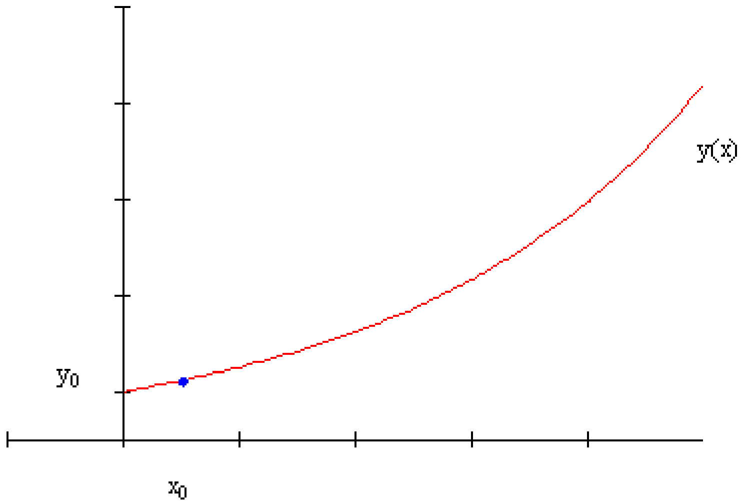
12.1 METODA SZEREGÓW POTĘGOWYCH

Rozpatrujemy problem początkowy (Cauchy`ego): znaleźć krzywą całkową równania

$$y' = f(x,y)$$

przechodzącą przez punkt (x_0 , y_0). Przy założeniach: funkcja *f* jest ciągła po *x* i ma ciągłą pochodną cząstkową po *y* , istnieje jedyna taka krzywa w pewnym otoczeniu punktu początkowego.



Rys12.1.1. Szukane rozwiązanie przechodzące przez punkt początkowy.

Będziemy rozwiązanie tego zagadnienia szukać metodami przybliżonymi.

Zakładamy, że istnieje rozwiązanie podanego problemu , które ma wszystkie pochodne do rzędu n+1 włącznie , i rozwijamy je w szereg Taylora w punkcie x_0.

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \\ \ldots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x) \tag{12.1.1}$$

gdzie

$$R_n(x) = \frac{y^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \tag{12.1.2}$$

a θ jest liczbą z otwartego przedziału (0, 1). Przybliżonym rozwiązaniem będzie kilka pierwszych wyrazów tego szeregu (będzie to wielomian stopnia n).

Przykład 12.1.1. Dane jest równanie różniczkowe I rzędu : $y' = 2xy$ z warunkiem początkowym: $y(0) = 1$.

Podane równanie to równanie o zmiennych rozdzielonych i można podać jego dokładne rozwiązanie przechodzące przez punkt (0,1). Jest to funkcja $r(x) = e^{x^2}$.

Znajdziemy również przybliżone rozwiązanie metodą szeregów potęgowych i ograniczymy się do pięciu wyrazów szeregu. Zobaczymy jaki jest błąd między rozwiązaniem dokładnym a przybliżonym.

Oznaczmy przez $f(x,y) = 2xy = y'$ (z podanego równania) i przez $y_0 = 1$ (warunek początkowy). Obliczymy cztery kolejne pochodne funkcji $y(x)$ w punkcie początkowym $x_0 = 0$. Wartość pierwszej pochodnej wyliczamy bezpośrednio z równania:

$$y_1 = y'(x_0) = f(x_0, y_0) = 0$$

Następne pochodne obliczymy różniczkując pierwszą pochodną czyli funkcję $f(x,y) = f(x, y(x))$ po zmiennej *x*. Otrzymamy:

$$y_2 = y''(x_0) = \frac{d}{dx} f(x,y)_{(x_0,y_0)} = 2$$

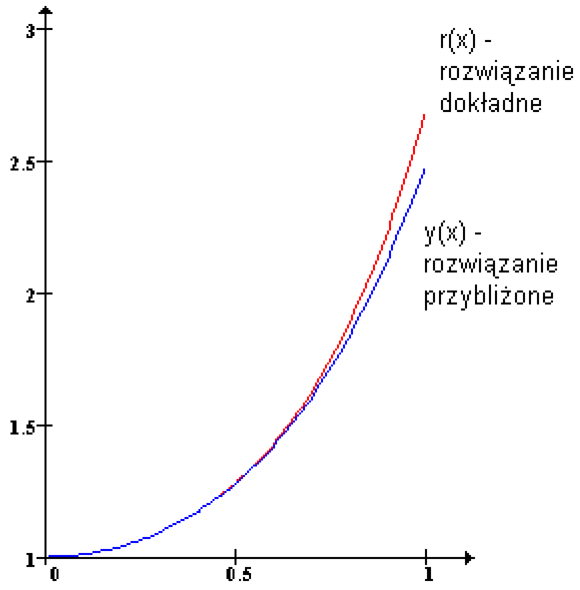
$$y_3 = y'''(x_0) = \frac{d^2}{dx^2} f(x,y)_{(x_0,y_0)} = 0$$

$$y_4 = y^{(4)}(x_0) = \frac{d^3}{dx^3} f(x,y)_{(x_0,y_0)} = 12$$

Zatem rozwiązanie przybliżone w postaci szeregu potęgowego z pięcioma wyrazami jest następujące:

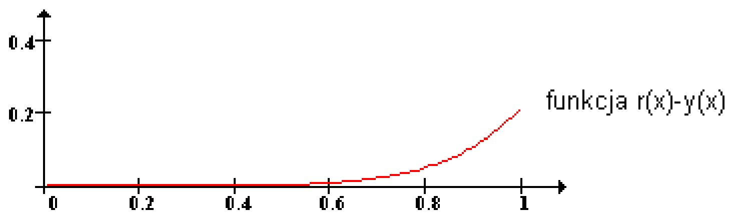
$$y(x) = y_0 + y_1 x + \frac{1}{2} y_2 x^2 + \frac{1}{3!} y_3 x^3 + \frac{1}{4!} y_4 x^4 = 1 + x^2 + \frac{1}{2} x^4$$

Porównamy te dwa rozwiązania na rysunku :



Rys12.1.2. Wykres rozwiązania dokładnego i przybliżonego

Na następnym rysunku jest przedstawiona funkcja błędu $r(x) - y(x)$ w przedziale <0, 1> i widać, że maksymalny błąd wynosi około 0.2 (w przybliżeniu do trzech cyfr 0.218).



Rys12.1.3. Wykres funkcji błędu.

12.2 METODA WSPÓŁCZYNNIKÓW NIEOZNACZONYCH

Dla równania np. II rzędu możemy zastosować metodę współczynników nieoznaczonych. Będziemy zakładać, że rozwiązanie istnieje i jest jedyne w rozpatrywanym przez nas przedziale. Wyjaśnimy postępowanie na przykładzie.

Przykład 12.2.1. Dane jest równanie

$$y'' - 2xy' + y = 0$$

Szukamy rozwiązania tego równania, spełniającego warunki początkowe:

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

Szukamy rozwiązania w postaci szeregu

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \;..\; + a_nx^n + a_{n+1}x^{n+1} + a_{n+2}x^{n+2} + \ldots \quad (12.$$

Różniczkujemy dwa razy i otrzymujemy:

$$y'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \ldots + na_nx^{n-1} + (n+1)a_{n+1}x^n + (n+2)a_{n+2}x^{n+1}$$

$$y''(x) = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + \ldots + n(n-1)a_nx^{n-2} + (n+1)na_{n+1}x^{n-1} + $$
$$+ (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \ldots$$

Wstawiając funkcję, pierwszą i drugą pochodną do rozpatrywanego równania dostajemy

$$(2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + \ldots + (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \ldots) +$$
$$- 2(a_1x + 2a_2x^2 + 3a_3x^3 + 4a_4x^4 + \ldots + na_nx^n + \ldots) +$$
$$+ a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \ldots + a_nx^n + \ldots = 0$$

Z warunków początkowych mamy

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0$$

Porównujemy współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennej *x* i dostajemy

$$2a_2 + a_0 = 0, \quad \Rightarrow \quad a_2 = -\frac{1}{2}$$

$$6a_3 - a_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_3 = \frac{1}{6}a_1 = 0$$

$$12a_4 - 3a_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_4 = \frac{1}{4}a_2 = -\frac{1}{8}$$

Jeśli ograniczymy się do pięciu wyrazów otrzymamy rozwiązanie:

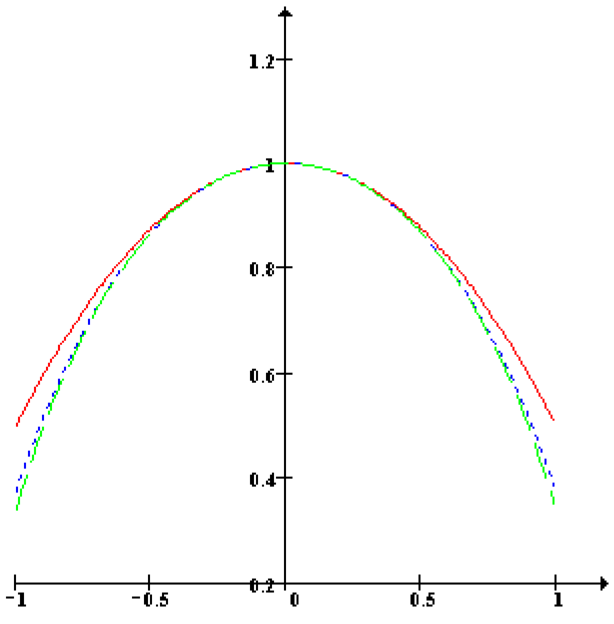
$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 .$$

Ogólnie wzór rekurencyjny można wyliczyć porównując współczynniki przy *x* do potęgi *n* .

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2na_n + a_n = 0$$
$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - (2n-1)a_n = 0$$
$$a_{n+2} = \frac{2n-1}{(n+2)(n+1)}a_n$$

W tym przykładzie znikają wszystkie współczynniki o nieparzystych indeksach.

Na rysunku są naszkicowane trzy przybliżone rozwiązania: wielomian stopnia 2 (czerwona ciągł linia), wielomian stopnia 4 (niebieskie kropki) i wielomian stopnia 10 (zielone kreski). Widać, ż wszystkie rozwiązania w otoczeniu punktu (0, 1) prawie się pokrywają. Im dalej od punktu początkowego tym rozwiązania te bardziej się różnią.



Rys12.2.1. Rozwiązania przybliżone w postaci wielomianów drugiego, czwartego i dziesiątego stopnia.

12.3 METODA PROSTA EULERA

Zakładamy, że istnieje jedyne rozwiązanie problemu początkowego (Cauchy`ego):

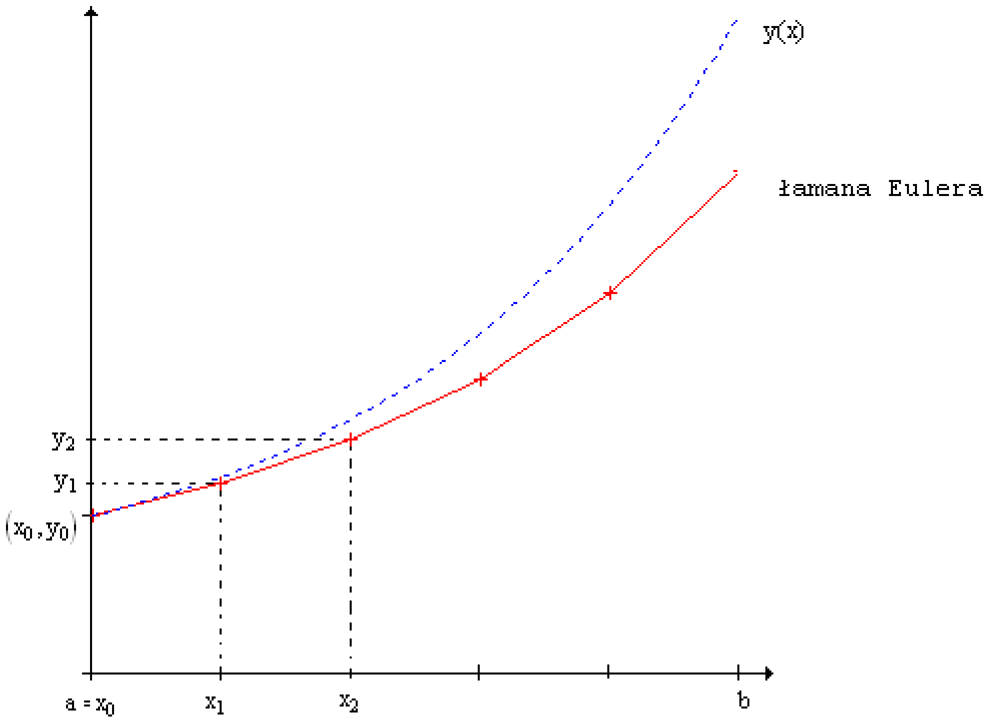
$$y' = f(x, y)$$
$$y(x_0) = y_0 \tag{12.3.1}$$

Znajdziemy przybliżone rozwiązanie metodą prostą Eulera.

Będziemy szukać rozwiązania na przedziale <a,b> , gdzie $a=x_0$. Podzielimy przedział na n części o długości h. W punkcie początkowym wystawiamy styczną do szukanego rozwiązania. Mamy z równania dokładną wartość współczynnika kierunkowego tej prostej $f(x_0, y_0)$. Zatem szukana styczna ma postać

$$y = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0)$$

Przecinamy tę styczną z prostą $x=x_1$ i otrzymujemy przybliżoną wartość rozwiązania w punkcie x_1.



Rys12.3.1. Łamana Eulera

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0) = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

Następnie obliczamy z równania współczynnik kierunkowy stycznej w punkcie (x_1, y_1) i prowadzimy przez punkt (x_1, y_1) prostą

$$y = y_1 + f(x_1, y_1)(x - x_1)$$

Przecinamy ją z prostą $x=x_2$ i otrzymujemy wartość y_2

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$$

Kontynuując to postępowanie otrzymujemy ciąg wartości y_n ze wzoru

$$y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1}) \qquad (12.3.2)$$

Dostajemy zatem rozwiązanie przybliżone w postaci tabelki z wartościami (x_n, y_n). Na rysunku te punkty połączone są łamaną i widać, że za każdym następnym krokiem rośnie błąd między dokładnym rozwiązaniem (przerywana niebieska linia) i łamaną.

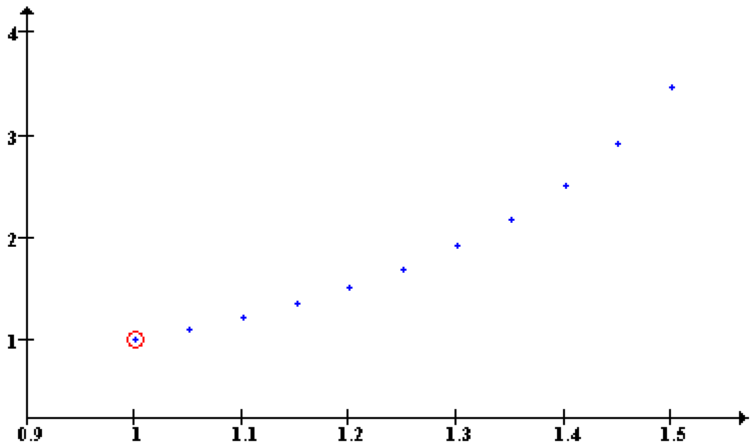
Przykład 12.3.1. Dane jest równanie $y' = x^2 + y^2$ i warunek początkowy $y(1) = 1$.
Będziemy szukać przybliżonego rozwiązania w przedziale <1, 1.5> , a=1, b=1.5. Podzielimy przedział <a, b> na n=10 części .

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad i = 0,\dots n, \quad x_i = a + ih$$

Korzystając ze wzoru (12.3.2) otrzymamy rozwiązanie w postaci tabelki:

x_i =	y_i =
1	1
1.05	1.1
1.1	1.216
1.15	1.35
1.2	1.507
1.25	1.693
1.3	1.914
1.35	2.182
1.4	2.511
1.45	2.924
1.5	3.457

Ilustrację graficzną rozwiązania przedstawia rysunek:



Rys12.3.2. Graficzne przedstawienie rozwiązania.

12.4 METODA ULEPSZONA EULERA

Zakładamy, że istnieje jedyne rozwiązanie problemu początkowego (Cauchy`ego):

$$y' = f(x, y)$$
$$y(x_0) = y_0 \qquad (12.4.1)$$

Znajdziemy przybliżone rozwiązanie metodą ulepszoną Eulera.

Będziemy szukać rozwiązania na przedziale <a, b> , gdzie $a=x_0$. Podzielimy przedział na n części o długości h. Punkty podziału :

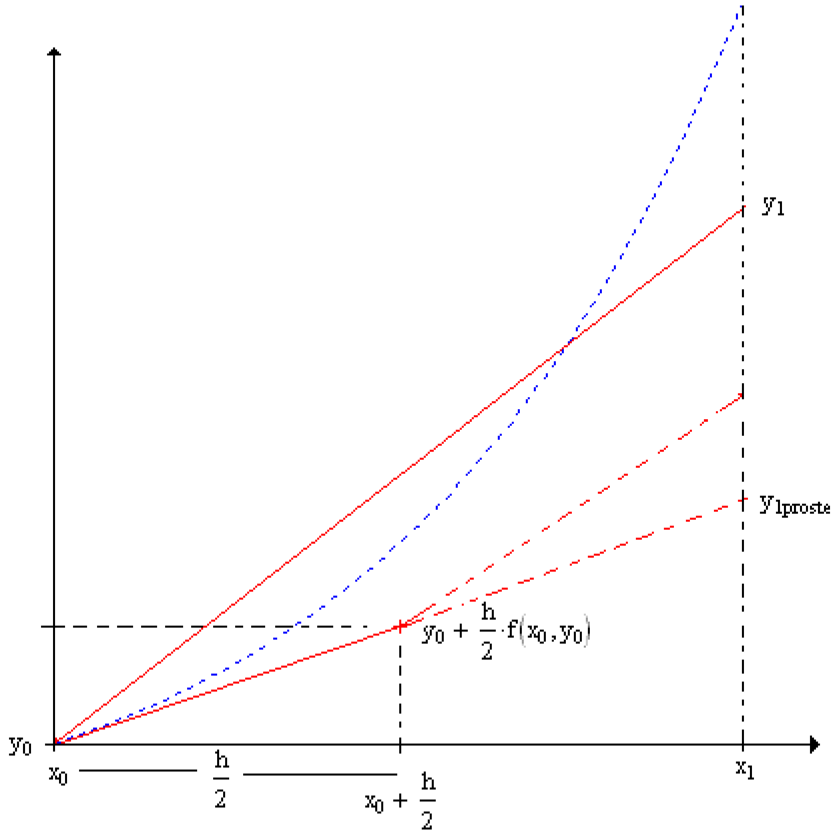
$x_k=a+ih$ gdzie i=0,1, ... n. Wartości funkcji będącej rozwiązaniem danego zagadnienia będziemy liczyć ze wzoru:

$$y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1} + \frac{h}{2}, y_{n-1} + \frac{h}{2} f(x_{n-1}, y_{n-1})) \qquad (12.4.2)$$

Dostajemy rozwiązanie w postaci tabelki ,w której są wartości (x_i, y_i) gdzie i=0,1,2 ... n.

Wzór wyjaśnimy na rysunku dla pierwszego kroku:

$$y_1 = y_0 + hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} f(x_0, y_0))$$



Rys12.4.1. Interpretacja graficzna pierwszego kroku.

Idea zmodyfikowanego wzoru polega na tym, że będziemy "posuwać" się wzdłuż prostej stycznej do wykresu nie w punkcie (x_0, y_0) , tylko wzdłuż prostej o współczynniku kierunkowym równym współczynnikowi stycznej do krzywej w punkcie oddalonym od x_0 o $h/2$.

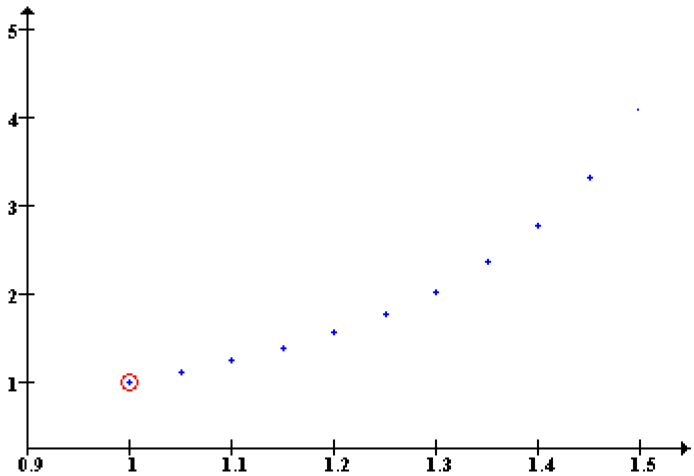
Przykład 12.4.1. Dane jest równanie (to samo co w przykładzie 12.3.1) $y' = x^2 + y^2$ i warunek początkowy $y(1) = 1$. Będziemy szukać przybliżonego rozwiązania w przedziale <1, 1.5> , a=1, b=1.5. Podzielimy przedział <a, b> na n=10 części .

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad i = 0,\ldots n, \quad x_i = a + ih$$

Korzystając ze wzoru (12.4.2) otrzymamy rozwiązanie w postaci tabelki:

x_i =	y_i =
1	1
1.05	1.108
1.1	1.233
1.15	1.381
1.2	1.557
1.25	1.769
1.3	2.028
1.35	2.352
1.4	2.768
1.45	3.323
1.5	4.098

Ilustrację graficzną rozwiązania przedstawia rysunek:



Rys12.4.2. Graficzne przedstawienie rozwiązania.

Zadanie12.1.

Dane jest równanie różniczkowe I rzędu : $y' = y^2 - \frac{y}{x}$ z warunkiem początkowym: $y(1) = \frac{2}{3}$.

Znaleźć metodą szeregów potęgowych przybliżone rozwiązanie w postaci wielomianu czwartego stopnia w przedziale <1, 1.8>. Porównać z rozwiązaniem dokładnym.

Rozwiązanie12.1.

Jest to równanie Bernoulliego i można podać jego dokładne rozwiązanie przechodzące przez punkt (1, $\frac{2}{3}$). Jest to funkcja $r(x) = \frac{2}{3}\frac{1}{x(1-\frac{2}{3}\ln(x))}$.

Znajdziemy również przybliżone rozwiązanie metodą szeregów potęgowych i ograniczymy się do pięciu wyrazów szeregu. Zobaczymy jaki jest błąd między rozwiązaniem dokładnym a przybliżonym.

Oznaczmy przez $f(x,y) = y^2 - \frac{y}{x} = y'$ (z podanego równania) i przez $y_0 = \frac{2}{3}$ (warunek początkowy). Obliczymy cztery kolejne pochodne funkcji $y(x)$ w punkcie początkowym $x_0 = 1$. Wartość pierwszej pochodnej wyliczamy bezpośrednio z równania:

$$y_1 = y'(x_0) = f(x_0, y_0) = -\frac{2}{9}$$

Następne pochodne obliczymy różniczkując pierwszą pochodną czyli funkcję $f(x,y) = f(x, y(x))$ po zmiennej *x*. Otrzymamy:

$$y_2 = y''(x_0) = \frac{d}{dx} f(x,y)_{(x_0,y_0)} = \frac{16}{27}$$

$$y_3 = y'''(x_0) = \frac{d^2}{dx^2} f(x,y)_{(x_0,y_0)} = -\frac{40}{27}$$

$$y_4 = y^{(4)}(x_0) = \frac{d^3}{dx^3} f(x,y)_{(x_0,y_0)} = \frac{472}{81}$$

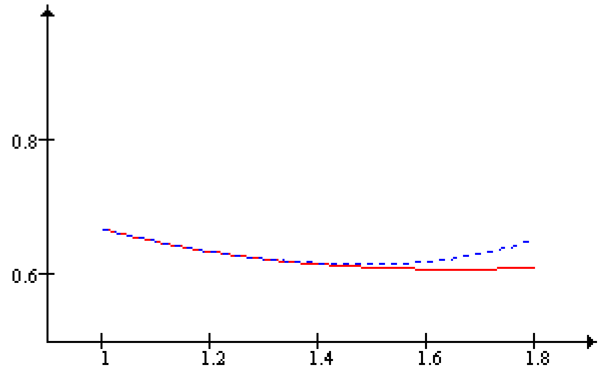
Zatem rozwiązanie przybliżone w postaci szeregu potęgowego z pięcioma wyrazami jest następujące:

$$y(x) = y_0 + y_1 x + \frac{1}{2} y_2 x^2 + \frac{1}{3!} y_3 x^3 + \frac{1}{4!} y_4 x^4 =$$

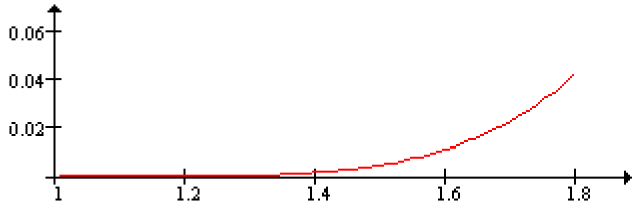
$$= \frac{2}{3} - \frac{2}{9}(x-1) + \frac{16}{54}(x-1)^2 - \frac{40}{162}(x-1)^3 + \frac{472}{1944}(x-1)^4$$

W tym zadaniu musimy rozwijać funkcję będącą rozwiązaniem w szereg Taylora wokół punktu $x_0 = 1$.

Porównamy te dwa rozwiązania na rysunku: rozwiązanie dokładne - czerwona ciągła linia, rozwiązanie przybliżone - przerywana niebieska linia.



Na następnym rysunku jest przedstawiona funkcja błędu $|r(x) - y(x)|$ w przedziale <1, 1.8> i widać, że maksymalny błąd nie przekracza 0.05 (w przybliżeniu do trzech cyfr 0.043).



Zadania12.2.

Dane jest równanie

$$y'' - xy = 0$$

Metodą współczynników nieoznaczonych znaleźć rozwiązanie tego równania, spełniającego warunki początkowe:

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 .$$

Podać rozwiązania w postaci wielomianów 6 i 9 stopnia. Narysować te wielomiany w przedziale <0, 2.4>. Określić maksymalny błąd między tymi rozwiązaniami przybliżonymi.

Rozwiązanie12.2.

Szukamy rozwiązania w postaci szeregu

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \;..\; + a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + a_{n+2} x^{n+2} + \ldots$$

Różniczkujemy dwa razy i otrzymujemy:

$$y'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \ldots + na_n x^{n-1} + (n+1)a_{n+1} x^n + (n+2)a_{n+2} x^{n+1} + \ldots$$

$$y''(x) = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + \;\ldots + n(n-1)a_n x^{n-2} + (n+1)na_{n+1} x^{n-1} +$$
$$+ (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n + \ldots$$

Wstawiając funkcję, pierwszą i drugą pochodną do rozpatrywanego równania dostajemy

$$2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + \ldots + (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n + \ldots - (a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + \ldots + a_{n-1} x^n + \ldots) = 0$$

Z warunków początkowych mamy

$$a_0 = 1, \;\; a_1 = 0$$

Porównujemy współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennej *x* i dostajemy

$$a_2 = 0, \;\; a_3 = \frac{1}{6} a_0 = \frac{1}{6}$$

Ogólnie wzór rekurencyjny można wyliczyć porównując współczynniki przy *x* do potęgi *n* .

$$a_{n+2} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} a_{n-1}$$

Stąd $a_4 = 0, \; a_5 = 0, \; a_6 = \frac{1}{180}, \; a_7 = 0, \; a_8 = 0, \; a_9 = \frac{1}{12960}$

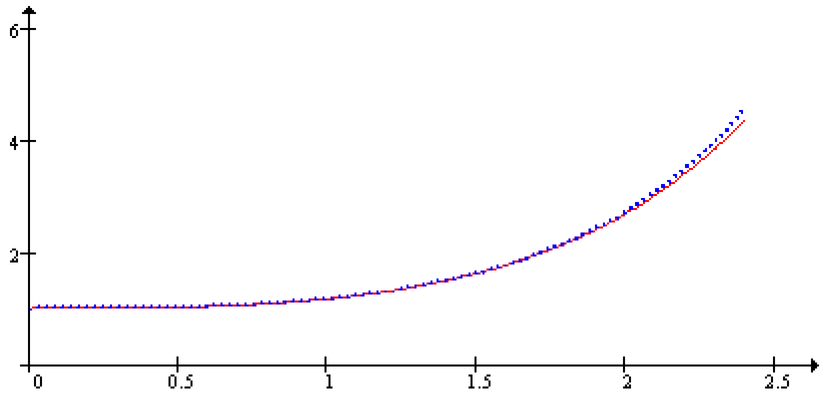
Zatem rozwiązania w postaci szukanych wielomianów są następujące:

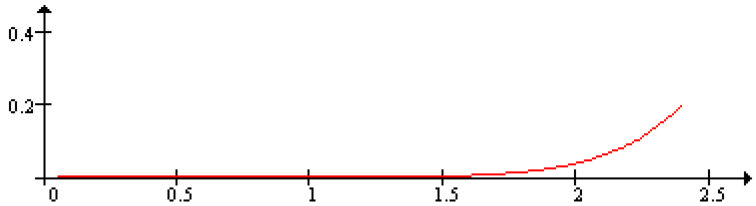
$$y6(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6 = 1 + \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{180} x^6$$

$$y9(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6 + a_7 x^7 + a_8 x^8 + a_9 x^9 =$$
$$= 1 + \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{180} x^6 + \frac{1}{12960} x^9$$

.

Na pierwszym rysunku są naszkicowane dwa przybliżone rozwiązania: wielomian stopnia 6 (czerwona ciągła linia), wielomian stopnia 9 (niebieskie kropki) Widać, że rozwiązania te w otoczeniu punktu (0, 1) prawie się pokrywają. Im dalej od punktu początkowego tym rozwiązania te bardziej się różnią. Maksymalna różnica między tymi wielomianami w rozpatrywanym przedziale wynosi 0.204- rysunek drugi.


6
4
2
0
0.5
1
1.5
2
2.5


0.4
0.2
0
0.5
1
1.5
2
2.5

Zadania12.3. Dane jest równanie $y' = \frac{y}{x^2}$ i warunek początkowy $y(1) = 1$. Za pomocą prostej metody Eulera znaleźć przybliżone rozwiązanie w przedziale <1, 3> , dla punktów

$$x_i = a + ih, \quad a = 1, \quad b = 3, \quad h = \frac{b-a}{10}, \quad i = 0,1,\ldots 10 \, .$$

Porównać z rozwiązaniem dokładnym.

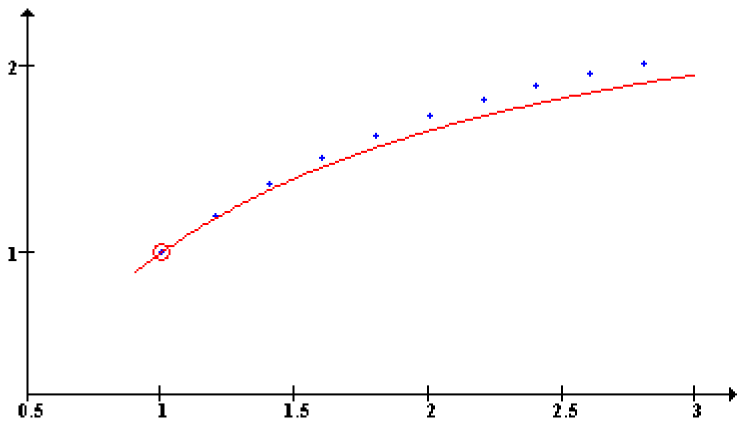
Rozwiązanie12.3. Dane jest równanie $y' = \frac{y}{x^2}$ i warunek początkowy $y(1) = 1$. Będziemy szukać przybliżonego rozwiązania w przedziale <1, 3> , *a*=1, *b*=3. Podzielimy przedział <*a*, *b*> na *n*=10 części .

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad i = 0,\ldots n, \quad x_i = a + ih$$

Korzystając ze wzoru (12.3.2) otrzymamy rozwiązanie w postaci tabelki:

x_i =	y_i =
1	1
1.2	1.2
1.4	1.367
1.6	1.506
1.8	1.624
2	1.724
2.2	1.81
2.4	1.885
2.6	1.95
2.8	2.008
3	2.059

Ilustrację graficzną rozwiązania przedstawia rysunek: rozwiązanie dokładne - czerwona ciągła linia. To rozwiązanie dokładne $y = e^{\frac{x-1}{x}}$ można otrzymać stosując do podanego równania metodę rozdzielania zmiennych.



Podamy jeszcze błędy miedzy rozwiązaniem dokładnym, a rozwiązaniem za pomocą tabelki w punktach x_i.

$\lvert y_i - r(x_i) \rvert$
0
0.019
0.036
0.051
0.064
0.075
0.085
0.093
0.1
0.106
0.112

Zadania12.4. Dane jest równanie $y' = \frac{y}{x^2}$ i warunek początkowy $y(1) = 1$. Za pomocą ulepszonej metody Eulera znaleźć przybliżone rozwiązanie w przedziale <1, 3> , dla punktów

$$x_i = a + ih, \quad a = 1, \quad b = 3, \quad h = \frac{b-a}{10}, \quad i = 0,1,\ldots 10$$

.

Porównać z rozwiązaniem dokładnym i z rozwiązaniem otrzymanym w zadaniu 3 za pomocą prostej metody Eulera.

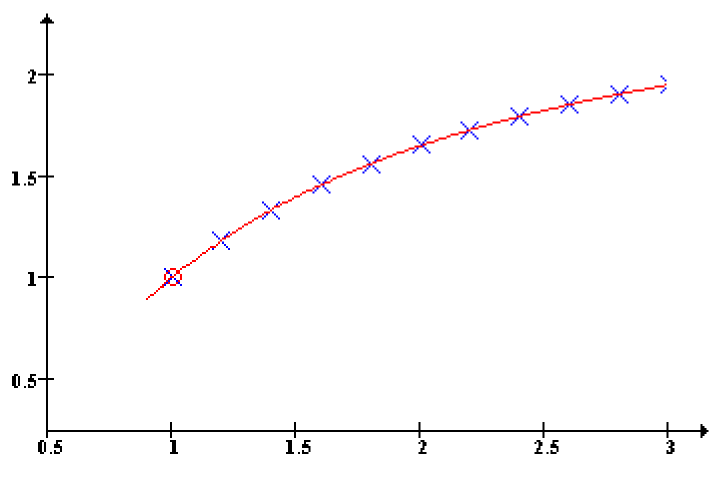
Rozwiązanie12.4. Dane jest równanie $y' = \frac{y}{x^2}$ i warunek początkowy $y(1) = 1$. Będziemy szukać przybliżonego rozwiązania w przedziale <1, 3> , *a*=1, *b*=3. Podzielimy przedział <*a*, *b*> na *n*=10 części .

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad i = 0,\ldots n, \quad x_i = a + ih$$

Korzystając ze wzoru (12.4.2) otrzymamy rozwiązanie w postaci tabelki:

x_i =	y_i =
1	1
1.2	1.182
1.4	1.331
1.6	1.456
1.8	1.56
2	1.65
2.2	1.726
2.4	1.793
2.6	1.851
2.8	1.903
3	1.949

Ilustrację graficzną rozwiązania przedstawia rysunek: rozwiązanie dokładne - czerwona ciągła linia, rozwiazanie przybliżone - niebieskie iksy. To rozwiązanie dokładne $y = e^{\frac{x-1}{x}}$ można otrzymać stosując do podanego równania metodę rozdzielania zmiennych.



Podamy jeszcze błędy miedzy rozwiązaniem dokładnym, a rozwiązaniem za pomocą tabelki w punktach x_i.

$\left\lvert y_i - r(x_i) \right\rvert$
0
$4.578 \cdot 10^{-4}$
$6.786 \cdot 10^{-4}$
$7.833 \cdot 10^{-4}$
$8.323 \cdot 10^{-4}$
$8.546 \cdot 10^{-4}$
$8.644 \cdot 10^{-4}$
$8.684 \cdot 10^{-4}$
$8.699 \cdot 10^{-4}$
$8.707 \cdot 10^{-4}$
$8.713 \cdot 10^{-4}$

Można porównać te wyniki z poprzednim zadaniem. Ta metoda jest o wiele dokładniejsza.