

1.5 Ćwiczenia do samodzielnego rozwiązania

Ćwiczenie 1.1. Obliczyć granice ciągów

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 5n - 7}{3n^2 + 6n - 5},$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} - 3}{3n + 1},$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^6 - 2n}{2n^5 + 1},$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}),$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2n^2 + n} - 5n,$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}),$

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{(n+1)^2},$

h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}}{-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{(-2)^n}}.$

Odp. a) $\frac{2}{3}$, b) 0, c) ∞ , d) $\frac{1}{2}$, e) $-\infty$, f) $\frac{1}{2}$, g) $\frac{1}{2}$, h) -3 .

Ćwiczenie 1.2. Zbadać monotoniczność ciągów o wyrazie ogólnym

a) $a_n = \frac{n+1}{n^2+1},$

b) $a_n = \frac{3n^2 + 5n - 3}{n^2 + 2n}.$

Odp. a) malejący, b) rosnący.

Ćwiczenie 1.3. Zbadać zbieżność szeregów

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)},$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-3}{\sqrt{n}3^n},$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 5^n}{(2n)!},$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5n+3)^n}{(3n-2)^n},$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3}{3^n}.$

Odp. a) zbieżny $\frac{1}{2}$ b) zbieżny $\frac{\sqrt{3}}{3}$ i e) zbieżny $\frac{1}{3}$, c) rozbieżny $\frac{5}{4}$ i d) rozbieżny $\frac{5}{3}$.