

5.1 Różniczka zupełna funkcji

Rozpatrzmy funkcję $f(x, y)$ klasy C^1 . Przyrost funkcji wynosi

$$\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Przyrost ten można zapisać za pomocą pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu

$$\Delta f = f_x \Delta x + f_y \Delta y + \varepsilon \rho,$$

gdzie $\varepsilon \rightarrow 0$, gdy $\rho \rightarrow 0$.

Wyrażenie $\delta f = f_x dx + f_y dy$ nazywamy *różniczką zupełną* funkcji $f(x, y)$.

Różniczka jest przybliżoną wartością przyrostu funkcji.

Wyrażenie $P dx + Q dy = du$ jest różniczką zupełną funkcji $u(x, y)$ klasy C^2 , jeżeli

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Rozpatrzmy funkcję $f(x, y, z)$ klasy C^1 . Przyrost funkcji wynosi

$$\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z).$$

Przyrost ten można zapisać za pomocą pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu

$$\Delta f = f_x \Delta x + f_y \Delta y + f_z \Delta z + \varepsilon \rho,$$

gdzie $\varepsilon \rightarrow 0$, gdy $\rho \rightarrow 0$.

Wyrażenie $\delta f = f_x dx + f_y dy + f_z dz$ nazywamy *różniczką zupełną* funkcji $f(x, y, z)$.

Wyrażenie $P dx + Q dy + R dz = du$ jest różniczką zupełną funkcji $u(x, y, z)$ klasy C^2 , jeżeli

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Przykład 5.1. Obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia

$$\sqrt{(1,02)^2 + (1,97)^3}.$$

Rozwiązanie. Liczbę tę można traktować jako wartość funkcji $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^3}$ w punkcie $(x, y) = (1, 2)$ z poprawką wynikającą z przyrostów $\Delta x = 0,02$, $\Delta y = -0,03$.

Mamy przybliżenie $\Delta f \approx df$, stąd $f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) \approx f(x, y, z) + \delta f$.

$$\delta f = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^3}} \Delta x + \frac{\frac{3}{2}y^2}{\sqrt{x^2 + y^3}} \Delta y.$$

Podstawiając $x = 1$, $y = 2$ otrzymujemy $\delta f = \frac{1}{3} \cdot 0,02 + \frac{12}{6} \cdot (-0,03) = -0,053$. Zatem przybliżona wartość wyrażenia wynosi

$$R = 3 - 0,053 = 2,947.$$

□