7.1 Definicja

Definicja 7.1. Niech na odcinku $\langle a, b\rangle$ będzie dana funkcja f jednej zmiennej. Tworzymy *podział odcinka*, dowolnie wybranymi punktami przy czym

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Długość i-tego podprzedziału oznaczamy przez $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Liczbę $\delta_n = \max \Delta x_i$ nazywamy średnicą podziału. Ciąg podziałów nazywamy normalnym, jeżeli średnica podziału dąży do zera przy $n \to \infty$.

W każdym podprzedziale wybieramy dowolny punkt $\xi \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$ a następnie tworzymy sumę

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

zwaną sumą całkową przybliżoną. Jeżeli dla każdego ciągu normalnego podziału przedziału $[a, b]$ ciąg sum całkowych jest zbieżny do tej samej granicy właściwej, niezależnie od wyboru punktów ξ_i, to granicę tę nazywamy całką oznaczoną funkcji $f(x)$ w przedziale $\langle a, b\rangle$ i oznaczamy symbolem

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Określona wyżej całka oznaczona nazywa się *całką oznaczoną Riemanna*.

Posługując się sumą całkową możemy w dość prosty sposób obliczać przybliżone wartości całek oznaczonych z dowolną dokładnością.

Zwracamy uwagę na kwestię zasadniczą: całka oznaczona z funkcji $f(x)$ w przedziale $\langle a, b\rangle$, jeżeli istnieje, jest liczbą, natomiast całka nieoznaczona jest zbiorem wszystkich funkcji pierwotnych $F(x)$ funkcji $f(x)$ w rozważanym przedziale.

Można wykazać, że jeżeli funkcja $F(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$, to całka oznaczona w przedziale $\langle a, b\rangle$ spełnia równość

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Wykonując rachunki na całkach oznaczonych będziemy posługiwali się następującym zapisem $F(b) - F(b) = F(x)\Big|_a^b$. Z definicji całki oznaczonej wynikają następujące zależności.

$$\int_a^a f(x)\, dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$$

$$\int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \qquad \text{dla } a \le c \le b$$

ponadto mamy odpowiedniki własności zachodzących dla całek nieoznaczonych

1) *liniowość operacji całkowania dla całek oznaczonych* jeżeli f, g są funkcjami ciągłymi to dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)\ dx = \alpha \int_a^b f(x)\ dx + \beta \int_a^b g(x)\ dx$$

2) *wzór na całkowanie przez części dla całek oznaczonych* Jeżeli f, g są funkcjami różniczkowalnymi oraz pochodne f', g' są ciągłe to dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b f'(x)g(x)\ dx = (f(x)g(x))\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\ dx$$

3) *wzór na całkowanie przez podstawienie dla całek oznaczonych* Jeżeli $f : (a, b) \to (c, d)$ jest funkcją różniczkowalną o ciągłej pochodnej oraz $g : (c, d) \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą to

$$\int_a^b g(f(x))g'(x)\ dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(t)\ dt$$

Przykład 7.2. Obliczymy całkę $\int_{-1}^1 x\ dx$.

$$\int_{-1}^1 x\ dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

Przykład 7.3. Stosując metodę całkowania przez części obliczymy całkę

$$\int_0^1 xe^x\ dx.$$

$$\int_0^1 xe^x\ dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & v' = e^x \\ u' = 1 & v = e^x \end{array} \right| = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x\ dx =$$
$$= xe^x\Big|_0^1 - e^x\Big|_0^1 = e - (e - 1) = 1.$$

Przykład 7.4. Stosując metodę całkowania przez podstawienie obliczymy całkę

$$\int_0^1 x(1 + x^2)^n\ dx$$

gdzie n jest pewną ustaloną liczbą naturalną.

$$\int_0^1 x(1 + x^2)^n\ dx = \left| \begin{array}{l} 1 + x^2 = t \\ 2x\ dx = dt \\ x \in (0, 1), t \in (1, 2) \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int_1^2 t^n\ dt = \frac{1}{2}\frac{t^{n+1}}{(n+1)}\Big|_1^2 =$$
$$= \frac{2^n}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)}$$

Powyższą całkę możemy również obliczyć inaczej. Wyznaczamy całkę nieoznaczoną

$$\int x(1+x^2)^n \, dx = 1/2\frac{(1+x^2)^{n+1}}{n+1} + C,$$

następnie obliczamy

$$\frac{1}{2}\frac{(1+x^2)^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{2^n}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)}.$$

Przykład 7.5. Stosując podstawienie $x = \sin t$ obliczymy $\int_0^1 \, dx$.

$$\int_0^1 \, dx = \left| \begin{array}{l} x = \sin t \\ dx = \cos t \, dt \\ x \in (0,1), t \in (0, \pi/2) \end{array} \right| = \int_0^{\pi/2} \cos t \, dt = \sin t\Big|_0^{\pi/2} = 1$$