6.1 Definicja

Funkcję różniczkowalną F taką, że $F' = f$ nazywamy *funkcją pierwotną* do f. Jeśli F jest funkcją pierwotną to $F + C$, gdzie C jest dowolną funkcją stałą, również jest funkcją pierwotną. Wynika to z faktu, że pochodna funkcji stałej jest równa 0. Oznacza to, że istnieje nieskończenie wiele funkcji które po policzeniu pochodnej dadzą nam f. Okazuje się, że jeśli F jest dowolną funkcją pierwotną f, to wszystkie pozostałe funkcje pierwotne do f możemy otrzymać ze wzoru $F + C$ gdzie C jest pewną stałą (należy podkreślić, że C oznacza funkcję stałą równą C). Inaczej możemy powiedzieć, że

$$\{F + C | C \in \mathbb{R}\}$$

jest zbiorem wszystkich funkcji pierwotnych do f. Zbiór wszystkich funkcji pierwotnych oznaczamy

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C$$

i nazywamy *całką nieoznaczoną* funkcji f. Operację wyznaczania funkcji pierwotnych nazywamy *całkowaniem*. Jeżeli dla danej funkcji istnieje funkcja pierwotna to mówimy, że funkcja jest całkowalna. Prawdziwe jest następujące

Twierdzenie 6.1. *Jeśli f jest funkcją ciągłą to f posiada funkcję pierwotną.*

Uwaga 6.2. Mimo, że każda funkcja ciągła posiada funkcję pierwotną, to nie zawsze potrafimy ją wyznaczyć. Co więcej, w niektórych przypadkach funkcja pierwotna nie wyraża się za pomocą funkcji elementarnych.

Przykład 6.3.

$$\int 0\, dx = C, \qquad \int x\, dx = \frac{x^2}{2} + C$$

Przykład 6.4. Następująca funkcja nie jest całkowalna

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \neq 0 \\ 1 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$