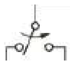
stany nieustalone - stany po przełączeniu

1. **Identyfikacja problemu** = po czym poznać, że zadanie trzeba rozwiązać tą metodą:

- w zadaniu jest wyraźnie zaznaczony "stan nieustalony" lub "po przełączeniu" lub "po zwarciu" lub "po rozwarciu" itp.
- na schemacie układu jest element oznaczający przełącznik czy też włącznik
  a. przełącznik

      - przełącza jedną gałąź obwodu na drugą.
     Przed przełączeniem prąd płynie w gałęzi zwartej, nie płynie w gałęzi rozwartej.
     Po przełączeniu - odwrotnie
  b. włącznik

      - włącza oczko/oczka, w których się znajduje
     Przed przełączeniem prąd nie płynie w oczku/oczkach, w których znajduje się włącznik.
     Po przełączeniu prąd płynie w oczku/oczkach, w których znajduje włącznik
  c. wyłącznik

      - wyłącza oczko/oczka, w których się znajduje
     Działa odwrotnie jak włącznik

Rozwiązanie

2. Określenie stanu ustalonego początkowego (przed przełączeniem)

1. W zależności od rodzaju przełącznika ustalamy, w których gałęziach prąd nie płynie - przyjmujemy tam I = 0
2. Sprawdzamy liczbę elementów reaktancyjnych (cewki i kondensatory)
3. Rozwiązujemy standardowe zadanko na policzenie prądów i napięć w obwodzie w stanie ustalonym, przy czym <u>konieczne do policzenia</u> są tylko elementy reaktancyjne w obwodzie (cewki i kondensatory):
   1. Napięcia i prądy źródłowe przekształcamy symbolicznie z postaci czasowych (u(t), i(t)) na postać symboliczną zespoloną
   2. Wyznaczamy impedancje cewek i kondensatorów
   3. Dowolną metodą (równania prądowe i napięciowe Kirchhoffa lub metoda Thevenina) wyliczamy:
      i. <u>prądy płynące przez cewki (I_L)</u>
      ii. <u>napięcia na kondensatorach (U_C)</u>
4. Policzone prądy płynące przez cewki i napięcia na kondensatorach zmieniamy z postaci symbolicznej zespolonej do postaci czasowej zgodnie ze wzorkiem (dla prądu w cewkach):
   $I = a + jb$ gdzie a to część rzeczywista, a b to część urojona liczby zespolonej
   wtedy:
   $i(t) = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{2} sin(\omega t + \psi)$
   gdzie:
   ω - pulsacja, którą mieliśmy podaną przy źródłach prądu lub napięcia w treści zadania
   ψ - kąt przesunięcia fazy, który wyznaczamy za pomocą znaków i wartości a i b i

arkustangensa zgodnie z tabelką:

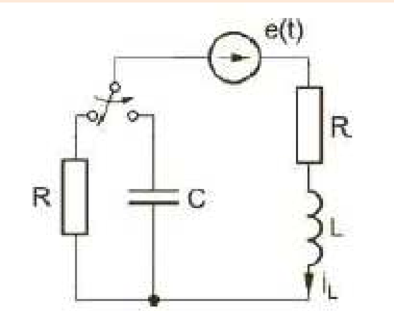
a	b	Wartość kąta
0	0	Kąt nieokreślony
+	0	$0°$
-	0	$180°$
+	dowolne	$arctg\left(\frac{b}{a}\right)$
-	dowolne	$180° + arctg\left(\frac{b}{a}\right)$
0	+	$90°$
0	-	$270°$

tak samo wyznaczamy funkcję czasową napięcia na kondensatorach, tylko I i i(t) zmieniamy na U i u(t).

Funkcje czasowe oznaczamy małymi literami i indeksami kolejnych elementów (np. $i_{L1}(t)$, $i_{L2}(t)$, $u_{C1}(t)$, $u_{C2}(t)$...)

5. Wyliczamy wartości początkowe przed przełączeniem układu - liczymy wartości wyznaczonych funkcji prądu w cewkach i napięcia na kondensatorach dla t = 0 (czyli do wzorków otrzymanych funkcji podstawiamy w miejsce t wartość równą 0).
   Tak policzone wartości oznaczamy jako wartości w punkcie 0^-(minusik oznacza "chwilunia przed przełączeniem"):
   (np. $i_{L1}(0^-)$, $i_{L2}(0^-)$, $u_{C1}(0^-)$, $u_{C2}(0^-)$...)

Przykład

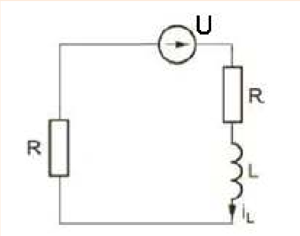


R=2Ω , L=1H, C=1/4F,

$e(t) = 10\sqrt{2}\sin(4t + 45°)$

1. W tym przypadku mamy przełącznik, który przed przełączeniem włącza gałąź z rezystorem, a wyłącza gałąź z kondensatorem (czyli I_C=0)
2. Mamy tu dwa elementy reaktancyjne - cewkę i kondensator - będziemy musieli zatem wyznaczyć dwa warunki początkowe: prąd w cewce L i napięcie na kondensatorze C
3. Przekształcenia symboliczne:
   - napięcie źródłowe: $U = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{2}}e^{j45°} = 10(cos45° + jsin45°) = 10\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 5\sqrt{2}(1+j)$
   - pulsacja: $\omega = 4$
   - impedancja kondensatora: $Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j4 \cdot 0.25} = -j$
   - impedancja cewki: $Z_L = j\omega L = 4j$

Liczymy prąd płynący przez cewkę L. Dla ułatwienia gałąź z kondensatorem można całkowicie pominąć, bo jest odłączona i nie płynie przez nią prąd:



Zgodnie z równaniem napięciowym dla tego oczka:

$U = U_R + U_L + U_R$

po wstawieniu impedancji i prądu za napięcia:

$U = I_L Z_L + 2I_L R$

wyznaczamy I_L

$$I_L = \frac{U}{Z_L + 2R}$$

podstawiamy dane i liczymy:

$$I_L = \frac{5\sqrt{2}(1+j)}{4j + 2\cdot 2} = \frac{5\sqrt{2}(1+j)}{4j+4} = \frac{5\sqrt{2}}{4}$$

teraz trzeba otrzymaną liczbę zespoloną przekształcić do postaci funkcji czasowej - w tym celu musimy zmienić postać liczby zespolonej z algebraicznej (*z=a+jb*) na trygonometryczną (*z=|z|(cosf+jsinf)*) zgodnie ze wzrokami z p.4.

W powyższym przypadku jest prościej, bo wyszła nam liczba rzeczywista, więc b = 0

moduł:

$$|I_L| = \frac{5\sqrt{2}}{4}$$

kąt:

$\psi = 0°$ bo I_L to liczba rzeczywista dodatnia

Zatem zbierając te dane i pulsację z treści zadania można wypisać prąd płynący przez cewkę L w stanie ustalonym przed przełączeniem w postaci funkcji czasu:

$$i_L(t) = |I_L| \cdot \sqrt{2} sin(\omega t + \psi) = \frac{5\sqrt{2}}{4} \cdot \sqrt{2} sin(4t + 0°) = \frac{5}{2} sin(4t)$$

Pozostaje wyznaczyć napięcie na kondensatorze - ale to jest równe 0, bo kondensator znajduje się na niepodłączonej gałęzi. Czyli wartość symboliczna napięcia jest równa:

$U_C = 0$

i z tego wynika, że funkcja czasowa teżjest równa 0

$u_C(t) = 0$

5. Mamy zatem już wszystkie funkcje czasowe - liczymy na ich podstawie wartości początkowe przed przełączeniem podstawiając do wzorków funkcji 0 w miejsce t:

$$i_L(0^-) = \frac{5}{2} sin(4\cdot 0) = \frac{5}{2} sin(0) = 0$$

$u_C(0^-) = 0$

3. Określenie stanu ustalonego po przełączeniu

1. Wykonujemy przełączenie zgodnie ze schematem, a dokładnie ze strzałką oznaczającą przełączenie na przełączniku na oryginalnym schemacie obwodu.
   I teraz postępujemy w zasadzie tak samo, jak w poprzednim etapie

2. Ustalamy, w których gałęziach prąd nie płynie - przyjmujemy tam I = 0
3. Rozwiązujemy standardowe zadanko na policzenie prądów i napięć w obwodzie w stanie ustalonym, przy czym konieczne do policzenia są tylko elementy reaktancyjne w obwodzie (cewki i kondensatory):
    1. Napięcia i prądy źródłowe przekształcamy symbolicznie z postaci czasowych (u(t), i(t)) na postać symboliczną zespoloną - **korzystamy z wyliczeń** z poprzedniego etapu, bo nic się nie zmieniło
    2. Wyznaczamy impedancje cewek i kondensatorów **- korzystamy z wyliczeń** z poprzedniego etapu, bo nic się nie zmieniło
    3. Dowolną metodą (równania prądowe i napięciowe Kirchhoffa lub metoda Thevenina) wyliczamy - tu **trzeba liczyć na nowo**, bo obwód jest jużinny (po przełączeniu):
        i. prądy płynące przez cewki (I_{Lu})
        ii. napięcia na kondensatorach (U_{Cu})

    tym razem dodajemy w indeksie oznaczenie "u", co ma odróżnić te wyliczenia od wyliczeń z poprzedniego etapu (małe "u" w indeksie ma oznaczać stan ustalony po przełączeniu)
4. Policzone prądy płynące przez cewki i napięcia na kondensatorach zmieniamy z postaci symbolicznej zespolonej do postaci czasowej zgodnie ze wzorkiem (dla prądu w cewkach):
   $I = a + jb$ gdzie a to część rzeczywista, a b to część urojona liczby zespolonej
   wtedy:
   $i(t) = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{2} sin(\omega t + \psi)$
   gdzie:
   ω - pulsacja, którą mieliśmy podaną przy źródłach prądu lub napięcia w treści zadania
   ψ - kąt przesunięcia fazy, który wyznaczamy za pomocą znaków i wartości a i b i arkustangensa zgodnie z tabelką:

a	b	Wartość kąta
0	0	Kąt nieokreślony
+	0	$0°$
-	0	$180°$
+	dowolne	$arctg\left(\frac{b}{a}\right)$
-	dowolne	$180° + arctg\left(\frac{b}{a}\right)$
0	+	$90°$
0	-	$270°$

   tak samo wyznaczamy funkcję czasową napięcia na kondensatorach, tylko I i i(t) zmieniamy na U i u(t).
   Funkcje czasowe oznaczamy małymi literami i indeksami kolejnych elementów (np. $i_{L1u}(t)$, $i_{L2u}(t)$, $u_{C1u}(t)$, $u_{C2u}(t)$...)

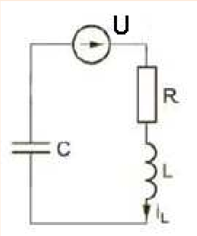
tym razem dodajemy w indeksie oznaczenie "u", co ma odróżnić te wyliczenia od wyliczeń z poprzedniego etapu (małe "u" w indeksie ma oznaczać stan ustalony po przełączeniu)

5. Wyliczamy wartości początkowe po przełączeniu układu - liczymy wartości wyznaczonych funkcji w stanie ustalonym po przełączeniu prądu w cewkach i napięcia na kondensatorach dla t = 0 (czyli do wzorków otrzymanych funkcji podstawiamy w miejsce

t wartość równą 0).
Tak policzone wartości oznaczamy jako wartości w punkcie 0^+ (plusik oznacza "chwilunia po przełączeniu"):
(np. $i_{L1}(0^+)$, $i_{L2}(0^+)$, $u_{C1}(0^+)$, $u_{C2}(0^+)$...)

Przykład c.d.

1. Po przełączeniu włączona jest gałąź z kondensatorem, a wyłączona gałąź z rezystorem (czyli I_R=0)
2. Dla ułatwienia przerysowujemy układ uwzględniając przełączenie - czyli pomijamy gałąź z rezystorem, przez który nie płynie teraz żaden prąd:



3. Rozwiązanie znów jest bardzo proste - jest tylko jedno oczko, dla którego wypisujemy równanie napięciowe (dla odróżnienia od stanu przed przełączeniem dopisujemy w indeksie u od "ustalony"):

$$U = U_{Ru} + U_{Lu} + U_{Cu}$$

po wstawieniu impedancji i prądu za napięcia (oczywiście nie ma sensu dopisywać u w indeksie impedancji, bo one są niezmienne):

$$U = I_{Lu}Z_L + I_{Lu}R + I_{Lu}Z_C$$

wyznaczamy I_{Lu}

$$I_{Lu} = \frac{U}{Z_L + R + Z_C}$$

podstawiamy dane i liczymy:

$$I_{Lu} = \frac{5\sqrt{2}(1+j)}{4j+2-j} = \frac{5\sqrt{2}(1+j)}{3j+2} = \frac{25\sqrt{2}}{13} - j\frac{5\sqrt{2}}{13} = 2.72 - 0.54j$$

Prąd cewki już mamy, teraz liczymy napięcie na kondensatorze (z prawa Ohma):

$$U_{Cu} = I_{Lu}Z_C = (2.72 - 0.54j)(-j) = -0.54 - 2.72j$$

4. Wyznaczamy funkcje czasowe:
Najpierw prąd cewki:

$$I_{Lu} = 2.72 - 0.54j$$

wyznaczamy moduł tej liczby:

$$|I_{Lu}| = \sqrt{2.72^2 + 0.54^2} = 2.77$$

wyznaczamy kąt:

$$a = 2.72$$
$$b = -0.54$$

zatem zgodnie z tabelką kąt jest równy:

$$\psi = arctg\left(\frac{b}{a}\right)$$

wstawiamy dane:

$$\psi = arctg\left(\frac{-0.54}{2.72}\right) = -11.2°$$

UWAGA! Oczywiście Pan Kalkulator potrafi bardzo szybko przekształcić postać algebraiczną liczby zespolonej na postać trygonometryczną:

wystarczy 1.wpisać liczbę zespoloną 2.wcisnąć po kolei klawisze: $\boxed{\textit{SHIFT}}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\textit{S<=>D}}$ *- i mamy w pierwszym rzędzie moduł, a w drugim kąt*

czyli funkcja czasowa prądu cewki po przełączeniu w stanie ustalonym wynosi:

$i_{Lu}(t) = |I_{Lu}| \cdot \sqrt{2} sin(\omega t + \psi) = 2.77 \cdot \sqrt{2}\, sin(4t - 11.2°) = 3.92\, sin(4t - 11.2°)$

podobne obliczenia dla napięcia na kondensatorze:

$U_{Cu} = -0.54 - 2.72j$

$|U_{Cu}| = 2.77$

$\psi = -101.2°$

czyli funkcja czasowa napięcia kondensatora po przełączeniu w stanie ustalonym wynosi:

$u_{Cu}(t) = |U_{Cu}| \cdot \sqrt{2} sin(\omega t + \psi) = 2.77 \cdot \sqrt{2}\, sin(4t - 101.2°) = 3.92\, sin(4t - 101.2°)$

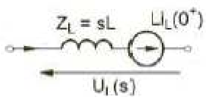
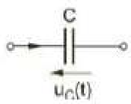
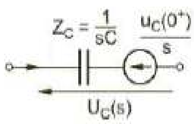
5. Wyznaczamy wartości początkowe po przełączeniu - podstawiamy do wyznaczonych funkcji 0 w miejsce t:

$i_{Lu}(0^+) = 3.92\, sin(4 \cdot 0 - 11.2°) = 3.92\, sin(-11.2°) = -0.76$

$u_{Cu}(0^+) = 3.92\, sin(4 \cdot 0 - 101.2°) = 3.92\, sin(-101.2°) = -3.85$

4. Określenie stanu przejściowego po przełączeniu

1. Korzystamy ze schematu obwodu po przełączeniu, który przerysowaliśmy bez uwzględnienia nieaktywnych gałęzi (przez które nie płynie żaden prąd) w poprzednim etapie.
2. Stosujemy przekształcenie operatorowe, które różni się od stosowanego w stanie ustalonym przekształcenia symbolicznego:
    1. Zastępujemy źródła napięć i prądów wymuszających (ale nie sterowanych):
        - zamiast źródła napięcia robimy zwarcie (połączenie)
        - zamiast źródła prądu robimy rozwarcie (przerwę)
    2. Określamy warunki początkowe składowych przejściowych dla elementów reaktancyjnych (cewek i kondensatorów) na podstawie wartości początkowych stanów ustalonych przed i po przełączeniu (które obliczyliśmy na końcu etapów 2 i 3) zgodnie ze wzorkami:
       $i_{Lp}(0^+) = i_L(0^-) - i_{Lu}(0^+)$
       $u_{Cp}(0^+) = u_C(0^-) - u_{Cu}(0^+)$
       gdzie p dopisane na końcu indeksu oznacza stan przejściowy po przełączeniu (stan przejściowy złożony ze stanem ustalonym stanowi stan nieustalony, który szukamy)
       wzorki stosujemy dla wszystkich cewek i kondensatorów
    3. Zastępujemy elementy reaktancyjne na schemacie obwodu zgodnie z poniższą tabelką:

	Przed przekształceniem	Po przekształceniu operatorowym	
Element	Schemat obwodu	Schemat obwodu	Wartość impedancji operatorowej na elemencie oraz wartość napięcia na dodatkowym źródle
Cewka			Impedancja oper. $$Z_L(s) = sL$$ Napięcie dod. źródła (pod warunkiem, że wyliczony wcześniej $i_L(0^+)$ wyszedł różny od 0) $$u(s) = Li_{Lp}(0^+)$$ Uwaga - napięcie dodatkowego źródła jest skierowane zgodnie z płynącym przez cewkę prądem
Kondensator			Impedancja oper. $$Z_C(s) = \frac{1}{sC}$$ Napięcie dod. źródła (pod warunkiem, że wyliczony wcześniej $u_C(0^+)$ wyszedł różny od 0) $$u(s) = \frac{u_{Cp}(0^+)}{s}$$ Uwaga - napięcie dodatkowego źródła jest skierowane przeciwnie do płynącego przez kondensator prądu

    4. Przerysowujemy obwód zgodnie z wprowadzonymi przekształceniami

3. Rozwiązujemy standardowe zadanko na policzenie prądów i napięć w obwodzie w stanie ustalonym, przy czym konieczne do policzenia są tylko elementy reaktancyjne w obwodzie (cewki i kondensatory).
   UWAGA: należy pamiętać, że działamy na wielkościach operatorowych, czyli wszystkie prądy i napięcia piszemy dużą literą i jako funkcje operatora s (z dodanym po symbolu i indeksie nawiasem z s w środku: $I_L(s)$, $U_C(s)$, $I_{L1}(s)$, $U_{C1}(s)$, ...)
4. Szukane prądy cewek i napięcia kondensatorów będą funkcjami zależnymi od operatora s. Należy je przekształcić za pomocą transformaty odwrotnej Laplace'a do postaci funkcji czasowej. Ogólnie funkcje te będą miały postać funkcji wymiernych zespolonych (dzielenie dwóch wielomianów przez siebie):
   $$F(s) = \frac{L(s)}{M(s)}$$
   Funkcja F(s) dla cewki będzie równa $I_L(s)$, dla kondensatora będzie równa $U_C(s)$

   Są dwie metody (tak jak w liczeniu odpowiedzi skokowej i impulsowej przy transmitancji):
    1. metoda tabelkowa
       przekształcamy wzór na operatorową funkcję prądu cewki lub napięcia kondensatora tak, by odpowiadała któremuś ze wzorów z drugiej kolumny tabeli transformat Laplace'a (poniżej). Jeśli funkcja ma bardziej skomplikowany mianownik $M(s)$ niż podane w tabelkach, to należy znaleźć jego miejsca zerowe i rozdzielić go na prostsze ułamki.

Funkcja czasu - f(t)	Funkcja operatorowa - F(s)
δ(t) - delta Diraca	1
1(t) - funkcja skokowa	s
t	$\frac{1}{s^2}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s+\alpha}$
$sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$e^{-\alpha t}sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$
$e^{-\alpha t}cos(\omega t)$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$

2. metoda residuów:
   - znajdujemy wszystkie bieguny (miejsca zerowe mianownika $M(s)$) i ich krotności
   - przemnażamy funkcję $F(s)$ przez e^{st} i dla takiej funkcji liczymy residua dla wszystkich znalezionych biegunów
   - funkcja czasowa to suma wszystkich znalezionych residuów:

     dla prądu cewki:

     $$i_{Lp}(t) = \sum_{i=1}^{n} res_{s=s_i}(I_L(s)e^{st})$$

     dla prądu cewki:

     $$u_{Cp}(t) = \sum_{i=1}^{n} res_{s=s_i}(U_C(s)e^{st})$$

Przykład c.d.

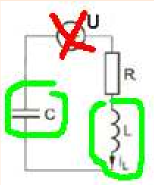
1. Mamy dwa elementy reaktancyjne, liczymy dla nich wartości początkowe prądu (cewka) i napięcia (kondensator):

$i_{Lp}(0^+) = i_L(0^-) - i_{Lu}(0^+) = 0 - (-0.76) = 0.76$

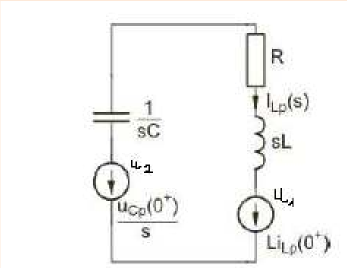
$u_{Cp}(0^+) = u_C(0^-) - u_{Cu}(0^+) = 0 - (-3.85) = 3.85$

warunki początkowe dla cewki i dla kondensatora wyszły niezerowe, więc zostaną one zastąpione wielkościami operatorowymi z dodanymi własnymi źródłami napięcia.

W obwodzie było też jedno źródło napięcia, które po przekształceniu operatorowym zmieni się w zwykłe zwarcie:



2. Obwód po wprowadzeniu wszystkich przekształceń ma postać:



Impedancje operatorowe elementów:

kondensator:

$$Z_C(s) = \frac{1}{sC}$$

cewka:

$$Z_L(s) = sL$$

rezystor pozostaje bez zmian

dodatkowe źródła napięcia, które pojawiły się w wyniku przekształcenia operatorowego cewki i kondensatora:

dla cewki:

$$u_1(s) = Li_{Lp}(0^+)$$

dla kondensatora

$$u_2(s) = \frac{u_{Cp}(0^+)}{s}$$

Wyznaczamy dokładne wartości tych wielkości:

$$Z_C(s) = \frac{1}{s \cdot 0.25} = \frac{4}{s}$$

$$Z_L(s) = s \cdot 1 = s$$

$$u_1(s) = Li_{Lu}(0^+) = 1 \cdot 0.76 = 0.76$$

$$u_2(s) = \frac{u_{Cp}(0^+)}{s} = \frac{3.85}{s}$$

3. Mamy gotowy obwód i wyznaczone wielkości operatorowe - rozwiązujemy zwykłe zadanko.

Wyznaczamy prąd na cewce i napięcie na kondensatorze - pamiętając, że teraz wszystkie te wielkości są funkcjami od operatora s (trzeba dopisywać nawiasy z s w środku)

Zadanie jest proste - w obwodzie jest tylko jedno oczko. Równanie napięciowe dla tego oczka:

$$-U_R(s) - U_L(s) + u_1(s) - u_2(s) - U_C(s) = 0$$

wstawiamy wzory na $u_1(s)$, $u_2(s)$ oraz rozpisujemy napięcia na elementach zgodnie z prawem Ohma i wartościami operatorowych impedancji:

$$-I_{Lp}(s) \cdot R - I_{Lp}(s) \cdot Z_L(s) + 0.76 - \frac{3.85}{s} - I_{Lp}(s) \cdot Z_C(s) = 0$$

$$-I_{Lp}(s) \cdot 2 - I_{Lp}(s) \cdot s + 0.76 - \frac{3.85}{s} - I_{Lp}(s) \cdot \frac{4}{s} = 0$$

Wyznaczamy $I_{Lp}(s)$ w zależności od s:

$$-I_{Lp}(s)\left(2 + s + \frac{4}{s}\right) + 0.76 - \frac{3.85}{s} = 0$$

$I_{Lp}(s)\left(2+s+\frac{4}{s}\right)=0.76-\frac{3.85}{s}$

$$I_{Lp}(s)=\frac{0.76-\frac{3.85}{s}}{2+s+\frac{4}{s}}$$

mnożymy licznik i mianownik przez s, żeby pozbyć się ułamków piętrowych:

$$I_{Lp}(s)=\frac{\left(0.76-\frac{3.85}{s}\right)s}{\left(2+s+\frac{4}{s}\right)s}=\frac{0.76s-3.85}{s^2+2s+4}$$

Teraz wyznaczamy funkcję operatorową stanu przejściowego po przełączeniu dla napięcia na kondensatorze - zgodnie z prawem Ohma:

$$U_{Cp}(s)=I_{Lp}(s)\cdot Z_C(s)=\frac{0.76s-3.85}{s^2+2s+4}\cdot\frac{4}{s}=\frac{3.04s-15.4}{s(s^2+2s+4)}$$

Teraz trzeba wykonać transformatę odwrotną na uzyskanych wynikach, by dostać funkcje czasowe stanu przejściowego.

Sposób 1 - tabelka.

Weźmy funkcję $I_{Lp}(s)=\frac{0.76s-3.85}{s^2+2s+4}$.

Widać, że jest ona podobna do transformaty $\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$ - bo w liczniku mamy s w pierwszej potędze, a w mianowniku s w drugiej potędze. Teraz trzeba to tylko przekształcić tak, by nasza funkcja idealnie pasowała do schematu transformaty z tabelki. Musimy zwinąć s^2 w nawias. W tym celu sprawdzamy, co stoi przy s - dzielimy ten współczynnik przez 2 i wstawiamy razem z s w nawias i podnosimy do kwadratu: W naszym przypadku przy *s* stoi +2, więc w nawias wstawiamy +1. Rozpisujemy otrzymany nawias (wyliczamy kwadrat)

$(s+1)^2=s^2+2s+1$

Widać, że mamy wyrażenie, które jest bardzo podobne do mianownika naszej funkcji - różni się tylko stałą (u nas jest 1, w mianowniku funkcji jest 4 - wystarczy zatem dodać do naszego nawiasu 3 i będziemy mieć dokładnie to, co w mianowniku funkcji). Czyli:

$$I_{Lp}(s)=\frac{0.76s-3.85}{s^2+2s+4}=\frac{0.76s-3.85}{(s+1)^2+3}=\frac{0.76s-3.85}{(s+1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}$$

Teraz przez porównanie mianownika funkcji z mianownikiem schematu transformaty $\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$ możemy określić parametry:

$\alpha=1$

$\omega=\sqrt{3}$

Nie zgadza się jeszcze licznik. Przy *s* powinno stać 1, a jest 0.76. Dlatego wyciągamy 0.76 przed ułamek:

$$I_{Lp}(s)=0.76\frac{s-\frac{3.85}{0.76}}{(s+1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=0.76\frac{s-5.07}{(s+1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}$$

Nadal się nie zgadza, bo za *s* powinno być +1 a jest -5.07. Rozpisujemy zatem -5.07 na +1-6.07, a potem rozdzielamy na dwa ułamki:

$$I_{Lp}(s)=0.76\frac{s+1-6.07}{(s+1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=0.76\frac{s+1}{(s+1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}-0.76\frac{6.07}{(s+1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}$$

Pierwszy ułamek idealnie zgadza się z transformatą, natomiast drugi ułamek przypomina inny schemat transformaty: $\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$

Tylko, że na górze powinien być $\sqrt{3}$, a jest 6.07. Znów trzeba wyciągnąć odpowiednią liczbę tak, by dostać $\sqrt{3}$:

$$I_{Lp}(s) = 0.76\frac{s+1}{(s+1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} - 0.76\cdot\frac{6.07}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{(s+1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}$$
$$= 0.76\frac{s+1}{(s+1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} - 2.66\frac{\sqrt{3}}{(s+1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}$$

Możemy teraz skorzystać z transformaty odwrotnej, bo we wzorze mamy dokładne wzory transformat przemnożone przez stałe. Zatem funkcja czasowa ma postać:

$i_{Lp}(t) = 0.76e^{-1t}cos\left(\sqrt{3}t\right) - 2.66e^{-1t}sin\left(\sqrt{3}t\right)$

i w ten sposób dostaliśmy funkcję czasową na prąd płynący w cewce L w stanie przejściowym po przełączeniu.

Wyznaczenie funkcji czasowej napięcia kondensatora będzie bardziej skomplikowane, więc dam sobie spokój :D

Sposób 2 - residua.

Weźmy funkcję $I_{Lp}(s) = \frac{0.76s-3.85}{s^2+2s+4}$.

Znajdujemy miejsca zerowe mianownika i ich krotności:

$s^2 + 2s + 4 = 0$

Liczymy deltę:

$\Delta = 2^2 - 4\cdot 4 = -12$

A więc są dwa pierwiastki zespolone o krotności 1:

$s_1 = \frac{-2-\sqrt{-12}}{2} = -1 - j\sqrt{3}$

$s_2 = \frac{-2+\sqrt{-12}}{2} = -1 + j\sqrt{3}$

Funkcję możemy zapisać w postaci iloczynowej:

$$I_{Lp}(s) = \frac{0.76s-3.85}{\left(s-\left(-1-j\sqrt{3}\right)\right)\left(s-\left(-1+j\sqrt{3}\right)\right)} = \frac{0.76s-3.85}{\left(s+1+j\sqrt{3}\right)\left(s+1-j\sqrt{3}\right)}$$

Liczymy residua w tych punktach dla funkcji przemnożonej przez e^{st}, czyli dla $I_{Lp}(s)\cdot e^{st}$

dla s_1:

$$res_{s=-1-j\sqrt{3}}\left(I_{Lp}(s)\cdot e^{st}\right) = \lim_{s\to -1-j\sqrt{3}}\left(I_{Lp}(s)\left(s-\left(-1-j\sqrt{3}\right)\right)e^{st}\right)$$
$$= \lim_{s\to -1-j\sqrt{3}}\left(\frac{0.76s-3.85}{s+1-j\sqrt{3}}e^{st}\right) = \frac{0.76\left(-1-j\sqrt{3}\right)-3.85}{-1-j\sqrt{3}+1-j\sqrt{3}}e^{\left(-1-j\sqrt{3}\right)t}$$
$$= \frac{-4.61-j1.32}{-2j\sqrt{3}}e^{-t}e^{-j\sqrt{3}t} = (0.38-j1.33)e^{-t}e^{-j\sqrt{3}t}$$

dla s_2:

$$res_{s=-1+j\sqrt{3}}\left(I_{Lp}(s)\cdot e^{st}\right) = \lim_{s\to -1+j\sqrt{3}}\left(I_{Lp}(s)\left(s-\left(-1+j\sqrt{3}\right)\right)e^{st}\right)$$
$$= \lim_{s\to -1+j\sqrt{3}}\left(\frac{0.76s-3.85}{s+1+j\sqrt{3}}e^{st}\right) = \frac{0.76\left(-1+j\sqrt{3}\right)-3.85}{-1+j\sqrt{3}+1+j\sqrt{3}}e^{\left(-1+j\sqrt{3}\right)t}$$
$$= \frac{-4.61+j1.32}{2j\sqrt{3}}e^{-t}e^{j\sqrt{3}t} = (0.38+j1.33)e^{-t}e^{j\sqrt{3}t}$$

Szukana funkcja jest sumą residuów:

$i_{Lp}(t) = (0.38-j1.33)e^{-t}e^{-j\sqrt{3}t} + (0.38+j1.33)e^{-t}e^{j\sqrt{3}t}$

Rozpisujemy e^{j} na sumę cosinusa i sinusa:

$$i_{Lp}(t) = (0.38 - j1.33)e^{-t}\left(cos(-\sqrt{3}t) + jsin(-\sqrt{3}t)\right) + (0.38 + j1.33)e^{-t}\left(cos(\sqrt{3}t) + jsin(\sqrt{3}t)\right)$$

Korzystamy z parzystości cosinusa i nieparzystości sinusa (czyli cos(-x)=cos(x) oraz sin(-x)=-sin(x)):

$$i_{Lp}(t) = (0.38 - j1.33)e^{-t}\left(cos(\sqrt{3}t) - jsin(\sqrt{3}t)\right) + (0.38 + j1.33)e^{-t}\left(cos(\sqrt{3}t) + jsin(\sqrt{3}t)\right)$$

Wymnażamy nawiasy z cosinusami i sinusami:

$$i_{Lp}(t) = (0.38 - j1.33)e^{-t}cos(\sqrt{3}t) - (0.38 - j1.33)e^{-t}jsin(\sqrt{3}t) + (0.38 + j1.33)e^{-t}cos(\sqrt{3}t) + (0.38 + j1.33)e^{-t}jsin(\sqrt{3}t)$$

Wymnażamy nawiasy z jsin:

$$i_{Lp}(t) = (0.38 - j1.33)e^{-t}cos(\sqrt{3}t) + (0.38 + j1.33)e^{-t}cos(\sqrt{3}t) - 0.38e^{-t}jsin(\sqrt{3}t) + j^2 1.33e^{-t}sin(\sqrt{3}t) + 0.38e^{-t}jsin(\sqrt{3}t) + j^2 1.33e^{-t}sin(\sqrt{3}t)$$

część urojona się uprości:

$$i_{Lp}(t) = (0.38 - j1.33)e^{-t}cos(\sqrt{3}t) + (0.38 + j1.33)e^{-t}cos(\sqrt{3}t) - 1.33e^{-t}sin(\sqrt{3}t) - 1.33e^{-t}sin(\sqrt{3}t)$$

Wymnażamy pozostałe nawiasy:

$$i_{Lp}(t) = 0.38e^{-t}cos(\sqrt{3}t) - j1.33e^{-t}cos(\sqrt{3}t) + 0.38e^{-t}cos(\sqrt{3}t) + j1.33e^{-t}cos(\sqrt{3}t) - 1.33e^{-t}sin(\sqrt{3}t) - 1.33e^{-t}sin(\sqrt{3}t)$$

Część urojona się znów uprości, resztę można dodać:

$$i_{Lp}(t) = 0.38e^{-t}cos(\sqrt{3}t) + 0.38e^{-t}cos(\sqrt{3}t) - 1.33e^{-t}sin(\sqrt{3}t) - 1.33e^{-t}sin(\sqrt{3}t)$$

$$i_{Lp}(t) = 0.76e^{-t}cos(\sqrt{3}t) - 2.66e^{-t}sin(\sqrt{3}t)$$

To samo, co sposobem tabelkowym - czyli ok.

5. Rozwiązanie całkowite - funkcje czasowe opisujące stan nieustalony po przełączeniu

1. Dodajemy policzone w etapie 3 i w etapie 4 funkcje czasowe dla wszystkich elementów reaktancyjnych (cewki i kondensatory):
   $i_L(t) = i_{Lu}(t) + i_{Lp}(t)$
   $u_C(t) = u_{Cu}(t) + u_{Cp}(t)$

Przykład c.d.

1. Zgodnie ze wzorkami sumujemy składową ustaloną ze składową przejściową:

$$i_L(t) = 3.92\,sin(4t - 11.2°) + 0.76e^{-t}cos(\sqrt{3}t) - 2.66e^{-t}sin(\sqrt{3}t)$$

i mamy wreszcie funkcję opisującą prąd na cewce w stanie nieustalonym po przełączeniu