10.1 Wektory

Wektorem nazywamy odcinek posiadający trzy cechy: długość, kierunek, zwrot. Wektory dzielimy na zaczepione oraz swobodne. Wektor zaczepiony oprócz wymienionych cech posiada punkt zaczepienia zwany początkiem wektora. Czasem wyróżniamy dwa punkty w których jeden jest początkiem wektora natomiast drugi końcem wektora. W przestrzeni trójwymiarowej $\mathbb{R}^3$, $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ są punktami których odległość jest długością wektora $\overrightarrow{P_1P_2}$. Długość taką oznaczamy $|\overrightarrow{P_1P_2}|$ oraz obliczamy ze wzoru

$$|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Kierunek wyznaczony jest przez cosinusy kątów jakie tworzy wektor z osiami układu kartezjańskiego $Oxyz$. Mamy odpowiednio

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{|\overrightarrow{P_1P_2}|}, \qquad \cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{|\overrightarrow{P_1P_2}|}, \qquad \cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{|\overrightarrow{P_1P_2}|},$$

gdzie $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Są to tzw. *cosinusy kierunkowe* wektora. Można rozpatrywać wektory nie posiadające punktu zaczepienia, ale jedynie wspomniane trzy cechy. Wektory takie nazywamy wektorami *swobodnymi* oraz oznaczamy

$$\vec{a} = [a_x, a_y, a_z]$$

gdzie a_x, a_y, a_z są współrzędnymi wektora. Długością wektora $\vec{a}$ jest

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

W układzie kartezjańskim prostokątnym definiujemy trzy wektory, zwane *wersorami*, umieszczone odpowiednio na osiach Ox, Oy, Oz i zaczepione w początku układu współrzędnych. Są to wektory

$$\vec{i} = [1, 0, 0], \vec{j} = [0, 1, 0], \vec{k} = [0, 0, 1]$$

każdy o długości równej 1. Wektory takie są wzajemnie prostopadłe. Każdy wektor swobodny można zapisać za pomocą wersorów w postaci sumy

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

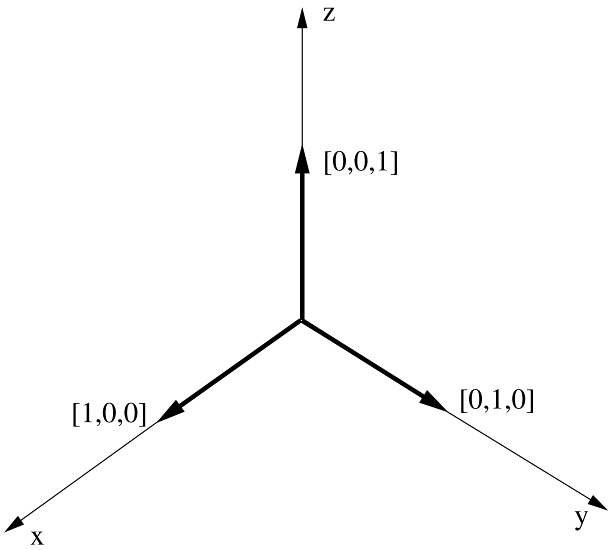
Działania na wektorach wygodnie jest zdefiniować dla wektora swobodnego. Rozpatrzmy dwa niezerowe wektory $\vec{a} = [a_x, a_y, a_z], \vec{b} = [b_x, b_y, b_z]$ wówczas określamy:

a) Równość wektorów $\vec{a} = \vec{b}$ jest równoważna warunkowi

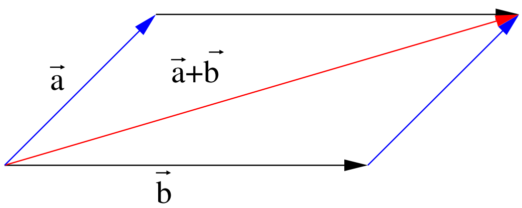
$$a_x = b_x, \quad a_y = b_y, \quad a_z = b_z$$

b) Suma wektorów $\vec{a} + \vec{b}$ zdefiniowana jest wzorem

$$\vec{a} + \vec{b} = [a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z]$$



Rysunek 10.1: Wersory układu współrzędnych w $\mathbb{R}^3$



Rysunek 10.2: Suma wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$

c) Mnożenie wektora przez liczbę $\lambda\vec{a}$ zdefiniowana jest wzorem

$$\lambda\vec{a} = [\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z]$$

d) *Iloczyn skalarny* wektorów $\vec{a} \circ \vec{b}$ zdefiniowany wzorem

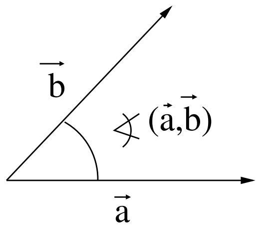
$$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

gdzie $\cos(\vec{a}, \vec{b})$ jest cosinusem kąta między wektorami $\vec{a}$ oraz $\vec{b}$. Iloczyn skalarny wektorów możemy równoważnie zdefiniować wzorem

$$\vec{a} \circ \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Wektory są prostopadłe gdy iloczyn skalarny tych wektorów jest równy 0, czyli

$$\vec{a} \perp \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \circ \vec{b} = 0$$



Rysunek 10.3: Iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$

Iloczyn skalarny wykorzystuje się do wyznaczania kąta między wektorami.

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

Długość rzutu wektora $\vec{a} = [a_x, a_y, a_z]$ na wektor $\vec{b} = [b_x, b_y, b_z]$ obliczamy ze wzoru

$$|\vec{a}_{\vec{b}}| = |\vec{a}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{b}|}$$

zaś rzut wektora $\vec{a} = [a_x, a_y, a_z]$ na wektor $\vec{b} = [b_x, b_y, b_z]$ obliczamy ze wzoru

$$\vec{a}_{\vec{b}} = |\vec{a}_{\vec{b}}| \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \vec{b} \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{b}|^2}$$

Iloczyn wektorowy wektorów $\vec{a} = [a_x, a_y, a_z], \vec{b} = [b_x, b_y, b_z]$ jest wektorem $\vec{c}$, wektor taki oznaczamy

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

prostopadłym do $\vec{a}$ oraz $\vec{b}$ o długości

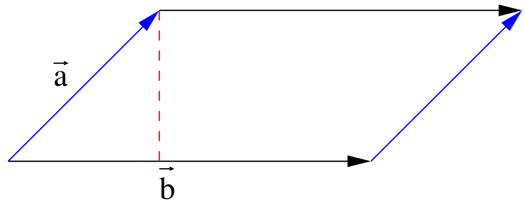
$$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})$$

oraz zwrocie takim, że wektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ mają orientację taką jak wybrany układ współrzędnych. Oznacza to, że wektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ można bez zmiany kolejności i kierunku nałorzyć na wersory wybranego układu współrzędnych. Zauważmy, że $||\vec{a}||\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})|$ jest polem powierzchni równoległoboku rozpiętego przez wektory $\vec{a}, \vec{b}$. Jeżeli wektory są równoległe to $\vec{a} \times \vec{b} = 0$. Iloczyn wektorowy wyznaczamy ze wzoru

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Chcąc uzyskać wektor $\vec{a} \times \vec{b}$ rozwijamy taki wyznacznik względem pierwszego wiersza. Łatwo sprawdzić, że jeżeli $\vec{a} || \vec{b}$ to

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$$



Rysunek 10.4: Pole równoległoboku rozpiętego przez wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$

Iloczyn mieszany trzech wektorów

$$\vec{a} = [a_x, a_y, a_z], \quad \vec{b} = [b_x, b_y, b_z], \quad \vec{c} = [c_x, c_y, c_z]$$

obliczamy ze wzorów

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Iloczyn mieszany zapisujemy $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. Można pokazać, że

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c} = \vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c})$$

Wartość bezwzględna iloczynu mieszanego jest objętością równoległościanu rozpiętego na wektorach $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Przykład 10.1. Obliczymy kąt między wektorami $\vec{a} = [1, 2, -1]$, $\vec{b} = [2, 1, 1]$ oraz długość rzutu wektora $\vec{b}$ na $\vec{a}$. Mamy

$$|\vec{a}| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}, \qquad |\vec{b}| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$

Stąd

$$\vec{b} \circ \vec{a} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = 3$$

oraz

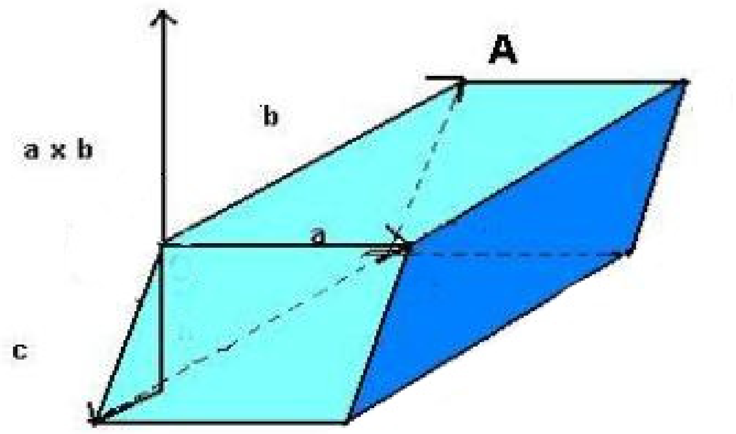
$$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

oznacza to, że $\alpha = \pi/3$. Długością rzutu jest zatem

$$|\vec{b}_{\vec{a}}| = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}|} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Przykład 10.2. Mając trzy wierzchołki $A(2, 2, 1), B(-1, 2, 2), C(-2, 0, 2)$ obliczymy pole trójkąta $\Delta(ABC)$ oraz długości boków.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= [-1-2, 2-2, 2-1] = [-3, 0, 1] & |\overrightarrow{AB}| &= \sqrt{10} \\ \overrightarrow{AC} &= [-2-2, 0-2, 2-1] = [-4, -2, 1] & |\overrightarrow{AC}| &= \sqrt{21} \\ \overrightarrow{BC} &= [-2+1, 0-2, 2-2] = [-1, -2, 0] & |\overrightarrow{BC}| &= \sqrt{5} \end{aligned}$$



Rysunek 10.5: Objętość prostopadłościanu rozpiętego przez wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$

Pole trójkąta jest równe połowie pola równoległoboku rozpiętego przez wektory $\overrightarrow{AB}$ oraz $\overrightarrow{AC}$. Pole równoległoboku jest równe $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$. Ponieważ

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 0 & 1 \\ -4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \left[\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}, (-1) \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} \right] = [2, -1, 6]$$

Stąd $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{4+1+36} = \sqrt{41}$. Pole trójkąta $\Delta(ABC)$ jest zatem równe $1/2\sqrt{41}$.

Przykład 10.3. Dane są trzy wektory $\vec{a} = [3, -2, 5], \vec{b} = [1, -1, 3], \vec{c} = [-2, 2, 1]$. Obliczymy objętość czworościanu oraz równoległościanu rozpiętego na tych wektorach. Objętość równoległościanu wynosi

$$|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = |\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix}| = |-7| = 7$$

Objętość czworościanu wynosi $1/6|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = 7/6$.

Przykład 10.4. Znaleźć wektor $\vec{c} = [c_x, c_y, c_z]$ o długości 1 oraz prostopadły do wektorów $\vec{a} = [1, 1, -1]$, $\vec{b} = [\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}]$. Wyznaczmy dowolny wektor prostopadły do $\vec{a}$ oraz $\vec{b}$ np. $\vec{a} \times \vec{b}$ mamy

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = [\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, -\sqrt{2}]$$

obliczmy $|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{2+8+2} = \sqrt{2}\sqrt{6}$. Wektor $(\vec{a} \times \vec{b})/(|\vec{a} \times \vec{b}|)$ ma długość 1. Stąd poszukiwanym wektorem jest

$$\vec{c} = \frac{1}{|\vec{a} \times \vec{b}|}\vec{a} \times \vec{b} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{6}}[\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, -\sqrt{2}] = \left[\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right]$$

lub wektor o przeciwnym zwrocie tzn.

$$-\vec{c} = \left[-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right]$$