8.3 Rząd macierzy

Rozpatrzmy dowolną macierz A. Podmacierzą macierzy A nazywamy dowolną macierz która powstaje z macierzy A przez skreślenie pewnej ilości wierszy i pewnej ilości kolumn.

Przykład 8.21. Dla macierzy

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 & 8 \\ 6 & 1 & 0 & 7 \\ 9 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

podmacierzami są

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 6 & 1 & 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 6 & 7 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}, \quad [3].$$

Szczególnie istotne są podmacierze kwadratowe, dzięki nim definiujemy pojęcie rzędu macierzy. Dla danej macierzy możemy wyznaczać podmacierze kwadratowe a następnie obliczać ich wyznaczniki

Przykład 8.22. Dla macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

mamy 6 podmacierzy 2×2. wyznaczniki tych podmacierzy wynoszą

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5, \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -10, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10.$$

W przypadku badania rzędu macierzy będziemy pytali czy istnieją podmacierze o niezerowym wyznaczniku. Tutaj istnieją.

Definicja 8.23. *Rzędem macierzy* kwadratowej A nazywamy największy stopień podmacierzy macierzy A o niezerowym wyznaczniku. Rząd macierzy oznaczamy symbolem $R(A)$.

Przykład 8.24. Wyznaczyć rząd macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \\ -1 & 7 & 4 \end{bmatrix}.$$

Obliczamy wyznaczniki podmacierzy stopnia 3. Jest tylko jedna taka podmacierz jest nią cała macierz. Obliczamy zatem $|A|$

$$A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 48 - 28 + 1 + 8 - 21 - 8 = 0$$

Oznacza to, że rząd macierzy A nie może być równy 3. Sprawdzamy zatem czy A jest rzędu 2. Aby tak było musi istnieć co najmniej jedna podmacierz 2×2 o wyznaczniku różnym od zera. Podmacierz taką łatwo wskazać biorąc np.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Wyznacznik takiej podmacierzy wynosi 10 i jest oczywiście różny od 0. Otrzymujemy stąd, że największą (jeśli chodzi o stopień) podmacierzą o niezerowym wyznaczniku jest macierz 2×2. Zatem $R(A) = 2$.

Przy wyznaczaniu rzędu macierzy wystarczy wskazać tylko jedną, największą pod względem stopnia, podmacierz o niezerowym wyznaczniku. Stopień takiej macierzy jest równy rzędowi macierzy. Pozostałe wyznaczniki podmacierzy tego samego stopnia mogą, lecz nie muszą, być równe zero. Wprost z definicji rzędu macierzy wynika, że macierz A jest rzędu k wtedy i tylko wtedy gdy istnieje podmacierz stopnia k macierzy A o wyznaczniku różnym od zera oraz wszystkie podmacierze macierzy A stopnia większego niż k mają wyznacznik równy 0. Rząd macierzy $A_{m\times n}$ jest liczbą całkowitą nieujemną mniejszą od ilości kolumn i mniejszą od ilości wierszy. Symbolicznie zapisujemy to następująco

$$R(A) \leq m, \qquad R(A) \leq n$$

Przyjmujemy, że rząd macierzy zerowej jest równy 0. Zauważmy, że jedyną macierzą mającą rząd zero jest macierz zerowa.

Przykład 8.25. Wyznaczmy rząd macierzy

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

W macierzy tej istnieje jedna podmacierz 2×2 (jest to cała macierz). Wyznacznik tej podmacierzy wynosi 0. Ponadto istnieją 4 podmacierze stopnia 1. Jedna z tych podmacierzy ($[3]$) ma wyznacznik różny od zera. $|-3| = -3$ ($| \quad |$ oznacza tutaj wyznacznik macierzy 1×1 a nie wartość bezwzględną co może być mylące, bardziej precyzyjny byłby zapis $|[-3]| = -3$). Oznacza to, że $R(A) = 1$.

Przykład 8.26. Wyznaczmy rząd macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Macierz jest wymiaru 2×3. Stąd rząd jest mniejszy bądź równy 2. Wybieramy podwyznacznik stopnia 2 utworzony z pierwszej i trzeciej kolumny

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 3 = -5$$

Zatem $R(A) = 2$. Pojęcie rzędu macierzy wykorzystamy do rozwiązywania układów równań liniowych.