8.1 Działania na macierzach

Macierzą wymiaru $m \times n$ nazywamy dowolny dwuwskaźnikowy ciąg liczb $a_{i,j}$ gdzie $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Macierz taką zapisujemy w postaci tablicy

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \ldots & a_{m,n} \end{bmatrix} \qquad \text{lub} \qquad A = [a_{i,j}]_{m\times n}$$

W zależności od liczby m wierszy oraz n kolumn, macierze mogą być *prostokątne* gdy $m \neq n$ lub *kwadratowe* gdy $m = n$. Dla macierzy kwadratowej wymiaru $n \times n$ wspólną liczbę wierszy i kolumn n nazywamy *stopniem macierzy*. Wyrazy $a_{i,i}, i = 1, 2, \ldots, n$ nazywamy wyrazami głównej przekątnej. *Macierzą jednostkową* nazywamy macierz kwadratową, która na głównej przekątnej posiada jedynki, natomiast pozostałe elementy $a_{i,j}$ gdzie $i \neq j$, są równe zeru, np.dla $n = 3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Macierz jednostkową oznaczamy symbolem $\mathbb{I}$. *Macierzą zerową* nazywamy macierz której wszystkie elementy są równe zeru. Wśród macierzy prostokątnych często spotykamy macierze wierszowe, zawierające jeden wiersz oraz macierze kolumnowe zawierające jedną kolumnę.

Wykonywanie działań na macierzach wymaga dużej uwagi, ponieważ działania takie są odmiennie zdefiniowane niż działania na liczbach. Jeśli A, B są macierzami tego samego wymiaru to

$$A \pm B = [a_{i,j}]_{m\times n} \pm [b_{i,j}]_{m\times n} = [a_{i,j} \pm b_{i,j}]_{m\times n}$$

Przy dodawaniu dwóch macierzy tego samego wymiaru dodajemy elementy o takich samych wskaźnikach i, j czyli stojące na tej samej pozycji w macierzy.

Mnożenie macierzy przez liczbę

$$kA = k[a_{i,j}]_{m\times n} = [ka_{i,j}]_{m\times n}$$

Przy mnożeniu macierzy przez liczbę mnożymy każdy element macierzy przez liczbę.

Przykład 8.1. Dane są trzy macierze A, B, C

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 7 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Wyznaczyć

(a) $A + B$.

(b) $B - A$.

(c) $A - 3B + 2C$.

Rozwiązanie. (a)

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 7 & -2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 8 & 10 & 5 \\ 7 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

(b)

$$B - A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 7 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ -7 & 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

(c)

$$\begin{aligned} A - 3B + 2C &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 7 & -2 & 0 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 7 & -2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & -6 & -3 \\ -18 & -15 & -12 \\ 0 & -6 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 14 & -2 & -2 \\ -12 & -6 & -9 \\ 7 & -10 & 12 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

Mnożenie macierzy A oraz B jest wykonalne tylko wtedy gdy liczba kolumn macierzy A jest równa liczbie wierszy macierzy B. Mamy mianowicie

$$A_{m\times p} \cdot B_{p\times n} = C_{m\times n}$$

Iloczynem macierzy A oraz B nazywamy macierz $C = [c_{i,j}]_{n\times m}$ której elementami są $c_{i,k}$, $i = 1,\ldots,n, j = 1,\ldots,m$ określone wzorem

$$c_{i,k} = a_{i,1}b_{1,k} + a_{i,2}b_{2,k} + \ldots + a_{i,p}b_{p,k}$$

element $c_{i,k}$ jest sumą iloczynów elementów i-tego wiersza macierzy A oraz k-tej kolumny macierzy B. Bierzemy pierwszy element i-tego wiersza macierzy A oraz mnożymy go przez pierwszy element k-tej kolumny macierzy B następnie dodajemy do tego iloczyn drugiego elementu i-tego wiersza macierzy A oraz drugiego elementu k-tej kolumny macierzy B, następnie dodajemy do tego iloczyn p-tego elementu i-tego wiersza macierzy A oraz p-tego elementu k-tej kolumny macierzy B. Iloczyn macierzy A oraz B oznaczamy

$$AB, \quad A \cdot B, \quad A \times B$$

Mnożenie macierzy poza wyjątkowymi sytuacjami (np. wtedy gdy jedna z macierzy jest macierzą jednostkową) nie jest przemienne tzn. *zazwyczaj*

$$A \cdot B \neq B \cdot A.$$

Przykład 8.2.

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1x + b_1y + c_1z \\ a_2x + b_2y + c_2z \\ a_3x + b_3y + c_3z \end{bmatrix}$$

Przykład 8.3. Obliczymy AB dla

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 3} \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

Iloczyn macierzy AB jest macierzą C wymiaru 2×2. Obliczamy elementy macierzy C mnożąc odpowiedni wiersz macierzy A przez odpowiednią kolumnę macierzy B.

$$\begin{array}{ll} c_{1,1} = 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 = -4 & c_{1,2} = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 = 3 \\ c_{2,1} = 4 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 3 & c_{2,2} = 4 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 11 \end{array}$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 3} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{2,1} & c_{2,2} \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 11 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

Przykład 8.4. Niech

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Obliczmy $A \cdot B$ oraz $B \cdot A$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & -1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \\ 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 & 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 \\ 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Zauważmy, że $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Przykład 8.5. Wyznaczyć $A \cdot B$ i $B \cdot A$, jeżeli

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 7 \\ -2 & 9 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie. Mamy

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 7 \\ -2 & 9 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 + (-5) \cdot (-3) + 7 \cdot 5 & 3 \cdot 0 + (-5) \cdot 4 + 7 \cdot 7 \\ (-2) \cdot 1 + 9 \cdot (-3) + 4 \cdot 5 & (-2) \cdot 0 + 9 \cdot 4 + 4 \cdot 7 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 53 & 29 \\ -9 & 64 \end{bmatrix},$$

oraz

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -5 & 7 \\ -2 & 9 & 4 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot 3 + 0 \cdot (-2) & 1 \cdot (-5) + 0 \cdot 9 & 1 \cdot 7 + 0 \cdot 4 \\ (-3) \cdot 3 + 4 \cdot (-2) & (-3) \cdot (-5) + 4 \cdot 9 & (-3) \cdot 7 + 4 \cdot 4 \\ 5 \cdot 3 + 7 \cdot (-2) & 5 \cdot (-5) + 7 \cdot 9 & 5 \cdot 7 + 4 \cdot 4 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 3 & -5 & 7 \\ -17 & 51 & -5 \\ 1 & 38 & 63 \end{bmatrix}.$$

□

Równość dwóch macierzy

Macierze A i B i jednakowych wymiarach są równe jeżeli każdy element $a_{i,j}$ macierzy A jest równy elementowi $b_{i,j}$ macierzy B, dla $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$.

Transponowanie macierzy

Dla danej macierzy $A = [a_{i,j}]_{m \times n}$ definiujemy macierz transponowaną $A^T = [a_{j,i}]_{n \times m}$ jako macierz powstałą z macierzy A przez zamianę jej kolumn na wiersze (lub wierszy na kolumny). Pierwszy wiersz zapisujemy jako pierwszą kolumnę, drugi wiersz jako drugą kolumnę, ..., m-ty wiersz jako m-tą kolumnę.

Przykład 8.6. Wyznaczyć macierz transponowaną

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Własności transponowania

$$(A+B)^T = A^T + B^T, \qquad (A^T)^T = A$$

Własności działań na macierzach

- łączność dodawania
$$(A+B)+C = A+(B+C)$$
- przemienność dodawania
$$A+B = B+A$$
- elementem zerowym dodawania jest 0 tzn. macierz zerowa
$$A+0 = 0+A = A$$
- elementem przeciwnym do A jest $-A$
$$A+(-A) = 0$$
- elementem jednostkowym mnożenia jest
$$A \cdot \mathbb{I} = \mathbb{I} \cdot A = A$$