10.2 Wartości własne i wektory własne macierzy

Wektory w przestrzeni n-wymiarowej można zapisać w postaci macierzy kolumnowej

$$X = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Definicja 10.5. Wektory $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_k$ nazywamy *liniowo niezależnymi*, jeżeli równanie

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_k X_k = \Theta,$$

gdzie Θ jest wektorem zerowym, ma tylko rozwiązanie $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$. W przeciwnym wypadku wektory te nazywamy *liniowo zależnymi*.

W przypadku dwóch wektorów X, Y liniowo zależnych zachodzi równość $X = \lambda Y$, wówczas wektory te nazywamy kolinearnymi.

Przykład 10.6. Wykazać, że wektory

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

są liniowo niezależne oraz przedstawić wektor

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

w postaci

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3. \tag{10.1}$$

Rozwiązanie. Sprawdzamy, czy wektory X_i, $i = 1, 2, 3$ są liniowo niezależne. Kombinacja liniowa wektorów przyrównana do zera daje układ jednorodny postaci

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha 1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Ponieważ wyznacznik tego układu równa się $W = 1$, tj. jest różny do zera, zatem układ posiada jedynie rozwiązanie zerowe ($\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$). Tak więc wektory są liniowo niezależne.

Wstawiając do wyrażenia (10.1) wartości liczbowe wektorów otrzymujemy układ równań niejednorodny z niewiadomymi α_i, $i = 1, 2, 3$ postaci

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 1 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2 \\ \alpha 1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Jak policzyliśmy wyżej wyznacznik tego układu jest równy 1, jest to zatem układ Cramera o rozwiązaniach

$$\alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = -1, \quad \alpha_3 = -1,$$

czyli $X = 2X_1 - X_2 - X_3$. □

Rozpatrzmy teraz macierz nieosobliwą A stopnia n ($\det A \neq 0$). Szukamy dla tej macierzy takich wektorów niezerowych X, aby zachodziła równość

$$AX = \lambda X,$$

czyli takich aby wektory AX i X były kolinearne. Dla wygody zapisu kolinearności korzystamy z macierzy jednostkowej $\mathbb{I}$ wymiaru $n \times n$. Mamy wtedy równość

$$AX = \lambda \mathbb{I} X, \quad \text{lub równoważnie} \quad (A - \lambda\mathbb{I})X = \Theta, \tag{10.2}$$

gdzie Θ oznacza macierz zerową wymiaru $n \times n$. Jest to układ n równań liniowych jednorodnych o macierzy $(A - \lambda\mathbb{I})$ zwanej *macierzą charakterystyczną*. Wektor X niezerowy istnieje wówczas, gdy $\det(A - \lambda\mathbb{I}) = 0$. Wyznacznik ten nazywamy *wielomianem charakterystycznym* macierzy A.

Wartości λ_i dla których równanie (10.2) posiada rozwiązanie niezerowe nazywamy *wartościami własnymi* macierzy A, a odpowiadające wartością własnym wektory X_i nazywamy *wektorami własnymi* macierzy A.

Przykład 10.7. Wyznaczyć wartości własne i wektory własne macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie. Macierz charakterystyczna ma postać

$$\begin{bmatrix} 4 - \lambda & 2 \\ -3 & -1- \end{bmatrix}.$$

Wielomian charakterystyczny $\lambda^2 - 3\lambda + 2$. Równanie charakterystyczne

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

Stąd też otrzymujemy, że wartości własne są równe $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$.

Wektory własne otrzymujemy z zależności

$$\begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 \\ -3 & -1-\lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \Theta.$$

Dla $\lambda_1 = 1$ mamy $3x_1+2x_2 = 0$ dla $\lambda_2 = 2$ mamy $2x_1+2x_2 = 0$. Stąd wektorami własnymi macierzy A są wektory

$$X^{(1)} = \left[\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}\right], \qquad X^{(2)} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right].$$

□