## 6.2 Podstawowe metody całkowania

Znając podstawowe wzory na pochodne możemy wyprowadzić następujące wzory podstawowe na całki nieoznaczone

$$\int 0\,dx = 0 + C \qquad \int 1\,dx = x + C$$

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \quad n \in \mathbb{R}, n \neq 1 \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + C \qquad \int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad a \in \mathbb{R}_+, a \neq 1 \qquad \int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C \qquad \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arc\,tg} x + C$$

$$\int \sinh x\,dx = \cosh x + C \qquad \int \cosh x\,dx = \sinh x + C$$

Obliczając całki użyteczne okazują się następujące wzory:

1) *liniowość operacji całkowania* Jeśli $u(x), v(x)$ są funkcjami całkowalnymi, to

$$\int (au(x) + bv(x))\,dx = a\int u(x)\,dx + b\int v(x)\,dx$$

2) *wzór na całkowanie przez części* Jeśli $u(x), v(x)$ są funkcjami różniczkowalnymi, to

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx$$

3) *wzór na całkowanie przez podstawienie* Jeżeli $v$ jest funkcją różniczkowalną, $u$ jest funkcją całkowalną, to

$$\int u(v(x))v'(x)\,dx = \int u(t)\,dt, \quad t = v(x)$$

4) *Całkowanie funkcji wymiernych.* Funkcja wymierna ma postać

$$R(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$

gdzie $f(x)$ jest wielomianem stopnia $\deg f$, a $g$ jest wielomianem stopnia $\deg g$. Jeżeli $\deg f > \deg g$, to funkcja $R(x)$ ma przedstawienie (które możemy otrzymać przez dzielenie wielomianów)

$$R(x) = W(x) + \frac{L(x)}{M(x)}, \qquad \text{gdzie } \deg L < \deg M,$$

a $W(x)$ jest wielomianem. Wyrażenie $\frac{L(x)}{M(x)}$ można rozłożyć na *ułamki proste*, co ułatwia obliczanie całek z fukcji tej postaci (patrz Przykład 6.10).

Obliczając całki zawsze możemy sprawdzić poprawność obliczeń licząc pochodną otrzymanej w wyniku całkowania funkcji. Powinniśmy otrzymać funkcję podcałkową.

**Przykład 6.5.** Obliczymy całkę funkcji $f(x) = (2x^2 + 1)/x$

$$\int \frac{2x^2+1}{x}\,dx = 2\int x\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx = 2\frac{x^2}{2} + \ln|x| + C = x^2 + \ln|x| + C$$

**Przykład 6.6.** Całkując przez części obliczymy całkę funkcji $f(x) = \ln x$

$$\int \ln x\,dx = \int 1\cdot \ln x\,dx = \begin{vmatrix} u = \ln x & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{x} & v = x \end{vmatrix} = x\ln x - \int \frac{1}{x} x\,dx = x\ln x - x + C$$

**Przykład 6.7.** Obliczymy $\int e^x \cos x\,dx$. Całkując dwukrotnie przez części otrzymujemy

$$\int e^x \cos x\,dx = \begin{vmatrix} u = e^x & v' = \cos x \\ u' = e^x & v = \sin x \end{vmatrix} =$$

$$= e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx = \begin{vmatrix} u = e^x & v' = \sin x \\ u' = e^x & v = -\cos x \end{vmatrix} = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x\,dx$$

Stąd mamy

$$\int e^x \cos x\,dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x\,dx.$$

Skąd wyliczamy $\int e^x \cos x\,dx$. Dostajemy $\int e^x \cos x\,dx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C$.

**Przykład 6.8.** Całkując przez podstawienie obliczymy całkę funkcji $\operatorname{tg} x$.

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \begin{vmatrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x\,dx \end{vmatrix} = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + C = -\ln(\cos x) + C$$

Przyjęliśmy tutaj $u(t) = 1/t, v(x) = \sin x$. Złożoność niektórych funkcji wymaga czasami abyśmy stosowali wzory na całkowanie przez części lub przez podstawienie wielokrotnie.

**Przykład 6.9.** Obliczmy całkę funkcji $f(x) = 2x^5 e^{x^2}$. Stosujemy podstawienie $x^2 = t$

$$\int 2x^5 e^{x^2}\,dx = \begin{vmatrix} t = x^2 \\ dt = 2x\,dx \end{vmatrix} = \int t^2 e^t\,dt$$

Całkując następnie dwa razy przez części mamy

$$\int t^2 e^t\,dt = \begin{vmatrix} u = t^2 & v' = e^t \\ u' = 2t & v = e^t \end{vmatrix} =$$

$$= t^2 e^t - 2\int t e^t\,dt = \begin{vmatrix} u = t & v' = e^t \\ u' = 1 & v = e^t \end{vmatrix} = t^2 e^t - 2(te^t - \int e^t\,dt) = t^2 e^t - 2te^t - e^t + C$$

Stąd

$$\int 2x^5 e^{x^2}\,dx = x^4 e^{x^2} - 2x^2 e^{x^2} - e^{x^2} + C$$

W przypadku obliczania całek możemy napotkać na znaczne trudności w rachunkach.

Ponadto istnieją funkcje których całki istnieją ale nie są funkcjami elementarnymi. O tego typu całkach mówimy, że nie są elementarne. Oto przykłady całek nieelementarnych.

$$\int e^{-x^2}\,dx, \quad \int \frac{e^x}{x}\,dx, \quad \int \sin x^2\,dx, \quad \int \cos x^2\,dx.$$

Ogólnie sprawdzanie czy dana całka jest elementarna może być bardzo trudne i nie będziemy się tym tematem zajmować.

**Przykład 6.10.** Obliczyć całki z funkcji wymiernych

a) $\displaystyle\int \frac{2x-3}{(x-1)(x-2)}\,dx,$

b) $\displaystyle\int \frac{x}{(x-2)^3}\,dx,$

c) $\displaystyle\int \frac{L(x)}{ax^2+bx+c}\,dx,\quad$ gdzie $\Delta = b^2-4ac<0.$

*Rozwiązanie.* Rozkład na ułamki proste jest następujący

a) $\displaystyle\frac{2x-3}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2},$

b) $\displaystyle\frac{x}{(x-2)^3} = \frac{A}{(x-2)^3} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x-2},$

c) $\displaystyle\frac{L(x)}{ax^2+bx+c} = \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}.$

Aby obliczyć stałe rozkładu na ułamki proste, sprowadzamy prawe strony rozkładu do wspólnego mianownika a następnie porównujemy współczynniki w wielomianach stojących w licznikach obu stron. $\square$