

Wykład 7. Układy trójfazowe

Wstęp

Do najważniejszych w elektrotechnice (z punktu widzenia praktycznego) należą obwody trójfazowe, w których główną rolę odgrywa układ trzech źródeł napięciowych sinusoidalnych o jednakowej częstotliwości, przesuniętych względem siebie o określony kąt fazowy i wytworzonych w jednym generatorze zwanym generatorem trójfazowym współpracujący z odbiornikiem trójfazowym składającym się z trzech impedancji połączonych bądź w trójkąt bądź w gwiazdę. Układy takie są powszechnie stosowane w technice przy dystrybucji energii elektrycznej na obszarze kraju i z tego powodu analiza zjawisk w takich układach jest szczególnie ważna.

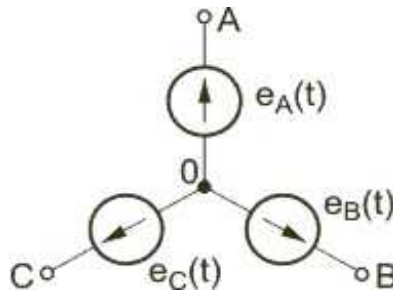
Wykład ten poświęcony będzie obwodom trójfazowym. Wprowadzone zostaną podstawowe pojęcia, takie jak generator trójfazowy, odbiornik trójfazowy, wykresy wektorowe prądów i napięć trójfazowych a także relacje między prądami i mocami przy połączeniu odbiornika w gwiazdę i trójkąt. Rozważone zostaną układy pomiarowe mocy w obwodach trójfazowych trójprzewodowych i czteroprzewodowych.

7.1. Pojęcia wstępne

7.1.1. Definicja generatora trójfazowego

Generatorem trójfazowym nazywamy układ trzech źródeł sinusoidalnych o tej samej częstotliwości, przesuniętych względem siebie o określony kąt fazowy i wytworzonych w jednym generatorze, zwanym generatorem trójfazowym. Poszczególne źródła generatora trójfazowego nazywać będziemy **fazami** i oznaczać literami A, B, C lub kolejnymi cyframi 1, 2, 3. Trzy źródła generatora mogą być połączone w ten sposób, że poszczególne napięcia fazowe tworzą **układ gwiazdowy** z jednym punktem wspólnym wszystkich faz lub **układ trójkątny**, w którym każda faza jest połączona z następną tworząc w efekcie trójkąt zamknięty napięć.

Przykład połączenia 3 faz generatora w jeden układ gwiazdowy przedstawiony jest na rys. 7.1.



Rys. 7.1. Układ faz generatora trójfazowego połączonego w gwiazdę

Punkt wspólny wszystkich trzech faz generatora oznaczony jest cyfrą 0. Poszczególnym napięciom fazowym przypisuje się wskaźniki A, B, C lub w przypadku oznaczenia liczbowego cyfry 1, 2, 3.

Układ napięć źródłowych generatora trójfazowego nazywać będziemy **symetrycznym**, jeśli napięcia kolejnych faz są przesunięte względem siebie o kąt 120° $\left(\frac{2}{3}\pi\right)$ a amplitudy ich są sobie równe. Wartości chwilowe poszczególnych **napięć fazowych** układu symetrycznego można wówczas zapisać w postaci

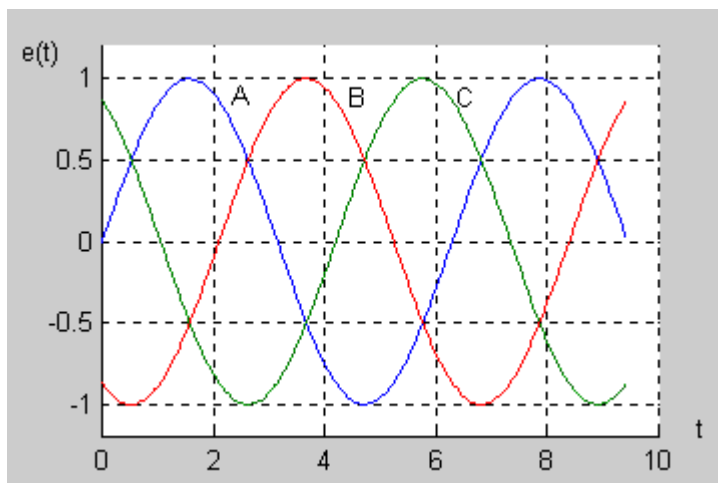
$$e_A(t) = |E_m| \sin(\omega t + \Psi) \quad (7.1)$$

$$e_B(t) = |E_m| \sin(\omega t + \Psi - 120^\circ) \quad (7.2)$$

$$e_C(t) = |E_m| \sin(\omega t + \Psi + 120^\circ) \quad (7.3)$$

w której E_m oznacza amplitudę, ω pulsację wspólną dla wszystkich faz (przy generacji napięć trójfazowych w jednym generatorze jest to zapewnione automatycznie) a kąt Ψ jest początkowym kątem fazowym napięcia w fazie A.

W normalnym systemie trójfazowym przyjmuje się tzw. **kolejność wirowania zgodną**, w której faza B opóźnia się względem fazy A o kąt 120° a faza C (opóźniona względem fazy B o kolejny kąt 120°) wyprzedza fazę A o kąt równy 120° .



Rys. 7.2. Przebiegi czasowe napięć trójfazowych



Na rys. 7.2 przedstawiono przebiegi czasowe napięć trójfazowych przy kącie początkowym Ψ równym zero. Napięcia są zmienne sinusoidalnie przy czym występują regularne przesunięcia o kąt 120° między poszczególnymi sinusoidami.

7.1.2. Reprezentacja geometryczna układu napięć fazowych

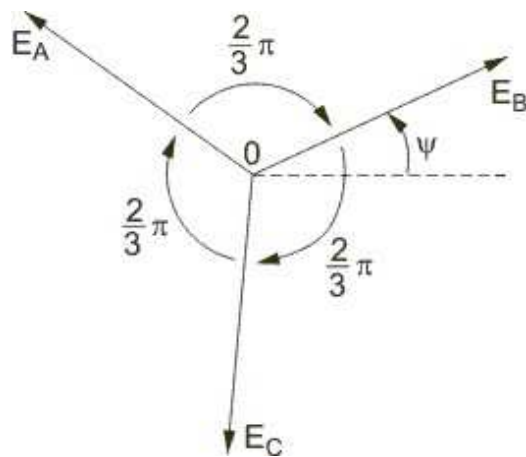
Wobec sinusoidalnej postaci wymuszeń w analizie układów trójfazowych zastosujemy metodę symboliczną liczb zespolonych. Zgodnie z tą metodą napięcia sinusoidalne zastępuje się ich postacią zespoloną, która dla przyjętych funkcji sinusoidalnych może być zapisana następująco

$$E_A = \frac{|E_m|}{\sqrt{2}} e^{j\Psi} \quad (7.4)$$

$$E_B = \frac{|E_m|}{\sqrt{2}} e^{j(\Psi-120^\circ)} = E_A e^{-j120^\circ} \quad (7.5)$$

$$E_C = \frac{|E_m|}{\sqrt{2}} e^{j(\Psi+120^\circ)} = E_A e^{j120^\circ} \quad (7.6)$$

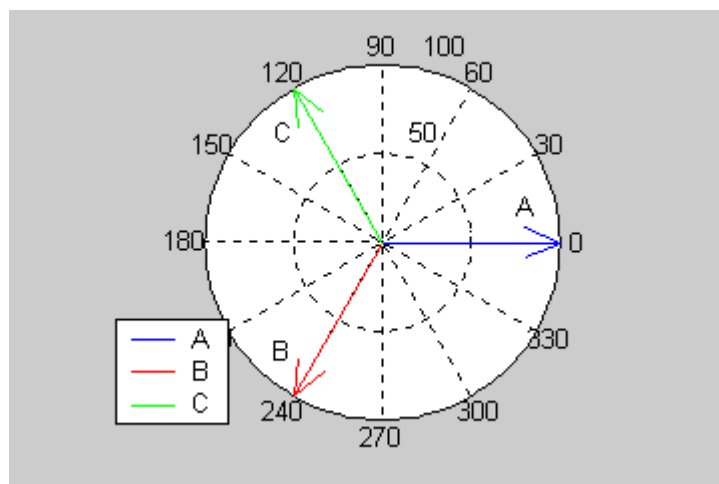
W praktyce wobec nieustannej zmiany wartości napięć w czasie faza początkowa Ψ może być przyjęta dowolnie. Najczęściej dla wygody zakładamy będziemy, że jest równa zero. Wykres wektorowy napięć trójfazowych opisanych zależnościami (7.4) - (7.6) dla kąta fazowego $\Psi \neq 0$ przedstawiony jest na rys. 7.3.



Rys. 7.3. Wykres wektorowy napięć trójfazowych generatora

Punkt wspólny napięć, odpowiadający wspólnemu punktowi połączenia faz generatora oznaczony jest cyfrą 0. Na końcach napięć fazowych zaznaczone są oznaczenia faz (A, B, C). Napięcie fazowe generatora to napięcie między punktem końcowym wektora a punktem zerowym.

Wirowanie faz (zmiana pozycji wektora w czasie) w generatorze trójfazowym odbywa się w przyjętym układzie współrzędnych przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.



Rys. 7.4. Wektory napięć trójfazowych wirujące w czasie



Rys. 7.4 pokazuje wektory napięć generatora trójfazowego symetrycznego wirujące w czasie. Wektory fazy B i C nadążają za wektorem A, przy czym przesunięcia fazowe między

nimi są stałe i równe dokładnie 120° . Ważną cechą trójfazowego generatora symetrycznego jest zerowanie się sumy napięć fazowych

$$E_A + E_B + E_C = 0 \quad (7.7)$$

Wartość zerowa sumy wynika bezpośrednio z symetrii poszczególnych napięć. Mianowicie

$$E_A + E_B + E_C = E_A + E_A e^{-j120^\circ} + E_A e^{j120^\circ} = E_A \left(1 - 0,5 - j\frac{\sqrt{3}}{2} - 0,5 + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0$$

7.1.3. Reprezentacja geometryczna układu napięć międzyfazowych

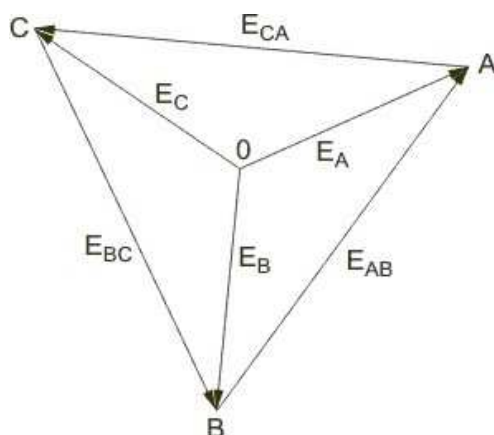
Oprócz napięć fazowych wyróżnia się również układ **napięć międzyfazowych**, zwanych również liniowymi, czyli napięć panujących między punktami zewnętrznymi poszczególnych faz. Przy trzech napięciach fazowych można wyróżnić trzy napięcia międzyfazowe: E_{AB} , E_{BC} oraz E_{CA} , przy czym

$$E_{AB} = E_A - E_B \quad (7.8)$$

$$E_{BC} = E_B - E_C \quad (7.9)$$

$$E_{CA} = E_C - E_A \quad (7.10)$$

Z definicji napięć międzyfazowych wynika, że niezależnie od symetrii ich suma jest zawsze równa zero gdyż wszystkie trzy napięcia tworzą w sumie trójkąt zamknięty. Rys. 7.5 pokazuje układ napięć międzyfazowych generatora trójfazowego z przyjętymi oznaczeniami. Symbol E_{AB} oznacza, że strzałka wektora napięcia na wykresie jest skierowana w stronę pierwszego wskaźnika w oznaczeniu (u nas litera A).



Rys. 7.5. Układ napięć międzyfazowych na tle napięć fazowych



Z symetrii napięć fazowych wynika bezpośrednio symetria napięć międzyfazowych. Napięcia te są równe i przesunięte względem siebie o kąt 120° , czyli

$$E_{AB} = E_A - E_B$$

$$E_{BC} = E_{AB} e^{-j120^\circ}$$

$$E_{CA} = E_{AB} e^{j120^\circ}$$

Układ napięć międzyfazowych symetrycznych tworzy więc trójkąt równoboczny. Wykorzystując relacje obowiązujące dla tego trójkąta łatwo jest udowodnić, że napięcie międzyfazowe jest $\sqrt{3}$ razy większe niż napięcie fazowe, co zapiszemy w ogólności jako

$$|E_{mf}| = \sqrt{3} |E_f| \quad (7.11)$$

gdzie $|E_f|$ oznacza moduł napięcia fazowego a $|E_{mf}|$ moduł napięcia międzyfazowego.

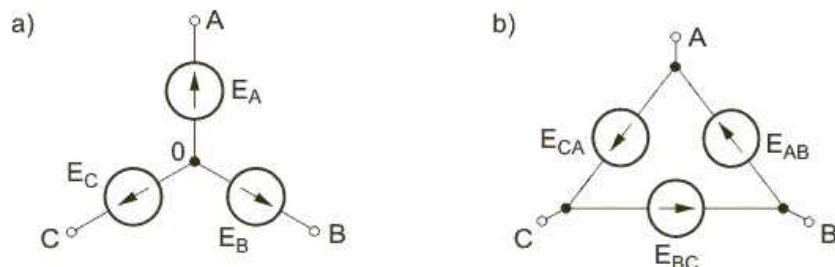
7.2. Analiza układów trójfazowych

Układ trójfazowy powstaje jako wynik połączenia generatora trójfazowego z odbiornikiem trójfazowym, utworzonym przez trzy impedancje połączone w układzie gwiazdowym lub trójkątnym.

7.2.1. Połączenia trójfazowe generatora i odbiornika

Układ napięć fazowych generatora może być połączony bądź w gwiazdę bądź w trójkąt.

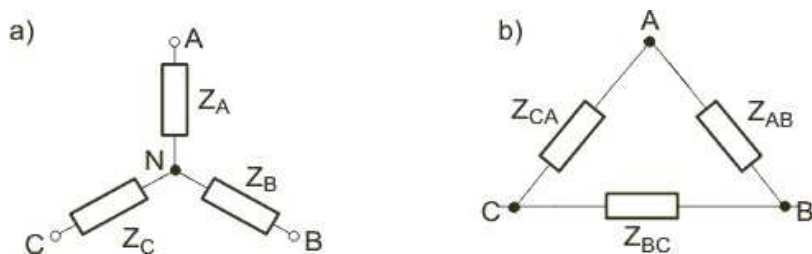
Schemat obu połączeń przedstawiony jest na rys. 7. 6



Rys. 7.6. Połączenia faz generatora trójfazowego w a) gwiazdę, b) trójkąt

Przy połączeniu trójkątnym generatora odbiornik jest zasilany napięciem międzyfazowym trójprzewodowym. Przy połączeniu generatora w gwiazdę napięcie zasilające jest napięciem fazowym a liczba przewodów może być równa trzy bądź cztery (przy czterech przewodach zasilających jednym z nich jest przewód zerowy, zwany również przewodem neutralnym).

W układzie trójfazowym odbiornik zawiera również trzy fazy, przy czym może być on połączony w gwiazdę lub w trójkąt. Oba sposoby połączenia odbiornika przedstawione są na rys. 7.7.



Rys. 7.7. Odbiornik trójfazowy połączony w a) gwiazdę, b) trójkąt

W zależności od sposobu połączenia generatora i odbiornika można w układach trójfazowych wyróżnić cztery rodzaje połączeń. Są to:

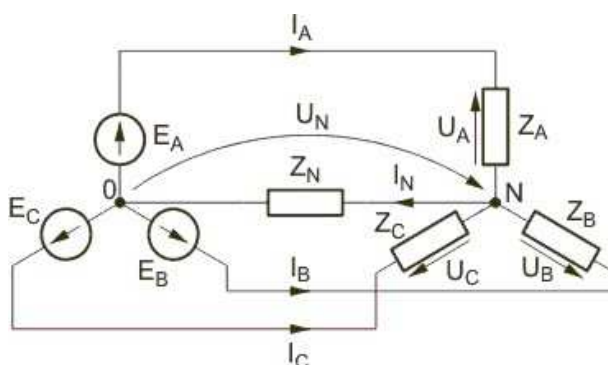
- generator i odbiornik połączone w gwiazdę (układ gwiazdowy)
- generator i odbiornik połączone w trójkąt (układ trójkątny)
- generator połączony w gwiazdę a odbiornik w trójkąt
- generator połączony w trójkąt a odbiornik w gwiazdę.

Z punktu widzenia metodyki analizy obwodów istotne są tylko dwa pierwsze rodzaje połączeń. Dwa pozostałe są wtórne względem pierwszych i nie wnoszą nowych elementów

do metody analizy (poprzez odpowiednie transfiguracje odbiornika mogą być sprowadzone do jednego z dwu pierwszych wymienionych połączeń).

7.2.2. Układ gwiazdowy faz generatora i odbiornika

Rozpatrzmy układ połączeń gwiazdowych odbiornika i generatora (gwiazda-gwiazda) z oznaczeniami prądów i napięć przedstawionymi na rys. 7.8.



Rys. 7.8. Układ trójfazowy gwiazdowy

Punkt 0 oznacza punkt wspólny faz generatora. Punkt N jest punktem wspólnym impedancji fazowych odbiornika. Zakładamy symetrię napięć fazowych generatora i dowolne wartości impedancji odbiornika. Przyjmijmy do analizy układ czteroprzewodowy z impedancją przewodu zerowego równa Z_N . Wartość impedancji Z_N może być dowolna, w szczególności zerowa (bezpośrednie zwarcie punktów wspólnych generatora i odbiornika) lub nieskończona (układ trójprzewodowy bez przewodu zerowego). Napięcie między punktem zerowym odbiornika i generatora oznaczmy przez U_N i nazywać będziemy **napięciem niezrównoważenia**.

Układ napięć trójfazowych odbiornika tworzą napięcia na poszczególnych jego fazach, czyli U_A, U_B, U_C . W efekcie w obwodzie trójfazowym o połączeniu gwiazda-gwiazda wyróżnia się dwa układy napięć trójfazowych gwiazdowych: generatora E_A, E_B, E_C i odbiornika U_A, U_B, U_C .

Dla obliczenia prądów w obwodzie należy wyznaczyć układ napięć odbiornikowych. Najlepiej dokonać tego wyznaczając napięcie U_N . Zastosujemy metodę potencjałów węzłowych przy założeniu, że punkt 0 jest węzłem odniesienia a poszukiwany potencjał węzłowy jest równy U_N . Zgodnie z metodą potencjałów węzłowych otrzymuje się

$$E_A Y_A + E_B Y_B + E_C Y_C = U_N (Y_A + Y_B + Y_C + Y_N) \quad (7.12)$$

Stąd

$$U_N = \frac{E_A Y_A + E_B Y_B + E_C Y_C}{(Y_A + Y_B + Y_C + Y_N)} \quad (7.13)$$

gdzie wielkości oznaczone symbolem Y są admitancjami: $Y_A = \frac{1}{Z_A}$, $Y_B = \frac{1}{Z_B}$, $Y_C = \frac{1}{Z_C}$,

$Y_N = \frac{1}{Z_N}$. Wyznaczenie wartości napięcia U_N pozwala obliczyć wartości napięć odbiornikowych. Z prawa napięciowego Kirchhoffa napisanego dla trzech oczek w obwodzie wynika

$$U_A = E_A - U_N \quad (7.14)$$

$$U_B = E_B - U_N \quad (7.15)$$

$$U_C = E_C - U_N \quad (7.16)$$

Przy znanych wartościach admitancji odbiornika obliczenie prądu polega na zastosowaniu prawa Ohma. Mianowicie

$$I_A = Y_A U_A \quad (7.17)$$

$$I_B = Y_B U_B \quad (7.18)$$

$$I_C = Y_C U_C \quad (7.19)$$

$$I_N = Y_N U_N \quad (7.20)$$

Suma prądów w węźle N jest równa zero, zatem $I_A + I_B + I_C = I_N$. Moce wydzielone w odbiorniku trójfazowym oblicza się jako sumę mocy wydzielonych w poszczególnych fazach odbiornika, czyli

$$S_A = P_A + jQ_A = U_A I_A^* \quad (7.21)$$

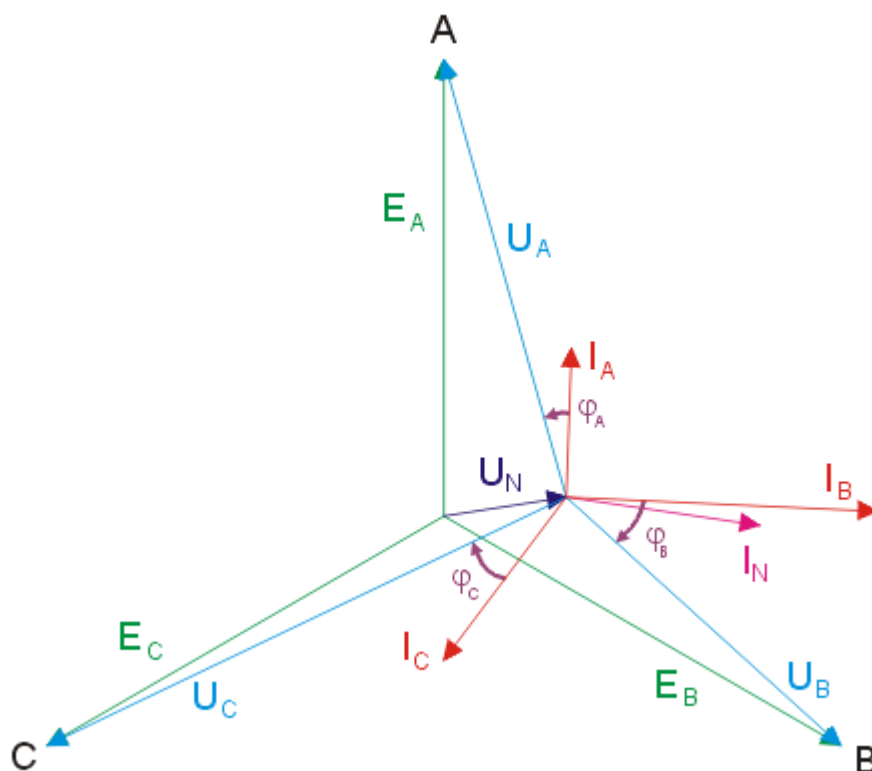
$$S_B = P_B + jQ_B = U_B I_B^* \quad (7.22)$$

$$S_C = P_C + jQ_C = U_C I_C^* \quad (7.23)$$

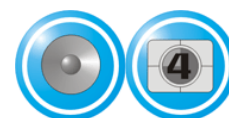
Moc wydzielona na impedancji przewodu zerowego oznacza moc strat. Jest ona równa

$$S_N = P_N + jQ_N = U_N I_N^* \quad (7.24)$$

Otrzymane wyniki można zinterpretować na wykresie wektorowym prądów i napięć w obwodzie. Rys. 7.9 przedstawia przypadek **obciążenia niesymetrycznego**.



Rys. 7.9. Wykres wektorowy prądów i napięć obwodu trójfazowego przy obciążeniu niesymetrycznym

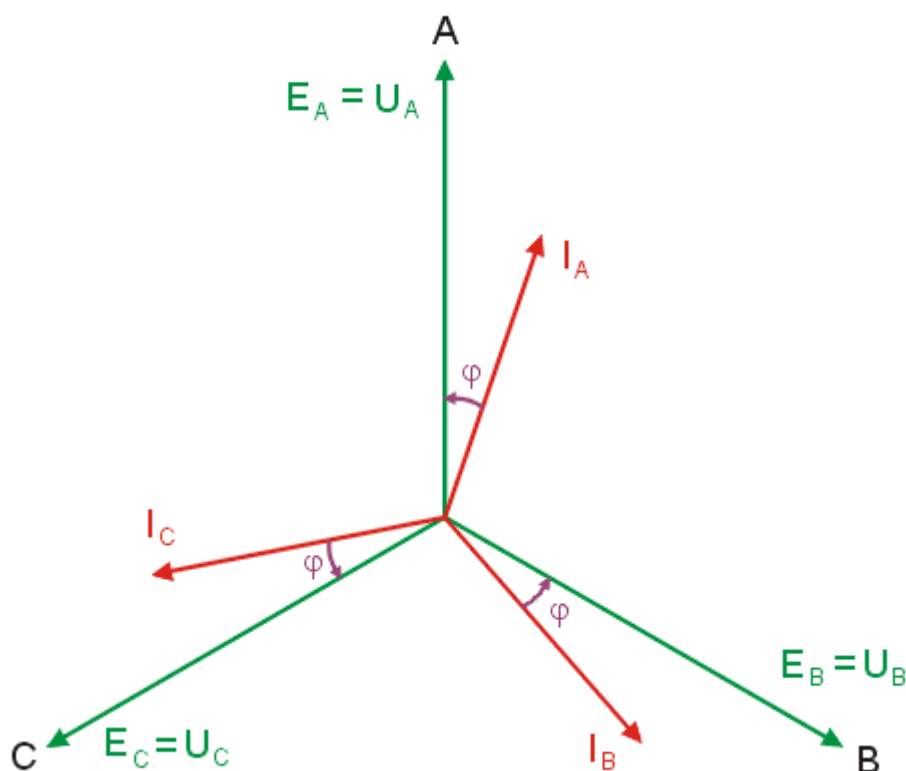


Widoczne są dwie gwiazdy napięć fazowych: generatora o środku w punkcie 0 i odbiornika o środku w punkcie N . Dla obu gwiazd obowiązuje jeden trójkąt napięć międzyfazowych. Przesunięcie potencjału punktu N względem 0 (napięcie U_N różne od zera) jest spowodowane niesymetrią odbiornika.

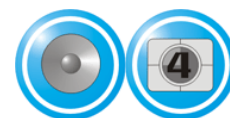
W pracy układu trójfazowego gwiazdowego można wyróżnić kilka szczególnych przypadków.

- **Odbiornik symetryczny** ($Z_A = Z_B = Z_C = Z$) z dowolną wartością impedancji przewodu zerowego

W tym przypadku napięcie niezrównoważenia $U_N=0$, a prąd przewodu zerowego $I_N=0$. Napięcia fazowe odbiornika są równe odpowiednim napięciom generatora: $U_A = E_A, U_B = E_B, U_C = E_C$. Przy równych wartościach impedancji fazowych wszystkie prądy fazowe są równe co do amplitudy i przesunięte w fazie o 120° . Rys. 7.10 przedstawia wykres wektorowy prądów i napięć dla tego przypadku.



Rys. 7.10. Wykres wektorowy prądów i napięć w układzie trójfazowym symetrycznym



Odbiornik symetryczny jest jednym z częściej występujących przypadków w praktyce. Przykładami takich odbiorników są: silniki elektryczne trójfazowe czy piece grzejne trójfazowe (zwykle o dużej mocy).

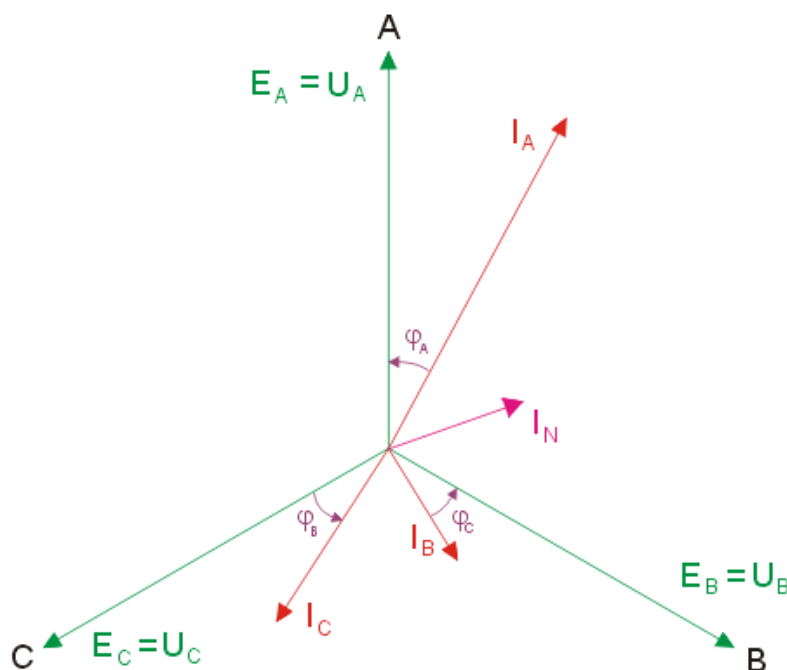
- **Odbiornik niesymetryczny przy zwartym przewodzie zerowym**

W tym przypadku napięcie niezrównoważenia $U_N=0$, stąd napięcia fazowe odbiornika są równe odpowiednim napięciom fazowym generatora (identycznie jak w poprzednim przypadku), ale prąd przewodu zerowego $I_N \neq 0$. Prądy fazowe odbiornika są wówczas

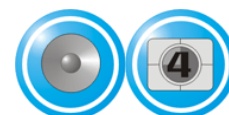
określane bezpośrednio na podstawie układu napięć generatorowych. Suma tych prądów w ogólnym przypadku odbiornika niesymetrycznego jest różna od zera

$$I_N = I_A + I_B + I_C \quad (7.25)$$

Wykres wektorowy prądów i napięć w układzie trójfazowym niesymetrycznym przy zwarcii bezimpedancyjnym punktów wspólnych odbiornika i generatora przedstawiony jest na rys. 7.11.



Rys. 7.11. Wykres wektorowy prądów i napięć w układzie trójfazowym przy $Z_N=0$



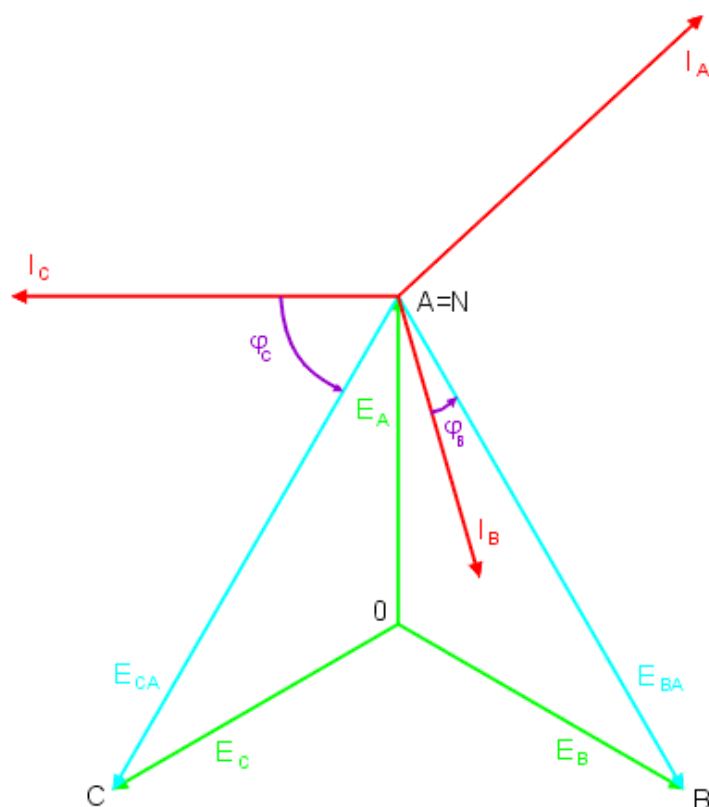
- Zwarcie fazy odbiornika przy przerwie w przewodzie zerowym**

W tym przypadku napięcie niezrównoważenia jest równe napięciu fazowemu fazy zwartej. Jeśli zwartą fazą odbiornika jest faza A ($Z_A=0$), wówczas $U_N=E_A$, a napięcia odbiornikowe poszczególnych faz są określone relacjami: $U_A = E_A - E_A = 0$, $U_B = E_B - E_A$, $U_C = E_C - E_A$. Wobec zerowej wartości napięcia odbiornikowego fazy A i zerowej impedancji tej fazy prąd

fazy zwartej nie może być określony z prawa Ohma (dzielenie zera przez zero). Określa się go z prawa prądowego Kirchhoffa napisanego dla węzła N , zgodnie z którym

$$I_A = -I_B - I_C \quad (7.26)$$

Wykres wektorowy prądów i napięć w układzie trójfazowym dla przypadku zwarcia fazy A odbiornika przedstawiony jest na rys. 7.12.

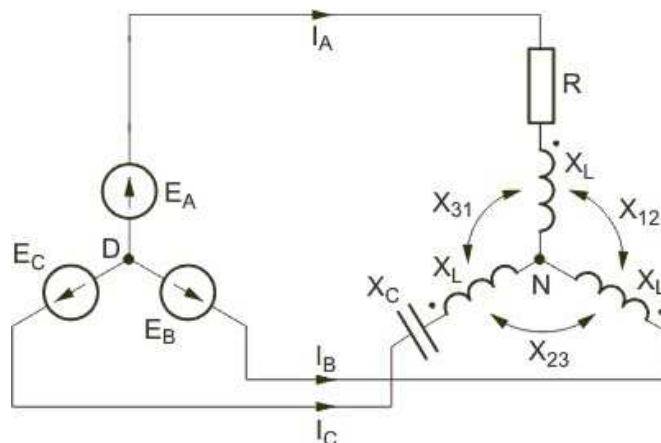


Rys. 7.12. Wykres wektorowy prądów i napięć w układzie trójfazowym przy zwarcia fazy A odbiornika



Przykład 7.1

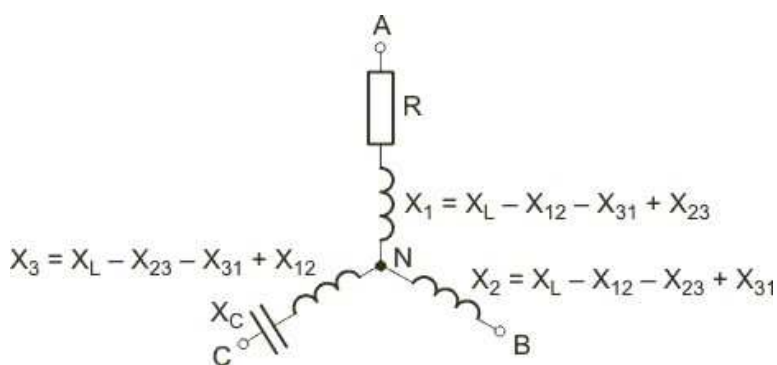
Obliczyć prądy i napięcia poszczególnych faz odbiornika w układzie przedstawionym na rys. 7.13. Przyjąć zasilanie trójfazowe symetryczne o napięciu fazowym równym 400V. Wartości parametrów obwodu są następujące: $R=40\Omega$, $X_C=20\Omega$, $X_L=60\Omega$, $X_{12}=10\Omega$, $X_{23}=20\Omega$, $X_{31}=30\Omega$.



Rys. 7.13. Schemat układu trójfazowego do przykładu 7.1

Rozwiązanie

Ze względu na występowanie sprzężenia magnetycznego pierwszym etapem rozwiązania jest eliminacja tych sprzężeń. Układ odbiornika po likwidacji sprzężeń magnetycznych jest przedstawiony na rys. 7. 14



Rys. 7.14. Schemat odbiornika trójfazowego po likwidacji sprzężeń magnetycznych

Przyjmijmy układ napięć fazowych generatora w następującej postaci

$$E_A = 400e^{j0}$$

$$E_B = 400e^{-j120^\circ}$$

$$E_C = 400e^{j120^\circ}$$

Impedancje poszczególnych faz odbiornika z rys. 7.15 są równe

$$Z_A = 40 + j40 = 40\sqrt{2}e^{j45^\circ}$$

$$Z_B = j60 = 60e^{j90^\circ}$$

$$Z_C = 0$$

Wobec zwarcia w fazie C odbiornika ($Z_C = 0$) nie zachodzi potrzeba stosowania wzoru (7.13) do wyznaczenia napięcia niezrównoważenia, gdyż $U_N = E_C$. W tej sytuacji poszczególne prądy fazowe są równe

$$I_A = \frac{E_A - U_N}{Z_A} = \frac{400 - 400e^{j120^\circ}}{40\sqrt{2}e^{j45^\circ}} = 12,25e^{-j75^\circ} = 3,17 - j11,83$$

$$I_B = \frac{E_B - U_N}{Z_B} = \frac{400e^{-j120^\circ} - 400e^{j120^\circ}}{60e^{j90^\circ}} = -11,6$$

.

$$I_C = -I_A - I_B = 8,38 + j11,83$$

Po obliczeniu prądów na podstawie schematu zastępczego bez sprzężeń magnetycznych dla wyznaczenia napięć w układzie należy powrócić do obwodu ze sprzężeniami. Rzeczywiste napięcia na fazach odbiornika wynoszą

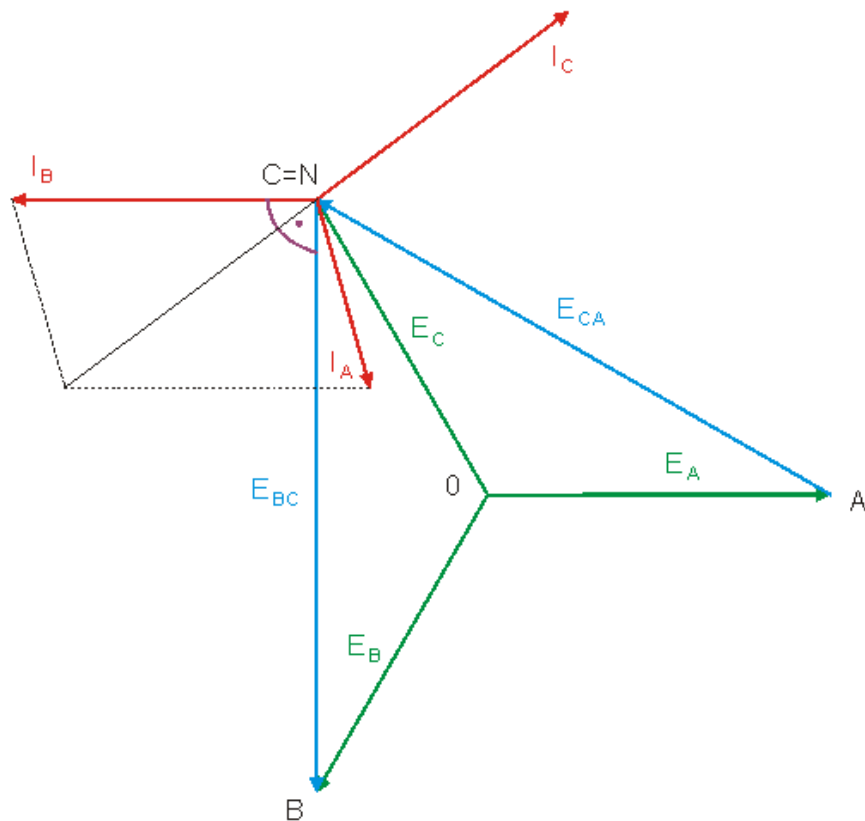
$$U_A = RI_A + jX_L I_A + jX_{12} I_B + jX_{31} I_C = 482 - j147$$

$$U_B = jX_L I_B + jX_{12} I_A + jX_{23} I_C = -118 - j494$$

$$U_C = jX_L I_C + jX_{31} I_A + jX_{23} I_B - jX_C I_C = -118 + j199$$

Zauważmy, że istnieje ogromna różnica między rzeczywistym napięciem U_C w fazie C, a napięciem w tej samej fazie w obwodzie po likwidacji sprzężeń, $U_C = 0$. Obwód po likwidacji sprzężeń jest równoważny obwodowi oryginalnemu jedynie pod względem prądowym. Napięcia na gałęziach zawierających cewki sprzężone nie odpowiadają ich odpowiednikom w obwodzie bez sprzężeń.

Na rys. 7.15 przedstawiono wykres wektorowy prądów i napięć w obwodzie po likwidacji sprzężeń.

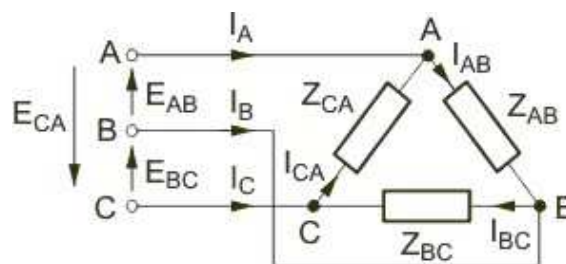


Rys. 7.15. Wykres wektorowy układu trójfazowego po likwidacji sprzężeń magnetycznych w przykładzie 7.1



7.2.3 Układ trójkątny faz odbiornika i generatora

Schemat elektryczny połączeń elementów obwodu trójfazowego o odbiorniku i generatorze połączonych w trójkąt (układ trójkąt-trójkąt) przedstawia rys. 7.17.



Rys. 7.17. Układ trójfazowy trójkątny

Przyjmijmy dla uproszczenia, że impedancje przewodów zasilających poszczególne fazy są zerowe. Oznacza to, że napięcia na fazach odbiornika (włączonych międzyfazowo) są napięciami międzyfazowymi generatora, to jest

$$U_{AB} = E_{AB} \quad (7.27)$$

$$U_{BC} = E_{BC} \quad (7.28)$$

$$U_{CA} = E_{CA} \quad (7.29)$$

Stąd przy zadanych wartościach impedancji odbiornika prądy fazowe tego odbiornika są określone wzorami

$$I_{AB} = Y_{AB} E_{AB} \quad (7.30)$$

$$I_{BC} = Y_{BC} E_{BC} \quad (7.31)$$

$$I_{CA} = Y_{CA} E_{CA} \quad (7.32)$$

Prądy przewodowe zasilające obwód trójkątny odbiornika mogą być wyznaczone z zależności

$$I_A = I_{AB} - I_{CA} \quad (7.33a)$$

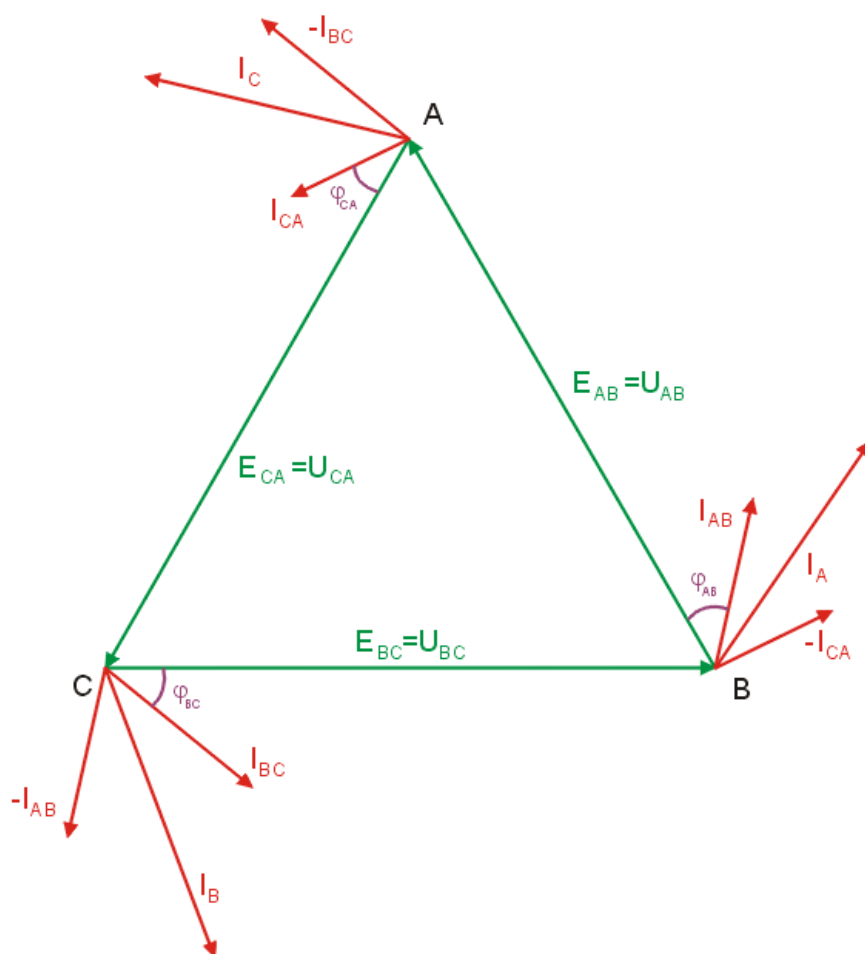
$$I_B = I_{BC} - I_{AB} \quad (7.34b)$$

$$I_C = I_{CA} - I_{BC} \quad (7.35c)$$

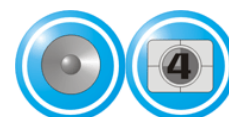
Zauważmy, że wobec powyższych wzorów suma prądów przewodowych w układzie, niezależnie od wartości impedancji odbiornika jest równa zero

$$I_A + I_B + I_C = 0 \quad (7.36)$$

Rys. 7.17 przedstawia wykres wektorowy prądów i napięć w układzie trójfazowym o połączeniu trójkątnym.



Rys. 7.17. Wykres wektorowy prądów i napięć w układzie trójfazowym o połączeniu trójkątnym



W przypadku pełnej symetrii generatora i odbiornika wszystkie układy napięć i prądów w układzie będą również symetryczne a przesunięcia między prądami oraz napięciami poszczególnych faz w odpowiednich układach będą równe 120° . Interesująca jest wówczas relacja między prądami fazowymi oraz liniowymi układu. Z wykresu wektorowego przedstawionego na rys. 7.18 widać, że w przypadku symetrycznym moduły wszystkich prądów liniowych są sobie równe, podobnie jak moduły wszystkich prądów fazowych przy równych przesunięciach fazowych między wektorami o kąt 120° . Z analizy przesunięć kątowych wynika, że kąt między wektorem prądu fazowego I_f oraz liniowego I_l jest równy 30° . Z zależności trygonometrycznych wynika, że

$$\frac{0,5|I_l|}{|I_f|} = \cos 30^\circ \quad (7.37)$$

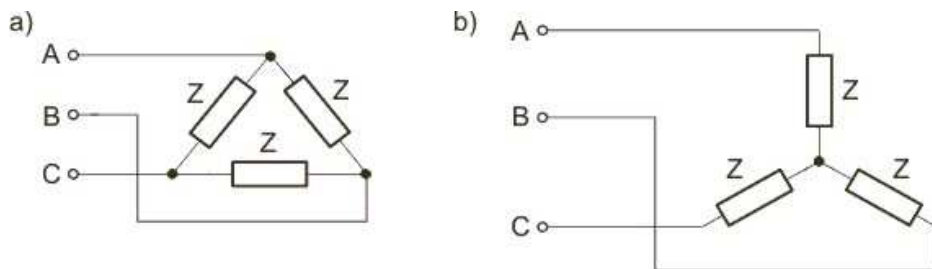
skąd po prostych przekształceniach matematycznych otrzymuje się

$$|I_l| = 2|I_f| \cos 30^\circ = \sqrt{3}|I_f| \quad (7.38)$$

W układzie symetrycznym prąd liniowy jest $\sqrt{3}$ razy większy niż prąd fazowy. Jest to identyczna relacja jaka istnieje między napięciami fazowymi i międzyfazowymi (liniowymi).

7.2.4. Porównanie mocy w układzie trójfazowym trójkątnym i gwiazdowym

Przełączenie impedancji odbiornika z połączenia trójkątnego w gwiazdowe powoduje zmianę mocy wydzielonej w odbiorniku. Załóżmy dla uproszczenia, że obwód trójfazowy jest symetryczny o impedancji fazy równej Z . Schemat połączenia trójkątne i gwiazdowe impedancji przedstawiony jest na rys. 7.18.



Rys. 7.18. Układy połączeń impedancji Z odbiornika symetrycznego w a) trójkąt, b) gwiazdę

Jak łatwo pokazać dla układu trójkątnego moc czynna P układu jest równa

$$P = 3 \frac{(\sqrt{3}|U_f|)^2}{|Z|} \cos \varphi = 9 \frac{|U_f|^2}{|Z|} \cos \varphi \quad (7.39)$$

natomiast w układzie gwiazdowym wobec $U_N = 0$ mamy

$$P = 3 \frac{|U_f|^2}{|Z|} \cos \varphi \quad (7.40)$$

Jak wynika z powyższych wzorów przy przełączeniu odbiornika symetrycznego z połączenia gwiazdowego w trójkątne pobór mocy czynnej wzrasta 3-krotnie. Przy tej samej wartości impedancji w obu połączeniach oznacza to $\sqrt{3}$ -krotny wzrost prądu płynącego przez impedancję.

7.3. Pomiar mocy w układach trójfazowych

7.3.1. Pomiar mocy czynnej w układzie czteroprzewodowym

Z bilansu mocy w układzie trójfazowym wynika, że moc wytworzona w generatorze trójfazowym równa sumie mocy poszczególnych jego faz odnajduje się w postaci mocy wydzielonej w fazach odbiornika. W przypadku mocy chwilowej wydzielonej w odbiorniku mamy

$$p(t) = u_A i_A + u_B i_B + u_C i_C \quad (7.41)$$

Moc czynna P odbiornika jest całką po okresie T z mocy chwilowej. Stąd

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T u_A i_A dt + \frac{1}{T} \int_0^T u_B i_B dt + \frac{1}{T} \int_0^T u_C i_C dt \quad (7.42)$$

Poszczególne składniki sumy odpowiadają mocy poszczególnych faz. Adaptując wzory na moc w układzie jednofazowym otrzymuje się

$$P = |U_A| |I_A| \cos \varphi_A + |U_B| |I_B| \cos \varphi_B + |U_C| |I_C| \cos \varphi_C \quad (7.43)$$

gdzie

$|U_A|, |U_B|, |U_C|$ - moduły wartości skutecznych zespolonych napięć fazowych odbiornika,

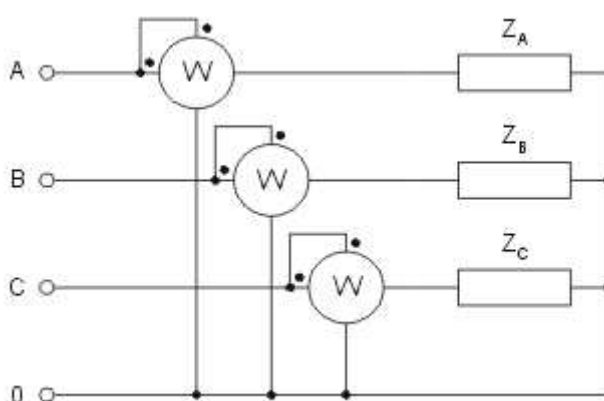
$|I_A|, |I_B|, |I_C|$ - moduły wartości skutecznych zespolonych prądów fazowych odbiornika

$\varphi_A, \varphi_B, \varphi_C$ - kąty przesunięć fazowych między napięciami i prądami faz

Wzór określający całkowitą moc czynną w układzie trójfazowym można więc przedstawić w postaci

$$P = P_A + P_B + P_C \quad (7.44)$$

Moc czynna pobierana przez odbiornik trójfazowy jest równa sumie mocy czynnych poszczególnych faz. W przypadku ogólnym obwodu trójfazowego niesymetrycznego pomiar mocy czynnej wymaga użycia trzech watomierzy, z których każdy mierzy moc jednej fazy. Schemat połączeń trzech watomierzy w tym przypadku przedstawiono na rys. 7.19. Cewka prądowa każdego watomierza zasilana jest odpowiednim prądem fazowym a cewka napięciowa mierzy napięcie odpowiedniej fazy.



Rys. 7.19. Pomiar mocy czynnej za pomocą trzech watomierzy w układzie niesymetrycznym czteroprzewodowym

W przypadku układu symetrycznego ze względu na równość prądów i przesunięć kątowych w poszczególnych fazach odbiornika moc wskazywana przez każdy watomierz byłaby taka sama. Stąd do pomiaru mocy w tym układzie wystarczy użycie jednego watomierza spośród trzech pokazanych na rys. 7.19. Moc całkowita P układu trójfazowego jest wówczas potrojoną wartością wskazania tego watomierza. Wobec pełnej symetrii odbiornika watomierz może być włączony w dowolnej fazie. W każdym przypadku watomierz włączony w danej fazie mierzy prąd fazy i napięcie fazowe względem punktu neutralnego.

7.3.2. Pomiar mocy czynnej w układzie trójprzewodowym

W przypadku odbiornika niesymetrycznego o trzech przewodach zasilających pomiar całkowitej mocy układu może być dokonany przy pomocy dwu watomierzy. Dla pokazania takiej możliwości przepiszemy wzór na moc chwilową układu

$$p(t) = u_A i_A + u_B i_B + u_C i_C \quad (7.45)$$

W układzie trójprzewodowym suma prądów przewodowych jest równa zero, co znaczy, że

$$i_A + i_B + i_C = 0 \quad (7.46)$$

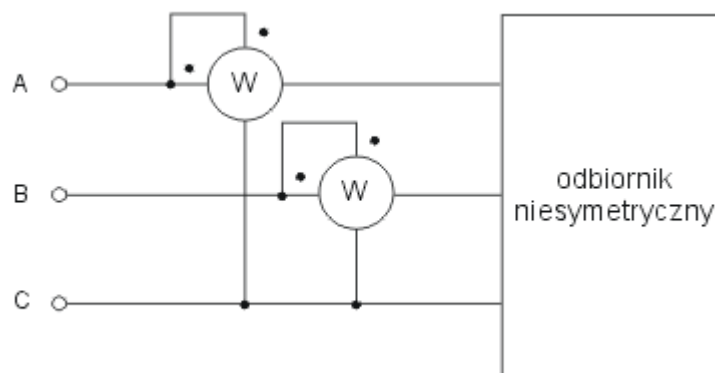
Eliminując prąd i_C z zależności na moc chwilową, uzyskuje się

$$p(t) = (u_A - u_C)i_A + (u_B - u_C)i_B \quad (7.47)$$

Moc czynna jako wartość średnia za okres z mocy chwilowej dla przebiegów sinusoidalnych może więc być wyrażona w postaci

$$P = |U_A - U_C| |I_A| \cos \varphi_1 + |U_B - U_C| |I_B| \cos \varphi_2 \quad (7.48)$$

W wyrażeniu tym prądy i napięcia dotyczą modułów wartości skutecznych zespolonych odpowiednich faz natomiast kąty φ_1 i φ_2 oznaczają przesunięcia fazowe między odpowiednio napięciem U_{AC} i prądem I_A oraz między napięciem U_{BC} i prądem I_B . Powyższa zależność umożliwia podanie schematu elektrycznego połączeń elementów pomiarowych obwodu. Schemat pomiaru mocy przy pomocy dwu watomierzy nosi nazwę **układu Arona** i podany jest na rys. 7.20.



Rys. 7.20. Układ Arona do pomiaru mocy za pomocą dwu watomierzy

Cewki prądowe watomierzy włączone są w dwie linie odbiornika trójfazowego, natomiast cewki napięciowe włączone są między daną fazę i fazę trzecią, w której nie ma włączonego watomierza.

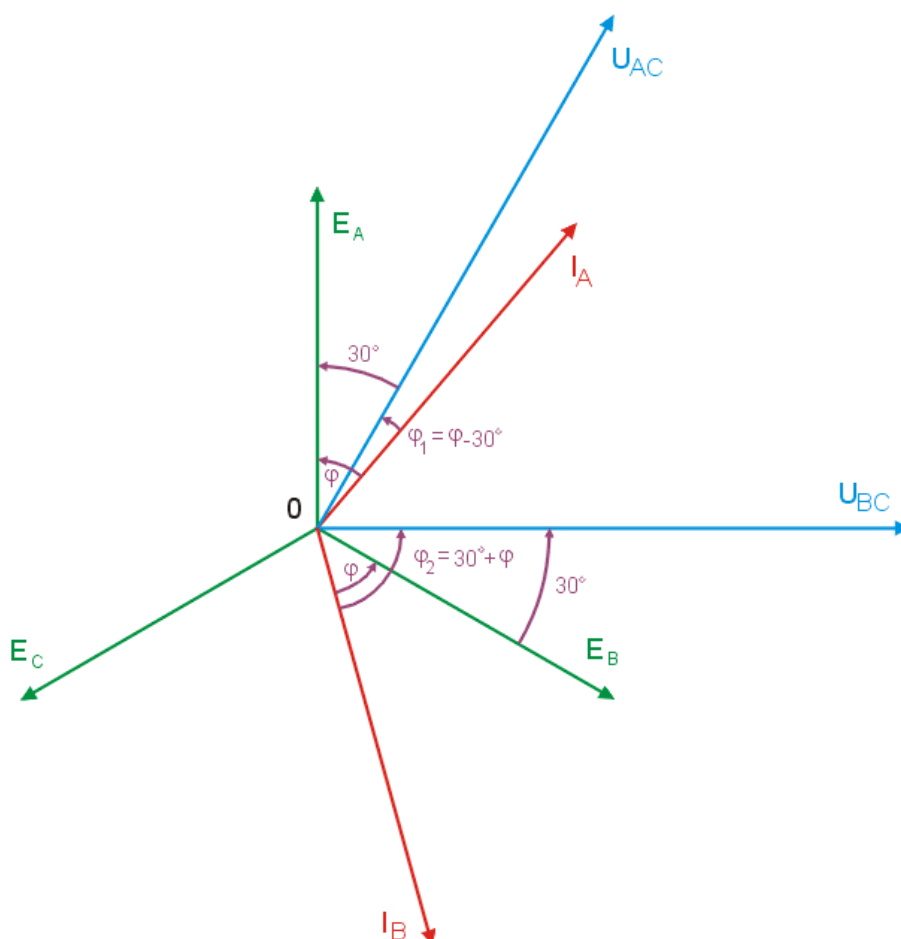
Powyższy schemat pomiarowy jest słuszny zarówno dla układu niesymetrycznego jak i symetrycznego. W przypadku układu symetrycznego zastosowanie go do pomiaru mocy czynnej umożliwia uzyskanie także innych informacji o obwodzie trójfazowym, w szczególności mocy biernej oraz kąta przesunięcia fazowego.

Zauważmy, że w przypadku pełnej symetrii moduły i kąty przesunięcia fazowego prądów względem odpowiednich napięć fazowych w poszczególnych fazach są równe

$$|I_A| = |I_B| = |I_C| = |I| \quad (7.49)$$

$$\varphi_A = \varphi_B = \varphi_C = \varphi \quad (7.50)$$

Przy założeniu odbiornika gwiazdowego wykres wektorowy prądów i napięć obwodu przedstawiony jest na rys. 7.21.



Rys. 7.21. Wykres wektorowy prądów i napięć symetrycznego układu trójfazowego

Z analizy zależności kątowych na tym rysunku wynika, że

$$\varphi_1 = \varphi - 30^\circ \quad (7.51)$$

$$\varphi_2 = \varphi + 30^\circ \quad (7.52)$$

Stąd wzór na moc wskazywaną przez oba watomierze upraszcza się do postaci

$$P_1 = |U_A - U_C| |I| \cos(\varphi - 30^\circ) = \sqrt{3} |U_f| |I| \cos(\varphi - 30^\circ) = \sqrt{3} |U_f| |I| (\cos \varphi \cos 30^\circ + \sin \varphi \sin 30^\circ) \quad (7.53)$$

$$P_2 = |U_B - U_C| |I| \cos(\varphi + 30^\circ) = \sqrt{3} |U_f| |I| \cos(\varphi + 30^\circ) = \sqrt{3} |U_f| |I| (\cos \varphi \cos 30^\circ - \sin \varphi \sin 30^\circ) \quad (7.54)$$

Suma obu wskazań watomierzy jest więc równa

$$P = P_1 + P_2 = 2\sqrt{3} |U_f| |I| \cos \varphi \cos 30^\circ = 3 |U_f| |I| \cos \varphi \quad (7.55)$$

Jak widać suma wskazań obu watomierzy jest potrojoną wartością mocy jednej fazy, co wobec symetrii odbiornika jest potwierdzeniem poprawności działania układu Arona.

Odejmując od siebie wskazania obu przyrządów udowodnimy, że różnica wskazań jest proporcjonalna do mocy biernej układu. Mianowicie

$$P_1 - P_2 = 2\sqrt{3} |U_f| |I| \sin \varphi \sin 30^\circ = \sqrt{3} |U_f| |I| \sin \varphi \quad (7.56)$$

Biorąc pod uwagę, że moc bierna jednej fazy jest równa $Q_f = |U_f| |I| \sin \varphi$ z ostatniej zależności wynika następujący wzór

$$Q_f = \frac{P_1 - P_2}{\sqrt{3}} \quad (7.57)$$

a moc bierna całkowita układu trójfazowego symetrycznego jest równa

$$Q = \sqrt{3} (P_1 - P_2) \quad (7.58)$$

Tak więc zastosowanie dwu watomierzy zamiast jednego, w przypadku symetrii odbiornika, ma tę zaletę, że dostarcza informacji jednocześnie o mocy czynnej i mocy bierniej układu. Dodatkowo, jeśli uwzględnimy, że kąt przesunięcia fazowego jest w pełni określony przez moc czynną i bierną według wzoru

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{Q}{P} \quad (7.59)$$

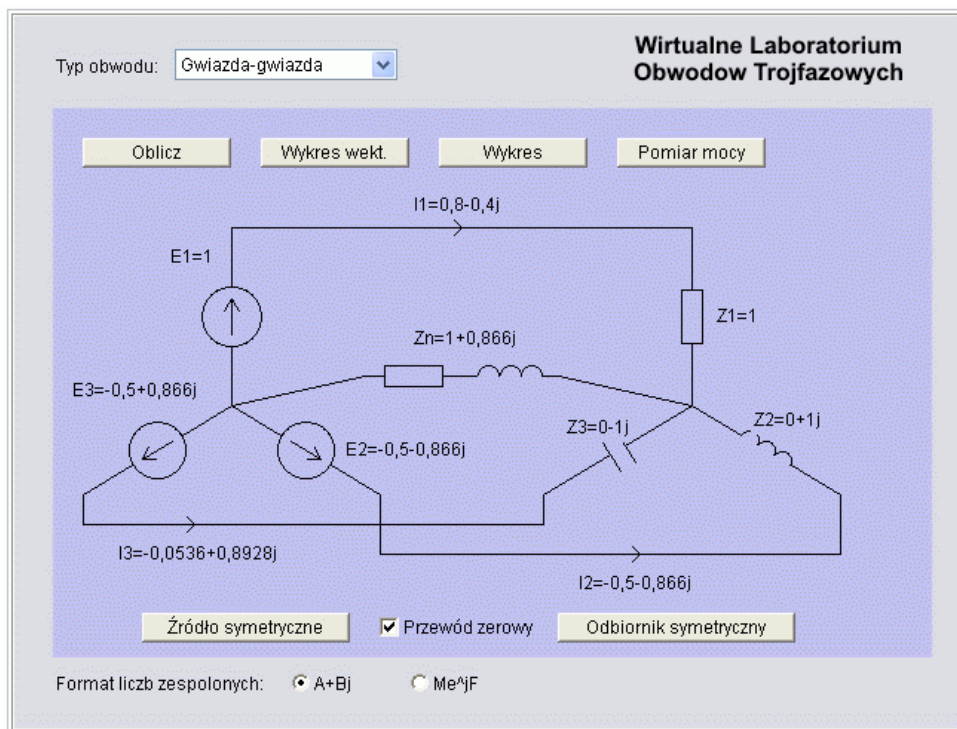
na podstawie wskazań watomierzy można bezpośrednio określić kąt przesunięcia fazowego między prądami i napięciami fazowymi w układzie

$$\varphi = \arctg \sqrt{3} \frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2} \quad (7.60)$$

Stąd na podstawie pomiaru mocy dwoma watomierzami jest możliwe określenie trzech wielkości jednocześnie: mocy czynnej, mocy bierniej oraz kąta przesunięcia fazowego między prądami i napięciami w obwodzie.

7.4. Wirtualne laboratorium obwodów elektrycznych

Do obliczeń prądów, napięć i mocy w obwodach trójfazowych został opracowany program „Obwody trójfazowe” pozwalający na symulację pracy takiego układu.



Rys. 7.22. Główne okno programu „Obwody trójfazowe”



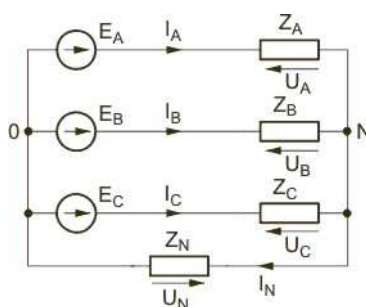
Rysunek 7.19 przedstawia okno główne programu. Centralne pole zajmuje schemat badanego obwodu (dostępne konfiguracje: gwiazda-gwiazda Y-Y, gwiazda-trójkąt Y- Δ , trójkąt-trójkąt Δ - Δ i trójkąt-gwiazda Δ -Y), z symbolicznie zaznaczonym odbiornikiem i zasilaniem trójfazowym. Uruchomienie programu odbywa się poprzez kliknięcie w obrębikony programu. Użytkownik może wówczas definiować własną strukturę obwodu (trójkąt, gwiazda, istnienie bądź nie przewodu zerowego), rodzaj i wartości parametrów odbiornika (R , L , C), wartości źródeł wymuszających, impedancję przewodu zerowego, format liczb zespolonych.

W wyniku obliczeń otrzymuje się wartości prądów, napięć i mocy w obwodzie, jak również wykres wektorowy prądów i napięć oraz ich przebiegi czasowe. Program stanowi proste wirtualne laboratorium obwodów trójfazowych, umożliwiające studentowi samodzielne badanie zjawisk zachodzących w obwodach trójfazowych.

Ćwiczenia

Ćwiczenie 7.1

Wyznaczyć prądy w obwodzie trójfazowym podanym na rys. 7.23. Przyjąć następujące wartości parametrów elementów: $|E_f| = 200V$, $Z_A = 10\Omega$, $Z_B = (10 - j10)\Omega$, $Z_C = (10 + j10)\Omega$, $Z_N = 50\Omega$.



Rys. 7.23. Schemat obwodu trójfazowego do ćwiczenia 7.1

Rozwiązanie

Przyjmujemy następujące wartości symboliczne elementów:

$$E_A = 200$$

$$E_B = 200e^{-j120^\circ}$$

$$E_C = 200e^{j120^\circ}$$

$$Y_A = \frac{1}{Z_A} = 0,1$$

$$Y_B = \frac{1}{Z_B} = 0,05 + j0,05$$

$$Y_C = \frac{1}{Z_C} = 0,05 - j0,05$$

$$Y_N = \frac{1}{Z_N} = 0,02$$

Napięcie niezrównoważenia U_N

$$U_N = \frac{E_A Y_A + E_B Y_B + E_C Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C + Y_N} = 124,18$$

Prądy fazowe:

$$I_A = (E_A - U_N) Y_A = 7,58$$

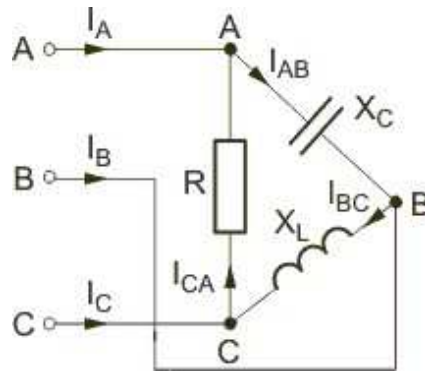
$$I_B = (E_B - U_N) Y_B = -2,55 - j19,87$$

$$I_C = (E_C - U_N) Y_C = -2,55 + j19,87$$

$$I_N = U_N Y_N = 2,48$$

Ćwiczenie 7.2

Wyznaczyć prądy w układzie trójfazowym o odbiorniku połączonym w trójkąt przedstawionym na rys. 7.24. Sporządzić wykres wektorowy prądów i napięć. Przyjąć następujące wartości parametrów elementów: $|E_f| = 200V$, $R = X_L = X_C = 10\Omega$.



Rys. 7.24 Schemat obwodu trójfazowego do ćwiczenia 7.2

Rozwiązanie

Napięcia międzyfazowe:

$$|E_{mf}| = \sqrt{3}|E_f|$$

$$E_{AB} = 200\sqrt{3}$$

$$E_{BC} = 200\sqrt{3}e^{-j120^\circ}$$

$$E_{CA} = 200\sqrt{3}e^{j120^\circ}$$

Prądy fazowe odbiornika:

$$I_{AB} = \frac{E_{AB}}{-jX_C} = 20\sqrt{3}e^{j90^\circ}$$

$$I_{BC} = \frac{E_{BC}}{jX_L} = 20\sqrt{3}e^{-j210^\circ}$$

$$I_{CA} = \frac{E_{CA}}{R} = 20\sqrt{3}e^{j120^\circ}$$

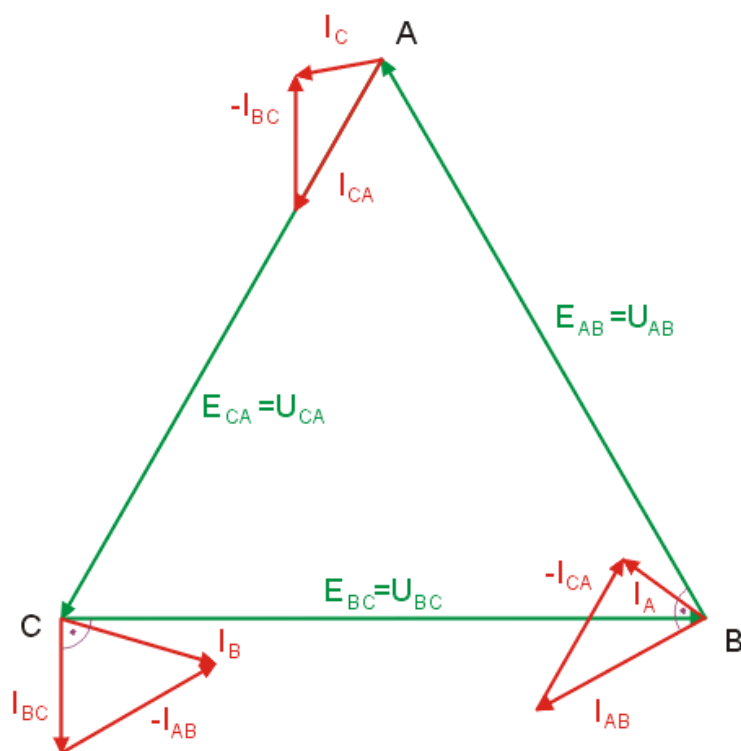
Prądy liniowe układu:

$$I_A = I_{AB} - I_{CA} = 17,32 + j4,64$$

$$I_B = I_{BC} - I_{AB} = -30 - j17,32$$

$$I_C = I_{CA} - I_{BC} = 12,68 + j12,68$$

Wykres wektorowy prądów i napięć przedstawiony jest na rys. 7.25.

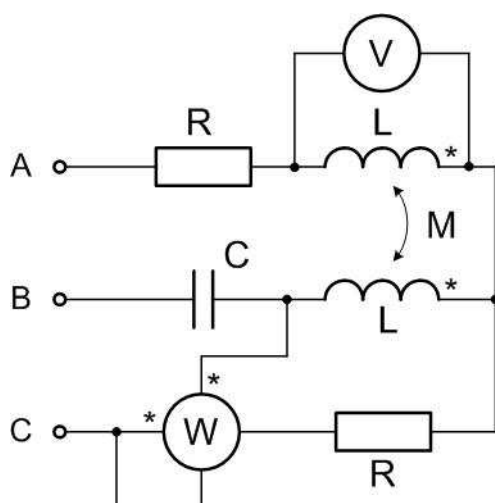


Rys. 7.25. Wykres wektorowy prądów i napięć obwodu



Ćwiczenie 7.3

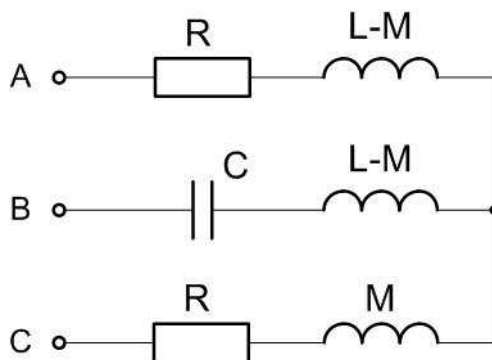
Wyznaczyć wskazania przyrządów w obwodzie 3-fazowym przedstawionym na rysunku 7.26, jeśli $R = X_C = 20\Omega$, $X_L = 30\Omega$, $X_M = 10\Omega$ a napięcie fazowe $|U_f| = 200V$.



Rys. 7.26. Schemat obwodu do przykładu 7.3

Rozwiązanie

Po wyeliminowaniu sprzężenia otrzymujemy schemat zastępczy obwodu przedstawiony na rys. 7.27.



Rys. 7.27. Schemat obwodu po eliminacji sprzężeń magnetycznych

W wyniku eliminacji sprzężenia w fazie B powstanie rezonans, a zatem napięcie

$$U_N = E_B = -100 - j173V$$

Wyznaczamy prądy fazowe

$$I_A = (E_A - U_N) \cdot Y_A = (300 + j173) \cdot (0.025 - j0.025) = 11.83 - j3.18A$$

$$I_C = (E_C - U_N) \cdot Y_C = (j346.4) \cdot (0.04 - j0.02) = 6.93 + j13.86A$$

$$I_B = -I_A - I_C = -18.76 - j10.68A$$

Napięcie na woltomierzu wniesie

$$U_V = I_A \cdot jX_L + I_B \cdot jX_M = 309 - j20.3V$$

a jego wskazanie

$$|U_V| = 309.7V$$

Prąd amperomierza będzie równy prądowi fazy B, a jego wskazanie wyniesie

$$|I_B| = 21.6A$$

Napięcie na cewce napięciowej watomierza wyniesie

$$U_W = E_B - I_B \cdot (-jX_C) - E_C = 213 - j722V$$

natomiast prąd cewki prądowej watomierza będzie równy prądowi fazy C.

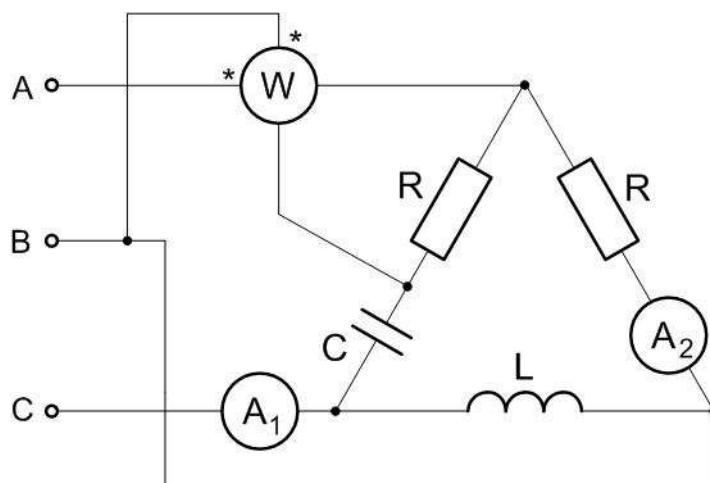
Wskazanie watomierza wyniesie

$$P_R = \operatorname{Re}(U_W \cdot I_C^*) = \operatorname{Re}(-8521 - j7961) = -8521W$$

Zadania sprawdzające

Zadanie 7.1

Wyznaczyć wskazania przyrządów w obwodzie 3-fazowym przedstawionym na rysunku 7.28, jeśli $R=X_L=X_C=10\Omega$, a napięcie fazowe $|U_f|=200V$.



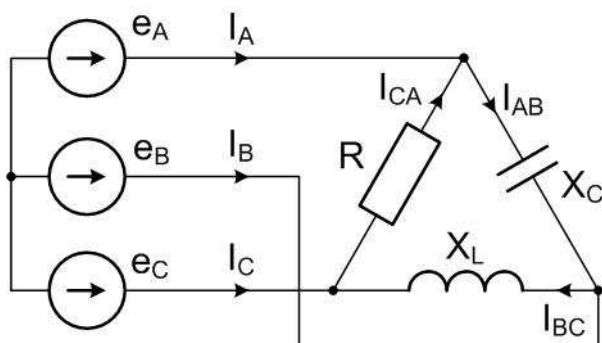
Rys. 7.28. Schemat obwodu do zadania 7.1

Rozwiązanie

$$|I_{A1}| = 12.68 \text{ A}, |I_{A2}| = 34.64 \text{ A}, P_w = 1200 \text{ W}$$

Zadanie 7.2

Wyznaczyć prądy oraz bilans mocy w obwodzie przedstawionym na rysunku 7.29, jeśli $R=X_L=X_C=10\Omega$, a napięcie fazowe $|U_f|=200V$.



Rys. 7.29. Schemat obwodu do zadania 7.2

Rozwiązanie

Prądy fazowe odbiornika: $I_{AB} = -17.3 + j30$, $I_{BC} = -34.64$, $I_{CA} = -30 + j17.3$

Prądy liniowe: $I_A = 12.7 + j12.7$, $I_B = -17.3 - j30$, $I_C = 4.6 + j17.3$

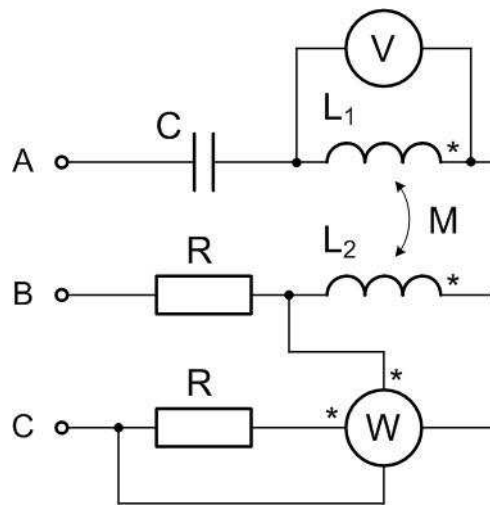
Moce odbiornika: $S_{AB} = -12000j$, $S_{BC} = 12000j$, $S_{CA} = 12000W$

Moce źródeł: $S_A = 2536 - j2536$, $S_B = 6928$, $S_C = 2536 + j2536$

Bilans mocy: $\sum S_{odb} = \sum S_{gen} = 12000W$

Zadanie 7.3

Wyznaczyć wskazania przyrządów w obwodzie 3-fazowym przedstawionym na rysunku 7.30, jeśli $R=X_{L2}=X_M=X_C=10\Omega$, $X_{L1}=20\Omega$, a napięcie fazowe $|U_f|=400V$.



Rys. 7.30. Schemat obwodu do zadania 7.3

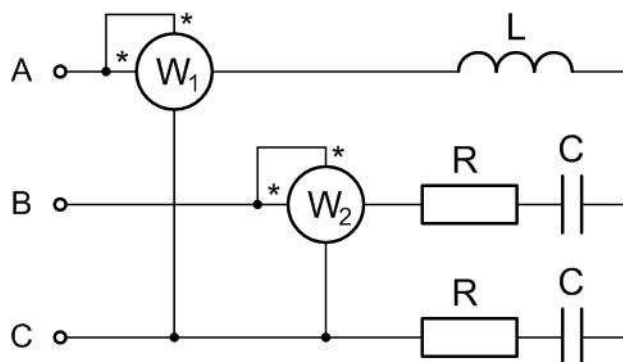
Rozwiązanie

Wskazanie woltomierza: $|U_{L1}| = 1043$

Wskazanie watomierza: $P_w = -24000W$

Zadanie 7.4

Wyznaczyć wskazania watomierzy w obwodzie 3-fazowym przedstawionym na rysunku 7.31, jeśli $R=X_L=X_C=10\Omega$, a napięcie fazowe $|U_f|=100V$.



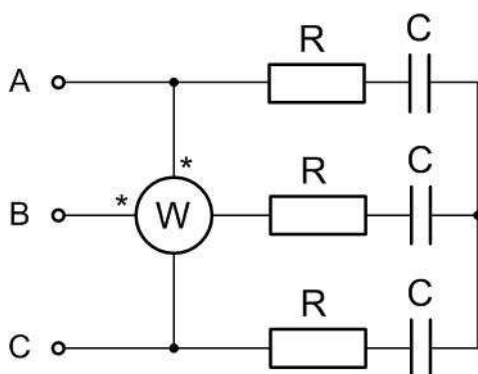
Rys. 7.31. Schemat obwodu do zadania 7.4

Rozwiązanie

$$P_{w1} = 3549 \text{ W}, P_{w2} = -549 \text{ W}$$

Zadanie 7.5

Wyznaczyć wskazanie watomierza w obwodzie 3-fazowym symetrycznym przedstawionym na rysunku 7.32, dla danych: $|U_f| = 200 \text{ V}$, $R=X_C=10\Omega$, obliczyć moc bierną układu Q oraz sprawdzić zależność $Q = \sqrt{3} \cdot P_w$.



Rys. 7.32. Schemat obwodu do zadania 7.5

Rozwiązanie

$$P_w = 3464.1 \text{ W}, Q = -6000 \text{ var}, \sqrt{3} \cdot P_w = 6000 \text{ W}$$

Test do wykładu 7

- 1) Moduł napięcia fazowego w symetrycznym generatorze jest równy 200. Postać zespolona tych napięć opisana jest wzorami (wyniki w woltach)
 - a) $E_A = 200$ $E_B = 200e^{j120^\circ}$ $E_C = 200e^{-j120^\circ}$
 - xb) $E_A = 200$ $E_B = 200e^{-j120^\circ}$ $E_C = 200e^{j120^\circ}$
 - c) $E_A = 200$ $E_B = 200$ $E_C = 200$
 - d) $E_A = 200$ $E_B = 200e^{-j90^\circ}$ $E_C = 200e^{j90^\circ}$
- 2) Moduł napięcia fazowego w symetrycznym generatorze jest równy 200. Ile wynosi moduł napięcia międzyfazowego (liniowego)?
 - a) $\frac{200}{\sqrt{3}}$ V
 - xb) $200\sqrt{3}$ V
 - c) 200V
 - d) 600V
- 3) Suma napięć fazowych generatora trójfazowego jest równa zeru
 - a) zawsze
 - xb) tylko dla generatora symetrycznego
 - c) nigdy
 - d) tylko dla generatora niesymetrycznego
- 4) Suma napięć międzyfazowych generatora trójfazowego jest równa zeru
 - xa) zawsze
 - b) tylko dla generatora symetrycznego
 - c) nigdy
 - d) tylko dla generatora niesymetrycznego
- 5) Suma prądów liniowych w obwodzie trójfazowym jest równy zeru
 - a) zawsze
 - xb) dla odbiornika symetrycznego
 - xc) zawsze dla odbiornika trójprzewodowego
 - d) nigdy
- 6) Prądy fazowe odbiornika gwiazdowego wynoszą: $I_A=10$, $I_B=10+j5$, $I_C=-20-j8$. Ile wynosi prąd przewodu neutralnego I_N (wyniki w amperach)?
 - a) $I_N=40$
 - b) $I_N=40-j3$
 - c) $I_N=0$
 - xd) $I_N=-j3$
- 7) W obwodzie trójfazowym zasilanym z generatora symetrycznego napięcie niezrównoważenia $U_N=0$ jeśli
 - xa) odbiornik jest symetryczny
 - xb) impedancja przewodu zerowego jest zerem
 - c) zawsze

- d) jeśli odbiornik ma charakter rezystancyjny
- 8) W fazie A odbiornika trójfazowego złożonego z indukcyjności i pojemności połączonych szeregowo występuje rezonans. Ile wynosi napięcie niezrównoważenia, jeśli moduł napięcia fazowego generatora wynosi 500?
- a) $U_N=0$
 - xb) $U_N=500V$
 - c) $U_N=500\sqrt{3} V$
 - d) na podstawie tych danych nie można określić
- 9) W obwodzie trójfazowym 3-przewodowym połączonym w gwiazdę faza A odbiornika symetrycznego rezystancyjnego uległa przerwaniu. Napięcie fazowe zasilania jest równe 500. Ile wynosi moduł napięcia niezrównoważenia U_N ?
- a) $U_N=500V$
 - xb) $U_N=250V$
 - c) $U_N=0$
 - d) $500\sqrt{3} V$
- 10) W odbiorniku symetrycznym trójfazowym połączonym w gwiazdę wydzielita się moc $P=1000W$. Ile będzie wynosiła ta moc po przełączeniu odbiornika w trójkąt?
- a) $P=1732W$
 - b) $P=1000W$
 - xc) $P=3000W$
 - d) $P=333,3W$