# Wykład 2 Analiza obwodów w stanie ustalonym przy wymuszeniu sinusoidalnym

## Wstęp

Spośród wielu różnych rodzajów wymuszeń stosowanych w obwodach elektrycznych, do najważniejszych należy wymuszenie sinusoidalne, ze względu na to, że w praktyce codziennej mamy do czynienia z napięciem i prądem sinusoidalnym generowanym w elektrowniach. Analiza obwodów RLC przy wymuszeniu sinusoidalnym nastręcza pewne problemy związane z koniecznością rozwiązania układu równań różniczkowych, wynikających z opisu ogólnego kondensatorów i cewek. Szczególnie ważny w praktyce inżynierskiej jest stan ustalony obwodu. W stanie ustalonym odpowiedzi obwodu liniowego przyjmują taką samą formę jak wymuszenia. Przy sinusoidalnym wymuszeniu odpowiedź jest również sinusoidalna o tej samej częstotliwości co wymuszenie choć o innej amplitudzie i fazie początkowej. Analiza obwodów przy wymuszeniu sinusoidalnym stanowi poważne wyzwanie obliczeniowe, które może być stosunkowo łatwo rozwiązane przy zastosowaniu rachunku symbolicznego liczb zespolonych.

Na wykładzie drugim poznamy metodę symboliczną analizy obwodów RLC w stanie ustalonym przy wymuszeniu sinusoidalnym. Dzięki tej metodzie układ równań różniczkowo-całkowych opisujących obwód RLC zostaje sprowadzony do układu równań algebraicznych typu zespolonego. Wprowadzone zostanie pojęcie wartości skutecznej zespolonej, impedancji i admitancji zespolonej oraz prawa Kirchhoffa dla wartości skutecznych zespolonych. Prawo prądowe i napięciowe Kirchhoffa dla obwodów RLC w metodzie symbolicznej stosuje się identycznie jak dla obwodów rezystancyjnych prądu stałego reprezentując elementy RLC poprzez impedancje zespolone. W rezultacie otrzymuje się wartości zespolone odpowiedzi, którym można przyporządkować wartości chwilowe zgodnie z metodą symboliczną. Ważnym elementem analizy są wykresy wektorowe przedstawiające na płaszczyźnie zespolonej relacje między wartościami skutecznymi zespolonymi prądów i napięć gałęziowych w obwodzie.

W końcowej części wykładu przedstawimy zjawiska w obwodzie RLC związane z rezonansem. Zjawiskiem rezonansu nazywamy taki stan obwodu RLC, w którym pomimo istnienia w obwodzie elementów reaktancyjnych prąd i napięcie są ze sobą w fazie. W stanie rezonansu przesunięcie fazowe prądu i napięcia jest więc zerowe, co oznacza, że kąt fazowy impedancji lub admitancji zespolonej obwodu jest także równy zeru. Obwód nie pobiera żadnej mocy biernej a ściśle mówiąc następuje zjawisko kompensacji tej mocy w obwodzie.

Rezonans wystąpić może w dowolnej konfiguracji elementów RLC, tym nie mniej bada się szczególne połączenia elementów prowadzące do tego zjawiska. Rezonans występujący w obwodzie, w którym elementy R, L, C są połączone szeregowo nazywamy rezonansem napięć lub rezonansem szeregowym. W przypadku, gdy rezonans dotyczy obwodu równoległego R, L, C taki rezonans nazywamy rezonansem prądów lub rezonansem równoległym.

## 2.1. Parametry sygnału sinusoidalnego

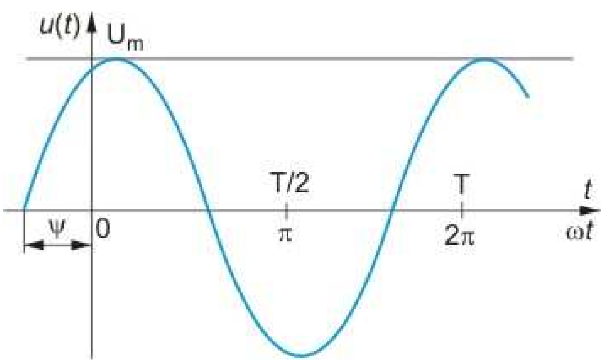
Sygnały sinusoidalne zwane również harmonicznymi są opisane w dziedzinie czasu następującym wzorem (w opisie przyjęto oznaczenie sygnału napięciowego)

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi) \tag{2.1}$$

Wielkości występujące w opisie mają następujące nazwy i oznaczenia:

| | |
|---|---|
| $u(t)$ | - **wartość chwilowa** napięcia |
| $U_m$ | - **wartość maksymalna** (szczytowa) napięcia zwana również **amplitudą** |
| $\psi$ | - **faza początkowa** napięcia odpowiadająca chwili $t$=0 |
| $\omega t + \psi$ | - **kąt fazowy** napięcia w chwili $t$ |
| $f$=1/$T$ | - **częstotliwość** mierzona w hercach (Hz) |
| $T$ | - **okres** przebiegu sinusoidalnego |
| $\omega = 2\pi f$ | - **pulsacja** mierzona w radianach na sekundę. |

W dalszych rozważaniach wartości chwilowe sygnałów oznaczać będziemy małą literą a wartości maksymalne, skuteczne i wielkości operatorowe dużą.




Rys. 2.1. Sygnał sinusoidalny

Rys. 2.1 przedstawia przebieg sygnału sinusoidalnego napięcia $u(t)$ z oznaczeniami poszczególnych jego parametrów. Oś odciętych ma podwójne oznaczenie: czasu t oraz fazy (aktualny kąt fazowy ($\omega$t+ $\psi$)).

Przebiegi zmienne w czasie dobrze charakteryzuje **wartość skuteczna.** Dla przebiegu okresowego $f(t)$ o okresie $T$ jest ona definiowana w postaci

$$F = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_o+T} f^2(t)dt} \qquad (2.2)$$

Łatwo udowodnić, że wartość skuteczna przebiegu okresowego nie zależy od wybory fazy początkowej. W przypadku przebiegu sinusoidalnego napięcia $u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi)$ jest równa

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \qquad (2.3)$$

a w przypadku prądu sinusoidalnego $i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi)$

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \qquad (2.4)$$

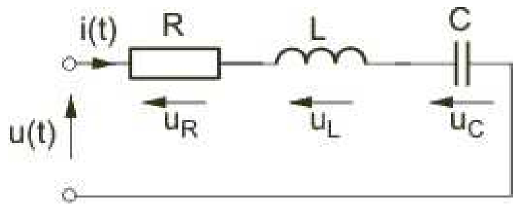
Dla sygnału sinusoidalnego wartość skuteczna jest więc $\sqrt{2}$ razy mniejsza niż jego wartość maksymalna. Należy zauważyć, że napięcie stałe $u(t)=U$ jest szczególnym przypadkiem sygnału sinusoidalnego, dla którego częstotliwość jest równa zeru ($f=0$) a wartość chwilowa jest stała i równa $u(t)=U_m \sin(\psi)=U$. Jest to ważna właściwość, gdyż dzięki temu metody analizy obwodów o wymuszeniu sinusoidalnym mogą mieć zastosowanie również do wymuszeń stałych przy założeniu $f=0$. Dla sygnału stałego wartość maksymalna i skuteczna są sobie równe i równają się danej wartości stałej.

Należy zauważyć, ze w elektrotechnice używa się również pojęcia **wartości średniej** sygnału, definiowanej jako uśredniona wartość sygnału za okres lub pół okresu funkcji okresowej, definiowana w postaci $\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)dt$. Wartość średnia całookresowa dla sygnału sinusoidalnego jest równa zeru. Wartość średnia półokresowa jest różna od zera i równa 0,637Um.

## 2.2. Metoda symboliczna liczb zespolonych analizy obwodów RLC

Analiza obwodów zawierających elementy RLC przy wymuszeniu sinusoidalnym napotyka na pewne trudności związane z wystąpieniem w opisie cewki i kondensatora równań różniczkowych. Trudności te łatwo jest pokonać w stanie ustalonym. **Stanem ustalonym** obwodu nazywać będziemy taki stan, w którym charakter odpowiedzi jest identyczny jak charakter wymuszenia, to znaczy odpowiedzią na wymuszenie sinusoidalne jest odpowiedź również sinusoidalna o tej samej częstotliwości choć o różnej amplitudzie i fazie początkowej. Dla stanu ustalonego obwodu wprowadzona zostanie **metoda liczb zespolonych, zwana również metodą symboliczną,** sprowadzająca wszystkie operacje różniczkowe i całkowe do działań algebraicznych na liczbach zespolonych.

Dla wprowadzenia tej metody przyjmijmy, że rozważany jest obwód szeregowy RLC (rys. 2.2) zasilany ze źródła napięcia sinusoidalnego $u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi)$.




Rys. 2.2. Połączenie szeregowe elementów RLC

Z prawa napięciowego Kirchhoffa wynika następujący związek między napięciami elementów tego obwodu

$$u(t) = u_R + u_L + u_C \tag{2.5}$$

Biorąc pod uwagę podstawowe zależności definicyjne dla rezystora, cewki i kondensatora

$u_R = Ri$,

$u_C = 1/C\int idt$

$u_L = L\dfrac{di}{dt}$

otrzymuje się

$$U_m \sin(\omega t + \psi) = Ri + \frac{1}{C}\int idt + L\frac{di}{dt} \tag{2.6}$$

Jest to równanie różniczkowo-całkowe opisujące zależności między wartościami chwilowymi prądu i napięcia wymuszającego w obwodzie. Pełne rozwiązanie tego równania sprowadza się do wyznaczenia dwu składowych prądu, stanowiących odpowiedź obwodu w stanie ustalonym i stanie przejściowym:

1. **składowej ustalonej**, której charakter zmian w czasie jest taki sam jak sygnału wymuszającego (przy sinusoidalnym wymuszeniu odpowiedź również sinusoidalna o tej samej częstotliwości); jest to stan który zostanie osiągnięty przez obwód po czasie teoretycznie nieskończenie długim.
2. **składowej przejściowej** odpowiadającej różnicy między rozwiązaniem rzeczywistym równania różniczkowego a składową ustaloną.

W praktyce składowa przejściowa zanika zwykle szybko w czasie i pozostaje jedynie składowa ustalona. **Stan po zaniknięciu składowej przejściowej nazywamy stanem ustalonym obwodu**. Składową ustaloną odpowiedzi obwodu można otrzymać nie rozwiązując równania różniczkowego opisującego ten obwód a korzystając jedynie z metody liczb zespolonych (**metody symbolicznej)**. Istotnym elementem tej metody jest zastąpienie przebiegów czasowych ich reprezentacją zespoloną. Przyjmijmy, że prąd $i(t) = I_m \sin(\omega t + \Psi_i)$ i napięcie $u(t) = U_m \sin(\omega t + \Psi_u)$ zastąpione zostały przez wektory wirujące w czasie, odpowiednio *I*(*t*) oraz *U*(*t*) określone w postaci

$$U(t) = U_m e^{j\psi_u} e^{j\omega t} \tag{2.7}$$

$$I(t) = I_m e^{j\psi_i} e^{j\omega t} \tag{2.8}$$

Po zastąpieniu wartości czasowych prądu i napięcia w równaniu (2.6) poprzez ich reprezentację w postaci wektorów wirujących otrzymuje się

$$U(t) = RI(t) + L\frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int I(t)dt \tag{2.9}$$

Po wykonaniu operacji różniczkowania i całkowania oraz pominięciu czynnika $e^{j\omega t}$ występującego we wszystkich składnikach wzoru równanie powyższe przyjmuje postać

$$\frac{U_m}{\sqrt{2}}e^{j\psi_u} = R\frac{I_m}{\sqrt{2}}e^{j\psi_i} + j\omega L\frac{I_m}{\sqrt{2}}e^{j\psi_i} + \frac{1}{j\omega C}\frac{I_m}{\sqrt{2}}e^{j\psi_i} \tag{2.10}$$

Oznaczmy przez $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}e^{j\psi_u}$ wartość skuteczną zespoloną napięcia, a przez $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}e^{j\psi_i}$ wartość skuteczną zespoloną prądu. Wtedy równanie (2.10) można zapisać w postaci obowiązującej dla wartości skutecznych zespolonych

$$U = RI + j\omega LI + \frac{1}{j\omega C}I \tag{2.11}$$

Składnik

$$U_R = RI \tag{2.12}$$

odpowiada napięciu skutecznemu zespolonemu na rezystorze. Wielkość

$$U_L = j\omega L I \tag{2.13}$$

reprezentuje wartość skuteczną zespoloną napięcia na cewce, a składnik

$$U_C = \frac{1}{j\omega C} I \tag{2.14}$$

odpowiada wartości skutecznej zespolonej napięcia na kondensatorze. Wszystkie napięcia i prąd w obwodzie są wartościami zespolonymi.

Analizując postać równania (2.11) można zauważyć prostą analogię do równania opisującego obwód rezystancyjny. W tym celu wprowadzimy uogólnienie rezystancji w postaci pojęcia **impedancji zespolonej** wiążącej wartości skuteczne prądu i napięcia na elementach *R*, *L*, *C* w stanie ustalonym przy wymuszeniu sinusoidalnym. Z ostatnich równań na podstawie prawa Ohma można napisać następujące przyporządkowania:

- Dla rezystora

$$Z_R = R \tag{2.15}$$

impedancja $Z_R$ jest równa rezystancji tego rezystora.

- Dla cewki

$$Z_L = j\omega L \tag{2.16}$$

impedancja $Z_L$ jest liczbą zespoloną (urojoną) zależną liniowo od częstotliwości.

- Dla kondensatora

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C} \tag{2.17}$$

impedancja $Z_C$ jest także zespolona i odwrotnie proporcjonalna do częstotliwości.

Wartość $X_L = \omega L$ nosi nazwę **reaktancji indukcyjnej** a wartość $X_C = \frac{1}{\omega C}$ **reaktancji pojemnościowej**. W związku z powyższym można napisać $Z_L = jX_L$, $Z_C = -jX_C$.

Wprowadzając oznaczenie wypadkowej impedancji obwodu przez *Z*, gdzie $Z = Z_R + Z_L + Z_C$ zależność prądowo-napięciową w obwodzie szeregowym RLC można zapisać w postaci, znanej jako prawo Ohma dla wartości symbolicznych

$$U = ZI \tag{2.18}$$

lub

$$I = \frac{U}{Z} = |I| e^{j\psi_i} \tag{2.19}$$

gdzie moduł prądu

$$|I| = \frac{|U|}{|Z|} = \frac{|U|}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2}} \tag{2.20}$$

natomiast kąt fazowy prądu

$$\psi_i = \psi_u - \operatorname{arctg} \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R} \tag{2.21a}$$

Faza początkowa wektora napięcia wymuszającego jest tu oznaczona przez $\psi_u$, a faza początkowa wektora prądu – przez $\psi_i$. Różnica faz nazywana jest **przesunięciem fazowym** prądu względem napięcia i oznaczana literą $\varphi$, przy czym

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = \operatorname{arctg} \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R} \tag{2.21b}$$

Kąt przesunięcia fazowego $\varphi$ odgrywa ogromną rolę w elektrotechnice, zwłaszcza w zagadnieniach mocy**. Kąt przesunięcia fazowego jest uważany za dodatni dla obwodów o charakterze indukcyjnym a za ujemny dla obwodów o charakterze pojemnościowym**.

Zauważmy, że wartościom skutecznym zespolonym prądu oraz napięcia można przyporządkować funkcję czasu. Biorąc pod uwagę, że przejście z przebiegu czasowego na opis zespolony (symboliczny) odbywa się według schematu

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u) \longrightarrow \frac{U_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi_u} \tag{2.22}$$

powrót z wartości zespolonej do postaci czasowej polega na pomnożeniu modułu wartości skutecznej przez $\sqrt{2}$ i uzupełnieniu wyniku przez dopisanie funkcji $\sin(\omega t + \psi_u)$. Stąd przykładowo, jeśli wynik zespolony prądu dany jest w postaci $I = 10e^{j50^\circ}$, to odpowiadający mu przebieg czasowy ma postać $i(t) = 10\sqrt{2}\sin(\omega t + 50^\circ)$. Istnieje również ścisła analogia między konduktancją (odwrotność rezystancji) a odwrotnością impedancji.

Analogicznie do pojęcia konduktancji w obwodzie rezystancyjnym wprowadza się pojęcie **admitancji** zespolonej dla obwodu RLC. Admitancja jest definiowana jako odwrotność impedancji. Oznaczana jest najczęściej literą *Y*, przy czym

$$Y = 1/Z \tag{2.23}$$

Admitancja kondensatora jest równa $Y_C = j\omega C$, cewki $Y_L = \frac{1}{j\omega L} = -j\frac{1}{\omega L}$, natomiast admitancja rezystora jest równa jego konduktancji $Y_R = G = 1/R$. Podobnie odwrotność reaktancji *X* nosi specjalną nazwę **susceptancji**. Wartość susceptancji dla kondensatora jest równa $B_C = \omega C$, natomiast dla cewki $B_L = 1/\omega L$.

## 2.3 Prawa Kirchhoffa dla wartości symbolicznych

Po zastąpieniu wartości rzeczywistych w metodzie symbolicznej przez wartości zespolone równania różniczkowe zostały zastąpione przez równania algebraiczne typu zespolonego. Nastąpiła zatem algebraizacja równań opisujących obwód. Wszystkie elementy RLC traktowane są w podobny sposób i reprezentowane przez swoje impedancje zespolone, interpretowane jako uogólnienie rezystancji. Dla obwodu reprezentowanego w postaci symbolicznej zespolonej obowiązują prawa Kirchhoffa, które mają identyczną postać jak dla obwodu rzeczywistego, z tą różnicą, że zamiast wielkości chwilowych używa się wielkości zespolonych.

***Prawo prądowe Kirchhoffa***

Suma algebraiczna prądów zespolonych w dowolnym węźle obwodu elektrycznego jest równa zeru, co zapiszemy w postaci

$$\sum_k I_k = 0 \tag{2.24}$$

W równaniu tym wszystkie prądy dane są w postaci zespolonej.

***Prawo napięciowe Kirchhoffa***

Suma algebraiczna napięć zespolonych w każdym oczku obwodu elektrycznego jest równa zeru, co zapiszemy w postaci

$$\sum_k U_k = 0 \tag{2.25}$$

W równaniu tym symbolem *U* oznaczono wszystkie napięcia w postaci zespolonej, zarówno na gałęziach pasywnych jak i źródłowych obwodu. Sposób sumowania (znak plus lub minus) zarówno prądów jak i napięć jest taki sam jak w przypadku operowania wartościami rzeczywistymi.

Podsumowując, metoda symboliczna analizy obwodu w stanie ustalonym składa się z następujących etapów.

- Przejście z przebiegu czasowego na opis zespolony (symboliczny) dla źródeł prądu i napięcia

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u) \longrightarrow \frac{U_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi_u}$$

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i) \longrightarrow \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi_i}$$

- Zastosowanie reprezentacji elementów poprzez ich impedancje zespolone.
- Zastosowanie praw Kirchoffa dla wartości symbolicznych.
- Rozwiązanie układu równań algebraicznych zespolonych.
- Ewentualnie (w miarę potrzeb) przedstawienie rozwiązania w postaci czasowej (odwrotna operacja) do wykonanej w punkcie pierwszym).

## 2.4. Wykres wektorowy obwodu

W przypadku analizy obwodów RLC w stanie ustalonym ważnym pojęciem jest wykres wektorowy, zwany również wykresem wskazowym, przedstawiający w sposób graficzny zależności między poszczególnymi wektorami prądu i napięcia w obwodzie. Jak wiadomo każdej liczbie zespolonej można przyporządkować reprezentację geometryczną w postaci odpowiedniej zależności wektorowej przedstawionej na płaszczyźnie, w której oś pozioma odpowiada części rzeczywistej a oś pionowa części urojonej liczby zespolonej. Konstruując wykres należy pamiętać, że **pomnożenie wektora przez operator *j* jest równoważne obrotowi tego wektora o kąt 90 stopni przeciwnie do ruchu wskazówek zegara** gdyż operator *j* jest równy $e^{j90^\circ}$. Podobnie **pomnożenie wektora przez operator *-j* jest równoważne jego obrotowi o kąt 90 stopni zgodnie z ruchem wskazówek zegara** gdyż operator *-j* jest równy $e^{-j90^\circ}$. Pomnożenie wektora przez liczbę rzeczywistą nie zmienia pozycji wektora w przestrzeni o ile jest to liczba dodatnia lub zmienia zwrot wektora o $180^o$ jeśli liczba ta jest ujemna.

Z zależności prądowo-napięciowych dla rezystora jest oczywiste, że

$$U_R = RI_R \tag{2.26}$$

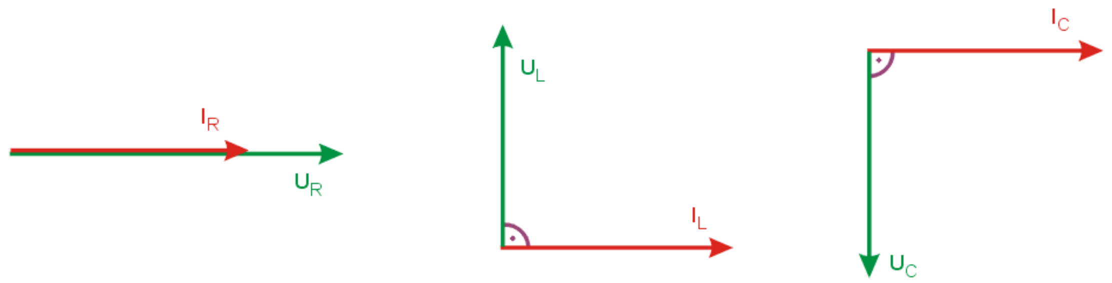
co wobec rzeczywistych, dodatnich wartości *R* oznacza, że napięcie na rezystorze jest w fazie z prądem tego rezystora. Dla cewki obowiązuje

$$U_L = j\omega L I_L = \omega L I_L e^{j90^o} \qquad (2.27)$$

co oznacza, że napięcie na cewce wyprzedza prąd o kąt $90^\circ$. Podobnie napięcie na kondensatorze opóźnia się względem swojego prądu o kąt $90^\circ$, gdyż

$$U_C = -j\frac{1}{\omega C} I_C = \frac{1}{\omega C} I_C e^{-j90^o} \qquad (2.28)$$

Na rys. 2.3 przedstawiono wykresy wektorowe dla rezystora, cewki i kondensatora z zaznaczeniem przesunięć kątowych między wektorami prądu i napięcia.




a) b) c)

Rys. 2.3. Wykresy wektorowe dla a) rezystora, b) cewki, c) kondensatora

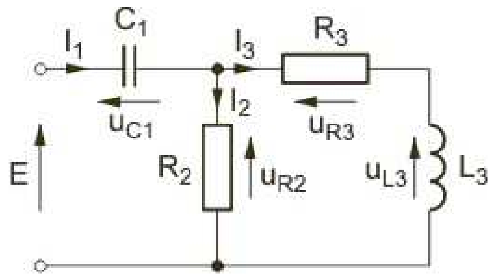
Przedstawione powyżej zasady konstruowania przesunięć kątowych między wektorami prądu i napięcia umożliwiają podanie ogólnych zasad postępowania przy konstruowaniu wykresu wektorowego dla dowolnego połączenia elementów obwodu RLC.

Wykres wektorowy z definicji uwzględnia przede wszystkim przesunięcia kątowe między poszczególnymi wektorami. Relacje ilościowe (długości) poszczególnych wektorów są mniej istotne i zwykle uwzględniane w sposób jedynie przybliżony. **Wykres rozpoczyna się zwykle od końca obwodu (gałęzi najdalej położonej od źródła). Jeśli gałąź jest połączeniem szeregowym elementów rozpoczynamy od prądu tej gałęzi, a w przypadku połączenia równoległego – od napięcia. Następnie rysuje się na wykresie na przemian napięcia i prądy kolejnych gałęzi, dochodząc w ten sposób do źródła. Budowę wykresu kończy się w momencie dojścia do prądu i napięcia źródłowego obwodu.**

Sposób postępowania przy sporządzaniu wykresów wektorowych oraz określanie charakteru obwodu przedstawimy na poniższym przykładzie.

*Przykład 2.1*

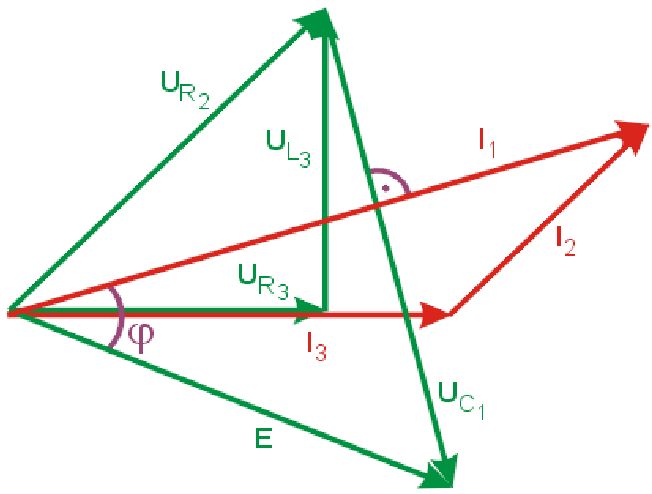
Narysować wykres wektorowy prądów i napięć dla obwodu RLC o strukturze przedstawionej na rys. 2.4.




Rys. 2.4. Schemat obwodu RLC do przykładu 2.1

*Rozwiązanie*

Na rys. 2.5 przedstawiono wykres wektorowy prądów i napięć w obwodzie RLC z rys. 2.4.




Rys. 2.5. Wykres wektorowy prądów i napięć dla obwodu z rys. 2.4

Sporządzanie wykresu rozpoczyna się od prądu $I_3$ dobudowując wektory napięć i prądów gałęzi przesuwając się w stronę źródła, kolejno: $U_{R_3}, U_{L_3}, U_{R_2}, I_2, I_1, U_{C_1}, E$. Przy założonych wielkościach wektorów obwód ma charakter pojemnościowy, gdyż napięcie wypadkowe *E* opóźnia się względem odpowiadającego mu prądu $I_1$.

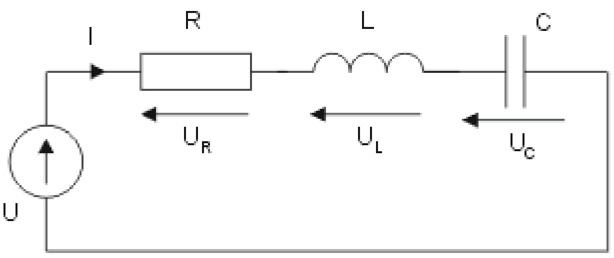
Położenie wektora prądu źródłowego względem napięcia decyduje o charakterze obwodu. Jeśli napięcie wypadkowe (źródłowe) wyprzedza prąd wypadkowy (źródłowy) lub inaczej mówiąc prąd opóźnia się względem napięcia - obwód ma **charakter indukcyjny**. Jeśli natomiast napięcie opóźnia się względem prądu (lub prąd wyprzedza napięcie) - mówimy o **charakterze pojemnościowym** obwodu. Jeśli natomiast wektory prądu i napięcia są ze sobą w fazie mówimy, że obwód ma **charakter rezystancyjny**.

## 2.5 Zjawisko rezonansu w obwodzie

Zjawiskiem **rezonansu** nazywamy taki stan obwodu RLC, w którym prąd i napięcie są ze sobą w fazie. W stanie rezonansu przesunięcie fazowe prądu i napięcia jest zerowe, co oznacza, że argument impedancji lub admitancji zespolonej obwodu jest także równy zeru. Rezonans wystąpić może w dowolnej konfiguracji elementów RLC, tym nie mniej bada się szczególne połączenia elementów prowadzące do tego zjawiska. Rezonans występujący w obwodzie, w którym elementy R, L, C są połączone szeregowo nazywamy rezonansem napięć lub **rezonansem szeregowym**. W przypadku, gdy rezonans dotyczy obwodu równoległego R, L, C taki rezonans nazywamy rezonansem prądów lub **rezonansem równoległym.**

W rezonansie szeregowym RLC zjawisko rezonansu wymaga, aby reaktancja wypadkowa obwodu była równa zeru (impedancja całkowita jest wówczas wartością rzeczywistą pomimo istnienia cewek i kondensatorów w obwodzie). W rezonansie równoległym warunek rezonansu wymaga, aby część urojona admitancji była równa zeru. Częstotliwość, przy której część urojona impedancji lub admitancji obwodu znika jest nazywana **częstotliwością rezonansową.**

Przyjmijmy do analizy obwód szeregowy R, L, C przedstawiony na rys. 2.6.




Rys. 2.6. Obwód rezonansowy szeregowy RLC

zasilany napięciem sinusoidalnie zmiennym o wartości skutecznej zespolonej *U* i pulsacji $\omega = 2\pi f$ . Przy zastosowaniu metody symbolicznej w analizie tego obwodu można napisać następujące równanie napięciowe Kirchhoffa

$$U = U_R + U_L + U_C = RI + jX_L I - jX_C I = I[R + j(X_L - X_C)] \tag{2.29}$$

Zjawiskiem rezonansu nazywamy taki stan obwodu RLC, w którym prąd i napięcie są ze sobą w fazie. Osiągnie się to, jeśli część urojona powyższej zależności będzie równa zeru, czyli

$$X_L = X_C \, .$$

Uwzględniając, że $X_L = \omega L$ oraz $X_C = 1/\omega C$ z powyższego warunku otrzymuje się wzór określający pulsację rezonansową $\omega_r$ w postaci

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{2.30a}$$

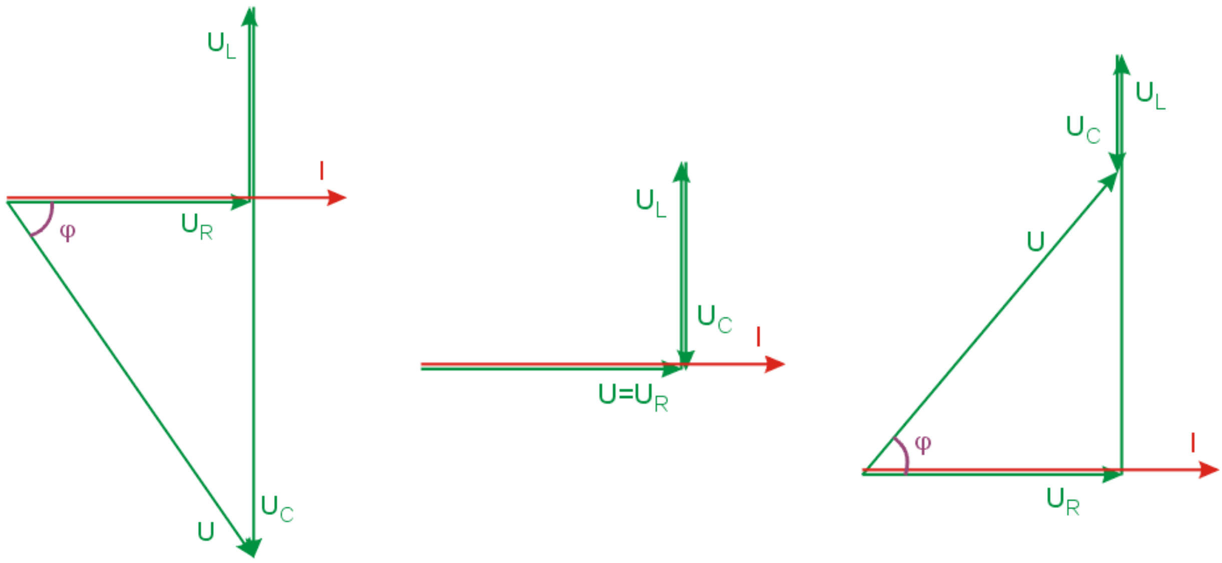
**Częstotliwość rezonansowa** obwodu wynosi zatem

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \tag{2.30b}$$

Równość reaktancji indukcyjnej i pojemnościowej oznacza, że w stanie rezonansu napięcia na cewce i kondensatorze są równe co do modułu ale przeciwnie skierowane, czyli

$$|U_L| = -|U_C| \tag{2.31}$$

Zmiana częstotliwości zmienia oczywiście relację między napięciami na tych elementach reaktancyjnych (przeskalowanie wartości). Dla częstotliwości mniejszych niż rezonansowa napięcie na kondensatorze jest większe niż na cewce (przy mniejszej częstotliwości moduł impedancji kondensatora jest większy), a przy częstotliwościach większych niż rezonansowa napięcie na cewce większe niż na kondensatorze (moduł impedancji cewki rośnie wraz ze wzrostem częstotliwości a moduł impedancji kondensatora maleje). Na rys. 2.7 przedstawiono wykresy wektorowe prądu i napięć w obwodzie szeregowym RLC dla częstotliwości mniejszych niż rezonansowa (rys. 2.7a), dla częstotliwości rezonansowej (rys. 2.7b) oraz dla częstotliwości większych niż rezonansowa (rys. 2.7c).




a) b) c)

Rys. 2.7. Wykresy wektorowe obwodu rezonansowego RLC: a) stan przed rezonansem, b) stan rezonansu, c) stan po rezonansie

Z przesunięć kątowych między wektorami widoczne jest, że przed rezonansem obwód szeregowy RLC ma charakter pojemnościowy, w czasie rezonansu – rezystancyjny, a dla częstotliwości większych niż rezonansowa – indukcyjny.

Ważnym parametrem obwodu rezonansowego jest **dobroć** *Q* określana zwykle w punkcie rezonansowym (dla częstotliwości rezonansowej). W obwodzie szeregowym RLC dobrocią nazywamy stosunek wartości skutecznej napięcia na elemencie reaktancyjnym (kondensatorze lub cewce) do wartości skutecznej napięcia na elemencie rezystancyjnym w czasie rezonansu. Stąd wartość dobroci może być wyrażona wzorem

$$Q = \frac{|U_L|}{|U_R|} = \frac{|U_C|}{|U_R|} = \frac{\omega_r L}{R} = \frac{1}{\omega_r RC} \qquad (2.32)$$

Po uwzględnieniu wzoru na pulsację rezonansową, dobroć *Q* można wyrazić w jednoznacznej postaci uzależnionej wyłącznie od parametrów obwodu RLC

$$Q = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{R} \tag{2.33}$$

Wielkość występująca w liczniku nazywana jest **rezystancją charakterystyczną** $\rho$

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} \tag{2.34}$$

Rezystancja charakterystyczna obwodu rezonansowego szeregowego RLC jest uzależniona wyłącznie od wartości indukcyjności i pojemności.

**Charakterystykami częstotliwościowymi** obwodu rezonansowego nazywać będziemy zależność prądu i napięć od częstotliwości (pulsacji). Dla otrzymania charakterystyk częstotliwościowych z równania (2.29) wyznaczmy prąd *I* jako funkcję pulsacji

$$I(\omega) = \frac{U}{R + j\omega L - j1/\omega C} \tag{2.35}$$

Przepisując powyższą zależność zespoloną w postaci wykładniczej otrzymujemy wzór

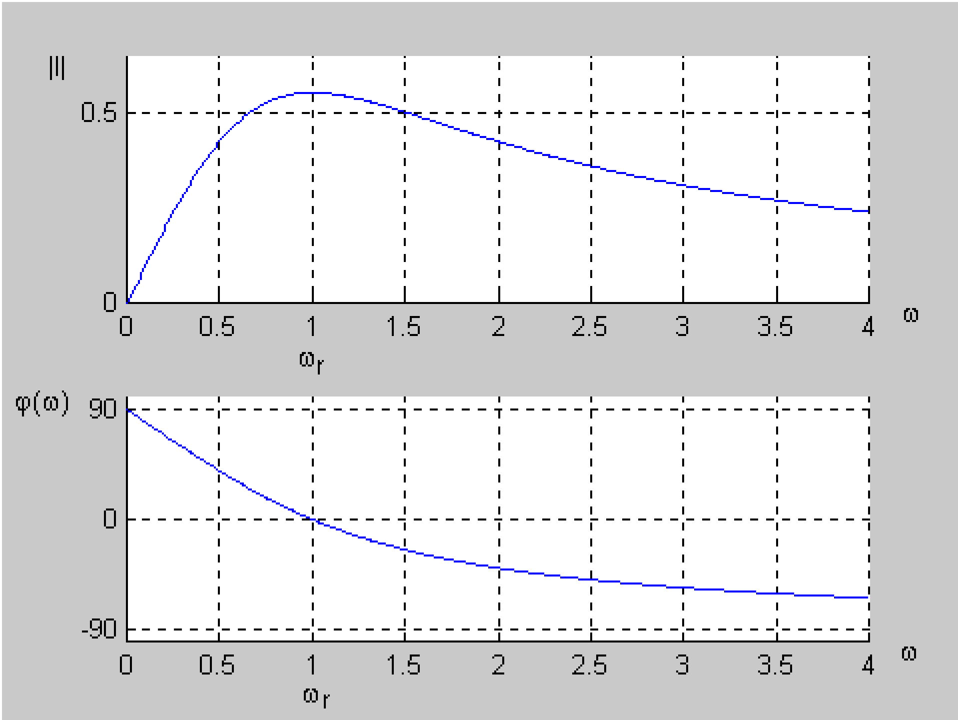
$$I(\omega) = |I(\omega)| e^{j\varphi(\omega)} \tag{2.36}$$

w którym $|I(\omega)|$ oznacza moduł prądu a $\varphi(\omega)$ - fazę uzależnioną od częstotliwości napięcia zasilającego. Wielkości te opisane są następująco

$$|I(\omega)| = \frac{|U|}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \tag{2.37}$$

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} \tag{2.38}$$

Zależność modułu od częstotliwości (pulsacji) nazywamy **charakterystyką amplitudową** rezonansu a zależność fazy od częstotliwości (pulsacji) – **charakterystyką fazową**. Na rys2.8a przedstawiono charakterystykę modułu prądu a na rys. 2.8b – fazy prądu w funkcji pulsacji $\omega$.




Rys. 2.8. Charakterystyki częstotliwościowe prądu w obwodzie rezonansowym:
a) charakterystyka amplitudowa, b) charakterystyka fazowa

Wartości elementów symulowanego obwodu były równe: *L=1H, C=1F, R=1,8*$\Omega$. Dla punktu rezonansowego $\omega_r = 1$ charakterystyka przyjmuje wartość maksymalną a faza wartość zerową.

Wraz ze zmianą prądu zmieniają się również napięcia na pozostałych elementach obwodu RLC. Dla wyznaczenia tych zależności można wykorzystać prawo Ohma, zgodnie z którym przy zastosowaniu podejścia symbolicznego otrzymuje się

- dla indukcyjności

$$U_L(\omega) = j\omega L I(\omega) \tag{2.39}$$

- dla pojemności

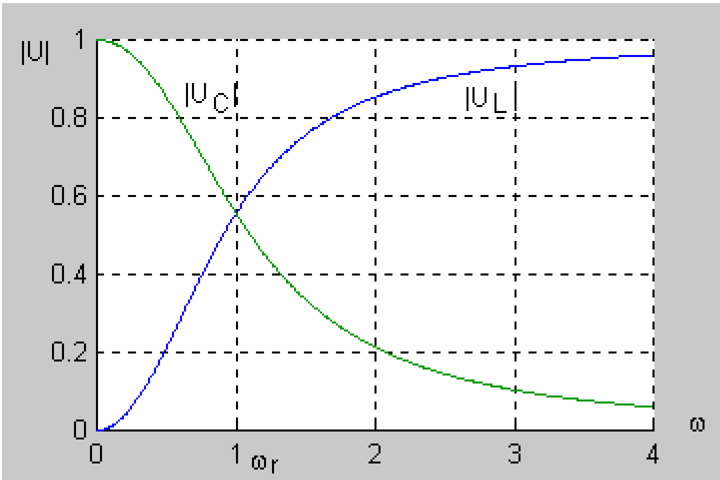
$$U_C(\omega) = -j\frac{I(\omega)}{\omega C} \tag{2.40}$$

Podstawiając do powyższych zależności wzór określający prąd można otrzymać wyrażenia na moduły i fazy napięcia na cewce i kondensatorze. Charakterystyki amplitudowe tych napięć są wyrażone w postaci

$$|U_L(\omega)| = \frac{|U|\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \tag{2.41}$$

$$|U_C(\omega)| = \frac{|U|}{\omega C\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \tag{2.42}$$

Na rys. 2.9 przedstawiono przykładowe charakterystyki amplitudowe napięcia na cewce i kondensatorze w obwodzie RLC o podanych wcześniej parametrach przy pulsacji rezonansowej równej jeden i dobroci obwodu $Q = 0{,}55$.




Rys. 2.9. Charakterystyki amplitudowe napięcia na cewce i kondensatorze

Jak widać dla częstotliwości rezonansowej obwodu napięcia na reaktancjach są sobie równe.

Charakterystyki fazowe napięć na cewce i kondensatorze, jak wynika ze wzorów (2.39) i (2.40) różnią się od charakterystyki fazowej prądu tylko o wartość $\pi/2$ i są przesunięte na osi pionowej bądź w dół bądź w górę. Łatwo pokazać, że są one określone następująco

- charakterystyka fazowa napięcia cewki

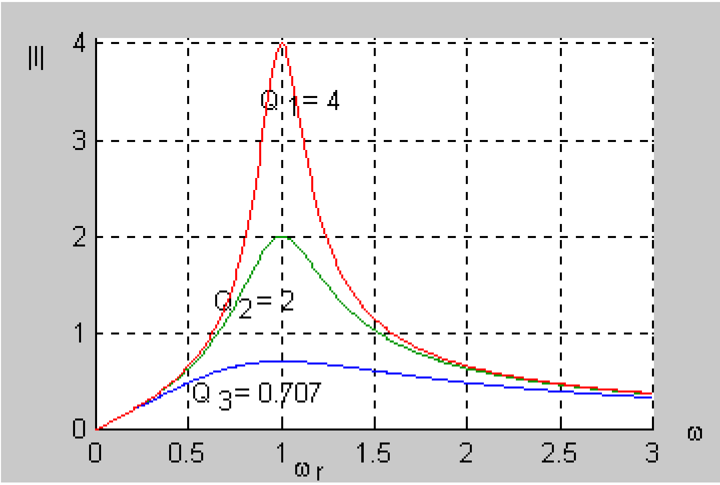
$$\varphi_L(\omega) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\frac{\omega L - 1/\omega C}{R} \tag{2.43}$$

- charakterystyka fazowa napięcia kondensatora

$$\varphi_C(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\frac{\omega L - 1/\omega C}{R} \tag{2.44}$$

Kształt charakterystyk fazowych napięcia na cewce i kondensatorze jest identyczny z charakterystyką fazową prądu. Jedynym wyjątkiem jest przesunięcie tych charakterystyk w osi pionowej o wartość kąta równą $\pm 90^{o}$.

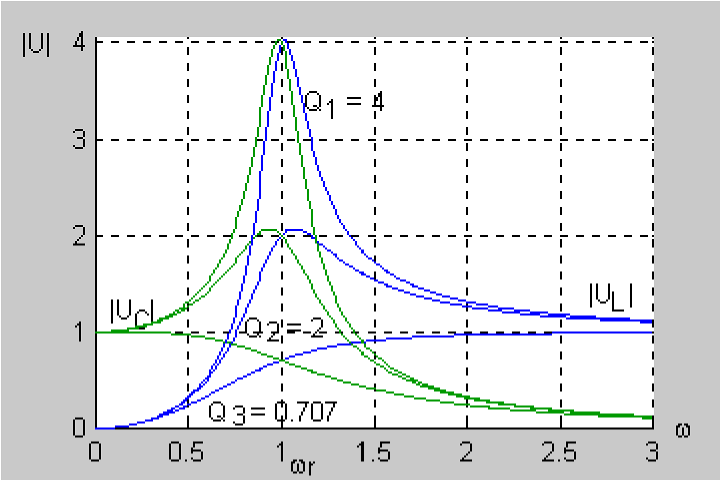
Ogromny wpływ na charakterystyki częstotliwościowe zarówno amplitudową jak i fazową wywiera dobroć obwodu. Im wyższa jest dobroć tym charakterystyka prądu w funkcji częstotliwości jest bardziej stroma. Zmniejszenie dobroci powoduje spłaszczenie charakterystyki prądu (gorsza selektywność obwodu rezonansowego).




Rys. 2.10. Ilustracja wpływu dobroci na charakterystykę amplitudową prądu

Rys. 2.10 przedstawia wpływ dobroci na charakterystykę amplitudową prądu przy stałej wartości amplitudy napięcia zasilającego. Im większa dobroć tym charakterystyka amplitudowa jest bardziej stroma.

Na rys. 2.11 zilustrowano wpływ dobroci na charakterystyki amplitudowe napięcia cewki i kondensatora dla tych samych wartości częstotliwości rezonansowej i dobroci jak na rys. 2.10.



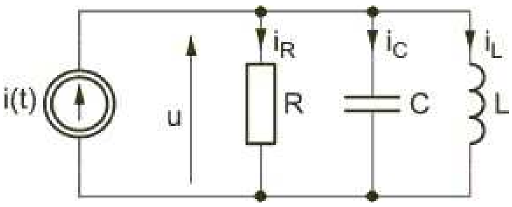
Rys. 2.11. Charakterystyki amplitudowe napięcia na cewce i kondensatorze

Zaobserwować można pojawienie się maksimum w charakterystyce zarówno napięcia cewki jak i kondensatora. Łatwo można udowodnić, że punkt maksymalny obu charakterystyk pojawia się jedynie przy dobroci obwodu większej niż $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Dobroć $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ odpowiada najbardziej płaskiemu kształtowi charakterystyk amplitudowych.

## *Ćwiczenia*

*Ćwiczenie 2.1*

Wyznaczyć rozpływy prądów w obwodzie z rys. 2.12 w stanie ustalonym. Przyjąć następujące wartości parametrów: $i(t) = 5\sqrt{2}\sin(1000t)$ A, $R = 10\Omega$, $C$=0,0001F, $L$=5mH.




Rys. 2.12. Schemat obwodu do ćwiczenia 2.1

*Rozwiązanie*

Wartości symboliczne elementów obwodu:

$$\omega = 1000$$

$$I = 5$$

$$Z_L = j\omega L = j5$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j10$$

Impedancje obwodu RLC:

$$Y = \frac{1}{R} + \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C} = 0{,}1 - j0{,}1$$

$$Z = \frac{1}{Y} = \frac{10}{\sqrt{2}} e^{j45^o}$$

Prądy i napięcie w obwodzie:

$$U = ZI = \frac{50}{\sqrt{2}} e^{j45^o}$$

$$I_R = \frac{U}{R} = \frac{5}{\sqrt{2}} e^{j45^o}$$

$$I_L = \frac{U}{Z_L} = \frac{10}{\sqrt{2}} e^{-j45^o}$$

$$I_C = \frac{U}{Z_C} = \frac{5}{\sqrt{2}} e^{j135^o}$$

Wartości chwilowe prądów i napięcia

$$u(t) = 50\sin(1000t + 45^o)$$

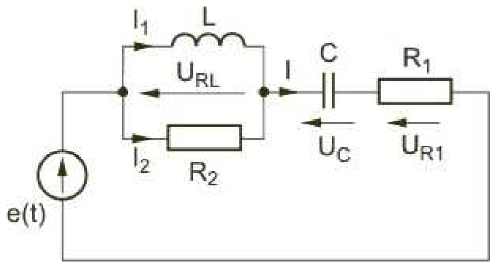
$$i_R(t) = 5\sin(1000t + 45^o)$$

$$i_L(t) = 10\sin(1000t - 45^o)$$

$$i_C(t) = 5\sin(1000t + 135^o)$$

*Ćwiczenie 2.2*

Wyznaczyć prądy i napięcia w obwodzie przedstawionym na rys. 2.13. Przyjąć następujące wartości elementów: $e(t) = 20\sqrt{2}\sin(100t - 90^o)$ V, $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 5\Omega$, *C*=0,001F, *L*=0.05H.




Rys. 2.13. Schemat obwodu do ćwiczenia 2.2

*Rozwiązanie*

Wartości symboliczne elementów obwodu:

$$\omega = 100$$

$$E = 20e^{-j90^o}$$

$$Z_L = j\omega L = j5$$

$$Z_C = 1/j\omega C = -j10$$

Impedancje obwodu:

$$Z_{RL} = \frac{R_2 Z_L}{R_2 + Z_L} = 2{,}5 + j2{,}5$$

$$Z = Z_{RL} + R_1 + Z_C = 12{,}5 - j7{,}5$$

Prądy i napięcia w obwodzie:

$$I = E/Z = 0{,}71 - j1{,}18$$

$$U_{RL} = IZ_{RL} = 4{,}71 - j1{,}18$$

$$I_1 = \frac{U_{RL}}{Z_L} = -0{,}24 - j0{,}94$$

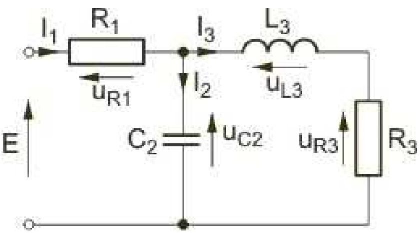
$$I_2 = \frac{U_{RL}}{R_2} = 0{,}94 - j0{,}24$$

$$U_C = IZ_C = -11{,}76 - j7{,}06$$

$$U_{R_1} = IR_1 = 7{,}06 - j11{,}76$$

*Ćwiczenie 2.3*

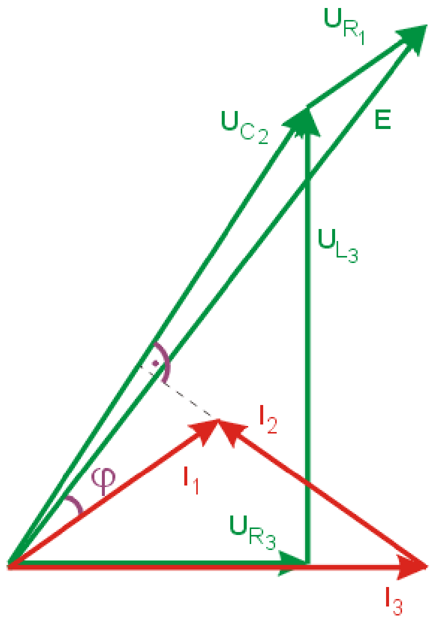
Sporządzić wykres wektorowy prądów i napięć w obwodzie przedstawionym na rys. 2.14.




Rys. 2.14. Schemat obwodu do ćwiczenia 2.3

*Rozwiązanie*

Wykres rozpoczyna się od prądu $I_3$, dodając kolejno napięcia na $R_3$ i $L_3$, napięcie $U_{C2}$, prąd $I_{C2}$, prąd $I_1$ oraz napięcie $E$. Pełny wykres wektorowy przedstawiony jest na rys. 2.15.



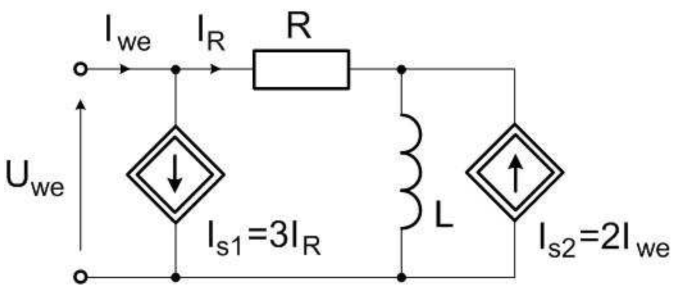

Rys. 2.15. Wykres wektorowy obwodu z rys. 2.8

Kąt fazowy przesunięcia prądu względem napięcia zasilającego jest równy $\varphi$. Biorąc pod uwagę, że napięcie wyprzedza prąd obwód ma charakter indukcyjny.

## *Zadania sprawdzające*

*Zadanie 2.1*

Wyznaczyć impedancje wejściową obwodu przedstawionego na rys. 2.16, dla parametrów $R$=4Ω I $X_L$=2Ω.



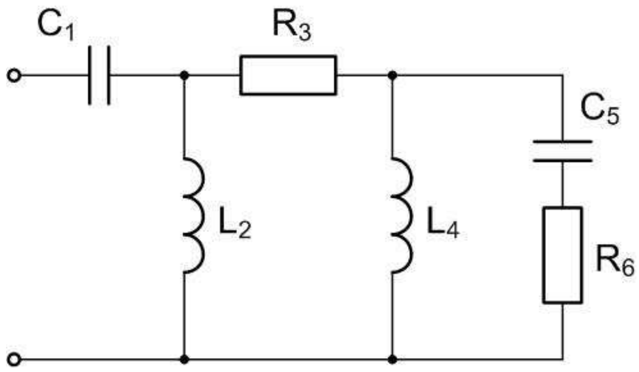

Rys. 2.16. Schemat obwodu do zadania 2.1

*Rozwiązanie*

$Z_{we} = 1 + j4.5$

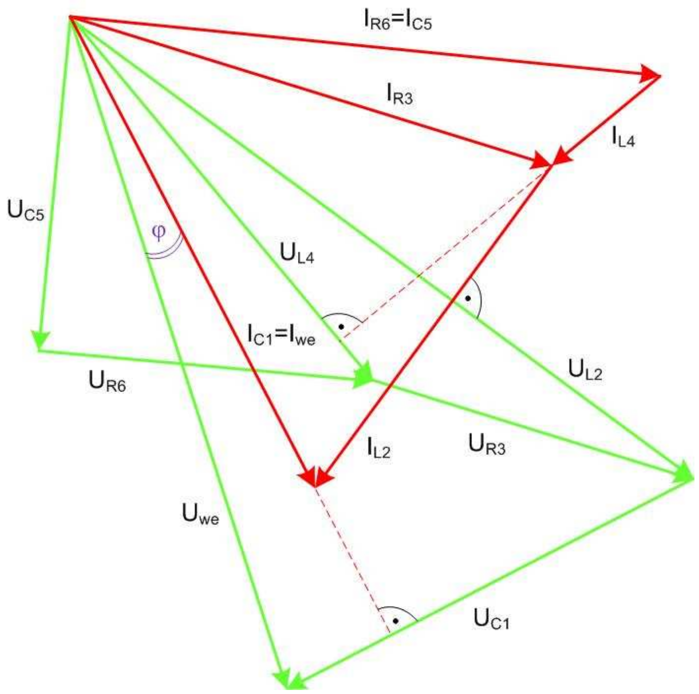
*Zadanie 2.2*

Narysować wykres wektorowy prądów i napięć w obwodzie przedstawionym na rys. 2.17.




Rys. 2.17. Schemat obwodu do zadania 2.2

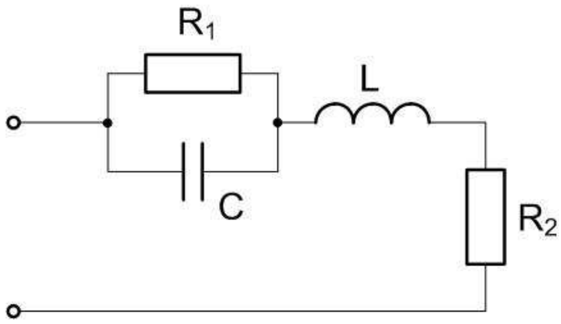
*Rozwiązanie*




Rys. 2.18. Wykres wektorowy dla obwodu do zadania 2.2

*Zadanie 2.3*

Obliczyć wartość pojemności, przy której w obwodzie przedstawionym na rys. 2.19 zajdzie rezonans napięć dla wartości parametrów: $R_1 = 3\Omega$, $R_2 = 5\Omega$, L = 0.01H, $\omega$ = 100rad/s.



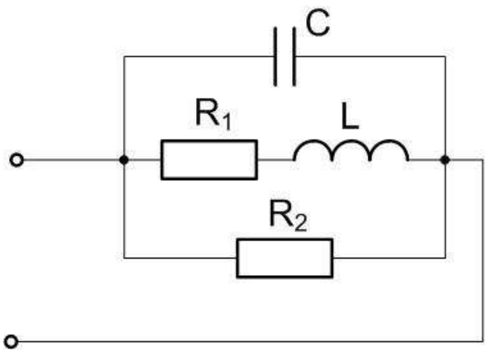

Rys. 2.19. Schemat obwodu do zadania 2.3

*Rozwiązanie*

$C_1$ = 1,27mF lub $C_2$ = 8,73 mF

*Zadanie 2.4*

Obliczyć wartość pulsacji, przy której w obwodzie przedstawionym na rys 2.20 zajdzie rezonans prądów dla wartości parametrów: $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 3\Omega$, L = 1H, C = 0.2F.



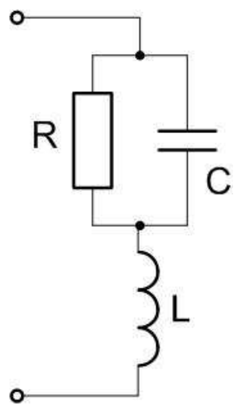

Rys. 2.20. Schemat obwodu do zadania 2.4

*Rozwiązanie*

$$\omega = 2\frac{rad}{s}$$

*Zadanie 2.5*

Obliczyć wartość indukcyjności, przy której w obwodzie z rys 2.21 zajdzie rezonans napięć dla wartości parametrów: $R = 10\Omega$, C=0,1F, $\omega$=1rad/s.




Rys. 2.21. Schemat obwodu do zadania 2.5

*Rozwiązanie*

L = 5 H

## Test do wykładu 2

1) Prąd idealnego źródła prądowego dany jest w postaci: i(t)=20sin(300t+45$^o$). Wartość skuteczna zespolona prądu jest równa (wynik w amperach)
   a) 20A
   xb) $\frac{20}{\sqrt{2}} e^{j45^o}$
   c) $20e^{j45^o}$
   d) $\frac{20}{\sqrt{2}}$

2) Wartość skuteczna napięcia na elemencie rezystancyjnym wynosi $U_R = 20e^{j35^o}$ V. Postać czasowa tego napięcia opisana jest wzorem (wynik w woltach)
   xa) $\mathrm{u_R(t)} = 20\sqrt{2}\sin(\omega t + 35^o)$
   b) $\mathrm{u_R(t)} = 20\sin(\omega t + 35^o)$
   c) $u_R$(t)=20
   d) $\mathrm{u_R(t)} = 20\sqrt{2}$

3) Rezystor R=10Ω, cewka L=2H oraz kondensator C=0,1F są połączone szeregowo. Ile wynosi impedancja zastępcza tego obwodu przy ω=10rad/s (wynik wyrażony w Ω)
   a) 10-j19
   xb) 10+j19
   c) 10+j1.9
   d) 10-j8

4) Rezystor R=10Ω i cewka L=0,5H są połączone szeregowo. Ile wynosi impedancja zastępcza tego obwodu przy ω=20rad/s (wynik wyrażony w Ω)?
   a) 5-j5
   b) 5+j5
   xc) 10+j10
   d) 20

5) Cewka L=1H i kondensator C=0,5H są połączone równolegle. Ile wynosi impedancja zastępcza zespolona tego obwodu przy ω=2rad/s (wynik wyrażony w Ω).
a) 2j
xb) -2j
c) 0
d) 0,5j

6) Ile wynosi przesunięcie kątowe wektora prądu względem napięcia w obwodzie szeregowym RLC o wartościach elementów: R=1Ω, $X_L$=2Ω i $X_C$=1Ω.
a) $90^o$
b) $45^o$
xc) $-45^o$
d) arctg(3)

7) Ile wynosi przesunięcie kątowe wektora prądu względem napięcia w obwodzie szeregowym RL, jeśli R=1Ω, $X_L$=2Ω .
a) $45^o$
b) arctg(2)
xc) arctg(-2)
d) arctg(-0,5)

8) Ile wynosi prąd (wyrazić w amperach) rezystora R połączonego szeregowo z równolegle połączonymi: cewką i kondensatorem jeśli R=1Ω, $X_L$=2Ω, $X_C$=2 Ω. Źródło wymuszające jest napięciowe o postaci $e(t) = 10\sqrt{2}\sin(\omega t)$.
a) 10
b) 5
c) ∞
xd) 0

9) Ile wynosi wartość skuteczna zespolona prądu rezystora R połączonego szeregowo z równolegle połączonymi: cewką i kondensatorem jeśli R=2Ω, $X_L$=2Ω, $X_C$=1 Ω. Źródło wymuszające jest napięciowe o postaci (wyniki podane w amperach)
xa) $5e^{j45}$
b) $5e^{-j45}$
c) 5
d) 0

10) Ile wynosi częstotliwość rezonansowa *f* szeregowego obwodu RLC o wartościach parametrów: R=1Ω, L=0.1H, C=10μF.
xa) $f_r$=159,15Hz
b) $f_r$=6280Hz
c) $f_r$=159,15kHz
d) $f_r$=6280kHz