

Wykład 1. Podstawowe prawa obwodów elektrycznych

Wstęp

Teoria obwodów jest jedną z podstawowych dziedzin elektrotechniki obejmującą teoretyczną stronę zjawisk występujących w obwodach elektrycznych, w szczególności metody obliczeń rozptywu prądów i rozkładu napięć obwodu w stanie ustalonym i nieustalonym.

Wykład pierwszy wprowadza podstawowe pojęcia i prawa obwodów elektrycznych, w tym prąd i napięcie, elementy liniowe obwodu w postaci rezystora, cewki i kondensatora oraz źródła sterowane i niezależne. Najważniejszym prawem teorii obwodów jest prawo prądowe i napięciowe Kirchhoffa, podane tutaj w postaci ogólnej. Z prawa Kirchhoffa wynikają reguły upraszczania obwodów, zdefiniowane dla połączenia szeregowego, równoległego oraz transfiguracji gwiazda-trójkąt i trójkąt-gwiazda.



1.1. Podstawowe pojęcia obwodów

W elektrotechnice przyjmuje się, że nośnikami elektryczności są cząstki elementarne: elektrony i protony występujące w atomie. W przypadku przewodników elektrycznych najważniejszą rolę odgrywają elektrony swobodne, stanowiące trwałe nośniki ujemnego ładunku q , wyzwolone z przyciągania jądra atomu oraz jony, stanowiące cząsteczki naładowane dodatnio lub ujemnie. Ładunek elektryczny elektronu, oznaczany jest literą e a jego wartość $e=1,602 \cdot 10^{-19} \text{C}$.

Prąd elektryczny jest uporządkowanym ruchem ładunków elektrycznych i jest utożsamiany w teorii obwodów z natężeniem prądu elektrycznego. W ogólności definiowany jest jako granica stosunku ładunku elektrycznego przepływającego przez przekrój poprzeczny elementu do rozpatrywanego czasu, gdy czas ten dąży do zera. Prąd elektryczny oznaczany będzie literą i (dużą lub małą). Jest wielkością skalarną a jej jednostką w układzie SI jest **amper** (A). Prąd mierzymy przyrządem zwanym amperomierzem, włączanym szeregowo do gałęzi, której prąd chcemy zmierzyć. Przyjmuje się, że amperomierz ma impedancję wewnętrzną równą zeru, a więc nie wpływa na rozptywy prądów w obwodzie.

Każdemu punktowi w środowisku przewodzącym prąd elektryczny można przyporządkować pewien potencjał mierzony względem określonego punktu odniesienia. Różnica potencjałów między dwoma punktami tego środowiska nazywana jest **napięciem elektrycznym**. Jednostką

napięcia elektrycznego jest **volt** (V). Napięcie pomiędzy dwoma punktami obwodu elektrycznego mierzy się przyrządem zwanym woltomierzem, włączanym równolegle między punkty, których różnicę potencjałów chcemy mierzyć. Przyjmuje się przy tym, że impedancja wewnętrzna woltomierza jest bliska nieskończoności, a więc woltomierz pomiarowy nie wpływa na rozkład napięć i rozptył prądów w obwodzie.

1.2. Podstawowe elementy obwodu elektrycznego

Za **obwód elektryczny** uważać będziemy takie połączenie elementów ze sobą, że istnieje możliwość przepływu prądu w tym połączeniu. Obwód jest odwzorowywany poprzez schemat połączeń elementów, na którym zaznaczone są symbole graficzne elementów oraz sposób ich połączenia ze sobą, tworzący określoną strukturę.

W strukturze obwodu elektrycznego poza elementami wyróżnić można gałęzie, węzły i oczka.

Gałąź obwodu jest tworzona przez jeden lub kilka elementów połączonych ze sobą w określony sposób. **Węzeł** obwodu jest zacisk będący końcówką gałęzi, do którego można dołączyć następną gałąź lub kilka gałęzi. Gałąź obwodu tworzą elementy ograniczone dwoma węzłami.

Oczko obwodu to zbiór gałęzi połączonych ze sobą, tworzących drogę zamkniętą dla prądu elektrycznego. Oczko ma tę właściwość, że po usunięciu dowolnej gałęzi ze zbioru pozostałe gałęzie nie tworzą drogi zamkniętej. W obwodzie o zadanej strukturze istnieje ściśle określona liczba węzłów, natomiast liczba oczek jest wprawdzie skończona ale bliżej nieokreślona.

Element jest częścią składową obwodu niepodzielną pod względem funkcjonalnym bez utraty swych cech charakterystycznych. Na elementy obwodu składają się źródła energii elektrycznej oraz elementy akumulujące energię lub rozpraszające ją. W każdym elemencie mogą zachodzić dwa lub nawet wszystkie trzy wymienione tu procesy, choć jeden z nich jest zwykle dominujący. Element jest idealny jeśli charakteryzuje go tylko jeden rodzaj procesu energetycznego.

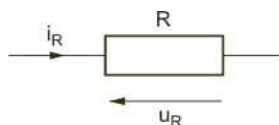
Elementy posiadające zdolność akumulacji oraz rozpraszania energii tworzą klasę **elementów pasywnych**. Nie wytwarzają one energii a jedynie ją przetwarzają. Najważniejsze z nich to **rezystor**, **kondensator** oraz **cewka**. Elementy mające zdolność generacji energii nazywane są **źródłami**. Zaliczamy do nich **niezależne źródło napięcia i prądu** oraz **źródła sterowane**.

Każdy element obwodu może być opisany równaniami algebraicznymi lub różniczkowymi, wiążącymi prąd i napięcie na jego zaciskach. **Element** jest **liniowy**, jeśli równanie opisujące go jest liniowe. W przeciwnym wypadku element jest **nieliniowy**.

1.2.1. Rezystor

Rezystor, zwany również opornikiem należy do klasy elementów pasywnych rozpraszających energię. W teorii obwodów rezystor uważa się za element idealny i przypisuje mu tylko jedną cechę (parametr), zwaną **rezystancją** lub oporem. W dalszej części rozważać będziemy wyłącznie

rezystor liniowy. Rezystancję (oporność) oznaczamy literą R a jej odwrotność jest nazywana **konduktancją** i oznaczana literą G , przy czym $R = 1/G$. Symbol graficzny rezystora liniowego przedstawiony jest na rys. 1.1.



Rys. 1.1. Symbol graficzny rezystora liniowego

Opis matematyczny rezystora wynika z prawa Ohma, zgodnie z którym

$$u_R = Ri_R \quad (1.1)$$

Rezystancja rezystora liniowego przyjmuje określoną wartość (najczęściej stałą). Jednostką rezystancji jest **om** (Ω) a konduktancji **siemens** (S).

W realizacji praktycznej opornik jest wykonywany często z drutu metalowego o długości l , polu przekroju poprzecznego S i rezystancji właściwej ρ . Rezystancja takiego opornika jest wprost proporcjonalna do l i ρ a odwrotnie proporcjonalna do S , stąd $R = \rho l / S$.

1.2.2. Cewka

Cewka zwana również induktorem należy również do klasy elementów pasywnych. Ma zdolność gromadzenia energii w polu magnetycznym. Cewce idealnej przypisuje się tylko jedną właściwość, zwaną **indukcyjnością** własną (w skrócie indukcyjnością) L . W przypadku cewki liniowej indukcyjność definiuje się w postaci stosunku strumienia Ψ skojarzonego z cewką do prądu płynącego przez nią, to znaczy

$$L = \frac{\Psi}{i_L} \quad (1.2)$$

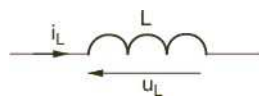
Strumień skojarzony Ψ cewki o z zwojach jest równy sumie strumieni wszystkich zwojów cewki, to jest $\Psi = z\phi$ (ϕ - strumień skojarzony z jednym zwojem cewki, z - liczba zwojów). Jednostką strumienia jest **weber** (Wb), przy czym $\text{Wb} = \text{Vs}$, a indukcyjności **henr** (H), przy czym $1\text{H} = 1\Omega\text{s}$. Napięcie cewki wyrażone jest jako pochodna strumienia względem czasu

$$u_L = \frac{d\Psi}{dt} \quad (1.3)$$

W przypadku cewki liniowej o indukcyjności L niezależnej od czasu, dla której strumień jest iloczynem prądu i indukcyjności L , $\Psi = Li_L$, relacja napięciowo-prądowa upraszcza się do postaci

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} \quad (1.4)$$

Na rys. 1.2 przedstawiono symbol graficzny cewki liniowej o indukcyjności L .



Rys. 1.2. Symbol graficzny cewki liniowej

Zauważmy, że przy stałej wartości prądu cewki i stałej wartości indukcyjności L napięcie na niej jest równe zero, gdyż pochodna wartości stałej względem czasu jest równa zero. Stąd cewka w stanie ustalonym obwodu przy prądzie stałym zachowuje się jak zwarcie (napięcie między końcówkami elementu równe zero).

1.2.3. Kondensator

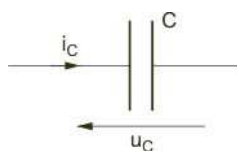
Kondensator jest elementem pasywnym, w którym istnieje możliwość gromadzenia energii w polu elektrycznym. Kondensatorowi idealnemu przypisuje się tylko jedną właściwość zwaną **pojemnością** C . W przypadku kondensatora liniowego pojemność C jest definiowana jako stosunek ładunku q zgromadzonego w kondensatorze do napięcia między okładzinami tego kondensatora

$$C = \frac{q}{u_C} \quad (1.5)$$

W układzie SI jednostką ładunku jest **kulomb** (C), przy czym kulomb = As, a pojemności **farad** (F), przy czym $1 \text{ F} = 1 \text{ C/V}$. Zależność wiążąca napięcie i prąd kondensatora dana jest w postaci równania różniczkowego

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} \quad (1.6)$$

Symbol graficzny kondensatora przedstawiony jest na rys. 1.3.

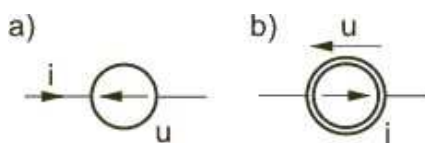


Rys. 1.3. Symbol graficzny kondensatora

Podobnie jak w przypadku cewki, jeśli napięcie na zaciskach kondensatora jest stałe, jego prąd jest równy zero (pochodna wartości stałej względem czasu jest zerem). Kondensator zachowuje się wtedy jak przerwa (pomimo istnienia napięcia prąd nie płynie).

1.2.4. Niezależne źródło napięcia i prądu

Źródło niezależne prądu bądź **napięcia**, zwane w skrócie źródłem prądu i źródłem napięcia, jest elementem aktywnym, generującym energię elektryczną, powstającą zwykle z zamiany innego rodzaju energii, na przykład z energii mechanicznej, słonecznej, jądrowej itp. W teorii obwodów rozważać będziemy źródła idealne należące do klasy źródeł napięciowych bądź prądowych. Symbol idealnego niezależnego źródła napięcia przedstawiony jest na rys. 1.4a, natomiast źródła prądu na rys. 1.4.b.

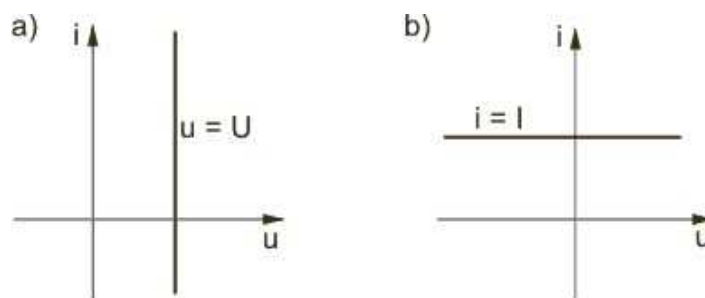


Rys. 1.4. Symbole graficzne niezależnego źródła a) napięcia, b) prądu

Niezależne źródła prądu i napięcia mają następujące właściwości.

- Napięcie na zaciskach idealnego źródła napięcia nie zależy od prądu przepływającego przez to źródło, a zatem nie zależy od jego obciążenia.
- Przy stałym napięciu u panującym na zaciskach oraz prądzie i wynikającym z obciążenia, rezystancja wewnętrzna idealnego źródła napięciowego, definiowana jest w postaci zależności różniczkowej $R_w = \frac{du}{di} = 0$. Stąd idealne źródło napięcia charakteryzuje się rezystancją wewnętrzną równą zero (zwarcie z punktu widzenia rezystancyjnego).
- Prąd idealnego źródła prądu nie zależy od obciążenia tego źródła, a więc od napięcia panującego na jego zaciskach.
- Przy stałym prądzie płynącym przez idealne źródło prądowe i dowolnym (bliżej nieokreślonym) napięciu panującym na jego zaciskach rezystancja wewnętrzna idealnego źródła prądowego jest równa nieskończoności. Stąd idealne źródło prądowe z punktu widzenia rezystancyjnego reprezentuje sobą przerwę.

Rys. 1.5 przedstawia charakterystyki prądowo-napięciowe obu rodzajów idealnych źródeł niezależnych: napięcia (rys. 1.5a) i prądu (rys. 1.5b).



Rys. 1.5. Charakterystyki prądowo-napięciowe idealnych źródeł niesterowanych:

a) źródło napięcia, b) źródło prądu



Dla źródła napięciowego charakterystyka jest równoległa do osi prądowej (wartość napięcia u stała), a dla źródła prądowego równoległa do osi napięciowej (wartość prądu i stała). Tak podane charakterystyki odnoszą się do źródeł stałych. W przypadku źródeł sinusoidalnych idealność jest rozumiana jako stałość parametrów źródła (amplituda, faza początkowa oraz częstotliwość niezależne od obciążenia).

Przykładami źródła napięcia stałego jest akumulator, źródła napięcia zmiennego - generator synchroniczny, źródła prądowego - elektroniczny zasilacz prądowy o stabilizowanym, niezależnym od obciążenia prądzie.

1.2.5. Źródła sterowane prądu i napięcia

W odróżnieniu od źródeł niezależnych, których prąd lub napięcie (bądź parametry charakteryzujące je, np. amplituda i częstotliwość) były stałe, ustalone na etapie wytworzenia, wielkości te dla **źródeł sterowanych** z definicji zależą od wielkości sterujących, którymi mogą być prąd lub napięcie dowolnego innego elementu w obwodzie.

- Źródło sterowane jest więc *elementem czterozaciskowym* i charakteryzuje się tym, że napięcie lub prąd na jego zaciskach wyjściowych są proporcjonalne do napięcia lub prądu związanego z drugą parą zacisków sterujących. Wyróżnić można cztery rodzaje źródeł sterowanych: źródło napięcia sterowane napięciem, źródło napięcia sterowane prądem, źródło prądu sterowane napięciem i źródło prądu sterowane prądem.

Równania źródeł sterowanych

- źródło napięcia sterowane napięciem

$$u_2 = au_1$$

- źródło napięcia sterowane prądem

$$u_2 = ri_1$$

- źródło prądu sterowane napięciem

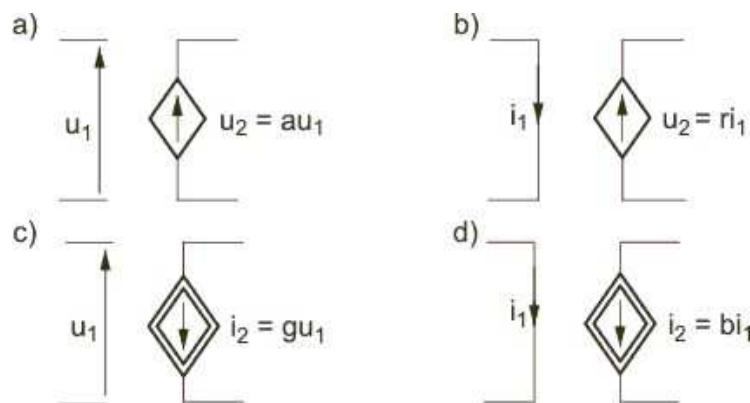
$$i_2 = gu_1$$

- źródło prądu sterowane prądem

$$i_2 = bi_1$$

W równaniach tych wielkości oznaczone wskaźnikiem 2 oznaczają wielkości wyjściowe, a wskaźnikiem 1 – wielkości sterujące.

Schematy graficzne wszystkich wymienionych tu rodzajów źródeł sterowanych prądu i napięcia przedstawione są na rys. 1.6.



Rys. 1.6. Schematy graficzne źródeł sterowanych



Wielkości r , g oraz a i b stanowią współczynniki proporcjonalności między wielkością sterującą i sterowaną tych źródeł. Przyjmują one najczęściej wartości rzeczywiste, choć w różnego rodzaju modelach mogą być również opisane funkcją zespoloną. Należy nadmienić, że źródła sterowane stanowią bardzo popularne modele wielu elementów elektrycznych i elektronicznych, takich jak transformatory idealne, maszyny elektryczne, tranzystory bipolarne i polowe, wzmacniacze operacyjne napięciowe i prądowe, itp.

1.3. Prawa Kirchhoffa

Pod pojęciem analizy obwodu elektrycznego rozumie się proces określania rozptywu prądów i rozkładu napięć w obwodzie przy założeniu, że znana jest struktura obwodu oraz wartości wszystkich jego elementów. Podstawę analizy obwodów elektrycznych stanowią prawa Kirchhoffa, podane przez niemieckiego fizyka Gustawa Kirchhoffa w dziewiętnastym wieku. Wyróżnia się dwa

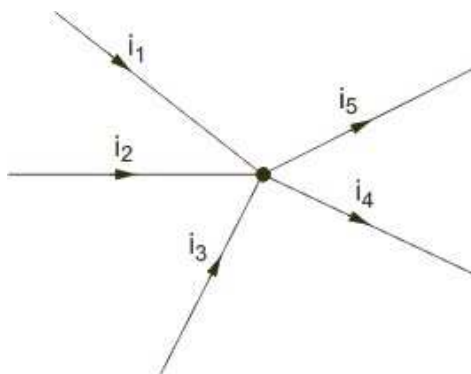
prawa określające rozływ prądów i rozkład napięć w obwodzie. Pierwsze prawo Kirchhoffa kojarzy się zwykle z bilansem prądów w węźle obwodu elektrycznego a drugie z bilansem napięć w oczku.

1.3.1. Prawo prądowe

Suma prądów w każdym węźle obwodu elektrycznego jest równa zero

$$\sum_k i_k = 0 \quad (1.7)$$

Sumowanie dotyczy wszystkich prądów, które dopływają lub odpływają z danego oczka, przy czym wszystkie prądy wpływające do węzła brane są z jednakowym znakiem a wszystkie prądy wypływające z węzła ze znakiem przeciwnym (nie jest istotne czy znak plus dotyczy prądów wpływających czy wypływających). Sposób tworzenia równania prądowego Kirchhoffa zilustrujemy dla jednego węzła obwodu przedstawionego na rys. 1.7.



Rys. 1.7. Przykład węzła obwodu elektrycznego

Prawo Kirchhoffa dla tego węzła z uwzględnieniem kierunków prądów w węźle zapiszemy w postaci

$$i_1 + i_2 + i_3 - i_4 - i_5 = 0$$

Można je również zapisać jako bilans prądów dopływających i odpływających od węzła w postaci

$$i_1 + i_2 + i_3 = i_4 + i_5$$

Dla każdego obwodu można napisać dokładnie $n-1$ niezależnych równań prądowych, gdzie n oznacza całkowitą liczbę węzłów a $(n-1)$ liczbę węzłów niezależnych. Bilans prądów w pozostałym

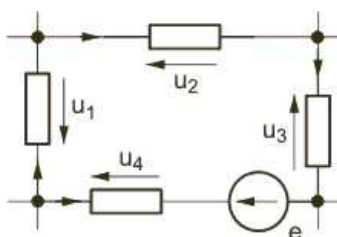
n -tym węźle obwodu wynika z równań prądowych napisanych dla $n-1$ węzłów (jest to węzeł zależny zwany węzłem odniesienia). Wybór węzła odniesienia jest całkowicie dowolny.

1.3.2. Prawo napięciowe

Suma napięć w każdym oczku obwodu elektrycznego jest równa zero

$$\sum_k u_k = 0 \quad (1.8)$$

Sumowanie dotyczy napięć gałęziowych występujących w danym oczku zorientowanych względem dowolnie przyjętego kierunku odniesienia. Napięcie gałęziowe zgodne z tym kierunkiem jest brane z plusem a przeciwne z minusem. Sposób pisanie równań wynikających z prawa napięciowego Kirchhoffa pokażemy na przykładzie oczka obwodu przedstawionego na rys. 1.8.



Rys. 1.8. Przykład oczka obwodu z oznaczeniami napięć gałęziowych

Uwzględniając kierunki napięć gałęziowych równanie napięciowe Kirchhoffa dla tego oczka przyjmie postać

$$u_1 + u_2 + u_3 - u_4 - e = 0$$

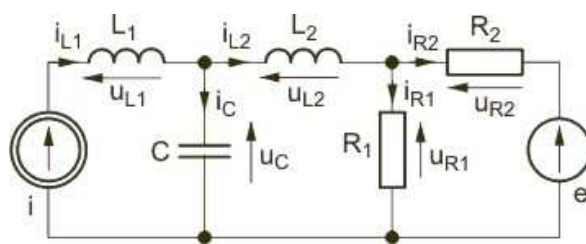
Można je również zapisać jako bilans napięć źródłowych i odbiornikowych w postaci

$$e = u_1 + u_2 + u_3 - u_4$$

Dla każdego obwodu można napisać tyle równań oczkowych ile oczek wyodrębnimy w tym obwodzie, przy czym część równań oczkowych będzie równaniami zależnymi (wynikającymi z liniowej kombinacji innych równań). Minimalna liczba równań oczkowych branych pod uwagę w analizie jest więc równa liczbie oczek niezależnych.

Przykład 1.1

Napiszemy równania Kirchhoffa dla obwodu z rys. 1.9.



Rys. 1.9. Schemat obwodu poddanego analizie w przykładzie 1.1

Rozwiązanie

Zgodnie z prawami Kirchhoffa równania obwodu przyjmą następującą postać.

- Równania prądowe:

$$i_{L1} - i_{L2} - i_C = 0$$

$$i_{L2} - i_{R1} - i_{R2} = 0$$

$$i_{L1} = i$$

- Równania napięciowe:

$$u_C - u_{L2} - u_{R1} = 0$$

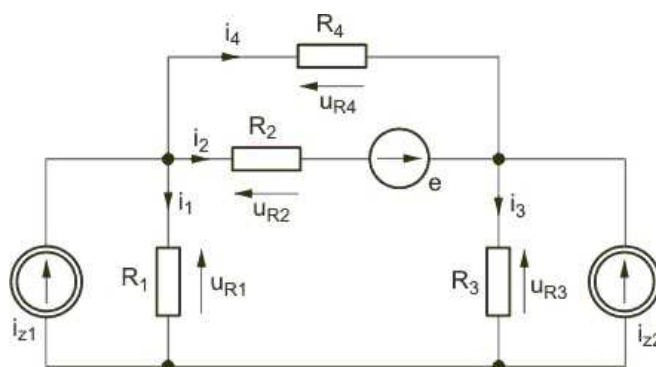
$$u_{R1} - u_{R2} - e = 0$$

Przedstawiony tu układ równań uzupełniony o równania elementów jest wystarczający do uzyskania wszystkich wielkości prądowych bądź napięciowych w obwodzie. Po takim uzupełnieniu uzyskuje się pełny opis obwodu a jego rozwiązanie pozwala wyznaczyć pełny rozptyw prądów i rozkład napięć w obwodzie.

Szczególnie proste zależności otrzymuje się dla obwodu rezystancyjnego, zawierającego oprócz źródeł wymuszających jedynie rezystory oraz (ewentualnie) źródła sterowane o rzeczywistych współczynnikach sterowania. Dla takich obwodów równania elementów rezystancyjnych są dane w postaci zależności algebraicznych, które wstawione do równań Kirchhoffa pozwalają utworzyć układ równań algebraicznych o liczbie zmiennych równych liczbie równań. Sposób tworzenia takiego układu równań pokażemy na przykładzie obwodu z rys. 1.10.

Przykład 1.2

Należy określić rozptyw prądów i rozkład napięć w obwodzie rezystancyjnym o strukturze przedstawionej na rys. 1.10. Wartości elementów są następujące: $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $R_3 = 3\Omega$, $R_4 = 4\Omega$, $e = 10V$, $i_{z1} = 2A$, $i_{z2} = 5A$.



Rys. 1.10. Struktura obwodu poddanego analizie w przykładzie 1.2

Rozwiązanie

Z równań Kirchhoffa otrzymuje się

$$\begin{aligned} i_{z1} - i_1 - i_2 - i_4 &= 0 \\ i_2 + i_4 + i_{z2} - i_3 &= 0 \\ u_{R1} - u_{R2} + e - u_{R3} &= 0 \\ u_{R2} - e - u_{R4} &= 0 \end{aligned}$$

Równania elementów rezystancyjnych: $u_{R1} = R_1 i_1$, $u_{R2} = R_2 i_2$, $u_{R3} = R_3 i_3$, $u_{R4} = R_4 i_4$ tworzą wspólnie z równaniami Kirchhoffa następujący układ równań algebraicznych:

$$\begin{aligned} i_1 + i_2 + i_4 &= i_{z1} \\ i_2 - i_3 + i_4 &= -i_{z2} \\ R_1 i_1 - R_2 i_2 - R_3 i_3 &= -e \\ R_2 i_2 - R_4 i_4 &= e \end{aligned}$$

Po wstawieniu danych liczbowych do powyższych równań otrzymuje się:

$$\begin{aligned} i_1 + i_2 + i_4 &= 2 \\ i_2 - i_3 + i_4 &= -5 \\ i_1 - 2i_2 - 3i_3 &= -10 \\ 2i_2 - 4i_4 &= 10 \end{aligned}$$

W wyniku rozwiązania tego układu równań otrzymuje się: $i_1 = 3,187\text{A}$, $i_2 = 0,875\text{A}$, $i_3 = 3,812\text{A}$ oraz $i_4 = -2,062\text{A}$. Łatwo sprawdzić przez podstawienie obliczonych wartości do układu równań, że bilans prądów w każdym węźle oraz bilans napięć w każdym oczku obwodu jest zerowy.

1.4. Przekształcenia obwodów

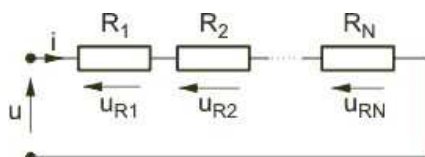
W analizie obwodów elektrycznych ważną rolę odgrywa upraszczanie struktury obwodu, polegające na zastępowaniu wielu elementów połączonych szeregowo lub równolegle poprzez jeden element zastępczy. Umożliwia to zmniejszenie liczby równań w opisie obwodu i uproszczenie etapu rozwiązania tych równań. Wyróżnić można cztery podstawowe rodzaje połączeń elementów, do których stosuje się przekształcenie. Są to:

- połączenie szeregowe

- połączenie równoległe
- połączenie gwiazdowe
- połączenie trójkątne.

1.4.1. Połączenie szeregowe elementów

W połączeniu szeregowym koniec jednego elementu jest bezpośrednio połączony z początkiem następnego. Rys. 1.11 przedstawia schemat ogólny połączenia szeregowego rezystorów.



Rys. 1.11. Połączenie szeregowe elementów

Prąd każdego elementu obwodu jest jednakowy i równy i , natomiast napięcie na zaciskach zewnętrznych obwodu jest równe sumie napięć poszczególnych elementów tworzących połączenie. Napięciowe równanie Kirchhoffa dla obwodu z rys. 1.11 przyjmuje więc postać

$$u = (R_1 + R_2 + \dots + R_N)i \quad (1.9)$$

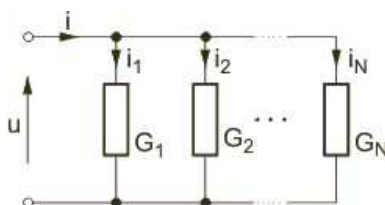
Przy oznaczeniu sumy rezystancji przez R

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_N \quad (1.10)$$

otrzymuje się uproszczenie N rezystorów połączonych szeregowo do jednego rezystora zastępczego o rezystancji R opisanej wzorem (1.10). **Rezystancja zastępcza (wypadkowa) połączenia szeregowego rezystorów jest równa sumie rezystancji poszczególnych elementów tworzących to połączenie.**

1.4.2. Połączenie równoległe elementów

W połączeniu równoległym początki wszystkich elementów, podobnie jak również ich końce są ze sobą bezpośrednio połączone, jak to pokazano dla elementów rezystancyjnych na rys. 1.12.



Rys. 1.12. Połączenie równoległe elementów

Z połączenia tego wynika, że napięcie na wszystkich elementach jest jednakowe a prąd wypadkowy i jest równy sumie prądów wszystkich elementów obwodu. Prądowe prawo Kirchhoffa dla obwodu z rys. 1.12 można więc zapisać w postaci

$$i = (G_1 + G_2 + \dots + G_N)u \quad (1.11)$$

przy czym G_i ($i = 1, 2, \dots, N$) stanowią konduktancje rezystorów, $G_i = 1/R_i$. Przy oznaczeniu sumy konduktancji przez G , gdzie

$$G = G_1 + G_2 + \dots + G_N \quad (1.12)$$

otrzymuje się uproszczenie N rezystorów połączonych równolegle do jednego rezystora zastępczego o konduktancji G opisanej wzorem (1.12). **W połączeniu równoległym rezystorów konduktancja zastępcza (wypadkowa) jest równa sumie konduktancji poszczególnych rezystorów tworzących to połączenie.** Rezystancję zastępczą dla N równolegle połączonych rezystorów obliczyć można jako odwrotność konduktancji zastępczej G , $R = 1/G$.

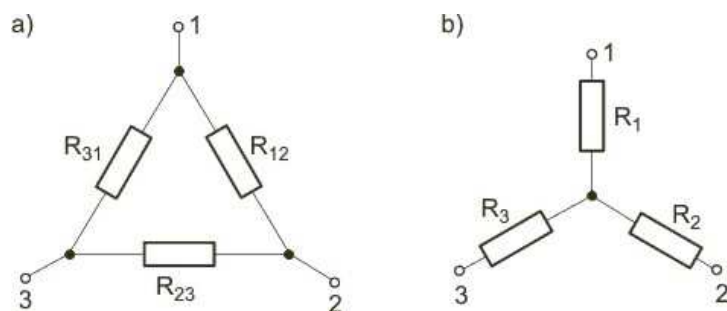
Szczególnie prosty jest wzór na rezystancję zastępczą dla 2 rezystorów połączonych równolegle. W tym przypadku $G = G_1 + G_2$. Uwzględniając, że $G = 1/R$ po prostych przekształceniach otrzymuje się

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Należy jednak podkreślić, że przy trzech (i więcej) elementach połączonych równolegle wygodniejsze jest operowanie na konduktancjach a przejście na rezystancję zastępczą wykonuje się w ostatnim kroku po ustaleniu wartości sumy konduktancji.

1.4.3. Transfiguracja gwiazda-trójkąt i trójkąt-gwiazda

Operowanie uproszczonym schematem wynikającym z połączenia szeregowego i równoległego elementów jest najwygodniejszym sposobem redukcji obwodu. W przypadku gdy nie ma elementów połączonych szeregowo lub równolegle możliwe jest dalsze uproszczenie obwodu przez zastosowanie przekształcenia gwiazda-trójkąt lub trójkąt-gwiazda. Przyjęte oznaczenia elementów rezystancyjnych trójkąta i gwiazdy są przedstawione na rys. 1.13.



Rys. 1.13. Połączenie a) trójkątne i b) gwiazdowe elementów

Transfiguracja trójkąta na gwiazdę lub gwiazdy na trójkąt polega na przyporządkowaniu danej konfiguracji elementów konfiguracji zastępczej, równoważnej jej z punktu widzenia zacisków zewnętrznych (te same prądy przy tych samych napięciach międzyczaciskowych). Dla uzyskania niezmiennych prądów zewnętrznych obwodu gwiazdy i trójkąta rezystancje między parami tych samych zacisków gwiazdy i trójkąta powinny być takie same. Zostało udowodnione, że warunki powyższe są automatycznie spełnione, jeśli przy zamianie gwiazdy na trójkąt spełnione są następujące warunki na rezystancje

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3} \quad (1.13)$$

$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1} \quad (1.14)$$

$$R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3 R_1}{R_2} \quad (1.15)$$

Podobnie przy zamianie trójkąta na gwiazdę rezystancje gwiazdy muszą spełniać warunki

$$R_1 = \frac{R_{12} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad (1.16)$$

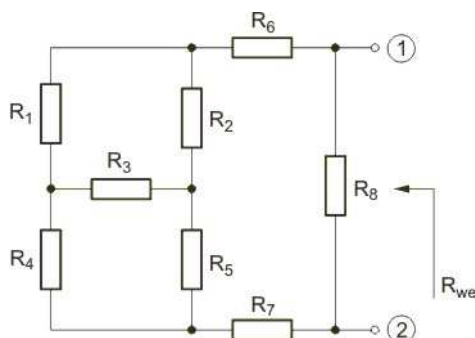
$$R_2 = \frac{R_{23} R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad (1.17)$$

$$R_3 = \frac{R_{31} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad (1.18)$$

Przekształcenia równoważne obwodu wykorzystujące reguły połączenia szeregowego, równoległego oraz przekształcenia gwiazda-trójkąt i trójkąt-gwiazda umożliwiają dalszą redukcję tego obwodu i po wykonaniu odpowiedniej liczby przekształceń pozwalają zawsze na sprowadzenie go do pojedynczego elementu zastępczego.

Przykład 1.3

Określić rezystancję zastępczą obwodu przedstawionego na rys. 1.14, widzianą z zacisków 1-2. Wartości rezystancji są następujące: $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 4\Omega$, $R_3 = 3\Omega$, $R_4 = 2\Omega$, $R_5 = 4\Omega$, $R_6 = 5\Omega$, $R_7 = 5\Omega$ oraz $R_8 = 10\Omega$.



Rys. 1.14. Struktura obwodu do przykładu 1.3

Rozwiązanie

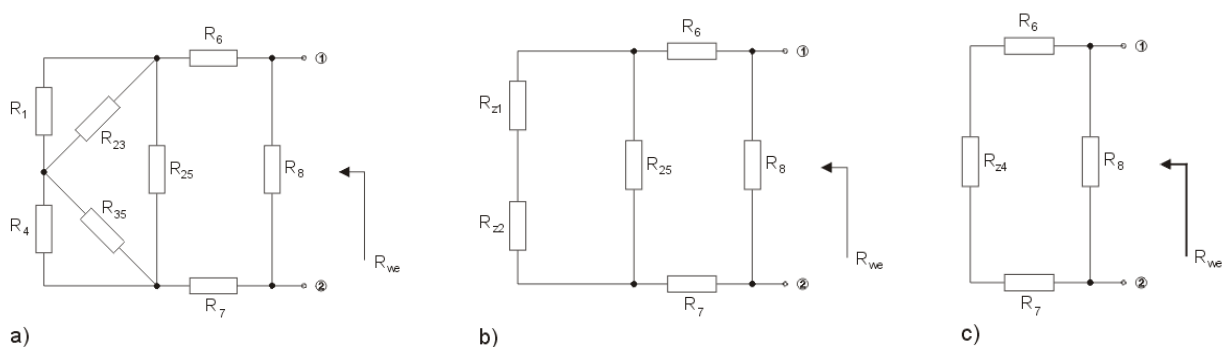
Z punktu widzenia zacisków wejściowych 1-2 w obwodzie nie można wyróżnić żadnego połączenia szeregowego czy równoległego elementów upraszczających obwód. Dla uproszczenia struktury tego obwodu konieczne jest więc zastosowanie przekształcenia gwiazda-trójkąt lub trójkąt-gwiazda w stosunku do rezystorów położonych najdalej od węzłów wejściowych (w wyniku przekształcenia nie mogą ulec likwidacji węzły wejściowe obwodu). Zamieniając gwiazdę złożoną z rezystorów R_2 , R_3 , i R_5 na równoważny jej trójkąt otrzymuje się

$$R_{23} = 3 + 4 + \frac{3 \cdot 4}{4} = 10$$

$$R_{35} = 3 + 4 + \frac{3 \cdot 4}{4} = 10$$

$$R_{25} = 4 + 4 + \frac{4 \cdot 4}{3} = 13,33$$

Schemat obwodu po tym przekształceniu przedstawiony jest na rys. 1.15a.



Rys. 1.15. Schemat obwodu z rys. 1.14 po przekształceniu gwiazda-trójkąt

W obwodzie tym można już wyróżnić połączenia równoległe elementów R_1 i R_{23} oraz R_4 i R_{35} . Wykorzystując regułę upraszczania elementów połączonych równoległe otrzymuje się (rys. 1.15b)

$$R_{z1} = \frac{R_1 \cdot R_{23}}{R_1 + R_{23}} = 1,667$$

$$R_{z2} = \frac{R_4 \cdot R_{35}}{R_4 + R_{35}} = 1,667$$

Rezystory R_{z1} i R_{z2} są połączone szeregowo. Ich rezystancja zastępcza jest równa

$$R_{z3} = R_{z1} + R_{z2} = 3,333$$

Jest ona połączona równoległe z rezystorem R_{25} . Stąd rezystancja zastępcza tego połączenia wynosi (rys. 1.15c)

$$R_{z4} = \frac{3,333 \cdot 13,33}{3,333 + 13,33} = 2,667$$

Rezystory R_6 , R_{z4} i R_7 są połączone szeregowo. Ich rezystancja zastępcza wynosi więc

$$R_{z5} = R_6 + R_{z4} + R_7 = 12,667$$

Rezystancja ta jest z kolei połączona równoległe z rezystancją R_8 tworząc wypadkową rezystancję obwodu widzianą z zacisków zewnętrznych. Stąd całkowita rezystancja zastępcza obwodu wyraża się wzorem

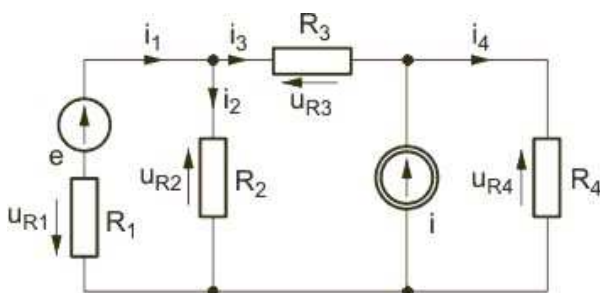
$$R_{we} = \frac{R_{z5} R_8}{R_{z5} + R_8} = \frac{12,667 \cdot 10}{12,667 + 10} = 5,588 \Omega$$

Należy zaznaczyć, że przekształcenia gwiazda-trójkąt i trójkąt-gwiazda są bardziej złożone obliczeniowo w stosunku do reguły upraszczania połączenia szeregowego i równoległego. Stosuje się je tylko wtedy, gdy w obwodzie nie da się wyróżnić żadnych połączeń szeregowych i równoległych.

Ćwiczenia

Ćwiczenie 1.1

Stosując prawa Kirchhoffa wyznaczyć prądy w obwodzie przedstawionym na rysunku 1.16, jeśli $R_1=1\Omega$, $R_2=5\Omega$, $R_3=10\Omega$, $R_4=4\Omega$, a wartości źródeł są następujące: $e=10V$, $i=5A$.



Rys. 1.16. Schemat obwodu do ćwiczenia 1.1

Rozwiązanie

Korzystając z praw Kirchhoffa otrzymuje się układ równań opisujących obwód w postaci

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0$$

$$-i_3 + i_4 = i$$

$$R_1 i_1 + R_2 i_2 = e$$

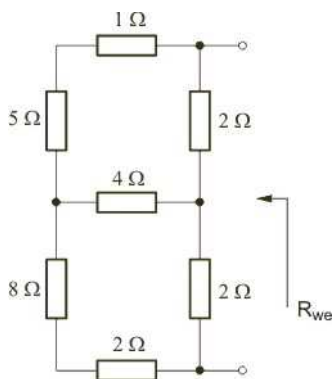
$$R_2 i_2 - R_3 i_3 - R_4 i_4 = 0$$

Po wstawieniu wartości liczbowych parametrów i rozwiązaniu układu równań otrzymuje się:

$i_1=1,011A$, $i_2=1,798A$, $i_3=-0,787A$ oraz $i_4=4,214A$.

Ćwiczenie 1.2

Wyznaczyć rezystancję wypadkową obwodu przedstawionego na rys. 1.17



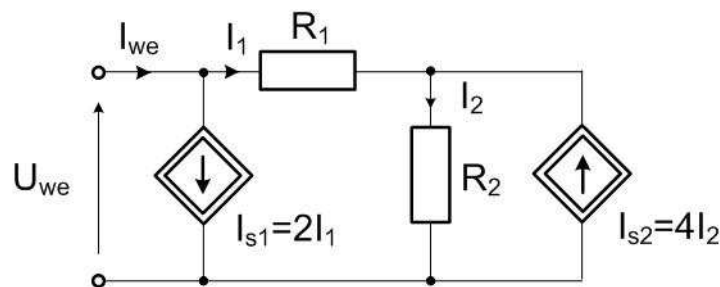
Rys. 1.17. Schemat obwodu do ćwiczenia 1.2

Rozwiązanie

Po likwidacji połączenia szeregowego rezystorów (1Ω i 5Ω oraz 2Ω i 8Ω) należy zastosować transformację trójkąt-gwiazda lub gwiazda-trójkąt w odniesieniu do wybranych trzech rezystorów obwodu, a następnie wykorzystać uproszczenia wynikające z powstałych połączeń szeregowych i równoległych w obwodzie. Po wykonaniu tych działań otrzymuje się $R_{we} = 3,18\Omega$.

Ćwiczenie 1.3

Wyznaczyć admitancję wejściową obwodu przedstawionego na rys. 1.18, dla parametrów $R_1=10\Omega$, $R_2=5\Omega$.



Rys. 1.18. Schemat obwodu do ćwiczenia 1.3

Rozwiązanie

Admitancję wejściową obwodu wyznacza się z definicji, to jest

$$Y_{we} = \frac{I_{we}}{U_{we}}$$

W tym celu korzystając z praw Kirchhoffa należy sformułować równania węzłowe i oczkowe

$$I_{we} = 2I_1 + I_1$$

$$I_1 + 4I_2 = I_2$$

$$U_{we} = R_1 I_1 + R_2 I_2$$

Po wyeliminowaniu z równań wartości I_1 i I_2 otrzymujemy równanie zawierające tylko wielkości wejściowe prądu i napięcia

$$U_{we} = \frac{R_1 I_{we}}{3} - \frac{R_2 I_{we}}{9}$$

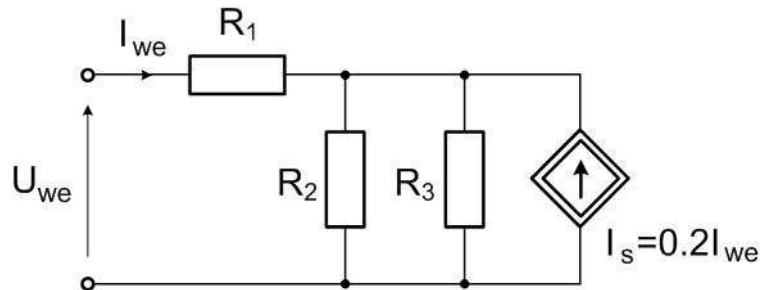
Po podzieleniu stronami przez prąd wejściowy i odwróceniu otrzymujemy wynik

$$Y_{we} = \frac{I_{we}}{U_{we}} = 0.36 \text{ S}$$

Zadania sprawdzające

Zadanie 1.1

Wyznaczyć impedancję wejściową obwodu przedstawionego na rys. 1.19, dla parametrów $R_1=5\Omega$, $R_2=10\Omega$ i $R_3=30\Omega$.



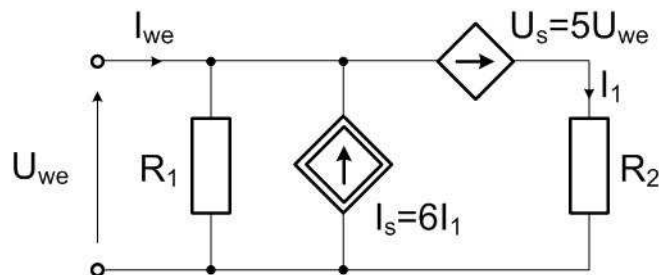
Rys. 1.19. Schemat obwodu do zadania 1.1

Rozwiązanie

$$Z_{we} = 14\Omega$$

Zadanie 1.2

Wyznaczyć admitancję wejściową obwodu przedstawionego na rys. 1.20, dla parametrów $R_1=5\Omega$, $R_2=2\Omega$.



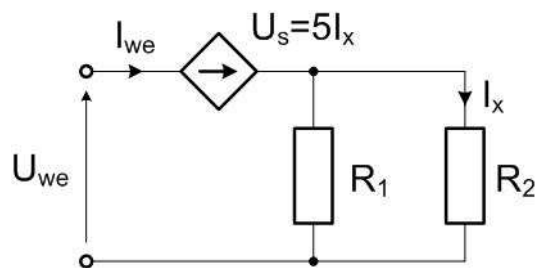
Rys. 1.20. Schemat obwodu do zadania 1.2

Rozwiązanie

$$Y_{we} = -14.8S$$

Zadanie 1.3

Wyznaczyć impedancję wejściową obwodu przedstawionego na rys. 1.21, dla parametrów $R_1=20\Omega$, $R_2=30\Omega$.



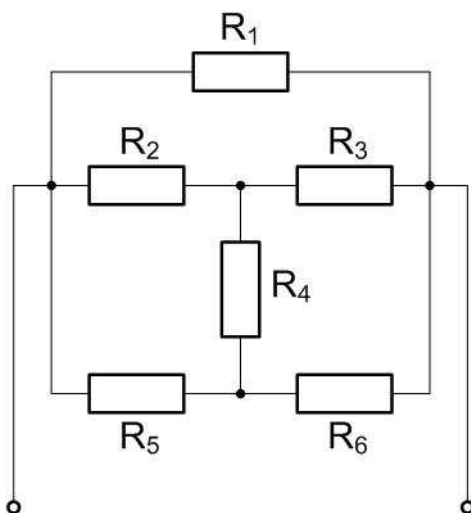
Rys. 1.21. Schemat obwodu do zadania 1.3

Rozwiązanie

$$Z_{we} = 10\Omega$$

Zadanie 1.4

Wyznaczyć impedancję wejściową obwodu przedstawionego na rys. 1.22, dla parametrów $R_1=10\Omega$, $R_2=5\Omega$, $R_3=7\Omega$, $R_4=6\Omega$, $R_5=2\Omega$, $R_6=1\Omega$.



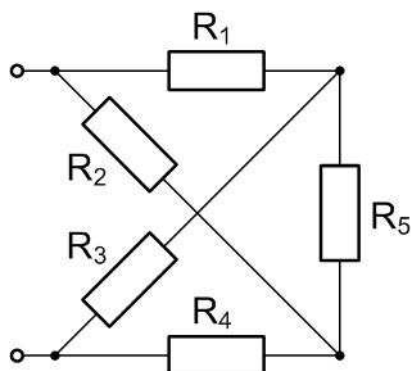
Rys. 1.22. Schemat obwodu do zadania 1.4

Rozwiązanie

$$R_{we} = 1.9\Omega$$

Zadanie 1.5

Wyznaczyć impedancję wejściową obwodu przedstawionego na rys. 1.23, dla parametrów $R_1=10\Omega$, $R_2=5\Omega$, $R_3=5\Omega$, $R_4=10\Omega$, $R_5=5\Omega$.



Rys. 1.23. Schemat obwodu do zadania 1.5

Rozwiązanie

$$R_{we} = 7\Omega$$

Test do wykładu 1

**Uwaga: Niektóre zadania mogą mieć kilka poprawnych odpowiedzi
znakiem x oznaczone są prawidłowe odpowiedzi**

- 1) Prąd idealnego źródła prądowego pracującego na zwarcie jest równy 10A. Napięcie na nim jest równe:
 - a) 10V
 - ☒ b) 0
 - c) ∞
 - d) jest nieokreślone
- 2) Napięcie idealnego źródła napięciowego obciążonego rezystorem $R=5\Omega$ jest równe $E=100$. Prąd tego źródła jest równy:
 - ☒ a) 20A
 - b) 0
 - c) ∞
 - d) jest nieokreślony
- 3) Rezystancja rezystora jest równa 10Ω . Odpowiadająca mu konduktancja jest równa:
 - a) 1S
 - ☒ b) 0,1S
 - c) 0,1F
 - d) 0,1H
- 4) Dopływające do węzła prądy są równe: $i_1=1A$, $i_2=3A$, $i_3=-2A$, czwarty prąd i_4 jest równy:
 - a) 1A
 - ☒ b) 2A
 - c) -2A
 - d) -2V
- 5) Oczko obwodu tworzą rezystory o $u_1=10$, $u_2=20$, $u_3=-5V$ oraz źródło prądu $i_2=4A$ o napięciu :
 - ☒ a) -25V
 - b) 25V
 - c) 0

- d) 4A
- 6) Oczko obwodu tworzą rezystory o $u_1=20V$, $u_2=30V$, $u_3=10V$ oraz 2 źródła prądu $i_{z1}=4A$ oraz $i_{z2}=5A$. Napięcia na tych źródłach są równe (wyniki wyrażone w woltach):
- $u_{z1}=-60$ oraz $u_{z2}=0$
 - $u_{z1}=0$ oraz $u_{z2}=-60$
 - $u_{z1}=-30$ oraz $u_{z2}=-30$
 - napięcia nie są określone jednoznacznie
- 7) Dwa rezystory o rezystancjach: $R_1=10\Omega$ i $R_2=40\Omega$ są połączone równolegle. Rezystancja równoważna im jest równa:
- 8Ω
 - $1/8\Omega$
 - 50Ω
 - 30Ω
- 8) Trzy rezystory o rezystancjach: $R_1=10\Omega$, $R_2=80\Omega$ oraz $R_3=80\Omega$ są połączone równolegle. Rezystancja równoważna im jest równa:
- 8Ω
 - $\frac{6400}{17}\Omega$
 - 170Ω
 - $\frac{17}{6400}\Omega$
- 9) Dwa rezystory o rezystancjach: $R_1=10\Omega$ i $R_2=0\Omega$ są połączone równolegle. Rezystancja równoważna im jest równa:
- 10Ω
 - 0
 - ∞
 - 20Ω
- 10) Źródło idealne napięcia $E=10V$ jest połączone szeregowo ze źródłem prądu $i=2A$ tworząc zamknięty obwód. Prąd źródła napięciowego oraz napięcie na źródle prądu są równe
- $i_E=2A$, $u_i=0$
 - $i_E=2A$, $u_i=10V$
 - $i_E=0$, $u_i=0$
 - prąd i napięcie są nieokreślone