

4.5 Ćwiczenia do samodzielnego rozwiązania

Ćwiczenie 4.1. Podać i naszkicować dziedzinę funkcji

a) $f(x, y) = \sqrt{1 - x - y}$,

b) $f(x, y) = \sqrt{\frac{1}{x^2 + (y-1)^2} - 1}$.

Odp. a) Punkty na i pod prostą $y = 1 - x$,
b) wnętrze okręgu o środku w punkcie $(0, 1)$ i promieniu $r = 1$ z wyjątkiem odcinka $x = 0$ i prostej $y = 1$.

Ćwiczenie 4.2. Wyznaczyć pochodne cząstkowe rzędu drugiego następujących funkcji.

a) $f(x, y) = x^2y + xy^2$.

Odp. $f_{xx} = y$, $f_{yy} = 2x$, $f_{xy} = f_{yx} = 2x + 2y$.

b) $f(x, y) = x^2 - y^2$.

Odp. $f_{xx} = 2$, $f_{yy} = -2$, $f_{xy} = f_{yx} = 0$.

c) $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$.

Odp. $f_{xx} = 2\cos(x^2 + y^2) - 4x^2\sin(x^2 + y^2)$,
 $f_{yy} = 2\cos(x^2 + y^2) - 4y^2\sin(x^2 + y^2)$, $f_{xy} = f_{yx} = -4xy\sin(x^2 + y^2)$.

d) $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$.

Odp. $f_{xx} = -\frac{2y}{(x+y)^3}$, $f_{yy} = \frac{2x}{(x+y)^3}$, $f_{xy} = f_{yx} = \frac{2x^2 - 2y^2}{(x+y)^4}$.