

Wykład 4. Metody analizy złożonych obwodów RLC w stanie ustalonym przy wymuszeniu sinusoidalnym

Wstęp

Analiza obwodów w stanie ustalonym przy wymuszeniu sinusoidalnym tylko w najprostszym przypadku połączenia szeregowego lub równoległego elementów jest zagadnieniem prostym, nie wymagającym rozwiązywania układu równań. W obwodach zawierających małą liczbę elementów wystarczy zwykle zastosowanie równań Kirchhoffa, które w połączeniu z równaniami symbolicznymi opisującymi elementy tworzą układ równań algebraicznych o małej liczbie zmiennych. Jego rozwiązanie jest stosunkowo łatwe, a w jego wyniku otrzymuje się wszystkie prądy i napięcia w obwodzie. W przypadku obwodów złożonych zawierających bardzo dużą liczbę elementów takie podejście (aczkolwiek możliwe) jest mało efektywne, gdyż wymaga rozwiązania ogromnego układu równań o współczynnikach zespolonych. Liczba tych równań jest równa liczbie elementów obwodu.

Wykład czwarty poświęcony będzie skutecznym metodom analizy złożonych obwodów RLC w stanie ustalonym przy wymuszeniach sinusoidalnych. Podstawowym założeniem przy wymuszeniu sinusoidalnym jest przyjęcie opisu symbolicznego elementów obwodu, zgodnie z którym cewka opisana jest impedancją zespoloną $Z_L = j\omega L$ a kondensator impedancją $Z_C = -j \frac{1}{\omega C}$. Źródło sinusoidalne zastępuje się jego wartością skuteczną zespoloną, określaną według zasad podanych w wykładzie drugim.

Znanych jest wiele metod umożliwiających analizę dowolnie złożonych obwodów elektrycznych, spośród których omówimy metodę klasyczną, opartą na prawach Kirchhoffa, zastosowaniu twierdzenia Thevenina i Nortona oraz metodę węzłową i oczkową. W przypadku wielu wymuszeń o różnych częstotliwościach niezbędne jest zastosowanie tak zwanej zasady superpozycji obowiązującej dla obwodów liniowych, wprowadzonej w końcowej fazie wykładu.



4.1. Metoda równań Kirchhoffa

W metodzie tej wykorzystuje się w bezpośredniej formie prawo prądowe i napięciowe Kirchhoffa uzupełnione o równania symboliczne opisujące poszczególne elementy obwodu. W efekcie zastosowania praw Kirchhoffa otrzymuje się układ równań algebraicznych o zespolonych współczynnikach. Jeśli założymy, że obwód posiada b gałęzi i n węzłów to w równaniach opisujących obwód wykorzystuje się $(n-1)$ równań pochodzących z prawa prądowego Kirchhoffa. Pozostałe $(b-n+1)$ równań wynika z prawa napięciowego Kirchhoffa dla $(b-n+1)$ dowolnie wybranych oczek niezależnych w obwodzie (oczka uważa się za niezależne, jeśli równania napięciowe opisujące je są od siebie niezależne). Rozwiązanie powstałego układu równań prowadzi do wyznaczenia wartości wszystkich prądów i napięć w obwodzie.

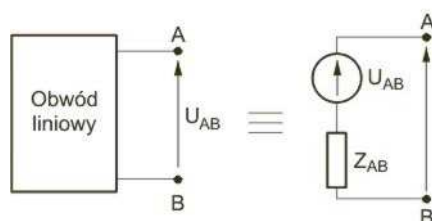
4.2. Metoda oparta na twierdzeniu Thevenina

Jednym z ważniejszych twierdzeń w teorii obwodów jest twierdzenie Thevenina. Pozwala ono zastąpić złożony obwód elektryczny o dowolnej strukturze i wartościach elementów, przez obwód prosty będący połączeniem szeregowym jednej impedancji zastępczej oraz źródła napięciowego. Oznacza to uproszczenie obwodu do jednego oczka, co umożliwia w bardzo prosty sposób wyznaczenie prądu lub napięcia jednej wybranej gałęzi obwodu.

Twierdzenie Thevenina

Dowolny, aktywny obwód liniowy można zastąpić od strony wybranych zacisków gałęzi AB uproszczonym obwodem równoważnym, złożonym z szeregowego połączenia jednego idealnego źródła napięcia i impedancji zastępczej obwodu. Wartość źródła zastępczego oblicza się na podstawie analizy obwodu oryginalnego jako napięcie panujące na zaciskach AB. Impedancja zastępcza widziana z zacisków AB dotyczy obwodu po zwarcie wszystkich niezależnych źródeł napięcia oraz rozwarciu niezależnych źródeł prądu.

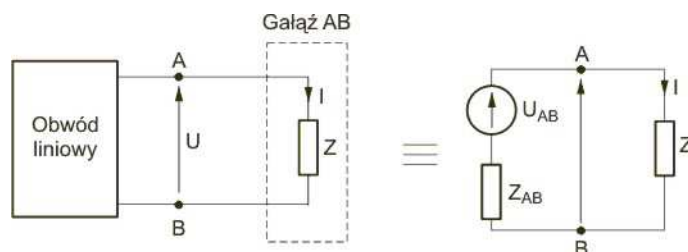
Rys. 4.1 przedstawia sposób transformacji obwodu widzianego z zacisków AB zgodnie z twierdzeniem Thevenina



Rys. 4.1 Ilustracja transformacji obwodowej twierdzenia Thevenina

Korzystając z twierdzenia Thevenina można w prosty sposób wyznaczyć prąd w dowolnej gałęzi obwodu. Rozważmy obwód liniowy z rys. 4.2 z wyszczególnioną gałęzią AB w której

poszukiwany jest prąd I . Prawa strona rysunku przedstawia otrzymany obwód po jego transformacji zgodnie z twierdzeniem Thevenina. Obwód składa się z jednego oczka którego prąd jest poszukiwanym prądem I .



Rys. 4.2. Transformacja obwodu zgodnie z twierdzeniem Thevenina

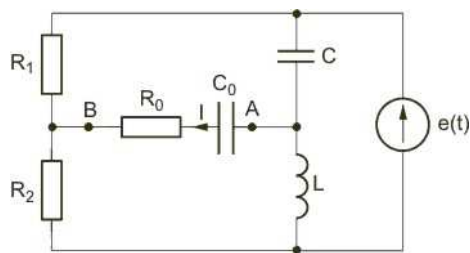
Źródło U_{AB} występujące na rysunku reprezentuje źródło zastępcze obwodu liniowego, określone jako napięcie na zaciskach AB po odłączeniu impedancji Z . Impedancja Z_{AB} jest impedancją zastępczą obwodu liniowego po odłączeniu impedancji Z i wyeliminowaniu wszystkich źródeł niezależnych (zwarcie źródeł napięciowych i rozwarciu źródeł prądowych). Poszukiwana wartość prądu płynącego przez impedancję Z może być określona przy wykorzystaniu prawa napięciowego Kirchhoffa zastosowanego do obwodu uproszczonego. Jego zastosowanie pozwala wyrazić prąd I w następującej postaci

$$I = \frac{U_{AB}}{Z + Z_{AB}} \quad (4.1)$$

Zastosowanie twierdzenia Thevenina w większości przypadków znakomicie upraszcza analizę obwodu. Jest szczególnie użyteczna w przypadkach, w których trzeba wyznaczyć tylko jeden prąd w obwodzie, gdyż można dokonać tego bez konieczności rozwiązywania układu równań algebraicznych lub przy znacznej redukcji liczby tych równań.

Przykład 4.1

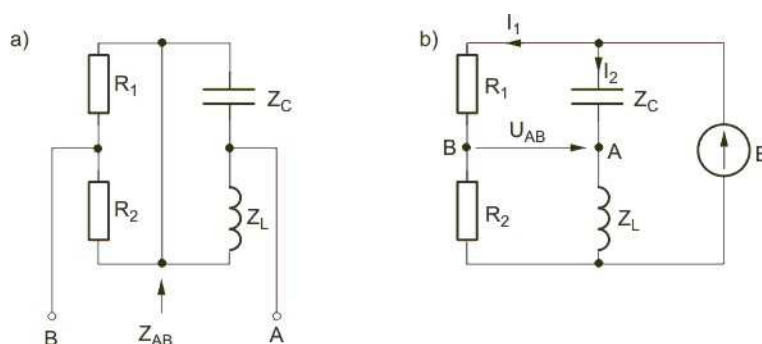
Korzystając z twierdzenia Thevenina wyznaczyć prąd I w gałęzi AB obwodu mostka przedstawionego na rys. 4.3, jeśli $e(t) = 10\sqrt{2} \sin(\omega t) \text{ V}$, $R_0 = 7,5\Omega$, $R_1 = 5\Omega$, $R_2 = 5\Omega$ a reaktancje cewki i kondensatora są równe odpowiednio $X_L = \omega L = 5\Omega$ oraz $X_C = 1/\omega C = 10\Omega$, $X_{C0} = 1/\omega C_0 = 5\Omega$.



Rys. 4.3. Schemat obwodu do przykładu 4.2

Rozwiązanie

Wartości parametrów gałęzi zastępczej Thevenina oblicza się po odłączeniu gałęzi AB, w której obliczany jest prąd. Na rys. 4.4a przedstawiono schemat obwodu do wyznaczenia impedancji zastępczej Thevenina.



Rys. 4.4. Postaci obwodu do wyznaczania a) impedancji zastępczej Thevenina, b) napięcia źródła zastępczego

Łatwo pokazać, że impedancja zastępcza tego obwodu jest równa

$$Z_{AB} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{Z_L Z_C}{Z_L + Z_C} = \frac{5 \cdot 5}{5 + 5} + \frac{j5 \cdot (-j10)}{j5 - j10} = 2,5 + j10$$

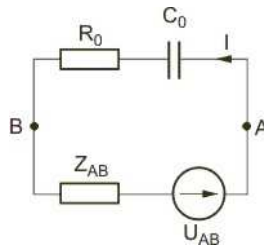
Rys. 4.4b przedstawia obwód do obliczenia wartości źródła zastępczego U_{AB} w schemacie zastępczym Thevenina. Obliczając kolejno prądy

$$I_1 = \frac{E}{R_1 + R_2} = 1$$

$$I_2 = \frac{E}{jX_L - jX_C} = 2j$$

napięcie U_{AB} określa się ze wzoru

$$U_{AB} = R_1 I_1 - Z_C I_2 = -15$$



Rys. 4.5 Schemat obwodu zastępczego wynikającego z twierdzenia Thevenina

Wykorzystując obwód zastępczy Thevenina z rys. 4.5 i prawo napięciowe Kirchhoffa, wartość skuteczną zespoloną prądu I określa się ze wzoru

$$I = \frac{U_{AB}}{Z_{AB} + R_0 - jX_{C_0}} = \frac{-15}{2,5 + j10 + 7,5 - j5} = \frac{-15}{11,18e^{j26}} = 1,34e^{-j154^\circ}$$

Wartości chwilowe prądu $i(t)$ określone są zależnością

$$i(t) = 1,34\sqrt{2} \sin(\omega t - 154^\circ) \text{ A}$$

Zauważmy, że zastosowanie twierdzenia Thevenina umożliwiło rozwiązanie obwodu względem jednego wybranego prądu bez konieczności rozwiązania układu równań algebraicznych opisujących cały obwód.

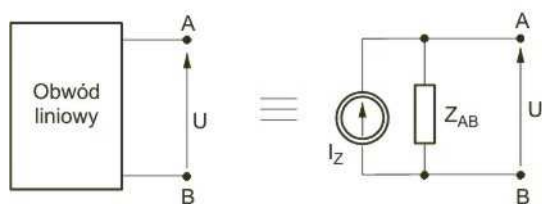
4.3. Metoda oparta na twierdzeniu Nortona

Twierdzenie Nortona pozwala zastąpić złożony obwód elektryczny o dowolnej strukturze i wartościach elementów, przez obwód prosty będący połączeniem równoległym jednej impedancji zastępczej oraz idealnego źródła prądowego.

Twierdzenie Nortona

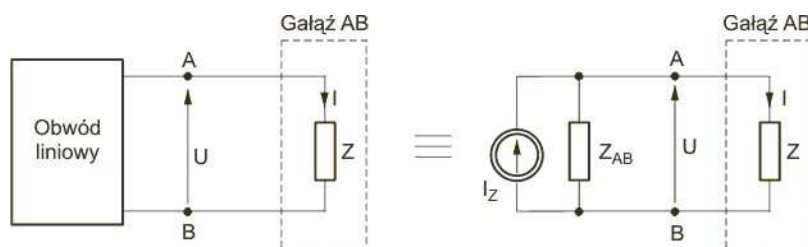
Dowolny aktywny obwód liniowy można od strony wybranych zacisków AB zastąpić obwodem równoważnym, złożonym z równoległego połączenia idealnego źródła prądu i impedancji zastępczej obwodu. Wartość źródła zastępczego oblicza się w obwodzie oryginalnym jako prąd zwarcia gałęzi AB. Impedancja zastępcza widziana z zacisków AB dotyczy obwodu po zwarcu wszystkich źródeł napięcia oraz rozwarciu źródeł prądu i jest identyczna z impedancją zastępczą w twierdzeniu Thevenina.

Rys. 4.6 przedstawia schemat transformacji obwodu zgodnie z twierdzeniem Nortona.



Rys. 4.6 Uproszczenie obwodu zgodnie z twierdzeniem Nortona

Twierdzenie Nortona, podobnie jak Thevenina pozwala obliczyć w prosty sposób prąd lub napięcie jednej wybranej gałęzi obwodu. Rozważmy obwód liniowy z rys. 4.7 z wyszczególnioną gałęzią AB w której poszukiwany jest prąd I . Po prawej stronie rysunku przedstawiono obwód po jego transformacji zgodnie z twierdzeniem Nortona.



Rys. 4.7. Schemat transformacji obwodu według twierdzenia Nortona

Prąd I oraz napięcie U występujące w gałęzi AB obwodu oryginalnego są równe odpowiednio prądowi I oraz napięciu U w tej samej gałęzi obwodu uproszczonego z prawej strony rysunku. Źródło prądowe I_z reprezentuje źródło zastępcze równe prądowi zwarciovemu na zaciskach AB, natomiast impedancja Z_{AB} jest impedancją zastępczą obwodu liniowego po wyłączeniu impedancji Z . Poszukiwane napięcie na impedancji Z oblicza się z prawa prądowego Kirchhoffa, $I_z - U\left(\frac{1}{Z} + \frac{1}{Z_{AB}}\right) = 0$, które pozwala wyrazić napięcie U gałęzi w postaci

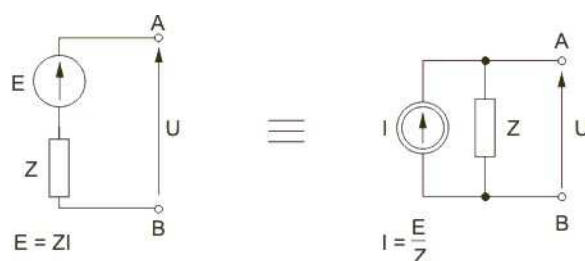
$$U = \frac{I_z}{1/Z + 1/Z_{AB}} \quad (4.2)$$

Znajomość napięcia U pozwala wyznaczyć na podstawie prawa Ohma prąd gałęzi korzystając z zależności $I = U/Z$. Podobnie jak metoda Thevenina, zastosowanie twierdzenia Nortona umożliwia obliczenie prądu i napięcia tylko jednej wyszczególnionej

gałęzi obwodu. Zwykle z punktu widzenia obliczeniowego wygodniejsze jest użycie metody Thevenina.

4.4. Równoważność twierdzenia Thevenina i Nortona

Twierdzenia Thevenina i Nortona pozwalają wyznaczyć uproszczone schematy zastępcze tego samego układu elektrycznego z punktów AB obwodu oryginalnego. Oba schematy uproszczone stanowią więc obwody zastępcze równoważne sobie, co oznacza, że prąd i napięcie w gałęzi AB, która nie uległa zmianie w wyniku transformacji w obu obwodach są takie same. Oznacza to, że gałąź szeregową zawierającą idealne źródło napięcia E i impedancję Z może być bez zmiany prądu w obwodzie zewnętrznym zastąpiona gałęzią równoległą zawierającą idealne źródło prądowe I oraz impedancję Z , jak to zilustrowano na rys. 4.8.



Rys. 4.8. Równoważność obwodów zastępczych Thevenina i Nortona



Dla uzyskania jednakowych wartości napięcia U wzajemne relacje między wartościami źródła prądu i napięcia określa wzór

$$I = \frac{E}{Z} \quad (4.3)$$

przy zamianie gałęzi szeregowej na równoległą oraz

$$E = ZI \quad (4.4)$$

przy zamianie gałęzi równoległej na szeregową. Impedancja Z w obu obwodach zastępczych pozostaje taka sama

4.5. Metoda potencjałów węzłowych

Metoda potencjałów węzłowych, zwana również **metodą węzłową**, jest jedną z najogólniejszych i najczęściej stosowanych metod, pozwalających wyznaczyć prądy wszystkich gałęzi występujących w obwodzie. Jako zmienne przyjmuje się w niej potencjały poszczególnych węzłów obwodu określane względem jednego arbitralnie wybranego węzła uznanego za **węzeł odniesienia** („masy”), którego potencjał przyjmuje się za równy zero. Liczba równań w tej metodzie jest równa liczbie węzłów niezależnych a więc znacznie mniejsza niż w metodzie wykorzystującej bezpośrednio układ równań otrzymanych w wyniku zastosowania praw Kirchhoffa.

Metoda węzłowa wynika bezpośrednio z równań prądowych Kirchhoffa napisanych dla wszystkich węzłów niezależnych w obwodzie. Prąd każdej gałęzi obwodu jest wyrażany za pośrednictwem potencjałów węzłowych, czyli napięć węzłów mierzonych względem węzła odniesienia. Zostało wykazane, że każdy obwód liniowy RLC może być opisany równaniem macierzowym potencjałów węzłowych o postaci

$$\mathbf{Y}\mathbf{V} = \mathbf{I}_{zr} \quad (4.5)$$

Rozwiązanie tego równania może być zapisane przy użyciu inwersji macierzy \mathbf{Y} w postaci

$$\mathbf{V} = \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{I}_{zr} \quad (4.6)$$

Przy założeniu, że obwód ma N węzłów niezależnych macierz \mathbf{Y} jest macierzą o wymiarach $N \times N$. Wektor \mathbf{V} jest zbiorem niezależnych potencjałów węzłowych o wymiarze N a \mathbf{I}_{zr} jest wektorem prądów źródłowych stanowiących wymuszenie. Macierz węzłowa \mathbf{Y} określona jest w postaci

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \dots & Y_{1N} \\ Y_{21} & Y_{22} & \dots & Y_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{N1} & Y_{N2} & \dots & Y_{NN} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

a wektory \mathbf{V} oraz \mathbf{I}_{zr} dane są jak następuje

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \dots \\ V_N \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$$\mathbf{I}_{zr} = \begin{bmatrix} I_{zr1} \\ I_{zr2} \\ \dots \\ I_{zrN} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Elementy Y_{ii} położone na głównej diagonalnej macierzy \mathbf{Y} nazywane są **admitancjami własnymi** węzła i -tego. W przypadku obwodów RLC bez źródeł sterowanych admitancja własna węzła i -tego jest równa sumie admitancji wszystkich gałęzi włączonych w i -tym węźle. Elementy Y_{ij} położone poza główną diagonalną są **admitancjami wzajemnymi** między węzłem i -tym oraz j -tym. Admitancja wzajemna dwu węzłów jest równa admitancji łączącej te węzły wziętej ze znakiem minus. Admitancja wzajemna węzła i -tego oraz j -tego jest taka sama jak węzła j -tego oraz i -tego, tzn. $Y_{ij} = Y_{ji}$. Macierz admitancyjna \mathbf{Y} dla obwodów RLC bez źródeł sterowanych jest więc macierzą symetryczną.

Elementy wektora wymuszeń prądowych \mathbf{I}_{zr} są równe sumie wszystkich prądów źródłowych wpływających do danego węzła, przy czym prąd źródłowy dopływający do węzła bierze się ze znakiem plus a prąd odpływający od węzła ze znakiem minus.

Podsumowując, analiza obwodów w stanie ustalonym metoda węzłową wymaga wykonania następujących etapów:

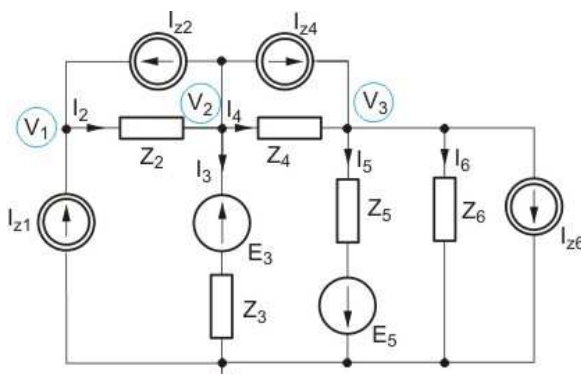
- Opis obwodu równaniem macierzowym potencjałów węzłowych (zmienne poszukiwane: wektor potencjałów \mathbf{V})
- Rozwiązanie układu równań $\mathbf{YV} = \mathbf{I}_{zr}$
- Określenie prądów gałęziowych z prawa napięciowego Kirchhoffa przy znanych potencjałach węzłowych: prąd gałęziowy jest równy iloczynowi admitancji elementu i napięcia na nim wyrażonego poprzez znane potencjały węzłowe.

Należy podkreślić, że metoda potencjałów węzłowych dopuszcza istnienie w obwodzie jedynie źródeł wymuszających typu prądowego. Jeśli w obwodzie występują również źródła napięciowe należy je przekształcić w odpowiednie źródła prądowe wykorzystując do tego celu równoważność Thevenina – Nortona (patrz rys. 4.8).

Sposób formułowania równań węzłowych zilustrujemy na przykładzie obwodu przedstawionego na rys. 4.9.

Przykład 4.2

Korzystając z przedstawionych reguł formułowania równań węzłowych należy napisać równanie potencjałów węzłowych dla obwodu przedstawionego na rys. 4.9.



Rys. 4.9 Schemat obwodu do przykładu 4.2

Rozwiązanie

Obwód zawiera 3 węzły niezależne o potencjałach: V_1 , V_2 oraz V_3 mierzonych względem węzła odniesienia jak to oznaczono na rysunku. Oznaczając admitancje przez Y , gdzie $Y=1/Z$ otrzymuje się opis węzłowy $\mathbf{YV} = \mathbf{I}_{zr}$ obwodu

$$\begin{bmatrix} Y_2 & -Y_2 & 0 \\ -Y_2 & Y_2 + Y_3 + Y_4 & -Y_4 \\ 0 & -Y_4 & Y_4 + Y_5 + Y_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{z1} + I_{z2} \\ E_3 Y_3 - I_{z2} - I_{z4} \\ I_{z4} - I_{z6} - E_5 Y_5 \end{bmatrix}$$

w którym macierz potencjałów węzłowych \mathbf{Y} oraz wektor prądów wymuszających \mathbf{I}_{zr} określone są w postaci

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_2 & -Y_2 & 0 \\ -Y_2 & Y_2 + Y_3 + Y_4 & -Y_4 \\ 0 & -Y_4 & Y_4 + Y_5 + Y_6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I}_{zr} = \begin{bmatrix} I_{z1} + I_{z2} \\ E_3 Y_3 - I_{z2} - I_{z4} \\ I_{z4} - I_{z6} - E_5 Y_5 \end{bmatrix}$$

Na podstawie obliczonych wartości napięć węzłowych obwodu można w prosty sposób korzystając z prawa napięciowego Kirchhoffa dla poszczególnych gałęzi obwodu wyznaczyć prądy gałęziowe. Wystarczy w tym celu zastosować bądź prawo Ohma (jeśli gałąź zawiera jedynie element pasywny) lub równanie napięciowe Kirchhoffa dla gałęzi szeregowej zawierającej źródło napięcia i element pasywny. Przykładowo dla obwodu z rys. 4.7 odpowiednie zależności przyjmują postać

$$I_2 = Y_2(V_1 - V_2)$$

$$I_3 = Y_3(V_2 - E_3)$$

$$I_4 = Y_4(V_2 - V_3)$$

$$I_5 = Y_5(V_3 + E_5)$$

$$I_6 = Y_6 V_3$$

Należy podkreślić, że metoda potencjałów węzłowych wymaga rozwiązania układu N równań, gdzie N oznacza liczbę węzłów niezależnych. Zwykle liczba węzłów jest dużo mniejsza niż liczba gałęzi obwodu, stąd metoda potencjałów węzłowych jest znacznie prostsza niż metoda klasyczna wykorzystująca bezpośrednio prawa Kirchhoffa dla całego obwodu.

Reguły tworzenia opisu węzłowego przedstawione powyżej zakładały istnienie jedynie elementów pasywnych RLC oraz źródeł wymuszających typu prądowego. Przy takim założeniu są one bardzo proste i łatwe w stosowaniu.

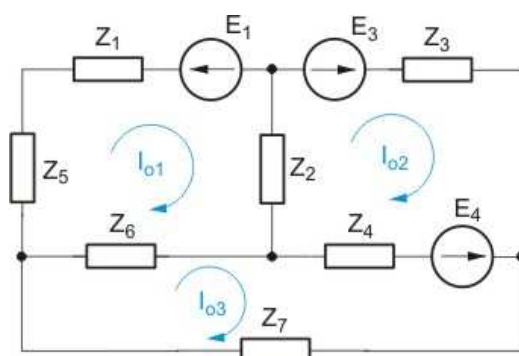
W przypadku wystąpienia źródeł sterowanych w obwodzie trudno jest podać jednoznaczną formułę ogólną pozwalającą określić bezpośrednio zarówno macierz admitancyjną jak i wektor wymuszeń prądowych. Tworząc opis admitancyjny w takim przypadku można w pierwszym kroku zaliczyć źródła sterowane do źródeł wymuszających i stworzyć opis admitancyjny identycznie jak dla obwodu pasywnego. W drugim kroku wszystkie źródła sterowane należy wyrazić poprzez potencjały węzłowe przerzucając elementy wymuszeń uzależnione od tych potencjałów na lewą stronę równań (do macierzy węzłowej). Macierz admitancyjna \mathbf{Y} wynika wówczas z uporządkowania powstałego macierzowego układu równań. W efekcie powstaje standardowy opis admitancyjny obwodu, który nie musi już teraz spełniać warunku symetrii macierzy \mathbf{Y} .

Należy zwrócić uwagę na uproszczenia wynikające z istnienia w obwodzie idealnego źródła napięcia. Źródło takie ustala potencjał określonego węzła (gdy jest włączone względem

węzła odniesienia) lub uzależnia potencjał jednego węzła względem drugiego (gdy jest włączone między dwoma węzłami niezależnymi). W obu przypadkach prowadzi to do redukcji liczby równań opisujących obwód.

4.6. Metoda prądów oczkowych

W metodzie prądów oczkowych, zwanej również **metodą oczkową**, wprowadza się prądy oczkowe jako zmienne, czyli prądy przypisane niezależnym oczkom występującym w obwodzie. Przykładowy wybór oczek niezależnych i oznaczenie prądów oczkowych obwodu przedstawiono na rys. 4.10 (należy zaznaczyć, że jest to jeden z możliwych wyborów oczek).



Rys. 4.10. Przykład wyboru oczek niezależnych w obwodzie

Oznaczmy w ogólności wektor prądów oczkowych w postaci

$$\mathbf{I}_o = \begin{bmatrix} I_{o1} \\ I_{o2} \\ \dots \\ I_{oN} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

w której I_{ok} oznacza prąd oczkowy k -tego oczka. Dla uzyskania opisu oczkowego wykorzystuje się prawo napięciowe Kirchhoffa napisane dla wszystkich oczek niezależnych obwodu. Następnie wyraża się wszystkie prądy gałęziowe poprzez prądy oczkowe (prąd gałęziowy jest równy sumie lub różnicy prądów oczkowych przeprowadzonych przez daną gałąź) i otrzymuje opis obwodu w postaci macierzowego układu równań oczkowych

$$\mathbf{Z}\mathbf{I}_o = \mathbf{E} \quad (4.10)$$

gdzie macierz oczkowa \mathbf{Z} oraz wektor napięć wymuszających \mathbf{E} przyjmują postać

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1N} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{N1} & Z_{N2} & \dots & Z_{NN} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

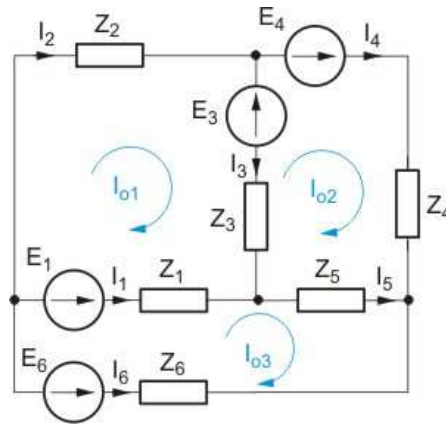
$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{o1} \\ E_{o2} \\ \dots \\ E_{oN} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Elementy Z_{ii} położone na głównej diagonalnej macierzy \mathbf{Z} nazywamy **impedancjami własnymi** oczka i -tego. Przy założeniu, że wszystkie prądy oczkowe mają identyczny zwrot, dla obwodów RLC bez źródeł sterowanych impedancja własna oczka i -tego jest równa sumie impedancji wszystkich gałęzi występujących w oczku. Elementy Z_{ij} położone poza główną diagonalną są **impedancjami wzajemnymi** między oczkiem i -tym oraz j -tym. Impedancja wzajemna dwu oczek przy identycznym zwrocie wszystkich prądów oczkowych jest równa impedancji wspólnej dla obu oczek wziętej ze znakiem minus. Impedancja wzajemna oczka i -tego oraz j -tego jest taka sama jak oczka j -tego oraz i -tego, tzn. $Z_{ij} = Z_{ji}$. Macierz \mathbf{Z} jest więc macierzą symetryczną.

Element k -ty wektora wymuszeń napięciowych \mathbf{E} jest równy sumie wszystkich napięć źródłowych występujących w k -tym oczku. Przy założonej orientacji oczka napięcie źródłowe dodaje się ze znakiem plus jeśli jego zwrot jest identyczny z tą orientacją a ze znakiem minus jeśli ten zwrot jest przeciwny. Sposób tworzenia opisu oczkowego zilustrujemy na przykładzie obwodu z rys. 4.11.

Przykład 4.3

Dla obwodu przedstawionego na rys. 4.11 napisać równanie prądów oczkowych przy założeniu układu oczek niezależnych jak na rysunku.



Rys. 4.11 Schemat obwodu do przykładu 4.3

Rozwiązanie

Obwód zawiera 3 oczka niezależne, stąd wymiar macierzy oczkowej jest równy 3, podobnie jak liczba nieznanymi składników wektora prądów oczkowych oraz liczba znanych składników wektora napięć wymuszających. Korzystając z podanej wcześniej reguły tworzenia opisu oczkowego otrzymuje się

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 + Z_3 & -Z_3 & -Z_1 \\ -Z_3 & Z_3 + Z_4 + Z_5 & -Z_5 \\ -Z_1 & -Z_5 & Z_1 + Z_5 + Z_6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} -E_1 - E_3 \\ E_3 + E_4 \\ E_1 - E_6 \end{bmatrix}$$

Biorąc pod uwagę że obwód zawiera trzy nieznanne prądy oczkowe tworzące wektor prądów $\mathbf{I}_o = [I_{o1} \quad I_{o2} \quad I_{o3}]^T$, równanie oczkowe $\mathbf{Z}\mathbf{I}_o = \mathbf{E}$ stanowi zbiór trzech równań liniowych. Rozwiązanie tego układu równań pozwala określić te zmienne, a w konsekwencji również. wszystkie prądy gałęziowe obwodu. Mianowicie

$$I_1 = I_{o3} - I_{o1}$$

$$I_2 = I_{o1}$$

$$I_3 = I_{o1} - I_{o2}$$

$$I_4 = I_{o2}$$

$$I_5 = I_{o3} - I_{o2}$$

$$I_6 = -I_{o3}$$

Metoda prądów oczkowych wymaga rozwiązania układu N równań, gdzie N oznacza liczbę oczek niezależnych. Podobnie jak w metodzie węzłowej liczba oczek jest zwykle dużo mniejsza niż liczba gałęzi obwodu, stąd metoda prądów oczkowych jest dużo bardziej efektywna niż metoda klasyczna wykorzystująca bezpośrednio prawa Kirchhoffa.

4.7. Zasada superpozycji

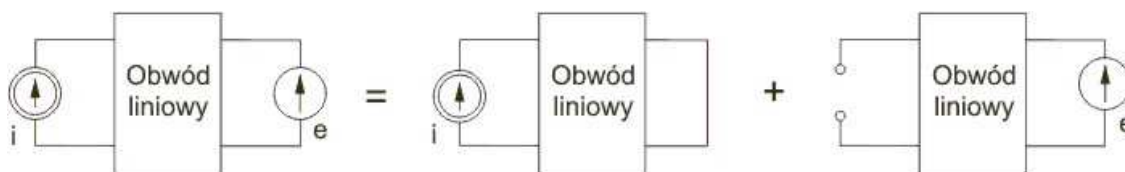
Omówione wcześniej metody analizy symbolicznej stanowią dobry i skuteczny sposób rozwiązania problemu przy istnieniu w obwodzie źródeł sinusoidalnych o tej samej częstotliwości, gdyż dla każdego źródła elementy reaktancyjne LC przedstawiają sobą te same wartości reaktancji. Istotna trudność występuje dopiero przy istnieniu w obwodzie wielu źródeł o różnych częstotliwościach. W takim przypadku nie istnieje pojęcie impedancji wspólnej dla każdego źródła, co uniemożliwia zastosowanie metody symbolicznej. Jedynym rozwiązaniem pozostaje wtedy zastosowanie **zasady superpozycji**. Obowiązuje ona **tylko** dla obwodów liniowych. Jej treść jest następująca.

Zasada superpozycji

Odpowiedź czasowa obwodu elektrycznego liniowego o wielu wymuszeniach przy warunkach początkowych zerowych jest równa sumie odpowiedzi czasowych na każde wymuszenie z osobna.

Tak ogólnie sformułowana zasada obowiązuje zarówno w stanie ustalonym jak i nieustalonym obwodu. W przypadku analizy stanów ustalonych jej zastosowanie w analizie obwodów polega na rozbiciu danego obwodu o wielu wymuszeniach na wiele obwodów zawierających po jednym wymuszeniu, rozwiązaniu każdego z nich oddzielnie a następnie zsumowaniu odpowiedzi czasowych każdego obwodu. Należy pamiętać przy tym o zasadzie, że eliminowane źródła są zastępowane zwarciami (jeśli źródło jest napięciowe) lub rozwarciem (gdy źródło jest prądowe).

Ilustrację sposobu stosowania zasady superpozycji w analizie obwodów liniowych przedstawiono na rys. 4.12.



Rys. 4.12. Ilustracja zasady superpozycji w obwodach liniowych



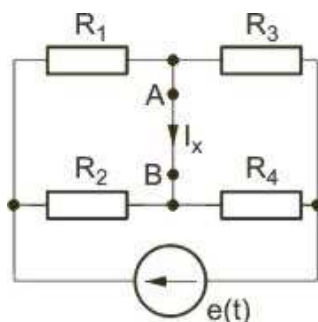
Należy podkreślić, że zgodnie z zasadą superpozycji **sumowanie odpowiedzi pochodzących od różnych wymuszeń może odbywać się wyłącznie w dziedzinie czasu**. Sumowanie wartości zespolonych od poszczególnych wymuszeń byłoby poważnym błędem, gdyż sugerowałoby istnienie rozwiązania obwodu zawierającego tylko jedną harmoniczną o nieokreślonej częstotliwości.

Ćwiczenia

Ćwiczenie 4.1

Stosując metodę Thevenina obliczyć prąd w gałęzi AB obwodu przedstawionego na rys.

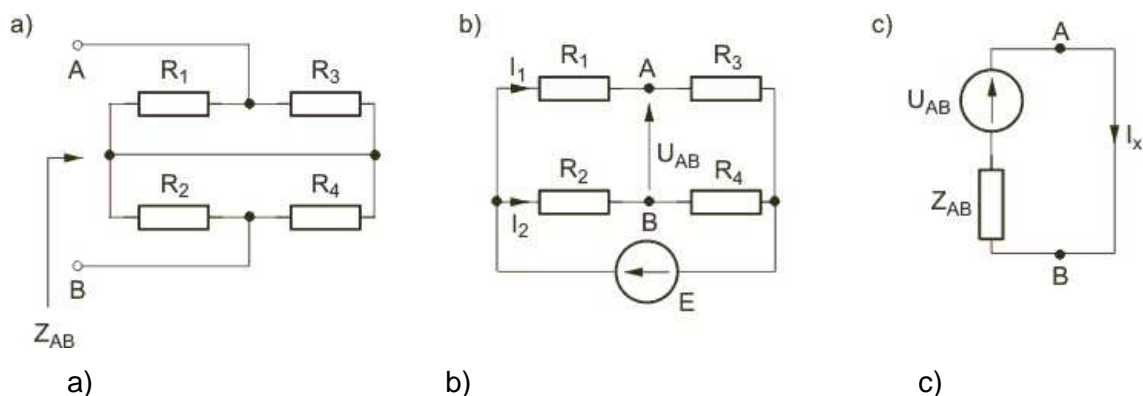
4.13. Dane liczbowe elementów: $R_1 = 4\Omega$, $R_2 = 8\Omega$, $R_3 = 2\Omega$, $R_4 = 2\Omega$, $e(t) = 30\sqrt{2} \sin \omega t$ V.



Rys. 4.13 Schemat obwodu do ćwiczenia 4.1

Rozwiązanie

Impedancja z zacisków AB obwodu (rys. 4.14a) jest równa



Rys 4.14 Schematy obwodu do obliczania: a) impedancji Z_{AB} , b) napięcia U_{AB} , c) prądu I_x

$$Z_{AB} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} = 2,93$$

Prądy w obwodzie z rys. 4.14b:

$$I_1 = \frac{E}{R_1 + R_3} = \frac{30}{6} = 5$$

$$I_2 = \frac{E}{R_2 + R_4} = \frac{30}{10} = 3$$

Napięcie U_{AB}

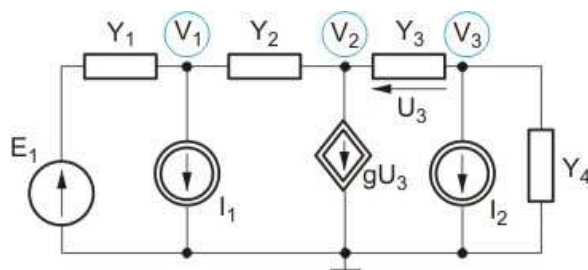
$$U_{AB} = R_2 I_2 - R_1 I_1 = 4$$

Poszukiwany prąd I_x z obwodu zastępczego Thevenina (rys. 4.14c)

$$I_x = \frac{U_{AB}}{Z_{AB}} = 1,36 \text{ A}$$

Ćwiczenie 4.2

Napisać równanie potencjałów węzłowych dla obwodu przedstawionego na rys. 4.15



Rys. 4.15 Schemat obwodu do ćwiczenia 4.2

Rozwiązanie

W pierwszym kroku źródła sterowane traktuje się jak źródła niezależne, stąd równanie opisujące obwód przyjmie postać

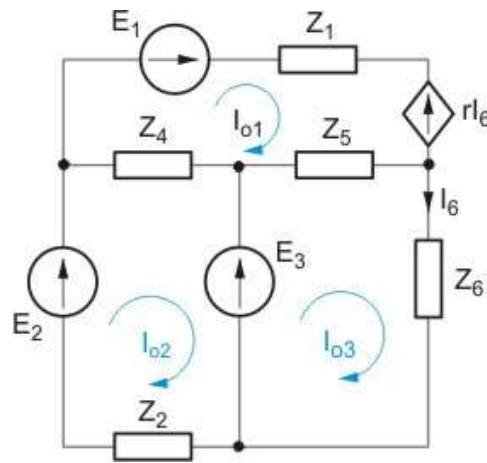
$$\begin{bmatrix} Y_1 + Y_2 & -Y_2 & 0 \\ -Y_2 & Y_2 + Y_3 & -Y_3 \\ 0 & -Y_3 & Y_3 + Y_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 E_1 - I_1 \\ -g(V_2 - V_3) \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

Przemieszczając wyrażenie opisujące źródło sterowane na lewą stronę równania i porządkując otrzymany układ równań otrzymujemy opis węzłowy w postaci ostatecznej

$$\begin{bmatrix} Y_1 + Y_2 & -Y_2 & 0 \\ -Y_2 & Y_2 + Y_3 + g & -Y_3 - g \\ 0 & -Y_3 & Y_3 + Y_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 E_1 - I_1 \\ 0 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

Ćwiczenie 4.3

Napisać macierzowe równanie oczkowe dla obwodu przedstawionego na rys. 4.16



Rys. 4.16 Schemat obwodu do ćwiczenia 4.3

Rozwiązanie

W pierwszym kroku z prawa napięciowego Kirchhoffa zastosowanego do trzech oczek zaznaczonych na rysunku po wyrażeniu prądów gałęziowych poprzez prądy oczkowe otrzymujemy równanie oczkowe o postaci

$$\begin{bmatrix} Z_1 + Z_4 + Z_5 & -Z_4 & -Z_5 \\ -Z_4 & Z_2 + Z_4 & 0 \\ -Z_5 & 0 & Z_5 + Z_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{o1} \\ I_{o2} \\ I_{o3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 - rI_{o3} \\ E_2 - E_3 \\ E_3 \end{bmatrix}$$

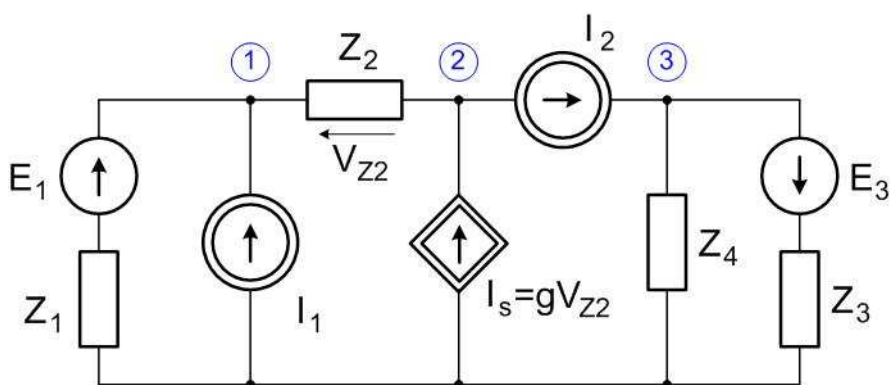
Przemieszczając czynnik rl_{o3} odpowiadający źródłu sterowanemu na lewą stronę równania otrzymuje się ostateczną postać opisu oczkowego

$$\begin{bmatrix} Z_1 + Z_4 + Z_5 & -Z_4 & -Z_5 + r \\ -Z_4 & Z_2 + Z_4 & 0 \\ -Z_5 & 0 & Z_5 + Z_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{o1} \\ I_{o2} \\ I_{o3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 - E_3 \\ E_3 \end{bmatrix}$$

Zadania sprawdzające

Zadanie 4.1

Wyznaczyć opis admitancyjny obwodu przedstawionego na rys. 4.17.



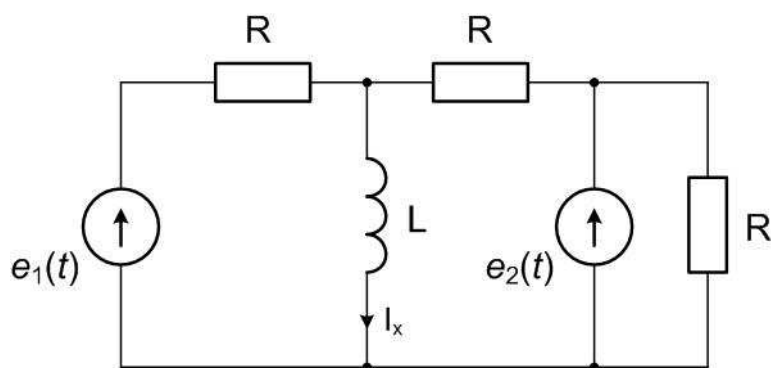
Rys. 4.17. Schemat obwodu do zadania 4.1

Rozwiązanie

$$\begin{bmatrix} Y_1 + Y_2 & -Y_2 & 0 \\ -Y_2 - g & Y_2 + g & 0 \\ 0 & 0 & Y_3 + Y_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 + E_1 Y_1 \\ -I_2 \\ I_2 - E_3 Y_3 \end{bmatrix}$$

Zadanie 4.2

Wyznaczyć prąd I_x w obwodzie przedstawionym na rys. 4.18 metodą Thevenina. Przyjąć następujące wartości parametrów: $R=10\Omega$, $X_L=10\Omega$, $e_1(t) = 10\sqrt{2}\sin(t + 90^\circ)$, $e_2(t) = 20\sqrt{2}\sin(t - 90^\circ)V$.



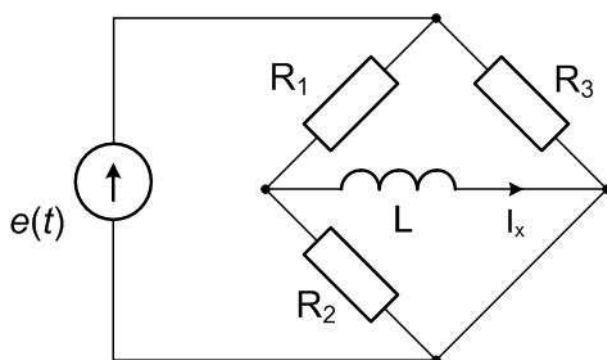
Rys. 4.18 Schemat obwodu do zadania 4.2

Rozwiązanie

$$I_x = -0.4 - j0.2 = 0.447 e^{-j153.4^\circ}$$

Zadanie 4.3

Wyznaczyć prąd I_x w obwodzie przedstawionym na rys. 4.19 metodą Thevenina. Przyjąć następujące wartości parametrów: $R_1=10\Omega$, $R_2=20\Omega$, $R_3=20\Omega$, $X_L=5\Omega$, $e(t) = 30\sqrt{2}\sin(t - 90^\circ)\text{V}$.



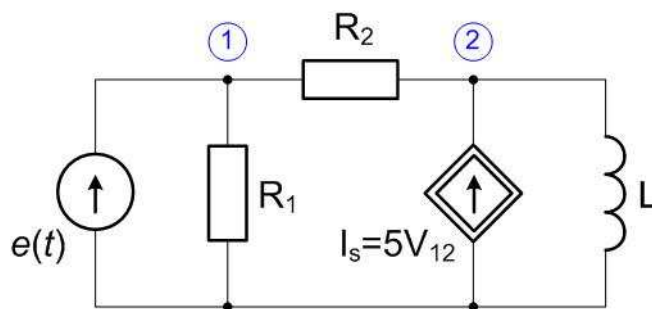
Rys. 4.19 Schemat obwodu do zadania 4.3

Rozwiązanie

$$I_x = -1.44 - j1.92\text{A}$$

Zadanie 4.4

Sformułować równania admitancyjne metodą potencjałów węzłowych i wyznaczyć potencjały w węzłach obwodu przedstawionego na rys. 4.20. Przyjąć następujące wartości parametrów: $R_1=2\Omega$, $R_2=4\Omega$, $L=2\text{H}$, $\omega=1$, $e(t) = 16\sqrt{2}\sin(\omega t)\text{V}$.



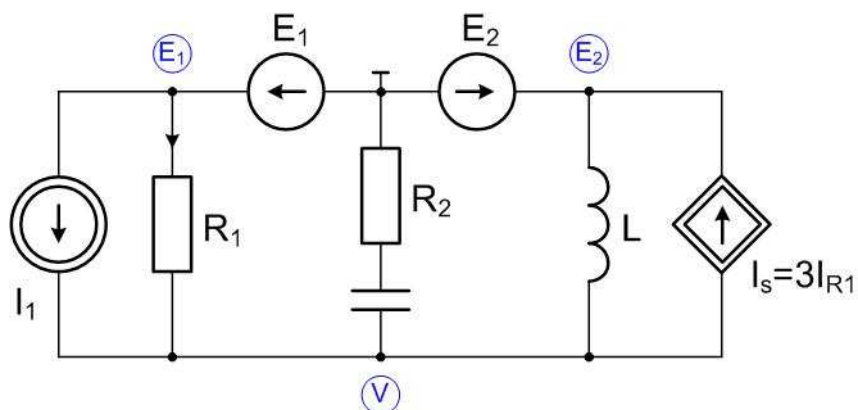
Rys. 4.20. Schemat obwodu do zadania 4.4

Rozwiązanie

$$V_1 = 16, V_2 = 15,85 + j1,5$$

Zadanie 4.5

Sformułować równanie węzłowe dla obwodu przedstawionego na rys. 4.21.



Rys. 4.21. Schemat obwodu do zadania 4.5

Rozwiązanie

$$\left(\frac{1}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}} + \frac{1}{j\omega L} - \frac{2}{R_1} \right) V = I_1 - \frac{2E_1}{R_1} + \frac{E_2}{j\omega L}$$

Test do wykładu 4

- 1) Gałąź obwodu złożona jest z szeregowo połączonym idealnym źródłem napięcia $E=10V$ i rezystancji $R=20\Omega$. Ile wynoszą parametry równoważnego mu połączenia równoległego źródła prądu i rezystancji?
 - xa) $I=0,5A$ $R=20\Omega$
 - b) $I=200A$ $R=20\Omega$
 - c) $I=2A$ $R=2\Omega$
 - d) nie można określić

- 2) Gałąź złożona z równolegle połączonego źródła prądowego $I=2A$ i rezystora $R=5\Omega$ została zwarta. Ile wynosi prąd zwarcia?
- 0
 - 2A
 - 10A
 - 1A
- 3) W obwodzie RLC zawierającym 5 węzłów występuje jedno idealne źródło napięcia łączące węzeł drugi z węzłem odniesienia (masą). Jaki jest rozmiar macierzy admitancyjnej obwodu?
- 5×5
 - 5×4
 - 4×4
 - 3×3
- 4) W obwodzie o 2 węzłach niezależnych połączonych cewką o reaktancji $X_L=0,5\Omega$ suma admitancji w węzłach wynosi: w węźle pierwszym $1+j2$ a w drugim $5-j1$? Która z postaci macierzy admitancyjnych jest właściwa?
- $\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1+j2 & j2 \\ -j2 & 5-j1 \end{bmatrix}$
 - $\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1+j2 & j2 \\ j2 & 5-j1 \end{bmatrix}$
 - $\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 & j2 \\ j2 & 5+j1 \end{bmatrix}$
 - $\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1+j2 & -j0,5 \\ -j0,5 & 5-j1 \end{bmatrix}$
- 5) Trzy elementy $R=1\Omega$, $C=0.5F$ i $L=0.5H$ tworzą obwód o 2 węzłach niezależnych? Zakładając pulsację zasilania równą $\omega=1$ otrzymano macierz admitancyjną równą $\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1+j0,5 & -1 \\ -1 & 1-2j \end{bmatrix}$. Określić jaka jest topologia tego obwodu.
- C między węzłem 1 i masą, R między węzłem 1 i 2, L między węzłem 2 i masą
 - L między węzłem 1 i masą, R między węzłem 1 i 2, C między węzłem 2 i masą
 - R między węzłem 1 i masą, L między węzłem 1 i 2, C między węzłem 2 i masą
 - R między węzłem 1 i masą, C między węzłem 1 i 2, L między węzłem 2 i masą
- 6) Obwód opisany jest równaniem oczkowym o postaci $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{o1} \\ I_{o1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 5 \end{bmatrix}$. Rozwiązaniem obwodu jest (wyniki w amperach):
- $I_{o1}=15 \quad I_{o2}=-10$
 - $I_{o1}=15 \quad I_{o2}=10$
 - $I_{o1}=10 \quad I_{o2}=10$
 - $I_{o1}=15 \quad I_{o2}=15$
- 7) Zastępczy obwód Thevenina złożony jest z impedancji $Z_{AB}=2+j2$ i źródła napięciowego $U_{AB}=20e^{j\pi/4}$? Ile wynosi prąd zwarcia takiego obwodu (wyniki w amperach)?
- $I_z = 5\sqrt{2}e^{j90^\circ}$
 - $I_z = 5\sqrt{2}$

c) $I_z = 40\sqrt{2}e^{j90^\circ}$

d) $I_z = 5\sqrt{2}e^{j45^\circ}$

8) Zastępczy obwód Nortona złożony z admitancji $Y_{AB}=10+j2$ i źródła prądowego $I=2$ obciążono cewką o reaktancji $X_L=0,5\Omega$. Ile wynosi napięcie na zaciskach takiego obwodu (wyniki w voltach)?

a) $U=20+j4$

xb) $U=20$

c) $U=0,2$

d) $U=20+j5$

9) Obwód szeregowy RLC o $R=1\Omega$, $C=0.1F$ i $L=1H$ zasilono napięciem $e(t)=10+20\sin(t+45^\circ)+15\sin(2t-45^\circ)$. Ile wynosi impedancja Z tego obwodu dla poszczególnych harmonicznych (wyniki w omach)?

xa) $Z(0)=1$ $Z(1)=1-j9$ $Z(2)=1-j1/3$

b) $Z(0)=1$ $Z(1)=1-j9$ $Z(2)=1-j3$

c) $Z(0)=1$ $Z(1)=10$ $Z(2)=8$

d) $Z(0)=1$ $Z(1)=1-j11$ $Z(2)=1+j1/3$

10) Obwód szeregowy RL o $R=1\Omega$ i $L=1H$ zasilany jest ze źródła napięciowego $e(t)=2+10\sin(t+60^\circ)$? Jaka jest postać czasowa prądu w obwodzie (wyniki w amperach)?

a) $i(t) = 2 - 5\sqrt{2} \sin(t + 15^\circ)$

xb) $i(t) = 2 + 5\sqrt{2} \sin(t + 15^\circ)$

c) $i(t) = 7\sqrt{2} \sin(t + 15^\circ)$

d) $i(t) = 7$