

Wykład 5. Obwody ze sprzężeniami magnetycznymi

Wstęp

Interesujące zjawiska powstają w obwodach zawierających cewki położone blisko siebie, w których strumienie magnetyczne obu cewek przenikają się. Następuje wówczas zjawisko sprzężenia magnetycznego obu obwodów i przenoszenia energii z jednego obwodu do drugiego.

Wykład ten poświęcony będzie omówieniu zjawisk występujących w obwodach zawierających cewki sprzężone magnetycznie. W obwodach takich prąd jednej cewki wywołuje strumień skojarzony z cewką drugą, a zmiana tego strumienia wywołuje powstanie napięcia elektrycznego na zaciskach tej cewki. Wprowadzimy pojęcie indukcyjności własnej (zwanej dotąd indukcyjnością) oraz indukcyjności wzajemnej. Wprowadzone zostaną metody analizy obwodów zawierających elementy sprzężonych magnetycznie, wykorzystując eliminację sprzężeń magnetycznych. Sprzężenia magnetyczne umożliwiają budowę urządzenia zwanego transformatorem, transformującego poziom napięcia wejściowego w wyjściowe o innej wartości. Ostatnia część wykładu poświęcona będzie analizie teoretycznej transformatora.



5.1. Zjawiska fizyczne przy sprzężeniu magnetycznym cewek

Przyjmijmy, że dwie cewki są położone blisko siebie w taki sposób, że strumień magnetyczny jednej cewki przenika również drugą. Całkowity strumień skojarzony z daną cewką (strumień skojarzony jest sumą strumieni ϕ każdego zwoju cewki, co przy z zwojach o identycznym strumieniu daje $\Psi = z\phi$) jest wtedy sumą obu strumieni, jeśli ich kierunki są zgodne lub ich różnicą, jeśli kierunki strumieni są przeciwne. Strumienie obu cewek zapiszemy wówczas w postaci.

$$\Psi_1 = \Psi_{11} \pm \Psi_{12} \quad (5.1)$$

$$\Psi_2 = \Psi_{22} \pm \Psi_{21} \quad (5.2)$$

Strumień Ψ_{11} występujący w cewce pierwszej pochodzi od prądu tej cewki a strumień Ψ_{12} jest wytworzony przez cewkę drugą i przenika przez cewkę pierwszą. Podobnie strumień Ψ_{22} pojawiający się w cewce drugiej pochodzi od prądu tej cewki a strumień Ψ_{21} pochodzący od prądu cewki pierwszej przenika przez cewkę drugą. Uwzględniając pojęcie indukcyjności wprowadzone w rozdziale pierwszym dla cewek liniowych definiuje się pojęcie indukcyjności własnej i wzajemnej w następujących postaciach.

- Indukcyjności własne

$$L_1 = \frac{\Psi_{11}}{i_1} \quad (5.3)$$

$$L_2 = \frac{\Psi_{22}}{i_2} \quad (5.4)$$

- Indukcyjności wzajemne

$$M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{i_2} \quad (5.5)$$

$$M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{i_1} \quad (5.6)$$

Indukcyjność wzajemna jest miarą z jaką prąd jednej cewki wpływa na zmianę strumienia drugiej. Dla środowisk o tej samej przenikalności magnetycznej μ wiążącej indukcję magnetyczną B z natężeniem pola magnetycznego H ($B = \mu H$) obie indukcyjności wzajemne są sobie równe, to znaczy $M_{12} = M_{21} = M$. Dla dwu cewek sprzężonych magnetycznie definiuje się **współczynnik sprzężenia** jako średnią geometryczną współczynników sprzężenia obu cewek, przy czym współczynnik sprzężenia jednej cewki z drugą jest określany jako stosunek strumienia głównego cewki pochodzącego od prądu własnego do strumienia całkowitego cewki. Współczynnik sprzężenia cewek oznaczać będziemy literą k . Spełnia on następującą relację

$$M = k\sqrt{L_1 L_2} \quad (5.7)$$

Przy idealnym (pełnym) sprzężeniu cewek wartość współczynnika sprzężenia jest równa jeden ($k=1$). Indukcyjność wzajemna jest wówczas średnią geometryczną indukcyjności

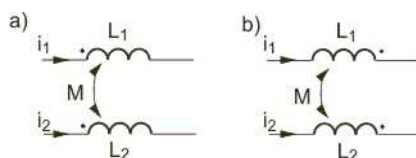
własnych obu cewek. Przy braku sprzężenia magnetycznego między cewkami wartość $k=0$. W praktyce wartość k zmienia się od 0 do 1, nigdy nie osiągając wartości 1.

Sprzężenie magnetyczne powoduje zmianę napięcia w cewce od zmian prądu innej cewki, sprzężonej z nią. Wzory określające odpowiednie napięcia na cewkach sprzężonych magnetycznie dane są wówczas w postaci (z założenia przyjęto stałe wartości indukcyjności)

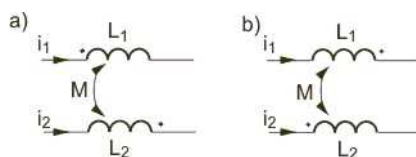
$$u_1 = \frac{d\Psi_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} \quad (5.8)$$

$$u_2 = \frac{d\Psi_2}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt} \quad (5.9)$$

Znak plus lub minus występujący we wzorze odpowiada sprzężeniu dodatniemu (znak plus) bądź ujemnemu (znak minus). Rodzaj sprzężenia zależy od kierunku prądu cewki względem początku uzwojenia. Rys. 5.1 przedstawia sytuacje odpowiadające sprzężeniu dodatniemu a rys. 5.2 ujemnemu.



Rys. 5.1. Ilustracja sprzężenia dodatniego dwu cewek



Rys. 5.2. Ilustracja sprzężenia ujemnego dwu cewek

Zauważmy, że przy istnieniu sprzężenia magnetycznego w cewce generowane jest napięcie na cewce nawet przy prądzie własnym cewki równym zero. Oznacza to przenoszenie się energii z jednego obwodu do drugiego drogą magnetyczną.

5.2. Analiza obwodów sprzężonych magnetycznie przy wymuszeniu sinusoidalnym

5.2.1. Równania symboliczne elementów sprzężonych magnetycznie

Analiza obwodów ze sprzężeniami magnetycznymi w stanie ustalonym przy wymuszeniu sinusoidalnym może być przeprowadzona przy zastosowaniu metody symbolicznej, w której w miejsce różniczkowania wprowadza się działania na liczbach zespolonych. Dla wymuszenia sinusoidalnego wzory różniczkowe upraszczają się do zależności algebraicznych typu zespolonego, które podobnie jak dla indukcyjności własnych wprowadzonych w rozdziale drugim można zapisać w postaci

$$U_1 = j\omega L_1 I_1 \pm j\omega M I_2 \quad (5.10)$$

$$U_2 = j\omega L_2 I_2 \pm j\omega M I_1 \quad (5.11)$$

Znak plus obowiązuje dla **sprzężenia dodatniego** (strumienie magnetyczne obu cewek sumują się) a znak minus dla **sprzężenia ujemnego** (strumienie magnetyczne obu cewek odejmują się). Jak widać z powyższych wzorów cewki sprzężone magnetycznie reprezentują sobą reaktancje, przy czym można tu wyróżnić dwa rodzaje reaktancji: **reaktancję indukcyjną własną** (zwaną dotąd reaktancją indukcyjną) i **reaktancję indukcyjną wzajemną**. Wprowadźmy następujące oznaczenia

$$X_M = \omega M \quad - \text{reaktancja indukcyjna wzajemna}$$

$$Z_M = j\omega M \quad - \text{impedancja indukcyjna wzajemna.}$$

Napięcie skuteczne zespolone na cewkach sprzężonych można wówczas opisać następującymi wzorami

$$U_1 = Z_{L1} I_1 \pm Z_M I_2 = j\omega L_1 I_1 \pm j\omega M I_2 \quad (5.12)$$

$$U_2 = Z_{L2} I_2 \pm Z_M I_1 = j\omega L_2 I_2 \pm j\omega M I_1 \quad (5.13)$$

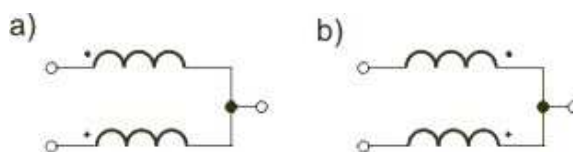
w których Z_{L1} oraz Z_{L2} oznaczają impedancje indukcyjności własnych cewki pierwszej i drugiej, $Z_{L1} = j\omega L_1$, $Z_{L2} = j\omega L_2$. Dla wyznaczenia wartości skutecznej napięcia na cewce sprzężonej muszą być znane zarówno wartości skuteczne prądu jednej cewki jak i drugiej, sprzężonej z nią. Znak sprzężenia (plus lub minus) powoduje odejmowanie (sprzężenie ujemne) lub dodawanie (sprzężenie dodatnie) napięć pochodzących od sprzężenia.

Najważniejszym elementem analizy obwodów ze sprzężeniami magnetycznymi jest wyznaczenie prądów poszczególnych gałęzi w obwodzie. Bezpośrednie zastosowanie poznanych dotąd metod analizy obwodów (metoda węzłowa, oczkowa, Thevenina czy Nortona) wymaga w pierwszej kolejności wyeliminowania sprzężenia magnetycznego cewek, a więc pozbycia się wpływu prądu jednej cewki na napięcie cewki drugiej.

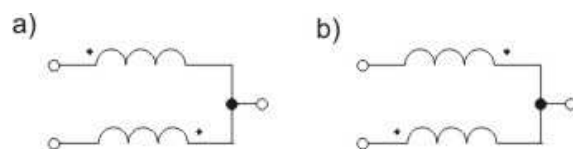
5.2.2. Eliminacja sprzężeń magnetycznych

Eliminacja sprzężeń magnetycznych jest możliwa bezpośrednio na podstawie analizy struktury obwodu i uwzględnienia położenia początków uzwojeń cewek względem węzłów wspólnych (lub uznanych za wspólne przy braku ich bezpośredniego połączenia). W tym przypadku można wyróżnić dwa rodzaje połączeń:

- dwie cewki sprzężone magnetycznie mają jednakowo usytuowane początki uzwojeń względem węzła - takie cewki uważać będziemy za **jednoimienne** (rys. 5.3)
- dwie cewki sprzężone magnetycznie mają przeciwnie usytuowane początki uzwojeń względem węzła - takie cewki uważać będziemy za **różnoimienne** (rys. 5.4).

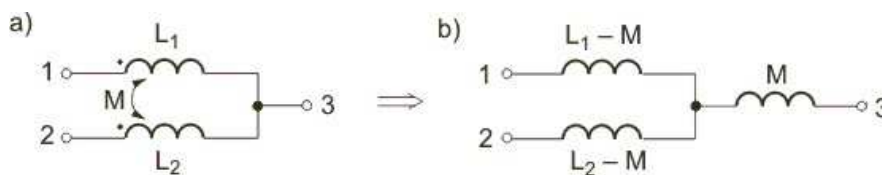


Rys. 5.3. Cewki jednoimienne



Rys. 5.4. Cewki różnoimienne

W przypadku cewek jednoimiennych eliminacja sprzężenia magnetycznego prowadzi do obwodu zastępczego przedstawionego na rys. 5.5.

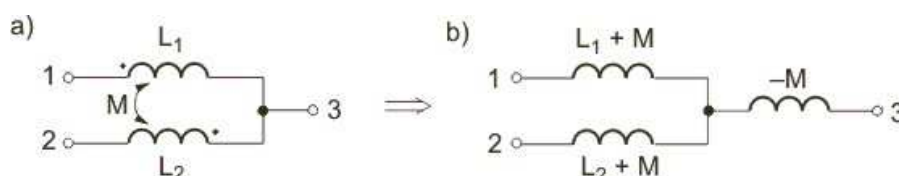


Rys. 5.5. Eliminacja sprzężenia magnetycznego cewek jednoimiennych



W gałęziach zawierających cewki pojawiła się indukcyjność wzajemna ze znakiem minus a w gałęzi wspólnej ze znakiem plus. Łatwo można pokazać, że przy takim sposobie eliminacji sprzężeń magnetycznych napięcia na zaciskach zewnętrznych 1, 2 i 3 przy niezmiennych prądach zewnętrznych w obu obwodach równają się sobie (co jest warunkiem równoważności).

Schemat z rys. 5.6 odpowiada eliminacji sprzężenia w przypadku dwu cewek różnoimiennych.



Rys. 5.6. Eliminacja sprzężenia magnetycznego cewek różnoimiennych



W gałęziach zawierających cewki pojawiła się indukcyjność wzajemna ze znakiem plus a w gałęzi wspólnej ze znakiem minus. Łatwo udowodnić, że przy takim sposobie eliminacji sprzężeń napięcia na zaciskach zewnętrznych 1, 2 i 3 w obu obwodach (oryginalnym i po eliminacji sprzężenia) przy tych samych prądach zewnętrznych równają się sobie (co jest warunkiem równoważności).

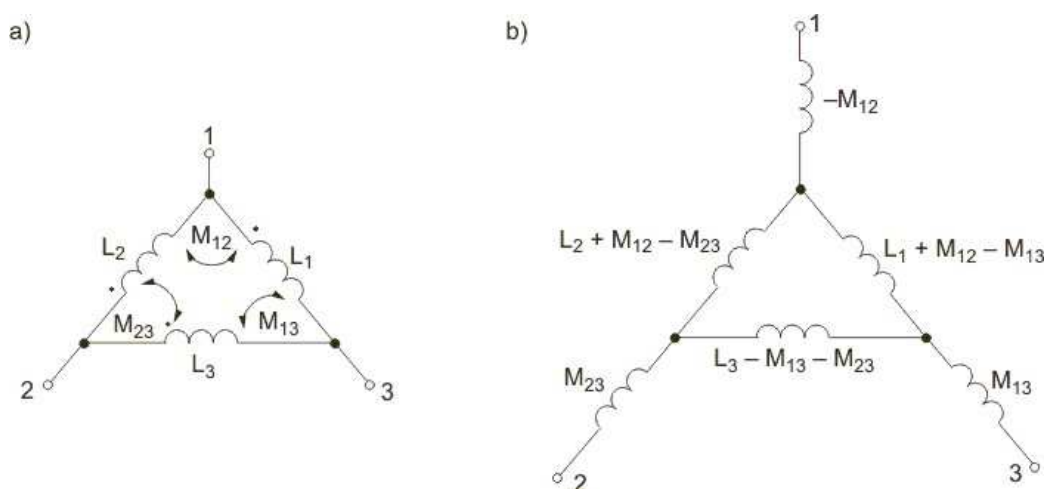
Przy eliminacji sprzężeń magnetycznych przyjęty zwrot prądów nie ma żadnego wpływu na końcową postać obwodu bez sprzężeń. Ma na nią wpływ jedynie usytuowanie początków uzwojeń cewek względem wspólnego węzła, czyli jednoimiennosc lub różnoimiennosc cewek sprzężonych magnetycznie.

W obu przypadkach otrzymuje się obwody bez sprzężeń, równoważne oryginalnym jedynie pod względem prądowym. Napięcia w obu obwodach w części podlegającej przekształceniu są całkowicie różne. Rzeczywiste napięcia panujące na elementach podlegających transformacji powinny być określone bezpośrednio na podstawie obwodu oryginalnego i powinny uwzględniać sprzężenie magnetyczne (wzory 5.12 i 5.13).

Należy podkreślić, że przy wielu cewkach sprzężonych ze sobą, eliminacja pojedynczego sprzężenia między dwoma wybranymi cewkami może zachodzić niezależnie od pozostałych sprzężeń, co znakomicie ułatwia przeprowadzenie procesu eliminacji sprzężeń.

Przykład 5.1

Na rys. 5.7a przedstawiony jest obwód zawierający trzy cewki sprzężone magnetycznie ze sobą. Stosując metodę eliminacji sprzężeń do każdej pary cewek sprzężonych ze sobą otrzymuje się schemat obwodu bez sprzężeń, równoważny pod względem prądowym obwodowi ze sprzężeniami (rys. 5.7b).

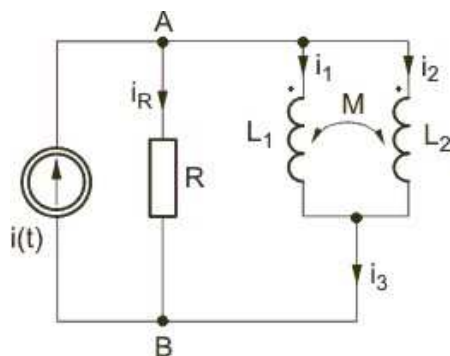


Rys. 5.7. Przykład eliminacji sprzężeń magnetycznych wielu cewek: a) obwód oryginalny, b) obwód po eliminacji sprzężeń

Przy analizie obwodów elektrycznych zawierających sprzężenia magnetyczne pierwszym krokiem jest eliminacja sprzężeń magnetycznych zgodnie z zasadami podanymi wyżej. Dzięki temu każdy element obwodu staje się uzależniony jedynie od swojego prądu. Należy przy tym pamiętać, że **schemat obwodu po eliminacji sprzężeń jest równoważny obwodowi oryginalnemu jedynie pod względem prądowym**. Stąd obwód taki może służyć wyłącznie obliczeniu prądów. Dla wyznaczenia napięć gałęziowych należy wrócić do obwodu pierwotnego ze sprzężeniami magnetycznymi. Napięcia na elementach sprzężonych obliczać należy uwzględniając sprzężenia między cewkami przy wykorzystaniu wzorów (5.12) i (5.13).

PRZYKŁAD

Wyznaczyć rozpyły prądów w obwodzie przedstawionym na rys. 5.11.

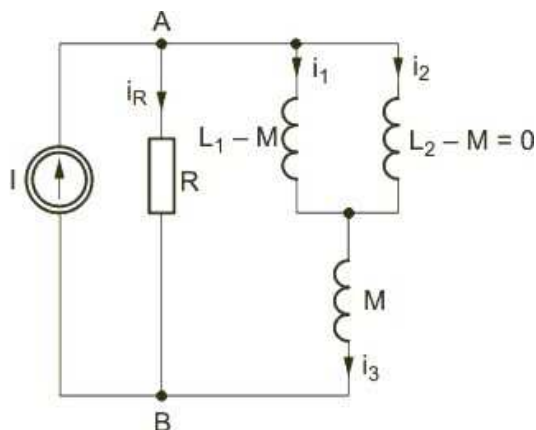


Rys. 5.8 Schemat obwodu elektrycznego ze sprzężeniem magnetycznym do zadania 5.1

Przyjąć następujące wartości parametrów elementów obwodu: $R=1\Omega$, $L_1=2H$, $L_2=1H$, $M=1H$ oraz $i(t) = 5 \sin(t + 45^\circ)$ A.

Rozwiązanie

Postać obwodu po eliminacji sprzężenia magnetycznego przedstawiona jest na rys. 5.12



Rys. 5.9 Obwód bez sprzężeń magnetycznych odpowiadający schematowi z rys. 5.11.

Wielkości symboliczne charakteryzujące elementy obwodu:

$$I = \frac{5}{\sqrt{2}} e^{j45^\circ}$$

$$Z_1 = j\omega(L_1 - M) = j1$$

$$Z_2 = j\omega(L_2 - M) = 0$$

$$Z_M = j\omega M = j1$$

Impedancja zastępcza obwodu wobec $Z_2 = 0$

$$Z = \frac{RZ_M}{R + Z_M} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j45^\circ}$$

Napięcie U_{AB}

$$U_{AB} = ZI = j2,5$$

Prądy:

$$I_R = \frac{U_{AB}}{R} = j2,5$$

$$I_1 = 0$$

$$I_2 = I_3 = \frac{U_{AB}}{Z_M} = 2,5$$

Napięcia na elementach równoległych w obwodzie oryginalnym i zastępczym są sobie równe i wynoszą $U_{AB} = j2,5$. Można to łatwo sprawdzić w obwodzie oryginalnym obliczając napięcia na cewkach sprzężonych. Mianowicie

$$U_{L_1} = j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2 = j2,5$$

$$U_{L_2} = j\omega L_2 I_2 + j\omega M I_1 = j2,5$$

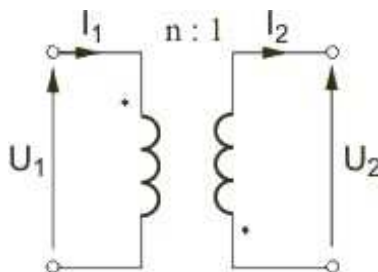
5.3 Transformator

Transformator jest układem przetwarzającym napięcie wejściowe w napięcie wyjściowe za pośrednictwem strumienia magnetycznego przy braku bezpośredniego połączenia galwanicznego między obu zaciskami (wejściowymi i wyjściowymi). Transformatory mogą być stosowane do różnych celów, ale podstawowym ich zadaniem jest zmiana wartości napięcia wejściowego na inną wartość napięcia wyjściowego. Może to być zarówno podwyższenie jak i obniżenie wartości. Przy zmianie napięcia ulegają odpowiedniej zmianie również prądy w uzwojeniach transformatora.

5.3.1 Transformator idealny

Wyidealizowanym typem transformatora jest tak zwany transformator idealny, w którym zakłada się pełne sprzężenie magnetyczne ($k=1$), brak strat (wszystkie rezystancje równe

zeru) i pominięcie wszelkich zjawisk pasożytniczych. Symbol graficzny transformatora idealnego przedstawiono na rys. 5.10 (w schemacie tym założono sprzężenie dodatnie, choć może być ono równie dobrze ujemne, zależnie od konstrukcji transformatora).



Rys. 5.10. Symbol graficzny transformatora idealnego

Prądy i napięcia pierwotne i wtórne oznaczone są odpowiednio symbolami I_1 , U_1 , I_2 , U_2 . Oznaczenie $n:1$ oznacza stosunek liczby zwojów pierwotnych transformatora do liczby zwojów wtórnych. W schemacie tym pomija się zwykle symbol sprzężenia magnetycznego pozostawiając jedynie oznaczenie początków uzwojeń transformatora.

Transformator idealny jest w pełni opisany poprzez tak zwaną **przekładnię zwojową**, określającą stosunek napięcia pierwotnego do wtórnego (**przekładnię napięciową**) na podstawie liczby zwojów pierwotnych i wtórnych. Przekładnia napięciowa transformatora idealnego niezależnie od sposobu wykonania i od obciążenia, powinna być równa przekładni zwojowej określonej wzorem

$$n = \frac{z_1}{z_2} \quad (5.14)$$

Oznacza to, że relacja między napięciem pierwotnym i wtórnym jest następująca

$$\frac{U_1}{U_2} = n \rightarrow U_1 = \frac{z_1}{z_2} U_2 \quad (5.15)$$

Wobec założenia o braku strat w samym transformatorze idealnym moc dostarczona na zaciski pierwotne równa się mocy na zaciskach wtórnych, to jest $S_1 = S_2$ (podobnie jest z mocą czynną i bierną). Przy oznaczeniu przekładni transformatora idealnego przez n , z warunku równości mocy wejściowej i wyjściowej, to znaczy $U_1 I_1^* = U_2 I_2^*$. Wynika stąd relacja między prądem pierwotnym i wtórnym transformatora. Mianowicie

$$I_1 = \frac{1}{n} I_2 \quad (5.16)$$

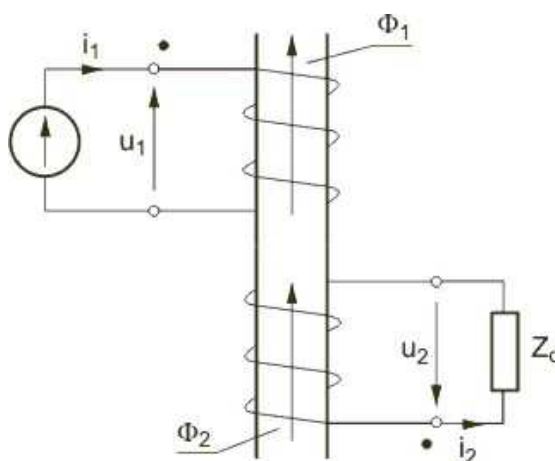
Obie zależności (5.15) i (5.16) można zapisać w następującej postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

Powyższe równanie macierzowe nazywane jest równaniem łańcuchowym transformatora idealnego. Wykonanie transformatora idealnego w praktyce nie jest możliwe, jednak współczesne realizacje techniczne transformatorów bazujące na wykorzystaniu sprzężenia magnetycznego cewek (zwłaszcza transformatory z rdzeniem ferromagnetycznym) są bliskie ideału.

5.3.2 Podstawy fizyczne działania transformatora wykorzystującego sprzężenie magnetyczne

Rys. 5.11 przedstawia poglądowy schemat transformatora wykorzystującego zjawisko sprzężenia magnetycznego 2 cewek nawiniętych na wspólnym korpusie. Jest on zasilany napięciem U_1 i obciążony po stronie wtórnej impedancją Z_o .



Rys. 5.11. Poglądowy schemat transformatora

Uzwojenie, do którego jest zazwyczaj doprowadzone źródło energii elektrycznej, nazywamy **uzwojeniem pierwotnym**, natomiast uzwojenie, do którego jest dołączony odbiornik, nazywamy **uzwojeniem wtórnym**. Zaciski uzwojenia pierwotnego stanowią wejście układu, a zaciski uzwojenia wtórnego - wyjście. Odpowiednie napięcia i prądy w transformatorze nazywamy pierwotnymi lub wtórnymi. Wszystkie wielkości i parametry związane z uzwojeniem pierwotnym opatrzymy wskaźnikiem 1, a wielkości i parametry związane z uzwojeniem wtórnym – wskaźnikiem 2. Przekazywanie energii elektrycznej z jednego obwodu do drugiego następuje za pośrednictwem pola elektromagnetycznego (strumienia magnetycznego).

Do uzwojenia pierwotnego przyłożone jest napięcie sinusoidalnie zmienne o wartości chwilowej $u_1(t)$. Wartość chwilową prądu w uzwojeniu pierwotnym oznaczmy przez $i_1(t)$. Pod wpływem zmiennego w czasie prądu $i_1(t)$ w przestrzeni otaczającej uzwojenie powstaje zmienny strumień magnetyczny ϕ , będący superpozycją strumieni ϕ_1 i ϕ_2 . Przy założeniu jego równomiernego rozkładu na przekroju S , strumień jest iloczynem **indukcji magnetycznej** B i przekroju S , $\phi = BS$. Strumień ten kojarzy się zarówno z uzwojeniem pierwotnym o liczbie zwojów z_1 wytwarzając strumień skojarzony $\Psi_1 = z_1\phi$, jak i uzwojeniem wtórnym o liczbie zwojów z_2 wytwarzając w nim strumień skojarzony $\Psi_2 = z_2\phi$. Zgodnie z prawem indukcji elektromagnetycznej pod wpływem zmiennego w czasie strumienia magnetycznego indukuje się napięcie $u(t)$

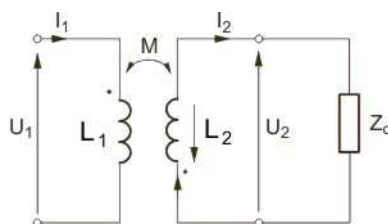
$$u(t) = \frac{d\Psi}{dt} \quad (5.18)$$

Jeśli do uzwojenia wtórnego dołączymy odbiornik, to pod wpływem napięcia indukowanego w tym uzwojeniu popłynie prąd $i_2(t)$.

W zależności od środowiska w jakim zamyka się wytworzony wokół uzwojeń strumień magnetyczny rozróżniamy **transformatory powietrzne** (korpus transformatora wykonany z dielektryka o przenikalności magnetycznej względnej bliskiej jedności) i **transformatory z rdzeniem ferromagnetycznym** o bardzo dużych wartościach przenikalności magnetycznej względnej sięgających wielu tysięcy.

5.3.3 Analiza transformatora zbudowanego z cewek magnetycznie sprzężonych

Transformator rzeczywisty realizuje się w układzie cewek magnetycznie sprzężonych, nawiniętych na korpusie (rdzeniu) wykonanym z materiału ferromagnetycznego, zapewniającego bliskie idealnemu sprzężenie magnetyczne ($k \approx 1$). Model uproszczony transformatora magnetycznego (bez uwzględnienia rezystancji uzwojeń) obciążonego impedancją Z_o jest przedstawiony na rys. 5.12.



Rys. 5.12. Realizacja idealnego transformatora w układzie dwu cewek magnetycznie sprzężonych

Indukcyjności własne uzwojeń oznaczone są przez L_1 i L_2 a indukcyjność wzajemna przez M , przy czym $M = k\sqrt{L_1 L_2}$. Napięcie zasilające wywołuje w obwodzie pierwotnym prąd I_1 , wytwarzający strumień magnetyczny. Energia obwodu pierwotnego przenosi się do obwodu wtórnego poprzez sprzężenie magnetyczne, zaznaczone symbolicznie jako indukcyjność wzajemna M . Pod wpływem zaindukowanego napięcia przy zamkniętym obwodzie wtórnym płynie prąd I_2 , odkładając na impedancji odbiornika napięcie U_2 .

Analizując transformator w stanie ustalonym przy wymuszeniu sinusoidalnym zastosujemy metodę symboliczną zespoloną. Z definicji sprzężenia magnetycznego obu cewek przy założonym zwrocie prądów i przyjęciu początków uzwojeń jak na rys. 5.12 wynikają następujące równania opisujące obwód

$$U_1 = jX_{L1}I_1 + jX_M I_2 \quad (5.19)$$

$$U_2 = -[jX_{L2}I_2 + jX_M I_1] \quad (5.20)$$

Znak minus występujący we wzorze na U_2 wynika z kierunku U_2 zaznaczonego na rysunku 5.12. Z równań (5.19) i (5.20) wynika następujący wzór określający napięcie wyjściowe

$$U_2 = -\left[\frac{X_M}{X_{L1}} U_1 + jI_2 \left(\frac{X_{L1}X_{L2} - X_M^2}{X_{L1}} \right) \right] \quad (5.21)$$

Dla właściwego działania transformatora jest wymagane, aby napięcie wyjściowe U_2 nie zależało od prądu obciążenia I_2 . Wymaganie to może być spełnione, jeśli współczynnik występujący przy I_2 będzie równy zero (lub pomijalnie mały). Zauważmy, że przy założeniu wyidealizowanego transformatora ($k \approx 1$) zachodzi $X_M^2 \approx X_{L1}X_{L2}$. Warunek taki jest w przybliżeniu spełniony dla transformatorów o rdzeniu ferromagnetycznym. Oznacza to, że niezależnie od obciążenia relacja między napięciem pierwotnym i wtórnym dana jest wówczas w postaci

$$U_2 \approx -\frac{X_M}{X_{L1}} U_1 \quad (5.22)$$

Jeśli uwzględnimy, że reaktancje cewek są proporcjonalne do liczby zwojów według relacji $X_{L1} = Kz_1^2$, $X_{L2} = Kz_2^2$, $X_M = Kz_1z_2$ gdzie K oznacza pewną stałą konstrukcyjną, to z zależności (5.22) wynika

$$\frac{U_2}{U_1} = -\frac{z_2}{z_1} = -\frac{1}{n} \quad (5.23)$$

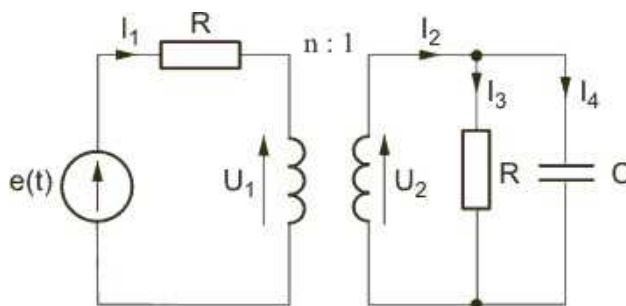
Napięcie wtórne takiego transformatora jest zależne wyłącznie od przekładni zwojowej i napięcia wejściowego układu (znak minus nie odgrywa żadnej roli a jedynie oznacza przesunięcie fazowe 180° napięcia wyjściowego względem wejściowego). Ostatnia zależność pokazuje, że prąd obciążenia nie ma wpływu na wielkość napięcia wyjściowego. Jest to zatem realizacja podstawowej zależności charakterystycznej dla transformatora idealnego. Przy pominięciu strat w transformatorze moc na wejściu równa się mocy wyjściowej, stąd relacja między prądem pierwotnym i wtórnym spełnia również drugą zależność transformatora idealnego (wzór 5.16). Wynika stąd że transformator z rdzeniem ferromagnetycznym jest dobrym przybliżeniem transformatora idealnego.

Ćwiczenia

Ćwiczenie 5.1

Wyznaczyć rozwiązanie obwodu z rys. 5.13 zawierającego transformator idealny o przekładni zwojowej równej $n=2$. Przyjąć następujące wartości parametrów obwodu:

$$e(t) = 10\sqrt{2} \sin(\omega t) \text{ V}, \quad \omega = 1 \text{ rad/s}, \quad R = 5 \Omega, \quad C = 0,2 \text{ F}.$$



Rys. 5.13. Schemat obwodu dla ćwiczenia 5.1

Rozwiązanie

Wielkości symboliczne charakteryzujące elementy obwodu:

$$E = 10$$

$$Z_C = -\frac{j}{\omega C} = -j5$$

$$Z_{RC} = \frac{RZ_C}{R + Z_C} = 2,5 - j2,5$$

Układ równań opisujących obwód:

$$E = RI_1 + U_1$$

$$U_1 = nU_2$$

$$I_1 = \frac{1}{n}I_2$$

$$U_2 = I_2 Z_{RC}$$

Po wstawieniu wartości liczbowych otrzymuje się

$$10 = 5I_1 + U_1$$

$$U_1 = 2U_2$$

$$I_1 = \frac{1}{2}I_2$$

$$U_2 = I_2(2,5 - j2,5)$$

Po uproszczeniu tego układu równań otrzymuje się

$$10 = (5 + 10\sqrt{2}e^{-j45^\circ})I_1$$

Stąd

$$I_1 = 0,46 + j0,31$$

$$I_2 = 2I_1 = 0,92 + j0,62$$

$$U_2 = Z_{RC}I_2 = 3,85 - j0,77$$

$$U_1 = 2U_2 = 7,70 - j1,54$$

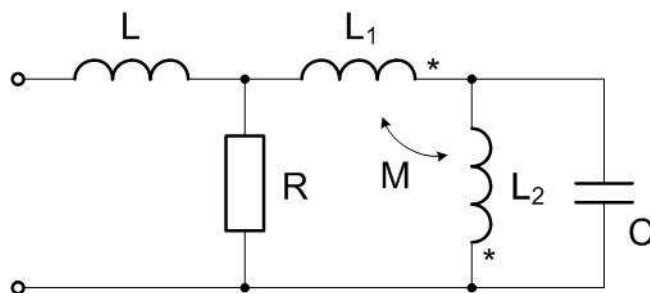
$$I_3 = \frac{U_2}{R} = 0,77 - j0,15$$

$$I_4 = \frac{U_2}{Z_C} = 0,15 + j0,77$$

Jest oczywiste, że stosunek prądu I_1 do prądu I_2 , $\frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{2}$, podczas gdy $\frac{U_1}{U_2} = 2$.

Ćwiczenie 5.2

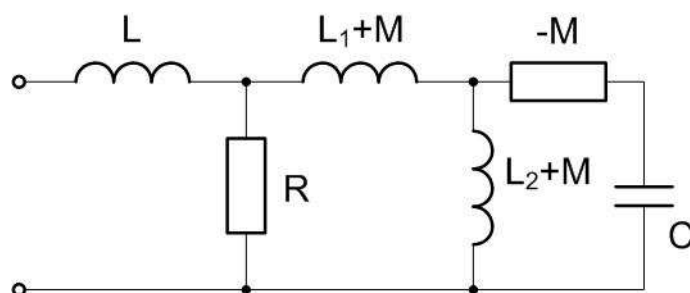
Obliczyć impedancję wejściową obwodu przedstawionego na rys. 5.14. Wartości parametrów elementów wynoszą: $R=10\Omega$, $\omega L = 20\Omega$, $\omega L_1 = 30\Omega$, $\omega L_2 = 40\Omega$, $\omega M = 20\Omega$, $\frac{1}{\omega C} = 20\Omega$.



Rys. 5.14 Schemat obwodu do ćwiczenia 5.3

Rozwiązanie

Po eliminacji sprzężenia otrzymujemy obwód zastępczy:



Rys. 5.15 Schemat obwodu po wyeliminowaniu sprzężeń

Impedancja wejściowa może być wyznaczona poprzez wyznaczanie kolejno impedancji połączeń: równoległego (Z_{CM-L2M}), szeregowego ($Z_{L1M-CM-L2M}$), równoległego ($Z_{R-L1M-CM-L2M}$), i szeregowego (Z_{we}):

$$Z_{CM-L2M} = \frac{Z_{CM} \cdot Z_{L2M}}{Z_{CM} + Z_{L2M}} = \frac{-j40 \cdot j60}{-j40 + j60} = -j120$$

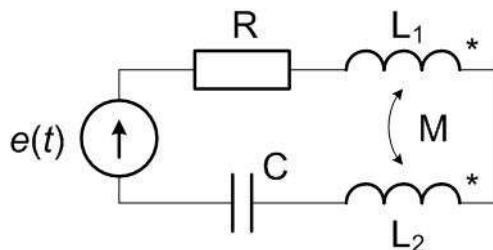
$$Z_{L1M-CM-L2M} = Z_{CM-L2M} + Z_{L1M} = -j120 + j50 = -j70$$

$$Z_{R-L1M-CM-L2M} = \frac{R \cdot Z_{L1M-CM-L2M}}{R + Z_{L1M-CM-L2M}} = \frac{-j700}{10 - j70} = 9.8 - j1.4$$

$$Z_{we} = Z_{R-L1M-CM-L2M} + Z_L = 9.8 - j1.4 + j20 = 9.8 + j18.6$$

Ćwiczenie 5.3

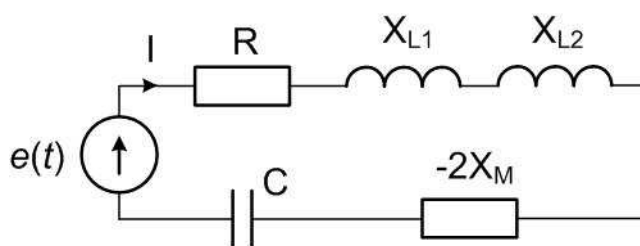
Obliczyć prądy i napięcia na cewkach w obwodzie przedstawionym na rys. 5.16. Dane: $R=10$, $X_C=20$, $X_{L1}=20$, $X_{L2}=30$, $X_M=10$, $e(t) = 10\sqrt{2} \sin(\omega t + 90)$



Rys. 5.16 Schemat obwodu do ćwiczenia 5.3

Rozwiązanie

Po eliminacji sprzężenia magnetycznego otrzymujemy obwód przedstawiony na rys. 5.17.



Rys. 5.17 Schemat obwodu po wyeliminowaniu sprzężeń

Impedancja zastępcza obwodu wynosi:

$$Z_z = R_1 + jX_{L1} + jX_{L2} - 2jX_M - jX_C = 10 + j10$$

Prąd płynący w obwodzie:

$$I = \frac{E}{Z_z} = 0,5 + j0,5$$

Napięcia na cewkach:

$$U_{L1} = jX_{L1}I - jX_M I = -5 + j5$$

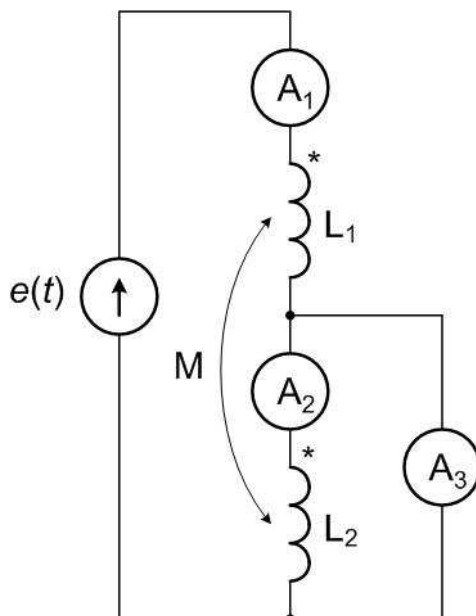
$$U_{L2} = jX_{L2}I - jX_M I = -10 + j10$$

Zadania sprawdzające

Zadanie 5.1

Obliczyć wskazania amperomierzy w obwodzie przedstawionym na rys 5.18 dla dwóch przypadków: a) brak sprzężenia magnetycznego, b) istnienie sprzężenia magnetycznego.

Dane: $e(t) = 10\sqrt{2} \sin 100t$, $L_1 = 0.05\text{H}$, $L_2 = 0.04\text{ H}$, $M = 0.02\text{H}$.



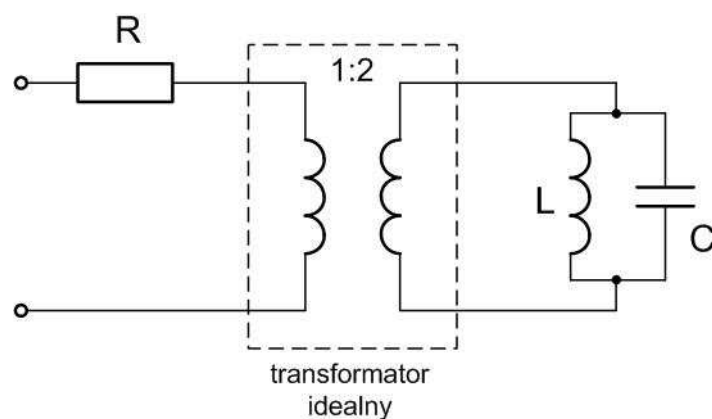
Rys. 5.18. Schemat obwodu do zadania 5.1

Rozwiązanie

- a) Wskazania $A_1 = 2\text{A}$, $A_2 = 0\text{A}$, $A_3 = 2\text{A}$
- b) Wskazania $A_1 = 2,5\text{A}$, $A_2 = 1,25\text{A}$, $A_3 = 3,75\text{A}$

Zadanie 5.2

Obliczyć impedancję wejściową obwodu przedstawionego na rys. 5.19. Wartości impedancji elementów $R=1\Omega$, $X_L=1\Omega$, $X_C=2\Omega$.



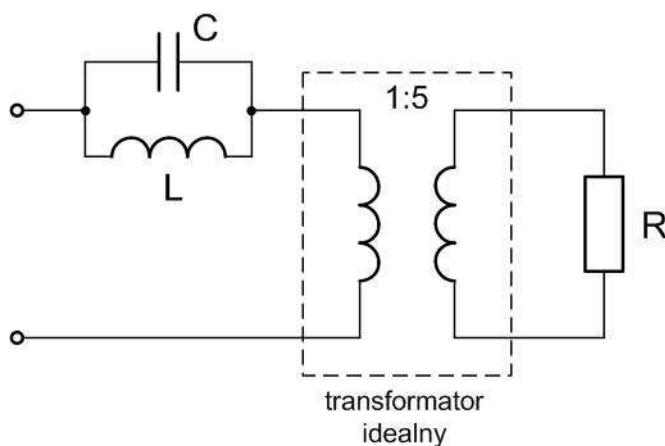
Rys. 5.19 Schemat obwodu do zadania 5.12

Rozwiązanie

$$Z_{WE} = 1 + j0.5$$

Zadanie 5.3

Obliczyć impedancję wejściową obwodu przedstawionego na rys. 5.20. Wartości impedancji elementów $R=3\Omega$, $X_L=2\Omega$, $X_C=5\Omega$.



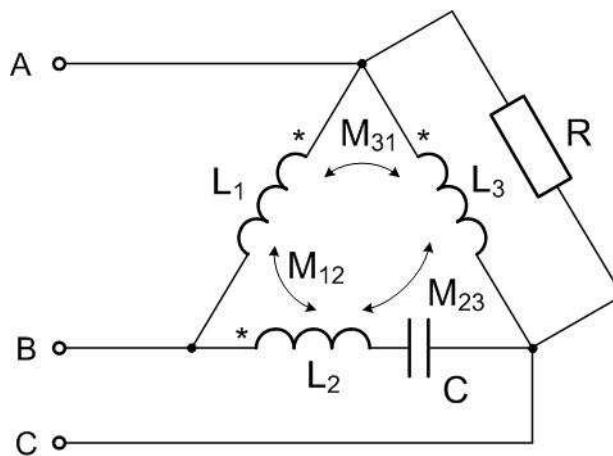
Rys. 5.20 Schemat obwodu do zadania 5.3

Rozwiązanie

$$Z_{WE} = \frac{3}{25} + j\frac{10}{3}$$

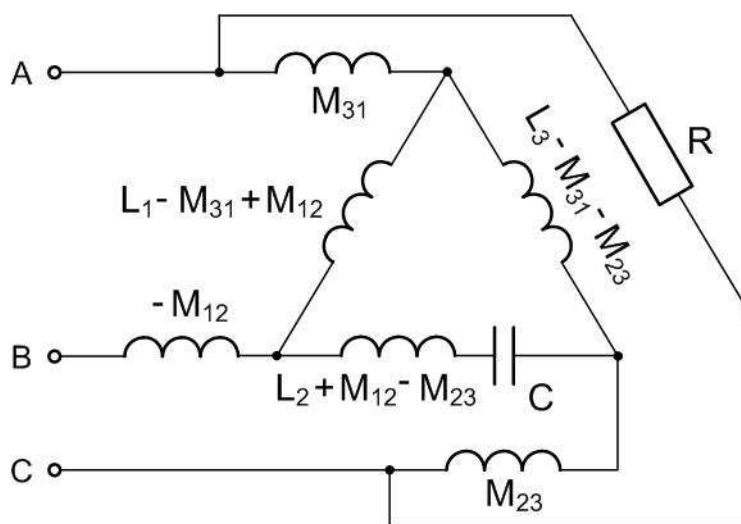
Zadanie 5.4

Wyeliminować sprzężenia magnetyczne w obwodzie przedstawionym na rys. 5.21.



Rys. 5.21 Schemat obwodu do zadania 5.4

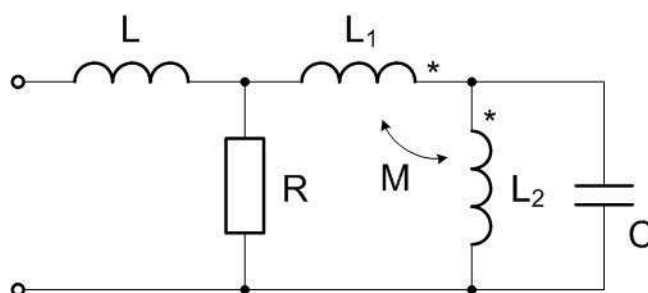
Rozwiązanie



Rys. 5.22 Rozwiązanie zadania 5.4

Zadanie 5.5

Obliczyć impedancję wejściową obwodu przedstawionego na rys. 5.23. Wartości impedancji elementów $R=10\Omega$, $\omega L=20\Omega$, $\omega L_1=30\Omega$, $\omega L_2=40\Omega$, $\omega M=20\Omega$, $\frac{1}{\omega C}=20\Omega$.



Rozwiązanie

$$Z_{WE} = 5 + j25$$

Test do wykładu 5

- 1) Indukcyjności własne 2 cewek sprzężonych są równe $L_1=4\text{H}$ i $L_2=1\text{H}$ a współczynnik sprzężenia $k=0,5$. Ile wynosi indukcyjność wzajemna M ?
 - a) $M= 2\text{H}$
 - xb) $M= 1\text{H}$
 - c) $M= 0,5\text{H}$
 - d) $M= 4\text{H}$
- 2) Dwie cewki sprzężone o $L_1=1\text{H}$ i $L_2=2\text{H}$ połączone są równolegle w sposób jednoimienny. Ile wynosi ich impedancja zastępcza Z jeśli $M=1\text{H}$ a $\omega=1000\text{rad/s}$?
 - a) $Z=j666,7\Omega$
 - xb) $Z=j1000\Omega$
 - c) $Z=j200\Omega$
 - d) $Z=0$
- 3) Dwie cewki sprzężone o $L_1=3\text{H}$ i $L_2=2\text{H}$ połączone są szeregowo w sposób jednoimienny. Ile wynosi ich impedancja zastępcza Z jeśli $M=2\text{H}$ a $\omega=1000\text{rad/s}$?
 - a) $Z=j5000\Omega$
 - xb) $Z=j1000\Omega$
 - c) $Z=j9000\Omega$
 - d) $Z=\infty$
- 4) Ile wynosi pulsacja rezonansowa obwodu złożonego z równolegle połączonych kondensatora $C=1\mu\text{F}$ i dwu cewek magnetycznie sprzężonych jednoimiennie o $L_1=1\text{H}$, $L_2=2\text{H}$, $M=1\text{H}$ połączonych równolegle?
 - a) $\omega_r=2000 \text{ rad/s}$
 - xb) $\omega_r=1000 \text{ rad/s}$
 - c) $\omega_r=1225 \text{ rad/s}$
 - d) $\omega_r=447,2 \text{ rad/s}$
- 5) Dwie cewki magnetycznie sprzężone o $L_1=1\text{H}$, $L_2=4\text{H}$ i $M=2\text{H}$ połączone są równolegle w sposób różnoimienny. Dołączono do nich szeregowo pojemność C . Dobrać tak wartość C aby w obwodzie powstał rezonans napięcia przy $\omega=100 \text{ rad/s}$.
 - a) $C=1500 \mu\text{F}$
 - b) $C=1000 \mu\text{F}$
 - c) $C=500 \mu\text{F}$
 - xd) nie da się uzyskać efektu rezonansowego dla żadnej wartości C
- 6) Przez cewkę $L_1=1\text{H}$ sprzężoną magnetycznie z drugą $L_2=3\text{H}$ przepływa prąd $I_1=2\text{A}$. Cewka L_2 jest rozwarta. Jakie napięcie panuje na cewce rozwartej, jeśli $M=0,5\text{H}$ a $\omega=500 \text{ rad/s}$?
 - a) $U_2=0$
 - b) $U_2=3000 \text{ V}$
 - xc) $U_2=500 \text{ V}$
 - d) $U_2=2500 \text{ V}$

7) Przez cewkę $L_1=1\text{H}$ sprzężoną magnetycznie z drugą $L_2=2\text{H}$ przepływa prąd $I_1=1\text{A}$. Cewka L_2 jest rozwarta. Ile wynosi indukcyjność wzajemna M , jeśli przy $\omega=500\text{ rad/s}$ napięcie zmierzone na cewce rozwartej wynosi 100?

- a) $M=1\text{H}$
- xb) $M=0,2\text{H}$
- c) $M=1,41\text{H}$
- d) $M=0,5\text{H}$

8) Przez obie cewki magnetycznie sprzężone o $X_{L1}=X_{L2}=20\Omega$ i $X_M=10\Omega$ przepływają prądy wywołujące na ich zaciskach napięcia $U_1=50$ i $U_2=40$ przy sprzężeniu dodatnim cewek. Jakie będą te napięcia przy niezmiennych prądach jeśli znak sprzężenia magnetycznego zmieni się na przeciwny?

- a) $U_1=0$ $U_2=30\text{V}$
- xb) $U_1=30\text{V}$ $U_2=0$
- c) $U_1=90\text{V}$ $U_2=10\text{V}$
- d) $U_1=50\text{V}$ $U_2=40\text{V}$

9) Przez transformator idealny o przekładni zwojowej $n=z_1/z_2=2$ przepływa prąd pierwotny 10A przy napięciu zasilania 100. Jakie napięcie i prąd wtórny są na uzwojeniu wtórnym tego transformatora?

- a) $U_2= 50\text{V}$, $I_2=10\text{A}$
- xb) $U_2= 50\text{V}$, $I_2=20\text{A}$
- c) $U_2= 200\text{V}$, $I_2=20\text{A}$
- d) $U_2= 200\text{V}$, $I_2=10\text{A}$

10) Transformator idealny o przekładni zwojowej $n=z_1/z_2=2$ dostarcza na obciążenie rezystancyjne dołączone do uzwojenia wtórnego moc $P=1000\text{W}$ przy napięciu zasilania 100. Ile wynoszą prądy pierwotny I_1 i wtórny I_2 transformatora?

- xa) $I_1= 10\text{A}$, $I_2=20\text{A}$
- b) $I_1= 20\text{A}$, $I_2=10\text{A}$
- c) $I_1= 10\text{A}$, $I_2=10\text{A}$
- d) $I_1= 20\text{A}$, $I_2=20\text{A}$