

obwód trójfazowy - trójkąt

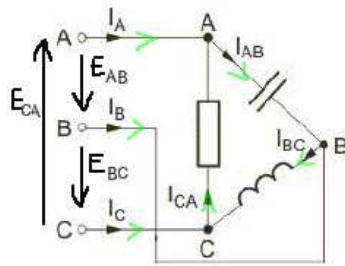
### 1. Identyfikacja problemu = po czym poznać, że zadanie trzeba rozwiązać tą metodą:

- na rysunku układu są trzy zaciski A, B, C
- po stronie odbiorników jest wyraźnie zaznaczony trójkąt - są trzy węzły połączone między sobą każdy z każdym pojedynczymi gałęziami. Każdy węzeł jest dołączony do któregoś z węzłów A, B, C.

Rozwiązanie

### 2. Rysunek

1. do wierzchołków trójkąta przyporządkować na schemacie obwodu litery zacisków, do których te wierzchołki są podłączone
  - prądy na przewodach łączących zaciski z wierzchołkami nazwać  $I_A, I_B, I_C$  - w zależności od literki oznaczającej zacisk/wierzchołek
  - prądy w trójkącie zaznaczyć w kierunku od literki wcześniejszej do późniejszej (w sensie  $A \rightarrow B \rightarrow C$ ) oraz oznaczyć:  $I_{AB}, I_{BC}, I_{CA}$
  - zaznaczyć napięcia międzyfazowe  $E_{AB}, E_{BC}, E_{CA}$  wszystko zgodnie z poniższym rysunkiem:



### 3. Przekształcenia symboliczne

1. napięcia międzyfazowe:

- jeśli w zadaniu podano wartość skuteczną napięcia fazowego - czyli:  $|U_f|$

$$|U_{mf}| = \sqrt{3}|U_f|$$

$$E_{AB} = \sqrt{3}|U_f|$$

$$E_{BC} = \sqrt{3}|U_f| \left( -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$E_{CA} = \sqrt{3}|U_f| \left( -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

- jeśli w zadaniu podano wartość skuteczną napięcia międzyfazowego - czyli:  $|U_{mf}|$

$$E_{AB} = |U_{mf}|$$

$$E_{BC} = |U_{mf}| \left( -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$E_{CA} = |U_{mf}| \left( -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

- jeśli napięcie podano w postaci napięcia chwilowego jednej z faz:

$$e(t) = U_m \sin(\omega t)$$

to wyliczyć napięcie skuteczne fazowe

$$|U_f| = \frac{|U_m|}{\sqrt{2}}$$

i wstawić do wzorów z punktu pierwszego

- impedancje cewek i kondensatorów

cewka:

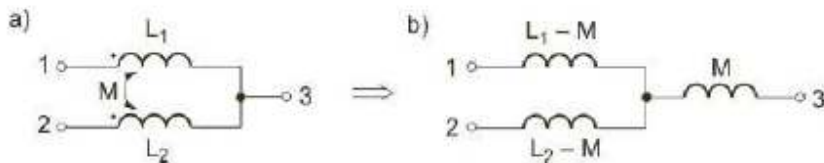
$$Z_L = j\omega L = jX_L$$

kondensator:

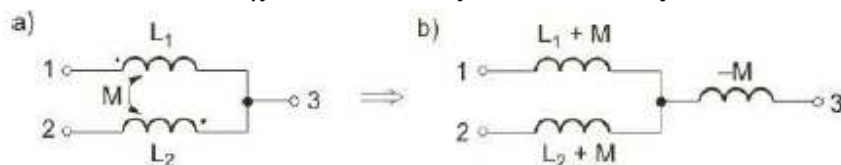
$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -jX_C$$

#### 4. Usuwanie sprzężenia magnetycznego cewek (jeśli występuje)

1. Jeśli występuje więcej niż jedno sprzężenie, to poniższe punkty powtarzać dla każdego usuwanego sprzężenia osobno (ale wyniki cały czas dodawać)
2. Określić rodzaj sprzężenia (dodatnie/ujemne)
  - znaleźć wspólny węzeł (do którego dołączone są sprzężone cewki)
  - sprawdzić dla pierwszej i drugiej cewki na którą końcówkę cewki trafiamy idąc od wspólnego węzła
    - jeśli dla jednej i drugiej cewki trafiamy na to samo (gwiazdka-gwiazdka lub "brak gwiazdki"- "brak gwiazdki") - **sprężenie dodatnie**
    - jeśli trafiamy na przeciwne końcówki ("gwiazdka"- "brak gwiazdki") - **sprężenie ujemne**
3. za węzłem wstawić dodatkową cewkę
4. indukcyjności cewek zmodyfikować w zależności od sprzężenia
  - dla sprzężenia dodatniego:
    - indukcyjności sprzężonych cewek zmniejszyć o M
    - indukcyjność dodatkowej cewki dać równą M



- dla sprzężenia ujemnego:
  - indukcyjności sprzężonych cewek zwiększyć o M
  - indukcyjność dodatkowej cewki dać równą -M



5. po usunięciu wszystkich sprzężeń przerysować układ z dodanymi cewkami i przeliczonymi oryginalnymi cewkami - jest to układ **zastępczy**

#### 5. Wyznaczenie prądów fazowych w układzie

1. jeśli w zadaniu były sprzężone cewki - prądy należy wyznaczać w układzie zastępczym (po usunięciu sprzężeń)
2. dla każdej gałęzi wyliczyć impedancję zastępczą - jeśli jest na tej gałęzi więcej niż jeden element. Oznaczyć impedancje zastępcze indeksami gałęzi ( $Z_{AB}$ ,  $Z_{BC}$ ,  $Z_{CA}$ )
3. wyznaczenie napięć na poszczególnych gałęziach odbiornika (bokach trójkąta)- wystarczy proste przyrównanie do wartości napięć międzyfazowych policzonych na początku w etapie 3:

$$U_{AB} = E_{AB}$$

$$U_{BC} = E_{BC}$$

$$U_{CA} = E_{CA}$$

4. wyliczenie prądów fazowych odbiornika (prądów płynących przez boki trójkąta) - podstawiamy napięcia i impedancje zastępcze wyliczone poprzednio:

$$I_{AB} = \frac{U_{AB}}{Z_{AB}}$$

$$I_{BC} = \frac{U_{BC}}{Z_{BC}}$$

$$I_{CA} = \frac{U_{CA}}{Z_{CA}}$$

5. wyliczenie prądów liniowych (prądów płynących od zacisków do wierzchołków trójkąta) - podstawiamy prądy wyliczone w kroku poprzednim:

$$I_A = I_{AB} - I_{CA}$$

$$I_B = I_{BC} - I_{AB}$$

$$I_C = I_{CA} - I_{BC}$$

## 6. Wyznaczenie napięć na poszczególnych elementach

1. jeśli w zadaniu były sprzężone cewki - napięcia należy wyznaczać w układzie oryginalnym (przed usunięciem sprzężeń - jak w treści zadania)
2. napięcia na elementach wyliczamy na podstawie wyznaczonych w poprzednim punkcie prądów oraz wyliczonych w punkcie 1 impedancji zastępczych:

- dla rezystorów:

$$U_R = R I_x \quad \text{gdzie } I_x \text{ oznacza prąd gałęzi na której jest ten element}$$

- dla kondensatorów:

$$U_C = Z_C I_x = -jX_C I_x \quad \text{gdzie } I_x \text{ oznacza prąd gałęzi na której jest ten element}$$

- dla cewek, które nie były sprzężone:

$$U_L = Z_L I_x = jX_L I_x \quad \text{gdzie } I_x \text{ oznacza prąd gałęzi na której jest ten element}$$

- dla cewek **sprzężonych dodatnio**

$$U_L = Z_L I_x + Z_M I_y = jX_L I_x + jX_M I_y$$

gdzie  $I_x$  oznacza prąd gałęzi na której jest wyliczana cewka, a  $I_y$  oznacza prąd gałęzi na której jest cewka sprzężona z wyliczaną (**ważne:** prądy  $I_x$  i  $I_y$  muszą płynąć w tę samą stronę (do wspólnego węzła, lub od wspólnego węzła) - jeśli płyną w przeciwne strony, to we wzorze trzeba wstawić znak minus)

- dla cewek **sprzężonych ujemnie**

$$U_L = Z_L I_x - Z_M I_y = jX_L I_x - jX_M I_y$$

gdzie  $I_x$  oznacza prąd gałęzi na której jest wyliczana cewka, a  $I_y$  oznacza prąd gałęzi na której jest cewka sprzężona z wyliczaną (**ważne:** prądy  $I_x$  i  $I_y$  muszą płynąć w tę samą stronę (do wspólnego węzła, lub od wspólnego węzła) - jeśli płyną w przeciwne strony, to we wzorze trzeba wstawić znak plus)

## 7. Wyliczenie wskazań przyrządów pomiarowych

1. woltomierz:

- wyznaczamy impedancję zastępczą fragmentu układu, który znajduje się pomiędzy zaciskami woltomierza (najczęściej jest to jeden element, więc nie trzeba nic wtedy wyznaczać, bo już zostało to zrobione na początku zadania)

- liczymy napięcie

$$U_V = Z I_x \quad \text{gdzie } I_x \text{ oznacza prąd gałęzi na której jest robiony pomiar}$$

- liczymy moduł  $U_V$  (to napięcie jest liczbą zespoloną  $a + bj$ , więc moduł jest równy  $\sqrt{a^2 + b^2}$ )

$$|U_V| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{gdzie } U_V = a + bj$$

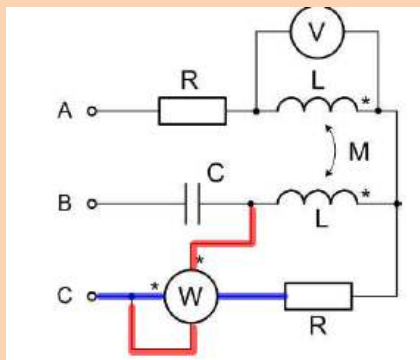
2. amperomierz:

- liczymy po prostu moduł z odpowiedniego prądu (w zależności na której gałęzi jest podłączony amperomierz - a więc który prąd przez niego płynie  
 $|I_V| = |I_x| = \sqrt{a^2 + b^2}$       gdzie  $I_x$  to prąd płynący przez amperomierz, i jest on równy liczbie zespolonej  $I_x = a + bj$

### 3. watomierz: czyli połączenie woltomierza z amperomierzem

- watomierz "leży" na dwóch przewodach - przy czym przewód "niepołamany" oznacza przewód prądowy, a przewód połamany - przewód napięciowy.
- wyznaczamy prąd  $I_W$  - tak jak wyznacza się prąd dla amperomierza (bez liczenia modułu - **ważne!** kierunek "wpływania" prądu w watomierz powinien być od strony "gwiazdki" - jeśli jest od drugiej strony, to dostawiamy minus). Zamiast liczenia modułu wyznaczamy prąd sprzężony  $I_W^*$ , czyli przestawiamy znak na przeciwny przy elemencie urojonym (jeśli  $I_W = a + bj$  to  $I_W^* = a - bj$ )
- wyznaczamy napięcie  $U_W$  - tak jak wyznacza się napięcie dla woltomierza (znów bez liczenia modułu - **ważne!** kierunek "wpływania" prądu w watomierz powinien być od strony "gwiazdki" - jeśli jest od drugiej strony, to dostawiamy minus)
- liczymy wskazanie mocy ze wzoru:  
 $P = \operatorname{Re}(U_W I_W^*)$       gdzie  $\operatorname{Re}()$  oznacza wyliczenie części rzeczywistej

Przykład watomierza:

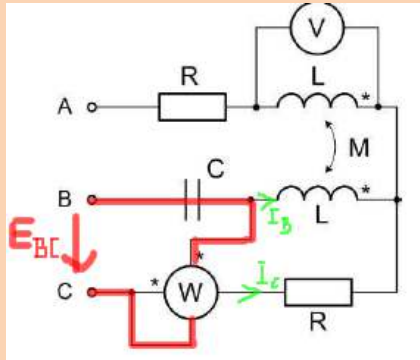


kolorem czerwonym oznaczony przewód napięciowy (połamany) na którym trzeba zmierzyć napięcie woltomierza

kolorem niebieskim oznaczony przewód prądowy na którym mierzymy prąd

Do określenia prądu wystarczy znaleźć prąd płynący przez niebieski przewód - ważny jest kierunek tego prądu: jeśli strzałka wpływa w woltomierz od strony gwiazdki - bierzemy do wzorka na moc prąd z plusem, jeśli od drugiej strony - z minusem

Do określenia napięcia najlepiej odrysować sobie pełny obieg prądu:



i rozpisać takie oczko napięciowe biorąc za napięcie na woltomierzu  $U_W$ :

$$E_{BC} - U_W + U_C = 0$$

obieg oczka bierzemy zgodnie ze strzałką  $E_{BC}$ . Dlatego w watomierz wchodzimy od przeciwnej strony niż ma gwiazdkę przy przewodzie napięciowym - więc bierzemy jego napięcie z minusem (dlatego  $-U_W$ ), następnie wchodzimy na kondensator, ale przeciwnie do prądu przez niego płynącego ( $I_B$ ), więc napięcie ma zgodny kierunek - bierzemy je z plusem.

Wyznaczamy z tego równania  $U_W$ , resztę podstawiamy lub wstawiamy wzory Ohma:

$$U_W = E_{BC} + U_C = E_{BC} + I_C Z_C$$