4.3 Pochodne cząstkowe funkcji wielu zmiennych

Definicja 4.3. Granicę właściwą

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(P) - f(P_0)}{\Delta x_i}$$

nazywamy pochodną cząstkową rzędu pierwszego funkcji $f(P)$ względem zmiennej x_i i oznaczamy $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ w P_0.

Dla funkcji dwóch zmiennych $f(x, y)$ pochodną cząstkową pierwszego rzędu względem zmiennej x nazywamy granicę właściwą

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x} = f_x,$$

a pochodną względem zmiennej y nazywamy granicę właściwą

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = \frac{\partial f}{\partial y} = f_y.$$

Przy obliczaniu pochodnych cząstkowych funkcji stosuje się takie same reguły jak przy obliczaniu pochodnej jednej zmiennej z tym, że jeżeli obliczamy pochodną cząstkową funkcji $f(x, y)$ względem zmiennej x to zmienną y traktujemy jako stałą, analogicznie przy obliczaniu pochodnej cząstkowej względem zmiennej y, zmienną x, traktujemy jako stałą.

Pochodne wyższych rzędów

Pochodne drugiego rzędu funkcji dwóch zmiennych są następujące

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] = f_{xx}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right] = f_{yy},$$

oraz pochodne mieszane

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right] = f_{xy}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] = f_{yx}.$$

Twierdzenie 4.4 (Schwarza). *Jeżeli pochodne mieszane funkcji $f(x, y)$ są funkcjami ciągłymi to są sobie równe, czyli*

$$f_{xy} = f_{yx}.$$

Definicja 4.5. Jeżeli funkcja $f(P)$ ma w zbiorze Z ciągłe pochodne do rzędu n włącznie, to mówimy, że jest klasy C^n.

Jeżeli np. funkcja $f(x, y)$ jest klasy C^1, to jej pochodne cząstkowe pierwszego rzędu są funkcjami ciągłymi.

Pochodne cząstkowe funkcji $f(x, y)$ wyznaczają szybkość zmian funkcji w kierunku, z tym, że pochodna cząstkowa pierwszego rzędu względem zmiennej x wyznacza szybkość zmian funkcji w kierunku równoległym do osi Ox, zaś pochodna cząstkowa pierwszego rzędu względem zmiennej y wyznacza szybkość zmian funkcji w kierunku równoległym do osi Oy.

Przykład 4.6. Obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego oraz pochodne mieszane drugiego rzędu funkcji $f(x, y) = sin\frac{x}{y}$, $y \neq 0$.

Rozwiązanie.

$$
\begin{aligned}
f_x &= \left[\cos\frac{x}{y}\right] \cdot \left(\frac{1}{y}\right),\\
f_y &= \left[\cos\frac{x}{y}\right] \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right),\\
f_{xy} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}\right) = \left[-\sin\frac{x}{y}\right] \cdot \left[-\frac{x}{y^2}\right] \cdot \frac{1}{y} + \cos\frac{x}{y}\left[-\frac{1}{y^2}\right] = \frac{x}{y^3}\sin\frac{x}{y} - \frac{1}{y^2}\cos\frac{x}{y},\\
f_{yx} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}\right) = \left[-\sin\frac{x}{y}\right] \cdot \left[\frac{1}{y}\right] \cdot \left[-\frac{x}{y^2}\right] + \cos\frac{x}{y}\left[-\frac{1}{y^2}\right] = \frac{x}{y^3}\sin\frac{x}{y} - \frac{1}{y^2}\cos\frac{x}{y}.
\end{aligned}
$$

Jak widać pochodne cząstkowe mieszane dla $y \neq 0$ są równe. $\square$