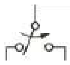
stany nieustalone - prąd stały

1. Identyfikacja problemu = po czym poznać, że zadanie trzeba rozwiązać tą metodą:

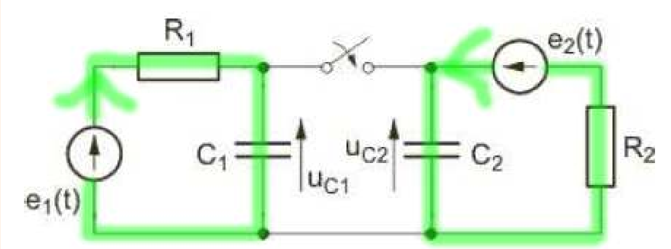
- w zadaniu jest wyraźnie zaznaczony "stan nieustalony" lub "po przełączeniu" lub "po zwarciu" lub "po rozwarciu" itp.
- na schemacie układu jest element oznaczający przełącznik czy też włącznik
    a. przełącznik
        - przełącza jedną gałąź obwodu na drugą.
       Przed przełączeniem prąd płynie w gałęzi zwartej, nie płynie w gałęzi rozwartej.
       Po przełączeniu - odwrotnie
    b. włącznik
        - włącza oczko/oczka, w których się znajduje
       Przed przełączeniem prąd nie płynie w oczku/oczkach, w których znajduje się włącznik.
       Po przełączeniu prąd płynie w oczku/oczkach, w których znajduje włącznik
    c. wyłącznik
        - wyłącza oczko/oczka, w których się znajduje
       Działa odwrotnie jak włącznik
- **wszystkie źródła prądów i napięć w zadaniu są wyrażone stałą (nie są zależne od *t*).**
  np. e(t)=100V

Rozwiązanie

2. Określenie warunków początkowych (przed przełączeniem)

1. W zależności od rodzaju przełącznika ustalamy, w których gałęziach prąd nie płynie - przyjmujemy tam I = 0
2. Sprawdzamy liczbę elementów reaktancyjnych (cewki i kondensatory)
3. Kondensatory:
    1. Ustalamy wszystkie oczka zawierające kondensatory - oczka rozłączone (np. z niezwartym przełącznikiem) odrzucamy.
    2. W każdym oczku sprawdzamy, czy jest źródło napięcia. Oczka bez źródeł napięcia odrzucamy.
    3. Dla każdego oczka sprawdzamy napięcie źródła w nim występującego. Jeśli występuje więcej niż jedno źródło napięcia w oczku, to liczymy napięcie wypadkowe (równe sumie, gdy kierunki źródeł są zgodne, lub różnicy, jeśli kierunki są przeciwne).
       Każdy kondensator z tego oczka ma napięcie równe napięciu tego źródła. Tyle wynosi również warunek początkowy dla tego kondensatora.
       Piszemy:
       $u(0^-) = E$
       gdzie E to stałe napięcie źródła prądu z tego oczka (lub napięcie wypadkowe, gdy było więcej niż jedno źródło).
       Jeśli w oczku był więcej niż jeden kondensator, to powyższy warunek początkowy wypisujemy dla każdego kondensatora

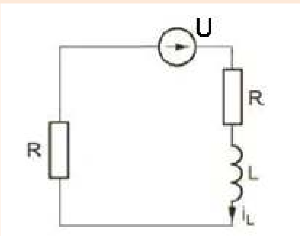
Przykład



na rysunku kolorem pociągnięte oczka, przez które płynie prąd.
Z oczka po lewej wynika, że napięcie na C_1 wynosi e_1, a z prawego oczka - że napięcie na C_2 wynosi e_2

4. Cewki:
    1. Ustalamy gałęzie, na których znajdują się cewki
    2. Sprawdzamy, przez które z tych gałęzi płynie prąd.
       WAŻNE! W tym przypadku traktujemy kondensatory jak przerwy w obwodzie - przez kondensatory nie płynie prąd stały!
    3. Wszystkie gałęzie z cewkami, przez które nie płynie prąd odrzucamy. Są to gałęzie rozłączone wyłącznikiem lub rozłączone kondensatorem
    4. Liczymy prąd płynący przez cewki znajdujące się na aktywnych gałęziach (czyli na gałęziach, przez które płynie prąd = których nie odrzuciliśmy w punkcie 3).
       Korzystamy głównie z prawa prądowego Kirchhoffa dla węzłów i z wyznaczania oporu zastępczego.
       UWAGA! Cewki traktujemy jakby nie miały żadnego oporu
    5. Tak policzony prąd wstawiamy jako warunek początkowy dla cewki
       $i(0^-) = I_L$
       gdzie I_L to policzony prąd płynący przez gałąź z tą cewką

Przykład



w tym obwodzie jest jedna gałąź z cewką, przez którą płynie prąd.
Z oczka liczymy prąd I_L - przy czym pomijamy samą cewkę jako element o zerowym oporze:

$U-U_R-U_R=0$

$U=2U_R$

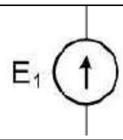
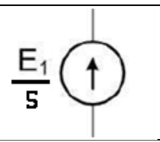
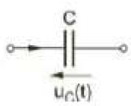
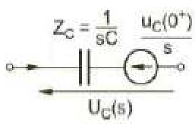
$U=2I_L*R$

$$I_L = \frac{U}{2R}$$

3. Określenie stanu przejściowego po przełączeniu

1. Wykonujemy przełączenie zgodnie ze schematem, a dokładnie ze strzałką oznaczającą przełączenie na przełączniku na oryginalnym schemacie obwodu.

2. W zależności od rodzaju przełącznika ustalamy, w których gałęziach prąd nie płynie - przyjmujemy tam I = 0
3. Sprawdzamy liczbę elementów reaktancyjnych (cewki i kondensatory)
4. Stosujemy przekształcenie operatorowe, które różni się od stosowanego w stanie ustalonym przekształcenia symbolicznego oraz od przekształcenia operatorowego dla wymuszenia sinusoidalnego:
    1. Zastępujemy elementy na schemacie obwodu zgodnie z poniższą tabelką:

	Przed przekształceniem	Po przekształceniu operatorowym	
Element	Schemat obwodu	Schemat obwodu	Wartość impedancji operatorowej na elemencie oraz wartość napięcia na dodatkowym źródle
Źródło stałego napięcia			Napięcie źródła $$e(s) = \frac{E_1}{s}$$
Cewka			Impedancja oper. $$Z_L(s) = sL$$ Napięcie dod. źródła (pod warunkiem, że wyliczony wcześniej $i_L(0^+)$ wyszedł różny od 0) $$u(s) = Li_{Lp}(0^+)$$ Uwaga - napięcie dodatkowego źródła jest skierowane zgodnie z płynącym przez cewkę prądem
Kondensator			Impedancja oper. $$Z_C(s) = \frac{1}{sC}$$ Napięcie dod. źródła (pod warunkiem, że wyliczony wcześniej $u_C(0^+)$ wyszedł różny od 0) $$u(s) = \frac{u_{Cp}(0^+)}{s}$$ Uwaga - napięcie dodatkowego źródła jest skierowane przeciwnie do płynącego przez kondensator prądu

    2. Przerysowujemy obwód zgodnie z wprowadzonymi przekształceniami
5. Rozwiązujemy standardowe zadanko na policzenie prądów i napięć w obwodzie w stanie ustalonym, przy czym <u>konieczne do policzenia</u> są tylko elementy reaktancyjne w obwodzie (<u>cewki i kondensatory</u>).
   UWAGA: należy pamiętać, że działamy na wielkościach operatorowych, czyli wszystkie prądy i napięcia piszemy dużą literą i jako funkcje operatora s (z dodanym po symbolu i indeksie nawiasem z s w środku: $I_L(s)$, $U_C(s)$, $I_{L1}(s)$, $U_{C1}(s)$, ...)
6. Szukane prądy cewek i napięcia kondensatorów będą funkcjami zależnymi od operatora s. Należy je przekształcić za pomocą transformaty odwrotnej Laplace'a do postaci funkcji czasowej. Ogólnie funkcje te będą miały postać funkcji wymiernych zespolonych (dzielenie dwóch wielomianów przez siebie):
$$F(s) = \frac{L(s)}{M(s)}$$
   Funkcja F(s) dla cewki będzie równa $I_L(s)$, dla kondensatora będzie równa $U_C(s)$

Są dwie metody (tak jak w liczeniu odpowiedzi skokowej i impulsowej przy transmitancji):

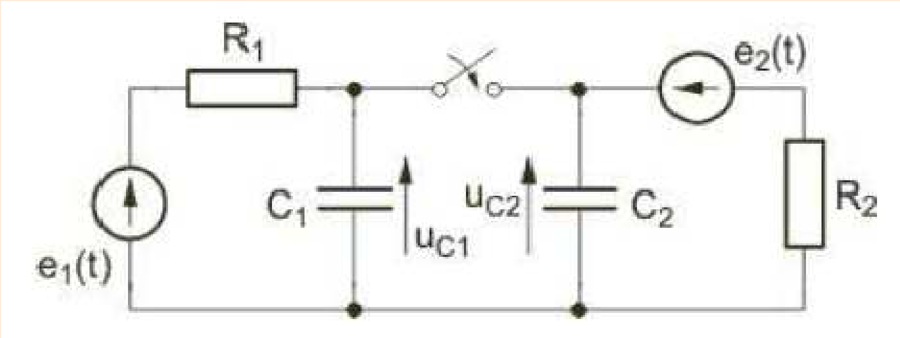
3. metoda tabelkowa
   przekształcamy wzór na operatorową funkcję prądu cewki lub napięcia kondensatora tak, by odpowiadała któremuś ze wzorów z drugiej kolumny tabeli transformat Laplace'a (poniżej). Jeśli funkcja ma bardziej skomplikowany mianownik $M(s)$ niż podane w tabelkach, to należy znaleźć jego miejsca zerowe i rozdzielić go na prostsze ułamki.

Funkcja czasu - f(t)	Funkcja operatorowa - F(s)
δ(t) - delta Diraca	1
1(t) - funkcja skokowa	s
t	$\frac{1}{s^2}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s+\alpha}$
$sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$e^{-\alpha t}sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$
$e^{-\alpha t}cos(\omega t)$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$

4. metoda residuów:
   - znajdujemy wszystkie bieguny (miejsca zerowe mianownika $M(s)$) i ich krotności
   - przemnażamy funkcję $F(s)$ przez e^{st} i dla takiej funkcji liczymy residua dla wszystkich znalezionych biegunów
   - funkcja czasowa to suma wszystkich znalezionych residuów:
     dla prądu cewki:
     $$i_{Lp}(t) = \sum_{i=1}^{n} res_{s=s_i}(I_L(s)e^{st})$$
     dla prądu cewki:
     $$u_{Cp}(t) = \sum_{i=1}^{n} res_{s=s_i}(U_C(s)e^{st})$$

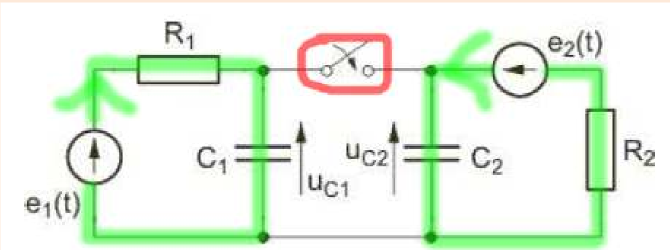
2. otrzymane funkcje czasowe są rozwiązaniem końcowym.

Przykład



R_1=50Ω, R_2=100Ω, C_1=10μF, C_2=20μF, $e_1(t) = 50\,V$, $e_2(t) = 100\,V$.

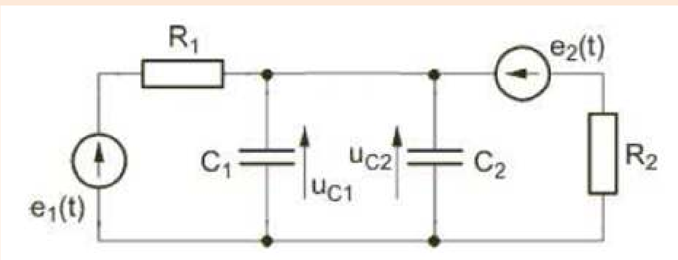
1. Źródła napięć są podane jako stałe (nie zależą od *t*) => jest to przypadek z wymuszeniem prądem stałym.
2. Szukamy oczek, w których płynie prąd:



środkowe oczko jest przerwane wyłącznikiem. Lewe i prawe oczko jest ok - nie są przerwane.
W każdym z tych oczek są źródła napięcia i kondensatory - wyznaczamy warunki początkowe.
W lewym oczku jest jeden kondensator i jedno źródło napięcia, zatem ten warunek początkowy dla tego kondensatora wynosi:
$u_{C1}(0^-) = e_1 = 50$
W prawym oczku jest podobnie:
$u_{C2}(0^-) = e_2 = 100$

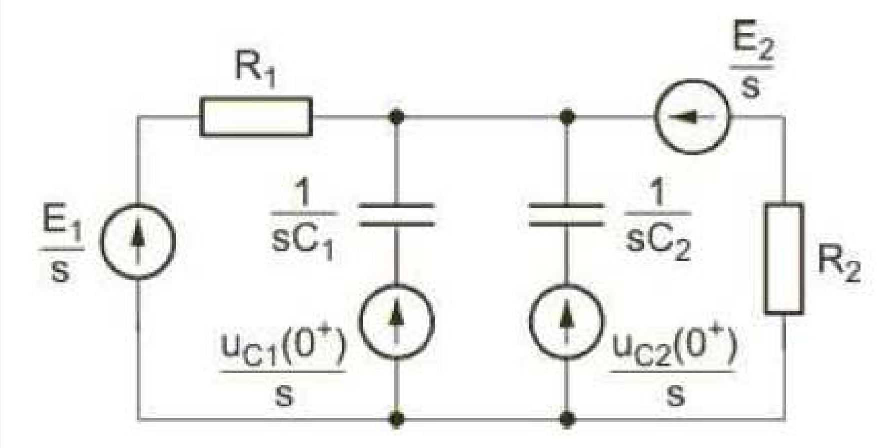
mamy warunki początkowe

3. Określamy stan przejściowy po przełączeniu
Rysujemy schemat ze zwartym przełącznikiem



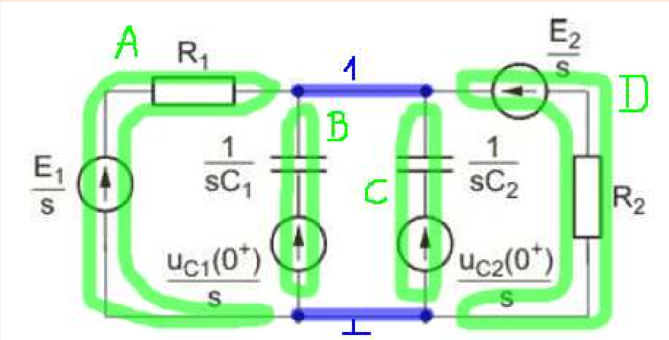
stosujemy do tego układu przekształcenia operatorowe. zgodnie z tabelką
- źródła stałego napięcia trzeba podzielić przez s
- kondensatory miały niezerowe warunki początkowe, więc zmienią się w kondensatory z przyłączonym dodatkowym źródłem napięcia

- reszta zostaje bez zmian (rezystory):



Metoda potencjałów węzłowych

analizujemy węzły i sprawdzamy gałęzie:



w tym przypadku są dwa węzły (na niebiesko na schemacie) - jeden numerujemy jedynką, a drugi przyjmujemy jako węzeł odniesienia. Węzły te są połączone ze sobą czterema gałęziami (oznaczenie gałęzi: A,B,C,D)

Liczymy admitancje gałęzi:

$$Y_A = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{50}$$

$$Y_B = \frac{1}{\frac{1}{sC_1}} = sC_1 = s10 \cdot 10^{-6} = s10^{-5}$$

$$Y_C = \frac{1}{\frac{1}{sC_2}} = sC_2 = s20 \cdot 10^{-6} = s2 \cdot 10^{-5}$$

$$Y_D = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{100}$$

Liczymy prądy w gałęziach pochodzące ze źródeł:

$$I_A = \frac{E_1}{s} Y_A = \frac{50}{50s} = \frac{1}{s}$$

$$I_B = \frac{u_{C1}(0^-)}{s} Y_B = \frac{50}{s} s10^{-5} = 5 \cdot 10^{-4}$$

$$I_C = \frac{u_{C2}(0^-)}{s} Y_C = \frac{100}{s} s2 \cdot 10^{-5} = 2 \cdot 10^{-3}$$

$$I_D = \frac{E_2}{s} Y_D = \frac{100}{100s} = \frac{1}{s}$$

W tym przypadku - skoro jest tylko jeden numerowany węzeł -dostaniemy macierz admitancji **Y** o wymiarze 1x1

Macierz będzie miała jeden element równy admitancji własnej węzła o nr 1, która jest z definicji równa sumie admitancji gałęzi przyłączonych do tego węzła, czyli w tym przypadku wszystkich gałęzi:

$$\boldsymbol{Y} = (Y_A + Y_B + Y_C + Y_D) = \left(\frac{1}{50} + s \cdot 10^{-5} + 2s \cdot 10^{-5} + \frac{1}{100}\right) = \left(\frac{3}{100} + 3s \cdot 10^{-5}\right)$$

Wektor prądów wymuszeń to również liczba - jest równa sumie prądów wpływających i wypływających (branych z minusem) do węzła numer jeden. W tym przypadku wszystkie prądy wpływają do węzła, więc bierzemy sumę prądów z każdej gałęzi:

$$\boldsymbol{I_{zr}} = (I_A + I_B + I_C + I_D) = \left(\frac{1}{s} + 5 \cdot 10^{-4} + 2 \cdot 10^{-3} + \frac{1}{s}\right) = \left(\frac{2}{s} + 2.5 \cdot 10^{-3}\right)$$

Wyznaczamy macierz odwrotną do **Y** - czyli w tym przypadku odwrotność liczby:

$$\boldsymbol{Y^{-1}} = \frac{1}{\frac{3}{100} + 3s \cdot 10^{-5}}$$

Wyznaczamy wektor potencjałów węzłowych - czyli znów tylko jedną liczbę:

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{Y^{-1}} \cdot \boldsymbol{I_{zr}}$$

$$V_1 = \frac{1}{\frac{3}{100} + 3s \cdot 10^{-5}}\left(\frac{2}{s} + 2.5 \cdot 10^{-3}\right) = \frac{\frac{2}{s} + 2.5 \cdot 10^{-3}}{\frac{3}{100} + 3s \cdot 10^{-5}}$$

porządkujemy równanie - rozszerzamy przez $s \cdot 10^5$ żeby pozbyć się ułamków piętrowych:

$$V_1 = \frac{\frac{2 \cdot s \cdot 10^5}{s} + 2.5 \cdot 10^{-3} \cdot s \cdot 10^5}{\frac{3 \cdot s \cdot 10^5}{100} + 3s \cdot 10^{-5} \cdot s \cdot 10^5} = \frac{2 \cdot 10^5 + 2.5s \cdot 10^2}{3s \cdot 10^3 + 3s^2} = \frac{200000 + 250s}{3000s + 3s^2}$$

Napięcie na każdej z gałęzi jest równe różnicy potencjałów w węzłach końcowym i początkowym - a że w tym przypadku są tylko dwa węzły, to napięcia na każdej gałęzi będą równe, zatem napięcia na każdym z kondensatorów będzie identyczne i równe:

$$U_C(s) = V_1 - 0 = V_1 = \frac{200000 + 250s}{3000s + 3s^2}$$

odejmujemy 0, bo początek gałęzi jest w węźle odniesienia

Mamy funkcję operatorową napięcia na każdym kondensatorze - trzeba teraz policzyć jej transformatę odwrotną, żeby znaleźć funkcję czasową:

Metoda residuowa:

szukamy miejsc zerowych mianownika, czyli rozwiązujemy równanie:

$$3000s + 3s^2 = 0$$

można to zrobić szybko wyciągając 3s przed nawias:

$$3s(1000 + s) = 0$$

zatem rozwiązania to:

$$s_1 = 0$$

$$s_2 = -1000$$

są to bieguny o krotności 1, więc residua będą liczone bez konieczności wyznaczania pochodnych.

Wcześniej można zapisać funkcję operatorową z mianownikiem w postaci iloczynowej, później będzie łatwiej upraszczać:

$$U_C(s) = \frac{200000 + 250s}{3s(1000 + s)}$$

Liczymy residua pamiętając o przemnożeniu funkcji przez e^{st}

- dla bieguna $s_1 = 0$

$$res_{s=0}(U_C(s)\cdot s\cdot e^{st}) = \lim_{s\to 0}\left(\frac{200000+250s}{3s(1000+s)}s\cdot e^{st}\right) = \lim_{s\to 0}\left(\frac{200000+250s}{3(1000+s)}e^{st}\right)$$
$$= \frac{200000+250\cdot 0}{3(1000+0)}e^{0t} = \frac{200000}{3000}e^{0} = \frac{200}{3}$$

- dla bieguna $s_2 = -1000$

$$res_{s=-1000}(U_C(s)\cdot(1000+s)\cdot e^{st}) = \lim_{s\to -1000}\left(\frac{200000+250s}{3s(1000+s)}(1000+s)\cdot e^{st}\right)$$
$$= \lim_{s\to -1000}\left(\frac{200000+250s}{3s}e^{st}\right) = \frac{200000+250\cdot(-1000)}{3(-1000)}e^{-1000t}$$
$$= \frac{-50000}{-3000}e^{-1000t} = \frac{50}{3}e^{-1000t}$$

dodajemy policzone residua i dostajemy funkcję czasową napięcia po przełączeniu w stanie nieustalonym na każdym z kondensatorów:

$$u_C(t) = \frac{200}{3} + \frac{50}{3}e^{-1000t}$$