1.1 Definicja i podstawowe własności

Definicja 1.1. Ciąg liczbowy jest funkcją, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$ natomiast wartościami liczby rzeczywste (lub zespolone jeśli rozpatrujemy ciągi o wartościach zespolonych).

Liczbę rzeczywistą przyporządkowaną liczbie naturalnej n, oznaczamy przez a_n i nazywamy n-tym wyrazem ciągu, zaś ciąg oznaczamy symbolem $\{a_n\}$. Aby określić ciąg podajemy wzór na n-ty wyraz ciągu, czyli a_n.

Przykład 1.2. a) $a_n = \frac{1}{n}$ czyli $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}, \ldots$

b) $a_n = (-1)^n$ czyli $a_1 = -1, a_2 = 1, a_3 = -1, \ldots$

Aby utworzyć a_{n+1} wyraz ciągu należy zastąpić występującą w a_n liczbę n przez $n+1$.

Przykład 1.3.

$$a_n = \frac{2n+1}{3n+2}, \quad a_{n+1} = \frac{2(n+1)+1}{3(n+1)+2} = \frac{2n+3}{3n+5}$$

Ciąg ma interpretację geometryczną na płaszczyźnie OXY, jako zbiór punktów (n, a_n). Ciąg może być:

a) rosnący jeżeli $a_{n+1} > a_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

b) niemalejący jeżeli $a_{n+1} \geq a_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

c) malejący jeżeli $a_{n+1} < a_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

d) nierosnący jeżeli $a_{n+1} \leq a_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Ciąg jest *monotoniczny*, jeżeli spełnia co najmniej jeden z powyższych warunków, z tym, że ciąg rosnący jest także niemalejący, zaś ciąg malejący jest także nierosnący. Ciągi rosnące i malejące nazywamy ściśle monotonicznymi. Ciągi które nie są monotoniczne nazywamy niemonotonicznymi.

Przykład 1.4. Zbadać monotoniczność ciągu

$$a_n = \frac{2n+1}{3n+2}$$

mamy

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2n+3}{3n+5} - \frac{2n+1}{3n+2} = \frac{(2n+3)(3n+2) - (3n+5)(2n+1)}{(3n+5)(3n+2)} =$$
$$= \frac{1}{(3n+5)(3n+2)} > 0$$

dla $n \in \mathbb{N}$. Oznacza to, że $a_{n+1} - a_n > 0$ tzn. $a_{n+1} > a_n$. Ciąg jest zatem rosnący.

Przykład 1.5. Zbadać monotoniczność ciągu

$$a_n = n^2 - 12n + 36$$

Rozwiązanie. Mamy $a_{n+1} = (n+1)^2 - 12(n+1) + 36 = n^2 - 10n + 25$, tak więc

$$a_{n+1} - a_n = n^2 - 10n + 25 - (n^2 - 12n + 36) = 2n - 11$$

dla $n \leq 5$ jest $a_{n+1} < a_n$ natomiast dla $n \geq 6$ mamy $a_{n+1} > a_n$. Oznacza to, że ciąg nie jest monotoniczny. □

Ciąg jest *ograniczony z góry* jeżeli wszystkie jego wyrazy są mniejsze (lub równe) od pewnej liczby M.

Ciąg jest *ograniczony z dołu* jeżeli wszystkie jego wyrazy są większe (lub równe) od pewnej liczby M.

Ciąg jest *ograniczony* jeżeli jest ograniczony z góry i z dołu.

Wśród ciągów liczbowych wyróżnia się dwa szczególne rodzaje ciągów: ciąg arytmetyczny oraz ciąg geometryczny.

Ciąg arytmetyczny (a_n) jest to ciąg liczbowy którego wyrazy spełniają warunek $a_{n+1} - a_n = r$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ gdzie $r \neq 0$ jest pewną ustaloną wartością zwaną *różnicą* ciągu. Dla ciągu arytmetycznego zachodzą następujące zależności

$$a_n = a_1 + (n-1)r \qquad a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego $\sum_{k=1}^{n} a_k$ wyraża się wzorem

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n \quad \text{lub} \quad S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} n$$

Ciąg geometryczny jest to ciąg którego wyrazy spełniają warunek

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}$$

gdzie $q \neq 1$ jest ustaloną liczbą zwaną ilorazem ciągu. Zachodzą następujące zależności

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

Suma n początkowych wyrazów ciągu wyraża się wzorem

$$S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Granica ciągu

Liczbę a nazywamy *granicą ciągu* $\{a_n\}$, co zapisujemy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

jeżeli każde otoczenie liczby a zawiera prawie wszystkie wyrazy tego ciągu.

Jest to równoważne następującemu zapisowi: dla każdego $\epsilon > 0$ prawie wszystkie wyrazy ciągu spełniają nierówność $|a_n - a| < \epsilon$. Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ posiada granicę skończoną to mówimy, że ciąg jest *zbieżny*. Ciąg, który nie jest zbieżny nazywamy rozbieżnym. Można wykazać następujące

Twierdzenie 1.6. *Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony.*

Twierdzenie 1.7. *Każdy ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.*

Wśród ciągów rozbieżnych wyróżniamy takie które są rozbieżne do $+\infty$ lub $-\infty$, czyli

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \text{lub} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

Wyznaczanie granic ciągów ułatwia następujące twierdzenie

Twierdzenie 1.8. *Jeżeli ciągi* $\{a_n\}, \{b_n\}$ *są zbieżne oraz*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

to mamy następujące równości

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = ab$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$

gdy $b_n \neq 0$ *dla każdego* $n \in \mathbb{N}$ *oraz* $b \neq 0$.

Przy obliczaniu granic mogą wystąpić wyrażenia nieoznaczone

$$\frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty^0, \quad 0^0, \quad 1^\infty, \quad \infty - \infty.$$

W tym przypadku nie można powiedzieć nic o zbieżności ciągu. Stosując odpowiednie przekształcenie wyrazu ogólnego a_n ciągu, można niejednokrotnie uwolnić się od wyrażenia nieoznaczonego.

Jeżeli a_n jest funkcją wymierną to wystarczy podzielić licznik oraz mianownik przez n występujące w najwyższej potędze mianownika.

Przykład 1.9. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 - 1}{3n^2 + 1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 - \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{1}{n^2}} = \dfrac{1}{3}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+3}{n^2-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}{1-\frac{1}{n^2}} = \dfrac{0}{1} = 0$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+2}{n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+\frac{2}{n}}{1-\frac{1}{n}} = \dfrac{\infty}{1} = \infty$

Zauważmy, że jeżeli stopień wielomianu w liczniku jest równy stopniowi wielomianu w mianowniku, to granica jest równa ilorazowi współczynników przy najwyższej potędze. Jeżeli stopień wielomianu licznika jest mniejszy od stopnia wielomianu mianownika to granica jest równa 0. Jeżeli stopień wielomianu licznika jest większy od stopnia wielomianu mianownika to granica jest równa ∞ lub $-\infty$. Przy obliczaniu granic często korzystamy z następujących wzorów

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

gdzie $e = 2,718\ldots$ jest liczbą niewymierną natomiast $a \in \mathbb{R}_+$. Logarytm o podstawie e nazywamy *logarytmem naturalnym* i oznaczamy $\log_e x = \ln x$.

Przykład 1.10. Wyznaczyć granicę ciągu

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+4} - \sqrt{n}).$$

Rozwiązanie.

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+4} - \sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n+4} - \sqrt{n})(\sqrt{n+4} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n}} = 0$$

□

Przykład 1.11. Wyznaczyć granicę ciągu

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{9n^2+1}{n^2+4}}.$$

Rozwiązanie.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{9n^2+1}{n^2+4}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{9+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{4}{n^2}}} = 3.$$

□

Przykład 1.12. Wyznaczyć granicę ciągu

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^4}.$$

Rozwiązanie.
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^4} = \lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n})^4 = (\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n})^4 = (1)^4 = 1.$$

□

Przykład 1.13. Wyznaczyć granicę ciągu
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n.$$

Rozwiązanie.
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}\cdot 2} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}\right]^2 = e^2.$$

□

Przykład 1.14. Wyznaczyć granicę ciągu
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n+1}.$$

Rozwiązanie.
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \left(1 + \frac{1}{n}\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{-1} \cdot 1 = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

□