2.1 Określenie funkcji jednej zmiennej, właściwości

Rozpatrzmy dwa niepuste zbiory $X, Y \subset \mathbb{R}$.

Definicja 2.1. Funkcją określoną na elementach zbioru X oraz o wartościach w zbiorze Y nazywamy dowolne przyporządkowanie każdemu elementowi zbioru X dokładnie jednego elementu zbioru Y. Zapisujemy to następująco

$$y = f(x) \quad \text{dla} \quad x \in X,\ y \in Y \qquad \text{lub} \quad f : X \to Y.$$

Zmienną $x \in X$ nazywamy argumentem funkcji natomiast zbiór X dziedziną funkcji.

Podamy kilka użytecznych własności funkcji

1. Funkcja f jest *parzysta* jeśli
$$f(-x) = f(x),$$
funkcja f jest *nieparzysta* jeśli
$$f(-x) = -f(x).$$

2. Funkcja f jest *okresowa*, o okresie T, jeżeli
$$f(x) = f(x + nT)$$
dla każdego $x \in X$ oraz dowolnej liczby całkowitej n. Stałą $T > 0$ nazywamy *okresem podstawowym.*

3. Funkcja f jest *ograniczona* w przedziale (a, b) jeżeli istnieje taka liczba $M > 0$, że dla każdego $x \in (a, b)$ mamy
$$|f(x)| \leq M.$$

4. Funkcja f *jest rosnąca* w przedziale (a, b) jeżeli dla każdych $x_1, x_2 \in (a, b)$ takich, że $x_1 < x_2$ zachodzi
$$f(x_1) < f(x_2).$$
Funkcja f jest *malejąca* jeżeli dla każdych $x_1, x_2 \in (a, b)$ takich, że $x_1 < x_2$ zachodzi
$$f(x_1) > f(x_2).$$
Jeżeli funkcja jest w danym przedziale tylko rosnąca lub tylko malejąca to mówimy, że jest *ściśle monotoniczna.* Mówimy, że funkcja jest monotoniczna jeżeli jest nierosnąca lub niemalejąca. Funkcja $f(x)$ ograniczona w przedziale (a, b) jest *przedziałami monotoniczna* jeżeli przedział (a, b) możemy podzielić na skończoną ilość podprzedziałów w których funkcja jest monotoniczna.

5. Funkcja f jest *różnowartościowa* jeżeli dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$ z faktu, że $x_1 \neq x_2$ wynika, że $f(x_1) \neq f(x_2)$.

6. *Złożeniem* dwóch *funkcji* $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ nazywamy funkcję $h : X \to Z$ określoną wzorem
$$h(x) = g(f(x)).$$

7. Dla dowolnej różnowartościowej funkcji $f : X \to Y$ istnieje dokładnie jedna funkcja $g : Y \to X$ taka, że gdy $f(x) = y$, to $g(y) = x$. Funkcję g nazywamy wówczas *funkcją odwrotną* do f oraz oznaczamy f^{-1}. Argument funkcji odwrotnej będziemy oznaczali tym samym symbolem co argument funkcji f tzn. x. Wykres funkcji f jest symetryczny do wykresu funkcji f^{-1} względem prostej $y = x$.

W zbiorze wszystkich funkcji o wartościach rzeczywistych wyróżniamy funkcje, które nazywamy funkcjami elementarnymi. Do funkcji elementarnych zaliczamy

a) funkcje stałe,

b) funkcje potęgowe tzn. funkcje postaci $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$,

c) funkcje wykładnicze $f(x) = a^x$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$,

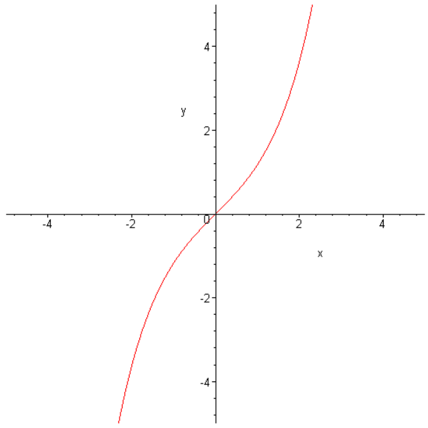
d) funkcje trygonometryczne $\sin x$, $\cos x$,

e) funkcje powstałe z a), b), c), d) przez wykonanie skończonej ilości operacji mnożenia, dzielenia, dodawania, odejmowania, składania lub brania funkcji odwrotnych. Z określenia funkcji elementarnych wynika, że należą do takich funkcji również
$$ax^2 + bx + c, \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x},$$
dowolne wielomiany oraz funkcje wymierne. Do funkcji elementarnych należą również funkcje hiperboliczne
$$\begin{array}{rl} \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} & \text{sinus hiperboliczny,} \\ \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} & \text{cosinus hiperboliczny,} \\ \operatorname{tgh}(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} & \text{tangens hiperboliczny,} \\ \operatorname{ctgh}(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} & \text{cotangens hiperboliczny.} \end{array}$$

Nie wszystkie z funkcji elementarnych posiadają funkcje odwrotne.

Funkcją odwrotną do funkcji $f(x) = e^x$ jest logarytm naturalny $\ln(x)$, który oczywiście również jest funkcją elementarną.

Osobną klasę funkcji odwrotnych stanowią *funkcje cyklometryczne* będące funkcjami odwrotnymi do funkcji trygonometrycznych. Funkcje takie zwane są również funkcjami kołowymi
$$\begin{array}{ll} \arcsin(x) & \text{arcus sinus,} \\ \arccos(x) & \text{arcus cosinus,} \\ \operatorname{arc\,tg}(x) & \text{arcus tangens,} \\ \operatorname{arc\,ctg}(x) & \text{arcus cotangens.} \end{array}$$



Rysunek 2.1: Wykres funkcji $\sinh(x)$

Funkcje cyklometryczne są zdefiniowane na zbiorze wartości x, dla których funkcje są różnowartościowe: $\sin x$ dla $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, $\cos x$ dla $x \in (0, \pi)$ oraz $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ dla $x \in \mathbb{R}$. Mamy na przykład

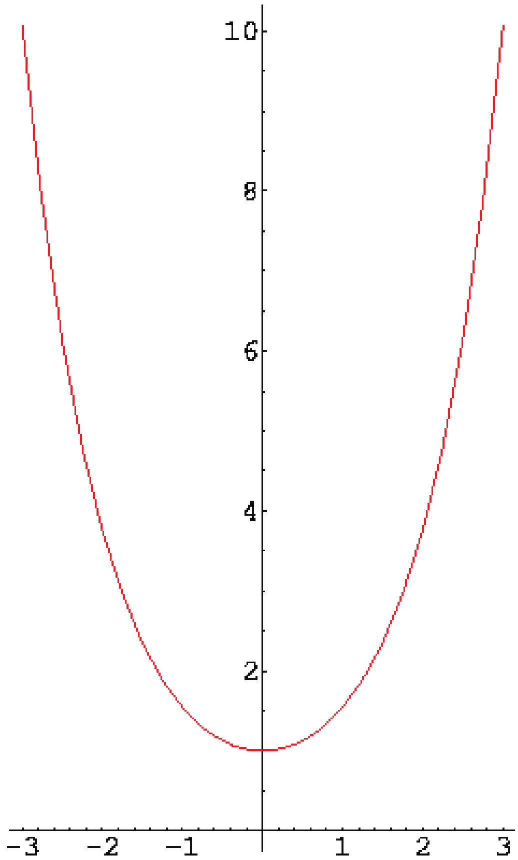
$$\begin{array}{lll} y = \arcsin x & x \in (-1,1) & y \in (-\pi/2, \pi/2) \\ y = \arccos x & x \in (-1,1) & y \in (0, \pi) \\ y = \operatorname{arc\,tg} x & x \in \mathbb{R} & y \in (-\pi/2, \pi/2) \\ y = \operatorname{arc\,ctg} x & x \in \mathbb{R} & y \in (0, \pi) \end{array}$$

Poniżej podajemy kilka podstawowych wzorów dla funkcji elementarnych

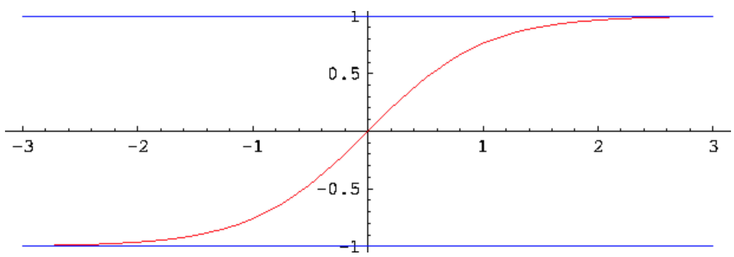
$$\begin{aligned} \sin 2x = 2 \sin x \cos x, &\quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \\ \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), &\quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \\ \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, &\quad \cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x, \\ &\quad \sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x. \end{aligned}$$

Przykład 2.2. Obliczymy

$$\begin{array}{ll} \arcsin(1/2) = b & \sin b = 1/2 \Rightarrow b = \pi/6 \\ \arccos(-\sqrt{3}/2) = b & \cos b = -\sqrt{3}/2 \Rightarrow b = 5/6\pi \\ \arctan 1 = b & \tan b = 1 \Rightarrow b = \pi/4 \\ \operatorname{arc\,ctg}(-\sqrt{3}) = b & \operatorname{ctg} b = -\sqrt{3} \Rightarrow b = 5/6\pi \end{array}$$



Rysunek 2.2: Wykres funkcji $\cosh(x)$



Rysunek 2.3: Wykres funkcji $\mathrm{tgh}(x)$