

## Wykład 10. Transmitancja operatorowa i charakterystyki częstotliwościowe obwodów

### Wstęp

W praktyce interesuje nas zwykle skończona liczba zmiennych wyjściowych obwodu (najczęściej jedna), w dodatku przy zerowych warunkach początkowych. W takim przypadku wygodnym narzędziem analizy jest pojęcie transmitancji operatorowej, charakteryzującej zachowanie się obwodu zarówno w stanie nieustalonym (przy zerowych warunkach początkowych) jak i ustalonym przy wymuszeniu sinusoidalnym o zmiennej częstotliwości (tzw. charakterystyki częstotliwościowe).

Na tym wykładzie wprowadzimy różne definicje transmitancji operatorowej obwodu, oraz metody ich wyznaczania wykorzystując pojęcie impedancji operatorowej elementów. Poznamy związek transmitancji operatorowej z opisem stanowym obwodu. Wprowadzone zostaną definicje odpowiedzi impulsowej i skokowej oraz ich związek z transmitancją operatorową. Na podstawie opisu operatorowego i odpowiedzi impulsowej zostanie wyjaśnione pojęcie stabilności obwodu i udowodniony związek stabilności z położeniem biegunów na płaszczyźnie zmiennej zespolonej. W praktyce bardzo ważne informacje zawarte są w charakterystykach częstotliwościowych obwodu, odpowiadających stanowi ustalonemu przy wymuszeniu sinusoidalnym. Podamy sposób ich wyznaczania na podstawie transmitancji operatorowej.



### 10.1 Definicja transmitancji operatorowej

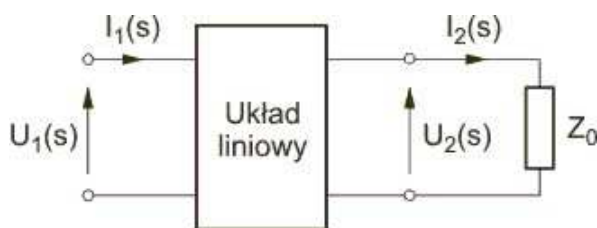
Weźmy pod uwagę obwód złożony z dowolnych elementów pasywnych RLCM i źródeł sterowanych nie zawierających wewnątrz żadnych źródeł niezależnych. Wyróżnimy w tym obwodzie jedną parę zacisków uważanych za wejściowe, do których przykładamy źródło wymuszające oraz drugą parę zacisków wyjściowych, z których zbieramy prąd (zaciski zwarte) lub napięcie (zaciski rozwarte).

Transmitancja operatorowa określa związek między transformatą operatorową sygnału wyjściowego (odpowiedzi), którą tutaj oznaczmy w ogólności przez  $Y(s)$  oraz transformatą operatorową wymuszenia (sygnału wejściowego), oznaczoną ogólnie przez  $X(s)$ . Transmitancją operatorową nazywać będziemy stosunek transformaty sygnału wyjściowego (prądu lub napięcia) do transformaty sygnału wejściowego układu (źródła napięciowego lub prądowego) przy zerowych warunkach początkowych

$$T(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad (10.1)$$

W zależności od sygnału wejściowego i wyjściowego układu wyróżnić można cztery rodzaje transmitancji operatorowych: transmitancja napięciowa, prądowa, napięciowo-prądowa i prądowo-napięciowa.

Przyjmijmy oznaczenie bramy wejściowej cyfrą 1 a bramy wyjściowej cyfrą 2 jak to pokazano na rys. 10.1.



Rys. 10.1. Oznaczenie układu przy definicji transmitancji

### 10.1.1 Transmitancja napięciowa (napięciowo-napięciowa)

Transmitancja napięciowa dotyczy stosunku dwu napięć zewnętrznych układu. Sygnałem wejściowym jest źródło napięciowe, a sygnałem wyjściowym napięcie na dowolnym elemencie uznane za napięcie wyjściowe. Jest ona definiowana w postaci

$$T_u(s) = \left. \frac{U_2(s)}{U_1(s)} \right|_{I_2=0} \quad (10.2)$$

W definicji transmitancji napięciowej zakłada się, że napięcie wyjściowe układu mierzone jest w stanie jałowym tzn. przy  $Z_0 = \infty$  (bez obciążenia zacisków wyjściowych,  $I_2=0$ ).

### 10.1.2 Transmitancja prądowa (prądowo-prądowa)

Transmitancja prądowa dotyczy stosunku dwu prądów zewnętrznych układu, z których jeden jest prądem wymuszającym a drugi prądem gałęzi uznanym za prąd wyjściowy i jest definiowana w postaci

$$T_i(s) = \left. \frac{I_2(s)}{I_1(s)} \right|_{U_2=0} \quad (10.3)$$

W definicji tej transmitancji zakłada się, że prąd wyjściowy  $I_2$  jest mierzony w części bezimpedancyjnej gałęzi wyjściowej  $Z_0 = 0$  odpowiadającej  $U_2 = 0$ .

### 10.1.3 Transmitancja napięciowo-prądowa

Transmitancja napięciowo-prądowa przyjmuje napięcie na dowolnym elemencie obwodu jako sygnał wyjściowy  $Y(s)$ . Sygnałem wejściowym  $X(s)$  jest wymuszenie prądowe. Jest zatem zdefiniowana w postaci

$$T_{ui}(s) = \left. \frac{U_2(s)}{I_1(s)} \right|_{I_2=0} \quad (10.4)$$

Napięcie  $U_2$  mierzone jest w stanie jałowym ( $Z_0 = \infty$ ) na wyjściu obwodu.

### 10.1.4 Transmitancja prądowo-napięciowa

Transmitancję prądowo-napięciową definiuje się jako stosunek prądu wyjściowego do napięcia wejściowego (sygnałem wejściowym  $X(s)$  jest napięcie wymuszające a sygnałem wyjściowym  $Y(s)$  prąd dowolnego elementu w obwodzie). Przy takiej definicji zakłada się, że napięcie wyjściowe  $U_2=0$ .

$$T_{iu}(s) = \left. \frac{I_2(s)}{U_1(s)} \right|_{U_2=0} \quad (10.5)$$

Szczególnym przypadkiem transmitancji napięciowo-prądowej jest **impedancja wejściowa** układu, w definicji której przyjmuje się, że prąd i napięcie dotyczą tej samej bramy wejściowej. Jej definicja jest przyjmowana w postaci

$$Z_{we}(s) = \frac{U_1(s)}{I_1(s)} \quad (10.6)$$

Definicja impedancji wejściowej układu zakłada dowolny stan obciążenia  $Z_0$ . Należy jednak zwrócić uwagę, że każda zmiana impedancji obciążenia zmienia impedancję wejściową. Stąd definiując impedancję wejściową należy sprecyzować, przy jakim obciążeniu jest ona wyznaczana.

W identyczny sposób można zdefiniować impedancję wyjściową, w której prąd i napięcie dotyczą bramy wyjściowej układu. Odwrotność impedancji wejściowej (lub wyjściowej) nazywana jest **admitancją wejściową (wyjściową)**, która może być zinterpretowana jako szczególny przypadek transmitancji prądowo-napięciowej.

## 10.2 Transmitancja operatorowa obwodów RLC

Przy wyznaczaniu transmitancji operatorowej obwodu zawierającego rezystancje, indukcyjności, indukcyjności sprzężone i pojemności wykorzystuje się model operatorowy poszczególnych elementów  $R$ ,  $L$ ,  $C$  i  $M$  wprowadzony wcześniej. Przy założeniu zerowych warunków początkowych dla indukcyjności i pojemności modele tych elementów nie zawierają źródeł a jedynie impedancje operatorowe  $Z(s)$ . Zestaw impedancji operatorowych dla elementów pasywnych przedstawiono w tablicy 10.1

Tablica 10.1 Impedancje operatorowe przyporządkowane elementom pasywnym

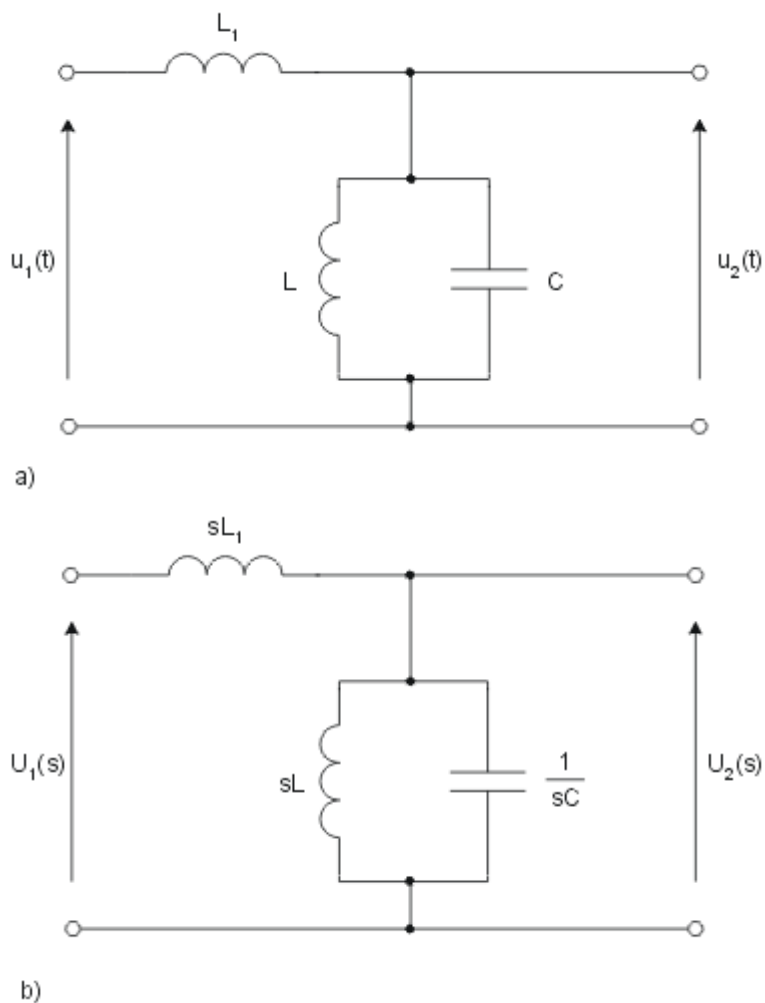
Element	Impedancja operatorowa
Rezystancja $R$	$Z_R = R$
Indukcyjność własna $L$	$Z_L = sL$
Indukcyjność wzajemna $\pm M$	$Z_M = \pm sM$
Pojemność $C$	$Z_C = \frac{1}{sC}$

Dla obwodów pasywnych zawierających elementy  $R$ ,  $L$ ,  $C$  i  $M$  obliczenie transmitancji operatorowej polega na zastąpieniu elementu rzeczywistego poprzez ich impedancje operatorowe a następnie wykorzystując dowolną metodę analizy (metoda praw Kirchhoffa, węzłowa, oczkowa, Thevenina, Nortona) należy wyznaczyć odpowiedź operatorową w funkcji wymuszenia. Wobec liniowości obwodu każda jego odpowiedź (dowolny prąd i dowolne napięcie) jest liniową funkcją wymuszenia. Obliczając transmitancję dzieli się odpowiedź przez wymuszenie, w wyniku czego zmienna będąca wymuszeniem ulega redukcji i w efekcie transmitancja zależy wyłącznie od parametrów RLC obwodu oraz źródeł sterowanych, będąc jednocześnie funkcją zmiennej zespolonej  $s$ . Metodę wyznaczania

transmitancji operatorowej zilustrujemy na przykładzie obwodu LC przedstawionego na rys. 10.2.

#### Przykład 10.1

Należy wyznaczyć transmitancję napięciową obwodu przedstawionego na rys. 10.2a, zakładając, że napięcie wyjściowe pochodzi z elementów L i C połączonych równolegle.



Rys. 10.2. Schematy obwodów do wyznaczania transmitancji: a) obwód oryginalny, b) schemat operatorowy obwodu (przykład ze starego podręcznika)

#### Rozwiązanie

Schemat operatorowy obwodu do wyznaczenia transmitancji przedstawiony jest na rys. 10.2b (warunki początkowe są z definicji zerowe). Zastępując cewkę i kondensator połączone równolegle jedną impedancją zastępczą  $Z_{LC}(s)$

$$Z_{LC}(s) = \frac{sL \cdot \frac{1}{sC}}{sL + \frac{1}{sC}} = \frac{\frac{1}{C}s}{s^2 + \frac{1}{LC}}$$

i stosując prawo napięciowe Kirchhoffa do tak uproszczonego obwodu, otrzymuje się

$$U_2(s) = \frac{Z_{LC}(s)}{Z_{LC}(s) + sL_1} U_1(s)$$

Po prostych przekształceniach uzyskuje się wynik na transmitancję napięciową w postaci

$$T_u(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{Z_{LC}(s)}{Z_{LC}(s) + sL_1} = \frac{\frac{1}{L_1 C} s}{s^3 + s \left( \frac{1}{L_1 C} + \frac{1}{LC} \right)} = \frac{\frac{1}{L_1 C}}{s^2 + \left( \frac{1}{L_1 C} + \frac{1}{LC} \right)}$$

W ostatecznym wyrażeniu na transmitancję operatorową zmienna stanowiąca wymuszenie nie występuje (uległa redukcji). Przyjmijmy następujące wartości elementów obwodu:  $L = 1H$ ,  $L_1 = 0,5H$ ,  $C = 1F$  (wartości znormalizowane). Podstawiając je do wzoru na  $T_u(s)$  otrzymujemy

$$T_u(s) = \frac{2}{s^2 + 3}$$

Jest to tak zwana postać wymierna, zawierająca wielomian zmiennej zespolonej  $s$  zarówno w liczniku (stopień równy zeru) jak i w mianowniku (stopień równy dwa).

W ogólnym przypadku obwodu elektrycznego liniowego zawierającego rezystory, cewki i kondensatory oraz źródła sterowane dowolna transmitancja operatorowa ma postać funkcji wymiernej o stopniu licznika równym  $m$  i stopniu mianownika równym  $n$

$$T(s) = \frac{L(s)}{M(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (10.7)$$

Współczynniki  $a_i$  mianownika oraz  $b_i$  licznika są funkcjami parametrów elementów obwodu i dla ich konkretnych wartości przyjmują wartości rzeczywiste. Najwyższy stopień wielomianu jest równy (w szczególnych przypadkach mniejszy) liczbie elementów reaktancyjnych (cewek i kondensatorów) obwodu. Najczęściej w obwodach występujących w praktyce stopień mianownika jest nie mniejszy niż stopień licznika.

Pojęcie impedancji operatorowej jest uogólnieniem impedancji zespolonej elementów stosowanej w metodzie symbolicznej przy analizie stanów ustalonych w obwodzie zawierającym wymuszenia sinusoidalne. Łatwo pokazać to zakładając  $s = j\omega$  we wzorach określających odpowiednie impedancje operatorowe. Dla elementów indukcyjnych i pojemnościowych przy założeniu  $s = j\omega$  otrzymuje się następujące zależności

$$Z_L(s) \Big|_{s=j\omega} = j\omega L = Z_L(j\omega) \quad (10.8)$$

$$Z_M(s) \Big|_{s=j\omega} = \pm j\omega M = Z_M(j\omega) \quad (10.9)$$

$$Z_C(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{1}{j\omega C} = Z_C(j\omega) \quad (10.10)$$

Impedancje  $Z(j\omega)$  reprezentują impedancje symboliczne elementów RLC, obowiązujące w analizie stanów ustalonych przy wymuszeniach sinusoidalnych. Założenie  $s=j\omega$  upraszcza zatem opis obwodu w stanie nieustalonym do opisu obwodu w stanie ustalonym przy założeniu wymuszenia sinusoidalnego.

## 10.3 Odpowiedź impulsowa i skokowa układu

Opis obwodu w dziedzinie zmiennej zespolonej  $s$  pozwala badać jego zachowanie przy pobudzeniu dowolnym wymuszeniem. Szczególnie ważne są właściwości dynamiczne obwodów (stan nieustalony) przy pobudzeniu za pomocą pewnych wymuszeń standardowych. Do takich wymuszeń należy impuls Diraca  $\delta(t)$  oraz funkcja skoku jednostkowego  $1(t)$ .

### 10.4.1 Odpowiedź impulsowa

**Odpowiedzią impulsową** układu nazywamy jego odpowiedź czasową na wymuszenie w postaci impulsu Diraca przy zerowych warunkach początkowych obwodu. Dla wyznaczenia odpowiedzi impulsowej wykorzystuje się pojęcie transmitancji operatorowej  $T(s)$ . Transformata funkcji impulsowej Diraca jest równa 1, zatem obliczając odpowiedź obwodu w

d dziedzinie operatorowej  $s$  przyjmujemy wymuszenie  $X(s)=1$ . Bezpośrednio z definicji transmitancji wynika

$$T(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{Y(s)}{1} \rightarrow Y(s) = T(s) \quad (10.11)$$

Odpowiedź impulsowa układu jest transformatą odwrotną Laplace'a sygnału  $Y(s)$ . Stąd

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = L^{-1}[T(s)] \quad (10.12)$$

Dla odróżnienia od innych odpowiedzi czasowych obwodu odpowiedź impulsowa jest najczęściej oznaczana jako  $h(t)$ . Z powyższej zależności wynika, że odpowiedź impulsowa  $h(t)$  jest transformatą odwrotną Laplace'a transmitancji operatorowej  $T(s)$  układu.

#### 10.4.2 Odpowiedź skokowa

**Odpowiedzią skokową** układu nazywamy odpowiedź czasową tego układu na wymuszenie w postaci skoku jednostkowego  $1(t)$  przy zerowych warunkach początkowych obwodu. Biorąc pod uwagę, że transformata Laplace'a funkcji jednostkowej  $1(t)$  jest równa  $1/s$  otrzymuje się

$$T(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{Y(s)}{1/s} \rightarrow Y(s) = \frac{1}{s} T(s) \quad (10.13)$$

Odpowiedź skokowa jest transformatą odwrotną Laplace'a sygnału  $Y(s)$ . Stąd

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = L^{-1}\left[\frac{1}{s} T(s)\right] \quad (10.14)$$

Odpowiedź skokowa układu jest więc transformatą odwrotną Laplace'a transmitancji operatorowej  $T(s)$  tego układu, podzielonej przez zmienną zespoloną  $s$ . Podobnie jak odpowiedź impulsowa odpowiedź skokowa jest określona w pełni przez transmitancję operatorową  $T(s)$  układu.

##### *Przykład 10.2*

Dla zilustrowania rozważań teoretycznych obliczmy odpowiedź impulsową i skokową układu o zadanej transmitancji operatorowej



$$T(s) = \frac{1}{(s+1)(s+5)}$$

### Rozwiązanie

Stosując metodę residuów dla zadanej postaci transmitancji  $T(s)$  otrzymujemy:

- odpowiedź impulsową

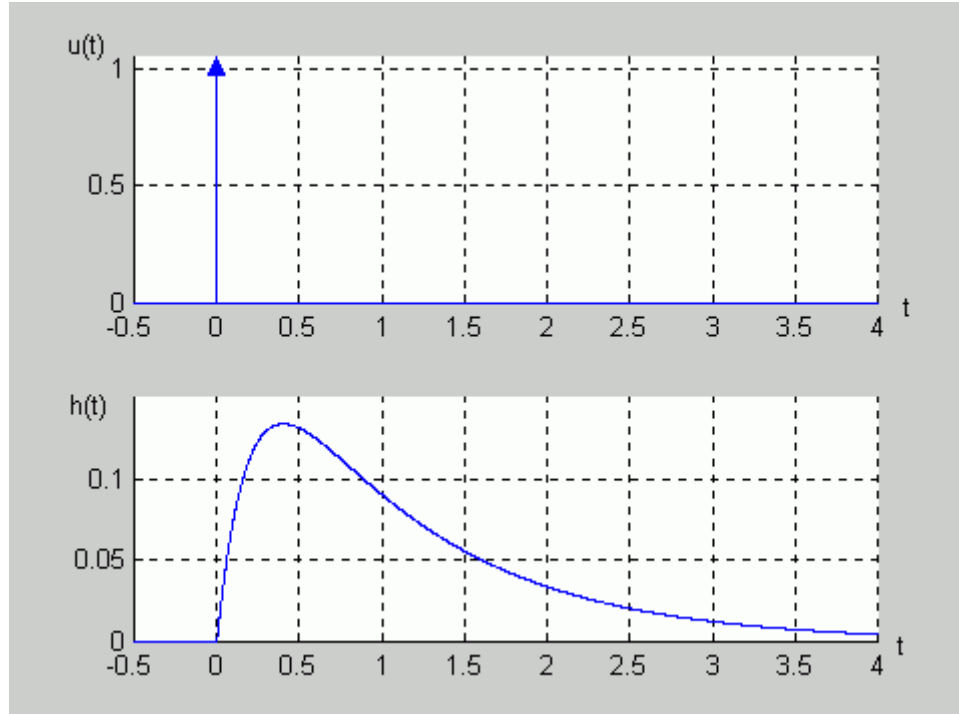
$$h(t) = L^{-1} \left[ \frac{1}{(s+1)(s+5)} \right] = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{1}{s+5} e^{st} + \lim_{s \rightarrow -5} \frac{1}{s+1} e^{st} = \frac{1}{4} e^{-t} - \frac{1}{4} e^{-5t}$$

- odpowiedź skokową

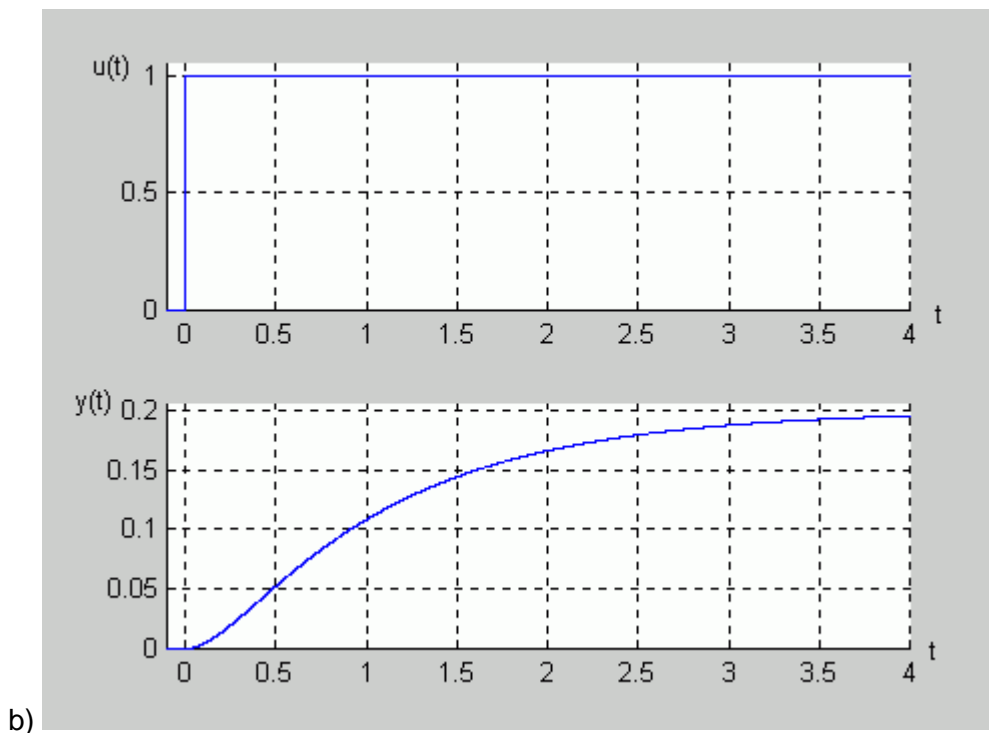
$$y(t) = L^{-1} \left[ \frac{1}{s(s+1)(s+5)} \right] =$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{(s+1)(s+5)} e^{st} + \lim_{s \rightarrow -1} \frac{1}{s(s+5)} e^{st} + \lim_{s \rightarrow -5} \frac{1}{s(s+1)} e^{st} = 0,2 - 0,25e^{-t} + 0,05e^{-5t}$$

Na rys. 10.3 przedstawiono wykres czasowy odpowiedzi impulsowej (rys. 10.3a) i skokowej (rys. 10.3b) układu o zadanej postaci transmitancji operatorowej  $T(s)$ .



a)



Rys. 10.3 Odpowiedzi a) impulsowa, b) skokowa układu ([Poprawić górny rysunek](#))



## 10.5 Stabilność układów liniowych

Opis układów liniowych za pomocą transmitancji operatorowej bądź równoważny mu opis równaniami stanu pozwala badać cechy jakościowe układu na podstawie analizy położenia jego biegunów (wartości własnych macierzy stanu). Do najważniejszych cech układu należą pojęcie stabilności oraz charakter odpowiedzi układu powstałej w stanie przejściowym na skutek przyłożenia wymuszenia zewnętrznego.

**Stabilność** układu jest rozumiana w sensie ograniczonej co do wartości odpowiedzi na wymuszenie o skończonej wartości, dla dowolnej chwili czasowej  $t$ . Układ nazywać będziemy stabilnym, jeśli jego odpowiedź czasowa na skończoną wartość pobudzenia będzie ograniczona co do wartości w dowolnej chwili czasowej  $t$ . Stabilność wymaga, aby przy zaniku pobudzenia odpowiedź układu w stanie ustalonym przy  $t \rightarrow \infty$  była ograniczona co do wartości (**stabilność w sensie zwykłym**) lub zerowa (**stabilność w sensie asymptotycznym**). Oznacza to, że dla układów stabilnych odpowiedź w stanie przejściowym powinna zanikać do zera lub co najmniej nie narastać, pozostając na ustalonym poziomie. Stabilność układu może więc być oceniana na podstawie jego odpowiedzi impulsowej. Jeśli odpowiedź ta zanika do zera lub pozostaje na stałym poziomie przy  $t \rightarrow \infty$  układ jest stabilny. Jeśli natomiast odpowiedź impulsowa ma charakter narastający w czasie – układ

jest niestabilny. Zauważmy, że odpowiedź impulsowa jest transformatą odwrotną Laplace'a transmitancji operatorowej

$$h(t) = L^{-1}[T(s)] \quad (10.15)$$

Jeśli bieguny układu oznaczmy przez  $s_i$  gdzie  $i = 1, 2, \dots, n$ , wówczas w przypadku biegunów jednokrotnych na podstawie metody residuów odpowiedź impulsowa może być wyrażona wzorem

$$h(t) = \sum_{i=1}^n A_i e^{s_i t} \quad (10.16)$$

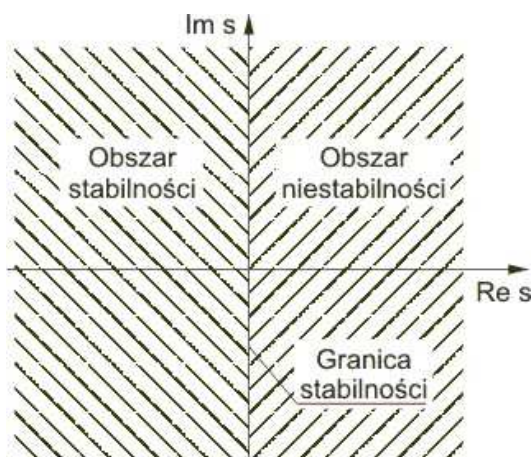
Wzór ten dowodzi, że jeśli wszystkie bieguny układu są położone wyłącznie w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej  $s$ ,  $R(s_i) \leq 0$ , wówczas odpowiedź impulsowa zanika z czasem do zera lub pozostaje ograniczona co do amplitudy (gdy część biegunów lub wszystkie znajdują się na osi urojonej).

Sytuacja jest nieco bardziej złożona, gdy część biegunów jest wielokrotna. Dla uproszczenia ograniczymy się tylko do biegunów dwukrotnych. Załóżmy, że liczba takich dwukrotnych biegunów jest równa  $m$ . W takim przypadku zastosowanie wzorów na residuum przy obliczaniu transformaty odwrotnej prowadzi do wyniku

$$y(t) = \sum_{i=1}^n A_i e^{s_i t} + \sum_{k=1}^m B_k t e^{s_k t} \quad (10.17)$$

Przy niezerowej wartości części rzeczywistej biegunów położonych w lewej półpłaszczyźnie odpowiedź przejściowa układu przy  $t \rightarrow \infty$  będzie zanikać do zera (układ stabilny asymptotycznie). Przy położeniu biegunów na osi urojonej  $R(s_i) = 0$  układ może być stabilny (choć nie asymptotycznie), jeśli są to bieguny pojedyncze lub niestabilny, jeśli bieguny są wielokrotne. Utrata stabilności na skutek położenia bieguna wielokrotnego na osi urojonej wynika z pojawienia się we wzorze na odpowiedź impulsową czynnika proporcjonalnego do czasu. Zauważmy, że przy spełnieniu warunku  $\text{Re}(s_k) = 0$  i założeniu bieguna zespolonego  $s_k = j\omega$  wyrażenie  $B_k t e^{s_k t}$  może być rozwinięte do postaci  $B_k t e^{s_k t} = B_k t (\cos \omega t + j \sin \omega t)$ . Wobec ograniczonych wartości funkcji sinus i cosinus czynnik ten przy  $t \rightarrow \infty$  narasta nieograniczenie, co prowadzi do utraty stabilności.

W konsekwencji **warunkiem stabilności układu liniowego jest położenie biegunów w lewej półpłaszczyźnie, a w przypadku biegunów wielokrotnych wyłączenie ich na osi urojonej.**



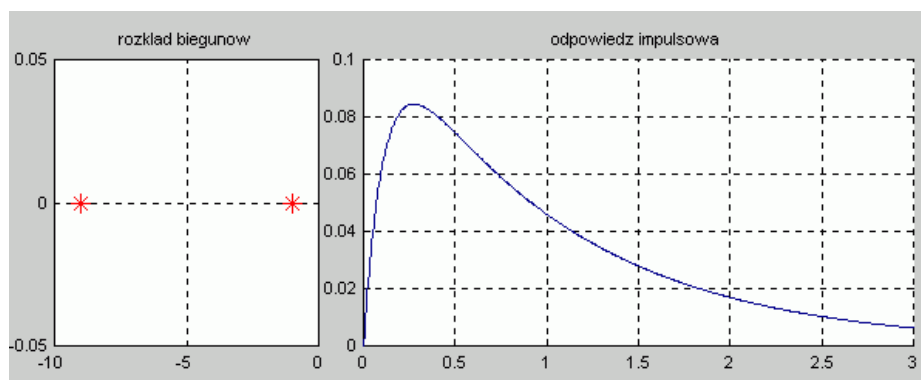
Rys. 10.4. Zależność stabilności układu od położenia biegunów

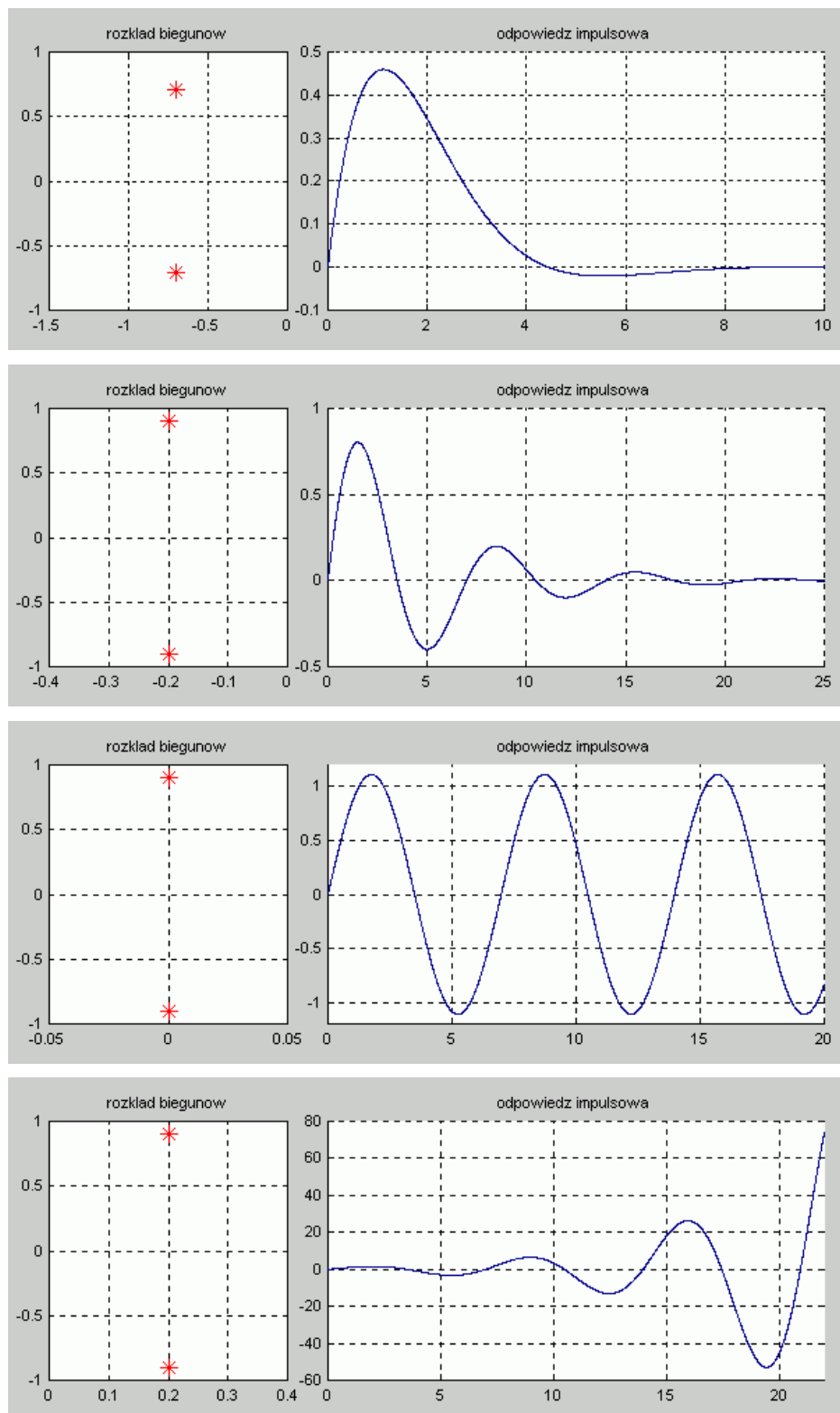


Na rys. 10.4 zilustrowano wpływ położenia biegunów na stabilność układu. Oś urojona rozgraniczająca obszar stabilny od niestabilnego jest obszarem warunkowo stabilnym (stabilnym w sensie zwykłym przy biegunach jednokrotnych i niestabilnym przy biegunach wielokrotnych).

Interesujący jest również wpływ położenia biegunów na charakter odpowiedzi impulsowej układu liniowego. Rys. 10.5 przedstawia odpowiedzi impulsowe układu drugiego rzędu

$$T(s) = \frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)} \text{ przy różnych położeniach biegunów.}$$





Rys. 10.5 Odpowiedzi impulsowe układu drugiego rzędu przy różnych położeniach biegunów



W zależności od wartości biegunów mamy do czynienia ze stanem aperiodycznym (bieguny położone na osi rzeczywistej) oraz oscylacyjnym (bieguny zespolone). Zanikanie odpowiedzi impulsowej do zera świadczy o stabilności asymptotycznej układu. Odpowiedź o ograniczonej amplitudzie nie zanikająca z czasem świadczy o stabilności zwykłej układu. Odpowiedź narastająca z czasem jest cechą układu niestabilnego.

## 10.6 Charakterystyki częstotliwościowe układów

Charakterystyką częstotliwościową nazywać będziemy zależność wartości sygnału wyjściowego układu od częstotliwości przy jednostkowym wymuszeniu sinusoidalnym przyłożonym na wejście układu. Charakterystykę tę można wyznaczyć bezpośrednio na podstawie transmitancji operatorowej  $T(s)$ . Nosi ona nazwę **transmitancji widmowej** układu.

Oznaczmy transmitancję widmową w postaci  $T(j\omega)$ . Jest ona zdefiniowana jako transmitancja operatorowa dla  $s = j\omega$ , to znaczy

$$T(j\omega) = T(s) \Big|_{s=j\omega} \quad (10.18)$$

Transmitancja widmowa reprezentuje sobą liczbę zespoloną będącą funkcją pulsacji  $\omega$ . Przedstawiając ją w postaci wykładniczej, to jest  $T(j\omega) = |T(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$  można zdefiniować dwa rodzaje charakterystyk częstotliwościowych:

- **charakterystyka amplitudowa** przedstawia sobą zależność modułu transmitancji widmowej  $T(j\omega)$  od pulsacji  $\omega$  lub częstotliwości  $f$ , to jest  $|T(j\omega)|$ . Charakterystyka amplitudowa układu reprezentuje wartość wzmocnienia sygnału wejściowego dla danej pulsacji  $\omega$ .
- **charakterystyka fazowa** określa zależność argumentu transmitancji widmowej  $T(j\omega)$  od pulsacji (częstotliwości) to jest  $\varphi(\omega)$ . Charakterystyka fazowa reprezentuje sobą przesunięcie fazowe występujące między sygnałem wejściowym i wyjściowym dla danej pulsacji  $\omega$ .

Charakterystyki częstotliwościowe przedstawia się zwykle na wykresie modułu lub fazy w zależności od pulsacji (częstotliwości). Jeśli wielkości podlegające wykreślaniu różnią się znacznie pod względem wartości (np. zmieniają się w zakresie od 1 do  $10^6$ ) wygodnie jest wprowadzić skalę logarymiczną zwykle o podstawie 10. Dotyczy to określonego zakresu

częstotliwości. W przypadku charakterystyki amplitudowej skalę logarymiczną przelicza się na decybele (dB) definiując **logarytmiczną charakterystykę amplitudową**

$$20\log_{10}(|T(j\omega)|) \quad (10.19)$$

### Przykład 10.3

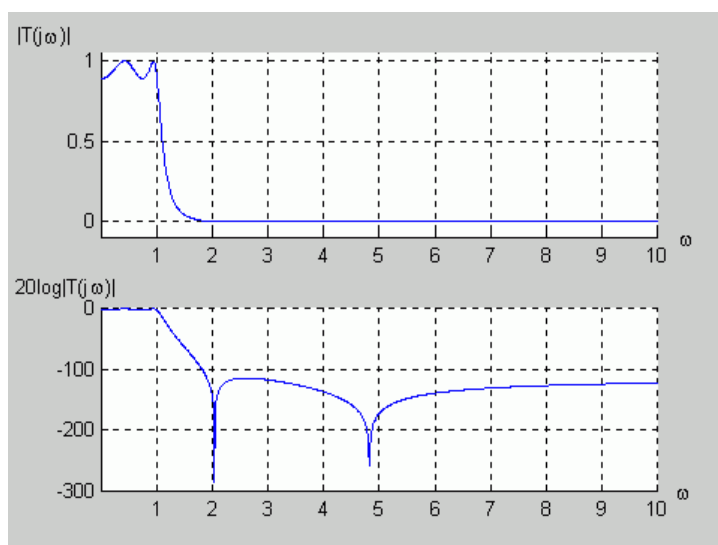
Jako przykład rozpatrzmy transmitancję operatorową opisaną wzorem

$$T(s) = \frac{0.003s^4 + 0.082s^2 + 0.287}{s^4 + 0.945s^3 + 1.487s^2 + 0.778s + 0.322}$$

Odpowiadająca jej charakterystyka amplitudowa dana jest w postaci

$$T(j\omega) = \frac{0.003\omega^4 - 0.082\omega^2 + 0.287}{(\omega^4 - 1.487\omega^2 + 0.322) + j(-0.945\omega^3 + 0.778\omega)}$$

Na rys. 10.6 przedstawiono przykładowo charakterystykę amplitudową (rys. 10.6a) oraz logarytmiczną charakterystykę amplitudową (rys. 10.6b) odpowiadającą transmitancji  $T(s)$ .



Rys. 10.6. Postać liniowa (a) oraz logarytmiczna (b) charakterystyki amplitudowej odpowiadającej transmitancji  $T(s)$



Każdy rodzaj przedstawienia charakterystyki amplitudowej podkreśla inne szczegóły w jej przebiegu. Charakterystyka logarytmiczna podkreśla stosunkowo niewielkie w skali globalnej

zmiany dynamiczne w tak zwanym paśmie zaporowym, gdzie amplituda sygnału jest bardzo mała w stosunku do pasma przepustowego, podczas gdy skala liniowa uwypukla globalny charakter przebiegu tracąc drobne szczegóły w zakresie częstotliwości gdzie wartości sygnałów są małe.

Charakterystyka amplitudowa z rys. 10.6 wskazuje na dobre (minimalnie tłumione) przenoszenie częstotliwości małych. W miarę wzrostu częstotliwości charakterystyka amplitudowa maleje, co oznacza, że sygnał wyjściowy ma coraz mniejszą amplitudę. Taki obwód ma więc charakter filtra dolnoprzepustowego. Przykładem może być cewka włączona szeregowo z rezystorem: w miarę wzrostu częstotliwości cewka ma coraz większą impedancję, która tłumí przebieg prądu przepływającego przez rezystor wyjściowy.

## 10.7 Przykłady transmitancji operatorowych pierwszego rzędu

W praktyce inżynierskiej zdefiniowano wiele użytecznych postaci transmitancji operatorowych. Tutaj ograniczymy się jedynie do trzech najprostszych transmitancji pierwszego rzędu: układu całkującego, różniczkującego oraz przesuwnika fazowego.

### 10.7.1 Układ całkujący

Transmitancja idealnego układu całkującego definiowana jest w postaci

$$T(s) = \frac{k}{s} \quad (10.20)$$

Układ nosi nazwę całkującego, gdyż operator  $1/s$  w dziedzinie częstotliwości zespolonej Laplace'a oznacza całkowanie funkcji w dziedzinie czasu. Charakterystykę częstotliwościową układu całkującego opisuje zależność

$$T(j\omega) = \frac{k}{j\omega} = \frac{k}{\omega} e^{-j90^\circ} \quad (10.21)$$

Wykres charakterystyki amplitudowej w funkcji częstotliwości (dla  $\omega \geq 0$ )

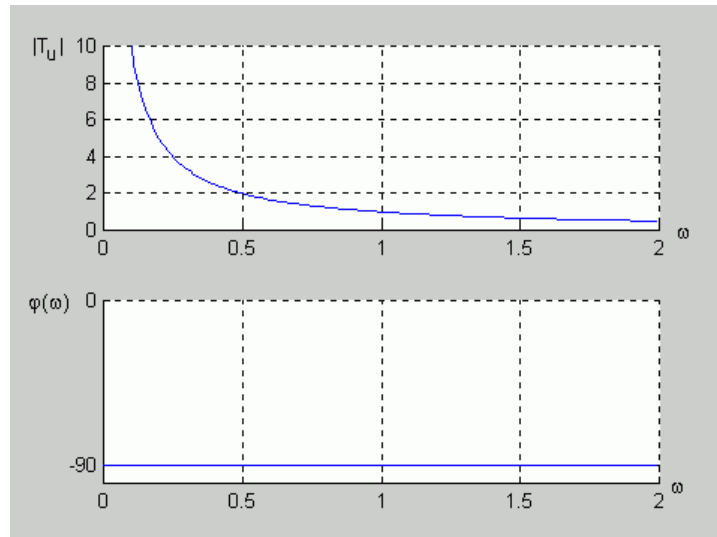
$$|T(j\omega)| = \frac{k}{\omega} \quad (10.22)$$

oraz fazowej



$$\varphi(\omega) = -90^\circ \quad (10.23)$$

dla układu całkującego przy  $k>0$  przedstawiono na rys. 10.7.



Rys. 10.7 Charakterystyki częstotliwościowe układu całkującego: a) amplitudowa, b) fazowa



Charakterystyka amplitudowa jest typu hiperbolicznego, a charakterystyka fazowa stała (przesunięcie fazowe stałe i równe  $-90^\circ$  niezależnie od częstotliwości).

### 10.7.2 Układ różniczkujący

Transmitancja układu różniczkującego dana jest w postaci (zakładamy  $k>0$ )

$$T(s) = ks \quad (10.24)$$

Układ nosi nazwę różniczkującego, gdyż operator  $s$  w dziedzinie częstotliwości zespolonej oznacza różniczkowanie funkcji w dziedzinie czasu. Charakterystyka częstotliwościowa opisana jest zależnością

$$T(j\omega) = kj\omega = k\omega e^{j90^\circ} \quad (10.25)$$

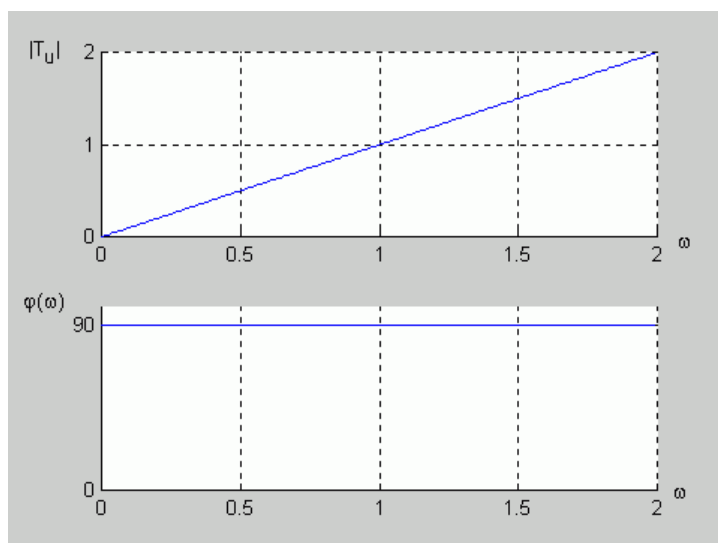
Charakterystyka amplitudowa jest funkcją liniową

$$|T(j\omega)| = k\omega \quad (10.26)$$

a charakterystyka fazowa stała, niezależnie od częstotliwości (przy założeniu  $k>0$ )

$$\varphi(\omega) = 90^\circ \quad (10.27)$$

Wykres obu charakterystyk układu różniczkującego przy  $k>0$  przedstawiono na rys. 10.8.



Rys. 10.8 Charakterystyki częstotliwościowe układu różniczkującego: a) amplitudowa, b) fazowa



### 10.7.3 Przesuwnik fazowy

Przesuwnik fazowy jest układem przesuwającym fazę napięcia wyjściowego względem wejściowego bez zmiany amplitudy sygnału. Transmitancję przesuwnika fazowego określa zależność

$$T(s) = \frac{-s + a}{s + a} \quad (10.28)$$

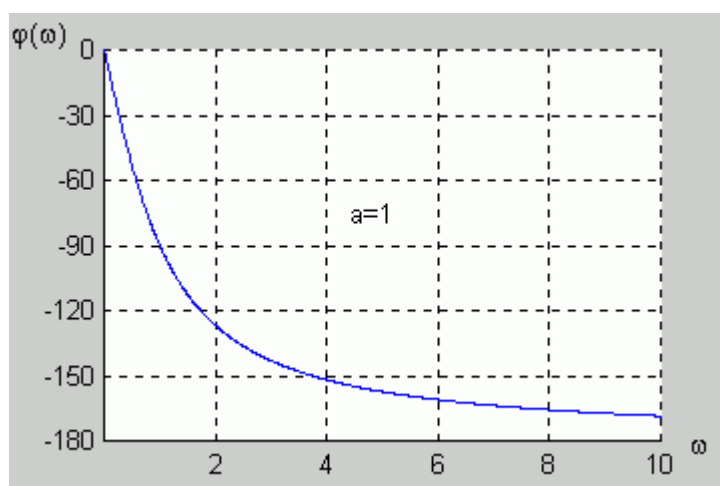
Charakterystyka częstotliwościowa przesuwnika określona jest następującą relacją

$$T(j\omega) = \frac{-j\omega + a}{j\omega + a} = \frac{\sqrt{\omega^2 + a^2}}{\sqrt{\omega^2 + a^2}} \cdot \frac{e^{-j\phi(\omega)}}{e^{j\phi(\omega)}} = 1e^{-j2\phi(\omega)} \quad (10.29)$$

gdzie kąt  $\phi(\omega)$  określony jest wzorem  $\phi(\omega) = \arctg\left(\frac{\omega}{a}\right)$ . Powyższa zależność potwierdza, że przesuwnik fazowy nie zmienia amplitudy sygnału wejściowego ( $|T(j\omega)|=1$ ) a wpływa jedynie na przesunięcie fazowe między sygnałem wejściowym i wyjściowym. Charakterystyka fazowa przesuwnika określona jest zależnością

$$\varphi(\omega) = -2\arctg\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (10.30)$$

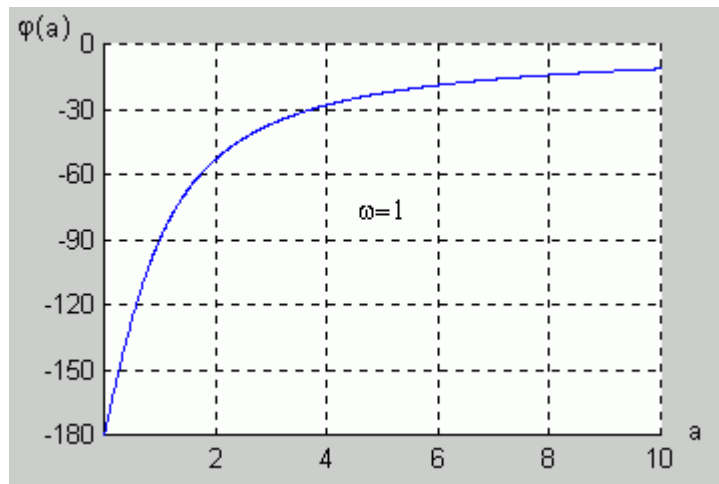
Na rys. 10.9 przedstawiono wykres charakterystyki fazowej przesuwnika o transmitancji (10.28) w funkcji pulsacji dla wartości  $a=1$ .



Rys. 10.9. Charakterystyka fazowa przesuwnika w funkcji pulsacji



Przesunięcie fazowe układu jest funkcją częstotliwości i zmienia się od zera do wartości  $180^\circ$ . Wartość przesunięcia fazowego dla konkretnej wartości częstotliwości można regulować poprzez zmianę współczynnika  $a$  transmitancji. Na rys. 10.10 przedstawiono wykres przedstawiający zmianę kąta przesunięcia fazowego układu dla pulsacji jednostkowej przy zmianie wartości współczynnika  $a$ .



Rys. 10.10. Charakterystyka fazowa przesuwnika w funkcji wartości współczynnika  $a$



## 10.8 Charakterystyki częstotliwościowe układu $n$ -tego rzędu

Najbardziej ogólnym przypadkiem jest układ opisany transmitancją operatorową  $T(s)$   $n$ -tego rzędu o postaci ogólnej zadanej wzorem

$$T(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (10.31)$$

Załączony do podręcznika program interakcyjny **CHARAKTERYSTYKI** umożliwia wykreślanie charakterystyk częstotliwościowych (amplitudowych i fazowych) układów opisanych za pomocą transmitancji operatorowej o postaci określonej wzorem (10.31). Transmitancja widmowa  $T(j\omega)$  takiego układu wyznaczana jest z transmitancji operatorowej  $T(s)$  przez podstawienie  $s=j\omega$ . W wyniku otrzymuje się

$$T(j\omega) = \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_1 j\omega + b_0}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 j\omega + a_0} \quad (10.32)$$

Transmitancja widmowa przedstawia sobą funkcję zespoloną pulsacji  $\omega$  i może być zapisana w postaci ogólnej jako

$$T(j\omega) = A(\omega) + jB(\omega) \quad (10.33)$$

Część rzeczywista  $A(\omega)$  i urojona  $B(\omega)$  są funkcjami zarówno współczynników  $a_i$ ,  $b_i$  licznika i mianownika transmitancji operatorowej, jak i aktualnej wartości pulsacji  $\omega$ . Charakterystyka amplitudowa przedstawia sobą moduł transmitancji widmowej określony wzorem

$$|T(j\omega)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)} \quad (10.34)$$

Charakterystyka fazowa definiuje fazę transmitancji widmowej i wyznaczana jest z zależności

$$\varphi(\omega) = \arctg\left(\frac{B(\omega)}{A(\omega)}\right) \quad (10.35)$$

Powyższe zależności zostały wykorzystane do badania charakterystyk częstotliwościowych układów opisanych transmitancją operatorową  $T(s)$  zadawaną przez użytkownika. Uruchomienie programu CHARAKTERYSTYKI następuje przez kliknięcie w ikonę programu (rys. 10.11).

Rys. 10.11. Okno programu CHARAKTERYSTYKI

**PROGRAM W JAVIE – filtr.class**



Użytkownik ustala stopień licznika i mianownika transmitancji, a także wartości wszystkich współczynników wielomianu licznika i mianownika. Określa również zakres pulsacji, dla którego wykreslane będą charakterystyki częstotliwościowe. W programie założono, że maksymalny rząd układu nie powinien przekroczyć wartości 10.

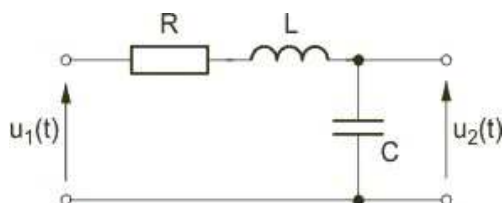
Wykorzystując podane wcześniej zależności częstotliwościowe program wykreśla charakterystyki amplitudowe (liniową i logarytmiczną wyrażoną w decybelach) oraz charakterystykę fazową w stopniach.

Otrzymane charakterystyki częstotliwościowe wskazują na przenoszenie bądź tłumienie sygnałów w określonym paśmie częstotliwościowym. Stąd tego typu układy nazywane są **filtrami** częstotliwościowymi. W naszym programie charakterystyki filtra zostają wykreślone w oddzielnych oknach, pozwalających na skalowanie oraz oglądanie w powiększeniu poszczególnych odcinków krzywych.

## Ćwiczenia

### Ćwiczenie 10.1

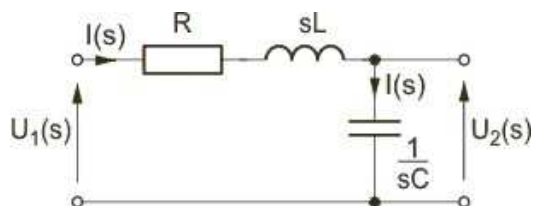
Wyznaczyć transmitancję operatorową typu napięciowego obwodu z rys. 10.12. Założyć:  $R=1\Omega$ ,  $L=2H$ ,  $C=1F$ .



Rys. 10.12. Schemat obwodu do ćwiczenia 10.1

### Rozwiązanie

Schemat operatorowy obwodu przy zerowych warunkach początkowych stosowany do wyznaczenia transmitancji przedstawiony jest na rys. 10.13.



Rys. 10.13. Postać operatorowa obwodu

Kolejne etapy wyznaczania transmitancji:

Prąd  $I(s)$

$$I(s) = \frac{U_1(s)}{R + sL + 1/sC} = \frac{sC}{s^2 LC + sRC + 1} U_1(s)$$

Napięcie wyjściowe

$$U_2(s) = \frac{1}{sC} I(s) = \frac{1}{s^2 LC + sRC + 1} U_1(s)$$

Transmitancja napięciowa

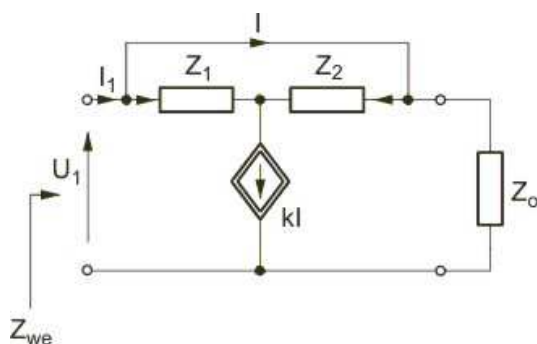
$$T_u(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + s\frac{R}{L} + \frac{1}{LC}}$$

Po podstawieniu wartości liczbowych otrzymuje się

$$T_u(s) = \frac{0,5}{s^2 + 0,5s + 0,5}$$

### Ćwiczenie 10.2

Wyznaczyć impedancję wejściową w postaci operatorowej dla obwodu przedstawionego na rys. 10.14. Impedancję wejściową potraktować jako transmitancję napięciowo-prądową.



Rys. 10.14. Schemat obwodu do ćwiczenia 10.2

### Rozwiązanie

Z prawa prądowego i napięciowego Kirchhoffa napisanych dla obwodu z rys. 10.14 otrzymuje się

$$Z_1(I_1 - I) = Z_2(I - Y_o U_1)$$

$$(I_1 - I) + (I - Y_o U_1) = kI$$

gdzie  $Y_o = 1/Z_o$ . Z równania drugiego otrzymuje się

$$I = \frac{I_1 - Y_o U_1}{k}$$

Po podstawieniu do wzoru pierwszego otrzymujemy

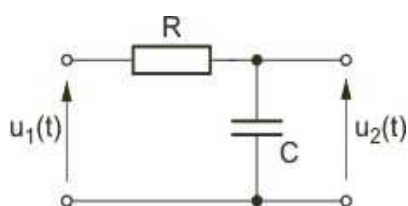
$$\frac{Z_1 + Z_2 - Z_1 k}{k} I_1 = \left( Z_2 Y_o + \frac{Z_1 + Z_2}{k} Y_o \right) U_1$$

Stąd

$$Z_{we} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{Z_1 + Z_2 - Z_1 k}{k Z_2 Y_o + Y_o (Z_1 + Z_2)}$$

### Ćwiczenie 10.3

Wyznaczyć charakterystyki częstotliwościowe obwodu przedstawionego na rys. 10.15 biorąc pod uwagę transmitancję napięciową.



Rys. 10.15. Schemat obwodu do ćwiczenia 10.3

### Rozwiązanie

Transmitancja napięciowa obwodu określona jest wzorem

$$T_u(s) = \frac{1/sC}{R + 1/sC} = \frac{1}{sRC + 1}$$



Transmitancja widmowa obwodu określona jest na podstawie transmitancji operatorowej  $T_u(s)$  przy założeniu  $s = j\omega$

$$T_u(j\omega) = \frac{1}{j\omega RC + 1}$$

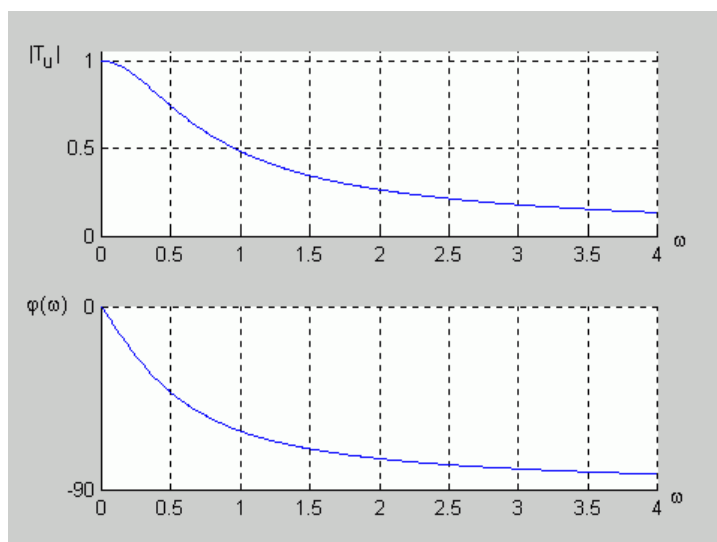
Charakterystyka amplitudowa

$$|T_u(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1}}$$

Charakterystyka fazowa

$$\varphi(\omega) = -\arctg(\omega RC)$$

Na rys. 10.16 przedstawiono charakterystykę amplitudową i fazową dla wartości jednostkowych elementów obwodu ( $R = 1 \Omega$  i  $C = 1F$ )



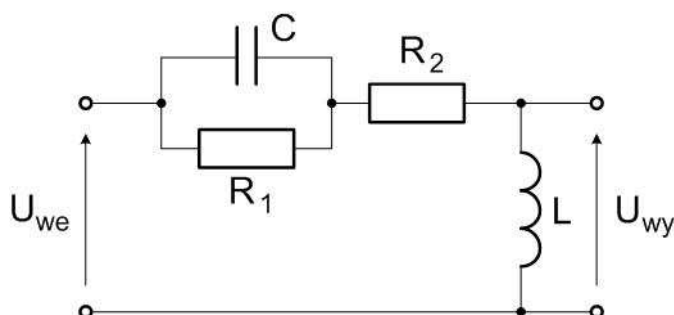
Rys. 10.16 Charakterystyki częstotliwościowe obwodu z rys. 10.14: a) charakterystyka amplitudowa, b) charakterystyka fazowa



## Zadania sprawdzające

### Zadanie 10.1

Określić transmitancję napięciową obwodu przedstawionego na rys. 10.17, jego odpowiedź impulsową oraz charakterystyki częstotliwościowe dla parametrów  $R_1=1\Omega$ ,  $R_2=1\Omega$ ,  $L=3H$ ,  $C=0.5F$ .



Rys. 10.17. Schemat obwodu do zadania 10.1

### Rozwiązanie

$$\text{Transmitancja napięciowa: } T(s) = \frac{s^2 + 2s}{s^2 + \frac{7}{3}s + \frac{4}{3}} = \frac{s(s+2)}{(s+1)\left(s+\frac{4}{3}\right)}$$

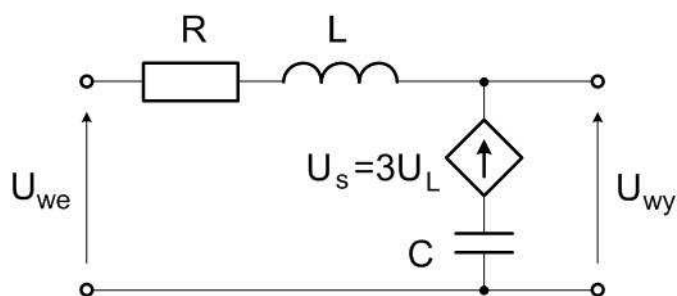
$$\text{Odpowiedź impulsowa: } h(t) = \delta(t) - 3e^{-t} + \frac{8}{3}e^{-\frac{4}{3}t}$$

$$\text{Charakterystyka amplitudowa: } |T(j\omega)| = \frac{\sqrt{4\omega^2 - \omega^4}}{\sqrt{\left(\frac{4}{3} - \omega^2\right)^2 + \frac{49}{9}\omega^2}}$$

$$\text{Charakterystyka fazowa: } \varphi(\omega) = 180 - \arctg\left(\frac{2}{\omega}\right) - \arctg\left(\frac{\frac{7}{3}\omega}{\frac{4}{3} - \omega^2}\right)$$

### Zadanie 10.2

Określić transmitancję napięciową obwodu przedstawionego na rys. 10.18 i jego odpowiedź impulsową dla parametrów  $R=1\Omega$ ,  $L=1H$ ,  $C=1F$ .



Rys. 10.18. Schemat obwodu do zadania 10.2

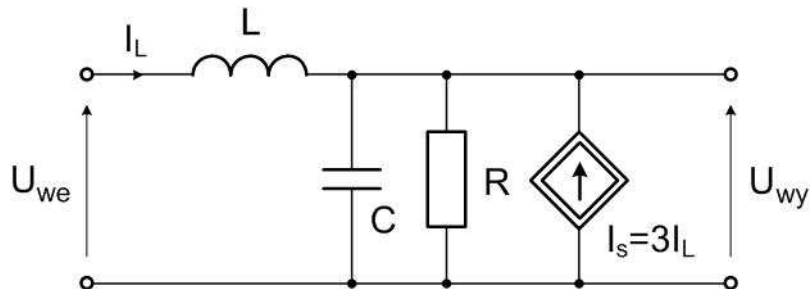
*Rozwiązanie*

Transmitancja napięciowa:  $T(s) = \frac{3s^2 + 1}{4s^2 + s + 1}$

Odpowiedź impulsowa:  $h(t) = \frac{3}{4}\delta(t) - \frac{3}{16}e^{-\frac{1}{8}t} \cos \frac{\sqrt{15}}{8}t + \frac{11\sqrt{15}}{240}e^{-\frac{1}{8}t} \sin \frac{\sqrt{15}}{8}t$

*Zadanie 10.3*

Wyznaczyć transmitancję napięciową obwodu przedstawionego na rys. 10.19 i jego odpowiedź impulsową dla parametrów  $R=1\Omega$ ,  $L=2H$ ,  $C=1F$ .



Rys. 10.19. Schemat obwodu do zadania 10.3

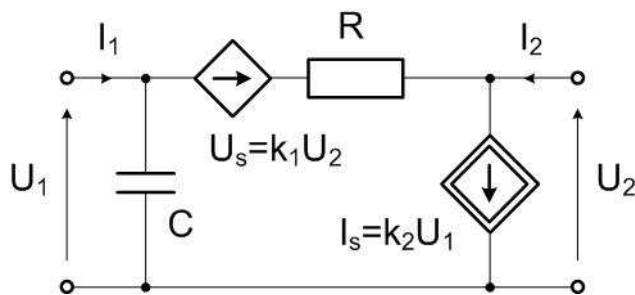
*Rozwiązanie*

Transmitancja napięciowa:  $T(s) = \frac{2}{s^2 + s + 2}$

Odpowiedź impulsowa:  $h(t) = \frac{4}{\sqrt{7}}e^{-0,5t} \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)$

*Zadanie 10.4*

Określić macierz admitancyjną obwodu przedstawionego na rys. 10.20 oraz jego transmitancję napięciową dla założonego  $I_2=0$ .



Rys. 10.20. Schemat obwodu do zadania 10.4

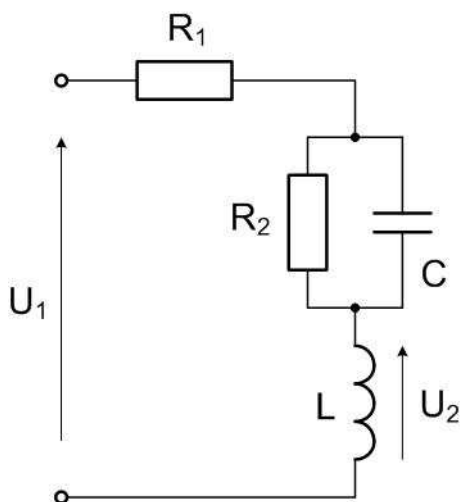
*Rozwiązanie*

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sC + G & G(k_1 - 1) \\ k_2 - G & G(1 - k_1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

$$T(s) = \frac{G - k_2}{G(1 - k_1)}$$

*Zadanie 10.5*

Wyznaczyć transmitancję napięciową obwodu przedstawionego na rys. 10.21. Określić odpowiedź impulsową i charakterystyki częstotliwościowe przyjmując wartości elementów  $R_1=2\Omega$ ,  $R_2=1\Omega$ ,  $C=1F$ ,  $L=3H$ .



Rys. 10.21 Schemat obwodu do zadania 10.5

*Rozwiązanie*

$$T_u(s) = \frac{3s(s+1)}{3s^2 + 5s + 3} = 1 + \frac{-2s - 3}{3s^2 + 5s + 3}$$

$$|T_u(j\omega)| = \frac{\sqrt{9\omega^4 + 9\omega^2}}{\sqrt{(3-3\omega^2)^2 + 25\omega^2}}$$

$$\varphi(\omega) = 180^\circ - \arctg\left(\frac{1}{\omega}\right) - \arctg\left(\frac{5\omega}{3-3\omega^2}\right)$$

$$h(t) = \delta(t) - \frac{2}{3}e^{-\frac{5}{6}t} \cos\sqrt{\frac{11}{36}}t - \frac{4}{9}\sqrt{\frac{36}{11}}e^{-\frac{5}{6}t} \sin\sqrt{\frac{11}{36}}t$$

## Test do wykładu 10

1. Transmitancja operatorowa  $H(s)$  obwodu dana jest w postaci  $H(s) = \frac{3}{(s+2)(s+2)}$ . Jaki

charakter ma odpowiedź impulsowa tego obwodu?

- a) oscylacyjny
- xb) aperiodyczny
- c) aperiodyczny krytyczny

2. Obwód elektryczny opisany jest transmitancją operatorową o postaci  $H(s) = \frac{3}{s^2(s+2)}$ .

Jest to obwód

- a) stabilny asymptotycznie
- b) stabilny ale nie asymptotycznie
- xc) niestabilny

3. Obwód elektryczny opisany jest transmitancją operatorową o postaci

$$H(s) = \frac{3}{s(s+2)(s-2)}$$

- xa) stabilny asymptotycznie
- b) stabilny ale nie asymptotycznie
- c) niestabilny

4. Obwód elektryczny opisany jest transmitancją operatorową o postaci

$$H(s) = \frac{3}{(s+1)^3(s+2)}$$

- xa) stabilny asymptotycznie
- b) stabilny ale nie asymptotycznie
- c) niestabilny
- d) niestabilny asymptotycznie

5. Obwód pasywny RLC jest:

- xa) zawsze stabilny
- b) zawsze niestabilny
- c) stabilność zależy od wartości elementów
- d) stabilność zależy od struktury połączeń elementów ze sobą

6. Obwód elektryczny opisany jest transmitancją operatorową o postaci  $H(s) = \frac{2}{s(s+3)}$ .

Jego odpowiedź impulsowa ma postać

- a)  $\frac{2}{3} - \frac{2}{3}e^{3t}$   
 xb)  $\frac{2}{3} - \frac{2}{3}e^{-3t}$   
 c)  $\frac{3}{2} - \frac{3}{2}e^{-3t}$   
 d)  $2 - 2e^{-3t}$

7. Obwód elektryczny opisany jest transmitancją operatorową o postaci

$$H(s) = \frac{3}{s(s^2 + 2s + 0.5)}.$$

Jego odpowiedź impulsowa ma charakter

- a) oscylacyjny  
 xb) aperiodyczny  
 c) aperiodyczny krytyczny

8. Wzmocnienie równe 40dB oznacza w skali liniowej wartość wzmocnienia równą

- a) 10  
 xb) 100  
 c) 10000  
 d)  $10^{-2}$

9. Transmitancja operatorowa  $H(s)$  obwodu dana jest w postaci  $H(s) = \frac{(s-5)}{(s+5)}$ .

Charakterystyki amplitudowa i fazowa tego układu mają postać:

- a)  $|H(\omega)| = 2\sqrt{\omega^2 + 25}$ ,  $\varphi(\omega) = \arctg\left(\frac{\omega}{5}\right)$   
 b)  $|H(\omega)| = 1$ ,  $\varphi(\omega) = 2\arctg\left(\frac{\omega}{5}\right)$   
 xc)  $|H(\omega)| = 1$ ,  $\varphi(\omega) = 180^\circ - 2\arctg\left(\frac{\omega}{5}\right)$   
 d)  $|H(\omega)| = 1$ ,  $\varphi(\omega) = -2\arctg\left(\frac{\omega}{5}\right)$

10. Transmitancja operatorowa  $H(s)$  obwodu dana jest w postaci  $H(s) = \frac{(s+2)}{(s+1)}$ .

Charakterystyki amplitudowa i fazowa tego układu mają postać:

- a)  $|H(\omega)| = \frac{\sqrt{\omega^2 + 4}}{\sqrt{\omega^2 + 1}}$ ,  $\varphi(\omega) = \arctg\left(\frac{\omega}{2}\right) + \arctg(\omega)$   
 b)  $|H(\omega)| = \frac{\sqrt{\omega^2 + 1}}{\sqrt{\omega^2 + 4}}$ ,  $\varphi(\omega) = \arctg(2\omega) - \arctg(\omega)$   
 xc)  $|H(\omega)| = \frac{\sqrt{\omega^2 + 4}}{\sqrt{\omega^2 + 1}}$ ,  $\varphi(\omega) = \arctg\left(\frac{\omega}{2}\right) - \arctg(\omega)$   
 d)  $|H(\omega)| = \frac{\sqrt{\omega^2 + 4}}{\sqrt{\omega^2 + 1}}$ ,  $\varphi(\omega) = \arctg\left(\frac{2}{\omega}\right) - \arctg(\omega)$