9.1 Postać macierzowa układu równań

Układem m równań liniowych niejednorodnym z n niewiadomymi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nazywamy

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{9.1}$$

gdzie $a_{ij} \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$. Współczynniki przy niewiadomych tworzą macierz którą nazywamy *macierzą główną układu*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

wyrazy wolne $b_1, \ldots, b_m$ oraz niewiadome $x_1, \ldots, x_n$ zapisujemy jako macierze kolumnowe

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Układ równań (9.1) jest równoważny następującemu równaniu macierzowemu

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 & a_{12}x_2 & \ldots & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & a_{22}x_2 & \ldots & a_{2n}x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & a_{m2}x_2 & \ldots & a_{mn}x_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

co przy przyjętych oznaczeniach możemy też zapisać

$$AX = B$$

Przykład 9.1. Układ równań liniowych

$$\begin{cases} 2x + 5y = 3 \\ \quad y - \ z = 0 \\ -x + 2z = 1 \end{cases}$$

zapisujemy w postaci macierzowej $Aw = B$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Wyróżniamy trzy rodzaje układów równań liniowych: układu *oznaczone*, *nieoznaczone* i *sprzeczne*. Układ równań liniowych jest oznaczony jeżeli posiada dokładnie jedno rozwiązanie. Układ równań jest nieoznaczony jeżeli posiada nieskończenie wiele rozwiązań. Układ jest sprzeczny jeżeli nie posiada rozwiązań.