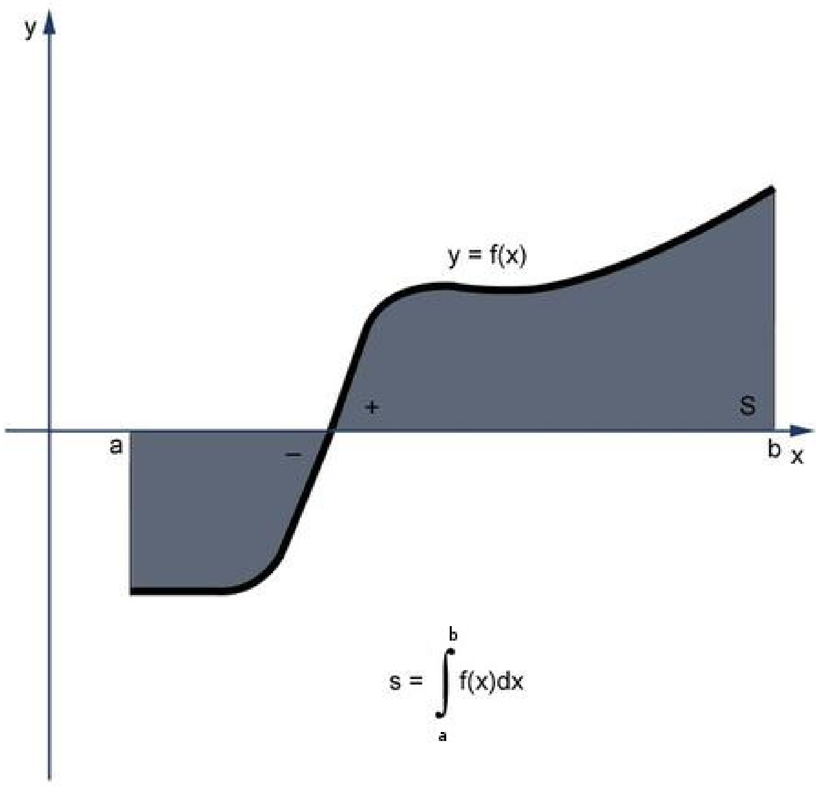
7.2 Zastosowania do obliczania pól obszarów płaskich i objętości brył obrotowych

Całka oznaczona ma następującą interpretację geometryczną. Jeżeli funkcja $f(x) \geq 0$ dla $x \in (a, b)$ to $\int_a^b f(x)\, dx$ jest równa polu powierzchni obszaru zawartego między osią Ox oraz wykresem funkcji f. Jeśli $f(x) \leq 0$ to $\int_a^b f(x)\, dx$ jest równa polu powierzchni obszaru zawartego między osią Ox oraz wykresem funkcji f ale ze znakiem minus.



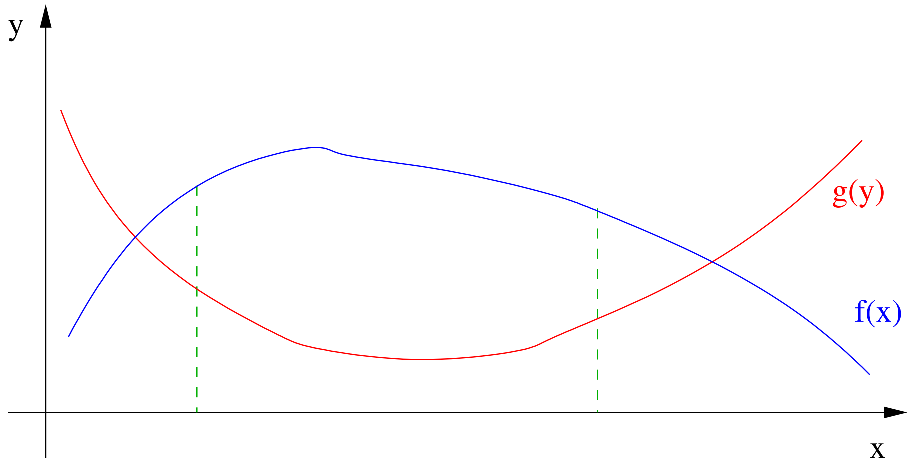
Rysunek 7.1: Interpretacja geometryczna całki oznaczonej

Przykład 7.6. Obliczyć pole obszaru zawartego między wykresem funkcji $\sin x$ oraz osią Ox dla $x \in (0, \pi)$.

$$\int_0^\pi \sin x\, dx = -\cos x \Big|_0^\pi = -(-1-1) = 2$$

Przykład 7.7. Obliczymy całkę $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$.

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$$



Rysunek 7.2: Interpretacja geometryczna całki oznaczonej – pole obszaru ograniczonego przez krzywe

Całkujemy przez podstawienie

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} x=\sin t \\ dx=\cos t\,dt \\ x\in(-1,1), t\in(-\pi/2,\pi/2) \end{array} \right| = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{1-(\sin t)^2}\cos t\,dt =$$
$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}|\cos t|\cos t\,dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t\,dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt =$$
$$= \frac{1}{2}t\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{1}{4}\sin 2t\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{4}(0-0) = \frac{\pi}{2}.$$

Powyższą całkę można obliczyć prościej jeśli zauważymy, że $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$ jest polem połowy koła o promieniu 1 tzn. $1/2\pi = \pi/2$.

Całki oznaczone możemy wykorzystać do obliczania pól obszarów zawartych między wykresami funkcji. Załóżmy, że mamy dane funkcje $f(x), g(x)$ całkowalne w przedziale $\langle a,b\rangle$. Załóżmy ponadto, że $f(x)\geq g(x)$ dla $x\in\langle a,b\rangle$. Wówczas pole obszaru zawartego między wykresami funkcji $f(x)$ i $g(x)$ obliczamy ze wzoru

$$\int_a^b [f(x)-g(x)]\;dx$$

Dla funkcji całkowalnych w przedziale $\langle a,b\rangle$ definiuje się pojęcie wartości średniej funkcji w przedziale $\langle a,b\rangle$. Wartość taką definiujemy wzorem

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Przykład 7.8. Obliczyć wartość średnią funkcji $\sin(x)$ na przedziale $\langle 0, \pi \rangle$. Mamy

$$\frac{1}{\pi - 0} \int_0^\pi \sin x \, dx = \frac{1}{\pi} [-\cos x] \Big|_0^\pi = \frac{2}{\pi}.$$

Z punktu zastosowań w geometrii ważne są następujące wzory. Rozpatrzmy funkcję $f(x)$ dla $x \in \langle a, b \rangle$. Objętość V oraz pole powierzchni bocznej S obszaru powstałego z obrotu funkcji $f(x)$ dookoła osi Ox wyrażają się wzorami

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) \, dx, \qquad P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx.$$

Przykład 7.9. Obliczyć objętość bryły powstałej z obrotu wykresu funkcji $\sin x$ dookoła osi Ox dla $x \in \langle 0, \pi \rangle$.

$$V = \pi \int_0^\pi \sin^2 x \, dx = \pi \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \pi \left(\frac{x}{2} \Big|_0^\pi - \frac{\sin 2x}{2} \Big|_0^\pi \right) = \frac{\pi^2}{2}.$$

Całki niewłaściwe pierwszego rodzaju

Niech $f(x)$ będzie funkcją ciągłą dla $x \in \langle a, \infty)$. Całkę niewłaściwą na przedziale $x \in \langle a, \infty)$ definiujemy wzorem

$$\int_a^\infty f(x) \, dx = \lim_{T \to \infty} \int_a^T f(x) \, dx, \tag{7.1}$$

analogicznie definiujemy

$$\int_{-\infty}^b f(x) \, dx = \lim_{T \to -\infty} \int_T^b f(x) \, dx. \tag{7.2}$$

Mówimy, że całka niewłaściwa jest zbieżna jeżeli istnieją odpowiednie granice (7.1), (7.2).

Przykład 7.10.

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = \lim_{T \to \infty} \int_1^T \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = \lim_{T \to \infty} 2\sqrt{x} \Big|_1^T = \lim_{T \to \infty} 2(\sqrt{T} - 1) = \infty$$

oznacza to, że całka $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx$ jest rozbieżna.

Przykład 7.11.

$$\int_0^\infty e^{-x} \, dx = \lim_{T \to \infty} \int_0^T e^{-x} \, dx = \lim_{T \to \infty} -e^{-x} \Big|_0^T = \lim_{T \to \infty} -e^{-T} + 1 = 1$$

oznacza to, że całka $\int_0^\infty e^{-x} \, dx$ jest zbieżna co ciekawe jej wartość jest równa polu kwadratu o boku 1.