H(x) = \exp\left(i \sum_i \frac{G^i(x) T^i}{v} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v + h(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

- Kann den gesamten Formalismus auch mit dieser Parametrisierung herleiten, erhalte aber deutlich abweichende Ergebnisse $\Rightarrow$ In der Praxis nicht verwendet
- Summe $\sum_i$ läuft über die $SU(2)$-Generatoren $T^i \in \{T^1, T^2, T^3\}$
  * Streng genommen muss die Summe über die gebrochenen Generatoren $\{T^1, T^2, T^3 - Y\}$ laufen, kann aber einen Term $\frac{i}{v}(T^3 + Y)G^3$ in der e-Funktion addieren(ändert nichts wegen $(T^3 + Y)\langle H\rangle = 0$) und $G^3 \to \frac{G^3}{2}$ redefinieren $\Rightarrow$ Erhalte Summe über $SU(2)$-Generatoren $\{T^1, T^2, T^3\}$
- Entwicklung bis zu linearer Ordnung in Feldern: $H = \exp\left(i(T^+G^+ + T^-G^- + T^3G^0)\right)\begin{pmatrix}0\\ \frac{v+h}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

$$\approx \left(\mathbb{1} + i(T^+G^+ + T^-G^- + T^3G^0)\right)\begin{pmatrix}0\\ \frac{v+h}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} = \left(\mathbb{1} + \frac{i}{2v}\begin{pmatrix}0 & \sqrt{2}G^+\\ \sqrt{2}G^- & -G^0\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}0\\ \frac{v+h}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}iG^+\\ \frac{v+h-iG^0}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

  * $T^+, T^-, T^3 \pm Y$ haben einfache Form: $T^\pm = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1\pm 1\\ 1\mp 1 & 0\end{pmatrix}, T^3 \pm Y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\pm 1 & 0\\ 0 & 1\mp 1\end{pmatrix}$

3. SSB-Parametrisierung in kinetische Terme des Higgs-Felds einsetzen

- $(D_\mu H)^\dagger(D^\mu H)$ ausmultiplizieren $\Rightarrow$ Finde kinetische Terme von Higgs und Goldstonebosonen sowie Wechselwirkungsterme von Higgsfeld und Goldstonebosonen mit Eichbosonen
  - Grundlage: $D_\mu H = \begin{pmatrix}\partial_\mu + \frac{ig_Y}{2}B_\mu + \frac{ig_L}{2}W^3_\mu & i\frac{1}{\sqrt{2}}g_L W^+_\mu\\ i\frac{1}{\sqrt{2}}g_L W^-_\mu & \partial_\mu + \frac{ig_Y}{2}B_\mu - \frac{ig_L}{2}W^3_\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}iG^+\\ \frac{v+h-iG^0}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$
- Eichboson-Massenterme folgen aus $(D_\mu H)^\dagger(D^\mu H)$ mit $H = \langle H\rangle$
  (a) $D_\mu\langle H\rangle = \frac{iv}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}g_L W^+_\mu\\ g_Y B_\mu - g_L W^3_\mu\end{pmatrix}$
  (b) $(D_\mu\langle H\rangle)^\dagger(D^\mu\langle H\rangle) = \frac{v^2}{8}\begin{pmatrix}-i\sqrt{2}g_L W^-_\mu\\ g_Y B_\mu - g_L W^3_\mu\end{pmatrix}^\dagger\begin{pmatrix}i\sqrt{2}g_L W^{\mu+}\\ g_Y B^\mu - g_L W^{\mu 3}\end{pmatrix} = \frac{v^2}{8}\left(2g_L^2 W^-_\mu W^{\mu+} + (g_Y B_\mu - g_L W^3_\mu)^2\right)$
  (c) $m_W = \frac{vg_L}{2}$: $\mathscr{L}_{m_W} = \frac{v^2 g_L^2}{4}W^-_\mu W^{\mu+} = \frac{v^2 g_L^2}{8}\left((W^1_\mu)^2 + (W^2_\mu)^2\right) \stackrel{!}{=} \frac{m_W^2}{2}\left((W^1_\mu)^2 + (W^2_\mu)^2\right)$
  (d) $m_Z = \frac{v\sqrt{g_L^2+g_Y^2}}{2}$: $\mathscr{L}_{m_Z} = \frac{v^2}{8}(g_Y B_\mu - g_L W^3_\mu)^2 = \frac{v^2(g_L^2+g_Y^2)}{8}(Z_\mu)^2 \stackrel{!}{=} \frac{m_Z^2}{2}(Z_\mu)^2$
    - Massenmatrix ist nicht diagonal in der (B_μ, W^3_μ)-Basis $\Rightarrow$ Mache Basiswechsel zu Masseneigenzuständen $\begin{pmatrix}B_\mu\\ W^3_\mu\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta_W & -\sin\theta_W\\ \sin\theta_W & \cos\theta_W\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_\mu\\ Z_\mu\end{pmatrix}$
    - $U(1)_Q$ ist ungebrochen $\Rightarrow$ Fordere $m_A = 0$ für einen der beiden Masseneigenzustände, die das $U(1)_Q$-Eichboson masselos sein muss
    - Forderung $m_A = 0$ führt auf $\tan\theta_W = \frac{g_Y}{g_L}$:
      $g_L W^3_\mu - g_Y B_\mu = (g_L\sin\theta_W - g_Y\cos\theta_W)A_\mu + (g_L\cos\theta_W + g_Y\sin\theta_W)Z_\mu \stackrel{!}{\propto} Z_\mu$
    - Mischungswinkel θ_W zwischen den beiden ungeladenen Eichbosonen heißt Weinberg-Winkel
  - Notiz: Zusammenhang $\frac{m_W}{m_Z} = \cos\theta_W$ ist starke Einschränkung an SM-Erweiterungen
- Kovariante Ableitung mit Massen- und Ladungseigenzustände der Eichbosonen $A_\mu, Z_\mu, W^\pm_\mu, G^a_\mu$:
  $D_\mu = \partial_\mu + ieQA_\mu + ig_L(W^+_\mu T^+ + W^-_\mu T^-) + i\sqrt{g_L^2 + g_Y^2}(T^3 - \sin^2\theta_W Q)Z_\mu - ig_c G^a_\mu T^a$
  (a) Ausgangspunkt: $D_\mu = \partial_\mu + ig_L Y B_\mu + ig_L W^i_\mu T^i + ig_c G^a_\mu T^a$
  (b) $W^\pm_\mu$: $ig_L(W^1_\mu T^1 + W^2_\mu T^2) = ig_L(W^+_\mu T^+ + W^-_\mu T^-)$ wie oben
    - Achtung: $T^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\pm 1\\ 1\mp 1 & 0\end{pmatrix}$ enthält weiteren Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$
  (c) A_μ: $i(g_Y\cos\theta_W Y + g_L\sin\theta_W T^3)A_\mu = ig_L\sin\theta_W QA_\mu + i(g_Y\cos\theta_W - g_L\sin\theta_W)YA_\mu = ig_L\sin\theta_W QA_\mu = ieQA_\mu$ wegen Definition von θ_W
    - Identifiziere QED-Kopplungskonstante $e = g_L\sin\theta_W$
  (d) Z_μ: $i(g_L\cos\theta_W T^3 - g_Y\sin\theta_W Y) = i(g_L\cos\theta_W + g_Y\sin\theta_W)T^3 Z_\mu - ig_Y\sin\theta_W QZ_\mu = i\sqrt{g_L^2 + g_Y^2}T^3 Z_\mu - ig_Y\sin\theta_W QZ_\mu = i\sqrt{g_L^2 + g_Y^2}\left(T^3 - \sin^2\theta_W Q\right)Z_\mu$
  - An den Gluon-Termen $ig_c G^a_\mu T^a$ ändert sich nichts, da Gluonen nicht der EW-SSB beeinflusst werden

- Kann für den (hässlichen) Z_μ-Kopplungsterm auch $T^3 - \sin^2\theta_W Q = \cos^\theta_W - Y$ oder $\sqrt{g_L^2 + g_Y^2} = \frac{g_L}{\cos\theta_W} = \frac{g_Y}{\sin\theta_W}$ verwenden

4. SSB-Parametrisierung in potentielle Terme des Higgs-Felds einsetzen
   - $\mathscr{L}_{\text{pot}} = \mu^2 H^\dagger H - \frac{\lambda^2}{2}(H^\dagger H)^2 = (\frac{v+h}{\sqrt{2}})^2 \left(\mu^2 - \frac{\lambda^2}{2}(\frac{v+h}{\sqrt{2}})^2\right) = \frac{v^4\lambda^2}{8} - \frac{\lambda^2 v^2}{2}h^2 - \frac{v\lambda^2}{2}h^3 - \frac{\lambda^2}{8}h^4$
     - Finde $H^\dagger H = \frac{(v+h)^2}{2} + \frac{1}{2}(G^0)(G^0)^\dagger + G^+G^-$
     - Kann Higgs-Masse $m_h = \lambda v$ ablesen
     - Finde Higgs-Selbstwechselwirkungen $\propto h^3, h^4$

5. SSB-Parametrisierung in Yukawa-Terme des Higgs-Felds einsetzen
   - Fermion-Massenterme folgen aus Beitrag $\langle H\rangle$ des Higgs-Felds
   - Fermion-Higgs-Wechselwirkungen und Fermion-Goldstone-Wechselwirkungen folgen aus Beitrag $H - \langle H\rangle$ des Higgs-Felds

2.2.3 Weitere Themen

- Maximale $\mathcal{P}$- und $\mathcal{C}$-Verletzung durch $SU(2)_L$
  - Anschaulich: Links- und rechtshändige Fermionen transformieren sich unterschiedlich unter $SU(2)_L$
  - Maximale C/P-Verletzung, da für manche Prozesse die C/P-konjugierten Prozesse nicht nur unterdrückt sind, sondern gar nicht stattfinden
  - Begründung: In Flavour-Basis $\mathscr{L}_{\text{SM}} \supset \bar{f}T^iW^i_\mu\gamma^\mu P_L f \overset{\mathcal{P},\mathcal{C}}{\to} \bar{f}T^iW^i_\mu\gamma^\mu P_R f$
    * Anschaulich: Term nach der Transformation (W^i-Kopplungen an linkshändige Fermionen) steht nicht in $\mathscr{L}_{\text{SM}}$, daher sind $\mathcal{C}, \mathcal{P}$ (maximal) gebrochen
    * Notiz: Phasen-Faktoren von Fermionen und Eichbosonen unter $\mathcal{C}, \mathcal{P}$ kürzen sich raus $-$ Es wird nur die Fermion-Chiralität geändert
    * Notiz: Unter $\mathcal{CP}$ ändert sich die Chiralität zweimal, daher sind diese Terme $\mathcal{CP}$-invariant
- Eichboson-Streuung
  - Hinweis auf Higgs-Boson: Ohne Diagramm mit Higgs-Boson-Austausch würden Matrixelemente für Eichboson-Streuung quadratisch mit der Energie ansteigen
    * Wenn die Matrixelemente immer weiter mit der Energie ansteigen, würde das Unitarität verletzen
    * Bsp für Eichboson-Streuung: $W^\pm Z \to W^\pm Z$
    * Partialwellen-Analyse liefert Schranke für Higgs-Masse ("Lee-Quigg-Thacker bound") $m_h \leq v\sqrt{\frac{16\pi}{3}} \approx$ 1 TeV $\Rightarrow$ Motivation für LHC
  - Kann Rechnung stark vereinfachen durch geschickte Wahl der Eichung (zB $\xi = 0, \xi = 1$) und Goldstone boson equivalence theorem
- Neutrale und geladene Kopplungen
  - Geladene Kopplung nur für $SU(2)_L$-Dubletts, da $W^\pm$-Bosonen nicht mit A mischen
  - Neutrale Kopplung auch für $SU(2)_L$-Singuletts, da Z und A mischen
    * Deshalb keine maximale P- und C-Verletzung durch neutrale Kopplungen
  - Alternative Formulierung: Geladene und neutrale Ströme
    * Geladene/neutrale (schwache) Ströme sind die Terme $J^\pm_\mu W^{\pm\mu}/J^0_\mu Z^\mu$ im Lagrangian
    * Denkweise in "Strömen" (vom Noether-Theorem) ist eher altmodisch, heute redet man eher über die zugehörigen "Kopplungen" (von Feynman-Diagrammen)
- Zusammenhänge zwischen häufig definierten Abkürzungen
  - Größen ausgedrückt durch v, g_Y, g_L:
    $\tan\theta_W = \frac{g_Y}{g_L}, 2m_W = vg_L, m_Z = \frac{v\sqrt{g_Y^2+g_L^2}}{2}, G_F = \frac{1}{\sqrt{2}v^2}, e = g_L\sin\theta_W$

2.3 QCD $SU(3)_c$

2.3.1 Grundlagen

- QCD $=$ Eichtheorie mit Gruppe $SU(3)$
  - Struktur der Theorie ist einfach im Vergleich zu $U(1)_y \times SU(2)_L$(keine Symmetriebrechung)
  - Besonderheit: Confinement-Phase $\Rightarrow$ Bindungszustände
- Grundbegriffe
  - Slang: "Teilchen hat Farbladung" $:\Longleftrightarrow$ Teilchen transformiert sich nicht-trivial unter $SU(3)_c$
    * Gegensatz: "Farbneutrale Teilchen" transformieren sich trivial unter $SU(3)_c$
  - Parton $=$ Überbegriff für farb-geladene Teilchen
  - Hadron $=$ Überbegriff für farb-neutrale Bindungszustände von Partonen
    * Meson $=$ Hadron mit gerader Anzahl von Quarks bzw Boson-Statistik
    * Baryon $=$ Hadron mit ungerader Anzahl von Quarks bzw Fermion-Statistik
- Methoden zur Beschreibung der QCD
  - $E \gtrsim \Lambda_{\text{QCD}}$: Perturbative QCD (pQCD) anwendbar wegen $\alpha_s \lesssim 1$
  - $E \lesssim \Lambda_{\text{QCD}}$: Benötige nicht-perturbative Methoden oder effektive Feldtheorie
    * Chirale Störungstheorie (Effektive Feldtheorie)
    * Gitter-QCD (numerische Rechnung in diskreter Raumzeit)
- Warum "Farb"-Ladung?
  - Kurze Antwort: Historisch geprägter Begriff, hat keine tiefere Bedeutung und muss nicht verwendet werden
  - Hintergrund: 3 Komponenten der fundamentalen und antifundamentalen Darstellungen der $SU(3)$ erinnern an 3 Farben(rot, grün, blau) und zugehörige Antifarben(anti-rot, anti-grün, anti-blau bzw cyan, magenta, gelb) im Farbkreis
    * Quarks transformieren sich unter fundamentaler Darstellung $\Rightarrow$ Kann in Feynman-Diagrammen einen Farb-Pfeil für ein Quark einzeichnen bzw Farb-Pfeil in entgegengesetzte Richtung für Anti-Quark
    * Gluonen transformieren sich unter adjungierter Darstellung $\Rightarrow$ Kann in Feynman-Diagrammen zwei Farb-Pfeile in unterschiedliche Richtungen für ein Gluon einzeichnen
      · Tensoren der adjungierten Darstellung A^a können über Tensoren der fundamentalen Darstellung ${A^i}_j$ ausgedrückt werden durch ${A^i}_j = {(T_a)^i}_j A^a$ bzw $A^a = \frac{1}{\eta} T^a A$
    * Farb-Pfeile sind an jedem Vertex erhalten bzw gleich viele einlaufende wie auslaufende Farb-Pfeile
      · Hintergrund: Farb-Pfeile entsprechen Indizes der fundamentalen Darstellung von $SU(3)$
  - Außerdem: In der Confinement-Phase kommen nur farbneutrale bzw "weiße" Hadronen vor
    * Farbneutrale Hadronen enthalten 3 Quarks, 3 Antiquarks oder ein Quark-Antiquark-Paare
    * Analogie zur Farbe passt, da rot, grün, blau bzw cyan, magenta, gelb bzw Farbe, Antifarbe jeweils weiß ergeben
- Motivation für Farbe: Pauli-Prinzip für $|\Omega^-\rangle = |sss\rangle$
  - Baryon $|\Omega^-\rangle = |sss\rangle$ experimentell beobachtet(1964)
  - Pauli-Prinzip: $|\Omega^-\rangle$ besteht aus 3 Quarks und ist daher ein Fermion
    * Fermion $=$ Gesamtwellenfunktion antisymmetrisch
    * $|\Omega^-\rangle$ ist symmetrisch bezüglich allen bekannten Freiheitsgraden
      · Orts-Wellenfunktion: Symmetrisch, da $|\Omega^-\rangle$ den Paritätseigenwert $+1$ hat
      · Spin-Wellenfunktion: Symmetrisch, da wegen $s = \frac{3}{2}$ alle Spins parallel ausgerichtet sind

- Flavor-Wellenfunktion: Symmetrisch, da alle Quarks denselben Flavor s haben
    * Fazit: Benötige neuen Freiheitsgrad, bezüglich dem $|\Omega^-\rangle$ antisymmetrisch ist $\Rightarrow$ Farb-Freiheitsgrad
  - Argumentation funktioniert genauso für $|\Delta^-\rangle = |ddd\rangle, |\Delta^{2+}\rangle = |uuu\rangle$
    * Argumentation mit $|\Omega^-\rangle$ ist bekannt, weil das Ω^- durch dieses Argument vorhergesagt wurde

2.3.2 Phasen von QCD: Asymptotische Freiheit vs Confinement

- "Phasen" einer Eichtheorie
  - Anschaulich: Verhalten der Theorie ändert sich maßgeblich bei einer bestimmten Energieskala
    * Hier: Übergang zwischen perturbativem(schwach gekoppeltem) und nicht-perturbativem(stark gekoppelten) Bereich
  - Zusammenhang mit Phasenbegriff aus statistischer Physik?
- Laufende Kopplung von QCD $\alpha_s(Q^2) = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{1+\frac{\beta_0}{4\pi}\alpha_s(\mu^2)\log\frac{Q^2}{\mu^2}}$
  - Parameter $\beta_0 = \frac{11N_c-2N_f}{3}$ bestimmt, ob Kopplung bei geringen Energien klein oder groß wird
    * Im SM $N_c = 3, N_f = 6 \Rightarrow \beta_0 = 7$ und Kopplung wird bei geringen Energien größer
  - Vorzeichen von β_0 wird bestimmt durch das Verhältnis von Abschirmung freier Farbladungen durch Quarks und Anti-Abschirmung freier Farbladungen durch Gluonen bei kleinen Energien
    * Beitrag $\propto -N_f$ wird verursacht durch Quark-Loops zwischen dem Beobachter und dem Objekt $\Rightarrow$ Quark-Loops schwächen Farbladungen bei großen Abständen ab und schwächen damit Confinement ab("screening")
    * Beitrag $\propto +N_c$ wird verursacht durch Gluon-Loops zwischen dem Beobachter und dem Objekt $\Rightarrow$ Gluon-Loops verstärken Farbladungen bei großen Abständen und begünstigen damit Confinement("anti-screening")
    * In QED gibt es keine Eichboson-Selbstwechselwirkungen $\Rightarrow$ Keine anti-screening-Effekte und kein Confinement bei kleinen Energien
- Confinement bzw $\alpha_s(Q^2) \gtrsim 1$ für $Q \lesssim \Lambda_{\text{QCD}}$
  - Effektiv: $\alpha_s(Q^2) \gtrsim 1 \Rightarrow$ Störungstheorie in $\alpha_s \ll 1$ nicht mehr gerechtfertigt
  - Physikalisch: Farb-geladene Teilchen vereinigen sich zu farb-neutralen Bindungszuständen
    * Freie farb-geladene Objekte können nicht existieren, da sie sich durch die starke Wechselwirkung sofort zu farb-neutralen Objekten zusammenschließen würden
    * Farb-neutrale Objekte sind der stabile Endzustand, da sie nicht weiter mit farb-geladenen Objekten wechselwirken
  - Formalismus zur Berechnung von Streu-Prozessen(Matrixelemente, Feynman-Diagramme) beruht auf Störungstheorie $\Rightarrow$ Nicht mehr anwendbar
    * QCD-Streuprozesse an sich machen keinen in der Confinement-Phase keinen Sinn, da es keine freien farbgeladenen Teilchen und damit keine möglichen QCD-Streuprozesse mehr gibt
  - Alternative Methoden, um in der Confinement-Phase Aussagen zu machen
    * Nicht-perturbative Methoden(zB Gitter-Eichtheorie)
    * Effektive Theorie für die farb-neutralen Bindungszustände(zB chirale Störungstheorie)
- Asymptotische Freiheit bzw $\alpha_s(Q^2) \lesssim 1$ für $Q \gtrsim \Lambda_{\text{QCD}}$
  - Effektiv: $\alpha_s(Q^2) \lesssim 1 \Rightarrow$ Störungstheorie in $\alpha_s \ll 1$ ist gerechtfertigt
  - Physikalisch: Freie Farb-geladene Teilchen sind kein Problem, da sie nur schwach miteinander wechselwirken
  - Störungstheorie ist gerechtfertigt $\Rightarrow$ Kann mit dem üblichen Störungstheorie-Formalismus Streu-Prozesse behandeln
- Phasenübergang bei Λ_{QCD}

- Finde experimentell $\Lambda_{\text{QCD}} \sim 300\,\text{MeV}$
- Phasenübergang von hohen zu niedrigen Energien
  * Hadronisation: Farb-geladene Teilchen bilden farb-neutrale Bindungszustände
  * Entwicklung in $\alpha_s \ll 1$ wird eine zunehmend schlechtere Näherung
- Phasenübergang von niedrigen zu hohen Energien(...)
  * Farb-geladene Komponenten eines farb-neutralen Bindungszustands werden frei

2.3.3 Hadron-Streuung

- Hadron-Streuung ist wichtiges Thema für Verständnis von Streu-Prozessen an Hadron-Collidern
  - Auf Experiment fokussiertes Theorie-Thema, passt gerade so in diese Zusammenfassung
  - Problem: Hadron ist Bindungszustand von Partonen, bei hohen Energien(asymptotische Freiheit) streuen aber die Partonen $\Rightarrow$ Welches Parton nimmt am Prozess teil
  - Kann $e^\pm h$-Streuung(einfaches Problem, da ein Hadron) oder hh-Streuung(doppeltes Problem) betrachten
- Tiefinelastische Streuung $=$ Streuung von Hadronen mit Schwerpunktsenergien $Q \gtrsim \Lambda_{\text{QCD}}$
  - Intuitiv: Tiefinelastische Streuung, weil man dabei tief ins Hadron reinschauen kann
  - $Q \gtrsim \Lambda_{\text{QCD}} \Rightarrow$ Partonen bewegen sich frei, kann Störungstheorie verwenden
- Kinematische Größen zur Beschreibung der Partonen im Nukleon
  - Nukleon: Impuls P/P' vor/nach dem Stoß, Masse M
  - Impulsübertrag q zum Streupartner
    * Streupartner ist $e^\pm$ oder zweites Nukleon
    * Impulsübertrag bestimmt die Schwerpunktsenergie Q: $Q^2 = -q^2$
  - Bjorken-Skalenvariable $x = \frac{Q^2}{2Pq}$
  - Parton-Impulsanteil $\xi \in [0,1]$ in $p = \xi P$ mit Parton-Impuls p
- Partondichtefunktionen (PDFs) $f_{ij}(\xi)$
  - Anschaulich: Wahrscheinlichkeitsdichte des Partons i mit Impulsanteil ξ im Hadron j
    * $f_{ij}(\xi)d\xi$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, im Hadron j ein Parton i mit Impulsanteil im Bereich $[\xi, \xi + d\xi]$ zu finden
  - In der Praxis spielen nur Proton-PDFs eine Rolle $\Rightarrow$ Schreibe $f_i(\xi)$ mit Index i für Parton
  - Anwendung: Gewichtungsfunktion für tiefinelastische Streuung in der Form $\sigma(hX \to YZ) = \sum_i \int_0^1 d\xi f_{ih}(\xi)\sigma(p_i X \to YZ)$ für Hadron h und Partonen p_i
  - DGLAP-Gleichungen(...)
    * Anschaulich: Renormierungsgruppengleichungen für PDFs
- Faktorisierung $=$ Annahme zur Beschreibung von Hadron-Streuung
  1. Auswahl der Partonen aus dem Hadron gemäß PDFs
     - Alle weiteren Prozesse werden gefaltet mit den PDFs der beteiligten Partonen
  2. Streuprozess der Partonen
     - Kann mit Störungstheorie beschrieben werden, da die Streuung in asymptotische-Freiheit-Phase stattfindet
  3. Hadronisierung
     - Nicht-perturbativer Prozess $\Rightarrow$ Schwer zu beschreiben, verwende Simulationen

  - Näherung: Die 3 Prozesse finden unabhängig voneinander statt
    * Realität: Komplexe Überlagerung der 3 Prozesse

        * Experimentelle Ergebnisse bestätigen, dass die Näherung meist gerechtfertigt ist
    - Erweiterung: Transverse momentum dependent(TMD) factorisation
        * Berücksichtige die Möglichkeit, das Partonenimpulse Anteile senkrecht zur Strahlrichtung haben
        * Bisher: Collinear factorisation
            · Annahme: Parton-Impulse sind kollinear(parallel) zu Hadron-Impulsen

- Underlying events (UE) $=$ Überbegriff für zusätzliche Prozesse bei niedrigerer Energie
    - Fokus liegt auf dem Hochenergie-Streuprozess, aber Korrekturen durch andere Streuprozesse bei niedrigerer Energie müssen evtl auch berücksichtigt werden
    - Initial/final state radiation $=$ Abstrahlung von Photonen oder Gluonen vor/nach dem Hochenergie-Streuprozess
    - Multiple parton interactions(MIPs) $=$ Mehrere Parton-Paare streuen
        * MIPs gibt es nur bei Hadron-Hadron-Kollisionen
        * Zusätzliche Komplikation in der Rechnung, die durch Näherungen berücksichtigt werden kann(...)

2.3.4 Weitere Themen

- Starke CP-Verletzung durch θ-Term
    - Anschaulich: Parameter θ_c existiert im SM $\Rightarrow$ Falls $\theta_c \neq 0$ gibt es CP-Verletzung in QCD ($=$ starke CP-Verletzung)
    - Formal: CP-verletzender Term $\mathscr{L} \supset \theta_c \frac{g_c^2}{16\pi^2} G^a_{\mu\nu} \tilde{G}^{\mu\nu}_a \overset{CP}{\to} -\theta_c \frac{g_c^2}{16\pi^2} G^a_{\mu\nu} \tilde{G}^{\mu\nu}_a$
    - Beobachtung: $\theta_c \lesssim 10^{-10} \Rightarrow$ Strong CP problem
    - Achtung: CP-verletzende Effekte sind nicht-perturbativ
        * Begründung: $\mathscr{L} \supset \theta_c \frac{g_c^2}{16\pi^2} G^a_{\mu\nu} \tilde{G}^{\mu\nu}_a$ ist totale Ableitung und hat daher nur nicht-perturbative Effekte
        * Wie sehen diese Effekte jetzt aus?

2.4 Flavor-Sektor

2.4.1 Grundlagen

- Flavorphysik $=$ Physik der Phänomene, die durch die Existenz von mehreren Fermion-Generationen verursacht werden
    - Typische Flavorphysik-Gebiete: Flavorändernde Prozesse, Hadron-Spektroskopie, Neutrinophysik, B-Physik
    - Unterscheide Quark-Flavorphysik und Lepton-Flavorphysik
        * Natürliche Unterscheidung, da Fermionen (Felder mit mehreren Generationen) in Quarks und Leptonen unterteilt werden
    - Auf Lagrangian-Level: Flavorphysik kommt aus den Yukawa-Termen
        * Yukawa-Terme (in der Flavorbasis) sind die einzigen Terme im SM-Lagrangian, die Fermionen mit verschiedenem Flavor mischen
        * Komplexester Teil des Standardmodells: Yukawa-Terme enthalten einen Großteil (13 von 19) der freien Parameter im Standardmodell

- Lepton-Flavorphysik im Standardmodell ist trivial
    - Grund: Keine rechtshändigen Neutrinos $N_R \Rightarrow$ In der Massenbasis der Leptonen gibt es keine flavorändernden Prozesse und damit keine Unterschiede zwischen den Lepton-Generationen (außer den unterschiedlichen Massen)
    - In der Realität ist Lepton-Flavorphysik nicht-trivial (wegen Neutrinooszillationen) $\Rightarrow$ SM ist unvollständig, benötige Erweiterung

    * Behandle Lepton-Flavorphysik in Erweiterungen des SM in den folgenden Kapiteln

- Motivation für 3 Quark-Familien: CP-Verletzung
  - CP-Verletzung für Quarks wurde experimentell beobachtet (Cronin, Fitch)
  - Benötige im SM (bei sonst fensten Bedingungen) mindestens 3 Quark-Familien, um eine komplexe CKM-Matrix und damit eine Quelle für CP-Verletzung zu bekommen
- Motivation für 3 Lepton-Familien: Eichanomaliefreiheit
  - Wenn es 3 Quark-Familien gibt, benötigt man auch 3 Lepton-Familien, um Eichanomalien zu verhindern
  - Außerdem: Mit 3 Lepton-Familien kann man CP-Verletzung im Lepton-Sektor beschreiben

2.4.2 Festlegung der redundanten Freiheitsgrade der Yukawa-Terme

- Situation: Habe SM-Lagrangian hingeschrieben, aber redundante Freiheitsgrade der Fermion-Felder noch nicht zur Reduktion der Parameter im Lagrangian verwendet
  - Anschaulich: Habe erstmal Lagrangian mit beliebigen Koeffizienten der Terme hingeschrieben, kann dann Abhängigkeiten zwischen den Koeffizienten finden durch Einschränkung der redundante Freiheitsgrade der Felder
  - "Reduktion der Parameter des Lagrangians" ist gleicher Prozess wie Abschnitt "Konstruktion des Lagrangians für typische freie Felder" in QFT-Zusammenfassung
    * Habe 3 Fermion-Generationen mit identischen Kopplungen $\Rightarrow$ Mehr redundante Freiheitsgrade als nur für eine Fermion-Generation
- Flavorbasis vs Massenbasis
  - Anschaulich: Unterschiedliche Forderungen an die Eigenschaften der Fermionfelder möglich
    * Messgrößen sind unabhängig von den gewählten Forderungen
    * QM-Analogie: Wahl der Observablen, bezüglich denen die Zustände Eigenzustände sind
  - Flavorbasis: Fermionfelder so gewählt, dass es keine flavor-ändernden Prozesse durch Eichbosonen gibt
    * Flavorändernde Prozesse in Flavorbasis nur durch Yukawa-Terme
  - Massenbasis: Fermionfelder sind Massen-Eigenzustände
    * Flavorändernde Prozessein Massenbasis nur durch Eichbosonen
  - Ausgangssituation: Lagrangian in Flavorbasis
- Mathematische Grundlage: Singular value decomposition bzw biunitary diagonalization
  - Aussage: Kann für jede Matrix M zwei unitäre Matrizen U, T wählen, sodass $D = U^\dagger M T$ diagonal ist und nur nicht-negative Diagonaleinträge hat[1]
  - Anschaulich: Verallgemeinerung von unitärer Diagonalisierung von normalen quadratischen Matrizen
    * M heißt normal $:\iff M^\dagger M = M M^\dagger$
- Festlegung der redundanten Freiheitsgrade für Leptonen
  1. Eichkinetische Terme der Leptonfelder im Lagrangian haben $U(3)^2$-Redundanz-Freiheitsgrad
     - Je ein $U(3)$-Redundanz-Freiheitsgrad für L_L und E_R
     - Yukawa-Terme der Leptonfelder haben keine $U(3)^2$-Redundanz-Freiheitsgrad, da die Yukawa-Kopplungen Y^L_{ij} verschiedene Lepton-Generationen mischen und daher bei der Redefinition von L_L, E_R geändert werden
  2. Lege $U(3)^2$-Redundanz-Freiheitsgrad fest durch biunitäre Diagonalisierung von Y^L

[1] Beweis in https://ucilnica.fmf.uni-lj.si/pluginfile.php/2013/course/section/9907/Guri%20Guza-JKL-biunitary.pdf

- Mathematik: 3×3-Matrix Y^L kann durch unabhängige $U(3)$-Transformationen von L_L und E_R diagonalisiert werden
- Explizit: $L_L \to U_L L_L, E_R \to U_E E_R$ mit Transformationsmatrizen U_L, U_E so, dass Y^L_{diag} diagonal ist in
$Y^L_{ij}\bar{L}_{L,i}E_{R,j}H \to Y^L_{ij}\bar{L}_{L,k}(U_L^\dagger)_{ki}(U_E)_{jm}E_{R,m}H = (U_L^\dagger Y^L U_E)_{km}\bar{L}_{L,k}E_{R,m}H =: (Y^L_{\text{diag}})_{km}\bar{L}_{L,k}E_{R,m}H$

3. Interpretiere Diagonaleinträge von vY^L als Massen der geladenen Leptonen: $m_i\delta_{ij} := vY^L_{ij}$
   - Fazit: $U(1)_Y \times SU(2)_L \to U(1)_Q$ generiert Massenterme $\bar{E}_{L,i}E_{R,j}+$h.c. mit Vorfaktor $m_i\delta_{ij} = vY^L_{ij}$

- Fazit: Leptonen im SM können gleichzeitig Flavor- und Masseneigenzustände sein

• Festlegung der redundanten Freiheitsgrade für Quarks

- Vorgehen ähnlich wie bei Leptonen, aber anders
  * Unterschied: Bei Quarks gibt es U_R und D_R, bei Leptonen gibt es nur E_R (kein N_R) und daher sind Neutrinos masselos

1. Eichkinetische Terme der Quarkfelder im Lagrangian haben $U(3)^3$-Redundanz-Freiheitsgrad
   - Je ein $U(3)$-Redundanz-Freiheitsgrad für Q_L, U_R, D_R
2. Lege $U(3)^2$-Redundanz-Freiheitsgrad fest durch biunitäre Diagonalisierung von Y^U
   - Vorgehen analog wie bei Leptonen mit den $U(3)$-Transformationen von Q_L und D_R
   - Interpretiere Diagonaleinträge von vY^U als Massen der up-type Quarks (analog zu Leptonen)
3. Lege restlichen $U(3)$-Redundanz-Freiheitsgrad fest durch biunitäre Diagonalisierung von Y^D, muss dazu aber die CKM-Matrix V einführen
   - Explizit: $Q_L \to U_Q Q_L, D_R \to U_D D_R, U_R \to U_U U_R$ mit unitären Matrizen U_Q, U_D, U_U und unitärer Matrix V so, dass Y^D_{diag} diagonal ist in $Y^D_{ij}\bar{q}_{L,i}D_{R,j}H \to Y^d_{ij}\bar{Q}_{L,k}(U_Q^\dagger)_{ki}(U_D)_{jm}D_{R,m}H = (U_Q^\dagger Y^D U_D)_{km}\bar{Q}_{L,k}D_{R,m}H$
     $= (VV^\dagger U_Q^\dagger Y^D U_D)_{km}\bar{Q}_{L,k}D_{R,m}H =: (VY^D_{\text{diag}})_{km}\bar{Q}_{L,k}D_{R,m}H$
     * U_{Q_L} ist schon festgelegt durch die Diagonalisierung von Y^U $\Rightarrow$ Benötige zusätzliche Matrix V, damit $U_{Q_L}V$ beliebig gewählt werden kann in $Y^D_{\text{diag}} = (U_{Q_L}V)^\dagger Y^D U_{D_R}$
   - Fazit: In der Flavor-Basis sind down-type Quarkfelder keine Masseneigenzustände
     * Down-type Quarkfelder haben nicht-diagonale Massenmatrix $V \times vY^D$(vY^D ist diagonal, V nicht)

• Optional: Wechsel in Massen-Basis für Quark-Felder

- Explizit: $d_L \to Vd_L \Rightarrow$ Down-type-Quark Massenterme werden flavor-diagonal, eichkinetische Terme der linkshändigen Quarks werden nicht mehr flavor-diagonal
  * Down-type-Quark Massenterme (aus $(VY^D)_{ij}\bar{Q}_{L,i}D_{R,j}H$):
    $\mathscr{L} \supset -\frac{v}{\sqrt{2}}(VY^D)_{ij}\bar{d}_{L,i}d_{R,j} \to -\frac{v}{\sqrt{2}}(VY^D)_{ij}\bar{d}_{L,k}(V^\dagger)_{ki}d_{R,j} = -\frac{v}{\sqrt{2}}(V^\dagger VY^D)_{kj}\bar{d}_{L,k}d_{R,j} = -\frac{v}{\sqrt{2}}Y^D_{kj}\bar{d}_{L,k}d_{R,j}$
    · Da Y^D diagonal ist, ist $\frac{v}{\sqrt{2}}Y^D$ Massenmatrix der down-type Quarks
  * Eichkinetische Terme der linkshändigen Quarks:
    $\bar{Q}_L i\not{D}Q_{L,i} = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}^\dagger \gamma^0 i\not{D}\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} u_L \\ Vd_L \end{pmatrix}^\dagger \gamma^0 i\not{D}\begin{pmatrix} u_L \\ Vd_L \end{pmatrix} = \dots$
    · Kann Endergebnis weiter vereinfachen, wird aber hässlich wegen komplexer Form von D_μ
    · Beobachtung 1: Für Terme $\bar{u}_L(\cdots)u_L$ und $\bar{d}_L(\cdots)d_L$(wegen $V^\dagger V = 1$) ändert sich nichts, für Terme $\bar{u}_L(\cdots)d_L$ bzw $\bar{d}_L(\cdots)u_L$ kommt zusätzliche Generations-Gewichtungs-Matrix V bzw $V^\dagger$ dazu
    · Beobachtung 2: Terme $\bar{u}_L(\cdots)d_L$ und $\bar{d}_L(\cdots)u_L$ gibt es nur mit $W^\pm$-Bosonen in $(\cdots)$, da nur $W^\pm$-Bosonen mit $SU(2)$-Generatoren mit nicht-diagonalen Einträgen auftreten
- Hat nichts mit redundanten Freiheitsgraden zu tun, sondern ist physikalische Redefinition der Quarkfelder
  * Physikalische Redefinition, da der Lagrangian seine Struktur durch die Redefinition ändert
- Massenbasis ist die übliche Konvention für Quarkfelder
- Notiz: Konvention zur Wahl der CKM-Matrix (V vs V^*?) ist $\bar{u}VT^iW^i_\mu\gamma^\mu P_L d$ bzw W^+_μ/W^-_μ für $\bar{u}d/\bar{d}u$

2.4.3 CKM-Matrix V

- CKM-Matrix ist unitär $\delta_{ij} = (V^\dagger V)_{ij} = (V^\dagger)_{ik} V_{kj} = V_{ki}^* V_{kj}$
  - Folgt aus der Definition von V im Rahmen des Wechsels von der Flavor- zur Massenbasis
- Freiheitsgrade: 3 Winkel, 1 Phase
  - Wichtige Erkenntnis: Kann $\mathcal{CP}$-Verletzung bzw komplexe Phase der CKM-Matrix nicht auf ein paar CKM-Element reduzieren ("die hier sind komplex, die anderen sind reell"), sondern $\mathcal{CP}$-Verletzung ist ein kollektives Phänomen der CKM-Matrix
    * Explizit: Kann durch andere Wahl der Phasen-Konvention ändern, welche CKM-Elemente reell bzw komplex sind
  - Zugang 1: Redundante Freiheitsgrade durch $U(1)_B$ (für n Quark-Generationen)
    * Grundlage: Quarkfelder haben globale $U(1)_B$-Symmetrie $d_i \to e^{i\alpha_{d,i}} d_i, u_i \to e^{i\alpha_{u,i}} u_i$ mit Generations-Index i
    * Transformationsverhalten der CKM-Matrix unter $U(1)_B$: $V_{ij} \to e^{i(\alpha_{d,j} - \alpha_{u,i})} V_{ij}$
      · Folgt aus der Bedingung, dass der Lagrangian-Term (...) invariant unter $U(1)_B$ ist
    * Wegen $U(1)_B$ sind $2n-1$ Freiheitsgrade der CKM-Matrix redundant
      · $2n$ unabhängige Parameter $\alpha_{d,i}, \alpha_{u,i}$ durch $U(1)_B$-Transformationen $\Rightarrow$ Kann $2n-1$ unabhängige Phasendifferenzen $\alpha_{d,j} - \alpha_{u,i}$ konstruieren $\Rightarrow$ Kann mit $V_{ij} \to e^{i(\alpha_{d,j} - \alpha_{u,i})} V_{ij}$ $2n-1$ komplexe Phasen der CKM-Matrix entfernen
  - Zugang 2: Redundante Freiheitsgrade durch Redefinition der $\mathcal{CP}$-Phasen der Quark-Felder (für n Quark-Generationen)
    * Grundlage: Phase von Fermionen unter $\mathcal{CP}$-Transformationen ist ein unphysikalischer Parameter der Theorie $\Rightarrow$ Kann diese Phase festlegen, um Abhängigkeiten zwischen CKM-Elementen zu finden
    * Transformationsverhalten der CKM-Matrix unter $\mathcal{CP}$: $V_{ud} \to \eta_{\mathcal{CP},\bar{u}} \eta_{\mathcal{CP},d} V_{ud}$
      · Notiz: Betrachte Produkte der Phasen $\eta_{\mathcal{CP},f} := \eta_{\mathcal{C},f} \eta_{\mathcal{P},f}$, da die einzelnen Phasen $\eta_{\mathcal{C}/\mathcal{P},f}$ nicht in der Rechnung vorkommen
  - Vergleich der beiden Zugänge
    * Anschaulich: Gleiches Vorgehen (6 freie Phasen $\Rightarrow$ Kann 5 unabhängige Phasen-Differenzen konstruieren), aber mit unterschiedlicher physikalischer Argumentation (Phasen aus redundanter $U(1)_B$-Symmetrie vs freie Phasen aus $\mathcal{CP}$-Transformationsverhalten)
      · In Lehrbüchern wird meist Zugang 1 diskutiert, da kontinuierliche Symmetrien meist mehr behandelt werden
    * Ehrlichster Zugang: $U(1)_B$-Phasen und $\mathcal{C}, \mathcal{P}$-Phasen sind redundante Freiheitsgrade, durch Festlegen von einem der beiden Typen Phasen wird der andere Typ aber auch festgelegt (da es dieselben Quarks sind)
  - Freiheitsgrade einer CKM-Matrix für n Quark-Generationen: $\frac{n(n-1)}{2}$ Winkel, $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Phasen
    * Beobachtung: Benötige $n \geq 3$, um mindestens eine komplexe Phase und damit eine Quelle für CP-Verletzung zu haben
    1. Matrix $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hat $2n^2$ reelle Parameter
    2. M ist unitär($M^\dagger M = 1$) $\Rightarrow$ n^2 reelle Parameter übrig
       * $M^\dagger M = 1$ liefert n^2 Bedingungen(eine für jeden Eintrag der $n \times n$-Matrix $M^\dagger M$)
    3. $2n-1$ Parameter sind redundant wegen $U(1)_B \Rightarrow (n-1)^2$ reelle Parameter übrig
    4. Orthogonale $n \times n$-Matrix hat $\frac{n(n-1)}{2}$ Parameter $\Rightarrow$ Interpretiere $\frac{n(n-1)}{2}$ Parameter von M als Winkel
       * Definiere "Winkel" als (reelle) Freiheitsgrade einer entsprechenden (reellen) orthogonalen Matrix
       * Definiere "Phase" als nicht-reelle Freiheitsgrade der Matrix
    5. Interpretiere restliche $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Parameter als Phasen
       * $(n-1)^2 - \frac{n(n-1)}{2} = (n-1)\frac{2(n-1)-n}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$

- Parametrisierungen der CKM-Matrix $V = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix}$
  - Parametrisierungen sind eindeutig bis auf $U(1)_B$-Redundanz
    * Kann die $U(1)_B$-Redundanz verwenden, um beliebige (maximal 5) Einträge von V reell zu machen
  - Standard-Parametrisierung $V = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}s_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}$
    * Anschaulich: Naive Parametrisierung (verwende Winkel und Phasen)
    * Parameter: $\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}, \delta$
      · Verwende Abkürzungen $s_{ij} := \sin\theta_{ij}, c_{ij} := \cos\theta_{ij}$
  - Naive Wolfenstein-Parametrisierung $V = \begin{pmatrix} 1-\frac{\lambda^2}{2} & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1-\frac{\lambda^2}{2} & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1-\rho-i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\lambda^4)$
    * Anschaulich: Entwickle V in kleinem Parameter $\lambda := \sin\theta_{12} \approx 0.23$ wegen $s_{13} \ll s_{23} \ll s_{12} \ll 1$
      · Setze Definition der Wolfenstein-Parameter über die naiven Parameter in naive Parametrisierung ein und entwickle den Ausdruck bis $\mathcal{O}(\lambda^4)$
    * Parameter: λ, A, ρ, eta
      · Zusammenhang mit naiven Parametern: $s_{12} \equiv \lambda, s_{23} \equiv A\lambda^2, s_{13}e^{i\delta} \equiv A\lambda^3(\rho + i\eta)$
      · Relation $s_{13}e^{i\delta} \equiv A\lambda^3(\rho + i\eta)$ definiert die reellen Parameter ρ und η, da sie als komplexe Gleichung zwei reelle Gleichungen enthält
    * Problem: Parametrisierung gilt nur bis $\mathcal{O}(\lambda^4)$ bzw Genauigkeit $\mathcal{O}(10^{-2})$
      · Moderne Experimentente erreichen Genauigkeiten von besser als $\mathcal{O}(\lambda^4)$
      · Kann V bis zu beliebig hoher Ordnung in naiven Wolfenstein-Parametern entwickeln oder verwende modifizierte Wolfenstein-Parameter
    * Vorteil: Parameter ρ, η legen das reskalierte $(3,1)$-Unitaritätsdreieck fest
  - Modifizierte Wolfenstein-Parametrisierung
    * Anschaulich: Erweiterung der Wolfenstein-Parametrisierung, die nützlich für Entwicklung von V in λ bis zu beliebig hoher Ordnung sind
      · Gebe keinen Ausdruck für V in Abhängigkeit von $A, \lambda, \bar\eta, \bar\rho$ an, da der Ausdruck beliebig hässlich wird
      · Außerdem: In modifizierter Wolfenstein-Parametrisierung ist V exakt unitär
    * Parameter: $\lambda, A, \bar\rho, \bar\eta$
      · Parameter λ, A analog zur naiven Wolfenstein-Parametrisierung
      · Geschicktere Definition für $\bar\rho, \bar\eta$: $s_{13}e^{i\delta} \equiv \frac{A\lambda^3(\bar\rho + i\bar\eta)\sqrt{1-(A\lambda^2)^2}}{\sqrt{1-\lambda^2}(1-(A\lambda^2)^2(\bar\rho + i\bar\eta))}$

- Unitaritätsdreiecke (Unitarity Triangle (UT)s)
  - Idee: Interpretiere Unitaritätsbedingungen $V_{ki}^* V_{kj} = 0$(für $i \neq j$) als Dreiecke in der komplexen Ebene
    * Explizit: $V_{ki}^* V_{kj} = \sum_{k=1}^3 V_{ki}^* V_{kj}$ sind 3 Vektoren in der komplexen Ebene, deren Summe 0 ergeben muss
  - Finde 6 Unitaritätsdreiecke: $(i,j) \in \{(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2)\}$
    * UTs mit $i \leftrightarrow j$ gehen auseinander hervor durch komplexe Konjugation $\Rightarrow$ Eigentlich nur 3 fundamental unterschiedliche UTs $(2,1),(3,1),(3,2)$
  - "Das Unitaritätsdreieck" $=$ UT für B-Physik $=$ Reskaliertes $(3,1)$-UT
    * Anschaulich: Besonders interessant, da alle Seitenlängen ähnliche Länge haben($\sim \lambda^3, \lambda^3, \lambda^3$)
    * "Reskaliert": Alle Seitenlängen durch $V_{cb}^* V_{cd}$ geteilt
      · Verwende $V_{cb}^* V_{cd}$, da das die am besten vermessene Seitenlänge ist
    * Formal: $0 = \frac{V_{ub}^* V_{ud} + V_{cb}^* V_{cd} + V_{tb}^* V_{td}}{V_{cb}^* V_{cd}} = 1 + \frac{V_{ub}^* V_{ud}}{V_{cb}^* V_{cd}} + \frac{V_{tb}^* V_{td}}{V_{cb}^* V_{cd}}$
    * Winkel und Seitenlängen in modifizierten Wolfenstein-Parametern

- Seitenlängen: $R_u = \left|\frac{V_{ub}^* V_{ud}}{V_{cb}^* V_{cd}}\right| = \sqrt{\bar\rho^2+\bar\eta^2}$(u für up), $R_t = \left|\frac{V_{tb}^* V_{td}}{V_{cb}^* V_{cd}}\right|$(t für top)
- Winkel: $\gamma = \phi_3 = \arg\left(-\frac{V_{tb}^* V_{td}}{V_{ub}^* V_{ud}}\right) = \arctan\frac{\bar\eta}{\bar\rho}, \beta = \phi_1 = \arg\left(-\frac{V_{cb}^* V_{cd}}{V_{tb}^* V_{td}}\right) = \arctan\frac{\bar\eta}{1-\bar\rho}, \alpha = \phi_2 = \arg\left(-\frac{V_{ub}^* V_{ud}}{V_{cb}^* V_{cd}}\right) = \arctan\frac{\bar\eta}{\bar\eta^2+\bar\rho(\bar\rho-1)}$
- Bildlich: Lege Grundseite(Länge 1) entlang x-Achse $\Rightarrow$ Ecken des UTs sind bei $(0,0),(1,0)$ und $(\bar\rho,\bar\eta)$
- Nützliche Relation: $\bar\rho + i\bar\eta + (1-\bar\rho-i\bar\eta) = 1 \Rightarrow R_u e^{i\gamma} + R_t e^{-i\beta} = 1$

- UT für B_s-Physik = Reskaliertes $(3,2)$-UT
  * Anschaulich: Weniger interessant wegen deutlich unterschiedlichen Seitenlängen($\sim \lambda^2, \lambda^2, \lambda^4$)
  * Definitionen analog zum UT für B-Physik
- UT für K-Physik = Reskaliertes $(2,1)$-UT
  * Anschaulich: Weniger interessant wegen deutlich unterschiedlichen Seitenlängen($\sim \lambda, \lambda, \lambda^5$)
  * Definitionen analog zum UT für B-Physik
- Unitaritätsdreiecke und Experimentalphysik
  * Winkel der 3 UTs sind geschickte Parameter, da sie oft in Observablen auftauchen
  * Kann Unitarität der CKM-Matrix testen durch Messung der UT-Winkel

- Jarlskog-Invariante J in $\sigma_{ik}\sigma_{jl}J = \mathrm{Im}(V_{ij}V_{il}^* V_{kl} V_{kj}^*)$ (no sum) mit $\sigma_{ij} := \sum_k \epsilon_{ijk}$
  - Anschaulich: J ist elegantes Maß für CP-Verletzung in der CKM-Matrix
    * In der Praxis selten verwendet, da die Geometrie mit UTs einfacher ist
  - Bildlich: $J = 2F$ mit der Fläche F eines beliebigen UTs
    * Nicht-triviale Aussage: Alle UTs haben dieselbe Fläche
  - J in expliziten Parametrisierungen: $J = A^2\lambda^6\eta + \mathcal{O}(\lambda^{10}) = c_{12}c_{23}c_{13}^2 s_{12}s_{23}s_{13}\sin\delta$

2.4.4 Weitere Themen

- Schwache CP-Verletzung
  - Anschaulich: Komplexe CKM-Matrix V erzeugt CP-Verletzung
  - Basis-Abhängigkeit: In Flavor-Basis sind CP-verletzende Effekte in Yukawa-Termen (Quark-Higgs-Kopplung), in Massen-Basis sind CP-verletzende Effekte in eichkinetischen Termen der Fermionen (Quark-$W_\mu^\pm$-Kopplung)
  - Term im Lagrangian (in Massen-Basis):
    $\mathscr{L}_{\text{SM}} \supset \bar u V_{ud} T^i W_\mu^i \gamma^\mu P_L d + \text{h.c.} \overset{\mathcal{PC}}{\to} \bar d V_{ud} T^i W_\mu^i \gamma^\mu P_L u + \text{h.c.} = \bar u V_{ud}^* T^i W_\mu^i \gamma^\mu P_L d + \text{h.c.}$
    * Rechenschritte: Führe $\mathcal{CP}$-Transformation für Spinor-Bilinear und Eichfeld durch (vertauscht Reihenfolge im Spinor-Bilinear), vertausche dann Term mit seinem hermitesch konjugiertem (vertauscht Reihenfolge im Spinor-Bilinear nochmal) $\Rightarrow$ Erhalte denselben Term bis auf $V_{ud} \to V_{ud}^*$
    * Alternative: Kann (wegen $\mathcal{CPT}$-Theorem) äquivalent auch $\mathcal{T}$-Transformation betrachten $\Rightarrow$ Erhalte $V_{ud} \to V_{ud}^*$ wegen antilinearer+antiunitärer Transformation, der Rest bleibt gleich
  - (Schwache) $\mathcal{CP}$-Verletzung in einem Prozess
    * $\mathcal{CP}$ ist im Gegensatz zu $\mathcal{C}, \mathcal{P}$ nicht maximal verletzt (= der $\mathcal{CP}$-konjugierte Prozess existiert immer, ist aber evtl leicht unterdrückt)
    * $\mathcal{CP}$-Verletzung ist Interferenzphänomen $\Rightarrow$ Benötige mindestens 2 Summanden im Matrixelement mit unterschiedlichen Phasen für $\mathcal{CP}$-Verletzung
      - Umso ähnlicher die Beträge der Summanden, umso größer die $\mathcal{CP}$-Verletzung
      - Typisch: Ein Summand von tree-level-Beitrag, der andere von 1-Loop-Beitrag $\Rightarrow \mathcal{CP}$-Verletzung ist meist ein sehr kleiner Effekt

- Cabibbo-Unterdrückung
  - Prozess ist n-fach Cabibbo-unterdrückt $\iff$ Finde in Wolfensteinparametrisierung $\mathcal{M} \propto \lambda^n$

- Anschaulich: Wolfenstein-Parametrisierung erlaubt Abschätzung von CKM-Elementen in Potenzen von λ

- GIM-Mechanismus
  - Historisch: Zunächst empirisch gefunden für (seltenen) Zerfall $K_L \to \mu^+\mu^-$, später durch 2 Quark-Familien und CKM-Unitarität erklärt (Glashow, Iliopoulus, Maiani, 1970)
  - Modern: FCNCs sind unterdrückt mit $\propto \frac{m_q^2}{m_W^2}$
    * Grund: Von Quarkmassen unabhängige Terme verschwinden wegen CKM-Unitarität $\sum_k V_{ki}^* V_{kj} = 0$
    * m_q ist die Masse des Quarks, das den größten Beitrag zum Matrixelement hat (hängt von CKM-Elementen des Prozesses ab)

2.5 θ-Terme

2.5.1 Redundante Freiheitsgrade der θ-Terme (...)

2.5.2 Chirale Anomalien im Standardmodell(...)

2.5.3 Nichtperturbative Effekte im SM: Instantons und Sphalerons(...)

2.6 Eichfixierung und Ghost-Felder(...)

2.7 Probleme des Standardmodells

2.7.1 Epic failures

- Neutrinomassen $m_\nu \neq 0$
  - Problem: Neutrinos sind masselos im SM, aber Neutrino-Oszillation-Experimente messen $\Delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2 \neq 0$ mit Neutrinomassen m_i
  - Lösung: Neutrinomassen durch rechtshändige(sterile) Neutrinos $\Rightarrow$ Alles analog zum Quarksektor
    * Einfach zu lösendes Problem, da Lösung "rechtshändige Neutrinos" sich schon bei der Konstruktion des SM aufdrängt
    * Besonderheit des Leptonsektors: Rechtshändige Neutrinos sind totale Singlets und können daher Majorana-Massenterme haben $\Rightarrow$ Mehr Freiheitsgrade
    * Leichte Neutrinos können mit seesaw-Mechanismus(sehr schwere rechtshändige Neutrinos) erklärt werden
    * Offene Fragen: Massenskala der rechtshändigen Neutrinos? Hierarchie der Neutrinomassen? Majorana-Neutrinos?

- Dunkle Materie(Dark Matter (DM)) $\Omega_{\text{DM}} \neq 0$
  - Problem: Kein DM-Kandidat im SM, aber Astrophysik- und Kosmologie-Messungen messen für Beiträge zur gesamten Energiedichte des Universums von $\sim 5\%$ durch SM-Teilchen und $\sim 26\%$ durch DM-Teilchen
    * Astrophysik-Evidenz für DM: Bewegung von Galaxien in Galaxien-Clustern, Gravitationslinseneffekt und ROtationsbewegung von Sternen in Galaxien
    * Kosmologie-Evidenz für DM: Entstehung von großskaligen Strukturen, Big-Bang-Nukleosynthese(Beitra von SM-Teilchen nur $\sim 5\%$), Fit von Kosmischer-Mikrowellenhintergrund-Daten an ΛCDM-Model bevorzugt Modell mit DM
  - Lösungsideen
    * WIMPs: Schwere(~ 1 TeV) Teilchen mit schwacher SM-Kopplung, produziert durch freeze-out
    * QCD Axion
    * Sterile neutrinos

        * Dark photons

- Baryon-Asymmetrie $\eta_B \neq 0$
  - Problem: SM kann Entstehung der Baryon-Antisymmetrie im frühen Universum nicht erklären
    * Sacharov-Kriterien = Notwendige Bedingungen für Entstehung von Baryon-Antisymmetrie
      · SM erfüllt alle Kriterien, aber die Effekte sind zu klein, um die Beobachtungen zu erklären
      1. Baryonzahlverletzung(im SM nur durch Anomalie-Effekte)
      2. C- und CP-Verletzung(CP-Verletzung im SM ist kleiner Effekt)
      3. Abweichung vom thermischen Gleichgewicht(im SM nur durch elektroschwache Phasenübergänge)
  - Lösungsideen
    * Elektroschwache Baryogenese: Neue Physik an elektroschwacher Skala mit zusätzlicher CP-Verletzung, die elektroschwache Phasenübergänge zu 1. Ordnung macht
    * Leptogenese: Produziere Baryon-Asymmetrie aus Lepton-Asymmetrie, die von neuer Physik durch sterile Neutrinos kommt

- Quantentheorie für Gravitation
  - Problem: Finde keine konsistente Quantentheorie für Gravitation bzw SM beinhaltet keine Gravitation
    * Kann Gravitation klassisch behandeln mit allgemeiner Relativitätstheorie
    * Quanteneffekte durch Gravitation werden erst wichtig ab Planck-Skala, daher bei heute zugänglichen Skalen kein Problem
  - Lösung: Suche Theory Of Everything (TOE)(theory of everything)
    * Eichtheorie für Gravitation mit Spin-2-Eichboson "Graviton"(führt auf viele Probleme)
    * Stringtheorie

2.7.2 Puzzles

- Puzzle = Freie Parameter einer Theorie haben nicht die typische Massenskala der Theorie
  - Erwarte, dass freie Parameter die typische Massenskala der Theorie haben bis auf $\mathcal{O}(1)$ Zufallszahlen
  - Puzzles sind keine echten Probleme(kein Grund, die Theorie zu verwerfen), sondern ein Hinweis auf eine tiefere Wahrheit, die man im aktuellen Modell noch nicht eingebaut hat

- Cosmological constant problem $\frac{\Lambda}{M_P^2} \sim 10^{-120} \neq 1$
  - Problem: Kosmologische Konstante Λ ist viel kleiner als erwartet
    * Kosmologische Konstante ist konstanter Term in der Einstein-Hilbert-Wirkung(Wirkung für Gravitation)
      · Konstante liefert für Einstein-Hilbert-Wirkung einen physikalischen Effekt, da die Metrik hier auch ein Feld ist
      · Interpretation: Konstante Hintergrund-Energiedichte im Universum
    * Kann Wert der kosmologischen Konstante aus der Dunkle-Energie-Dichte des Universums bestimmen $\Rightarrow \Lambda \sim 10^{-84}$GeV^2
    * Natürliche Erwartung ist $\Lambda \sim M_P^2 \sim 10^{36}$GeV^2, da kosmologische Konstante ein Gravitations-Effekt ist und deshalb nur von der Massenskala von Gravitation abhängen sollte
  - Eher ein Kosmologie-Problem als ein Problem des Standardmodells, aber eine allgemeine Theorie muss dieses Problem lösen
  - Lösungsideen
    * Anthropisches Argument: Wenn Λ sich stark von dem unterscheiden würde, was man misst, hätte sich das Universum anders entwickelt bzw "wenn es anders wäre, gäbe es uns nicht"
      · Nicht zufriedenstellend, da diese Lösung keine Vorhersagen macht
    * Modifiziere allgemeine Relavitätstheorie mit zusätzlichen Massenskalen oder Ähnlichem

- Schwierig, da diese Modifikationen konsistent mit Beobachtungen sein müssen und die normale allgemeine Relavititätstheorie wenig Spielraum zulässt

- Flavor problem $\frac{m_e}{v} \sim 10^{-6} \neq 1$
  - Problem: Keine Erklärung für Hierarchien der Flavorsektor-Parameter, erwarte eigentlich $\mathcal{O}(1)$ Parameter
    * Besondere challenge: Starke Hierarchie im Quark-Sektor, aber keine Hierarchie im Lepton-Sektor
  - Lösungsideen
    * Extra-Dimensionen: Massenhierarchie kommt von unterschiedlichem 5D-Abstand zum Higgsfeld
    * Flavor-Symmetrien: Führe zusätzliche spontan gebrochene Symmetrien und Teilchen ein, sodass alle Flavorsektor-Parameter $\mathcal{O}(1)$ sind
      - Problem: Flavor-Symmetrien erlauben wenig Vorhersagen, da sie vor allem neue Freiheitsgrade einführen
      - Problem: Keine Anhaltspunkte, an welcher Massenskala die Flavorsymmetrie gebrochen ist
      - Bekomme Goldstone-Bosonen aus SSB $\Rightarrow$ Erwarte neue leichte Teilchen
      - Bsp: Frogatt-Nielsen-Modell($U(1)$-Symmetrie und zusätzliches komplexes Skalarfeld)

- Hierarchy problem $\frac{v}{M_P} \sim 10^{-16} \neq 1$
  - Problem: Benötige in einer Beyond the Standard Model (BSM)-Theorie starke Finetuning-Effekte, damit das Higgsfeld die gemessene Masse bekommt
    * Allgemeine Formulierung: Natürliche Skala für Massen von Skalarfeldern ist die höchste Massenskala der Theorie
      - Massen von Skalarfeldern bekommen Loop-Korrekturen, die proportional zur höchsten Massenskala der Theorie sind $\Rightarrow$ Erwarte, dass auch die Massen der Skalarfelder auf dieser Energieskala sind
      - Kein hierarchy problem für Fermionen(geschützt durch chirale Symmetrie) und Eichbosonen(geschützt durch Eichsymmetrie), da deren Massen durch Symmetrien "geschützt" sind
      - Kein hierarchy problem für Goldstone-Bosonen und Pseudo-Goldstone-Bosonen, da deren Massen durch die SSB geschützt sind
    * Elektroschwache Skala ist größte Skala des SM(also erstmal kein Problem), aber es ist klar, dass es darüber noch andere Effekte gibt, deren Skalen in das Modell eingebunden werden sollten
      - Spätestens bei Planck-Skala(Quantengravitation) erwartet man neue Effekte, es kann natürlich auch noch darunter neue Physik geben
  - Hierarchy problem benötigt neue Physik an der TeV-Skala, da man dann nur kleine Finetuning-Effekte benötigen würde, um die richtige Higgs-Masse zu bekommen
  - Lösungsideen
    * Supersymmetrie: Higgs bekommt Fermion-Statistik und ist dadurch durch chirale Symmetrie geschützt
      - Supersymmetrie(Verallgemeinerung von Poincaré-Symmetrie) ist Symmetrie zwischen Fermionen und Bosonen
      - Supersymmetrie sagt für jedes Teilchen einen Superpartner mit selben Quantenzahlen und entgegengesetzter Statistik hervor
      - Superpartner in der Natur noch nicht beobachtet $\Rightarrow$ Supersymmetrie muss gebrochen sein
    * Composite-Higgs: Higgs ist kein fundamentales Teilchen, daher sind die Quantenkorrekturen zu seiner Masse kompliziert und das Argument "Skalar-Masse ist von größter Skala der Theorie" funktioniert nicht
    * Pseudo-Goldstone-Higgs: Higgsfeld ist Pseudo-Goldstone-Boson einer spontan gebrochenen Symmetrie, daher ist die Higgs-Masse durch diese Symmetrie geschützt
    * Extra-Dimensionen: Extra-Dimensionen ändern Eigenschaften von Gravitation, sodass Quantengravitat
      Skala kein Problem mehr ist
      - Keine zufriedenstellende Lösung, da sie nur Quantengravitation als Neue-Physik-Effekt ausschließt

        * Relaxion: Higgs-Masse ist ein Feld, das sich aus irgendwelchen Gründen an der elektroschwachen Skala seinen Gleichgewichts-Wert hat

- Strong CP problem $\bar{\theta} < 10^{-10} \neq 1$
    - Problem: Parameter $\bar{\theta}$ ist sehr klein und könnte sogar verschwinden
        * Phänomenologisch interessant: Großer Wert für $\bar{\theta}$ würde zu messbarer CP-Verletzung in QCD führen
    - Lösungsideen
        * QCD Axion: Neue spontan gebrochene $U(1)$-Symmetrie(anomal unter QCD) und neues Skalarfeld liefern ein Goldstone-Boson("Axion"), das mit Gluon-Kopplung analog zum θ-Term $\Rightarrow$ Axion-vev kann $\bar{\theta}$ dynamisch auf 0 setzen
        * Spontane CP-Verletzung: SM hat exakte CP-Symmetrie, die aber unter einer hohen Skala spontan gebrochen ist und so kleine CP-Verletzung in EW-Theorie generiert
            · Erklärt auch, warum die CP-Verletzung im SM so klein ist
            · θ-Term ist dann im Standardmodell nicht erlaubt $\Rightarrow$ Kein strong CP problem
        * Masseloses up-Quark: Es gibt keine invariante Kombination von θ und anderen Parametern $\Rightarrow$ Keine messbaren Effekte durch θ-Term
            · $m_u = 0$ ist ausgeschlossen durch Gitter-QCD-Rechnungen

- Komplexe Eichgruppe $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$
    - Problem: Keine Erklärung für die relativ komplexe Struktur der SM-Eichgruppe $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$
        * Erwarte etwas Simpleres für die allgemeine Theorie der Natur
    - Lösung: Great unified theories(Great Unified Theory (GUT)s)
        * Idee: Generiere SM-Eichgruppe durch mehrere spontane Symmetriebrechungen aus einer simpleren Eichgruppe
        * Ordne SM-Felder in Darstellungen der GUT-Eichgruppe ein, muss dafür evtl weitere bisher unentdeckte Felder postulieren
        * Kopplungskonstanten der SM-Eichgruppen werden identisch bei der Energieskala, an der die GUT spontan gebrochen wird
        * Beispiele für GUT-Eichgruppen: $SU(4), SU(5), SO(10), E_6$

2.7.3 Experimentelle Anomalien

- Kategorisierung von Abweichungen vom Standardmodell über Standardabweichung x der Messungen
    - Zu den Standardabweichungen gehörende Wahrscheinlichkeiten: $P(x > 3\sigma) \sim 10^{-3}, P(x > 5\sigma) \sim 10^{-7}$
    - $x < 3\sigma$: Spannung bzw tension $\Rightarrow$ Kann statistische Fluktuation sein, wird nicht als Problem behandelt
    - $3\sigma < x < 5\sigma$: Anomalie $\Rightarrow$ Hinweis auf neue Physik, aber noch keine Entdeckung
    - $5\sigma < x$: Entdeckung
        * Entdeckungen sollten von mehreren unabhängigen Experimenten bestätigt werden

- XENON1T-Überhöhung 3.5σ
    - Experiment: DM-Suche in Xe-Gas durch direkten Nachweis
        * Sensitiv auf schwere DM durch Streuung mit Xe-Atomen
        * Sensitiv auf leichte DM durch Streuung mit Xe-Elektronen
    - Beobachtung: Überhöhung bei $\sim 18keV$
    - Hinweis auf DM-Kandidat, der an Elektronen koppelt
    - Status: Diskussion über Fehler in Messung und Auswertung, Erweiterungs-Experiment ist geplant

- Neutron-Lebensdauer 3.9σ

- Experiment: Messe Neutron-Lebensdauer mit zwei unterschiedlichen Methoden
- Beobachtung: Ergebnisse der beiden Methoden sind nicht miteinander verträglich
- Hinweis auf NP-Effekt(leichte Physik), der in den Messmethoden nicht berücksichtigt wurde
- Status: Diskussion über Fehler in Messung und Auswertung

• Anomales magnetisches Moment $g - 2$ 4.2σ für $\mu^{\pm}$, 2.4σ für $e^{\pm}$

- Experiment: Messe abstrakte Größe $g - 2$ für Myonen und für Elektronen in speziellem Experiment und vergleiche mit Theorie-Vorhersage
  * Dies sind die am genauesten vermessenen und berechneten Observablen der Physik
- Status: Diskussion über Fehler in Messung und Auswertung, neue $\mu^{\pm}$-Daten von 2021
- Hinweis auf neue Teilchen, die durch Loop-Effekte beitragen

• Flavor-Anomalien

- Es gibt mehrere “Flavor-Anomalien”, die meisten kommen aus semileptonischen B-Zerfällen
  * Einstufung als Anomalie ändert sich regelmäßig, wenn neue Ergebnisse publiziert werden
- Experiment: Messe Flavorphysik-Observablen in seltenen B-Zerfällen
  * B-Fabriken BaBar, Belle, LHCb können B-Zerfälle sehr gut vermessen
  * Seltene Zerfälle sind sensitiv auf Neue-Physik-Effekte
- Status: Sehnsüchtiges Warten auf Belle-2-Daten(geringere Unsicherheiten)
- Hinweis auf schwere neue Physik(zB Leptoquarks)

Kapitel 3

Flavorphysik

3.1 Grundlagen

3.1.1 Grundlagen

3.1.2 Formfaktoren

- Konzept von Formfaktoren
  - Achtung: Leute verwenden den Begriff “Formfaktor” für das Matrixelement und den eigentlichen Formfaktor
- Bestimmung von Formfaktoren
  - Experimentellen Daten
  - Lattice QCD
  - Symmetrie-Überlegungen
- Anmerkungen zur Definition von Formfaktoren
  - Konvention: Wähle $x=0$ in $\langle A|f(x)|B\rangle = Ce^{ix\sum_i p_i}$
    - Vorteil: Keine “störenden” $\exp$-Funktionen
- Konventionen für Definition der Formfaktoren
  - Formfaktoren für leptonische Meson-Zerfälle $\langle 0|\bar{q}\gamma^\mu\gamma_5 q'|A\rangle = if_A p_A^\mu$
    - Bezeichne Formfaktoren f_A als “Zerfallskonstanten”
      - Begründung: Formfaktor ist konstant und beschreibt Eigenschaften des (typischerweise dominierenden) Meson-Zerfalls
    - Matrixelement hängt nur von einem Impuls ab $\Rightarrow$ Formfaktoren f_A sind Konstanten
    - Wichtige Beispiele
      - $A=\pi^\pm$: $q=d, q'=u$
      - $A=K^\pm$: $q=s, q'=0$
      - $A=D^\pm_{d,s}$: $q=c, q'=d,s$
      - $A=B^\pm_{u,d,s}$: $q=b, q'=u,d,s$
  - Formfaktoren für semileptonische Meson-Zerfälle $\langle A|\bar{q}\gamma^\mu q'|B\rangle = f_+^{BA}(t)\Big(p_B^\mu + p_A^\mu\Big) f_-^{BA}(t)\Big(p_B^\mu - p_A^\mu\Big) = f_+^{BA}(t)\Big(p_B^\mu + p_A^\mu - \frac{m_B^2-m_A^2}{q^2}q^\mu\Big) + f_0^{BA}(t)\frac{m_B^2-m_A^2}{q^2}q^\mu$ mit $q=p_B-p_A, t=q^2$
    - Vorteil der zweiten Konvention: Kann ersten Term als “transversal” interpretieren wegen $q_\mu\Big(p_K^\mu + p_\pi^\mu - \frac{m_K^2-m_\pi^2}{q^2}q^\mu\Big)=0$
    - Übliche Parametrisierung: $f_\pm^{BA}(t) = f_\pm^{BA}(0)\Big(1+\lambda_\pm^{BA}\frac{t^2}{m_{\pi^+}^2}\Big)$ mit $f_-^{BA}(0) = f_+^{BA}(0) = f_0^{BA}(0), \lambda_-^{BA} = 0$ (?)
    - Bestimmung der Formfaktoren

        - Normierung f_+^{BA} aus lattice QCD
        - t-Abhängigkeit λ_+^{BA} aus semileptonischen Zerfällen
    * Wichtige Beispiele
        - $B=K^\pm, A=\pi^\pm$: $q=u, q'=s$
        - $B=D^\pm, A=\pi^\pm$: $q=d, q'=c$
        - $B=D^\pm, A=K^\pm$: $q=s, q'=c$
        - B-Mesonen: Anderer Formalismus (?)
  - Pion-Formfaktoren
    * Kann Pion-Formfaktoren in ChPT berechnen (...)
    * $\langle \pi^i, p_2|\bar q q|\pi^j, p_1\rangle = \delta^{ij}F_S^\pi(t)$ mit $t=(p_1-p_2)^2$
        - Übliche Parametrisierung: $F_S^\pi(t)=1+\frac{1}{6}\langle r^2\rangle_V^\pi t + c_V t^2+\dots$ (warum $F_S^\pi(0)=1$?)
    * $\langle \pi^i, p_2|\bar q \frac{\sigma^j}{2}\gamma^\mu q|\pi^k, p_1\rangle = i\epsilon^{ijk}(p_1+p_2)^\mu F_V^\pi(t)$ mit $t=(p_1-p_2)^2$
        - Übliche Parametrisierung: $F_S^\pi(t)=F_S^\pi(0)(1+\frac{1}{6}\langle r^2\rangle_S^\pi t + c_S t^2+\dots)$
  - Formfaktoren für Meson-Antimeson-Mischung $B_A=\frac{\langle \bar A^0|(\bar q\gamma^\mu P_L q')(\bar q\gamma_\mu P_L q')|A^0\rangle}{\frac{2}{3}f_A^2 m_A^2}$
    * Historische Bezeichnung für B_A: "bag parameters" (ursprünglich im Bezug auf B-Mesonen)
    * Achtung: Muss 4-Fermion-Operator $(\bar s\gamma^\mu P_L d)(\bar s\gamma_\mu P_L d)$ renormieren (definiere B_K so, dass das bereits gemacht ist)
    * $\hat B_A$ ist geschickte Redefinition von B_A, sodass $\hat B_A$ Renormierungsgruppen-unabhängig ist
    * Wichtige Beispiele
        - $A=K$: $q=s, q'=d$
        - $A=B_{d,s}$: $q=b, q'=d,s$
  - Parameter von ChPT
    * Parameter für Flavor-$SU(2)$
        - 2 Parameter in $\mathcal{O}(p^2)$: $F=f_{\pi^\pm}|_{m_u,m_d\to 0}, B=\frac{\Sigma}{F^2}$ mit $\Sigma=-\langle \bar u u\rangle|_{m_u,m_d\to 0}$ (Konvention: Bestimme $\Sigma^{1/3}$)
        - 7 Parameter in $\mathcal{O}(p^4)$: $\bar\ell_i, i\in\{1,\dots 7\}$
    * Parameter für Flavor-$SU(3)$
        - 2 Parameter in $\mathcal{O}(p^2)$: $F_0=f_{\pi^\pm}|_{m_u,m_d,m_s\to 0}, B_0=\frac{\Sigma_0}{F_0^2}$ mit $\Sigma_0=-\langle \bar u u\rangle|_{m_u,m_d,m_s\to 0}$ (Konvention: Bestimme $\Sigma_0^{1/3}$)
        - 10 Parameter in $\mathcal{O}(p^4)$: $L_i, i\in\{1,\dots 10\}$
  - Flavorändernde Nukleon-Formfaktoren $\langle N|\bar u\Gamma d|N\rangle = g_\Gamma^{u-d}\bar u_N\Gamma u_N$ mit Nukleon-Basisvektor u_N und $\Gamma\in\{S,P,V,A,T\}$ (Review)
    * Parametrisierung macht Näherungen, kann diese verbessern (zB mit magnetic dipole operator für V)
  - Flavordiagonale Nukleon-Formfaktoren
    * Skalarer Formfaktor: $\langle N|\bar q q|N\rangle = \frac{\sigma_q}{m_q}$
        - Spezialfall: $\sigma_u\approx\sigma_d$ (Isospin-Symmetrie) $\Rightarrow$ Definiere $\sigma_{\pi N}=m_{ud}\langle N|\bar u u+\bar d d|N\rangle$ mit $m_{ud}=\frac{m_u+m_d}{2}$
        - Für Formfaktoren gilt das Feynman-Hellmann-Theorem $\langle N|\bar q q|N\rangle = \frac{\partial m_N^2}{\partial m_q}=2m_N\frac{\partial m_N}{\partial m_q}$
    * Axialer Formfaktor: $\langle N|\bar q\gamma^\mu\gamma_5 q|N\rangle = g_A^q\bar u_N\gamma^\mu\gamma_5 u_N$ mit Nukleon-Basisvektor u_N
    * Tensor-Formfaktor $\langle N|\bar q\sigma^{\mu\nu}q|N\rangle = g_T^q\bar u_N\sigma^{\mu\nu}u_N$mit Nukleon-Basisvektor u_N

3.2 Beschreibung von Hadron-Zerfällen

3.2.1 Exklusive Leptonische Zerfälle (...)

- Besondere Eigenschaften
  - Helizitätsunterdrückung
- Zerfallsrate

3.2.2 Exklusive Semileptonische Zerfälle (...)

- Tree-level vs Loop-induced Zerfälle
  - Tree-level Zerfälle wichtig für CKM-Vermessung
  - Loop-induced Zerfälle wichtig für BSM-Physik

3.2.3 Formfaktoren für Meson-Zerfälle

- Formfaktoren für leptonische Zerfälle pseudoskalarer Mesonen
  - Information über Formfaktoren steckt in der Konstanten f_M ("Zerfallskonstante") und den Meson- und Quark-Massen m_M, m_a, m_b
  - Fermion-Bilinear $\bar a\Gamma b$ im Matrixelement muss $\mathcal{P}$-ungerade sein
    * Explizit: $\langle 0|\Big(\bar a b\Big)(x)|M\rangle = \langle 0|\Big(\bar a\gamma^\mu b\Big)(x)|M\rangle = 0$

    1. QCD hat $\mathcal{P}$-Symmetrie $\Rightarrow$ Gesamtes Matrixelement muss $\mathcal{P}$-gerade sein
    2. Zustände $\langle 0|\cdots|M\rangle \stackrel{\mathcal{P}}{\to} \langle 0|\cdots\Big(-|M\rangle\Big)$ sind ungerade unter $\mathcal{P}$-Transformationen
    3. Fazit: Fermion-Bilinear im Matrixelement ("$\cdots$" in 2)) muss $\mathcal{P}$-ungerade sein
  - Vektorieller Formfaktor $\langle 0|\Big(\bar a\gamma^\mu\gamma_5 b\Big)(x)|M\rangle = if_M p_M^\mu e^{-ip_M x}$
    * Definiere f_M durch diesen Formfaktor, da dieser experimentell am Einfachsten zu bestimmen ist
  - Skalarer Formfaktor $\langle 0|\Big(\bar a\gamma_5 b\Big)(x)|M\rangle = -if_M\frac{m_M^2}{m_a+m_b}e^{-ip_M x}$
    * Herleitung aus der Definition von f_M durch den vektoriellen Formfaktor
      - Strategie: Berechne $i\partial_\mu\Big\{\langle 0|\Big(\bar a\gamma^\mu\gamma_5 b\Big)(x)|M\rangle\Big\}$ auf 2 Arten und vergleiche die Ergebnisse

      1. Verwende Relation für vektoriellen Formfaktor:
      $i\partial_\mu\Big\{\langle 0|\Big(\bar a\gamma^\mu\gamma_5 b\Big)(x)|M\rangle\Big\} = i\partial_\mu\Big\{if_M p_M^\mu e^{-ip_M x}\Big\} = -i^3 f_M p_M^2 e^{-ip_M x} = if_M m_M^2 e^{-ip_M x}$
      2. Direkte Rechnung: $i\partial_\mu\Big\{\langle 0|\Big(\bar a\gamma^\mu\gamma_5 b\Big)(x)|M\rangle\Big\} = \langle 0|\Big(i\partial_\mu\bar a\gamma^\mu\gamma_5 b\Big)(x)|M\rangle + \langle 0|\Big(\bar a\gamma^\mu\gamma_5 i\partial_\mu b\Big)(x)|M\rangle$
      $= \langle 0|\Big(\bar a(g\not{A}-m_a)\gamma_5 b\Big)(x)|M\rangle + \langle 0|\Big(\bar a\gamma_5(g\not{A}-m_b)b\Big)(x)|M\rangle = -(m_a+m_b)\langle 0|\Big(\bar a\gamma_5 b\Big)(x)|M\rangle$
      3. Vergleich der Ergebnisse liefert $\langle 0|\Big(\bar a\gamma_5 b\Big)(x)|M\rangle = -if_M\frac{m_M^2}{m_a+m_b}e^{-ip_M x}$
  - Tensor-Formfaktor $\langle 0|\Big(\bar a\sigma^{\mu\nu}b\Big)(x)|M\rangle = \langle 0|\Big(\bar a\sigma^{\mu\nu}\gamma_5 b\Big)(x)|M\rangle = 0$
    * Begründung: Kann aus den verfügbaren Lorentztensoren $p_M^\mu, g^{\mu\nu}, \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ keinen antisymmetrischen Tensor 2ter Stufe (wie das Matrixelement) konstruieren $\Rightarrow$ Matrixelement muss verschwinden
    * Notiz: Finde nicht-verschwindendes Ergebnis für $\langle 0|\Big(\bar a\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_5 b\Big)(x)|M\rangle$, das kommt aber aus dem skalaren Anteil ($g^{\mu\nu}$) in $\gamma^\mu\gamma^\nu = g^{\mu\nu} - i\sigma^{\mu\nu}$, der schon durch den skalaren Formfaktor beschrieben wird

- Formfaktoren für semileptonische Zerfälle pseudoskalarer Mesonen (...)
  - Information über Formfaktoren steckt in 3 q^2-abhängigen skalaren Funktionen f_S, f_V, f_T und den Meson- und Quark-Massen m_M, m_N, m_a, m_b
    * q^2 mit $q = p_M - p_N$ parametrisiert die einzige nicht-triviale kinematische Variable
    * Parametrisiere die Formfaktoren so, dass f_S, f_V, f_T jeweils die Funktionen sind, die beim Skalar-, Vektor-, Tensor-Formfaktor relativ zum jeweils simpleren Formfaktor dazukommen
  - Fermion-Bilinear $\bar a\Gamma b$ im Matrixelement muss $\mathcal{P}$-gerade sein
    * Explizit: $\langle N|\Big(\bar a\gamma_5 b\Big)(x)|M\rangle = \langle N|\Big(\bar a\gamma^\mu\gamma_5 b\Big)(x)|M\rangle = 0$

    1. QCD hat $\mathcal{P}$-Symmetrie $\Rightarrow$ Gesamtes Matrixelement muss $\mathcal{P}$-gerade sein
    2. Zustände $\langle N|\cdots|M\rangle \stackrel{\mathcal{P}}{\to} \Big(-\langle N|\Big)\cdots\Big(-|M\rangle\Big)$ sind gerade unter $\mathcal{P}$-Transformationen

3. Fazit: Fermion-Bilinear im Matrixelement ("$\cdots$" in 2)) muss ebenfalls $\mathcal{P}$-gerade sein

- Vektorieller Formfaktor $\langle N|\Big(\bar a\gamma^\mu b\Big)(x)|M\rangle = \Big\{f_V\Big(p_M^\mu + p_N^\mu - \frac{m_M^2-m_N^2}{q^2}q^\mu\Big) + f_S\frac{m_M^2-m_N^2}{q^2}q^\mu\Big\}$
  * Allgemeiner lorentzinvarianter Ansatz: $\langle N|\Big(\bar a\gamma^\mu b\Big)(x)|M\rangle = \Big\{Ap_M^\mu+Bp_N^\mu\Big\}e^{-iqx}$ mit q^2-abhängigen Funktionen A, B
    · Verwende Parameter f_V, f_S statt A, B, da diese eine einfachere Interpretation ermöglichen
  * Definiere f_S, f_V durch diesen Formfaktor, da dieser experimentell am Einfachsten zu bestimmen ist
- Skalarer Formfaktor $\langle N|\Big(\bar a b\Big)(x)|M\rangle = f_S\frac{m_M^2-m_N^2}{m_b-m_a}e^{-iqx}$
  * Allgemeiner lorentzinvarianter Ansatz: $\langle N|\Big(\bar a b\Big)(x)|M\rangle = Ae^{-iqx}$ mit q^2-abhängiger Funktion A
  * Herleitung aus der Definition von f_V, f_S durch den vektoriellen Formfaktor
    · Strategie: Berechne $i\partial_\mu\Big\{\langle N|\Big(\bar a\gamma^\mu b\Big)(x)|M\rangle\Big\}$ auf 2 Arten und vergleiche die Ergebnisse
    1. Verwende Relation für vektoriellen Formfaktor:
    $i\partial_\mu\Big\{\langle N|\Big(\bar a\gamma^\mu b\Big)(x)|M\rangle\Big\} = i\partial_\mu\Big\{f_V\Big(p_M^\mu + p_N^\mu - \frac{m_M^2-m_N^2}{q^2}q^\mu\Big) + f_S\frac{m_M^2-m_N^2}{q^2}q^\mu\Big\}e^{-iqx}$
    $= q_\mu\Big\{f_V\Big(p_M^\mu + p_N^\mu - \frac{m_M^2-m_N^2}{q^2}q^\mu\Big) + f_S\frac{m_M^2-m_N^2}{q^2}q^\mu\Big\}e^{-iqx}$
    $= \Big\{f_V\Big((m_M^2 - m_N^2) - \frac{m_M^2-m_N^2}{q^2}q^2\Big) + f_S\frac{m_M^2-m_N^2}{q^2}q^2\Big\}e^{-iqx} = f_S(m_M^2 - m_N^2)e^{-iqx}$
    2. Direkte Rechnung: $i\partial_\mu\Big\{\langle N|\Big(\bar a\gamma^\mu b\Big)(x)|M\rangle\Big\} = \langle N|\Big(i\partial_\mu\bar a\gamma^\mu b\Big)(x)|M\rangle + \langle N|\Big(\bar a\gamma^\mu i\partial_\mu b\Big)(x)|M\rangle$
    $= \langle N|\Big(\bar a(g\not{A} - m_a)b\Big)(x)|M\rangle - \langle N|\Big(\bar a(g\not{A} - m_b)b\Big)(x)|M\rangle = (m_b - m_a)\langle N|\Big(\bar a b\Big)(x)|M\rangle$
    3. Vergleich der Ergebnisse liefert $\langle N|\Big(\bar a b\Big)(x)|M\rangle = f_S\frac{m_M^2-m_N^2}{m_b-m_a}e^{-iqx}$
- Tensor-Formfaktor $\langle N|\Big(\bar a\sigma^{\mu\nu}b\Big)(x)|M\rangle = \Big\{-2if_V\frac{m_a+m_b}{q^2}(p_M^\mu p_N^\nu - p_N^\mu p_M^\nu) + f_T\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_{M,\rho}p_{N,\sigma}\Big\}e^{-iqx}$ (irgendwo Fehler)
  * Allgemeiner lorentzinvarianter Ansatz:
  $\langle N|\Big(\bar a\sigma^{\mu\nu}b\Big)(x)|M\rangle = \Big\{A(p_M^\mu p_N^\mu - p_N^\mu p_M^\nu) + B\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_{M,\rho}p_{N,\sigma}\Big\}e^{-iqx}$ mit q^2-abhängigen Funktionen A, B
    · Notiz: Arbeite direkt mit $\sigma^{\mu\nu}$ statt $\gamma^\mu\gamma^\nu$, da $\sigma^{\mu\nu}$ wegen $\gamma^\mu\gamma^\nu = g^{\mu\nu} - i\sigma^{\mu\nu}$ alle relevanten Informationen enthält und die Anzahl möglicher Lorentztensoren im Formfaktor stark eingeschränkt
    · Die einzigen antisymmetrischen Lorentztensoren 2ter Stufe aus p_M^μ, p_N^μ sind $p_M^\mu p_N^\nu - p_N^\mu p_M^\nu$ und $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_{M,\rho}p_{N,\sigma}$
  * Zusammenhang mit dem vektoriellen Formfaktor
    · Strategie: Berechne $i\partial_\mu\Big\{\langle N|\Big(\bar a\sigma^{\mu\nu}b\Big)(x)|M\rangle\Big\}$ auf 2 Arten und vergleiche die Ergebnisse, verwende zunächst lorentzinvarianten Ansatz (mit A, B) und identifiziere dann f_V, f_S (und führe neuen Parameter f_T ein)
    1. Verwende lorentzinvarianten Ansatz für Tensor-Formfaktor, $(p_Mp_N) = \frac{m_M^2+m_N^2-q^2}{2}$:
    $i\partial_\mu\Big\{\langle N|\Big(\bar a\sigma^{\mu\nu}b\Big)(x)|M\rangle\Big\} = q_\mu\Big\{A(p_M^\mu p_N^\mu - p_N^\mu p_M^\nu) + B\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}p_{M,\rho}p_{N,\sigma}\Big\}e^{-iqx}$
    $= A\Big((m_M^2 - p_Mp_N)p_N^\nu + (m_N^2 - p_Mp_N)p_M^\nu\Big)e^{-iqx} = A\Big(\frac{q^2}{2}(p_M^\nu + p_N^\nu) - \frac{m_M^2-m_N^2}{2}q^\nu\Big)e^{-iqx}$
    2. Direkte Rechnung: $i\partial_\mu\Big\{\langle N|\Big(\bar a\sigma^{\mu\nu}b\Big)(x)|M\rangle\Big\}$
    $= \frac{i}{2}\Big\{\langle N|\Big((i\partial_\mu\bar a)[\gamma^\mu, \gamma^\nu]b\Big)(x)|M\rangle + N|\Big(\bar a[\gamma^\mu, \gamma^\nu]i\partial_\mu b\Big)(x)|M\rangle\Big\}$
    $= \frac{i}{2}\Big\{\langle N|\Big((i\partial_\mu\bar a)\gamma^\mu\gamma^\nu b\Big)(x)|M\rangle - \langle N|\Big((i\partial_\mu\bar a)(2g^{\mu\nu} - \gamma^\mu\gamma^\nu)b\Big)(x)|M\rangle$
    $+ \langle N|\Big(\bar a(2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu\gamma^\mu)i\partial_\mu b\Big)(x)|M\rangle - \langle N|\Big(\bar a\gamma^\nu\gamma^\mu i\partial_\mu b\Big)(x)|M\rangle\Big\}$
    $= i\Big\{\langle N|\Big((i\partial_\mu\bar a)\gamma^\mu\gamma^\nu b\Big(x)|M\rangle - \langle N|\Big(\bar a\gamma^\nu\gamma^\mu i\partial_\mu b\Big)(x)|M\rangle$
    $- g^{\mu\nu}\langle N|\Big((i\partial_\mu\bar a)b\Big)(x)|M\rangle + \langle N|\Big(\bar a i\partial_\mu b\Big)(x)|M\rangle\Big\}$
    $= i\Big\{\langle N|\Big(\bar a(g\not{A} - m_a)\gamma^\nu b\Big)(x)|M\rangle + \langle N|\Big(\bar a\gamma^\mu(g\not{A} - m_b)b\Big)(x)|M\rangle$

$- g^{\mu\nu} i\partial_\mu \langle N|\Big(\bar{a}b\Big)(x)|M\rangle + 2g^{\mu\nu}\langle N|\Big(\bar{a}i\partial_\mu b\Big)(x)|M\rangle\Big\}$
$= i\Big\{-(m_a+m_b)\langle N|\Big(\bar{a}\gamma^\nu b\Big)(x)|M\rangle + \langle N|\Big(\bar{a}g\not{A}\gamma^\nu b\Big)(x)|M\rangle + \langle N|\Big(\bar{a}gA_\mu(2g^{\mu\nu}-\gamma^\mu\gamma^\nu)b\Big)(x)|M\rangle$
$- g^{\mu\nu} i\partial_\mu \langle N|\Big(\bar{a}b\Big)(x)|M\rangle + 2g^{\mu\nu}\langle N|\Big(\bar{a}i\partial_\mu b\Big)(x)|M\rangle\Big\}$
$= i\Big\{-(m_a+m_b)\langle N|\Big(\bar{a}\gamma^\nu b\Big)(x)|M\rangle - g^{\mu\nu}i\partial_\mu\langle N|\Big(\bar{a}b\Big)(x)|M\rangle + 2g^{\mu\nu}\langle N|\Big(\bar{a}iD_\mu b\Big)(x)|M\rangle\Big\}$

3. Verwende $\langle N|\Big(\bar{a}iD_\mu b\Big)(x)|M\rangle = 0$ wegen $\mathcal{P}$-Invarianz (D_μ ist $\mathcal{P}$-ungerade, der Rest ist $\mathcal{P}$-gerade)
4. Verwende Skalar- und Vektor-Formfaktor in der direkten Rechnung: $i\partial_\mu\Big\{\langle N|\Big(\bar{a}\sigma^{\mu\nu}b\Big)(x)|M\rangle\Big\}$
$= -i(m_a+m_b)\langle N|\Big(\bar{a}\gamma^\nu b\Big)(x)|M\rangle - ig^{\mu\nu}i\partial_\mu\langle N|\Big(\bar{a}b\Big)(x)|M\rangle$
$= \Big\{-i(m_a+m_b)\Big[f_V\Big(p_M^\nu + p_N^\nu - \frac{m_M^2-m_N^2}{q^2}q^\nu\Big) + f_S\frac{m_M^2-m_N^2}{q^2}q^\nu\Big] - iq^\nu f_S\frac{m_M^2-m_N^2}{m_b-m_a}\Big\}e^{-iqx}$
$= \Big\{-i(m_a+m_b)f_V(p_M^\nu+p_N^\nu) + iq^\nu\Big((m_a+m_b)\frac{m_M^2-m_N^2}{q^2}(f_V-f_S) - f_S\frac{m_M^2-m_N^2}{m_b-m_a}\Big)\Big\}e^{-iqx}$
5. Vergleich der Ergebnisse liefert $A = -2i\frac{m_a+m_b}{q^2}f_V$ und macht keine Aussagen über B, irgendwo ist noch ein Fehler (?) $\Rightarrow$ Führe neuen Formfaktor $f_T := B$ ein

- Hilfsrelationen für die $i\partial_\mu$-Rechnungen
  - $i\partial_\mu a\gamma^\mu = \overline{-i\not{\partial}a} = \bar{a}(g\not{A} - m_a)$
  - $i\gamma^\mu\partial_\mu b = -(g\not{A} - m_b)b$

3.3 Flavorsymmetrie Grundlagen

3.3.1 Flavorsymmetrie

- Idee: Invarianz unter Veränderungen von Quarkflavors in masseloser QCD
  - Lagrangian in masseloser QCD invariant unter globalen unitären Transformationen von Quark-Multipletts
  - Formal: Ströme aller Generatoren von Flavoränderungen sind erhalten
  - Beschränke Flavorsymmetrie auf QCD-Überlegungen
    * In schwacher WW sinnlos wegen Anordnung von Quarks in SU(2)-Dubletts(CKM-Matrix nicht diagonal)
    * Ursprüngliches Ziel der Flavorsymmetrie: Symmetrie der starken WW finden
- Flavorquantenzahlen starker Isospin T_3(u/d), Strangeness S(s), Charm C(c), Beauty B'(b), Truth T(t)
  - Konvention: Flavorquantenzahl hat selbes Vorzeichen wie die Ladung des Teilchens
  - Gell-Mann-Nishijima-Formel $Q = T_3 + \frac{Y_S}{2}$ mit starker Hyperladung $Y_S = B + S + C + B' + T$
- Flavorsymmetrie gebrochen durch unterschiedliche Quarkmassen
  - Formal: Ströme der Cartan-Generatoren sind erhalten, Ströme der anderen Generatoren nicht
    * Keine flavorändernden Prozesse in QCD $\Rightarrow$ Flavorquantenzahlen/-eigenzustände unbeeinflusst
    * Unterschiedliche Quarkmassen $\Rightarrow$ Zustände im Flavor-Multiplett nicht mehr entartet
  - Definition großer und kleiner Energien relativ zur QCD-Skala $E_{\text{QCD}} \approx m_P$
    * Für Menge von Quarks mit Massendifferenzen $\Delta m \ll E_{\text{QCD}}$ in guter Näherung Flavorsymmetrie
  - "Quantenzahl-Generatoren" (formal: Cartan-Generatoren) nicht gebrochen $\Rightarrow$ Konstruktion höherer Darstellungen (Hadronen) möglich
- Flavor-SU(2)/Starker Isospin
  - Nukleon-SU(2): SU(2)-Dublett $\begin{pmatrix}|p\rangle\\|n\rangle\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}|T=\frac{1}{2}, T_3=\frac{1}{2}\rangle\\|T=\frac{1}{2}, T_3=-\frac{1}{2}\rangle\end{pmatrix}$
  - Quark-SU(2): SU(2)-Dublett $\begin{pmatrix}|u\rangle\\|d\rangle\end{pmatrix}$, analog $\begin{pmatrix}-|\bar{d}\rangle\\|\bar{u}\rangle\end{pmatrix}$

- Höhere Darstellung: Pionen $2 \otimes 2 = 3 \oplus 1$ bezüglich Flavor-SU(2), $2 \otimes 2 = 3 \oplus 1$ bezüglich Spins

- Flavor-SU(3)
  - Motivation: Seltsame Teilchen(K, lange Lebensdauer) entdeckt(1940) $\Rightarrow$ Quantenzahl Strangeness S
  - Entdeckt in den Zerfällen $K_S^0 \to \pi^+\pi^-$, $\Lambda^0 \to p\pi^-$
  - Bezeichne Eigenschaft der langen Lebensdauer mit Quantenzahl Strangeness
  - Höhere Darstellung: Mesonen $3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1$(Flavor), $2 \otimes 2 = 3 \oplus 1$(Spins)
    * Oktett aus Pseudoskalaren Mesonen $J^P = 0^-$(1 in $2 \otimes 2 = 3 \oplus 1$)
    * Oktett aus Vektormesonen $J^P = 1^+$(3 in $2 \otimes 2 = 3 \oplus 1$)
  - Höhere Darstellung: Baryonen $3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1$(Flavor), $2 \otimes 2 \otimes 2 = 4 \oplus 2 \oplus 2$(Spins)
    * Nur antisymmetrische Kombinationen in Flavor- und Spin-Drehimpulsaddition erlaubt(Pauli-Prinzip)
    * Oktett $J = \frac{1}{2}$ und Dekuplett $J = \frac{3}{2}$ sind einzige mit Pauli-Prinzip vereinbare Möglichkeiten
    * Baryon-Dekuplett sagt $|\Omega\rangle$ vorher(Entdeckung 1964) $\Rightarrow$ Bestätigung des Quarkmodells

3.3.2 Sum rules

- Sum rules = Überbegriff für Ausdrücke der Form $\sum_i \alpha_i A_i = 0$ mit Matrixelementen A_i
  - Sum rules sind Zusammenhängen zwischen Matrixelementen A_i $\Rightarrow$ Kann Vorhersagen machen oder Ergebnisse testen

- Theorie-Hintergrund: Flavor-Symmetrie, Wigner-Eckardt-Theorem
  - Anwendungen meist für Flavor-$SU(2)$, funktioniert prinzipiell aber auch für Flavor-$SU(3)$ etc
  - Schwierigkeiten für Flavor-$SU(n)$ mit $n > 2$
    * Technisch: Clebsch-Gordon-Koeffizienten systematisch berechnen
    * Physikalisch: Verletzung von Flavor-$SU(n)$ wird mit wachsendem n größer

- Herleitung von sum rules $\vec{\alpha}^T \vec{A} = 0$
  - Anschaulich: Pure Lineare-Algebra-Aufgabe, verwende unterwegs Wigner-Eckardt-Theorem
  - Ausgangssituation: Habe Liste von Matrixelementen $\vec{A}$ bzw $\{A_1, A_2, \dots\}$
    * Bedingungen an Matrixelemente $A_i = \langle f|T|i\rangle$: Anfangs- und Endzustände($|i\rangle, |f\rangle$) sind Flavorsymmetrie Eigenzustände, Operator T ist Flavorsymmetrie-Tensor

  1. Drücke Objekte in Matrixelementen $\vec{A}$ durch irreduzible Darstellungen der Flavorsymmetrie aus $\Rightarrow$ $\vec{A} = K\vec{B}$
     - Anleitung: Drücke Tensoren($|i\rangle, |f\rangle, T$) in reduziblen Darstellungen mit Clebsch-Gordon-Koeffizienten der Flavorsymmetrie-Gruppe durch Tensoren in irreduziblen Darstellungen aus
     - Notation
       * $\vec{B}$ enthält Matrixelemente $B_i = \langle f|T|i\rangle$, für die $|i\rangle, |f\rangle, T$ irreduzible Tensoren der Flavorsymmetrie sind
       * K ist eine (beliebig hässliche) i.A. nicht-quadratische Matrix mit Produkten von Clebsch-Gordon-Koeffizienten als Einträge
  2. Verwende Wigner-Eckardt-Theorem $\Rightarrow$ $\vec{B} = L\vec{R}$
     - Anleitung: Zerlege Matrixelemente $\vec{B}$ mit Wigner-Eckardt-Theorem in Clebsch-Gordon-Koeffizienten(in L) und reduzierte Matrixelemente($\vec{R}$)
     - Notation
       * $\vec{R}$ sind die reduzierten Matrixelemente nach dem Wigner-Eckardt-Theorem(typisch: $\vec{R}$ hat deutlich weniger Elemente als $\vec{A}$)
       * L ist eine i.A. nicht-quadratische Matrix mit Clebsch-Gordon-Koeffizienten als Einträge
     - Fazit: Insgesamt $\vec{A} = M\vec{R}$ mit $M := KL$

3. Berechne Basisvektoren $\vec{\alpha} \in \ker M^T \Rightarrow \vec{\alpha}^T \vec{A} = 0$
   - Anleitung: Verwende irgendeine Methode, um $\ker M^T$ zu berechnen
     * Achtung: M^T ist nicht-quadratische Matrix
   - Argument: $\vec{\alpha} \in \ker M^T \iff M^T\vec{\alpha} = 0 \iff \vec{\alpha}^T\vec{A} = \vec{\alpha}^T M\vec{R} = (M^T\vec{\alpha})^T\vec{R} = 0$

3.4 Modellunabhängige Beschreibung von CP-Verletzung(CPV)

3.4.1 Grundlagen

- Anschaulich: CP-Transformation vertauscht Teilchen und Antiteilchen(?)
  - Außerdem: Komplexe Koeffizienten von Operatoren werden unter CP-Transformation komplex konjugiert
    * Folgerung: CP-Transformation ist nur interessant für Objekte mit komplexen Koeffizienten
  - In Feynman-Diagrammen: CP-Transformation ändert Richtung aller Fermion-Linien
  - Anwendung: In Systemen mit CP violation (CPV) kann CP-Transformation zur Definition des Unterschieds von Teilchen und Antiteilchen verwendet werden
    * In Systemen mit CP-Erhaltung gibt es keinen Unterschied zwischen Materie und Antimaterie
  - Notation in diesem Abschnitt: Überstrich in $\bar{X}$ für CP-konjugierten Zustand von X
- Was bedeutet "modellunabhängige Beschreibung"?
  - Modellunabhängige Beschreibung $=$ Keine Annahmen über Eigenschaften der zugrundeliegenden QFT(Felder und Symmetrien im Lagrangian)
  - Modellunabhängige Bechreibung ist einfach, da man nur Quantenmechanik benötigt(?)
  - Modellunabhängige Beschreibung ist toll, weil Ergebnisse von Analysen dann auch noch gültig sind, wenn ein gegenwärtig verwendetes Modell falsifiziert wurde
- Maß für CP-Verletzung: CP-Asymmetrien $\mathcal{A}_{CP} = \frac{X - X_{CP}}{X + X_{CP}}$

3.4.2 CPV im Zerfall

- CPV im Zerfall $:\iff \Gamma(M \to f) \neq \Gamma(\bar{M} \to \bar{f}) \iff |A_{Mf}| \neq |A_{\bar{M}\bar{f}}|$
  - Betrachte Zerfälle von Mesonen $M/\bar{M}$ in Endzustände $f/\bar{f}$
    * Besonderheit: $M/\bar{M}$ kann nicht nur $M^0/\bar{M}^0$ sein, sondern auch M^+/M^-
- Formalismus für 2-Körper-Zerfälle
  - Kann Formalismus prinzipiell auch auf Mehr-Körper-Zerfälle verallgemeinern
    * Problem mit Mehrkörper-Zerfällen: Phasenraum-Abhängigkeiten verkomplizieren die Situation(kein Problem für 2-Körper-Zerfall, da Phasenraum-Beitrag hier eine Konstante ist)
    * Meist interessiert man sich nur für 2-Körper-Zerfälle $\Rightarrow$ Einschränkung ist okay
  - Verwende allgemeine Konvention für CP-Phasen $CP|X\rangle = e^{2i\theta_X}|\bar{X}\rangle$ mit $X \in \{M, f\}$
    * Standard-Konvention für θ_X: $\theta_X = \frac{\pi}{2} \Rightarrow CP|X\rangle = -|\bar{X}\rangle$
    * CP-Phasen θ_X sind unphysikalische Eigenschaften der Zustände X
      · Unphysikalisch bedeutet, dass keine Observablen von θ_X abhängen und man damit nie θ_X messen kann(muss θ_X aber trotzdem festlegen, damit der Formalismus funktioniert)
    * Umkehrung der Relation: $CP|\bar{X}\rangle = e^{-2i\theta_X}|X\rangle$
      · Herleitung: Vergleiche $(CP)(CP)|X\rangle = (CP)^2|X\rangle = |X\rangle$ und $(CP)(CP)|X\rangle = (CP)e^{i\theta_X}|\bar{X}\rangle = e^{2i\theta_X}CP|\bar{X}\rangle$
  - Definiere Matrixelementen: $A_{Mf} = \langle f|H|M\rangle, A_{M\bar{f}} = \langle \bar{f}|H|M\rangle, A_{\bar{M}f} = \langle f|H|\bar{M}\rangle, A_{\bar{M}\bar{f}} = \langle \bar{f}|H|\bar{M}\rangle$
    * Notation: H für Hamilton-Operator, der die Zerfälle beschreibt
      · Genaue Form des Hamilton-Operators ist für die Rechnung unrelevant

- Im Allgemeinen tragen mehrere Summanden zu den Matrixelementen bei: $A_j = \sum_i A_j^i$ mit $A_j^i = a_j^i e^{i\delta_j^i} e^{i\phi_j^i}$ und $j \in \{Mf, \bar{M}f, M\bar{f}, \bar{M}\bar{f}\}$
  * Anschaulich: Jeder Summand A_j^i steht für ein Feynman-Diagramm
    · Index "j" für unterschiedliche Anfangs-/End-Zustandskonfigurationen, Index "i" für beitragende Feynman-Diagramme
  * Eigenschaften der eingeführten Parameter: $a_j^i > 0, \delta_j^i \overset{CP}{\to} \delta_j^i, \phi_j^i \overset{CP}{\to} -\phi_j^i$
    · Zerlege allgemeine Phasen in "strong phases" δ_j^i(CP-erhaltend bzw $\delta_j^i \overset{CP}{\to} \delta_j^i$) und "weak phases" ϕ_j^i(CP-verletzend bzw $\phi_j^i \overset{CP}{\to} -\phi_j^i$)
    · Im SM: weak phases aus CKM-Einträgen, strong phases können alles mögliche sein
- Die Matrixelemente $A_{Mf}/A_{\bar{M}\bar{f}}$ sowie $A_{M\bar{f}}/A_{\bar{M}f}$ stehen in Beziehung zueinander: $a_{Mf}^i = a_{\bar{M}\bar{f}}^i, \delta_{Mf}^i = \delta_{\bar{M}\bar{f}}^i, \phi_{Mf}^i = -\phi_{\bar{M}\bar{f}}^i$ und $a_{M\bar{f}}^i = a_{\bar{M}f}^i, \delta_{M\bar{f}}^i = \delta_{\bar{M}f}^i, \phi_{M\bar{f}}^i = -\phi_{\bar{M}f}^i$
  * Mache Rechnung explizit für Beziehung zwischen A_{Mf} und $A_{\bar{M}\bar{f}}$, funktioniert genauso für $A_{\bar{M}f}$ und $A_{M\bar{f}}$
  1. $A_{Mf} = \langle f|H|M\rangle = \langle f|(CP)^\dagger(CP)H(CP)^\dagger(CP)|M\rangle = e^{2i(\theta_M-\theta_f)}\langle\bar{f}|(CP)H(CP)^\dagger|\bar{M}\rangle$
     * Verwende $1 = (CP)^\dagger(CP)$ und die gewählte Konvention für CP-Phasen
  2. $\langle\bar{f}|(CP)H(CP)^\dagger|\bar{M}\rangle = \sum_i a_{\bar{M}\bar{f}}^i e^{i\delta_{\bar{M}\bar{f}}^i} e^{-i\phi_{\bar{M}\bar{f}}^i}$
     * Verwende Definition der strong phases $\delta_{\bar{M}\bar{f}}^i$ und weak phases $\phi_{\bar{M}\bar{f}}^i$ für Verhalten unter CP-Transformation
  3. Vergleich mit $\sum_i a_{Mf}^i e^{i\delta_{Mf}^i} e^{i\phi_{Mf}^i} = A_{Mf} \Rightarrow a_{Mf}^i = a_{\bar{M}\bar{f}}^i, \delta_{Mf}^i = \delta_{\bar{M}\bar{f}}^i, \phi_{Mf}^i = -\phi_{\bar{M}\bar{f}}^i$

• Beschreibung von CP-Verletzung
  - Betrachte nur die CP-konjugierten Zerfälle $M \to f, \bar{M} \to \bar{f}$ und nicht $M \to \bar{f}, \bar{M} \to f$
    * Das sind gerade die Prozesse, deren Matrixelemente für $\Gamma(M \to f)$ bzw $\Gamma(\bar{M} \to \bar{f})$ interessant sind
    * Vereinfachte Notation: $A := A_{Mf}, \bar{A} := A_{\bar{M}\bar{f}}, a_i := a_{Mf}^i = a_{\bar{M}\bar{f}}^i, \delta_i := \delta_{Mf}^i = \delta_{\bar{M}\bar{f}}^i, \phi_i := \phi_{Mf}^i = -\phi_{\bar{M}\bar{f}}^i$
  - Maß für CPV im Zerfall: CP-Asymmetrie $\mathcal{A}_{CP} = \frac{\Gamma(\bar{M}\to\bar{f})-\Gamma(M\to f)}{\Gamma(\bar{M}\to\bar{f})+\Gamma(M\to f)} = \frac{|\bar{A}|^2-|A|^2}{|\bar{A}|^2+|A|^2}$
    * Letzte Vereinfachung funktioniert nur für 2-Körper-Zerfälle wegen $\Gamma = C|A|^2$ mit Phasenraumfaktor C und Matrixelement A
      · Phasenraumfaktor C hängt nur von Teilchenmassen ab, die sind für zueinander CP-konjugierte Prozesse gleich wegen CPT-Theorem
    * Faustregel: Erhalte großes $\mathcal{A}_{CP}$, wenn $a_1 \approx a_2$
  - Notwendige Bedingungen für CPV im Zerfall
    * Formale Bedingung: $|A| \neq |\bar{A}|$
      · Triviale Bedingung, folgt aus $\mathcal{A}_{CP} = \frac{|\bar{A}|^2-|A|^2}{|\bar{A}|^2+|A|^2}$
    * Mindestens 2 beitragende Diagramme A_{Mf}^1, A_{Mf}^2
      · Nur ein Diagramm trägt bei $\Rightarrow |A_{Mf}|^2 = |A_{Mf}^1|^2 = |A_{\bar{M}\bar{f}}^1|^2 = |A_{\bar{M}\bar{f}}|^2$ und $\mathcal{A}_{CP} = 0$
      · Mindestens 2 beitragende Diagramme $\Rightarrow |A_{Mf}|^2 = |A_{Mf}^1 + A_{Mf}^2|^2 \overset{evtl}{\neq} |A_{\bar{M}\bar{f}}|^2$ wegen Interferenztermen und $\mathcal{A}_{CP} \neq 0$ ist möglich
    * Mindestens 2 verschiedene strong phases(δ^i) und weak phases(ϕ^i)
      · Findet man, indem man $\mathcal{A}_{CP}$ explizit berechnet
      · Wird deutlich in $\mathcal{A}_{CP} = \frac{2a_1a_2\sin(\delta_1-\delta_2)\sin(\phi_1-\phi_2)}{a_1^2+a_2^2+a_1a_2\cos(\delta_1-\delta_2)\cos(\phi_1-\phi_2)}$ für 2 beitragende Diagramme

3.4.3 Meson-Oszillationen und CPV in Mischung

• CPV in Mischung : $\iff P_{M^0\to\bar{M}^0}(t) \neq P_{\bar{M}^0\to M^0}(t) \iff |\alpha| \neq 1$

- Diese CPV-Art ist nur für $M^0/\bar{M}^0$-Systeme möglich
- Begriffe: Oszillation vs Mischung
  * Anschaulich: Mischung ist theoretische Voraussetzung für den konkreten Prozess der Oszillation
  * Mischung = Theoretische Aussage, dass Massen- und Flavoreigenzustände verschieden sind
  * Oszillation = Zeitentwicklung eines Masseneigenzustandes, durch die er sich in unterschiedliche Flavor-Eigenzustände umwandelt

• Formalismus für $M^0/\bar{M}^0$-Oszillationen

- Arten von Eigenzuständen im $M^0/\bar{M}^0$-System
  * Flavoreigenzustände: $|M^0\rangle, |\bar{M}^0\rangle$
    · Anschaulich: Flavoreigenzustände nehmen an Streu- und Zerfallsprozessen teil
    · Flavoreigenzustände sind definiert durch Angabe ihres Quark-Inhalts
  * CP-Eigenzustände: $|M_{CP\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|M^0\rangle \mp |\bar{M}^0\rangle)$ mit $CP|M_{CP\pm}\rangle = \pm|M_{CP\pm}\rangle$
    · Eigenwertgleichung folgt mit $CP|M\rangle = -|\bar{M}\rangle, CP|\bar{M}\rangle = -|M\rangle$(?)
  * Masseneigenzustände: $|M_\pm\rangle$
    · Anschaulich: Masseneigenzustände sind die physikalischen Zustände mit bestimmter Masse und Zerfallsrate
    · Für CP-Erhaltung ist $|M_\pm\rangle = |M_{CP\pm}\rangle$
    · Für CP-Verletzung müssen $|M_\pm\rangle$ aufwändig bestimmt werden($\Rightarrow$ Rest dieses Abschnitts)
- Hilbertraum des Problems $|\psi(t)\rangle = a(t)|M^0\rangle + \bar{a}(t)|\bar{M}^0\rangle + \sum_f c_f(t)|f\rangle$
  * Anschaulich: Hilbertraum besteht aus den Mesonen $|M^0\rangle, |\bar{M}^0\rangle$ und möglichen Zerfallsprodukten $|f\rangle$
  * Betrachte für Mischung nur den Unterraum $|\psi(t)\rangle = a(t)|M^0\rangle + \bar{a}(t)|\bar{M}^0\rangle$
- Hamiltonoperator des Mischungs-Unterraums $\hat{H} = \hat{M} - \frac{i}{2}\hat{\Gamma}$ mit $\hat{M} = \begin{pmatrix} M_0 & M_{12} \\ M_{12}^* & M_0 \end{pmatrix}, \hat{\Gamma} = \begin{pmatrix} \Gamma_0 & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{12}^* & \Gamma_0 \end{pmatrix}$
  * Anschaulich: Diagonaleinträge/Nebendiagonaleinträge in H stehen für flavorerhaltende/flavorändern Prozesse
  * Notation: Schreibe Zustände $|\psi(t)\rangle = a(t)|M^0\rangle + \bar{a}(t)|\bar{M}^0\rangle$ als Vektoren $\begin{pmatrix} a(t) \\ \bar{a}(t) \end{pmatrix}$ in der Basis $\{|M^0\rangle, |\bar{M}^0\rangle\}$
  * Allgemeiner Hamilton-Operator kann immer in dieser Form geschrieben werden
    · CPT-Symmetrie $\Rightarrow$ Teilchen und Antiteilchen($M^0, \bar{M}^0$) haben selbe Masse M_0 und Lebensdauer Γ_0
    · Massenmatrix $\hat{M}$ und Zerfallsmatrix $\hat{\Gamma}$ sind Observablen $\Rightarrow \hat{M}^\dagger = \hat{M}, \hat{\Gamma}^\dagger = \hat{\Gamma}$
  * Achtung: Effektiver Hamilton-Operator $\hat{H}$ ist nicht mehr hermitesch
    · Das ist kein Problem, da nicht der gesamte Hilbertraum betrachtet wird
  * Interpretation der Beiträge zum effektiven Hamilton-Operator im SM
    · Diagonaleinträge M_0 von $\hat{M}$ enthalten Informationen über Quark-Massen und QCD-Effekte in Mesonen
    · Nebendiagonaleinträge M_{12} von $\hat{M}$ erzeugt durch Box-Diagramme, die Übergänge $M^0 \to \bar{M}^0$ über virtuelle Zwischenzustände induzieren
    · Diagonaleinträge Γ_0 von $\hat{\Gamma}$ durch Zerfälle $M^0 \to f, \bar{M}^0 \to \bar{f}$
    · Nebendiagonaleinträge Γ_{12} von $\hat{\Gamma}$ durch Übergänge $\bar{M}^0 \to f \to M^0, M^0 \to f \to \bar{M}^0$ über virtuelle Zwischenzustände f
- Lösung des Eigenwertproblems $\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle \Rightarrow$ Eigenwerte $H_\pm = M_\pm - \frac{i}{2}\Gamma_\pm$, Eigenvektoren $|M_\pm\rangle$
  * Anschaulich: Eigenvektoren $|M_\pm\rangle$ sind Masseneigenzustände des Problems
  * Eigenwerte: $M_\pm = M_0 \pm \text{Re}\sqrt{H_{12}H_{21}}, \Gamma_\pm = \Gamma \mp 2\text{Im}\sqrt{H_{12}H_{21}}$
    · Abkürzungen: $\Delta m := M_- - M_+ = -2\text{Re}\sqrt{H_{12}H_{21}}, \Delta\Gamma := \Gamma_- - \Gamma_+ = 4\text{Im}\sqrt{H_{12}H_{21}}, \Gamma := \frac{\Gamma_+ + \Gamma_-}{2}$
    · Achtung: $H_{21} \neq H_{12}^*$ wegen relativem i in $\hat{H} = \hat{M} - \frac{i}{2}\hat{\Gamma}$
  * Eigenvektoren: $|M_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+|\alpha|^2}}(|M^0\rangle \pm \alpha|\bar{M}^0\rangle)$ mit $\alpha := \sqrt{\frac{H_{21}}{H_{12}}}$

- Alternative Notationen: $|M_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{|p|^2+|q|^2}}(p|M^0\rangle \pm q|\bar{M}^0\rangle) = \frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}}\left((1+\epsilon)|M^0\rangle \pm (1-\epsilon)|\bar{M}^0\rangle\right)$ mit $\alpha = \frac{p}{q} = \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}$ bzw $\epsilon = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$
- Achtung: Für $|\alpha| \neq 1$ sind die Eigenvektoren nicht orthogonal $\langle M_-|M_+\rangle = \frac{1-|\alpha|^2}{1+|\alpha|^2}$ aber das ist auch nicht erwartet, da nicht der gesamte Hilbertraum betrachtet wird

* Notation: In Literatur oft Indizes "H", "L" statt $\pm$ für Eigenzustände mit großem- und kleinem Massen-Eigenwert

- Zeitentwicklung: $|M^0, t\rangle = g_+(t)|M^0\rangle + \alpha g_-(t)|\bar{M}^0\rangle, |\bar{M}^0, t\rangle = \frac{1}{\alpha}g_-(t)|M^0\rangle + g_+(t)|\bar{M}^0\rangle$
  * Achtung: $|M^0, t\rangle \neq |M^0\rangle$(Gleichheit nur für $t = 0$), der Zustand $|M^0, t\rangle$ heißt nur so wegen der Anfangsbedingung $|M^0, 0\rangle = |M^0\rangle$
  * Koeffizienten: $g_+(t) = \frac{1}{2}\left(e^{-iH_+t} + e^{-iH_-t}\right), g_-(t) = \frac{1}{2}\left(e^{-iH_+t} - e^{-iH_-t}\right)$
  * Herleitung(analog für $|\bar{M}^0, t\rangle$):
    $|M^0, t\rangle = \frac{\sqrt{1+|\alpha|^2}}{2}\left(|P_+, t\rangle + |P_-, t\rangle\right) = \frac{\sqrt{1+|\alpha|^2}}{2}\left(e^{-iH_+t}|M_+\rangle + e^{-iH_-t}|M_-\rangle\right)$
    $= \frac{1}{2}\left((e^{-iH_+t} + e^{-iM_-t})|M^0\rangle + \alpha(e^{-iH_+t} - e^{-iH_-t})|\bar{M}^0\rangle\right)$
    - Wechsle zu Energie-Eigenzuständen $|M^0\rangle = \frac{\sqrt{1+|\alpha|^2}}{2}(|M_+\rangle + |M_-\rangle)$, setze triviale Zeitentwicklung ein, und wechsle wieder zurück $|M_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+|\alpha|^2}}(|M^0\rangle \pm \alpha|\bar{M}^0\rangle)$

- Übergangsraten
  $P_{M^0\to M^0}(t) = P_{\bar{M}^0\to\bar{M}^0}(t) = |g_+(t)|^2 = \frac{1}{4}\left(e^{-\Gamma_+t} + e^{-\Gamma_-t} + 2e^{-\Gamma t}\cos(\Delta m t)\right),$
  $P_{\bar{M}^0\to M^0}(t) = |\alpha|^4 P_{M^0\to\bar{M}^0}(t) = |\alpha|^2|g_-(t)|^2 = \frac{|\alpha|^2}{4}\left(e^{-\Gamma_+t} + e^{-\Gamma_-t} - 2e^{-\Gamma t}\cos(\Delta m t)\right)$
  * Anschaulich: Oszillation zwischen M^0 und $\bar{M}^0$ ist bestimmt durch Δm, Dämpfung bestimmt durch $\Gamma_\pm, \Gamma$
  * Herleitung: Ergebnisse aus Zeitentwicklung in $P_{A\to B}(t) := |\langle B|A, t\rangle|^2$ einsetzen und Ausdrücke vereinfachen

- Beschreibung von CP-Verletzung
  - Maß für CPV in Mischung: CP-Asymmetrie $\mathcal{A}_{CP} = \frac{P_{M^0\to\bar{M}^0}(t) - P_{\bar{M}^0\to M^0}(t)}{P_{M^0\to\bar{M}^0}(t) + P_{\bar{M}^0\to M^0}(t)}$(?)
    * Kann im Experiment nicht direkt Anteile $P_{M^0\to\bar{M}^0}(t)/P_{\bar{M}^0\to M^0}$ an $M^0/\bar{M}^0$-Mesonen messen $\Rightarrow$ Messe stattdessen zeitabhängige Zerfallsraten $\Gamma_{\bar{M}^0\to X^+}/\Gamma_{M^0\to X^-}$ von Zerfällen in Endzustände $X^\pm$, die den Flavor des $M^0/\bar{M}^0$ festlegen
      - Übergangsrate $P_{A\to B}(t) \propto$ Bestand $N_B(t) \propto$ Zerfallsrate $\Gamma_{B\to X}(t)$(?)
    * Achtung: $\mathcal{A}_{CP}$ ist zeitunabhängig(?)
    * Kann auch andere CP-Asymmetrien konstruieren, Hauptsache ich erhalte die richtigen Observablen(?)
  - Notwendige Bedingungen für CPV in Mischung
    * Formale Bedingung: $|\alpha| \neq 1$
    * Bedingung an Hamilton-Parameter: Im$(M_{12}\Gamma_{12}^*) \neq 0$
      - Anschaulich: CPV in Mischung durch Interferenz von komplexen Phasen aus Oszillation(M_{12}) und Zerfall(Γ_{12})
      - Vergleich mit CPV in Zerfall: Phasen von M_{12}, Γ_{12} spielen Rolle von weak phases(ändern VZ unter CP), Phase $-\frac{i}{2}$ in $M - \frac{i}{2}\Gamma$ spielt Rolle von strong phase(ändert VZ unter CP nicht)
  - Beobachtungen, was im Formalismus für $|\alpha| = 1$ passiert
    * $\langle M^0, t|M^0\rangle + \langle M^0, t|\bar{M}^0\rangle = \frac{1}{2}(e^{-\Gamma_+t} + e^{-\Gamma_-t}) \Rightarrow$ Nur Zerfall, keine Oszillationen
  - Beobachtungen, was im Formalismus für $|\alpha| \neq 1$ passiert(...)

3.4.4 CPV in Interferenz aus Mischung und Zerfall

- CPV in Interferenz aus Mischung und Zerfall : $\iff$ $|\langle f|H|M^0, t\rangle|^2 \neq |\langle f|H|\bar{M}^0, t\rangle|^2$ $\iff$ arg(λ_f)+arg$(\lambda_{\bar{f}}) \neq 0$

- Bessere Bezeichnung: CPV in Interferenz zwischen einem Zerfall mit Mischung und einem Zerfall ohne Mischung
- Offensichtliche Bedingung: $M^0, \bar M^0$ müssen beide in den Endzustand f zerfallen können
  * Bedingung trivial erfüllt für $f=\bar f$-Endzustände(f ist CP-Eigenzustand), hier ist die Beschreibung auch besonders einfach(und die Bedingung $\text{arg}\lambda_f + \text{arg}\lambda_{\bar f}\neq 0$ wird wegen $f=\bar f$ zu $\text{arg}\lambda_f \neq 0$ bzw $\text{Im}\lambda_f\neq 0$
- Diese CPV-Art ist nur für $M^0/\bar M^0$-Systeme möglich

• Formalismus

- Idee: Kombiniere Formalismen für CPV in Zerfall($H|M\rangle$ statt $|M\rangle$) und CPV in Mischung($|M,t\rangle$ statt $|M\rangle$)
- Recycle Definitionen von CPV im Zerfall: $A_{Mf}=\langle f|H|M^0\rangle, A_{\bar M f}=\langle f|H|\bar M^0\rangle$
  * Betrachte den Spezialfall $M=M^0, \bar M=\bar M^0$ von CPV im Zerfall
- Recycle Ergebnisse von CPV in Mischung mit $P_{A\to B}(t):=|\langle B|A,t\rangle|^2$: $P_{M^0\to M^0}(t)=P_{\bar M^0\to\bar M^0}(t)=|g_+(t)|^2, P_{\bar M^0\to M^0}=|\alpha|^4 P_{M^0\to\bar M^0}(t)=|\alpha|^2|g_-(t)|^2$
- Berechne Zerfallsraten mit Berücksichtigung von Mischung $\Gamma_{M^0\to f}(t), \Gamma_{\bar M^0\to f}(t)\Rightarrow$ "Masterformeln"
  * Definitionen: $\Gamma_{M^0\to f}(t)=|\langle f|H|M^0,t\rangle|^2$, $\Gamma_{\bar M^0\to f}(t)=|\langle f|H|\bar M^0,t\rangle|^2$, $\lambda_f:=\alpha\frac{A_{Mf}}{A_{\bar M f}}$, $D_f=\frac{2\text{Re}\lambda_f}{1+|\lambda_f|^2}, C_f=\frac{1-|\lambda_f|^2}{1+|\lambda_f|^2}, S_f=\frac{2\text{Im}\lambda_f}{1+|\lambda_f|^2}$
  * $\Gamma_{M^0\to f}(t)=|A_{Mf}|^2\frac{1}{2}e^{-\Gamma t}\Big((1+|\lambda_f|^2)\cosh\frac{\Delta\Gamma t}{2}+(1-|\lambda_f|^2)\cos(\Delta m t)+2\text{Re}\lambda_f\sinh\frac{\Delta\Gamma t}{2}-2\text{Im}\lambda_f\sin(\Delta m t)\Big)$ $=|A_{Mf}|^2\frac{1}{2}e^{-\Gamma t}(1+|\lambda_f|^2)\Big(\cosh\frac{\Delta\Gamma t}{2}+C_f\cos(\Delta m t)+D_f\sinh\frac{\Delta\Gamma t}{2}-S_f\sin(\Delta m t)\Big)$
  * $\Gamma_{\bar M^0\to f}(t)=|A_{Mf}|^2\frac{|\alpha|^2}{2}e^{-\Gamma t}\Big((1+|\lambda_f|^2)\cosh\frac{\Delta\Gamma t}{2}-(1-|\lambda_f|^2)\cos(\Delta m t)+2\text{Re}\lambda_f\sinh\frac{\Delta\Gamma t}{2}+2\text{Im}\lambda_f\sin(\Delta m t)\Big)$ $=|A_{Mf}|^2\frac{|\alpha|^2}{2}e^{-\Gamma t}(1+|\lambda_f|^2)\Big(\cosh\frac{\Delta\Gamma t}{2}-C_f\cos(\Delta m t)+D_f\sinh\frac{\Delta\Gamma t}{2}+S_f\sin(\Delta m t)\Big)$
  * Beobachtung: $|\alpha|^2, \lambda_f$ enthalten alle Informationen über CPV
  * Notiz: Gleichungen gelten auch mit der Ersetzung $f\to\bar f$
- Geschickte Redefinition von λ_f: $\lambda_f=\alpha\frac{A_{Mf}}{A_{\bar M f}}=|\alpha||\frac{A_{Mf}}{A_{\bar M f}}|e^{i(\phi_{\text{mix}}-\phi_{\text{dec},f})}$
  * Definiere Winkel der komplexen Parameter für Mischung($\alpha=|\alpha|e^{i\phi_{\text{mix}}}$) und Zerfall($\frac{A_{Mf}}{A_{\bar M f}}=|\frac{A_{Mf}}{A_{\bar M f}}|e^{i\phi_{\text{dec},f}}$)
    · Achtung: $\phi_{\text{dec},f}$ hängt von f ab, da $\frac{A_{Mf}}{A_{\bar M f}}$ von f abhängt
  * Erkenntnis: λ_f enthält alle Parameter von CPV
    · CPV in Zerfall $\iff |\alpha|\neq 1$
    · CPV in Mischung $\iff |\frac{A_{Mf}}{A_{\bar M f}}|\neq 1$
    · CPV in Interferenz aus Mischung und Zerfall $\iff \phi_{\text{mix}}\neq\phi_{\text{dec},f}+\phi_{\text{dec},\bar f}$

• Beschreibung von CP-Verletzung(?)

- Zeitabhängige CP-Asymmetrien $\mathcal{A}_{CP}(t)=\frac{\Gamma_{M^0\to f}(t)-\Gamma_{\bar M^0\to f}(t)}{\Gamma_{M^0\to f}(t)+\Gamma_{\bar M^0\to f}(t)}$
  * Dieser Ausdruck enthält CPV in Mischung und CPV in Zerfall als Grenzfälle
  * Spezialfall $f=\bar f, |\alpha|=1$: $\mathcal{A}_{CP}(t)=\frac{C_f\cos(\Delta m t)-S_f\sin(\Delta m t)}{\cosh\frac{\Delta\Gamma t}{2}+D_f\sinh\frac{\Delta\Gamma t}{2}}$
  * Spezialfall $f=\bar f, |\alpha|=1, |A_f|=|\bar A_f|$: $\mathcal{A}_{CP}(t)=\frac{-\text{Im}\lambda_f\sin(\Delta m t)}{\cosh\frac{\Delta\Gamma t}{2}+\text{Re}\lambda_f\sinh\frac{\Delta\Gamma t}{2}}$
    · Beobachtung: CPV in Interferenz aus Mischung und Zerfall ist auch möglich, wenn Bedingungen für CPV in Mischung($|\alpha|\neq 1$) und CPV in Zerfall($|A_f|\neq|\bar A_f|$) beide nicht erfüllt sind
- Notwendige Bedingungen für CPV in Interferenz aus Mischung und Zerfall
  * $\text{arg}(\lambda_f)+\text{arg}(\lambda_{\bar f})\neq 0$
    · Vereinfacht sich im Fall $f=\bar f$ zu $\text{Im}\lambda_f\neq 0$

3.4.5 Überblick über Arten der CPV

- Allgemein: Benötige Interferenz von 2 Diagrammen für CPV
  - Begründung: Zerfallsrate hat die $d\Gamma \propto |\mathcal{M}|^2 dLIPS \Rightarrow$ Benötige Interferenz mehrerer Diagramme $\mathcal{M} = \sum_{i=1}^n \mathcal{M}_i$ mit $n \geq 2$, damit komplexe Phasen in $\mathcal{M}$ physikalisch beitragen
  - Kann damit die 3 Arten von CPV einfach verstehen
    * CPV in Zerfall: Zerfälle $M^0 \to f$ und $\bar{M}^0 \to \bar{f}$ interferieren
    * CPV in Mischung: "Zerfälle" $M^0 \to \bar{M}^0$ und $M^0 \to M^0$ interferieren
    * CPV in Interferenz aus Mischung und Zerfall: "Zerfälle" $M^0 \to f$ und $M^0 \to \bar{M}^0 \to f$ interferieren
- CPV in Mischung vs Zerfall vs Interferenz aus Mischung und Zerfall
  - Anschaulich: Klassifizierung nach theoretischer Beschreibung des CPV-Effekts
  - CPV in Mischung : $\iff |\alpha| \neq 1$
    * Hier nicht interessiert in Zerfalls-Effekte mit CPV $\Rightarrow$ Betrachte Zerfallskanäle, sodass nur $M^0 \to f, \bar{M}^0 \to \bar{f}$(und nicht $M^0 \to \bar{f}, \bar{M}^0 \to f$) möglich ist
  - CPV in Zerfall : $\iff |A_f| \neq |\bar{A}_f|$
    * Benötige mindestens 2 zum Zerfall beitragende Amplituden(typisch: tree-level und penguin diagram)
  - CPV in Interferenz aus Mischung und Zerfall : $\iff$ arg$\lambda_f +$ arg$\lambda_{\bar{f}} \neq 0$
    * Unterschied zu CPV in Mischung: Betrachte hier Zerfallskanäle, sodass außer $M^0 \to f, \bar{M}^0 \to \bar{f}$ auch $M^0 \to \bar{f}, \bar{M}^0 \to f$ möglich ist
    * In diesem Effekt werden typischerweise die größten CP-Asymmetrien gefunden
    * CPV-Effekte im Zerfall möglich mit nur einer beitragenden Amplitude $\Rightarrow$ Einfache Beschreibung
- Direkte CPV vs indirekte CPV
  - Anschaulich: Klassifizierung nach zugrundeliegendem physikalischem Prozess
  - Direkte CPV : $\iff$ CPV hat was mit Zerfall zu tun $\iff |A_f| = |\bar{A}_f|$
    * Achtung: Direkte CPV enthält auch den Fall $C_f \neq 0$, der durch CPV in Interferenz aus Mischung und Zerfall beschrieben wird
      · $C_f = \frac{1-|\lambda_f|^2}{1+|\lambda_f|^2} \neq 0$ folgt aus $|A_f| \neq |\bar{A}_f|$
  - Indirekte CPV : $\iff$ CPV hat was mit Mischung zu tun $\iff |\alpha| \neq 1$ oder Im$\lambda_f \neq 0$
    * Entspricht CPV im Zerfall, wobei die unterschiedlichen beitragenden Zerfallsamplituden hier durch die mögliche Mischung vor dem Zerfall hinzukommt(2 Amplituden: $M^0 \to f, M^0 \to \bar{M}^0 \to f$)
  - Unterscheidung in direkte und indirekte CPV ist historisch motiviert
    * "Superweak models" sagen vorher, dass es nur indirekte CPV gibt
    * Superweak models durch Entdeckung von direkter CPV im K-System ausgeschlossen $\Rightarrow$ Verwende lieber die andere Unterscheidung

3.5 Chirale Störungstheorie (ChPT)

3.5.1 Grundlagen

- Name: Chirale Störungstheorie/Chiral Perturbation Theory (ChPT)
  - Chiral: Theorie mit unterschiedlichen Quantenzahlen für links- und rechtshändige Fermionen
    * ChPT hat Symmetriegruppe $SU(3)_c \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_V \times U(1)_A$ und ist damit chiral
      · Chiralität liegt in der Untergruppe $SU(2)_A \times U(1)_A$
      · Nicht-chirale Theorie dürfte nur $SU(2)_V, U(1)_V$ als Symmetrien haben, nicht $SU(2)_A, U(1)_A$
  - Störungstheorie: ChPT ist perturbativ

Tabelle 3.1: Darstellungen der Felder unter den Symmetrien für Quark-ChPT

	$SU(3)_c$	$SU(2)_L$	$SU(2)_R$	$U(1)_V$	$U(1)_A$
q_L	3	2	1	1	1
q_R	3	1	2	1	-1
M	1	2	$\bar{2}$	0	2
Σ	1	$\bar{2}$	2	0	-2
θ	1	1	1	0	$\theta \to \theta - 4\alpha$

    * Betone diese Eigenschaft, da die UV-Theorie (QCD) nicht-perturbativ ist

- Zugänge zu ChPT
  - Effektive Theorie von QCD für Energien $E \lesssim \Lambda_{\text{QCD}}$
    * QCD ist nur für $E \gtrsim \Lambda_{\text{QCD}}$ perturbativ(asymptotische Freiheit), nicht für $E \lesssim \Lambda_{\text{QCD}}$(Confinement) $\Rightarrow$ Benötige neue Theorie(ChPT) zur effektiven Beschreibung der QCD für $E \lesssim \Lambda_{\text{QCD}}$
    * ChPT wird nicht-perturbativ für $E \gtrsim \Lambda_{\text{QCD}}$ (?) $\Rightarrow$ Ergänzt sich perfekt mit QCD
    * Erweiterung: Verwende auch $U(1)_Q$-Symmetrie $\Rightarrow$ ChPT als effektive Theorie des kompletten SM
  - Grundlage: Flavor-Symmetrie $U(n)_L \times U(n)_R$ für n Quark-Flavors
    * Wegen unterschiedlicher Quark-Massen sind Flavor-Symmetrien explizit gebrochen
      · Beschreibe explizite Symmetriebrechung mit Spurion-Feldern
  - Entwicklung in $\frac{m_q}{\Lambda_{\text{QCD}}}$ (?)

3.5.2 Formalismus

- Symmetrien
  - Geeichte $SU(3)_c$
  - Globale $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_V$
    * Achtung: Die entsprechende $U(1)_A$ ist anomal gebrochen(folgt aus gegebenem Transformationsverhalten der Quark-Felder)
  - Spontane Symmetriebrechung $SU(2)_L \times SU(2)_R \to SU(2)_V$ durch Quark-Kondensat $\langle q\bar{q}\rangle = V^3 \neq 0$
    * Begründung: 't Hooft anomaly matching (?)
    * V ist Vakuum-Erwartungswert ($\langle q\bar{q}\rangle = V^3$, damit V Massen-Dimension hat)

- Teilcheninhalt
  - Notation für Quantenzahlen: $(n_{SU(3)_c}, n_{SU(2)_L}, n_{SU(2)_R})_{n_{U(1)_V}, n_{U(1)_A}}$
  - $SU(3)_c$-Eichfelder(Gluonen) G_μ: $(3,1,1)_{0,0}$
  - Linkshändige Quark-Felder q_L: $(3,2,1)_{1,1}$
  - Rechtshändige Quark-Felder q_R: $(3,1,2)_{1,-1}$
  - Quark-Massen-Spurion M: $(1,2,\bar{2})_{0,2}$
    * Motivation für Transformationsverhalten: Quark-Massenterm $q_L M q_R +$ h.c. soll invariant sein
    * Parametrisierung: $M = \begin{pmatrix} m_u e^{i\varphi_u} & 0 \\ 0 & m_d e^{i\varphi_d} \end{pmatrix}$
      · Wähle M diagonal, da M durch Festlegen des orthogonale-Transformation-Freiheitsgrads von $q = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$ immer auf diese Form gebracht werden kann
  - θ-Term-Spurion θ
    * θ transformiert sich nur unter $U(1)_A$: $\theta \overset{U(1)_A}{\to} \theta - 4\alpha$
    * Notiz: θ muss im Lagrangian in der Form $e^{i\theta}$ vorkommen, da θ sich nicht-linear transformiert

      * Achtung: θ ist kein physikalischer Parameter, da er sich unter $SU(2)_{A,\pi^0}\times U(1)_A$-Transformationen transformiert
         · $SU(2)_{A,\pi^0}$ bezeichnet die durch σ^0 generierten $SU(2)_A$-Transformationen
         · Parametrisierung der $SU(2)_{A,\pi^0}\times U(1)_A$-Transformation: $\pi^0\to\pi^0-\alpha_2 f_\pi, \theta\to\theta-4\alpha_1, \varphi_u\to\varphi_u+2\alpha_1+\alpha_2, \varphi_d\to\varphi_d+2\alpha_1+\alpha_2$ (?)
         · Physikalischer Parameter: $\bar\theta:=\theta+\text{arg}\det M=\theta+\varphi_u+\varphi_d$
   - Goldstonebosonen (Mesonen) Σ: $(1,\bar 2,2)_{0,-2}$
      * Ausdrücken durch unabhängige Freiheitsgrade: $\Sigma=\exp\left(\frac{i}{f_\pi}\pi^i\sigma^i+\frac{i}{f_{\eta'}}\eta'\sigma^0\right)$
         · $U(1)_A$ explizit gebrochen durch Anomalie $\Rightarrow$ Beschreibe zugehöriges (massive) Feld als $\exp\left(\frac{i}{f_{\eta'}}\eta'\sigma^0\right)=\exp\left(\frac{i}{f_{\eta'}}\eta'\right)\mathbb{1}_2$
         · $SU(2)_A$ spontan gebrochen $\Rightarrow$ Beschreibe zugehörige (masselose) Felder als $\exp\left(\frac{i}{f_\pi}\sigma^i\pi^i\right)$
         · Aus $\pi^i\overset{U(1)_A}{\to}\pi^i$ und $X_{U(1)_A}(\Sigma)=-2$ folgt $\eta'\overset{U(1)_A}{\to}\eta'-2\alpha f_{\eta'}$

- Terme im Lagrangian $\mathscr{L}_{\text{ChPT}}=\mathscr{L}_{\text{QCD}}+\mathscr{L}_{\Sigma,\text{kin}}+\mathscr{L}_{\Sigma,M}+\mathscr{L}_\theta+\mathscr{L}_{\text{det}}+\dots$
   - Anschaulich: Beginne mit Lagrangian von QCD und schreibe alle anderen unter den geforderten Symmetrien invarianten Terme dazu
      * Invarianz der Terme nachrechnen ist schöne Übung
   - $\mathscr{L}_{\text{QCD}}=-\frac14 G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}+\bar q i\not{D}q-\bar q_R M q_L+\text{h.c.}$
   - $\mathscr{L}_{\Sigma,\text{kin}}=\frac{f_\pi^2}{4}\text{tr}\partial_\mu\Sigma\partial^\mu\Sigma^\dagger$
      * Benötige Vorfaktor f_π^2, damit der Term die richtige Dimension erhält
   - $\mathscr{L}_{\Sigma,M}=\frac{V^3}{2}\text{tr}M\Sigma+\text{h.c.}$
      * Koeffizient $\frac{V^3}{2}$ festgelegt durch die Forderung, dass man dieselbe Vakuum-Energie $V^3(m_u+m_d)$ wie in QCD erhält
   - $\mathscr{L}_\theta=\theta\frac{g_c^2}{64\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}G^a_{\mu\nu}G^a_{\rho\sigma}$
      * Term ist invariant unter $U(1)_A$, weil $U(1)_A$ anomale Symmetrie ist($\Delta\mathscr{L}=4\alpha\frac{g_c^2}{64\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}G^a_{\mu\nu}G_{\rho\sigma,a}$) und θ als Spurion eingeführt wurde($\theta\overset{U(1)_A}{\to}\theta-4\alpha$)
      * Sehe hier, dass $U(1)_A$ explizit gebrochen sein muss
         · Im Grenzfall $M\to0$ ist $U(2)_F\setminus U(1)_A$ erhalten (ohne Spurion-Trick)
         · $U(1)_A$ ist für keinen Wert von θ erhalten $\Rightarrow U(1)_A$ muss gebrochen sein
   - $\mathscr{L}_{\text{det}}=Ae^{-i\theta}\det\Sigma+\text{h.c.}=2A\cos(\frac{2\eta'}{f_{\eta'}}-\theta)$
      * Umformungsschritte
         1. $\det\Sigma=\det\exp\left(\frac{i}{f_\pi}\pi^i\sigma^i+\frac{i}{f_{\eta'}}\eta'\sigma^0\right)=\exp\left(\frac{i}{f_\pi}\pi^i\text{tr}\sigma^i+\frac{i}{f_{\eta'}}\eta'\text{tr}\sigma^0\right)=\exp\left(\frac{2i}{f_{\eta'}}\eta'\right)$ mit $\det e^X=e^{\text{tr}X}, \text{tr}\sigma^i=0, \text{tr}\sigma^0=\text{tr}\mathbb{1}_2=2$
         2. $e^{-i\theta}\det\Sigma+\text{h.c.}=\exp\left(-i\theta+\frac{2i}{f_{\eta'}}\eta'\right)+\text{h.c.}=2\cos\left(\frac{2\eta'}{f_{\eta'}}-\theta\right)$
      * Hätte das Argument des $\cos$ auch erraten können, da es invariant unter $U(1)_A$ sein muss
   - Weitere Terme
      * Keine Terme mit $\Sigma\Sigma^\dagger=\mathbb{1}$
         · $\Sigma\Sigma^\dagger=\mathbb{1}$ wegen $(\sigma^a)^\dagger=\sigma^a$
      * Weitere Terme möglich mit beliebigen Kombinationen der Felder und Ableitungen
         · Die hier diskutierten Terme sind besonders, weil sie benötigt werden, um die Eigenschaften der Felder(Transformationsverhalten, Massen, Vakuumerwartungswerte etc) festzulegen

- Feynman-Regeln
   - Goldstoneboson-Selbstwechselwirkungen folgen aus $\mathscr{L}_{\Sigma,\text{kin}}$
      1. $\text{tr}\left(\partial_\mu\Sigma\partial^\mu\Sigma^\dagger\right)=\text{tr}\left((\frac{1}{f_\pi}\sigma^i\partial_\mu\pi^i+\frac{1}{f_{\eta'}}\sigma^0\partial_\mu\eta')\Sigma(\frac{1}{f_\pi}\sigma^i\partial^\mu\pi^i+\frac{1}{f_{\eta'}}\sigma^0\partial^\mu\eta')\Sigma^\dagger\right)$

2. Entwickle $\Sigma = \exp\left(\frac{i}{f_\pi}\sigma^i\pi^i + \frac{i}{f_{\eta'}}\sigma^0\eta'\right)$ im obigen Ausdruck bis zu beliebig hoher Ordnung $\Rightarrow$ Erhalte alle möglichen Wechselwirkungsterme zwischen π^i und η'

- Eigenschaften der Goldstonebosonen
  - Eigenschaften von η' aus $\mathscr{L}_{\text{det}}$ ablesen
    1. $\langle\eta'\rangle = \frac{f_{\eta'}}{2}\theta$
       * Argument: $V = -\mathscr{L}_{\text{det}}$ hat Minimum bei $\frac{2\eta'}{f_{\eta'}} - \theta = 0$
    2. $m_{\eta'}^2 = \frac{8A}{f_{\eta'}^2}$
       * Argument: $\mathscr{L}_{\text{det}} = 2A - \frac{m_{\eta'}^2}{2}(\eta' - \langle\eta'\rangle)^2 + \mathcal{O}\left((\frac{2}{f_{\eta'}}(\eta' - \langle\eta'\rangle))^4\right)$
  - Eigenschaften von π^i aus $\mathscr{L}_{\Sigma,\text{kin}}$ ablesen
    1. $\mathscr{L}_{\Sigma,M}\Big|_{\eta'=\langle\eta'\rangle} = \frac{V^3}{2}\text{tr}MU + \text{h.c.} \stackrel{...}{=} V^3\left(m_u\cos(\frac{\pi^0}{f_\pi} + \frac{\theta}{2} + \varphi_u) + m_d\cos(\frac{\pi^0}{f_\pi} - \frac{\theta}{2} - \varphi_d)\right) + \dots$ (?)
    2. Lege den $SU(2)_{A,\pi^0} \times U(1)_A$-Freiheitsgrad fest $\Rightarrow$ Eliminiere die Parameter φ_u, φ_d
       * $SU(2)_{A,\pi^0}$ bezeichnet die durch σ^0 generierten $SU(2)_A$-Transformationen
       * Parametrisierung der Transformation: $\pi^0 \to \pi^0 - \alpha_2 f_\pi, \theta \to \theta - 4\alpha_1, \varphi_u \to \varphi_u + 2\alpha_1 + \alpha_2, \varphi_d \to \varphi_d + 2\alpha_1 + \alpha_2$ (?)
       * Festlegung der Parameter: $\alpha_1 = -\frac{\varphi_d+\varphi_u}{4}, \alpha_2 = \frac{\varphi_d-\varphi_u}{2}$
    3. Redefiniere $\pi := \tilde{\pi} = \pi + \frac{\varphi_u-\varphi_d}{2}f_\pi \Rightarrow$ Finde $\mathscr{L}_{\Sigma,M}\Big|_{\eta'=\langle\eta'\rangle} = V^3(m_u+m_d) - \frac{V^3}{f_\pi^2}(m_u+m_d)\pi^+\pi^- + V^3\left(m_u\cos(\frac{\pi^0}{f_\pi} + \frac{\bar\theta}{2}) + m_d\cos(\frac{\pi^0}{f_\pi} - \frac{\bar\theta}{2})\right) + \dots$
       * Redefinition notwendig, da π sonst nicht invariant unter $SU(2)_{A,\pi^0}\times U(1)_A$-Transformationen ist
    4. Goldstoneboson-Vakuumerwartungswerte ablesen: $\langle\pi^\pm\rangle = 0, \langle\pi^0\rangle = f_\pi\phi$ mit $\tan\phi = \frac{m_d-m_d}{m_d+m_u}\tan\frac{\bar\theta}{2}$
    5. Goldstoneboson-Massen ablesen: $m_{\pi^\pm}^2 = \frac{V^3}{2f_\pi^2}(m_u+m_d), m_{\pi^0}^2 = \frac{V^3}{2f_\pi^2}\sqrt{m_u^2 + m_d^2 + 2m_u m_d\cos\bar\theta}$
  - Optimalen Wert für $\bar\theta$ finden
    1. $\mathscr{L}_{\Sigma,M}\Big|_{\eta'=\langle\eta'\rangle,\pi^i=\langle\pi^i\rangle} = V^3(m_u+m_d)\sqrt{1 - \frac{4m_u m_d}{(m_u+m_d)^2}\sin^2\frac{\bar\theta}{2}}$
    2. $V = -\mathscr{L}_{\Sigma,M}$ minimal für $\bar\theta = 0$, $m_{\pi^0} \approx m_{\pi^\pm} \Rightarrow$ Erwarte $\bar\theta \approx 0$

3.5.3 Erweiterung auf QED (...)

3.5.4 Erweiterung: Baryonen (...)

3.5.5 Anwendungsbereiche (...)

3.6 Heavy Quark Effective Theory (HQET)

3.6.1 Grundlagen (...)

- Zugänge zu HQET

3.6.2 Formalismus (...)

3.7 Soft collineare effective Theorie (SCET)

3.8 Lattice QCD

Kapitel 4

Grand Unified Theories

4.1 Grundlagen

4.1.1 Grundbegriffe

- GUT (Great Unified Theory) $=$ Vereinheitlichte Theorie für QCD und EW-Theorie
  - Anschaulich: GUT ist nächster logischer Schritt nach Vereinheitlichung von QED und schwacher Wechselwirkung zur EW-Theorie
  - Formal: GUT $=$ QFT zur Beschreibung von QCD und EW-Theorie durch eine einfache Symmetriegruppe
    * Gruppe heißt einfach $\iff$ Gruppe kann nicht als direktes Produkt von anderen Gruppen geschrieben werden
    * SM-Symmetriegruppe $U(1)_Y \times SU(2)_L \times SU(3)_c$ ist nicht einfach, da sie die einfachen Untergruppen $U(1), SU(2), SU(3)$ enthält
  - "Fake GUT" $=$ QFT zur Beschreibung von QCD und EW-Theorie mit einer nicht-einfachen Symmetriegruppe
    * Anschaulich: Keine GUT im Sinne der Definiion ("einfache" Symmetriegruppe), aber immer noch eine Vereinheitlichung (machen SM-Eichgruppe "symmetrischer" oder lösen andere Probleme des SM)
    * Bsp: $SU(3)_c \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}, SU(4) \times SU(2)_L \times SU(2)_R, SU(3)_c \times SU(3)_L \times SU(3)_R$
  - Feeling: GUTs sind die ultimative Gruppentheorie-Spielwiese für Physiker

- Klassifikation von GUTs
  - Klassische GUTs (1970er)
    * Anschaulich: Die ursprüngliche Idee von GUTs
    * Der Begriff "GUT" bezieht sich auf klassische GUTs
  - SUpeSYmmetry (SUSY)-GUTs (1980er)
    * Anschaulich: Postuliere SUSY zusätzlich zur GUT-Symmetrie
    * SUSY-GUTs scheinen prinzipiell besser zu den Daten zu passen als die entsprechenden klassischen GUTs
  - Extra Dimensions (XD)-GUTs (1990er)
    * Anschaulich: GUTs mit QFTs in $n > 4$ Dimensionen, wobei die $n - 4$ Extra-Dimensionen kompaktifiziert sind
    * Kann GUT-SSB durch Randbedingungen der Extradimensionen beschreiben
      · Benötige damit keine zusätzlichen komplexen Skalare für die SSB
    * Konzept Gauge-Higgs-Unification (Gauge-Higgs Grand Unification (GHGUT))
      · Anschaulich: SM-Higgs-Boson ist Extradimension-Komponente eines Eichfelds
      · Kann SM-Higgs damit durch Eichfelder erhalten, benötige kein Extra-Higgs-Feld
    * Vereinheitlichung von Fermion-Generationen
      · Für GUTs in 4 Dimensionen ist nur Vereinheitlichung von einer Fermion-Generation möglich

          · Bsp: Erhalte 3 Fermion-Generationen aus einer irreduziblen Darstellung von $SO(12)$ in 6D oder von $SO(16)$ in 10D (Witten)
      * Fazit: GUT mit Extra-Dimensionen benötigt nur Fermionen und Eichfelder
  – Composite GUTs (2000er)
      * Anschaulich: Fordere von der GUT-Gruppe, dass bei ihrer spontanen Brechung ein Goldstoneboson erzeugt wird, dass das Hierarchy Problem mit dem Composite Higgs Ansatz löst ("2 Fliegen mit einer Klappe")
  – Nächster Schritt: TOE (Theory Of Everything) = Vereinheitlichte Theorie für QCD, EW-Theorie und Gravitation
      * Schwierigkeit: Benötige neue Konzepte für Quantentheorie von Gravitation, da das Gravitations-Eichfeld Spin 2 hat und damit nicht Teil einer renormierbaren Theorie sein kann
      * Kandidat: String-Theorie

4.1.2 Formale Einschränkungen an GUTs

- Muss SM-Eichgruppe in GUT-Eichgruppe einbetten können
  – Formal: Rang der GUT-Eichgruppe muss mindestens 4 sein
  – Praktisch: Muss einen SSB-Formalismus (beschrieben durch Wahl von skalaren Feldern und Parameter eines Potentials) finden können, der eine SSB $G_{\text{GUT}} \to G_{\text{SM}}$ generiert
- Einfache Symmetriegruppe = Symmetriegruppe darf nicht als ein direktes Produkt von anderen Lie-Gruppen geschrieben werden können
  – Diese Bedingung gilt für "echte" GUTs, für "fake GUTs" wird diese Bedingung nicht gefordert
- Komplexe Darstellungen
  – Anschaulich: Benötige komplexe Darstellungen, um chirale Fermionen beschreiben zu können
  – Diese Bedingung schließt fast alle einfachen kompakten Gruppen aus
      * Die einfachen Lie-Gruppen $SO(2n+1), SO(4n), Sp(2n), G_2, F_4, E_7, E_8$ haben keine komplexen Darstellungen
      * Fazit: Übrig bleiben nur $SU(n), SO(4n+2), E_6$
- Eichanomalie-Freiheit
  – Anschaulich: Eichanomalie-Freiheit ist nicht-triviale Einschränkung an Eichtheorien
      * Formal: QFT darf keine chiralen Anomalien von Eichgruppen haben, sonst ist sie inkonsistent
      * Konkret: Finde ein Gleichungssystem an die Ladungen bzw Darstellungen der Fermionen einer Eichtheorie
          · Gleichungssystem umso einschränkender, je mehr einfache Faktoren die Eichgruppe enthält
          · Bsp SM: Gleichungssystem hat nur 2 Lösungen, eine davon führt zu trivialer Struktur
  – Eichanomalie-Freiheit trivial erfüllt für alle Lie-Gruppen außer $SU(n)$
      * Für alle nicht-komplexen Lie-Gruppen gilt automatisch tr$T^a\{T^b, T^c\} = 0$, da es keine chiralen Fermionen geben kann
      * Für $E_6, SO(4n+2, n \geq 2$ gilt tr$T^a\{T^b, T^c\} = 0$ (?)
          · Notiz: Muss so sein, da man zB für $E_6, SO(10)$ alle SM-Fermionen in eine GUT-Darstellung einbetten kann
  – Eichanomalie-Freiheit für $SU(n)$
      * Anschaulich: Eichanomalie-Freiheit ist nicht-triviale Bedingung an Wahl der Fermion-Darstellungen
      * Bsp $SU(5)$: $A(\bar{5}) + A(10) = -1 + 1 = 0$
- Keine Landau-Pole unterhalb der Planck-Skala
  – Für komplexe Fermion-Darstellungen der GUT-Eichgruppe ist es möglich, dass der Landau-Pol zur Planck-Skala geschoben wird (?)

4.1.3 Zusätzliche Challenges für GUTs (...)

- Strong CP problem
  - Peccei-Quinn-Mechanismus mit zusätzlichem $U(1)$-Faktor
  - Spontane CP-Verletzung
- Hierarchy problem
  - SUSY-GUTs
  - GUTs mit composite Higgs
  - GUTs mit Extra Dimensions

4.1.4 Überblick über GUT-Modelle

- Bedingungen "komplexe Darstellungen" und "SM als Untergruppe" lassen wenig Freiraum
- Turm der GUT-Modelle = Ordnung typischer GUTs nach Größe bzw Einbettung
  - GUTs weiter oben im Turm enthalten alle GUTs weiter unten als Untergruppen
  - Grundidee: SSB findet immer in die maximale Untergruppe statt
    * Folgerung: Für komplexere Gruppen (zB $SO(10), E_6$) durchläuft man im SSB-Mechanismus zum SM einfachere Gruppen (zB LR-Modell und $SO(5)$)

1. Niederenergie-Symmetrie $SU(3)_c \times U(1)_Q$
2. SM $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$
3. PS-Modell oder $SU(5)$
4. $SO(10)$
5. E_6
6. Komplexere Gruppen (im Zusammenhang mit String-Theorie): $E_8 \times E_8, SO(32)$

4.1.5 Forschungsgeschichte

- Gravitational unification (Newton, 1687)
  - Vereinheitlichung von Erd-Gravitation ("schwere Masse") und der Bewegung von Himmelskörpern ("träge Masse")
- Electromagnetic Unification (Maxwell, 1865)
  - Vereinheitlichung von Elektrizität und Magnetismus
- Electroweak Unification (Glashow 1961, Weinberg 1967, Salam 1967)
- Pati-Salam-Modell (Pati, Salam, 1973)
  - Idee von Left-Right-Symmetry ist bereits im Pati-Salam-Modell eingebaut
  - PS-Modell wurde zunächst wenig geschätzt, da die Autoren das damals nur halb etablierte Quark-Modell nicht in ihr Modell integriert hatten
- $SU(5)$-Unification (Georgi, Glashow, 1974)
  - Historische Einordnung von Georgi (Georgi, 2007)
    * Feeling zu dieser Zeit: Gestern haben wir die EW-Theorie vereinheitlicht, heute vereinheitlichen wir den Rest – was auch immer das sein mag
    * Motivation für diese Arbeiten: Erkenntnis, dass Theorien mit spontan gebrochenen Eichsymmetrien renormierbar sind ('t Hooft, Veltman, 1971), experimentelle Hinweise auf "keine neutralen Ströme" (1971) $\Rightarrow$ Führe schwere Fermionen und Eichbosonen ein, um komplette Multipletts der Eichgruppe zu erhalten, arbeite dabei "aus Versehen" mit einfachen Eichgruppen und erkenne deren Eigenschaften (Ladungs-Quantisierung, magnetische Monopole)

* Erste Prototyp-GUT: $SU(3)\times SU(3)$-Modell (Weinberg, ca 1973), um geratene Relation $\frac{m_e}{m_\mu}=\frac{3\alpha}{\pi}\log 2+\mathcal{O}(\alpha^2)$ von Bjorken zu erklären

- $SO(10)$-Unification (Fritzsch, Minkowski, 1975)
- E_6-Unification (Gursey, Ramond, Sikivie, 1976)
- Trinification $SU(3)_c\times SU(3)_L\times SU(3)_R$ (De Rujula, Georgi, Glashow, 1984)

4.2 Motivation für GUTs

4.2.1 Laufende Kopplungen

- Beobachtung: RGE running sagt vorher, dass sich die SM-Eichkopplungen bei $m_{\text{GUT}}\sim 10^{15}\text{GeV}$ fast treffen
  - Betonung liegt aus "fast" – Kein Präzisionseffekt, benötige Zusatz-Input um wirklich Vereinheitlichung zu bekommen
    * Kann dieses Problem nicht mit GUT-Eigenschaften lösen, da keine GUT-Eigenschaften in die Rechnung eingehen (solange man treshold effects vernachlässigt)
    * Lösung 1: Nehme low energy SUSY an (Minimal Supersymmetry Standard Model (MSSM) statt SM) $\Rightarrow$ Quasi perfekte Vereinheitlichung
    * Lösung 2: Berücksichtige "Treshold-Effekte" – Integriere GUT-Teilchen bei $E\lesssim m_{\text{GUT}}$ aus $\Rightarrow$ GUT-Eigenschaften beeinflussen RGE running (hier gehen Annahmen über die GUT mit ein) und man kann GUT-Eigenschaften meist so wählen, dass man perfekte Vereinheitlichung erhält
      · Achtung: "GUT-Eigenschaften passend wählen" funktioniert nicht für alle GUT-Gruppen – Eigenschaften der Teilchen müssen mit Proton-Zerfall-Schranken vereinbar sein (typisches Problem: Skalarfeld führt zu zu großer Proton-Zerfallsrate, zB in minimal $SU(5)$)
  - Interessant: Schnittpunkt bei $m_{\text{GUT}}\sim 10^{15}\text{GeV}$ ist die perfekte Wahl
    * Theoretisch: m_{GUT} ist weit genug entfernt von Planck-Skala $m_P\sim 10^{19}\text{GeV}$, damit Gravitations-Effekte vernachlässigt werden können
    * Experimentell: m_{GUT} ist etwa die Skala, bis zu der Proton-Zerfall-Experimente sensitiv sind $\Rightarrow$ Skala liegt in experimenteller Reichweite
    * Randnotiz: NP bei m_{GUT} liefert richtige Massenskala für SM-Neutrinos durch seesaw-Mechanismus
  - Steile These bei dieser Überlegung: Zwischen der EW-Skala $v\sim 10^2\text{GeV}$ und der GUT-Skala $m_{\text{GUT}}\sim 10^{15}\text{GeV}$ gibt es keine NP-Effekte ("grand desert")
    * Erlaube zusätzliche Teilchen zwischen v und m_{GUT} (zB SUSY) $\Rightarrow$ Beschreibung wird komplexer, mehr Raum für realistische Modelle
  - Historisch: Kann aus der Forderung "alle Eichkopplungen schneiden sich an einem Punkt" eine der Eichkopplungen aus den anderen beiden vorhersagen $\Rightarrow$ Finde gute Übereinstimmung mit Experiment

- Motivation für GUTs: GUT, die bei $m_{\text{GUT}}\sim 10^{15}\text{GeV}$ spontan zum SM gebrochen wird, würde Vereinheitlichung der Eichkopplungen erklären
  - Notiz: Schnittpunkte der SM-Kopplungskonstanten sind kein Beweis für GUTs – Die Kopplungskonstanten könnten sich auch durch Zufall treffen und danach verschieden bleiben
  - Vereinheitlichte Kopplung hätten den Wert $g\approx 0.8$ bzw $\alpha=\frac{g^2}{4\pi}\approx 5\times 10^{-2}$

- Plausibilisierung für RGE running der SM-Eichkopplungen
  - Grundidee: Bei größeren Abständen (bzw geringeren Energien) schirmen Fermionen Ladungen stärker ab, während Eichbosonen Ladungen stärker aussehen lassen
  - $U(1)_Y$: Abelsches Eichboson $\Rightarrow$ Keine Eichboson-Verstärkungseffekte $\Rightarrow$ Abschirmung nimmt mit zunehmendem Abstand zu
  - $SU(2)_L$: 3 nichtabelsche Eichbosonen $\Rightarrow$ Eichboson-Verstärkungseffekte und Fermion-Abschirmeffekte heben sich ungefähr auf
  - $SU(3)_c$: 8 nichtabelsche Eichbosonen $\Rightarrow$ Eichboson-Verstärkungseffekte dominieren $\Rightarrow$ Abschirmung nimmt mit zunehmendem Abstand ab

4.2.2 Quantisierung von $U(1)$-Ladungen

- Beobachtung: $Q(p) + Q(e) \lesssim 10^{-20}$
  - Kann $Q(p) + Q(e) = 0$ sehr gut mit Atomphysik-Präzisionsexperimenten testen
- Motivation für GUTs: GUTs erklären Relationen wie $Q(p) + Q(e) = 0$ durch Einbettung der SM-Fermionen in GUT-Darstellungen
  - Explizit: (?)
  - Formal: $U(1)$-Untergruppen von "echten" GUTs (einfache Eichgruppe) haben immer Ladungsquantisierung
    1. Alle $U(1)$-Generatoren X einer GUT können als Linearkombination der diagonalen $SU(2)$-Generatoren $T_{3,i}$ geschrieben werden: $X = \sum_i c_i T_{3,i}$ (folgt aus Cartan-Konstruktion von Lie-Algebren bzw "$SU(2)$-Faktoren sind Bausteine für einfache Lie-Algebren")
    2. Koeffizienten der Linearkombination c_i sind rationale Zahlen, da die SSB $G_{\text{GUT}} \to U(1)_X \times G_{\text{rest}}$ durch einen Poincaré-Skalar einer beliebigen GUT-Darstellung (ein Higgs-Teilchen) beschrieben wird
- Quantisierung von $U(1)$-Ladungen im SM erklärt durch Anomaliefreiheit
  - Anschaulich: SM hat bereits eine Erklärung für Ladungsquantisierung, die ist aber nicht so elegant wie die GUT-Erklärung
  - SM-Erklärung: Anomaliefreiheits-Bedingungen an die Eichgruppe liefern Relationen für alle $U(1)$-Ladungen, diese Relationen können nur durch rationale Werte für die Ladungen erfüllt werden
    * Irrationale Werte für die Ladungen nicht möglich, da man dafür irrationale Werte in den Anomaliefreihe Bedingungen bräuchte
    * Notiz: Diese Erklärung funktioniert auch mit zusätzlichen Fermionen bei hohen Energien (die Anomaliefreiheits-Bedingungen können keine irrationalen Koeffizienten beinhalten)
  - Nachteil dieser Erklärung: Benötige mehr Theorie-Hintergrund (nichtperturbative Effekte etc)

4.2.3 Neutrino-Massen

- Beobachtung: Neutrinos haben nicht-verschwindende Masse
  - Direkte Folgerung: Benötige rechtshändige Neutrinos
    * Neutrino-Massen können nur durch rechtshändige Neutrinos (= totale SM-Singlets) erklärt werden
- Motivation für GUTs: Minimale Fermion-Darstellungen in GUTs enthalten oft totale SM-Singlets
  - Anschaulich: GUT-Erklärung für Neutrino-Massen funktioniert nicht automatisch, sondern hängt von den Eigenschaften der GUT-Gruppe ab
  - Bsp: Minimale Fermion-Darstellungen im LR- und PS-Modell, $SO(10)$, E_6 beinhalten totale SM-Singlets; nicht in $SU(5)$
- Bonus: Schwere rechtshändige Neutrinos (Massen von GUT-Skala-Effekten) erklären kleine SM-Neutrino-Massen durch den seesaw-Effekt
  - Abschätzung $m_\nu = \frac{m_D^2}{m_M}$ mit Dirac-Massen $m_D \sim v, m_M \sim m_{\text{GUT}}$ liefert die richtige Neutrino-Massenskala $m_\nu \sim 10^{-2}$eV
    * Andere Formulierung: $v \sim 10^2$GeV und $m_\nu \sim 10^{-2}$eV weisen auf rechtshändige Neutrinos von $m_M \sim 10^{15}$GeV hin
  - Andere Perspektive: Verwende bekannte Neutrino-Massenskala als Einschränkung bei Konstruktion von GUTs

4.2.4 Materie-Antimaterie-Asymmetrie

- Beobachtung: Universum hat Materie-Antimaterie-Asymmetrie, deren Größe durch SM-Effekte allein nicht erklärt werden kann
  - Saccharow-Kriterien für Produktion einer Materie-Antimaterie-Asymmetrie im SM
    * Anschaulich: SM erfüllt alle Kriterien für Produktion einer Materie-Antimaterie-Asymmetrie; aber die Effekte sind zu gering, um die beobachtete Materie-Antimaterie-Asymmetrie zu beschreiben
    1. B-Verletzung: $U(1)_B \times SU(2)_L^2$-Anomalie verletzt B-Symmetrie durch nicht-perturbative Effekte (Instantons, Sphalerons)
    2. CP-Verletzung: EW-Theorie enthält geringe CP-Verletzung (durch komplexe Phasen in CKM-Matrix)
    3. Abweichungen vom thermischen Gleichgewicht: Existiert beim Phasenübergang der SSB
- Motivation für GUTs: GUTs haben zusätzliche Effekte, die eine größere Materie-Antimaterie-Asymmetrie erklären können
  - B-Verletzung: Baryogenese und/oder Leptogenese
    * Baryogenese: $B+L$-Asymmetrie generiert durch Leptoquark- oder Triplett-Higgs-Zerfälle nach GUT-SSB
      · Schwierig zu implementieren, da Sphalerons solche Effekte auswaschen würden
    * Leptogenese: L-Asymmetrie generiert durch Zerfälle rechtshändiger Neutrinos, diese wird durch EW-Prozesse in B-Asymmetrie umgewandelt
      · Leptogenese ist moderne GUT-Erklärung für Materie-Antimaterie-Asymmetrie
  - CP-Verletzung: Erweiterter Yukawa-Sektor liefert mehr Spielraum für CP-Verletzung, zB im Neutrino-Sektor
  - Abweichungen vom thermischem Gleichgewicht: Zusätzliche Phasenübergänge im Zusammenhang mit GUT-SSB

4.3 Vorhersagen von GUTs

4.3.1 Nukleon-Zerfall

- Anschaulich: Nukleon-Zerfall folgt direkt aus der Vereinheitlichung von Quarks und Leptonen bzw der Existenz von (Skalar- oder Vektor)-Leptoquarks
  - Kann Nukleon-Zerfall als einen (wichtigen) Spezialfall von Leptoquark-Effekten verstehen
  - Proton-Zerfall vs Nukleon-Zerfall
    * GUTs sagen auch B-verletzenden Neutron-Zerfall vorher (kleiner Prozess zusätzlich zum β-Zerfall $n\to p\ell^-\nu_\ell \Rightarrow$ Spreche allgemeiner von Nukleon-Zerfall statt nur von Proton-Zerfall
- Phänomenologische Beschreibung von Nukleon-Zerfall mit 4-Fermion-Operatoren
  - Anschaulich: Komplett analog zur Fermi-Theorie für Beta-Zerfall
  - Abschätzung: Proton-Lebensdauer $\tau_p \sim \frac{m_X^4}{g_{\mathsf{GUT}}^4 m_p^5}$
    * Begründung: $\mathcal{M}\sim \frac{g_{\mathsf{GUT}}^2}{m_X^2} m_p^3 \Rightarrow \tau_p \sim m_p \frac{1}{|\mathcal{M}|^2} \sim \frac{m_X^4}{g_{\mathsf{GUT}}^4 m_p^5}$
  - Notiz: Im MSSM ist phänomenologische Beschreibung von Proton-Zerfall auch mit Dimension-4- und -5-Operatoren möglich
    * Anschaulich: Verwende Fermion-Superpartner (Skalare), diese haben Dimension 1 statt Dimension $\frac{3}{2}$
    * Dimension-4-Operatoren liefern zu große Proton-Zerfallsraten $\Rightarrow$ Muss sie verbieten (indem ich R parity fordere)
    * Dimension-5-Operatoren liefern Proton-Lebensdauer $\tau_p \sim \frac{m_G^2 m_{\mathsf{SUSY}}^2}{m_p^5}$ mit GUT-Skala m_G und SUSY-Brechungs-Skala m_{SUSY} (Schwierigkeit: Dimension-5-Operatoren hängen stark von Eigenschaften der SUSY-Brechung ab, aber diese ist nicht wirklich verstanden)

- Suchekanäle mit den stärksten Schranken an Nukleon-Zerfall
  - Proton-Zerfall: $p \to \ell^+ \pi^0, p \to \ell^+ K^0, p \to \nu_\ell K^+$
  - Neutron-Zerfall: $n \to e^\pm K^\mp$
    * Interessant: $n \to e^\pm K^\mp$ kann nicht mit effektiven Operatoren von GUTs beschrieben werden $\Rightarrow$ Beobachtung von $n \to e^\pm K^\mp$ wäre Hinweis auf Proton-Zerfall induzierende Effekte bei geringen Energien
- Experimentelle Suchen nach Proton-Zerfall liefern stärkste Schranken an GUTs
  - Proton-Zerfall bisher nicht experimentell beobachtet, nur obere Schranken generiert
  - Typische Vorhersage von GUT-Modellen ist $\tau_p \lesssim 10^{35}$y, aktuelle obere Schranken $\tau_p \gtrsim 10^{34}$y $\Rightarrow$ GUTs sind aktuelles Thema
  - Wichtige Experimente: Cherenkov-Detektoren (zB Super-K, Hyper-K), Kalorimeter-Detektoren (zB NUSEX, FREJUS, SOUDAN)
- Typisches Ausschluss-Argument für GUTs: Keine Parameterwahl möglich, die Eichkopplung-Vereinheitlichung erlaubt und Schranken aus Nukleon-Zerfall verbietet
  - Ausschluss-Argumente konkret: Schwichtenberg)

4.3.2 Magnetische Monopole

- Anschaulich: Existenz magnetischer Monopole folgt direkt aus der Wahl einer einfachen GUT-Eichgruppe
  - Formal: Eichtheorie mit semisimpler Eichgruppe wird spontan zu Untergruppe mit $U(1)$-Faktor gebrochen $\Rightarrow$ Eichtheorie enthält magnetische Monopole
    * GUTs haben im Allgemeinen semisimple Eichgruppen, SM hat $U(1)$-Faktor $U(1)_Y$ $\Rightarrow$ GUTs sagen magnetische Monopole vorher
- Fundamentale Eigenschaften von magnetischen Monopolen
  - Masse von GUT-Monopol: $m_M \sim \frac{4\pi m_{\text{GUT}}}{g^2_{\text{GUT}}}$
    * Sehr große Masse $\Rightarrow$ Kann magnetische Monopole nicht am Collider suchen, benötige Astrophysik-/Kosmologie-Messungen
  - Magnetische Monopole werden bei der GUT-SSB im frühen Universum produziert
  - Magnetische Monopole sind stabil
  - Magnetische Monopole sind stark ionisierend
    * Anschaulich: Würde bemerken, wenn mir ein magnetischer Monopol über den Weg läuft
  - Magnetische Monopole können Katalysator für Proton-Zerfall sein (...)
- Magnetische Monopole in Kosmologie
  - Produktion durch Kibble-Mechanismus während GUT-SSB
    * Große Anzahl an magnetischen Monopolen würden Entwicklung des Universums (BBN, Expansion) stark beeinflussen, was im Gegensatz zur Beobachtung ist $\Rightarrow$ Benötige Prozess, der magnetische Monopole wieder entfernt
  - Mögliche Prozesse zur Entfernung der magnetischen Monopole
    * Inflation: Schnelle Expansion, sodass Magnetische-Monopol-Verteilung verdünnt wird $\Rightarrow$ Naive Lösung, konsistent
    * Domain walls: Schieben magnetische Monopole weg (?)
    * Inverse SSB für $U(1)_Q$ ($U(1)_Q$ spontan gebrochen oberhalb einer gewissen Energieskala)
    * Phasenübergänge erster Ordnung (?)
    * NP an der Planck-Skala (?)
- Experimentelle Suchen nach magnetischen Monopolen (bisher nichts gefunden)

- Astrophysik-Schranken
  * Anschaulich: Schranke an Monopol-Masse m_M aus der Bedingung, dass deren Einfluss auf Magnetfelder von Galaxien vernachlässigbar ist
  * Magnetische Monopole werden durch galaktische Magnetfelder beschleunigt, diese Energieübertragung schwächt die Magnetfelder ab
- Collider-Suchen
  * Anschaulich: Direct detection experiment am Collider (mit guter Abschirmung)
  * Wichtigstes Experiment: MOEDAL (direct detection experiment am LHC)
- Suchen in kosmischer Strahlung
  * Anschaulich: Direct detection experiment, dass nach Streuung von magnetischen Monopolen aus kosmischer Strahlung am Detektor-Experiment sucht

4.3.3 Neue Teilchen – Leptoquarks

- Leptoquarks $=$ Generische Bezeichnung für Felder mit $B, L \neq 0$
  - Anschaulich: Leptoquarks koppeln an Leptonen und Quarks und können diese daher ineinander umwandeln
  - Im SM haben alle Felder nur $B \neq 0$ oder $L \neq 0$, aber nie $B, L \neq 0$
  - Leptoquarks müssen schwer sein, da sie bei geringen Energien nicht beobachtet wurden
  - Typische Notation für Leptoquarks: X, Y
- Typen von Leptoquarks
  - Skalare Leptoquarks $=$ Zusätzliche Skalare, die die GUT-Brechung beschreiben
  - Vektor-Leptoquarks $=$ Zusätzliche Eichbosonen der spontan gebrochenen GUT-Generatoren
  - Notiz: Fermion-Leptoquarks sind in einer renormierbaren Theorie nicht möglich
    * Argument: 1 Lepton, 1 Quark, 1 Leptoquark $\Rightarrow$ Habe schon Massendimension $4 + \frac{1}{2} > 4$
- Leptoquark-Suchen am Collider
  - Grundlage: GUTs können leichte Leptoquarks $m_X \ll m_{\text{GUT}}$ vorhersagen (...)
  - Direkte Suchen: Suche nach on-shell-Produktion von Leptoquarks
    * Nicht realistisch für $m_X \sim m_{\text{GUT}} \sim 10^{15}$GeV, benötige Collider mit Durchmesser von Größenordnung des Sonnensystems)
  - Indirekte Suchen: Suche nach off-shell-Leptoquarks (insbesondere in Loops)
    * Stärkste Schranken aus Flavorphysik-Experimenten ($m_X \gtrsim 10^5$GeV)
  - Fazit: Entdeckung von GUT-Leptoquarks am Collider sehr unwahrscheinlich
    * Leichte Leptoquarks ($m_X \sim 100$ TeV) könnten aber entdeckt werden und wären ein Hinweis auf höhere Symmetrien
- Notiz: GUTs können auch Nicht-Leptoquarks beinhalten, diese sind aber schwerer zu detektieren
  - Anschaulich: Nicht-Leptoquarks sind wie SM-Teilchen mit großen Massen $\Rightarrow$ Verursachen keine fundamental neuen Prozesse wie Proton-Zerfall, die charakteristisch für GUTs sind
- Notiz: Leptoquarks sind auch typisch für andere SM-Erweiterungen für hohe Energien
  - Bsp: Skalare Leptoquarks als Bindungszustände in composite Higgs models

4.3.4 Vereinheitlichung der Yukawa-Parameter

- Vorhersage für Theorien mit Quark-Lepton-Vereinheitlichung an GUT-Skala: $\lambda_{d,i} = \lambda_{\ell,i}, \lambda_{u,i} = \lambda_{\nu,i}$ (?)
  - λ_i sind Diagonalelemente der Yukawa-Kopplungen im SM
  - Achtung: Vorhersage gilt nur an der GUT-Skala, muss dann noch RGE running bis zur SM-Skala berechnen
- Anschaulich: GUTs vereinheitlichen Quarks und Leptonen $\Rightarrow$ Erwarte viele Vorhersagen von Yukawa-Kopplungen
  - Achtung: In den meisten GUTs gibt es keine Fermion-Familien-Vereinheitlichung $\Rightarrow$ Doch nicht ganz so viele Vorhersagen
    * Challenge: Vereinheitlichung der Fermion-Generationen
      · Das ist dasselbe Problem wie das Flavor problem, daher nicht zentraler Fokus für GUTs
- Tests von Yukawa-Parameter-Vereinheitlichung in der Praxis schwierig wegen RGE running
  - Messunsicherheiten der SM-Parameter
    * SM-Eichkopplungen können recht präzise vermessen werden, daher sind Unsicherheiten im zugehörigen RGE running gering; für Yukawa-Kopplungen hat man erheblich größere Unsicherheiten
  - Treshold effects
    * Kann durch diesen Effekt erklären, warum wir keine vereinheitlichten Kopplungen beobachten
  - Beste Testgröße ist $\frac{m_b}{m_\tau}$
    * Größen $\frac{m_{u,i}}{m_{\nu,i}}$ haben sehr große Unsicherheiten und sind daher schlecht geeignet
      · Neutrinomassen nicht bekannt, nur Größenordnung $m_\nu \sim 10^{-2}$eV
    * Messunsicherheiten der Größen $\frac{m_{d,i}}{m_{\ell,i}}$
      · Betrachte diese Größen, da $m_{d,i}, m_{\ell,i}$ selbe $SU(2)_L$-Quantenzahlen haben und man Neutrinos nicht betrachten will
      · Werte: $\frac{m_d}{m_e} = 9.14 \pm 0.94$, $\frac{m_s}{m_\mu} = 0.88 \pm 0.10$, $\frac{m_b}{m_\tau} = 2.35 \pm 0.02$

4.3.5 Zusammenhang mit kosmischer Inflation (...)

- Anschaulich: GUT-Skala und Inflations-Skala bei ähnlicher Größenordnung $\Rightarrow$ Kann GUT-Vorhersagen mit Kosmologie-Beobachtungen testen

4.4 LR-Modell $SU(3)_c \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$

4.4.1 Modell

- Notation für Darstellungen: $(n_c, n_L, n_R)_{n_{B-L}}$
- Links-Rechts-Symmetrie
  - Passend zu den $SU(2)_L$-Eichbosonen W^i (besser: W^i_L) des SM gibt es ein $SU(2)_R$-Eichbosonen W^i_R
  - Für jedes $SU(2)_L$-Dublett Q_L, L_L (wie im SM) gibt es ein $SU(2)_R$-Dublett Q_R, L_R
    * Für Quarks und geladene Leptonen gibt es schon rechtshändige Partner, fasse diese jetzt zu $SU(2)_R$-Dubletts zusammen
    * Neu: Rechtshändige Neutrinos ν_R für $SU(2)_R$-Lepton-Dublett ℓ_R
- Eichgruppe enthält $U(1)_{B-L}$ bzw neues Eichboson B'^μ
  - $U(1)_{B-L}$ ist die einzige anomaliefreie globale Symmetrie im SM $\Rightarrow$ Kann $U(1)_{B-L}$ eichen
  - Erhalte Hypercharge-Untergruppe $U(1)_Y$ mit $Y = 2I_{3,R} + (B-L)$
    * Anschaulich: Tausche $U(1)_Y$ gegen $U(1)_{B-L}$

- Erhalte QED-Untergruppe $U(1)_Q$ mit $Q = I_{3,L} + I_{3,R} + \frac{B-L}{2} = I_{3,L} + \frac{Y}{2}$

- Higgs-Sektor
  - Higgs-Bidublett $(1,2,2)_0$ bzw $\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1^0 & \phi_2^+ \\ \phi_1^- & -\phi_2^{0*} \end{pmatrix}$
    * Anschaulich: SM-Higgs-Dublett $(1,2)_{-1/2}$ erhält rechtshändigen Partner
    * Die beiden Spalten von Φ sind $SU(2)_L$-Dubletts, die beiden Zeilen von Φ sind (komplex konjugierte) $SU(2)_R$-Dubletts
  - Higgs-Triplett $(1,1,3)_2$ bzw $\Delta_R = \begin{pmatrix} \delta_R^+/\sqrt{2} & \delta_R^{++} \\ \delta_R^0 & -\delta_R^+/\sqrt{2} \end{pmatrix}$
    * Wähle die $U(1)_{B-L}$-Quantenzahlen so, dass δ_R^0 totales Singlett bezüglich der SM-Eichgruppe ist
    * Elektrische Ladungen der Komponenten von Δ_R folgt aus $Q = I_{3,L} + I_{3,R} + \frac{B-L}{2} = I_{3,R} + 1$ mit $I_{3,R} \in \{\pm 1, 0\}$
  - SSB zum SM
    1. Vevs für Higgs-Tripletts: $\langle \delta_R^0 \rangle = v_R$
       * Higgs-Mechanismus mit v_R generiert Massen für rechtshändige Eichbosonen W_R, rechtshändige Neutrinos und alle Skalare außer das Higgs-Dublett aus Φ
       * Erwarte $v_R \gg v$, damit dieser Prozess getrennt von der EW-SSB im SM abläuft
    2. Vevs für neutrale Komponenten von Φ: $\langle \Phi \rangle = v \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 \\ 0 & -\sin\beta e^{-ia} \end{pmatrix}$
       * Einschränkungen an die Parameter: $\beta < \frac{\pi}{4}, 0 < a < 2\pi$
  - Notiz: Higgs-Triplett Δ_R war nicht Teil des Original-LR-Modells, sondern wurde nachträglich ergänzt
    * Benötige Δ_R für realistische Beschreibung von Neutrinomassen bzw Seesaw-Mechanismus
    * SSB im Original-LR-Modell nur mit vev für Higgs-Bidublett Φ

- Zusätzliche diskrete Symmetrien
  - $\mathcal{P}$-Symmetrie
    * Anschaulich: $\mathcal{P}$-Symmetrie vertauscht $SU(2)_L$- und $SU(2)_R$-Darstellungen
    * Explizit: $Q_L \overset{\mathcal{P}}{\leftrightarrow} Q_R, W_L \overset{\mathcal{P}}{\leftrightarrow} W_R, \Phi \overset{\mathcal{P}}{\leftrightarrow} \Phi^\dagger$
    * Benötige zusätzlich zum rechtshändigen Higgs-Triplett Δ_R ein linkshändiges Higgs-Triplett Δ_L bzw $(1,3,1)_2$
      · Erhalte (vernachlässigbaren) Beitrag zur SSB $\langle \delta_L^0 \rangle = v_L \propto \frac{v}{v_R^2}$ (siehe type-2 seesaw) (?)
    * Finde damit $g_L = g_R$ für die Eichkopplungen von $SU(2)_L \times SU(2)_R$
  - $\mathcal{C}$-Symmetrie
    * Anschaulich: $\mathcal{C}$-Symmetrie (?)
    * Explizit: $Q_L \overset{\mathcal{P}}{\leftrightarrow} Q_R, W_L \overset{\mathcal{P}}{\leftrightarrow} W_R, \Phi \overset{\mathcal{P}}{\leftrightarrow} \Phi^\dagger$
    * Finde damit $g_L = g_R$ für die Eichkopplungen von $SU(2)_L \times SU(2)_R$

4.4.2 Neutrino-Massen im LR-Modell (...)

4.4.3 Eigenschaften und Phänomenologie

- Erklärt Ladungsquantisierung von $U(1)_Q$
  - Begründung: $Q = T_{3,L} + \frac{Y}{2} = T_{3,L} + T_{3,R} + \frac{B-L}{2}$, Generatoren hier können nur rationale Werte annehmen
    * Für Hyperladung Y (pures Theorie-Konzept) gab es keine Erklärung für rationalen Wertebereich
    * $B-L$ hat einfache Interpretation, die nur rationalen Wertebereich erlaubt

- Majorana-Neutrinos
  - Erklärt leichte Neutrino-Massen mit Seesaw-Mechanismus

- Vorhersage: Leptonzahl-Verletzung
  * Signatur in Niederenergie-Physik: Neutrinoless double beta decay
  * Signatur in Hochenergie-Physik: Dilepton-Paare mit selber Ladung aus Majorana-Neutrino-Zerfall
    · Erhalte Dilepton-Paare mit selber Ladung aus Fermion/Antifermion-Vertex des Majorana-Neutrinos
    · Typisch für solche Prozesse: Zusätzlich 2 Jets aus W_R-Zerfall $\Rightarrow$ Einfach detektierbar
- Erhalte Leptogenese durch ν_R-Zerfall

• Keine Verbindung zu Eichkopplungs-Vereinigung $\Rightarrow$ LR-Skala kann in LHC-Reichweite sein $v_R \sim 10\,\text{TeV}$

4.5 Pati-Salam-Modell $SU(4)_c \times SU(2)_L \times SU(2)_R$

4.5.1 Modell

• Notation für Darstellungen: (n_c, n_L, n_R)

• Modell baut auf LR-Modell $SU(3)_c \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$ auf
- Erwarte SSB $SU(4)_c \times SU(2)_L \times SU(2)_R \to SU(3)_c \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L} \to SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$

• Fermion-Sektor
- Anschaulich: “Leptonzahl als vierte Farbe”
- Konkret: Fermionen als $SU(4)_c$ fundamentale Darstellungen $(4,2,1)+(\bar{4},1,2)$
  * Explizit: $(Q_L^{\text{red}}, Q_L^{\text{green}}, Q_L^{\text{blue}}, \ell_L)$ als $(4,2,1)$-Darstellung

• Eichboson-Sektor
- $B-L$ ist der diagonale $SU(4)_c$-Generator
  * Funktioniert wegen tr$(B-L) \propto$ tr $\begin{pmatrix} \frac{1}{3}\mathbb{1}_3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 0$ ($SU(4)_c$-Generatoren müssen spurlos sein)
  * Konventionelle Normierung tr$(T^a T^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab}$ liefert $T^{15} = \sqrt{\frac{3}{8}}(B-L)$
- $SU(4)_c$ hat 15 Generatoren, $SU(3)_c \times U(1)_{B-L}$ hat nur 9 Generatoren $\Rightarrow$ 6 zusätzliche Eichbosonen X_μ^i
  * Zusätzliche Eichbosonen X_μ^i tragen Ladung $B-L = \frac{4}{3} \Rightarrow X_\mu^i$ sind Leptoquarks
- Eichboson-Matrix für $SU(4)_c$: $\sum_{i=1}^{15} P_\mu^i T^i = \begin{pmatrix} \sum_{a=1}^8 G_\mu^a \frac{\lambda^a}{2} + \frac{1}{2\sqrt{6}} B'_\mu \mathbb{1}_3 & \sum_{i=1}^3 X_\mu^i \hat{e}^i \\ \sum_{i=1}^3 X_\mu^{i*} \hat{e}^{i,T} & -\frac{3}{2\sqrt{2}} B'_\mu \end{pmatrix}$
  * Notation: Gluonen G_μ^a mit $SU(3)$-Generatoren $\frac{\lambda^a}{2}$, $B-L$-Generator B'_μ, neue Eichbosonen $X_\mu^i, X_\mu^{i,*}$ mit Einheitsvektoren $\hat{e}_i$

• Higgs-Sektor (...)

• SSB zum LR-Modell: $SU(4)_c \to SU(3)_c \times U(1)_{B-L}$ (...)

4.5.2 Eigenschaften und Phenomenologie

• Erbt Eigenschaften des LR-Modells (Majorana-Neutrinos, Ladungsquantisierung)

• Erklärt Ladungsquantisierung (?)

• Zusätzliche Felder: Leptoquarks
- Signatur in Flavorphysik: L_e- und L_μ-verletzende leptonische Meson-Zerfälle mit Leptoquark im Loop
  * Bsp: $K^0 \to \mu^+ e^-$ (liefert stärkste Schranke an m_X)
- Experimentelle Schranke $m_X \gtrsim 10^{12}\text{GeV}$
  * Notiz: Massen dieser Leptoquarks müssen nicht bei $m_{\text{GUT}} \sim 10^{15}\text{GeV}$ haben, da es in diesem Modell keine coupling unification gibt
- Kein Proton-Zerfall (?)

4.6 $SU(5)$ Unification

4.6.1 Modell

- Anschaulich: "Einfachste" GUT, da $SU(5)$ die minimale GUT ist, in die man das SM einbetten kann
  - Intuitives Argument: Kann $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)$-Transformation in $SU(5)$-Transformationen U einbetten
    * Explizit: $U_c = \begin{pmatrix} U_c^{3\times 3} & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_2 \end{pmatrix}, U_L = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_3 & 0 \\ 0 & U_L^{2\times 2} \end{pmatrix}, U_Y = \begin{pmatrix} e^{-i\alpha/3}\mathbb{1}_3 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha/2}\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}$
- Eichboson-Sektor
  - Verwende $24 = 5^2 - 1$-Darstellung von $SU(5)$:
$$\sum_{i=1}^{24} P_\mu^i T^i = \begin{pmatrix} \sum_{a=1}^8 G_\mu^a \frac{\lambda^a}{2} + \sqrt{\frac{2}{30}} B_\mu \mathbb{1}_3 & \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{X}_\mu \hat{e} & \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{Y}_\mu \hat{e} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{X}_\mu^* \hat{e}^T & \frac{1}{2}W_\mu^3 - \frac{3}{\sqrt{60}}B_\mu & \frac{1}{\sqrt{2}}W_\mu^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{Y}_\mu^* \hat{e}^T & \frac{1}{\sqrt{2}}W_\mu^- & -\frac{1}{2}W_\mu^3 - \frac{3}{\sqrt{60}}B_\mu \end{pmatrix}$$
    * Notation: $8+3+1 = 12$ SM-Eichbosonen G_μ^a, W_μ^a, B_μ und 2×6 neue Eichbosonen (Leptoquarks) $X_\mu^i, Y_\mu^i \in \mathbb{C}$ mit $i \in \{1,2,3\}$
    * Normierung festgelegt durch Konvention tr$T^i T^j = \frac{1}{2}\delta^{ij}$
- Fermion-Sektor $\mathscr{L}_f = i\bar{\psi}\not{D}\psi - itr(\bar{\chi}\not{D}\chi)$
  - Aufgabe: Bette 3×15 Weyl-Felder in $SU(5)$-Darstellungen ein
    * 15 Weyl-Felder pro Gneration: 12 Quarks (3 Farben, up/down, links/rechts), 2 geladene Leptonen (links/rechts), 1 Neutrino (linkshändig)
    * Behandle jede Generation einzeln
    * Konvention: Definiere $SU(5)$-Felder so, dass alle Weyl-Fermionen linkshändig sind
      · Verwende $\mathcal{C}$, um rechts- in linkshändige Felder zu flippen
  - Bette jede Fermion-Generation des SM in eine $\bar{5}+10$-Darstellung von $SU(5)$ ein
    * Gruppentheorie: $5, \bar{5}$ sind fundamentale Darstellungen, 10 aus antisymmetrische Kombination aus $5\times 5 = 15 + 10$
    * Explizit: $\bar{5}$-Darstellung $\psi = \begin{pmatrix} d_r^c \\ d_g^c \\ d_b^c \\ e \\ -\nu_e \end{pmatrix}$, 10-Darstellung $\chi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & u_b^c & -u_g^c & u_r & d_r \\ -u_b^c & 0 & u_r^c & u_g & d_g \\ u_g^c & -u_r^c & 0 & u_b & d_b \\ -u_r & -u_g & -u_b & 0 & e^c \\ -d_r & -d_g & -d_b & -e^c & 0 \end{pmatrix}$
      · Notation: Ladungskonjugation $\mathcal{C}f\mathcal{C}^{-1} =: f^c$ (schreibe alle Fermionen als linkshändig)
      · Arbeite mit $\bar{5}$ statt mit 5, da dann alle Felder linkshändig gewählt werden können
      · Wähle Minuszeichen für ν in ψ, um richtiges Transformationsverhalten des $SU(2)$-Dubletts $\begin{pmatrix} e \\ \nu \end{pmatrix}$ zu erhalten (?)
      · Wähle Minuszeichen in χ so, dass χ antisymmetrisch ist
    * Konstruktion der 5-Darstellung: Nur diese eine Wahl für SM-Fermionen möglich wegen $U(1)_Q$
  - Kovariante Ableitung $D_\mu\psi = \partial_\mu\psi - igP_\mu^i T^i\psi, D_\mu\chi = \partial_\mu\chi - igP_\mu^i(T^i\chi + \chi(T^i)^T)$ (?)
    * $g := g_c = g_L = g_Y$ ist vereinheitlichte Kopplungskonstante
- SSB zum SM
  - Minimal: Adjoint (bzw 24) Σ, fundamental (bzw 5) Higgs Φ
    * Anschaulich: Σ steuert die SSB, Φ liefert SM-Higgs-Dublett
      · Parametrisiere $\Phi = (h^T, H^T)^T$ mit SM-Higgs-Dublett H und Higgs-Triplett h
      · Toy model: Betrachte nur Effekte von Σ, um SSB gut zu verstehen
    1. Allgemeines renormierbares Potential: $V(\Sigma,\Phi) = -\frac{\mu_\Sigma^2}{2}tr\Sigma^2 + \frac{a}{4}(tr\Sigma^2)^2 + \frac{b}{2}tr\Sigma^4 - \frac{\mu_\Phi^2}{2}\Phi^\dagger\Phi + \frac{\lambda}{4}(\Phi^\dagger\Phi)^2 + \alpha\Phi^\dagger\Phi$tr$\Sigma^2 - \beta\Phi^\dagger\Sigma^2\Phi$

2. Wähle Potential-Parameter $\mu_\Sigma^2 > 0, \mu_\Phi^2 > 0, a > 0, \lambda > 0, 15a + 7b > 0, \beta > 0 \Rightarrow$ Potential hat nicht-triviales globales Minimum und SSB findet statt (?)
3. Parametrisiere SSB mit $\langle\Sigma\rangle = \frac{v_X}{2}\text{diag}(2, 2, 2, -3, -3), \langle\Phi^T\rangle = (v_c, 0, 0, 0, v_W)$
   * Diese Parametrisierung ist allgemein, da Σ und Φ $SU(5)$-Darstellungen sein müssen und man solche Konstanten immer durch $SU(5)$-Transformationen auf diese Form bringen kann (?)
4. Berechne Eichboson- und Higgs-Massen mit SSB-Parametrisierung

– Modern: Ein Higgs in 45-Darstellung (...)
  * Vorteil: Beschreibe SSB und SM-Higgs mit nur einer $SU(5)$-Darstellung

4.6.2 Eigenschaften und Phenomenologie

- Einbettung der Fermionen in $SU(5)$-Darstellungen erklärt Ladungsquantisierung
  – ψ: $0 \stackrel{!}{=} 3Q(d^c) + Q(e) + Q(\nu) = -3Q(d) + Q(e)$
  – χ: $0 \stackrel{!}{=} 3Q(u) + Q(e^c)$ (?)
- Problem: Doublet-triplet splitting
  – Anschaulich: Benötige große Massenhierarchie (= Fine-Tuning) $v \sim m_H \ll m_h$ von SM-Higgs-Dublett H und NP-Higgs-Triplett h in Φ
    * Gute Bezeichnung: “tree-level hierarchy problem”
      · Auch hier geht es darum, dass die SM-Higgs-Masse natürlicherweise bei größeren Energien sein sollte
      · Unterschied zum “normalen” hierarchy problem: “Natürlich” folgt hier nicht aus Größe von Loop-Korrekturen, sondern aus Einbettung in dieselbe GUT-Darstellung
    * Leichtere h-Skalare sind wegen Proton-Zerfall ausgeschlossen
  – Lösungsvorschläge
    * Mehrere Lösungsvorschläge für klassische GUTs: Sliding singlet, missing partner, missing vev, pseudo-GB mechanisms (siehe PDG)
    * XD-GUTs: Kann SSB durch Randbedingungen so parametrisieren, dass SM-Higgs masselos bleibt
  – GUTs, die $SU(5)$ als Untergruppe haben, erben dieses Problem
- Problem: Eichkopplung-Vereinheitlichung nicht kompatibel mit Schranken aus Proton-Zerfall
  – Ausführlich: Leichtes Higgs-Triplett wichtig für treshold effects von Eichkopplung-Vereinheitlichung, aber Proton-Zerfall-Schranken verbieten leichtes Higgs-Triplett
  – Proton-Zerfall durch Leptoquarks X, Y
    * Liefert starke Schranken an GUT-Skala $\Rightarrow$ Ausschlusskriterium für typische $SU(5)$ Modelle
  – Proton-Zerfall durch Higgs-Triplett h
    * Experimentell: Benötige $m_h \gtrsim 10^{11}$GeV
    * Minimal $SU(5)$ benötigt $\tau_p \sim 10^{28.5} - 10^{31.5}$y, aktuelle obere Schranke ist aber $\tau_p \gtrsim 10^{34}$y

4.6.3 Erweiterungen von minimal $SU(5)$

- Zusätzliche Teilchen
  – Motivation: Löse die Probleme mit Vereinheitlichung, Proton-Zerfall und Neutrino-Massen für minimal $SU(5)$
  – Minimales Szenario 1: Zusätzliches leichtes skalares Leptoquark 15
    * Erhalte richtiges RGE running durch treshold effects des Leptoquarks
    * Richtige Neutrino-Masse durch type-2 seesaw
    * Sagt relativ große Proton-Zerfallsrate vorher (durch leichtes Leptoquark9
  – Minimales Szenario 2: Zusätzliches leichtes adjoint Fermion 24

        * Erhalte richtiges RGE running durch treshold effects der Fermionen
        * Richtige Neutrino-Masse durch type-1 und/oder type-3 seesaw
        * Sagt Fermion-Triplett mit $m \sim 1$TeV vorher

- SUSY-$SU(5)$ (...)
- $SU(5)$ mit rechtshändigen Neutrinos (...)

4.7 $SO(10)$ Unification

4.7.1 Modell (...)

- Anschaulich: "Schönste" GUT, $SO(10)$ die minimale Gruppe ist, in der alle SM-Fermionen in eine $SO(10)$-Darstellung eingebettet werden können
- Eichboson-Sektor
    - $SO(10)$-Eichbosonen sind in 45-Darstellung
    - 12 SM-Eichbosonen
    - 33 NP-Eichbosonen
        * Beinhalten Leptoquarks und "langweilige" Eichbosonen ($B=0$ oder $L=0$)
- Fermion-Sektor
    - Bette alle SM-Fermionen und ein rechtshändiges Neutrino (totales SM-Singlet) in 16-Darstellung von $SO(10)$ ein
- Higgs-Sektor
    - Fundamentales Higgs 10 (beinhaltet SM-Higgs)
- SSB
    - SSB zum $SO(5)$-Modell: $SO(10) \to SU(5) \times U(1) \to SU(5)$ durch 16 oder 126
        * Erhalte aus diesem SSB-Mechanismus als Zwischenschritt "flipped $SU(5)$" $SU(5) \times U(1)$
    - SSB zum PS-Modell: $SO(10) \to SO(6) \times SO(4) = SU(4)_c \times SU(2)_L \times SU(2)_R$ durch 54 oder 210
    - SSB direkt zum SM-Modell: $SO(10) \to SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ durch 144

4.7.2 Eigenschaften und Phenomenologie

- Vorhersage von rechtshändigen Neutrinos
    - Benötige rechtshändige Neutrinos bzw totales $SU(5)$ Singlet, um eine 16-Darstellung von $SO(10)$ zu konstruieren
- Gauge coupling unification funktioniert mit und ohne SUSY

4.8 Weitere GUT-Modelle

4.8.1 E_6 Unification

4.8.2 Trinification $SU(3)_c \times SU(3)_L \times SU(3)_R$

- Besonderheit: Alle drei $SU(3)$-Faktoren haben selbe Eichkopplungen
    - Anschaulich: $SU(3)_c \times SU(3)_L \times SU(3)_R$ ist "echte" GUT (im Sinne "vereinheitlichte Koplungskonstanten"), obwohl die Eichgruppe nicht-einfach ist
    - Formal: Benötige zusätzliche diskrete Symmetrien, um diese Eigenschaft zu garantieren

- Eigenschaften
  - Kann alle SM-Nicht-Eichbosonen (SM-Fermionen und SM-Higgs) in einee GUT-Darstellung einbetten
    * “Magische” GUT-Darstellung: $(3,\bar{3},1)+(1,3,\bar{3})+(\bar{3},1,3)$

4.8.3 331 model $SU(3)_c \times SU(3)_L \times U(1)_Y$

- Anschaulich: Ersetze $SU(2)_L \to SU(3)_L$, um die 3 Fermion-Generationen zu erklären
  - Mechanismus: Fordere, dass Fermionen-Generationen sich unterschiedlich unter der Eichgruppe transformieren $\Rightarrow$ Benötige 3 Generationen für Eichanomalie-Freiheit

4.8.4 Chiral color $SU(3)_L \times SU(3)_R \times SU(2)_L \times U(1)_Y$

- Anschaulich: Color als diagonale Untergruppe einer chiralen $SU(3)$, analog zur chiralen Symmetrie für Hadronen
- Formal: SSB $SU(3)_L \times SU(3)_R \to SU(3)_c$

4.8.5 Flipped GUTs

- Anschaulich: Erweitere “echte” GUT um $U(1)$-Faktor

4.8.6 Non-minimal extensions für $SU(5), SO(10), E_6$ etc

4.9 Gauge-Higgs Grand Unification

4.10 Composite Higgs Grand Unification

Kapitel 5

Supersymmetrie-Modelle

Kapitel 6

Neutrino-Physik

6.1 Grundlagen

6.1.1 Grundlagen

- Flavor- vs Massen-Eigenzustände
  - Begriffe für Flavor-Eigenzustände: SM-Dubletts vs SM-Singlets
    * SM-Dubletts/Singlets transformieren sich (nicht-)trivial unter der SM-Eichgruppe
      · Neutrinos transformieren sich nur unter $SU(2)_L$ (unter der sich nur linkshändige Teilchen transformieren) $\Rightarrow$ Alle rechtshändigen Neutrinos sind SM-Singlets
      · Ausnahme Majorana-Neutrinos: Kann keine Chiralität zugeordnen
    * Notiz: SM-Dubletts müssen Dirac-Fermionen sein
  - Begriffe für Massen-Eigenzustände: Aktiv vs steril
    * Aktive/sterile Neutrinos bestehen hauptsächlich aus SM-Dublett/Singlet-Neutrinos
    * Achtung: Im Gegensatz zu den Begriffen für Flavor-Eigenzuständen sind die Begriffe für Massen-Eigenzustände nicht eindeutig definiert
      · Annahme: Aktive Neutrinos mischen stark untereinander und schwach mit sterilen Neutrinos (sonst hätte man keine Beziehung zwischen aktiven Neutrinos und SM-Dublett-Neutrinos)
- Mindestens 2 Neutrinos sind massiv $\Rightarrow$ “Minimales” Standard-Modell ist unzureichend
  - “Minimales” Standardmodell: Enthälte keine rechtshändigen Neutrinos
    * Minimale Erweiterung, um das Problem zu lösen: Neutrino Minimal Standard Model (νMSM) – Füge 3 rechtshändige Neutrinos (Singlets unter SM-Eichgruppe) hinzu
  - Experimentelle Evidenz: Beobachte Neutrino-Oszillationen $\Rightarrow$ Kann nur durch massive Neutrinos erklärt werden
  - Formal: Benötige rechtshändige Neutrinos (totale SM-Singlets) für konsistente Beschreibung
  - Große offene Frage: Sind Neutrinos Dirac- oder Majorana-Fermionen?
    * Diese Frage stellt sich für alle massiven Fermionen, die Singlets unter der Eichgruppe der Theorie sind
    * Aktuell ungeklärte Frage (warte auf mehr Experiment-Daten)
- Zusätzliche Neutrinos
- Dirac- vs Majorana-Neutrinos
  - Anschaulich: Dirac-Neutrinos sind der Minimal-Fall, Majorana-Neutrinos sind allgemeiner
  - Zusätzliche Parameter von Majorana-Neutrinos: 2 PMNS-Winkel, Majorana-Masse
  - Zusätzliche physikalische Effekte von Majorana-Neutrinos: Leptonzahl-Verletzung

6.1.2 Quellen von Verwirrung in Neutrino-Physik

- Große Mischung zwischen Flavor- und Massen-Eigenzuständen (im Gegensatz zu Quarks) $\Rightarrow$ Muss die beiden Begriffe klar abtrennen
  - Notation: Flavor-Eigenzustände ν_α (griechische Indizes) vs Massen-Eigenzustände ν_i (normale Indizes)
  - Bei Quarks redet man immer über Massen-Eigenzustände, bei Neutrinos (meist) über Flavor-Eigenzustände
- SM-Singlets können Majorana-Fermionen sein $\Rightarrow$ Darf nicht in links- und rechtshändig denken (im Gegensatz zu anderen SM-Teilchen, die alle Weyl-Fermionen sind), da Chiralität für massive Fermionen nicht lorentzinvariant ist
  - Nicht-SM-Singlet-Fermionen müssen masselos und damit Weyl-Fermionen sein, da ihre Massenterme nicht eichinvariant wären
    * "Effektive" Fermionmassen für Nicht-SM-Singlet-Fermionen kommen durch den Higgs-Mechanismus – Das sind aber keine "echten" Fermionmassen, sondern SSB-Effekte
  - Der Begriff "rechtshändige Neutrinos" für SM-Singlet-Neutrinos macht keinen Sinn
    * SM-Singlet-Neutrinos müssen massiv sein, um die Massen der SM-Dublett-Neutrinos zu erklären
    * Explizit: Falls SM-Singlet-Neutrinos massiv sind, ist Chiralität nicht invariant unter Lorentz-Transformati und es macht keinen Sinn, ein Teilchen als links- oder rechtshändig zu bezeichnen, da die Chiralität durch Lorentztransformationen geändert werden kann
  - Die Aussage "nur linkshändige Teilchen sind unter $SU(2)_L$ geladen" macht für massive Fermionen ebenfalls keinen Sinn

6.1.3 Überblick über Einschränkungen an Neutrinos

- Anzahl der Neutrinos
  - LEP: Es gibt 3 leichte ($m_\nu \lesssim \frac{m_Z}{2}$) aktive Neutrinos
  - Neutrino-Oszillations-Experimente: Mindestens 2 Neutrino-Masseneigenzustände haben nicht-verschwind Masse
- Masse der Neutrinos
  - KATRIN: Effektive Elektron-Neutrino-Masse ist klein $m_{\nu_e} \lesssim 1\,\mathrm{eV}$
  - Neutrino-Oszillations-Experimente: $|\Delta m_{ij}^2| = |m_i^2 - m_j^2| \lesssim 0.1\,\mathrm{eV}$
  - Fazit: Neutrinos sind quasi immer relativistisch (außer thermisch produzierte Neutrinos aus dem CνB)

6.1.4 Überblick über Modelle für Neutrino-Physik

- Neutrino Minimal Standard Model - νMSM
  - Phänomenologie: Kann außer Neutrino-Massen auch Dunkle Materie und Materie-Antimaterie-Asymmetrie erklären (Asaka, Shaposhnikov, 2005)

6.1.5 Neutrino-Mischung – PMNS-Matrix

- Anschaulich: Neutrinomischung wie Quarkmischung wegen nichtverschwindenden Lepton- und Neutrinomassen
- Unterschiede zur Quarkmischung (...)
  - Längenskala der Oszillationen: fm(Quarks), km(Neutrinos) wegen $m_\nu \ll m_q \Rightarrow$ Quarkflavor zufällig
  - Neutrino-Masseneigenzustände nicht benutzt, da sie von der Entfernung zum Produktionsort abhängen

- PMNS-Matrix: $U_{\alpha i}$ in $|\nu_\alpha\rangle = \sum_i U_{\alpha i}|\nu_i\rangle$ mit Masseneigenzuständen $|\nu_i\rangle$ und Flavoreigenzuständen $|\nu_\alpha\rangle$
  - Parametrisierung: $U_{\text{PMNS}} = V_{\text{CKM}} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & e^{i\alpha_{21}/2} & \\ & & e^{i\alpha_{31}/2} \end{pmatrix}$ mit $V_{\text{CKM}} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & c_{23} & s_{23} \\ & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & & s_{13}e^{i\delta} \\ & 1 & \\ -s_{13}e^{-i\delta} & & c_{13} \end{pmatrix}$ analog zur CKM-Matrix
    * Effektiv: 2 zusätzliche Phasen (weil Neutrinos Majorana-Teilchen sein können) zusätzlich zu den 3 Winkel + 1 Phase der CKM-Matrix

6.1.6 Offene Fragen in Neutrino-Physik

- Sind Neutrinos Dirac- oder Majorana-Fermionen?
  - Theorie: Majorana-Fermionen passen besser ins Bild, da sie durch den Seesaw-Mechanismus kleine Neutrino-Massen erklären können
  - Experiment: Sobald Neutrinoloser Doppel-Beta-Zerfall wird beobachtet $\Rightarrow$ Neutrinos sind Majorana-Teilchen
- Neutrino-Massenhierarchie: Normal ordering, inverted ordering odering oder degenerate
  - Experiment: Vermutlich normal ordering
- Wie groß ist die CP-Verletzung im Neutrino-Sektor
  - Experiment: Vermutlich maximal

6.2 Neutrino-Oszillationen

6.2.1 Grundlagen

- Physikalische Intuition zu Neutrino-Oszillationen
  - Massen-Basis-Weltbild
    1. Bei einem Prozess mit einem ℓ_α-Lepton wird mit Wahrscheinlichkeit $|\langle \nu_i, 0|\nu_\alpha, 0\rangle|^2 = |U_{\alpha i}|^2$ ein Neutrino im Massen-Eigenzustand $|\nu_i\rangle$ produziert
    2. Solange das System nicht mit der Umwelt wechselwirkt (zB über EW-Prozesse in einem Detektor), befindet sich das System in einer Superposition der $|\nu_i\rangle$-Zustände
    3. Da die ν_i-Zustände unterschiedliche Massen haben (und unterschiedlich mit Materie wechselwirken), haben sie eine andere Zeit-Abhängigkeit $|\nu_i, t\rangle = e^{-im_i^2 L/(2E)}|\nu_i, 0\rangle$ (folgt aus QM-Rechnung)
    4. Nach einer Zeit t nach Produktions des Neutrinos wird mit einem β-Lepton getestet, zu welcher Wahrscheinlichkeit der Neutrino-Superpositions-Zustand den Flavor β hat $\Rightarrow$ Baue gedanklich aus den Massen-Eigenzuständen $|\nu_i, t\rangle$ wieder einen Flavor-Eigenzustand $|\nu_\alpha, t\rangle$, der jetzt (aufgrund der Quantenmechanik-Zeitentwicklung) einen anderen Flavor als der Zustand $|\nu_\alpha, 0\rangle$ vor der Zeitentwicklung hat ($\langle \nu_\alpha, 0|\nu_\alpha, t\rangle \neq 1$)
       * Slang: "Das α-Neutrino ist mit Wahrscheinlichkeit $|\langle \nu_\beta, 0|\nu_\alpha, t\rangle|^2$ in ein β-Neutrino oszilliert"
  - Flavor-Basis-Weltbild (...)
    1. Bei einem Prozess mit einem ℓ_α-Lepton wird ein Neutrino im Flavor-Eigenzustand $|\nu_\alpha\rangle$ produziert, das gemäß $|\nu_\alpha\rangle = \sum_i U_{\alpha i}|\nu_i\rangle$ aus Massen-Eigenzuständen $|\nu_i\rangle$ zusammengesetzt ist
    2. Die $|\nu_i\rangle$-Komponenten von $|\nu_\alpha\rangle$ haben unterschiedliche Massen und daher auch eine unterschiedliche Zeitentwicklung
  - Kohärenz-Bedingung: Neutrino-Oszillationen sind nur möglich, falls die Unterschiede der Energien und Impulse der Massen-Eigenzustände kleiner als die entsprechenden Messunsicherheiten sind $\sigma_E \gtrsim |E_i - E_j|, \sigma_p \gtrsim |p_i - p_j|$
    * Diese Bedingung ist für die 3 SM-Dublett-Neutrinos in allen heute möglichen Oszillations-Experimenten erfüllt
    * Notiz: Für schwere sterile Neutrinos $\nu_i \gtrsim 1\,\text{GeV}$ ist diese Bedingung nicht erfüllt, daher sind Neutrino-Oszillations-Experimente nicht sensitiv auf solche Neutrinos

6.2.2 Neutrino-Oszillationen im Vakuum – Formalismus

- Ziel: Berechne Oszillations-Wahrscheinlichkeit $P(\nu_\alpha \to \nu_\beta, t) = |\langle \nu_\beta, 0 | \nu_\alpha, t\rangle|^2$
- Ebene-Wellen-Formalismus für Zeitentwicklung der Neutrino-Massen-Eigenzustände $|\nu_i, t\rangle$
  - Anschaulich: Dieser Zugang erlaubt eine schnelle Herleitung der Zeit-Entwicklung, ist aber recht naiv – Die ehrlichere Variante ist der Wellen-Paket-Formalismus

  1. Grundannahmen über Eigenschaften von Neutrino-Oszillationen
     - Neutrinos sind ultra-relativistisch $m_i \ll E_i, p_i = \sqrt{E_i^2 - m_i^2} = E_i$
       * Vernachlässige Unterschied zwischen E_i und p_i für die $|\nu_i\rangle$, wenn es nicht darauf ankommt – Schreibe dann einfach E, p
     - Neutrinos bewegen sich quasi mit Licht-Geschwindigkeit bzw $t = L$ für Propagationsdauer t und Propagationslänge L
     - Ehrlich: Rechne zur führenden Ordnung in $p = E + \mathcal{O}(E^2), L = t + \mathcal{O}(t^2)$
  2. Neutrino-Massen-Eigenzustände $|\nu_i\rangle$ sind per Definition Eigenzustände des Hamilton-Operators H des Systems: $H|\nu_i\rangle = E_i|\nu_i\rangle$ mit $E_i^2 = p_i^2 + m_i^2$
  3. Zeitentwicklungsoperator für $|\nu_i\rangle$: $U_i(t) = e^{-iE_it} = e^{-iEt}e^{-i\frac{m_i^2 L}{2E}}$
     - Entwickle Exponent $U_i(t)$ bis zur führenden Ordnung in Termen, die vom Neutrino-Typ abhängen: $E_i = \sqrt{p_i^2 + m_i^2} = p_i\left(1 + \frac{m_i^2}{2p_i}\right) = E\left(1 + \frac{m_i^2}{2E}\right)$

- Wellen-Paket-Formalismus für Zeitentwicklung der Neutrino-Massen-Eigenzustände $|\nu_i, t\rangle$ (...)
- QFT-Formalismus für Zeitentwicklung der Neutrino-Massen-Eigenzustände (...)
- Allgemeiner Ausdruck für Oszillationswahrscheinlichkeit, $\vartheta_{ij} = \frac{\Delta m_{ij}^2 L}{2E}$:
  $P(\nu_\alpha \to \nu_\beta) = \delta_{\alpha\beta} - 4\sum_{i<j} \text{Re}\left(U_{\alpha i}U_{\beta i}^* U_{\beta j} U_{\alpha j}^*\right)\sin^2\frac{\vartheta_{ij}}{2} - 2\sum_{i<j}\text{Im}\left(U_{\alpha i}U_{\beta i}^* U_{\beta j} U_{\alpha j}^*\right)\sin\vartheta_{ij}$
  - Notiz: Ausdruck gilt für n Lepton-Generationen
  - Interpretation des Ausdrucks
    * "Normale" Effekte: Neutrino-Flavor oszilliert mit Oszillationslänge $L = 4\pi\frac{E}{\Delta m_{ij}^2}$
    * CPV-Effekte: Neutrino-Flavor oszilliert mit Oszillationslänge $L = 2\pi\frac{E}{\Delta m_{ij}^2}$
    * Benötige unterschiedliche Neutrino-Massen für flavorändernde Prozesse (vgl GIM-Mechanismus)
    * Jarlskog-Invariante $\text{Im}\left(U_{\alpha i}U_{\beta i}U_{\beta j}U_\alpha\right)$ misst CPV in Neutrino-Oszillationen
  - Notiz: Für Oszillationen von Anti-Neutrinos $\bar\alpha \to \bar\beta$ muss man $U_{\gamma k} \to U_{\gamma k}^*$ ersetzen
  - Spezialfall $n = 2$: $U = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} \Rightarrow P(\nu_\alpha \to \nu_\beta, \alpha \neq \beta) = -\sin^2 2\theta \sin^2\frac{\Delta m^2 L}{4E}$
    1. Habe wegen $i \in [1, 2]$ nur einen Term in $\sum_{i<j}$
    2. Finde $\text{Im}(\cdots) = 0$,
       $\text{Re}(\cdots) = \text{Re}(U_{\alpha i}U_{\beta i}^* U_{\beta j}U_{\alpha j}^*) \overset{\alpha\neq\beta, i\neq j}{=} \sin^2\theta\cos^2\theta = \frac{1}{4}\sin^2 2\theta$
    3. Aufsammeln liefert $P(\nu_\alpha \to \nu_\beta, \alpha\neq\beta) = -\sin^2 2\theta\sin^2\frac{\Delta m^2 L}{4E}$

1. $\langle\nu_\beta, 0|\nu_\alpha, t\rangle = \left(\sum_j U_{\beta j}\langle\nu_j, 0|\right)\left(e^{-ipL}\sum_i U_{\alpha i}^* e^{-im_i^2 L/(2E)}|\nu_i, 0\rangle\right) = e^{-ipL}\sum_{i,j}U_{\beta j}U_{\alpha i}^* e^{-im_i^2 L/(2E)}\langle\nu_j, 0|\nu_i, 0\rangle$
   $= e^{-ipL}\sum_i U_{\beta i}U_{\alpha i}^* e^{-im_i^2L/(2E)}$
2. $P(\nu_\alpha \to \nu_\beta, t) = |\langle\nu_\beta, 0|\nu_\alpha, t\rangle|^2 = \left|e^{-ipL}\sum_i U_{\beta i}U_{\alpha i}^* e^{-im_i^2 L/(2E)}\right|^2$
   $= \sum_i |U_{\alpha i}|^2|U_{\beta i}|^2 + \sum_{i<j}\left(U_{\alpha i}U_{\beta i}^* U_{\beta j}U_{\alpha j}^* e^{i\vartheta_{ij}} + U_{\beta i}U_{\alpha i}^* U_{\alpha j}U_{\beta j}^* e^{-i\vartheta_{ij}}\right)$ mit $\vartheta_{ij} = \frac{\Delta_{ij}^2 L}{2E}$
3. Ersten Term vereinfachen: $\sum_i |U_{\alpha i}|^2|U_{\beta i}|^2 = \sum_i |U_{\alpha i}|^2|U_{\beta i}|^2 + (1-1)\sum_{i\neq j}U_{\alpha i}U_{\beta i}^* U_{\beta j}U_{\alpha j}^*$
   $= \sum_{i,j}U_{\alpha i}U_{\beta i}^* U_{\beta j}U_{\alpha j}^* - \sum_{i\neq j}U_{\alpha i}U_{\beta i}^* U_{\beta j}U_{\alpha j}^* = \delta_{\alpha\beta} - 2\sum_{i<j}\text{Re}\left(U_{\alpha i}U_{\beta i}^* U_{\beta j}U_{\alpha j}^*\right)$

- Verwende Unitarität von U für die ersten beiden Terme:
  $\sum_{i,j} U_{\alpha i}U^*_{\beta i}U_{\beta j}U^*_{\alpha j} = \Big(\sum_i U_{\alpha i}U^*_{\beta i}\Big)\Big(\sum_j U_{\beta j}U^*_{\alpha j}\Big) = (\delta_{\alpha\beta})^2 = \delta_{\alpha\beta}$
- Identifiziere Realteil in drittem Term ($2\text{Re}z = z + z^*$ mit $z = U_{\alpha i}U^*_{\beta i}U_{\beta j}U^*_{\alpha j}$):
  $\sum_{i\neq j} U_{\alpha i}U^*_{\beta i}U_{\beta j}U^*_{\alpha j} = \sum_{i<j}\Big(U_{\alpha i}U^*_{\beta i}U_{\beta j}U^*_{\alpha j} + U_{\alpha j}U^*_{\beta j}U_{\beta i}U^*_{\alpha i}\Big) = 2\sum_{i<j}\text{Re}\Big(U_{\alpha i}U^*_{\beta i}U_{\beta j}U^*_{\alpha j}\Big)$

4. Zweiten Term vereinfachen: $\sum_{i<j}\Big(U_{\alpha i}U^*_{\beta i}U_{\beta j}U^*_{\alpha j}e^{i\vartheta_{ij}} + U_{\beta i}U^*_{\alpha i}U_{\alpha j}U^*_{\beta j}e^{-i\vartheta_{ij}}\Big)$
   $= 2\sum_{i<j}\text{Re}\Big(U_{\alpha i}U^*_{\beta i}U_{\beta j}U^*_{\alpha j}\Big)\cos\vartheta_{ij} - 2\sum_{i<j}\text{Im}\Big(U_{\alpha i}U^*_{\beta i}U_{\beta j}U^*_{\alpha j}\Big)\sin\vartheta_{ij}$
   (a) Verwende $e^{\pm i\vartheta_{ij}} = \cos\vartheta_{ij} \pm i\sin\vartheta_{ij}$
   (b) Identfiziere $2\text{Re}z = z + z^*, 2i\text{Im}z = z - z^*$: $\sum_{i<j}\Big(U_{\alpha i}U^*_{\beta i}U_{\beta j}U^*_{\alpha j}e^{i\vartheta_{ij}} + U_{\beta i}U^*_{\alpha i}U_{\alpha j}U^*_{\beta j}e^{-i\vartheta_{ij}}\Big)$
   $= 2\sum_{i<j}\text{Re}\Big(U_{\alpha i}U^*_{\beta i}U_{\beta j}U^*_{\alpha j}\Big)\cos\vartheta_{ij} - 2\sum_{i<j}\text{Im}\Big(U_{\alpha i}U^*_{\beta i}U_{\beta j}U^*_{\alpha j}\Big)\sin\vartheta_{ij}$
5. Aufsammeln $\Rightarrow P(\nu_\alpha\to\nu_\beta,t) = \delta_{\alpha\beta} - 4\sum_{i<j}\text{Re}\Big(U_{\alpha i}U^*_{\beta i}U_{\beta j}U^*_{\alpha j}\Big)\sin^2\frac{\vartheta_{ij}}{2} - 2\sum_{i<j}\text{Im}\Big(U_{\alpha i}U^*_{\beta i}U_{\beta j}U^*_{\alpha j}\Big)\sin\vartheta_{ij}$
   - Verwende $1 - \cos\vartheta_{ij} = 2\sin^2\frac{\vartheta_{ij}}{2}$

- Kohärenz von Neutrino-Oszillationen (...)

6.2.3 Neutrino-Oszillationen in Materie

- Einfluss von Materie auf Neutrino-Oszillationen
  - Mögliche Prozesse in "normaler" Materie (e^-, n, p)
    * $\nu_\alpha X \to \nu_\alpha X$ mit Z im t-Kanal (für alle ν_α-Flavors und $X = e^-, p, n$)
      · Z-Prozesse verändern Neutrino-Oszillationen nicht, da sie für alle Neutrino-Flavors gleich sind
    * $\nu_e e \to e\nu_e$ mit W im t-Kanal (nur für ν_e)
      · W-Prozesse veränden Neutrino-Oszillationen, da sie nur für ν_e stattfinden und daher zu zusätzlichen relativen Phasen führen
  - Intuition: Nur kohärente Neutrino-Streuung ist effektiv
    * Kohärente Neutrino-Streuung: Energieübertrag durch $SU(2)_L$-Eichboson ist vernachlässigbar $\Rightarrow$ Kann nicht sagen, mit welchem Materie-Teilchen das Neutrino gestreut hat, muss in $i\mathcal{M}$ Beiträge durch Streuung mit allen Materie-Teilchen berücksichtigen $\Rightarrow i\mathcal{M} = \sum_{i=1}^n i\mathcal{M}_i \propto n, |\mathcal{M}|^2 \propto n^2$ für n Materie-Teilchen
      · Notiz: Kohärente Streuung = Elastische Streuung mit Streuwinkel $\theta = 0$
    * Inkohärente Neutrino-Streuung: Großer Energieübertrag $\Rightarrow$ Keine Interferenzterme in $|\mathcal{M}|^2$ durch Streuung an verschiedenen Materie-Teilchen in $i\mathcal{M}$, da die Endzustände unterschieden werden können $\Rightarrow |\mathcal{M}|^2 = |\sum_{i=1}^n i\mathcal{M}_i|^2 = \sum_{i=1}^n |\mathcal{M}|^2 \propto n$ für n Materie-Teilchen

- Materie mit konstanter Dichte
  - Formaler Zugang: Hamiltonian für freies Neutrino erhält zusätzliche Potential-Terme V_α (für Flavor α) auf der Diagonalen
    * Zusatzterme stehen auf der Diagonalen, da sie den Neutrino-Flavor nicht ändern
    * Nur Potentialunterschiede zwischen den Neutrino-Flavors sind physikalisch
      · Begründung: Absolute Energien sind unphysikalisch, nur Energiedifferenzen haben eine Bedeutung
  - Rechnung: Hamiltonian diagonalisieren liefert effektive Mischungswinkel $\theta_{ij,\text{eff}}$ und effektive Massendifferenzen $\Delta m^2_{ij,\text{eff}}$
    * Führe Notationen $\theta_{ij,\text{eff}}, \Delta m^2_{ij,\text{eff}}$ ein, um Formalismus für Neutrino-Oszillationen wieder verwenden zu können
  - Physikalische Interpretation
    * Maximale Mischung $\sin\theta_{ij,\text{eff}} = 1$ bei "Resonanzen"

- Position der Resonanzen abhängig von $\Delta m_{ij}^2, \theta_{ij}, V_\alpha$

- Materie mit variierender Dichte (...)
  - Adiabatische Näherung: Energie-Eigenzustände ändern sich nur langsam, während sich die Dichte ändert $\Rightarrow$ Neutrino bleibt im selben Energie-Eigenzustand
    * Anschaulich: Mit der adiabatischen Näherung wird die Rechnung einfach
    * Quantifizierung der "adiabaticity": γ mit $\gamma \gg 1$ (...)

6.3 Neutrino-Massen

6.3.1 Experimentelle Zugänge zu Neutrino-Massen

- Beta-Zerfall $\Rightarrow m_{\bar\nu_e}^2 := \sum_i |U_{ei}|^2 m_i^2$
  - Experimentell: Vermesse Endpunktbereich (maximale Elektron-Energie E_e) des Spektrums $\frac{d\Gamma}{dE_e}$ sehr genau
  - Intuitiv: Erzeuge Neutrinos in Ruhe $\Rightarrow$ Neutrinomasse ist kein kleiner Parameter mehr im Problem
  - Argument: Kann Spektrum kurz vor dem Endpunkt als Funktion von $m_{\bar\nu_e}^2$ umschreiben
    1. Spektrum kurz vor dem Endpunkt hat die Form $\frac{d\Gamma}{dE_e} \propto= f(E_e) \sum_i |U_{ei}|^2 \sqrt{1-\left(\frac{m_i}{E_0-E_e}\right)^2}$
    2. Für KATRIN (erster Messpunkt bei $E_0 - E_e \sim 2\,\text{eV}$ ist $\left(\frac{m_i}{E_0-E_e}\right)^2$ ein kleiner Parameter
       $\Rightarrow$ Finde $\sum_i |U_{ei}|^2 \sqrt{1-\left(\frac{m_i}{E_0-E_e}\right)^2} = \sum_i |U_{ei}|^2 \left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{m_i}{E_0-E_e}\right)^2\right) + \mathcal{O}\left(\left(\frac{m_i}{E_0-E_e}\right)^2\right)$
       $= \sum_i |U_{ei}|^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{\sum_i |U_{ei}|^2 m_i^2}}{E_0-E_e}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\left(\frac{m_i}{E_0-E_e}\right)^2\right) = \sqrt{1-\left(\frac{m_{\bar\nu_e}}{E_0-E_e}\right)} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{m_i}{E_0-E_e}\right)^2\right)$
       * Notiz: Kurz vor dem Endpunkt $E_0 - E_e \sim m_i$ ist die hier verwendete Näherung nicht mehr gültig und man sieht Knicke im Spektrum bei den einzelnen Neutrino-Massen m_i
    * Intuition: Benötige $|U_{ei}|^2$ in $m_{\bar\nu_e}^2 := \sum_i |U_{ei}|^2 m_i^2$, da man hier eine inkohärente Summe über die Neutrino-Masseneigenzustände hat (wegen Neutrinos im Endzustand)

- Neutrinoloser Doppel-Beta-Zerfall ($0\nu\beta\beta$) $\Rightarrow m_{\beta\beta} := \left|\sum_i m_i U_{ei}^2\right|$
  - Argument: Kann $0\nu\beta\beta$-Zerfallsrate als Funktion von $m_{\beta\beta}$ schreiben $\Gamma_{0\nu\beta\beta} = GMm_{\beta\beta}^2$
    * Notation: G ist Phasenraum-Faktor, M ist Nukleon-Matrixelement
    * Intuition: Benötige U_{ei}^2 (statt $|U_{ei}|^2$) in $m_{\beta\beta}$, da man hier eine kohärente Summe über die Neutrino-Masseneigenzustände hat (wegen virtuellen Neutrinos)

- Kosmologie $\Rightarrow \sum_i m_i$ (...)

6.3.2 Effektive Beschreibung von Neutrino-Massen

- Dirac-Massenterme – Yukawa-Sektor
  - Formal: SM enthält nur $\mathscr{L} \supset -Y_{ij}^\ell \bar L_{L,i} H e_{R,j} +$ h.c. und nicht $\mathscr{L} \supset -Y_{ij}^\nu \bar L_{L,i} \tilde H \nu_{R,j} +$ h.c. $\Rightarrow$ Kann diesen Term mit einem zusätzlichen SM-Singlet auch hinschreiben
    * Nach EW-SSB erhält man Dirac-Massenterme $\mathscr{L} \supset -\frac{v}{\sqrt{2}} Y_{ij}^\nu \nu_{L,i} \nu_{R,j} +$ h.c.
  - Formale Nachteile gegenüber Majorana-Massentermen
    * Dirac-Massenterme erhält Leptonzahl, in einer Theorie mit SM-Singlets erwartet man aber Leptonzahl-Verletzung
      - Intuitiv: Dirac-Neutrinos (Leptonzahl-erhaltend) sind ein Spezialfall von Majorana-Neutrinos (Leptonzahl-verletzend)
    * Keine UV-Theorie für Neutrino-Massen (der neue Operator ist bereits renormierbar) $\Rightarrow$ Keine Erklärung für kleine Neutrino-Massen

- Majorana-Massenterme – Weinberg-Operator
  - Formal: SMEFT beinhaltet den Dimension-5-Operator $\mathscr{L} \supset \frac{1}{\Lambda}\overline{(\tilde{H}L_L)^c}C(\tilde{H}^\dagger L_L) +$ h.c.
    * Nach EW-SSB erhält man Majorana-Massenterme $\mathscr{L} \supset \frac{v^2}{2\Lambda}\bar{\nu}_L^c C\nu_L +$ h.c.
    * C ist eine Koeffizientenmatrix (wird zur Massen-Matrix nach EW-SSB)
    * Notiz: Dieser Term ist eichinvariant, da $\tilde{H}L_L$ einzeln schon eichinvariant ist
    * Notiz: $\mathscr{L} \supset \frac{1}{\Lambda}\overline{(\tilde{H}L_L)^c}C(\tilde{H}^\dagger L_L) +$ h.c. $= \frac{1}{\Lambda}\bar{L}_L^c\tilde{H}^*C\tilde{H}^\dagger L_L +$ h.c.
  - Weinberg-Operator ist effektiver Operator $\Rightarrow$ Will als nächstes eine UV-Theorie, die den Operator generiert $\Rightarrow$ Seesaw-Modelle

6.3.3 Seesaw-Modelle – UV-Modelle für Majorana-Neutrinos

- Seesaw-Modelle $=$ UV-Modelle, die den Weinberg-Operator ($=$ Majorana-Massenterme) auf tree-level generieren
  - Intuitiv: Erhalte den Weinberg-Operator $\sim \overline{(\tilde{H}L_L)^c}(\tilde{H}L_L)$, indem ich ein Teilchen ausintegriere, das entweder an $\tilde{H}L_L$ oder an $\bar{L}_L^c L_L$ und $\tilde{H}^c\tilde{H}^\dagger$ koppelt
    * Seesaw-Modelle unterscheiden sich darin, welches Teilchen ausintegriert wird
- Seesaw-Mechanismus $=$ Schwere zusätzliche Teilchen an der Energieskala M erzeugen kleine Majorana-Neutrino-Massenterme $m_i \sim \frac{v^2}{M}$ mit dem Vakuum-Erwartungswert v des SM-Higgs-Bosons
  - Alle Seesaw-Modelle generieren eine Seesaw-Mechanismus
  - Bildlich: Relation $m_i \sim \frac{v^2}{M}$ ist wie eine Wippe ("seesaw"), die eine große Skala M in eine kleine Skala m_i umwandelt, die Higgs-Skala v ist die Lagerung der Wippa
  - Seesaw-Mechanismus erklärt kleine Neutrino-Massen auf elegante Art und Weise $\Rightarrow$ Bevorzuge mental Majorana-Neutrinos vor Dirac-Neutrinos
- type 1 seesaw – Right-handed singlet
  1. Teilcheninhalt: SM-Teilchen und n Majorana-Fermion-Felder N mit Quantenzahlen $(1,1,0)$
  2. Lagrangian: Zusätzlicher Term $\mathscr{L} \supset -\bar{L}_L\tilde{H}DN + \frac{1}{2}\bar{N}^cM_NN +$ h.c. mit Kopplungsparameter D und Massenmatrix M_N
     - Anschaulich: Kopplung an den einzigen SM-Singlet-Operator $\bar{L}_L\tilde{H}$, der einen offenen Fermion-Index hat, und Majorana-Massenterm
  3. Integriere N aus $\Rightarrow$ Erhalte Weinberg-Operator mit $C = \dots$ bzw Neutrino-Massenmatrix $M = D^T\frac{1}{M_N}Dv^2$

  - Vor- und Nachteile
    * +: Dieses Modell ist wirklich minimal – Es macht nichts, außer kleine Neutrino-Massen zu erklären
      · Anschaulich: N hat keine Kopplungen außer die, die Neutrino-Massen generieren
- type 2 seesaw – Scalar triplet
  1. Teilcheninhalt: SM-Teilchen und (komplexes) Skalarfeld Δ mit Quantenzahlen $(1,3,1)$
  2. Lagrangian: Zusätzliche Terme $\mathscr{L} \supset \bar{L}_L^c D\Delta L_L + \mu\tilde{H}^\dagger\Delta^\dagger H +$ h.c. $- \frac{m_\Delta^2}{2}\Delta^\dagger\Delta$ mit Kopplungsmatrix D
     - Notiz: Außerdem noch zusätzliche Kopplungen im Higgs-Sektor (spielen keine Rolle für Neutrino-Massen)
     - Notiz: Muss Potential für Δ so wählen, dass $\langle\Delta\rangle \neq 0$ (?)
  3. Integriere Δ aus $\Rightarrow$ Erhalte Weinberg-Operator mit $C = \frac{\mu}{m_\Delta^2}D$ bzw Neutrino-Massenmatrix $M = \frac{\mu v^2}{2m_\Delta^2}D \sim \mu\frac{v^2}{m_\Delta^2}$
     - Seesaw-Mechanismus: Großes m_Δ liefert kleines M

  - Vor- und Nachteile

    * +: Modell sagt außer Neutrino-Massen-Eigenschaften auch noch veränderte Kopplungen von L_L und H vorher $\Rightarrow$ Zusätzliche Vorhersagen, die man testen kann
    * +: Zusätzliches Teilchen Δ muss nicht extrem schwer sein für leichte Neutrino-Massen wegen $M \sim \frac{\mu}{m_\Delta^2}$ – Kann auch relativ kleines m_Δ und sehr kleines μ haben

- type 3 seesaw – Fermion triplet
  - Anschaulich: Genau wie type 1, aber mit Fermion-Triplet statt Fermion-Singlet

1. Teilcheninhalt: SM-Teilchen und n Majorana-Fermion-Felder Σ mit Quantenzahlen $(1, 3, 0)$
2. Lagrangian: Gleich wie für type-1 mit $N \to \Sigma$
3. Integriere Σ aus $\Rightarrow$ Erhalte Weinberg-Operator mit $C = \dots$ bzw Neutrino-Massenmatrix $M = D^T \frac{1}{m_\Sigma} D v^2$

- Keine weiteren "minimalen" Seesaw-Modelle ($=$ nur ein zusätzliches Feld) möglich
  - Begründung: Es existieren keine weiteren Felder, die man eichinvariant an LL und HH oder LH koppeln kann
  - Komplexes Skalarfeld mit Quantenzahlen $(1, 1, 0)$?
- Seesaw-Modelle mit mehr als einem zusätzlichen Feld (...)

6.3.4 Neutrino-Massen aus Loops (...)

- Idee: Neutrinos sind wie alle anderen SM-Fermionen masselos, aber der Weinberg-Operator (und damit Neutrino-Massen) werden durch höhere Ordnungen in Störungstheorie generiert $\Rightarrow$ Beobachte effektive nicht-verschwindende Neutrinomassen
  - Neutrino-Massen sind klein wegen Loop-Unterdrückungsfaktor

6.4 Sterile Neutrinos

6.4.1 Grundlagen

6.4.2 Neutrino-Oszillationen mit sterilen Neutrinos

6.4.3 Zerfälle von sterilen Neutrinos

6.5 Weitere Themen

6.5.1 Modelle für das Lepton-Flavor-Puzzle

Kapitel 7

Axions

7.1 Grundlagen

7.1.1 Grundlagen

- Idee: Erweitere SM um globale Symmetrie G und ein komplexes Skalarfeld, das die Symmetrie G spontan bricht
  - Bin nur an Goldstone-Moden ("Axions") des komplexen Skalarfelds interessiert
    * Goldstone-Moden haben verschwindende (exakte Symmetrie) bzw geringe (explizit gebrochene Symmetrie) Masse $\Rightarrow$ Führen zu Effekten bei geringen Energien
    * Andere Moden haben Masse bei der höchsten Skala der Theorie (naturalness) $\Rightarrow$ Effekte bei geringen Energien sind vernachlässigbar
  - Erwartung: Globale Symmetrien werden bei hohen Energieskalen explizit gebrochen $\Rightarrow$ Axions haben Masse $m_a > 0$
    * Wenn G nicht explizit gebrochen ist, wäre $m_a = 0$ (Goldstone-Theorem)
  - Gruppe G ist prinzipiell beliebig, nehme aber für Einfachheit den Fall $G = U(1)$ an
    * Motivation für diese Vereinfachung: Nur ein Axion $\Rightarrow$ Einfache Beschreibung
    * Verallgemeinerung auf mehrere Axions bzw nicht-triviale Gruppe G ist trivial
    * Schreibe $G = U(1)_G$, um diese $U(1)$-Symmetrie von $U(1)_Q$ etc abzugrenzen
  - Axions sind pseudoskalar
    * Konkret: Axions haben Paritäts-Eigenwert -1
    * Begründung: Goldstonebosonen aus spontaner Brechung von kompakten Symmetrien sind pseudoskalar, alle inneren Symmetrien sind kompakt (...)
  - Energieskala der spontanen Symmetriebrechung: $f_G \gg 1\,\text{TeV}$
    * Energieskala muss groß sein, da man Axions sonst schon entdeckt hätte
  - Axions wechselwirken schwach
    * Formal: Axion-Effekte bei Energieskala E sind unterdrückt mit $\sim \frac{E}{f_G}$
- Spezialfall: QCD-Axion
  - Konkret: $G = U(1)$ mit $U(1)_G \times SU(3)_c^2$-Anomalie
    * Bezeichne $U(1)$-Symmetrie G als Peccei-Quinn-Symmetrie bzw $G = \text{PQ}$
    * Benötige $G \times SU(3)_c^2$-Anomalie für den Peccei-Quinn-Mechanismus
    * Benötige $G = U(1)$, da nur eine $U(1)$-Symmetrie einen nicht-verschwindenden Anomaliekoeffizienten mit $SU(3)_c$ haben kann
  - Motivation: QCD-Axion löst das strong CP problem des SM (Peccei-Quinn-Mechanismus)
  - Besonderheit: QCD-Axion hat Beziehung zwischen m_a und f_G
- Begriffe: Axion vs QCD-Axion vs Axion-Like Particle (ALP)
  - Historische Konvention

        * ALP = Allgemeiner Fall
            · Begriff ALP wurde in dieser Konvention eingeführt
        * Axion = QCD-Axion = Spezialfall
            · Namensgebung: Axion ist benannt nach Waschmittelmarke (Axion beseitigt das schmutzige strong CP problem)
    - Moderne Konvention (hier verwendet)
        * Axion = ALP = Allgemeiner Fall
            · Namensgebung: Axion wegen axialen Kopplungen an Fermionen (Axion ist pseudoskalar und koppelt nur in der Form $\partial_\mu a$ an Fermionen $\Rightarrow$ Koppelt an $\bar{q}'\gamma^\mu\gamma_5 q$)
            · Begriff ALP (axion-like particle) macht in dieser Konvention wenig Sinn
        * QCD-Axion = Spezialfall (assoziiert mit strong CP problem)

- Axions sind zyklisch $a = a + 2\pi f_G$
    - Formal: Folgt daraus, dass Axions als Winkel-Variable definiert sind
        * SSB-Parametrisierung: $S = \frac{s+f_G}{\sqrt{2}} e^{ia/f_G}$
    - In der Praxis: Axion-Feld kann nicht beliebig große Werte annehmen
        * Anders formuliert: Wenn Axion-Feld sehr große Werte annimmt, ist deren Effekt äquivalent zu dem eines Axion-Felds mit geringem Wert
        * Konkret: Kann immer den Wertebereich $a \in [0, 2\pi f]$ wählen
    - Diese Eigenschaft wird oft übersehen

7.1.2 Motivation für Axions

- Axions als DM-Kandidat
    - Axions sind schwach wechselwirkende Teilchen und damit ein guter DM-Kandidat
- Jede spontan gebrochene globale Symmetrie sagt Axions vorher
    - Bsp: Composite Higgs Models, GUTs, Super Gravity, String Theory
- Axions sind leicht experimentell zu untersuchen
- QCD-Axion (Spezialfall) löst strong CP problem

7.1.3 Klassifikation von Axions (...)

- Ultra-light axions $10^{-33}\text{eV} \lesssim m_a \lesssim 10^{-18}\text{eV}$
- Light axions
- Normale axions $10^{-11}\text{eV} \lesssim m_a \lesssim 10^{-2}\text{eV}$
    - Anschaulich: Typischer Bereich für QCD-Axions
    - Untere Schranke aus Black Hole Superradiance
    - Obere Schranke aus Supernova-Cooling
- Schwere axions $10^3\text{eV} \lesssim m_a$

7.2 Effektive Feldtheorie für Axions

7.2.1 Effektiver Lagrangian $\mathscr{L}_a$ für SMEFT+Axion

- Konstruktion des effektiven Lagrangians
  $\mathscr{L}_a = \frac{1}{2}(\partial_\mu a)^2 + \frac{i\partial_\mu a}{f_G}\sum_f c_{af}\bar f\gamma^\mu f + N_Y\alpha_Y\frac{a}{f_G}B\tilde B + N_L\alpha_L\frac{a}{f_G}W\tilde W + \alpha_c\Big(\theta_c + N\frac{a}{f_G}\Big)G\tilde G$
  - Konventionen
    * Notation: G_X ist $U(1)_G$-Ladung des Felds X
    * Normiere $U(1)_G$-Ladung G so, dass $a \overset{U(1)_G}{\to} a+\alpha f_G$
    * Koeffizient der $U(1)_G\times U(1)_Y^2$-Anomalie: N_Y
    * Koeffizient der $U(1)_G\times SU(2)_L^2$-Anomalie: N_L
    * Koeffizient der $U(1)_G\times SU(3)_c^2$-Anomalie: N_c (manchmal auch N)
  - Vorüberlegungen
    * Betrachte nur führende Terme für jede Wechselwirkung
    * Erlaubte Axion-Kopplungen
      · $\partial_\mu a$ (invariant unter $U(1)_G$)
      · $\mathscr{L}_a \supset \alpha_H\Big(N_H\frac{a}{f_G}+\theta_H\Big)V\tilde V$ für Vektorbosonen V einer Gruppe H mit $U(1)_G H^2$-Anomaliekoeffizient $N_H\neq 0$ und θ-Parameter θ_H

1. Axion-Eichboson-Kopplungen $\mathscr{L}_a \supset N_Y\alpha_Y\frac{a}{f_G}B\tilde B + N_L\alpha_L\frac{a}{f_G}W\tilde W + N\alpha_c\Big(\theta_c + N_c\frac{a}{f_G}\Big)G\tilde G$
   - Existenz dieser Terme folgt aus allgemeiner Überlegung für chirale Anomalien (siehe QFT-Zsf)
   - θ-Term verschwindet für $U(1)_Y$ und $U(1)_L$, aber nicht für $SU(3)_c$
     * Präziser: θ-Term hat keine physikalische Relevanz und kann daher auf 0 gesetzt werden, da er von der Wahl der Parametrisierung abhängt
   - Notiz: Zyklizität des Axions $a = a + 2\pi f_G$ in dieser Form der Kopplung nicht manifest
     * Besser: $\frac{a}{f_G}F\tilde F \to \sin\frac{a}{f_G}F\tilde F$ mit irgendeinem Feldstärketensor F
2. Axion-Fermion-Kopplungen $\mathscr{L}_a \supset \sum_f c_{af}\frac{i\partial_\mu a}{f_G}\bar f\gamma^\mu f$
   - Notation: f sind chirale Fermionen (links- oder rechtshändig)
     * Kann für jedes Fermion f den Term umschreiben: $\bar f\gamma^\mu f = \pm\bar f\gamma^\mu\gamma_5 f$ mit $\begin{cases} + & P_R f = 0 \\ - & P_L f = 0\end{cases}$
   - Annahme: Axion-Fermion-Wechselwirkung ist flavor-diagonal
     * Kann auch nicht-diagonale Wechselwirkungen $c_{ff'}$ betrachten
   - Kann diese Kopplungen für ein explizites Axion-Modell aus den Yukawa-Termen des komplexen Skalarfelds herleiten durch Feld-Redefinition $f'_P = e^{-iG_{f_P}a/f_G}f_P, P\in\{L,R\}$
     * Anschaulich: Redefiniere Fermion so, dass die neuen Fermionen f' verschwindende $U(1)_G$-Ladungen $G_{f'}=0$ haben
   - Notiz: Kann diesen Term umschreiben $\mathscr{L}_a \supset \sum_f c_{af}\frac{i\partial_\mu a}{f_G}\bar f\gamma^\mu f = 2\sum_f c_{af}m_f\frac{a}{f_a}\bar f f$
     * Interpretation: Axion-Fermion-Wechselwirkungen sind mit der Fermion-Masse unterdrückt
     * Achtung: Diese Relation gilt nur in führender Ordnung, erhalte höhere Korrekturen $\mathcal{O}(af^2\Phi^2)$ durch andere Wechselwirkungsterme der Fermionen (diese liefern Korrekturen zu den Wilson-Koeffizienten von höherdimensionalen Operatoren)
     * Notiz: Sollte in dieser Darstellung wieder $\frac{a}{f_G}\to\sin\frac{a}{f_G}$ umschreiben, um die Eigenschaft $a = a+2\pi f_G$ explizit zu machen
   (a) Partiell Integrieren (totale Ableitungen sind unphysikalisch): $\mathscr{L}_a \supset -\frac{a}{f_a}\sum_f c_{af}i\partial_\mu\Big(\bar f\gamma^\mu f\Big)$
   $= -\frac{a}{f_a}\sum_f c_{af}\Big((i\partial_\mu\bar f)\gamma^\mu f + \bar f\gamma^\mu(i\partial_\mu f)\Big) = -\frac{a}{f_a}\sum_f c_{af}\Big((\bar f i\overleftarrow{\not\partial} f + \bar f i\overrightarrow{\not\partial} f\Big)$
   (b) Verwende Dirac-Gleichung $(i\overrightarrow{\not\partial}-m)f = \mathcal{O}(\Phi^2), \bar f(i\overleftarrow{\not\partial}+m) = \mathcal{O}(\Phi^2)$:
   $\mathscr{L}_a \supset -\frac{a}{f_a}\sum_f c_{af}\Big(-m_f\bar f f - m_f\bar f f\Big) + \mathcal{O}(af^2\Phi^2) = 2\frac{a}{f_a}\sum_f c_{af}m_f\bar f f + \mathcal{O}(af^2\Phi^2)$

3. Axion-Higgs-Kopplung $\mathscr{L}_a \supset c_{aH}\frac{\partial_\mu a}{f_G}H^\dagger i D^\mu H + \text{h.c.}$ (redundant)
   - Kann diesen Operator durch Feld-Redefinition $H' = e^{ic_{aH}a/f_G}H, f' = e^{-i\beta_f c_{aH}a/f_G}f$ wegtransformieren
     * Bedingungen $\beta_Q - \beta_u = \beta_d - \beta_Q = \beta_e - \beta_L = 1$ (Yukawa-Terme invariant), $3\beta_Q + \beta_L = 0$ (anomaliefrei) $\Rightarrow$ Transformation hat einen freien Parameter
     * Lösungen für die Parameter: $\beta_f = -2Y_f$ oder $-\beta_u = \beta_d = \beta_e = 1, \beta_Q = \beta_L = 0$
     * Folge: Fermion-Kopplungen transformieren sich zu $c_f' = c_{af} + \beta_f c_{aH}$
   - Wenn man diesen Term nicht wegtransformiert, können Axion und neutrales Goldstone-Boson im SM-Higgs-Dublett mischen $\Rightarrow$ Wird kompliziert

7.2.2 Explizite Brechung der G-Symmetrie

- Parametrisierung: Explizite Symmetriebrechung bei Skala $\Lambda \gg f_G$
  - Parametrisiere alle Effekte aus expliziter Symmetriebrechung durch Λ und dimensionslose Koeffizienten
  - $\Lambda \lesssim m_P$ (quantum gravity bricht alle globalen Symmetrien explizit, siehe QFT-Zsf)

1. Parametrisierung des Axion-Potentials: $V = \sum_n \frac{c_n}{n!\Lambda^{n-4}}S^n + \text{h.c.} = \sum_n \frac{c_n}{\Lambda^4}\left(\frac{f_G}{\sqrt{2}\Lambda}\right)^n \cos\left(n\frac{a}{f_G}\right), c_2 = 1$
   - Anschaulich: Parametrisierung bricht G explizit wegen $S^n \to e^{in\alpha}S^n \neq S^n$
   - Notation: S ist das komplexe Skalarfeld, das nach SSB das Axion generiert $S = \frac{f_G}{\sqrt{2}}e^{ia/f_G}$
   - Vorteil: Geringster nicht-verschwindender Term in der Summe dominiert (weil alle anderen mit Potenzen von $\frac{f_G}{\Lambda} \ll 1$ unterdrückt sind) $\Rightarrow$ Explizite Symmetriebrechung wird effektiv durch einen Parameter beschrieben
   - Notiz: Könnte auch Potenzreihe in $\frac{a}{f_G}$ hinschreiben, aber das ist ungeschickt
     - Explizit: $V = \Lambda_{\text{IR}}^4 \sum_n \frac{d_n}{n!}\left(\frac{a}{f_G}\right)^n, d_2 = 1$
       * Notiz: $\Lambda_{IR} \neq \Lambda$ – Λ ist Skala des UV-Effekts, Λ_{IR} ist eine IR-Skala
       * Kann m_a hier direkt ablesen: $m_a = \frac{\Lambda_{\text{IR}}^2}{f_G}$ (und damit $m_a \ll \Lambda_{\text{IR}} \ll f_G$
     - Nachteil: Beziehung zwischen den Koeffizienten d_n ist nicht klar
2. Art der Effekte, die Symmetrie explizit brechen
   - Anschaulich: Mache jetzt Annahmen über die Koeffizienten c_n
   - Naive Anforderungen an die Koeffizienten
     - Erwarte $c_n \ll 1$ für ungerades n
       * Begründung: Potential für S hat Z_2-Symmetrie, die durch Terme mit ungeradem n explizit gebrochen wird $\Rightarrow$ Erwarte zusätzliche Unterdrückung (nicht sehr starkes Argument)
     - Benötige $c_2 \lll 1, c_4 \ll 1$
       * Begründung: Diese Terme konkurrieren mit dem SSB-Potential $V \supset -\mu^2 S^\dagger S + \lambda(S^\dagger S)^2$ für S, das in sehr guter Näherung ein "Tal" haben muss, damit die SSB-Näherung anwendbar ist
   - Explizite Brechung durch perturbative Effekte $\Rightarrow c_n \sim 1$
     - Begründung: Perturbative Effekte sind ~ 1
     - Fazit: $n = 6$ mit $c_6 \sim 1$ ist der dominierende Term, Terme mit $n < 6$ sind unterdrückt
   - Explizite Brechung durch nicht-perturbative Effekte $c_n \sim e^{-\Lambda^2/f_G^2}$
     - Begründung
       * Nicht-perturbative Effekte sind exponentiell unterdrückt ($\sim e^{-S}$ mit der Wirkung S)
       * Wirkung kann abgeschätzt werden zu $S \sim \frac{\Lambda^2}{f_G^2}$ (?)
     - Fazit: $n = 2$ mit $c_2 \sim e^{-\Lambda^2/f_G^2}$ ist der dominierende Term
       * $f_G \ll \Lambda \Rightarrow$ Effekte durch explizite Symmetriebrechung sind sehr klein
   - Typische Erwartung: Explizite Brechung wird durch nicht-perturbative Effekte (worm holes, black holes) verursacht $\Rightarrow$ Sollte nicht-perturbative Parametrisierung verwenden

- Notiz: Explizite Brechung ist relevant für axion quality problem

7.3 QCD-Axion

7.3.1 Lagrangian des QCD-Axions

- Finde $\mathscr{L}_a = \frac{1}{2}(\partial_\mu a)^2 + c_{aN}\frac{\partial_\mu a}{a}\bar{N}\gamma^\mu\gamma_5 N + \frac{c_{a\pi}}{f_\pi}\frac{\partial_\mu a}{f_a}\Big(2\pi^+\pi^-\partial_\mu\pi^0 - \pi^0\pi^-\partial_\mu\pi^+ - \pi^0\pi^+\partial_\mu\pi^-\Big) + \Big(\frac{N_Q}{N_c} - \frac{2}{3}\frac{4m_d+m_d}{m_d+m_u}\Big)\alpha_Q\frac{a}{f_a}Q\tilde{Q}$
  - Notation: X_f für $U(1)_{PQ}$-Ladung des Fermions f
  - Axion-Zerfallskonstante $f_a := \frac{f_a}{N_c}$
    * Motivation: Normiere Koeffizient der Axion-Gluon-Kopplung auf 1, indem ich N in f_a absorbiere
  - Wechsel in Feldbasis ohne Gluon-Kopplungen
    * Grundlage: Redefiniere Quark-Dublett $q = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$ mit $q \to \exp\Big(i\gamma_5\frac{a}{2f_a}A\Big)q$ mit beliebiger hermitescher Matrix A im Flavor-Raum
    * Finde $M \to \exp\Big(i\frac{a}{2f_a}A\Big)M\exp\Big(i\frac{a}{2f_a}A\Big), c_q \to c_q - A$ (lokale Transformation), $\frac{a}{f_a}\alpha_c G\tilde{G} \to (1 - \text{tr}A)\frac{a}{f_a}\alpha_c G\tilde{G}$ (anomal unter $SU(3)_c$), $N_Q \to N_Q - N\text{tr}(AQ^2)$ (anomal unter $U(1)_Q$)
    * Geschickte Wahl: $A = \frac{M^{-1}}{\text{tr}M^{-1}}$
      · $\text{tr}A = 1 \Rightarrow$ QCD-Axion-Gluon-Kopplung verschwindet
      · Verhindert Mischung von QCD-Axion mit π^0: $\frac{V^3}{2}\text{tr}(MU + U^\dagger M^\dagger) \propto a\text{tr}(U\{A, M\}) = a\frac{1}{\text{tr}M^{-1}}\text{tr}(U\{M^{-1}$ $a\frac{2}{\text{tr}M^{-1}}\text{tr}(U) = \text{const}$
      · Finde Korrekturterm zur QCD-Axion-Photon-Kopplung mit $\text{tr}AQ^2 = \frac{1}{9}\frac{4m_d+m_u}{m_d+m_u}$ (Interpretation: Mischung QCD-Axion mit π^0)
  - Erhalte Kopplungskonstanten $c_{aN}, c_{a\pi}$ an Pionen und Nukleonen durch Matching mit hadronischen Matrixelementen
- QCD-Beitrag zum Potential des QCD-Axions $\mathscr{L}_a \supset -V_a = m_\pi^2 f_\pi^2\sqrt{1 - \frac{4m_u m_d}{(m_u+m_d)^2}\sin^2\frac{\theta_c + a/f_a}{2}}$
  - Anschaulich: Axion erhält Potential durch Zusammenhang mit dem θ-Term der $SU(3)_c$
  - Formal: Term folgt aus ChPT-Rechnung mit $\theta_c \to \theta_c + \frac{a}{f_a}$
  - Minimum des Potentials liegt bei $\langle a\rangle = -f_a\theta_c$
  - Entwicklung von V_a für kleine Auslenkungen um $\langle a\rangle = -f_a\theta_c$ liefert $m_a = \frac{\sqrt{m_u m_d}}{m_u+m_d}\frac{m_\pi f_\pi}{f_a} \approx 6\,\mu\text{eV}\frac{10^{12}\text{GeV}}{f_a}$
- Beziehungen zwischen Fermion-Kopplungskonstanten c_{af} und $U(1)_{PQ}$-Ladungen G_f: $c_{af} = G_{f_L} - G_{f_R} - T_3 G_H$
  - Notation: T_3 für Eigenwert des T_3-Generators der $SU(2)_L$

  1. Ansatz $\mathscr{L} \supset \frac{\partial_\mu a}{2Nf_a}J_G^\mu$
     - Motivation: Anomaliegleichung für $U(1)_{PQ}$ ist $\partial_\mu J^\mu_{\text{PQ}} = \alpha_c N_c G\tilde{G}$
  2. Verwende Noether-Strom für $U(1)_{PQ}$-Symmetrie: $J_G^\mu = -iG_H H^\dagger \overset{\leftrightarrow}{D}{}^\mu H - G_{f_L}\bar{f}_L\gamma^\mu f_L - {}_{f_R}\bar{f}_R\gamma^\mu f_R$
  3. Vergleiche gefundenen $\mathscr{L}$-Term mit den Termen in $\mathscr{L}_a \Rightarrow$ Finde Ergebnis

7.3.2 QCD-Axion als Lösung des strong CP problem

- Peccei-Quinn-Mechanismus
  - Anschaulich: Axion-Feld macht $\bar{\theta}$-Spurion aus ChPT zu einem dynamischen Freiheitsgrad bzw $\bar{\theta} \to \bar{\theta} + \frac{a}{f_a}$
  - Formal: QCD-Beitrag zum Axion-Potential hat Minimum $\langle\theta_c + \frac{a}{f_a}\rangle = 0 \Rightarrow$ “Effektiver θ-Term” $\theta_c + \frac{a}{f_a}$ in Axion-Gluon-Kopplung $\mathscr{L}_a \supset N_c\alpha_c\Big(\theta_c + \frac{a}{f_a}\Big)G\tilde{G}$ ist kleiner Effekt
- QCD-Axion quality problem

- Anschaulich: Peccei-Quinn-Mechanismus vernachlässigt den Beitrag zum Axion-Potential durch explizite $U(1)_{PQ}$-Brechung
- Formal: Potential des QCD-Axions hat die Form $V = V_a + V_{\text{exp}}$ mit QCD-Beitrag V_a und Beitrag V_{exp} durch explizite Symmetriebrechung $\Rightarrow$ Minima von V_a sind nicht automatisch Minima von V
  * Strong CP problem immer noch gelöst, falls $V_{\text{exp}} \ll V_a$ oder falls V_{exp} und V_a etwa dasselbe Minimum haben
  * Für $\bar{\theta}_c \lesssim 10^{-10}$ dürfen explizite Symmetriebrechungseffekte mit m_P-Unterdrückung erst ab $\sim$ dim6-Operatoren auftreten
- Typische Lösung: Implementiere G-Symmetrie als accidental global symmetry in einem größeren Modell mit erweiterter Eichgruppe

7.4 Explizite Modelle für das QCD-Axion

7.4.1 Grundlagen

- Hier: UV-Vervollständigungen des effektiven Axion-Lagrangians
  - Anschaulich: $\mathscr{L}_a$ ist effektive Feldtheorie (unvollständig), suche jetzt nach Vervollständigung
  - Formale Probleme von $\mathscr{L}_a$
    * Spontane Symmetriebrechung von $U(1)_{PQ}$ nicht beschrieben
      · Konkret: Kein Feld der Art e^{ia/f_a} o.ä., sondern führe a ein als Goldstone-Boson ohne nähere Erklärung
    * Anomale Symmetriebrechung von $U(1)_{PQ}$ nicht beschrieben
      · Konkret: $U(1)_{PQ}$-Ladungen der Fermionen nicht festgelegt
- Klassifikation von Axion-Modellen
  - Visible axion models vs invisible axion models
    * Axion-Kopplungsstärken bestimmt durch Parameter $f_a \Rightarrow f_a \lesssim v$("visible axion") oder $f_a \gg v$("invisible axion")
      · v ist vev der EW-SSB (höchste Skala des SM)
    * Visible axion models: PQWW-Model
      · Grundlage: $f_a \sim \langle H\rangle = v$ (Axion ist purer EW-Physik-Effekt, keine große NP-Skala beteiligt)
      · Schnell experimentell ausgeschlossen, da ein visible axion großen Einfluss auf Experimente hätte
    * Invisible axion models: KSVZ-Modelle, DFSZ-Modelle, ...
      · Grundlage: $f_a \sim \langle\Phi\rangle \gg v$ (SM-Singlet Φ führt große NP-Skala $\langle\Phi\rangle$ ein)
      · Heute sind viele Experimente sensitiv auf den Parameterbereich dieser Modelle
  - BSM-Felder für anomale $U(1)_{PQ}$-Brechung vs BSM-Felder für spontane $U(1)_{PQ}$-Brechung
    * Anomale $U(1)_{PQ}$-Brechung beschrieben durch passende Fermion-Ladungen unter $U(1)_{PQ}$
    * Spontane $U(1)_{PQ}$-Brechung beschrieben durch passende skalare Felder mit SSB-Potential
    * PQWW-Modell: BSM-Felder für spontane $U(1)_{PQ}$-Brechung(zusätzliches Higgs-Dublett)
    * DFSZ-Modelle: BSM-Felder für spontane $U(1)_{PQ}$-Brechung(zusätzliches Higgs-Dublett und SM-Singlet)
    * KSVZ-Modell: BSM-Felder für anomale $U(1)_{PQ}$-Brechung(BSM-Fermionen) und spontane $U(1)_{PQ}$-Brechung(SM-Singlet)
- Axion model plane
  - Idee: $g_{a\gamma} = \frac{\alpha_Q}{f_a}(\frac{N_Q}{N_c} - \frac{2}{3}\frac{4m_d+m_u}{m_d+m_u} \propto \frac{1}{f_a} \propto m_a \Rightarrow$ Axion-Modelle sind Geraden mit unterschiedlicher Steigung im $(g_{a\gamma}, m_a)$-Raum
    * Interessante Parameter für Axion-Phänomenologie: $f_a, m_a, g_{a\gamma}$
    * Relationen zwischen den Parametern: $m_a \approx 6\,\mu\text{eV}\frac{10^{12}\text{GeV}}{f_a}, g_{a\gamma} = \frac{\alpha_Q}{f_a}|\frac{N_Q}{N_c} - \frac{2}{3}\frac{4m_d+m_u}{m_d+m_u}|$

* Explizit: $g_{a\gamma} = \alpha_Q \frac{1}{6\,\mu\text{eV}10^{12}\text{GeV}} |\frac{N_Q}{N_c} - \frac{2}{3}\frac{4m_d+m_u}{m_d+m_u}| m_a \Rightarrow$ Steigung der Geraden nur abhängig von $\frac{N_Q}{N_c}$
* Logarithmische Auftragung $\Rightarrow$ Unterschiedliche Steigungen werden zu unterschiedlichen y-Achsenabsc

- QCD axion band: Bereich mit $\frac{N_Q}{N_c} \in [0, \frac{44}{3}]$
  * Ränder des Bandes bei $\frac{N_Q}{N_c} \in \{\frac{5}{3}, \frac{44}{3}\}$
  * Ränder motiviert durch "simple KSVZ models" (?)
- Axion model plane ist guter Hintergrund für Ausschlussplots von experimentellen Axion-Suchen über die Axion-Photon-Wechselwirkung

7.4.2 PQWW-Modell

- PQWW = Peccei, Quinn, Wilczek, Weinberg (1978)
- Idee: Zusätzliches Higgs-Dublett $\Rightarrow$ 2 Higgs Doublet Model (2HDM)
  - Wähle type-2-2HDM, ein QCD axion ($2N_c \neq 0$) zu erhalten
  - Achtung: Habe 2HDM $\Rightarrow$ Dieses Modell ist komplexer als die anderen typischen Axion-Modelle (KSVZ, DSFZ), da man Mischung der Higgs-Dubletts hat
- Formalismus
  1. Identifiziere $U(1)_Y$ und $U(1)_{\text{PQ}}$
     - Idee: Identifiziere $U(1)_Y$, da man SM-Eigenschaften erhalten möchte $\Rightarrow$ Lese $U(1)_{\text{PQ}}$ als dazu orthogonale Transformation ab

     (a) Parametrisiere Higgs-Dubletts nach SSB als $H_1 = \frac{v_1}{\sqrt{2}} e^{ia_1/v_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, H_2 = \frac{v_2}{\sqrt{2}} e^{ia_2/v_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
       - Bin nur interessiert an Phasen-Felder a_1, a_2, lasse die anderen Felder weg (formal: Betrachte nur Auslenkungen von H_1, H_2 entlang einer bestimmten Vakuum-Konfiguration) (die anderen Felder werden durch diese Rechnungen nicht gemischt)
       - Wähle $Y_{H_1} = Y_{H_2} = \frac{1}{2}$ (Alternative: Redefiniere zB $H_2 := \tilde{H}_2$ und erhalte $Y_{H_2} = -\frac{1}{2}$ etc)
       - Notiz: Verwende hier andere Konvention als in 8.2 (Konvention spielt aber keine Rolle)

     (b) Zerlege a_1, a_2 in Felder a, b, die sich jeweils nur unter $U(1)_Y$ bzw $U(1)_{\text{PQ}}$ transformieren: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$ mit $\tan\beta = \frac{v_2}{v_1}$
       - Interpretation: b ist eine Linearkombination der SM-Goldstone-Bosonen, a ist das QCD-Axion
       - Formal: $b \overset{U(1)_Y}{\to} b + Y_{H_i} v\alpha, a \overset{U(1)_Y}{\to} a, b \overset{U(1)_{\text{PQ}}}{\to} b, a \overset{U(1)_{\text{PQ}}}{\to} a + Y_{H_i} v\alpha$ (?)
       - $U(1)_Y$: $a_1 = \cos\beta b - \sin\beta a \overset{U(1)_Y}{\to} a_1 + Y_{H_i}\cos\beta v\alpha \overset{!}{=} a_1 + Y_{H_1} v_1 \alpha \Rightarrow v_1 = v\cos\beta$;
         $a_2 = \sin\beta b + \cos\beta a \overset{U(1)_Y}{\to} a_1 + Y_{H_i}\sin\beta v_2\alpha \overset{!}{=} a_1 + Y_{H_1} v\alpha \Rightarrow v_2 = v\sin\beta$
         $\Rightarrow$ Benötige $\tan\beta = \frac{v_2}{v_1}$

     (c) Betrachte $U(1)_{\text{PQ}}$-Transformationsverhalten von $H_1, H_2 \Rightarrow$ Finde $X_{H_1} = -\tan\beta Y_{H_i}, X_{H_2} = \frac{1}{\tan\beta} Y_{H_i}$
       - $a_1 = \cos\beta b - \sin\beta a \overset{U(1)_{\text{PQ}}}{\to} a_1 - \sin\beta Y_{H_i} v\alpha \overset{!}{=} a_1 + X_{H_1} v_1 \alpha \Rightarrow X_{H_1} = -\tan\beta Y_{H_i}$;
         $a_2 = \sin\beta b + \cos\beta a \overset{U(1)_{\text{PQ}}}{\to} a_2 + \cos\beta Y_{H_i} v\alpha \overset{!}{=} a_2 + X_{H_2} v_2 \alpha \Rightarrow X_{H_2} = \frac{1}{\tan\beta} Y_{H_i}$

     (d) Yukawa perturbativity bounds an $\tan\beta$: $10^{-3} \lesssim \tan\beta \lesssim 12$
       - m_t bound: $m_t = y_t \frac{v_1}{\sqrt{2}} = \frac{y_t}{\sqrt{2}} v\cos\beta \overset{y_t \lesssim 4\pi}{\lesssim} \frac{4\pi}{\sqrt{2}} v\cos\beta \Rightarrow \cos\beta \gtrsim \frac{\sqrt{2}}{4\pi}\frac{m_t}{v}$
       - m_b bound: $m_b = y_b \frac{v_2}{\sqrt{2}} = \frac{y_b}{\sqrt{2}} v\sin\beta \overset{y_b \lesssim 4\pi}{\lesssim} \frac{4\pi}{\sqrt{2}} c\sin\beta \Rightarrow \sin\beta \gtrsim \frac{\sqrt{2}}{4\pi}\frac{m_b}{v}$
       - Zeichne $\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\beta}{\sqrt{1-\sin^2\beta}} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\beta}}{\cos\beta}$ für die erlaubten Bereiche von $\sin\beta, \cos\beta \Rightarrow$ Finde erlaubten Bereich von $\tan\beta$

     - Notiz: $\tan\beta + \frac{1}{\tan\beta} \geq 2$
       * Formal: $0 \overset{!}{=} \frac{\partial}{\partial \tan\beta}(\tan\beta + \frac{1}{\tan\beta})|_{\beta=\beta_0} = 1 - \frac{1}{\tan\beta_0^2} \Rightarrow \tan\beta_0 = 1, \tan\beta + \frac{1}{\tan\beta}|_{\beta=\beta_0} = 2$

- * Finde $\tan\beta + \frac{1}{\tan\beta} \lesssim 5\times 10^2$ aus den perturbativity bounds an $\tan\beta$

2. Ist a ein QCD-Axion bzw $2N_c \neq 0$? $\Rightarrow$ Ja!
   (a) Habe type-2-2HDM $\Rightarrow$ Yukawa-Sektor $\mathscr{L} \supset -y^u \bar{Q}_L H_1^* u_R - y^d \bar{Q}_L H_2 d_R +$ h.c.
   (b) Lese Bedingungen an $U(1)_{\text{PQ}}$-Ladungen X_i ab: $0 = -X_{Q_L} - X_{H_1} + X_{u_R} = -X_{Q_L} + X_{H_2} + X_{d_R}$
   (c) Finde $2N_c = \frac{3}{2}(\tan\beta + \frac{1}{\tan\beta}) \geq 3$
      - $2N_c = 3(2X_{Q_L} - X_{u_R} - X_{d_R}) = 3(-X_{H_1} + X_{H_2}) = \frac{3}{2}(\tan\beta + \frac{1}{\tan\beta})$
      - Verwende $\tan\beta + \frac{1}{\tan\beta} \geq 2$
3. Lese Axion-Parameter f_a, m_a ab
   - $f_a = \frac{v}{2N_c} = \frac{2}{3}\frac{1}{\tan\beta + \frac{1}{\tan\beta}} v \Rightarrow 330\,\text{MeV} \lesssim f_a \lesssim 83\,\text{GeV}$
      * $f_a = \frac{2}{3}\frac{1}{\tan\beta + \frac{1}{\tan\beta}} v \leq \frac{v}{3} \approx 83\,\text{GeV}$ wegen $\tan\beta + \frac{1}{\tan\beta} \geq 2$
      * $f_a = \frac{2}{3}\frac{1}{\tan\beta + \frac{1}{\tan\beta}} v \gtrsim \frac{2}{3}\frac{1}{5\times 10^2} v \approx 330\,\text{MeV}$ wegen $\tan\beta + \frac{1}{\tan\beta} \lesssim 5\times 10^2$
   - $m_a \approx 5.7\,\mu\text{eV}\frac{10^{12}\text{GeV}}{f_a} \Rightarrow 69\,\text{keV} \lesssim m_a \lesssim 17\,\text{MeV}$

- Kein axion quality problem
  1. Dominater $U(1)_{\text{PQ}}$-brechender höherdimensionaler Operator: $\mathscr{L} \supset \frac{c}{\Lambda^2}(H_1 H_2^*)^3 +$ h.c.
     - Notiz: Operator muss $U(1)_Y$-invariant sein $\Rightarrow$ Dim-5-Operator $\propto (H_1 H_2^*)^2 H_1 +$ h.c. nicht möglich
     - Operator ist nicht $U(1)_{\text{PQ}}$-invariant: $H_1 H_2^* \to e^{iY_{H_i}(\tan\beta + \frac{1}{\tan\beta})} H_1 H_2^* \neq H_1 H_2^*$
  2. Beitrag dieses Operators zum Axion-Potential: $V \supset c\frac{v^6 \sin^3 2\beta}{\Lambda^2}\cos\left(3(\tan\beta + \frac{1}{\tan\beta})\frac{a}{v}\right)$
     - Setze Parametrisierungen für H_1, H_2 von oben ein $\Rightarrow (H_1 H_2^*)^3 +$ h.c. $= \left(\frac{v_1 v_2}{2} e^{ia_1/v_a - ia_2/v_2}\right)^3 +$ h.c. $= \left(v^2 \sin 2\beta\right)^3 e^{3i(\tan\beta + \frac{1}{\tan\beta})a/v} +$ h.c. $= \left(v^2 \sin 2\beta\right)^3 2\cos\left(3(\tan\beta + \frac{1}{\tan\beta})\frac{a}{v}\right)$
        * $\frac{v_1}{\sqrt{2}}\frac{v_2}{\sqrt{2}} = \frac{v^2}{2}\sin\beta\cos\beta = v^2 \sin 2\beta$
        * $\frac{a_1}{v_1} - \frac{a_2}{v_2} = \frac{\cos\beta b - \sin\beta a}{v\cos\beta} - \frac{\sin\beta b + \cos\beta a}{v\sin\beta} = -\left(\tan\beta + \frac{1}{\tan\beta}\right)\frac{a}{v}$
  3. Bestimme θ_{eff} aus Minimierung des Potentials $\Rightarrow \theta_{\text{eff}} \sim \frac{v^6}{\Lambda^2 m_\pi^2 f_\pi^2} \sim 10^{-20}$ für $\Lambda \sim m_P$
     (a) $V = -m_\pi^2 f_\pi^2 \cos\left(\frac{\theta_{\text{eff}}}{2}\right) + c\frac{v^6 \sin^3 2\beta}{\Lambda^2}\cos\left(3(\tan\beta + \frac{1}{\tan\beta})\frac{a}{v}\right) = -m_\pi^2 f_\pi^2 \cos\left(\frac{\theta_{\text{eff}}}{2}\right) + c\frac{v^6 \sin^3 2\beta}{\Lambda^2}\cos\left(3(\tan\beta + \frac{1}{\tan\beta})(\theta_{\text{eff}} - \theta_c)\right)$
     (b) Suche Minimum von V:
     $0 \stackrel{!}{=} \frac{\partial V}{\partial\theta_{\text{eff}}} = -\frac{m_\pi^2 f_\pi^2}{2}\sin\frac{\theta_{\text{eff}}}{2} + c\frac{v^6 \sin^3 2\beta}{\Lambda^2} 3\left(\tan\beta + \frac{1}{\tan\beta}\right)\sin\left(3(\tan\beta + \frac{1}{\tan\beta})(\theta_{\text{eff}} - \theta_c)\right)$
     $\stackrel{\theta_{\text{eff}} \ll \theta_0 \sim 1}{=} -\frac{m_\pi^2 f_\pi^2}{4}\theta_{\text{eff}} - c\frac{v^6 \sin^3 2\beta}{\Lambda^2} 3\left(\tan\beta + \frac{1}{\tan\beta}\right)\sin\left(3(\tan\beta + \frac{1}{\tan\beta})\theta_c\right)$
     $\Rightarrow \theta_{\text{eff}} = -\frac{4c}{3}\frac{v^6}{\Lambda^2 m_\pi^2 f_\pi^2}\sin^3 2\beta\left(\tan\beta + \frac{1}{\tan\beta}\right)\sin\left(3(\tan\beta + \frac{1}{\tan\beta})\theta_c\right) \sim \frac{v^6}{\Lambda^2 m_\pi^2 f_\pi^2} \sim 10^{-20}$ für $\Lambda \sim m_P$
  - Fazit: Wegen großer Skalentrennung zwischen $f_a \sim v$ und $\Lambda \sim m_P$ sind höherdimensionale Operatoren stark unterdrückt und QCD-Effekte dominieren das Axion-Potential

- PQWW-Modell ist experimentell ausgeschlossen
  - $K \to \pi a$-Zerfall
    * Modell-Vorhersage $\mathcal{B}(K \to \pi a) \approx 3\times 10^{-5}\left(\tan\beta + \frac{1}{\tan\beta}\right)^2 \stackrel{(\cdots)\geq 2}{\gtrsim} 10^{-4}$
    * Experimentell $\mathcal{B}(K \to \pi a) \lesssim 10^{-10}$
  - Beam dump experiments (...)
  - EW-Präzisionsexperimente (zB LEP) (...)

7.4.3 KSVZ-Modelle

- KSVZ = Kim, Shifman, Vainshtein, Zakharov (1980)
- Idee: Zusätzliches SM-Singlet-Feld Φ und BSM-Fermionen
  - Φ ist komplex und hat SM-Darstellung $(1,1)_0$ (SM-Singlet)
    * Φ muss komplex sein, da es unter $U(1)_{PQ}$ geladen sein soll
    * Wähle $\Phi(x) = \frac{v_\Phi + \rho(x)}{\sqrt{2}} e^{ia(x)/v_\Phi}$ und $X_\Phi = 1$
      · $X_\Phi = 1$ liefert $X_a = 1$ bzw $a \overset{U(1)_{PQ}}{\to} a + \alpha f_{PQ}$ (konsistent mit effektivem Axion-Modell)
  - SM-Fermionen f haben $X_f = 0$, BSM-Fermionen f haben $X_f \neq 0$
  - Model-building-Freiheitsgrade: Menge und Quantenzahlen der BSM-Fermionen
- Minimal KSVZ $\mathscr{L}_{\text{min KSVZ}} = (\partial_\mu \Phi)^\dagger (\partial^\mu \Phi) + \bar{Q} i \not{D} Q - (y_Q \Phi \bar{Q}_L Q_R + \text{h.c.}) - \lambda_\Phi \left(\Phi^\dagger \Phi - \frac{v_\Phi^2}{2} \right)^2$
  - Wahl der BSM-Fermionen: Q_L mit $(3,1)_0$, Q_R mit $(3,1)_0$
    * Diese Wahl ist minimal
      · BSM-Fermionen müssen nur unter $SU(3)_c$ geladen sein, damit sie eine $U(1)_{PQ} \times SU(3)_c^2$-Anomalie generieren können
      · Benötige gleiche Quantenzahlen für Q_L und Q_R, damit Yukawa-Massenterm für Q (mit Φ) erlaubt ist ($m_Q \gg v$ notwendig, da die Felder Q_L, Q_R nicht benötigt werden)
      · Links- und rechtshändiges
    * $U(1)_{PQ}$-Ladungen erfüllen $1 - X_{Q_L} + X_{Q_R} = 0$
      · Folgt aus Invarianz des Yukawa-Terms in $\mathscr{L}_{\text{min KSVZ}}$ unter $U(1)_{PQ}$
      · Diese Relation legt alle physikalischen Parameter fest
  - Übliche Axion-Kopplungen generieren mit Wechsel der Feld-Basis $Q_{L,R} \to e^{iX_{Q_{L,R}} a/v_\Phi} Q_{L,R}$
    * Transformation ist anomal $\Rightarrow$ Zusatzterm $\Delta\mathscr{L} = \frac{a}{2v_\Phi}(X_{Q_L} - X_{Q_R}) \frac{g_c^2}{16\pi^2} G\tilde{G}$
    * Transformation ist lokal $\Rightarrow$ Zusatzterm $\Delta\mathscr{L} = -\frac{\partial_\mu a}{v_\Phi}(X_{Q_L} \bar{Q}_L \gamma^\mu Q_L + X_{Q_R} \bar{Q}_R \gamma^\mu Q_R)$
    * Verwende Relation $1 - X_{Q_L} + X_{Q_R} \Rightarrow$ Term $-\frac{y_Q v_\Phi}{\sqrt{2}} \bar{Q}_L Q_R e^{ia/v_\Phi} + $h.c. wird zu Fermion-Massenterm $-\frac{y_Q v_\Phi}{\sqrt{2}} \bar{Q}_L Q_R$
  - Vorhersagen des minimal KSVZ model
    * $N_c = X_{Q_L} - X_{Q_R} = 1$
      · Begründung: $1 - X_{Q_L} + X_{Q_R} = 0$
    * $N_Q = X_{Q_L} Q_{Q_L}^2 - X_{Q_R} X_{Q_R}^2 = 0$
      · Begründung: $Q_{Q_L} = Q_{Q_R} = 0$
      · Folgerung: In $\mathscr{L}_{ag} \neq 0$-Basis(UV-Basis) koppelt Axion nicht an Photonen (sondern nur an Gluonen - "Hadronisches Axion")
    * Axion koppelt nicht direkt an SM-Teilchen, da SM-Teilchen ungeladen unter $U(1)_{PQ}$ sind (trotzdem Loop-Beiträge zu Kopplungen)
      · Kopplungsparameter c_e, C_{ap}, C_{an} etc sind eindeutig festgelegt
      · $c_e = -5.9 \times 10^{-5}$ sehr klein, da es keine tree-level Beiträge gibt
    * $f_a := v_\Phi$
      · Folgt aus Vergleich der Koeffizienten von $\mathscr{L}_{ag}$: $\frac{1}{f_a} \overset{!}{=} \frac{2N}{v_\Phi} = \frac{1}{v_\Phi}$ mit $2N = 1$
    * ρ und Q_L, Q_R spielen für Phänomenologie keine Rolle, da ihre Massen $m_\rho, m_Q \sim f_a \gg v$ sind
      · Konkret: $m_\rho = \sqrt{2\lambda_\Phi} f_a$, $m_Q = \frac{y_Q f_a}{\sqrt{2}}$ (folgt durch Einsetzen)

7.4.4 DFSZ-Modelle

- DFSZ = Dine, Fischler, Srednicki, Zhitnitsky (1980)
- Idee: Zusätzliches SM-Singlet-Feld Φ und Higgs-Dubletts
  - SM-Singlet $(1,1)_0$ wie in KSVZ-Modellen ($X_\Phi = 1$)
  - Higgs-Dubletts $\phi_1, \phi_2, \dots$ haben selbe Quantenzahlen $(1,2)_{1/2}$ und mischen daher
    * SM-Higgs-Dublett ϕ ist Massen-Eigenzustand von der Higgs-Dubletts $\phi_1, \phi_2, \dots$
  - Model-building-Freiheitsgrade: Anzahl der Higgs-Dubletts(min 2), Kopplungen zwischen SM-Fermionen und den Higgs-Dubletts
    * Bedingungen für Quantenzahlen der SM-Fermionen folgen aus Invarianz der Lagrangian-Terme
- Minimal DFSZ
  $\mathscr{L}_{\text{type-I min DSFZ}} = |\partial_\mu\phi_1|^2 + |\partial_\mu\phi_2|^2 + |\partial_\mu\Phi|^2 - V(|\phi_1|,|\phi_2|,|\Phi|) + \lambda\phi_1\phi_2^*\Phi^2 + Y_u\bar{q}_L u_R\phi_1^* + Y_d\bar{q}_L d_R\phi_2 + Y_e\bar{\ell}_L e_R\phi_2 +$ h.c.
  $\mathscr{L}_{\text{type-II min DSFZ}} = |\partial_\mu\phi_1|^2 + |\partial_\mu\phi_2|^2 + |\partial_\mu\Phi|^2 - V(|\phi_1|,|\phi_2|,|\Phi|) + \lambda\phi_1\phi_2^*\Phi^2 + Y_u\bar{q}_L u_R\phi_1^* + Y_d\bar{q}_L d_R\phi_2 + Y_e\bar{\ell}_L e_R\phi_1 +$ h.c.
  - Modell hat 2 Higgs-Dubletts ϕ_1, ϕ_2 (ist ein 2HDM)
    * 2 Möglichkeiten für 2HDM $\Rightarrow$ Unterscheide type-I minimal DSFZ und type-II minimal DSFZ
      · type-I: down-type-Quarks und Leptonen koppeln an selbes Higgs-Dublett
      · type-II: up-tye Quarks und Leptonen koppeln an selbes Higgs-Dublett
      · Notiz: up- und down-type-Quarks koppeln an selbes Higgs-Dublett $\Rightarrow$ Erhalte $2N = 0$, kein funktionierendes Axion-Modell
  - Bedingungen an $U(1)_{PQ}$-Ladungen aus $U(1)_{PQ}$-Invarianz des Lagrangians
    * beide: $2 + X_{\phi_1} - X_{\phi_2} = 0$ (aus Higgs-Potential-Term)
    * type-I: $-X_{q_L} + X_{u_R} - X_{\phi_1} = -X_{q_L} + X_{d_R} + X_{\phi_2} = -X_{\ell_L} + X_{e_R} + X_{\phi_2} = 0$ (aus Yukawa-Termen)
    * type-II: $-X_{q_L} + X_{u_R} - X_{\phi_1} = -X_{q_L} + X_{d_R} + X_{\phi_2} = -X_{\ell_L} + X_{e_R} + X_{\phi_1} = 0$ (aus Yukawa-Termen)
  - Spontane Symmetriebrechung $U(1)_{\phi_1} \times U(1)_{\phi_2} \times U(1)_\Phi \to U(1)_Y \times U(1)_{PQ}$
    * Wähle Potential $V(|\phi_1|,|\phi_2|,|\Phi|)$, so dass es Vakuum-Erwartungswerte für alle 3 Skalar-Felder generiert $\langle\phi_1\rangle = \frac{v_1}{\sqrt{2}}, \langle\phi_2\rangle = \frac{v_2}{\sqrt{2}}, \langle\Phi\rangle = \frac{v_\Phi}{\sqrt{2}} \gg v_i$
    * Parametrisiere Skalar-Felder mit Axions a_1, a_2, a_Φ als Goldstone-Boson $\phi_1 = \frac{v_1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} e^{ia_1/v_1} + \dots, \phi_2 = \frac{v_2}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} e^{ia_2/v_2} \dots, \Phi = \frac{v_\Phi}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} e^{ia_\Phi/v_\Phi} + \dots$
      · Zusatzterme enthalten radiale Felder, die für das Prinzip nicht interessant sind
    * Physikalisches Axion-Feld finden
      1. Noether-Theorem liefert $J^\mu_{\text{PQ}} = \sum_{i=\phi_1,\phi_2,\Phi} v_i X_i \partial^\mu a_i$
      2. Vergleiche mit Forderung aus effektivem Axion-Modell $J^\mu_{\text{PQ}} = f_a\partial^\mu a \Rightarrow a = \frac{1}{f_a}\sum_{i=\phi_1,\phi_2,\Phi} v_i X_i a_i, f_a^2 = \sum_{i=\phi_1,\phi_2,\Phi} X_i^2 v_i^2$
      3. Verwende $v_\phi \gg v_1, v_2 \Rightarrow a = \frac{1}{f_a}\sum_{i=\phi_1,\phi_2,\Phi} v_i X_i a_i \approx a_\Phi + \sum_{i=1,2} X_{\phi_i}\frac{v_i}{v_\Phi}a_i, f_a^2 = \sum_{i=\phi_1,\phi_2,\Phi} X_i^2 v_i^2 \approx v_\phi^2$
      4. Umkehrung der Relationen: $a_i = X_{\phi_i}\frac{v_i}{f_a}a, a_\Phi = \frac{v_\Phi}{f_a}a$
  - Geschickte Wahl der Feld-Basis (lokale $U(1)_{PQ}$-Transformation mit $\alpha = \frac{a}{f_a}$) $\Rightarrow$ Bringe $\mathscr{L}_{\text{min DFSZ}}$ auf die Form von $\mathscr{L}_a$
    * Absorbiere Axion in exponentiellen Axion/Fermion- und Axion/Higgs-Kopplungen
    * Generiere Axion-Eichfeld-Kopplungen (weil die Transformation anomal ist)
    * Generiere $\frac{\partial_\mu a}{f_a}$-Kopplungen mit Fermionen und Higgs (weil die Transformation lokal ist)
  - Vorhersagen des minimal DFSZ model
    * $2N_c = 6$ (beide)
    * $N_Q = 8$ (type-I), $N_Q = 2$ (type-II)

* $f_a := \frac{v_{\text{eff}}}{2N} = \frac{v_{\text{eff}}}{6} \approx \frac{v_\Phi}{6}$
* Kopplungen an SM-Teilchen beschrieben durch $\tan\beta = \frac{v_1}{v_2}$
  · type-I: $c_{aH} = -(X_{\phi_1}\sin^2\beta + X_{\phi_2}\cos^2\beta), c_u = \frac{\cos^2\beta}{3}, c_d = c_e = \frac{\sin^2\beta}{3}$
  · type-II: $c_{aH} = -(X_{\phi_1}\sin^2\beta + X_{\phi_2}\cos^2\beta), c_u = -c_e = \frac{\cos^2\beta}{3}, c_d = \frac{\sin^2\beta}{3}$
  · Einschränkung $\tan\beta \in [0.25, 170]$ aus Forderung, dass Yukawa-Kopplungen perturbativ sein sollen (?)

7.5 Astroteilchenphysik-Effekte von Axions

7.5.1 Eigenschaften von typischen Axions

- Zerfallskonstante f_a / Masse m_a
  - f_a und m_a hängen zusammen durch $m_a \approx 6\,\mu\text{eV}\frac{10^{12}\text{GeV}}{f_a}$
  - Natural axion dark matter Schranke $f_a \geq 7.5\times 10^9\text{GeV}$
    * Folgt aus der Bedingung, dass Axion DM durch misalignment produziert wird und die richtige DM-Energiedichte produziert
  - Supernova-cooling Schranke $f_a \gtrsim 10^9\text{GeV}$
  - Blach hole superradiance Schranke $f_a \lesssim 10^{17}\text{GeV}$
- Zerfallskanäle: $a\to\gamma\gamma$
  - Zerfälle in andere Teilchen sind verboten
    * Zerfall in andere massive Teilchen (auch SM-Neutrinos) kinematisch verboten
    * Verwende IR-Version von $\mathscr{L}_a$ ($\mathscr{L}_{ag} = 0$) für Beschreibung von Axion-Zerfall $\Rightarrow$ Kein Axion-Zerfall in Gluonen
  - Lebensdauer $\tau_a \propto \frac{f_a^2}{m_a^3}\frac{1}{|C_{a\gamma}|^2} \approx 1.7\times 10^{43}\text{y}\left(\frac{f_a}{10^{12}\text{GeV}}\right)^5\frac{1}{|C_{a\gamma}|^2}$
    * Nur Zerfall $a\to\gamma\gamma$ trägt zur Lebensdauer bei $\Rightarrow$ Kann Zerfallsrate aus $\mathscr{L}_{a\gamma} = C_{a\gamma}\frac{g_Q^2}{32\pi^2}\frac{a}{f_a}F\tilde{F}$ direkt berechnen
      · Rechnung ist aufwändig, aber nicht kompliziert (habe einfachen Ausdruck für Phasenraumfaktor für 2-Körper-Zerfall)
    * Argument für $\tau_a \propto \frac{f_a^2}{m_a^3}$: $\Gamma_{a\to\gamma\gamma} \propto \frac{|C_{a\gamma}|^2}{f_a^2}$, Dimensions-Analyse
    * Fazit: Axion ist stabil auf kosmologischen Zeitskalen ($\tau_{\text{universe}} \sim 10^{10}\text{y}$)

7.5.2 Produktion von axion relics

- Misalignment mechanism (siehe Astrophysik-Zsf)
  - Anschaulich: Wichtigster Prozess, falls f_a größer als Reheating-Temperatur ist
  - Energiedichte durch axion relics
    * Abschätzung: $\Omega_a h^2 \approx 0.1\times\left(\frac{f_a}{10^{12}\text{GeV}}\right)\theta_0^2$
      1. $T_{\text{osc}} \sim \Lambda_{\text{QCD}} \sim 300\,\text{MeV}$
      2. $m_a(T_{\text{osc}}) \sim 3H(T_{\text{osc}}) \Rightarrow \rho_a(T_{\text{osc}}) \approx \frac{m_a^2(T_{\text{osc}})}{2}(f_a\theta_0)^2 \approx 10^{27}\frac{\text{GeV}}{\text{cm}^3}\left(\frac{f_a}{10^{12}\text{GeV}}\right)^2\theta_0^2$
      3. $\Omega_a h^2 = \frac{\rho_a(T_0)h^2}{\rho_c} = \rho_a(T_{\text{osc}})\frac{m_a}{m_a(T_{\text{osc}})}\frac{g_{s*}(T_0)T_0^3}{g_{s*}(T_{\text{osc}})T_{\text{osc}}^3}\frac{h^2}{\rho_c} \approx 10^2\frac{\text{GeV}}{\text{cm}^3}\left(\frac{f_a}{10^{12}\text{GeV}}\right)^2\theta_0^2\times 10^5\left(\frac{10^12\text{GeV}}{f_a}\right)\times 10^{-38}\times 10^5\frac{\text{cm}^3}{\text{GeV}} \approx 0.1\left(\frac{f_a}{10^{12}\text{GeV}}\right)\theta_0^2$
    * Ehrliche Rechnung: $\Omega_a h^2 = 0.25\left(\frac{f_a}{10^{11}\text{GeV}}\right)^{7/6}\theta_0^2$
    * "Natürliches" Axion-DM-Fenster durch Misalignment $f_a \in [8\times 10^9\text{GeV}, 3\times 10^{12}\text{GeV}]$
      · Idee: Fordere $\Omega_a h^2 \overset{!}{=} \Omega_{\text{CDM}}h^2 = 0.12$ und bestimme daraus f_a für eine plausiblen Bereich des Parameters θ_0 der Theorie

        · Maximaler Anfangswert $\theta_0 = \pm\pi$ liefert untere Schranke
        · Minimaler "natürlicher" Anfangswert $\theta_0 = 0.1$ ($\mathcal{O}(\theta_0) = 1$) liefert grobe obere Schranke

- Axion Freeze-Out durch $\pi\pi \to \pi a$
  - Anschaulich: Vernachlässigbarer Prozess, da er für leichte Axions $m_a \lesssim 1\,\text{eV}$ nur sehr wenig DM liefert
  - Relevanter Beitrag zur DM-Energiedichte nur für $m_a \gtrsim 0.15\,\text{eV}$ $\Rightarrow$ Thermische Produktion von Axions vernachlässigbar
  - Thermisch produzierte axion relics sind heute relativistisch $m_a \gtrsim 0.1\,\text{eV} \gg T_0$ und daher heiße DM (HDM)
- Zerfall von schwereren Teilchen
  - Anschaulich: Vernachlässigbarer Prozess, da er stark experimentell eingeschränkt ist
  - Prozess: Schwere Teilchen X ($m_X > m_a$) zerfallen und produzieren Axion relics
    * Selber Prozess wie neutrino decoupling
    * Zerfall muss nach Entkopplung der axions vom thermischen Gleichgewicht stattfinden, damit die axion relics relativistisch bleiben
    * Erhalte heiße DM
  - Prozess stark eingeschränkt durch Vermessung von N_{eff} (CMB, BBN)
- Zerfall von topologischen Defekten aus spontaner $U(1)_{PQ}$-Brechung
  - Anschaulich: Dominanter Prozess, falls SSB nach Reheating stattfindet
  - Rechnung sehr aufwändig (Simulationen) $\Rightarrow$ Noch nicht wirklich verstanden
  - Topologische Defekte werden während der spontaner Brechung einer Symmetrie produziert
    * Cosmic strings (produziert durch Kibble Mechanismus)
    * Domain walls
      · "Domain wall problem": Domain walls können leicht Energiedichte des Universums $\Rightarrow$ Benötige einen Mechanismus, der sie entfernt

7.5.3 Produktion von Axions in stellaren Objekten

- Axion ist leicht & stabil $\Rightarrow$ Axions können viel Energie aus stellaren Objekten in das Universum tragen
  - Axion ist leicht $\Rightarrow$ Kann in stellaren Objekten ($T \sim 1\,\text{MeV}$) thermisch erzeugt werden
  - Axion ist stabil $\Rightarrow$ Geringe Wahrscheinlichkeit, dass thermisch produziertes Axion seine Energie noch im stellaren Objekt abgibt
  - Energieverluste durch typische andere Teilchen in stellaren Objekten (e, γ, n, p) sind gut verstanden $\Rightarrow$ Kann f_a durch Messung der von Sternen abgestrahlten Energie einschränken
- Charakteristische Größe: Energieverlustrate ϵ des stellaren Objekts durch Axion-Produktion
  - Kann ϵ durch Axion-Kopplungsparameter, Temperatur T und Massendichte ρ des stellaren Objekts ausdrücken
- Produktionsprozesse
  - Primakoff-Prozess $\gamma \to a$
    * Anschaulich: Umwandlung eines Photons in ein Axion in externem EM-Feld
    * Dominanter Prozess in leichten Sternen (MS)
    * $\epsilon \propto \frac{T^7}{\rho}$ (stärkere Unterdrückung für entartete Systeme/hohe Dichte)
  - Elektron-Bremsstrahlung $e \to ea$
    * Anschaulich: Bremsstrahlung, aber mit Abstrahlung eines Axions statt eines Photons
      · Axion ist massiv (im Gegensatz zu Photon) $\Rightarrow$ Brauche zusätzliches Teilchen(typisch: Kern), das den Rückstoß auffängt (formal: Impulserhaltung)

    * Dominanter Prozess in schweren Sternen (Riesensternen)
    * $\epsilon \propto T^{5/2}\rho$ für nicht-entartete Elektronen, $\epsilon \propto T^4$ für entartete Elektronen
  - Compton-Prozess $e\gamma \to ea$
    * Anschaulich: Compton-Prozess (elastischer e/γ-Stoß) mit Abstrahlung eines Axions (statt Photons wie im normalen Compton-Prozess)
    * Subdominanter Prozess in schweren Sternen (nach Elektron-Bremsstrahlung)
    * $\epsilon \propto T^6$ (unterdrückt für entartete Elektronen)
  - Nukleon-Bremsstrahlung $N \to Na$
    * Anschaulich: Wie Axionen aus Elektron-Bremsstrahlung, aber mit $e \to n, p$ und $\gamma \to \pi^0$
      · Große Beiträge nur für $T \gtrsim 100\,\text{MeV}$, da π^0-Propagator sonst stark unterdrückt ist
    * Dominanter Prozess bei sehr hohen Temperaturen (zB Neutron-Sterne, haben $T \sim 100\,\text{MeV}$)
  - ABC-Prozess: Sammelbegriff für Elektron-Bremsstrahlung, Compton-Prozess, An- und Abregung von Atomen durch Axions

7.6 Axion-Suchen

7.6.1 Indirekte Axion-Suchen

- Stellar cooling
  - Idee: Vergleiche gemessenen Energieverlust von Sternen mit Theorie-Vorhersagen für alle beitragenden Prozesse
    * Messe Energieverlust von Sternen durch Messung der Temperaturänderung
    * Gute Theorie-Vorhersagen für SM-Prozesse in Sternen $\Rightarrow$ Kann NP-Parameter gut testen
  - Sonne: $f_a/C_{a\gamma} \geq 4.3 \times 10^6\text{GeV}$
  - Horizontal branch: $f_a/C_{a\gamma} \geq 1.8 \times 10^7\text{GeV}$, Hinweis $f_a/C_{a\gamma} \approx 3.9 \times 10^7\text{GeV}$
  - Rote Riesen: $f_a/c_e \geq 1.6 \times 10^9\text{GeV}$, Hinweis $f_a/c_e \approx 3.7 \times 10^9\text{GeV}$
  - Weiße Zwerge: $f_a/c_e \geq 2.4 \times 10^9\text{GeV}$, Hinweis $f_a/c_e \approx 3.4 \times 10^9\text{GeV}$
  - Supernova 1987A: $f_a/C_{an} \geq 0.5 \times 10^9\text{GeV}$
  - Fazit: Schranken sind nützlich als unabhängiger Zugang zu f_a und da sie manchmal für Axion-Modelle bessere Ergebnisse liefern als für SM, können aber nicht mit anderen Schranken(zB durch DM-Energiedichte konkurrieren
- Black hole superradiance (BHSR)
  - Idee: In Bindungszuständen Axion/schwarzes Loch wird Drehimpuls von schwarzem Loch auf Axion übertragen (Penrose-Prozess)
    * Gravitativ gebundener Zustand mit Axion und schwarzem Loch möglich, wenn Compton-Wellenlänge des Axions von selber Größenordnung wie Schwarzschild-Radius des schwarzen Lochs ist
  - Erhalte Schranken an leichte Axions
    * Schranke von stellaren schwarzen Löchern: $f_a \in [3 \times 10^{17}\text{GeV}, 10^{19}\text{GeV}]$
    * Schranke von supermassiven schwarzen Löchern: $f_a \in [6 \times 10^{24}\text{GeV}, 10^{26}\text{GeV}]$
    * Schranke hängt nur von Axion-Masse ab $\Rightarrow$ Gilt für alle leichten Bosonen

7.6.2 Direkte Axion-Suchen

- Axion-Helioscopes
  - Idee: Weise Sonnen-Axions über Axion/Photon-Kopplung nach
    * Fluss von Sonnen-Axions auf der Erde $\Phi \approx \frac{\Gamma}{4\pi(8\times 60\text{s}c)^2} \sim 6 \times 10^{11}\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$
      · Axion-Fluss relativ groß, sogar größer als Sonnen-Neutrino-Fluss (aber dafür schwächere Wechselwirkung)

- Axion-Produktionsrate der Sonne $\Gamma \approx 1.5\times 10^{39}\text{s}^{-1}\Big(\big(C_{a\gamma}\frac{10^7\text{GeV}}{f_a}\big)^2+0.14\big(c_e\frac{10^9\text{GeV}}{f_a}\big)^2\Big)\sim 1.5\times 10^{39}\text{s}^{-1}$
    * Axion-Helioscopes liefern relativ schwache Schranken an m_a über großen Bereich von m_a
      - Sonnen-Axions sind relativistisch $m_a\sim 10^{-5}\text{eV}\ll E_a\sim 1\text{keV}\Rightarrow$ Sensitiv auf viele Werte von m_a, aber nur schwache Schranken
  - Nachweisprinzip: Umwandlung $a\to\gamma$ in starkem Magnetfeld über Primakoff-Prozess
    * Produzierte Photonen haben vergleichbare Energie wie Sonnen-Axions($E_\gamma\sim 1\,\text{keV}$) und sind entlang des Magnetfelds polarisiert
    * Axion-Rate im Experiment: $\Gamma = A\Phi$ mit Axion-Fluss Φ und Querschnittsfläche A des Experiments
    * Übergangsrate $P_{a\to\gamma}=\left(\frac{g_{a\gamma}BL}{2}\right)^2\frac{\sin^2 qL/2}{(qL/2)^2}$ mit $q=E_a-\sqrt{E_a^2-m_a^2}\approx\frac{m_a^2}{2E_a}$ für Magnetfeld B mit Länge L
      - Formalismus ähnlich wie bei Neutrino-Oszillationen
      - Kohärente Verstärkung der Axion-Photon-Umwandlung: $1\gg qL\sim 0.04\frac{L}{\text{m}}\left(\frac{10^9\text{GeV}}{f_a}\right)^2\Rightarrow\frac{\sin^2 qL/2}{(qL/2)^2}=1\Rightarrow P_{a\to\gamma}=\left(\frac{g_{a\gamma}BL}{2}\right)^2=2\times 10^{-21}\left(\frac{g_{a\gamma}}{10^{-10}\text{GeV}^{-1}}\frac{B}{T}\frac{L}{\text{m}}\right)^2$, kann $g_{a\gamma}\propto\frac{C_{a\gamma}}{f_a}$ testen
    * Trick: Zusätzliches Buffer-Gas gibt dem Photon eine effektive Masse m_γ in $q\to\frac{m_a^2-m_\gamma^2}{2E_a}$ und ermöglicht für $m_\gamma\approx m_a$ kohärente Verstärkung
    * Fazit: Kohärente Verstärkung und maximiere B,L,A für maximale Sensitivität auf $g_{a\gamma}$ (Signalstärke $\propto AB^2L^2$)
  - Experimente
    * CAST (seit 2003)
      - Parameter: $B=9\,\text{T}$(LEP-Magnet), $L=9.3\,\text{m}$, $A=30\,\text{cm}^2$
      - Schranke: $g_{a\gamma}\leq 0.66\times 10^{-10}\text{GeV}^{-1}$ für $m_a\leq 20\,\text{meV}$
    * Baby-IAXO (ab 2024)
      - Erwartung: $g_{a\gamma}\leq 1.5\times 10^{-11}\text{GeV}^{-1}$ für $m_a\leq 250\,\text{meV}$
    * IAXO (Zukunft)
      - Parameter: $B=2.5\,\text{T}, L=22\,\text{m}, A=2.3\times 10^4\text{cm}^2$
      - Erwartung: Verbessere CAST-Schranke um Faktor ~ 20
    * IAXO+ (Zukunft)

- Axion-Haloscopes
  - Idee: Weise Axion-DM relics über Axion/Photon-Kopplung nach
    * Anzahldichte von Axion-DM relics: $n_a=\frac{\rho_{\text{DM}}}{m_a}=\frac{8\times 10^{13}}{\text{cm}^3}\frac{f_a}{10^{12}\text{GeV}}$
  - Axion-Haloscopes liefern starke Schranken an m_a über kleine Bereiche von m_a
    * DM-Axions sind nicht-relativistisch $m_a\approx E_a\Rightarrow$ Kann nur kleinen Bereich von m_a untersuchen, habe hier aber große Sensitivität
  - Nachweisprinzip: Umwandlung $a\to\gamma$ in starkem Magnetfeld über Primakoff-Prozess
    * Produzierte Photonen haben vergleichbare Energie wie Axion-DM relics($E_\gamma\sim m_a\sim 10^{-4}\text{eV}$)
    * Effizienter Nachweis von μeV-Photonen mit Kavitäten im entsprechenden Wellenlängenbereich
      - Wähle Resonanzfrequenzen f(bzw Länge der Kavität $\lambda=\frac{c}{f}$) mit $m_a\sim hf\Rightarrow$ Nur Photonen mit $E_\gamma\sim m_a$ interferieren konstruktiv ($\lambda\sim 1\,\text{cm}$)
      - In der Praxis: Scanne f über den zu untersuchenden Bereich von m_a
      - Hinweise auf Wert von $m_a\Rightarrow$ Kann sehr hohe Präzision erreichen durch große Messdauer in der Nähe von m_a
  - Experimente
    * Benötige spezialisierte Experimente für jeden Massenbereich
      - Vorteil: Axion-Haloscopes sind billig $\Rightarrow$ Kann viele dieser Experimente betreiben
    * ADMX
    * Zukunft: CULTASK, ORGAN, HAYSTAC, KLASH, MADMAX, ABRACADABRA

- Typische WIMP-Experimente
  - Idee: Weise Sonnen-Axions über Axion/Elektron-Kopplung nach
  - Nachweisprinzip: Wechselwirkung von Sonnen-Axions mit Elektronen aus der Hülle schwerer Atomkerne (zB Xe)
    * Anschaulich: Gleiches Prinzip wie Axion-Helioscopes, aber mit Axion/Elektron-Kopplung statt Axion/Photon-Kopplung
  - Experimente: XENON, LUX
    * Diese Experimente sind eigentlich auf WIMP-Suchen optimiert, sind aber durch die Axion-Elektron-Kopplung auch auf Sonnen-Axions sensitiv
    * Sonnen-Axions könnten XENON1T-Überhöhung erklären
      · Problem: Benötigtes f_a/c_e ist in Konflikt mit Schranken aus stellar cooling
- NMR-Messung des Neutron-EDM
  - Idee: Weise Axion-DM relics über Axion-Gluon-Kopplung nach
  - Nachweisprinzip: Suche nach schnellen Oszillationen des elektrischen Dipolmoments des Neutrons
    * Schnelle Oszillationen werden durch den Misalignment-Prozess vorhergesagt (genauer: vacuum realignment)
    * Experimentell: Verwende NMR (sehr sensitiv auf Oszillationen von Dipolmomenten)
    * Sensitiv auf kleine Oszillationsfrequenzen/kleines m_a
  - Experiment: CASPER

7.6.3 Axion-Suchen am Collider

- Light shining through wall (LSW) experiments
  - Idee: Weise Axionen aus Primakoff-Effekt (Umwandlung von Laser-Photonen in Axionen) nach über umgekehrten Primakoff-Prozess
    * Aufbau: Laser-Strahl auf Wand gerichtet, Aufbau in starkem Magnetfeld
    * Nachweisprinzip: Hinter der Wand können Axions wieder in Photonen umgewandelt werden, die dann nachgewiesen werden
  - Sensitivität beschränkt durch verfügbare Laser-Technologie
  - Experimente: ALPS, ALPS-II
- Seltene Zerfälle in Flavorphysik
  - Idee: Suche nach Axions aus flavorverletzenden Zerfällen von SM-Teilchen an Flavor-Fabriken
    * Muss Modell um flavorverletzende Axion-Kopplungen erweitern, um flavorverletzende Zerfälle zu beschreiben
      · Diese Komplikation wird in der Literatur selten behandelt, da sie das Problem verkompliziert
  - Betrachte flavorverletzende Zerfälle, da hier SM-Untergrund gering ist
    * Quarkflavor-verletzende Zerfälle: Typischerweise geringer SM-Untergrund
      · $K \to \pi a$: SM-Untergrund $K \to \pi \nu \bar{\nu}$ hat Br $\sim 10^{-10} \Rightarrow$ Suche nach großem Beitrag durch $K \to \pi a$
    * Leptonflavor-verletzende Zerfälle: Typischerweise großer SM-Untergrund
      · $\mu \to ea$: SM-Untergrund $\mu \to e\nu\bar{\nu}$ hat Br $\sim 1 \Rightarrow$ Suche nach Eigenschaften von 2-Körper-Zerfällen (Peak über großem Untergrund)
  - Experimente
    * K-Physik: NA62
    * D-Physik: BES-III, LHCb
    * B-Physik: Belle

7.7 Axion-like particles (ALPs)

7.7.1 Grundlagen

- ALP $=$ Pseudoskalares Goldstone-Boson einer spontan gebrochenen globalen chiralen Symmetrie
  - ALP hat keine Beziehung zum strong CP problem $\Rightarrow$ Beziehung $m_a(f_a)$ unbekannt
    * Führe neuen Parameter Λ_a ein mit $m_a = \frac{\Lambda_a^2}{f_a}$
  - ALP hat selbe Kopplungen wie QCD-Axion
  - Typischer Lagrangian für ALP: Lagrangian für QCD-Axion mit zusätzlichem expliziten Massenterm für a
- Motivation für ALPs
  - Anschaulich: QCD-Axion hat theoretische Motivation (löst das strong CP problem), ALP experimentell motiviert
  - Kann für Untersuchung von ALPs viele Methoden von QCD-Axion-Suchen übernehmen, aber zusätzlicher neuer Parameter $m_a = \frac{\Lambda_a^2}{f_a}$
  - DM-Kandidat
    * Bedingung: ALP muss stabil auf kosmologischen Zeitskalen sein
    * Dichte von ALP-DM aus Misalignment: $\Omega_a h^2 = 0.007\sqrt{\frac{m_a}{100\,\text{eV}}}\left(\frac{f_a}{10^11\text{GeV}}\right)^2\theta_0^2$
    * Thermisch produzierte ALP-DM ist stark eingeschränkt
  - Interessant für Phänomenologie
    * Zusätzliche leichte Teilchen ändern Beschreibung vieler Prozesse
  - Erklärung von experimentellen Anomalien
    * Bsp: $(g-2)_e, (g-2)_\mu$, XENON1T-Überhöhung
  - String-Theorie sagt viele ALPs vorher
- Axion-Suchen schränken auch ALPs sein
  - Alle Axion-Suchen prinzipiell auch auf ALPs anwendbar
    * Achtung: Erwarte für ALPs größeren Massenbereich 10^{-33}eV $\lesssim m_a \lesssim 10^3$eV
  - ALPs im axion model plane
    * Anschaulich: Kann auch ALPs im axion model plane einzeichnen $-$ Erwarte aber nicht, dass sie im QCD axion band liegen
      · ALPs haben 2 unabhängige Massenparameter: m_a, f_a
    * Grundidee des axion model plane: Axion-Kopplungen $g_{aX} \sim \frac{1}{f_a} \propto m_a \Rightarrow$ Axion-Modelle enthalten nur $\mathcal{O}(1)$ Kopplungskonstanten und eine Massenskala $f_a(m_a)$, die es zu bestimmen gilt
- Klassifikation von ALPs
  - Ultra-light ALPs (Ultra Light Axions (ULA)s): 10^{-33}eV $\lesssim m_a \lesssim 10^{-18}$eV
  - Leichte ALPs: 10^{-22}eV $\lesssim m_a \lesssim 10^{-13}$eV
  - Normale ALPs: 10^{-11}eV $\lesssim m_a \lesssim 10^{-2}$eV
  - Schwere ALPs: $m_a \gtrsim 1$ keV

7.7.2 Normale ALPs

- Massenbereich: 10^{-11}eV $\lesssim m_a \lesssim 10^{-2}$eV
  - Ähnlicher Massenbereich wie für QCD-Axion
  - Untere Schranke aus black hole superradiance
  - Obere Schranke aus Astrophysik (Supernova)
- Motivation
  - Ähnlicher Massenbereich wie für QCD-Axion

7.7.3 Leichte ALPs

- Massenbereich: $10^{-22}\text{eV} \lesssim m_a \lesssim 10^{-13}\text{eV}$
  - Untere Schranke aus Strukturbildung von DM ("Fuzzy DM")
  - Obere Schranke aus black hole superradiance
- Motivation
  - Leichteste ALPs, die noch DM-Kandidaten sind

7.7.4 Schwere ALPs

- Massenbereich: $m_a \gtrsim 1\,\text{keV}$
- Motivation für schwere ALPs
  - ALPs mit $m_a \sim 1\,\text{GeV}$ können die $(g-2)_e$-, $(g-2)_\mu$-Anomalien erklären
- Suchen nach schweren ALPs
  - Für große ALP-Massen gelten Schranken aus stellar cooling nicht mehr ($m_a \gtrsim 1\,\text{keV}$ für Sterne, $m_a \gtrsim 30\,\text{MeV}$ für Supernovae)
  - Zerfälle in Photonen, Elektronen und evtl auch schwerere SM-Teilchen $\Rightarrow$ Zusätzliche Kanäle für ALP-Suchen
  - Beam dump experiments
    * Idee: Suche nach ALPs mit makroskopischen Zerfallslängen $l \sim 10^2\text{m}$
    * Aufbau: Hochenergetischer Teilchenstrahl wird an Target ("beam dump") gestreut, Zerfälle der Produkte werden hinter Abschirmmedium gemessen
      · ALPs entstehen bei Streuung am Target durch Primakoff-Effekt oder Elektron-Bremsstrahlung
      · Typisches Abschirmmedium: $\sim 10^2\text{m}$ Erde/Fels
      · Hinter dem Abschirmmedium sind nur noch ALPs und Neutrinos vorhanden, nur ALPs zerfallen
      · Suche nach hochenergetische Photonen und Elektronen aus ALP-Zerfällen
    * Bsp: E137(SLAC, 1988)

7.7.5 Ultra-light ALPs (ULAs)

- Massenbereich $10^{-33}\text{eV} \lesssim m_a \lesssim 10^{-18}\text{eV}$
  - Untere Schranke $m_a \sim \frac{H_0}{h}$ aus ALP Dark Energy (?)
  - Obere Schranke an m_a von baryon Jeans scale (Bedingung aus Strukturbildung)
- Motivation für ULAs
  - ULAs sind keine DM-Kandidaten mehr
- Suchen nach ULAs
  - Cosmological Birefringence (...)

Kapitel 8

Erweiterte Higgs-Sektoren

8.1 Grundlagen

8.2 Zwei-Higgs-Dublett-Modelle (2HDM)

8.2.1 Grundlagen

- Motivation für 2HDM
  - SUSY: Muss 2HDM sein wegen gauge chiral anomaly cancellation
  - PQWW-Modell (einfachstes Axion-Modell): Benötige zweites Higgs-Dublett, um ein Goldstone-Feld zu erhalten, das nicht für massive Eichbosonen benötigt wird
  - Zusätzliche CPV: Erhalte mehr Yukawa-Kopplungen und damit mehr potentielle Quellen von CPV

8.2.2 Standard-Formalismus

1. Modell: SM mit 2 Higgs-Dubletts H_1 mit $(1, 2, \frac{1}{2})$ und H_2 mit $(1, 2, -\frac{1}{2})$
   - Achtung: Kann nicht direkt eines der Higgs-Dubletts mit dem SM-Higgs-Dublett H identifizieren
     - Finde später Linearkombination $H = \cos\beta H_1 - \sin\beta \tilde{H}_2$
   - Kann $U(1)_Q$-Ladungen der Komponenten von H_1, H_2 ablesen: $H_1 = \begin{pmatrix} h_1^+ \\ h_2^0 \end{pmatrix}, H_2 = \begin{pmatrix} h_2^{0*} \\ -h_2^- \end{pmatrix}$
     - Habe auch ladungskonjugierte Higgs-Dubletts $\tilde{H}_1 = \epsilon H_1^* = \begin{pmatrix} h_1^{0*} \\ -h_1^- \end{pmatrix}, \tilde{H}_2 = \epsilon H_2^* = \begin{pmatrix} -h_2^+ \\ -h_2^0 \end{pmatrix}$
2. Potential des 2HDM führt zu SSB $\langle H_1 \rangle = \frac{v_1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \langle H_2 \rangle = \frac{v_2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (...)
   - Kann $v_1, v_2 \in \mathbb{R}_0^+$ wählen durch $SU(2)$-Transformationen
   - ToDo: Allgemeines 2HDM-Potential und Massen in H_1, H_2
3. Identifiziere SM-Higgs H und NP-Higgs H': $\begin{pmatrix} H \\ H' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1 \\ -\tilde{H}_2 \end{pmatrix}$ mit $\tan\beta = \frac{v_2}{v_1}$
   (a) Berechnen von $(D_\mu H_1)^\dagger (D^\mu H_1) + (D_\mu H_2)^\dagger (D^\mu H_2)$ liefert $W^\pm$-Masse $m_W^2 = \frac{g_L^2}{4}(v_1^2 + v_2^2)$
   (b) SM liefert $m_W^2 = \frac{g_L^2}{4} v^2 \Rightarrow$ Finde Bedingung $v_1^2 + v_2^2 \stackrel{!}{=} v^2$
   (c) Führe Mischungswinkel β ein mit $v_1 = v\cos\beta, v_2 = v\sin\beta$
   - Finde $\tan\beta = \frac{v_2}{v_1}$
   (d) SM-Higgs-Dublett H hat vev $v \Rightarrow$ Finde $\begin{pmatrix} H \\ H' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1 \\ -\tilde{H}_2 \end{pmatrix}$
   - Benötige $\tilde{H}_2$ auf der rechten Seite, da $Y_{H_2} = -\frac{1}{2}$, aber $Y_H = \frac{1}{2}$
   - Finde damit: $\langle H \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \langle H' \rangle = 0 \Rightarrow$ SM-Higgs hat vev, NP-Higgs aber nicht

- $\langle H\rangle = \cos\beta\langle H_1\rangle - \sin\beta\langle\tilde H_2\rangle = \cos\beta\begin{pmatrix}0\\ v_1/\sqrt{2}\end{pmatrix} - \sin\beta\begin{pmatrix}0\\ -v_2/\sqrt{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ v/\sqrt{2}(\cos^2\beta+\sin^2\beta)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ v/\sqrt{2}\end{pmatrix}$

  - Übliche Parametrisierung von H': $H' = \begin{pmatrix}H^+\\ \frac{h'^0+iA^0}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

- Fazit: Auflistung der physikalischen Freiheitsgrade aus H_1, H_2 bzw H, H'
  - Insgesamt: 4 neutrale und 4 geladene Felder
  - 3 Goldstone-Bosonen $G^0, G^\pm$
  - 3 neutrale Higgs-Bosonen h, h', A^0
  - 2 geladene Higgs-Bosonen $H^\pm$

4. Quark-Yukawa-Sektor: Fermion-Massen und FCNCs

   - Notiz: Diskutiere hier nur Quark-Yukawa-Sektor, da Lepton-Yukawa-Sektor im SM langweilig ist

   (a) Allgemeinste Form des Yukawa-Sektors: $\mathscr{L} \supset -y^{d,1}\bar Q_L H_1 d_R - y^{d,2}\bar Q_L\tilde H_2 d_R - y^{u,2}\bar Q_L H_2 u_R - y^{d,1}\bar Q_L\tilde H_1 u_R +$ h.c.

   (b) H, H' identifizieren $\Rightarrow \mathscr{L} \supset -\frac{\sqrt{2}m^d}{v}\bar Q_L H d_R - \frac{\sqrt{2}m^u}{v}\bar Q_L\tilde H u_R - k^d\bar Q_L H' d_R + k^u\bar Q_L\tilde H' u_R +$ h.c.
   - Koeffizienten von H-Termen sind per Konstruktion die SM-Fermion-Massenmatrizen
   - Koeffizienten von H'-Termen sind NP-Effekte und hängen von $\sin\beta, \cos\beta, y^{u,1}, y^{u,2}, y^{d,1}, y^{d,2}$ ab

   (c) Bei Massendiagonalisierung können wegen $[m^d, k^d], [m^u, k^u] \neq 0$ die H'-Kopplungen nicht ebenfalls diagonalisiert werden $\Rightarrow$ Erhalte FCNC-Kopplungen von SM-Fermionen an neutrale Komponenten von H'
   - FCNC-Kopplungen sind experimentell stark eingeschränkt $\Rightarrow$ Fordere meist zusätzliche Symmetrien (siehe 8.2.3), die auf $k^i \propto m^i$ führen und FCNCs daher wieder ausschalten

8.2.3 Klassifikation von 2HDM nach Yukawa-Sektor

- Idee: Fordere zusätzliche diskrete Symmetrien für H_1, H_2, die den Yukawa-Sektor vereinfachen
  - Hauptmotivation: Generisches 2HDM hat tree-level FCNCs, diese sind aber experimentell stark eingeschränkt $\Rightarrow$ Kann diese verbieten durch zusätzliche diskrete Symmetrien
  - Allgemeinste Form des Yukawa-Sektors (mit Leptonen):
    $\mathscr{L} \supset -y^{d,1}\bar Q_L H_1 d_R - y^{d,2}\bar Q_L\tilde H_2 d_R - y^{u,2}\bar Q_L H_2 u_R - y^{d,1}\bar Q_L\tilde H_1 u_R - y^{\ell,1}\bar\ell_L H_1 e_R - y^{\ell,2}\bar\ell_L\tilde H_2 e_R +$ h.c.
  - Es gibt nur 4 unterschiedliche Möglichkeiten, durch diskrete Symmetrien die Hälfte der Yukawa-Terme zu verbieten
    * Formaler Grund: Z_2-Symmetrie $H_1 \to H_2, H_2 \to H_1$
  - Anschaulich: type-1 und type-2 sind die wirklich verschiedenen Methoden, wie man FCNC-Prozesse ausschalten kann; type-3 und type-4 variieren nur die (langweiligen) Effekte im Lepton-Sektor

- type-1-2HDM $\mathscr{L} \supset -y^{d,1}\bar Q_L H_1 d_R - y^{u,1}\bar Q_L\tilde H_1 u_R - y^{\ell,1}\bar\ell_L H_1 e_R +$ h.c.
  - Formal: Z_2-Symmetrie mit $H_2 \to -H_2$, alle anderen Teilchen sind invariant
  - Explizit: Finde $k^d = -\sqrt{2}\frac{\tan\beta}{v}m^d, k^u = -\sqrt{2}\frac{\tan\beta}{v}m^u$ und damit $[k^u, m^u] = [k^d, m^d] = 0$ bzw k^u, m^u und k^d, m^d sind simultan diagonalisierbar

- type-2-2HDM $\mathscr{L} \supset -y^{d,1}\bar Q_L H_1 d_R - y^{u,2}\bar Q_L H_2 u_R - y^{\ell,2}\bar Q_L\tilde H_2 e_R +$ h.c.
  - Formal: Z_2-Symmetrie mit $H_2 \to -H_2, u_R \to -u_R, e_R \to -e_R$, alle anderen Teilchen sind invariant
  - Explizit: Finde $m^d = y^{d,1}v\cos\beta/\sqrt{2}, m^u = y^{u,1}v\sin\beta/\sqrt{2}$
  - Zusammenhang mit Fermion-Massenhierarchie wegen $m^u = \tan\beta m^d$
  - Tree-level FCNCs sind verboten (?)

- Notiz: Typische SUSY-Modelle führen auf type-2-2HDM
    * Erhalte die Kopplungsstruktur hier aber durch kontinuierliche Symmetrien

- type-3-2HDM/lepton specific model $\mathscr{L} \supset -y^{d,1}\bar{Q}_L H_1 d_R - y^{u,1}\bar{Q}_L \tilde{H}_1 u_R - y^{\ell,2}\ell_L \tilde{H}_2 e_R +$ h.c.
  - Anschaulich: Lepton specific, da es H_2-Kopplungen nur im Lepton-Sektor gibt
  - Formal: Z_2-Symmetrie mit $H_2 \to -H_2, e_R \to -e_R$

- type-4-2HDM/flipped model $\mathscr{L} \supset -y^{d,1}\bar{Q}_L H_1 d_R - y^{u,2}\bar{Q}_L H_2 u_R - y^{\ell,1}\bar{Q}_L H_1 e_R +$ h.c.
  - Formal: Z_2-Symmetrie mit $H_2 \to -H_2, u_R \to -u_R$

8.2.4 Potential von 2HDM (...)

Kapitel 9

Hierarchie-motivierte Higgs-Modelle

Kapitel 10

Dark photons

10.1 Theoretische Grundlagen

10.1.1 Grundlagen

- Notation
  - $U(1)_D$ für $U(1)$-Gruppe des dark photons

10.1.2 Formalismus

- Anschaulich: Grundlage für Effekte von dark photons ist kinetic mixing zwischen dem QED-Photon und dem dark photon ("vector portal")
- Dark photon Eigenzustände
  - Eichgruppe-Eigenzustände: A_Q, A_D
    * Verwende Indizes Q (für QED bzw $U(1)_Q$) und D (für dark sector bzw $U(1)_D$)
  - Eigenzustände nach Basiswechsel: A, A'
    * A ist effektives SM-Photon, A' ist das dark photon
    * Basiswechsel ist nicht-trivial: $A_Q \neq A, A_D \neq A'$

1. Eichkinetische Terme in Theorie mit dark photon: $\mathscr{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{4}F_{Q,\mu\nu}F_Q^{\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{D,\mu\nu}F_D^{\mu\nu} - \frac{\epsilon}{2}F_{Q,\mu\nu}F_D^{\mu\nu}$
   - Formal: Betrachte ganz allgemein eine Theorie mit 2 $U(1)$-Eichgruppen
   - Besonderheit: Mischterm $\mathscr{L} \supset -\frac{\epsilon}{2}F_{Q,\mu\nu}F_D^{\mu\nu} \Rightarrow$ Interessante Effekte
   - Matrix-Schreibweise: $\mathscr{L}_{\text{gauge}} = \begin{pmatrix} F_{Q,\mu\nu} \\ F_{D,\mu\nu} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ \epsilon & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_Q^{\mu\nu} \\ F_D^{\mu\nu} \end{pmatrix}$
     - Nachträgliche Motivation für Definition von ϵ: Erhalte diese einfache Form
   - Notiz: Annahme für dark photon ist $\epsilon \ll 1$
     - Für große Mischungseffekte $\epsilon \sim 1$ hätte man das dark photon schon entdeckt
2. Eichboson-Kopplungen in Theorie mit dark photon: $\mathscr{L}_c = eJ_\mu A_Q^\mu + e'J'_\mu A_D^\mu$
   - Notation: J_μ / J'_μ für Kopplungen an SM-Teilchen / dark sector Teilchen
   - Formal: Erhalte diese Kopplungen aus den eichkinetischen Termen der Fermionen
3. Masse des dark photons $\mathscr{L}_{m_{\gamma'}} = m_{\gamma'} A_{D,\mu} A_D^\mu$
   - Massenterm muss durch irgendeinen Mechanismus der UV-Theorie erzeugt werden (betrachte hier aber Effective Field Theory (EFT) bzw der Mechanismus interessiert nicht)
     - Formal: Eichboson-Massenterm ist nicht eichinvariant
     - Mögliche Mechanismen: Higgs-Mechanismus, Stückelberg-Mechanismus

- Matrix-Schreibweise: $\mathscr{L}_{m_{\gamma'}} = \begin{pmatrix} A_{Q,\mu} \\ A_{D,\mu} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m_{\gamma'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_Q^\mu \\ A_D^\mu \end{pmatrix}$

4. Diagonalisierung der kinetic mixing matrix $\begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ \epsilon & 1 \end{pmatrix}$

   - Anschaulich: Lege redundante Freiheitsgrade in der Definition von A_Q^μ, A_D^μ fest
     - Möchte Mischungs-Effekte nicht in den kinetischen Termen der Eichbosonen $\mathscr{L}_\text{gauge}$ haben, sondern verschiebe sie in die Kopplungsterme $\mathscr{L}_c$
   - Rechne im Grenzfall $\epsilon \ll 1$

   (a) Geschickter Basiswechsel: $\begin{pmatrix} A_Q^\mu \\ A_D^\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2}} & 0 \\ -\frac{\epsilon}{\sqrt{1-\epsilon^2}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_Q'^\mu \\ A_D'^\mu \end{pmatrix}$
   - Verwende Notation $A_Q'^\mu, A_D'^\mu$, da diese Eigenzustände noch Zwischen-Ergebnisse sind
   - Ergebnis: $\mathscr{L}_\text{gauge} = -\frac{1}{4} F'_{Q,\mu\nu} F_Q'^{\mu\nu} - \frac{1}{4} F'_{D,\mu\nu} F_D'^{\mu\nu}$ (ohne Mischungsterm)
   - Explizit: $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2}} & -\frac{\epsilon}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ \epsilon & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2}} & 0 \\ -\frac{\epsilon}{\sqrt{1-\epsilon^2}} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2}} & -\frac{\epsilon}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1-\epsilon^2}{\sqrt{1-\epsilon^2}} & \epsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
   - Basiswechsel lässt Eichboson-Massenmatrix invariant (zu führender Ordnung in $\epsilon \ll 1$)
     - Explizit: $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2}} & -\frac{\epsilon}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2}} & 0 \\ -\frac{\epsilon}{\sqrt{1-\epsilon^2}} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2}} & -\frac{\epsilon}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{-\epsilon}{\sqrt{1-\epsilon^2}} & 1 \end{pmatrix}$
     $= \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \begin{pmatrix} \epsilon^2 & -\epsilon \\ -\epsilon & \sqrt{1-\epsilon^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\epsilon)$

   (b) Habe restlichen redundanten $SO(2)$-Freiheitsgrad $\Rightarrow$ Führe Rotation $\begin{pmatrix} A_Q'^\mu \\ A_D'^\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^\mu \\ A'^\mu \end{pmatrix}$ durch
   - Diese Rotation lässt die kinetischen Terme der Eichbosonen invariant

   (c) Finde $\mathscr{L}_c = \left\{ \frac{e'\cos\theta}{\sqrt{1-\epsilon^2}} J'_\mu + e\Big(\sin\theta - \frac{\epsilon\cos\theta}{\sqrt{1-\epsilon^2}} J_\mu \Big) \right\} A'^\mu + \left\{ \frac{-e'\sin\theta}{\sqrt{1-\epsilon^2}} J'_\mu + e\Big(\cos\theta + \frac{\epsilon\sin\theta}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \Big) \right\} A^\mu$
   - Notiz: Interessant sind die Mischterme $\propto J_\mu A'^\mu, J'_\mu A^\mu$

   - Massives dark photon $m_{\gamma'} \neq 0 \Rightarrow \sin\theta = 0, \cos\theta = 1 \Rightarrow \mathscr{L}_c \supset -\epsilon e J_\mu A'^\mu$
     - Benötige $\theta = 0$, damit die Eichboson-Massenmatrix diagonal bleibt
     - Finde $\mathscr{L}_c = e' J'_\mu A'^\mu + e J_\mu A^\mu - \epsilon e J_\mu A'^\mu$ in führender Ordnung in ϵ
       * Anschaulich: Suche nach Wechselwirkungen zwischen SM-Fermionen und dark photon
       * Die Terme $\mathscr{L}_c \supset e' J'_\mu A'^\mu + e J_\mu A^\mu$ sind langweilig, bin interessiert an Korrekturen dazu durch Mischungseffekte
     - Spezialfall: Massen aus Stückelberg-Mechanismus (...)
       * Wahl für θ auch festgelegt aus Eigenschaften der Massen, aber Bedingung ist komplexer
   - Masseloses dark photon $m_{\gamma'} = 0$: $\sin\theta = \epsilon, \cos\theta = \sqrt{1-\epsilon^2} \Rightarrow \mathscr{L}_c \supset -\epsilon e' J'_\mu A^\mu$
     - θ ist beliebig $\Rightarrow$ Wähle θ so, dass sich $\mathscr{L}_c$ vereinfacht
     - Finde $\mathscr{L}_c = e' J'_\mu A'^\mu + e J_\mu A^\mu - \epsilon e' J'_\mu A^\mu$ in führender Ordnung in ϵ
       * Anschaulich: Suche nach hWechselwirkungen zwischen SM-Photon und BSM-Fermionen
     - Notiz: Kann auch $\theta = 0$ wählen, das ist aber ungeschickt
       * Experimentell sind Effekte von von Photonen einfacher zugänglich als Effekte von Fermionen

- Kein kinetic mixing mit nicht-abelschen Eichgruppen
  - Begründung: Mischterm $\mathscr{L}_\text{gauge} \supset -\frac{\epsilon}{2} F_{Q,\mu\nu} F_{D,a}^{\mu\nu}$ mit Eichgruppen-Index a nicht eichinvariant
  - Notiz: Mischterm einer nicht-abelschen Eichgruppe aus dark sector mit einer nicht-abelschen Eichgruppe des SM ist eichinvariant und damit möglich (?)
    * Formalismus komplett analog zum dark photon
    * Phänomenologisch weniger interessant, da Gluon schwer experimentell zu testen sind

- Einfluss des Z-Bosons bzw $U(1)_Y \times SU(2)_L \to U(1)_Q$ (...)
  - Anschaulich: Bei großen Energien $E \gtrsim v$ müssen Z-Boson-Effekte berücksichtigt werden
  - Formal: Diagonalisierung der Eichboson-Mischungsmatrix mit 3 Eichbosonen $B_\mu, W^3_\mu, A_{D,\mu}$
    * Notiz: Verwende Eich-Eigenzustände B_μ, W^3_μ statt Massen-Eigenzuständen A_μ, Z_μ
    * Habe mehrere Mischungswinkel ϵ, θ und θ_W (Weinberg-Winkel)
      · Z-Boson-Effekte vor allem relevant für schwere dark photons $\Rightarrow$ Meist θ
- Anderer Zugang: Dark photons als Oszillationseffekt (...)

10.1.3 UV-Modelle für dark photons

- $U(1)_D$ aus Eichung einer accidental global $U(1)$
  - Bsp: $U(1)_{B-L}$
- $U(1)_D$ aus SSB einer nicht-abelschen Gruppe
  - Bsp: GUT-SSB

10.2 Phenomenologie von masselosen dark photons

10.2.1 Einschränkungen durch millicharged particles

- Strategie: Untersuche Effekte von millicharged particles $\mathscr{L} \supset -e'\epsilon J'_\mu A^\mu$
  - Anschaulich: Naiver Zugang, da diese Wechselwirkung direkt aus kinetic mixing kommt
- Problem: Muss Annahmen über die dark sector fermions/scalars machen, um Schranken bestimmen zu können
  - Minimales Modell: $\mathscr{L} \supset -e'\epsilon\bar{\chi}\not{A}\chi - m_\chi\bar{\chi}\chi$
- Ortho-positronium-Zerfall
- Neutrino-Strahl Experimente

10.2.2 Einschränkungen durch das dark photon

- Strategie: Untersuche Effekte des dark photons durch effektive Dipol-Operatoren $\mathscr{L} \supset \frac{e'}{2\Lambda^2}\bar{\psi}^I_L\sigma^{\mu\nu}\left(C^{ij} + iC^{ij}_5\gamma_5\right)\psi^j_R H F'_{\mu\nu} + \text{h.c.}$
  - Anschaulich: Effekte des dark photons selbst können nur über EFT untersucht werden (benötige dimension-6 Operatoren)
- Stellar cooling
- Flavour-verletzende Zerfälle
- $(g-2)_\mu$-Messung bzw $\mu \to e\gamma'$
- Mono-Photon-Suchen am Collider
- Anzahl relativistischer Freiheitsgrade bei BBN
  - Dark photon muss vor BBN von dem thermischen Bad des SM entkoppeln wegen präziser N_{eff}-Messung

10.3 Phenomenologie von massiven dark photons

10.3.1 Überblick

- Produktionsprozesse
  - Bremsstrahlung $eN \to eN\gamma'$
  - Annihilation $e\bar{e} \to \gamma\gamma'$
  - Meson-Zerfälle wie $\pi^0 \to \gamma\gamma'$
  - Drell-Yan-Prozess $q\bar{q} \to \gamma'$
- Klassifikation über Nachweisprozesse
  - Zerfall auch in sichtbare Teilchen
  - Zerfall nur in unsichtbare Teilchen
  - Langlebig
    * Benötige $m_{A'} \lesssim 1\,\text{MeV}$, damit das dark photon langlebig ist
      · $m_{A'} \gtrsim 1\,\text{MeV} \Rightarrow$ Zerfall $\gamma' \to e\bar{e}$ ist kinematisch erlaubt
- Klassifikation über Masse
  - Dark photon: $m_{A'} \ll m_Z$
  - Z': $m_{A'} \gtrsim m_Z$

10.3.2 Einschränkungen an visible dark photons

- Strategie: Suche nach $\gamma' \to \ell\bar{\ell}$
  - Betrachte Zerfälle in leichte Leptonen ℓ, da die am Einfachsten zu detektieren sind
  - Dimensionsanalyse liefert $\Gamma(\gamma' \to \ell\bar{\ell}) \propto \epsilon^2 m_{A'} \Rightarrow$ Erhalte stärkere Schranken an ϵ für größeres $m_{A'}$
- Displaced vertices in beam dumps
- Anomale $\ell\bar{\ell}$-Vertices am Collider
  - Starke Schranken nur für $m_{A'} \gtrsim 2m_\mu$, da nur hier $\gamma' \to \mu\bar{\mu}$ möglich ist
    * $\gamma' \to e\bar{e}$ liefert keine starken Schranken wegen großem hadronischem Untergrund
- Supernova-Schranken

10.3.3 Einschränkungen an heavy invisible dark photons

- Strategie: Benötige Experiment mit geringem Untergrund, um fehlende Energie genau zu bestimmen
  - Suche nach peak in missing mass
- Seltene Meson-Zerfälle
  - Bsp: $K^+ \to \pi^+(\pi^0 \to \gamma'\gamma)$
- B-Fabriken $e^+e^- \to \gamma\gamma'$
- Beam dump experiments $eN \to eN\gamma'$

10.3.4 Einschränkungen an light invisible dark photons

- Strategie: Ähnlich wie andere leichte Teilchen
- Stellar cooling
  - Stärkste Schranken bei $T_{\text{star}} \sim m_{A'}$
    * Begründung: Dark photon production resonant verstärkt bei $m_{A'} \sim \omega_P$ mit plasmon-Masse $\omega_P^2 = \frac{4\pi\alpha n_e}{m_e}$
- Korrekturen zum Coulomb-Potential (Spektroskopie)
  - Coulomb-Potential mit Beitrag durch dark photon: $V(r) = -\frac{Z\alpha}{r}\left(1 + \epsilon^2 e^{-m_{A'} r}\right)$
- Resonanz-Experimente
  - Haloscopes
  - FUNK (KIT-Experiment)

Abkürzungen

2HDM 2 Higgs Doublet Model

ALP Axion-Like Particle

BSM Beyond the Standard Model

CDM Cold Dark Matter

ChPT Chiral Perturbation Theory

CPV CP violation

DM Dark Matter

EFT Effective Field Theory

EW ElectroWeak

GHGUT Gauge-Higgs Grand Unification

GUT Great Unified Theory

HEFT Higgs Effective Field Theory

HQET Heavy Quark Effective Theory

LSP Lightest Supersymmetric Particle

MSSM Minimal Supersymmetry Standard Model

QCD Quantum Chromodynamics

QFT Quantum Field Theory

SCET Soft Collinear Effective Theory

SM Standard Model

SMEFT Standard Model Effective Field Theory

SSB Spontaneous Symmetry Breaking

SUSY SUpeSYmmetry

TOE Theory Of Everything

ULA Ultra Light Axions

UT Unitarity Triangle

XD Extra Dimensions