12.2 Pochodna kierunkowa

Rozpatrzmy funkcję $f(x,y,z)$ klasy C^1 w otoczeniu punktu P_0. W punkcie tym weźmy półoś l o kierunku $\vec{s} = [\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma]$. Na półosi znajduje się punkt $P(x,y,z)$.

Definicja 12.13. *Pochodną kierunkową* funkcji $f(x,y,z)$ w kierunku $\vec{s}$ nazywamy granicę właściwą

$$\lim_{P\to P_0} \frac{f(P)-f(P_0)}{|PP_0|},$$

gdzie $|PP_0|$ oznacza odległość punktów $P(x,y,z)$ i $P_0(x_0,y_0,z_0)$.

Pochodną kierunkową funkcji $f(x,y,z)$ w punkcie P_0 w kierunku wektora jednostkowego $\vec{s}$ można obliczyć ze wzoru

$$\frac{\partial f}{\partial l}|_{P_0} = f_x|_{P_0}\cos\alpha + f_y|_{P_0}\cos\beta + f_z|_{P_0}\cos\gamma = \operatorname{grad} f(P_0)\circ\vec{s}.$$

Analogicznie oblicza się pochodną kierunkową funkcji $f(x,y)$ klasy C^1 w punkcie P_0 w kierunku wektora $\vec{s}$

$$\frac{\partial f}{\partial l} = f_x(P_0)\cos\alpha + f_y(P_0)\cos\beta = \operatorname{grad} f(P_0)\circ\vec{s}.$$

Pochodna ta wyznacza szybkość zmian funkcji w kierunku $\vec{s}$. Szybkość ta jest największa jeżeli kierunek ten w punkcie P_0 jest zgodny z kierunkiem wektora $\operatorname{grad} f(P)$.

Przykład 12.14. Obliczyć

a) gradient funkcji $z = f(x,y) = x^2y^3$.

b) pochodną kierunkową w punkcie $P_0(1,1)$ w kierunku punktu $P_1(2,4)$.

c) pochodną kierunkową funkcji $f(x,y,z) = xy + xz + yz$ w punkcie $P_0(-1,2,3)$ w kierunku punktu $P_1(2,3,6)$.

a) $\operatorname{grad} z = 2xy^3\bar{i} + 3x^2y^2\bar{j} = [2xy^3, 3x^2y^2]$.
b) Korzystając ze wzoru $\frac{\partial f}{\partial l}|_{P_0} = \operatorname{grad} f|_{P_0}\circ\vec{\tau}$, $\vec{\tau} = [\cos\alpha, \cos\beta]$ otrzymujemy wektor $\overrightarrow{P_0P_1} = [1,3]$. $|\overrightarrow{P_0P_1}| = \sqrt{10}$, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos\beta = \frac{3}{\sqrt{10}}$. $\vec{\tau} = \left[\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right]$. Stąd pochodna kierunkowa funkcji $z = x^2y^3$ w punkcie $P_0(1,1)$ w kierunku wektora $\vec{l}$ wynosi

$$\frac{\partial f}{\partial l}|_{P_0} = \operatorname{grad} f(P_0)\circ\vec{\tau} = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{10}} + 3\cdot\frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{11}{\sqrt{10}} \approx 3,48.$$

Pochodna ta osiąga największą wartość w kierunku $\vec{a} = \operatorname{grad} f(P_0)$, czyli $\vec{a} = [2,3]$.

Uwaga Wektor $\vec{\tau}$ jest unormowanym (tzn. o długości 1) wektorem kierunku którego liczymy pochodną kierunkową.
c) Obliczamy wersor (wektor o długości 1) kierunkowy vectora $\overrightarrow{P_0P_1} = [3,1,3]$. Długość wektora $\overrightarrow{P_0P_1}$ wynosi $\sqrt{19}$, stąd wersor kierunkowy

$$\vec{s} = \left[\frac{3}{\sqrt{19}}, \frac{1}{\sqrt{19}}, \frac{3}{\sqrt{19}}\right].$$

Gradient funkcji f

$$\operatorname{grad} f = [y+z, x+z, x+y], \qquad \operatorname{grad} f(P_0) = [5,2,1].$$

Stąd pochodna kierunkowa w punkcie P_0 w kierunku punktu P_1 wynosi

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \operatorname{grad} f(P_0) \circ \vec{s} = [5,2,1] \circ \left[\frac{3}{\sqrt{19}}, \frac{1}{\sqrt{19}}, \frac{3}{\sqrt{19}}\right] = \frac{20}{\sqrt{19}}.$$