9.3 Twierdzenie Kroneckera-Capelliego

Do rozwiązywania układów równań liniowych $m \times n$ tzn. układów postaci

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{9.2}$$

wykorzystujemy pojęcie rzędu macierzy. Analizę rozwiązalności takiego układu zaczynamy od porównania rzędów *macierzy głównej układu* A oraz *rozszerzonej* $A|B$ która powstaje z macierzy A przez formalne dopisanie kolumny wyrazów wolnych. Dokładniej

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad A|B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Kwestię istnienia oraz ilości rozwiązań roztrzyga następujące twierdzenie

Twierdzenie 9.4 (Kroneckera-Capelliego)**.** *Układ m równań liniowych z n niewiadomymi posiada rozwiązanie wtedy i tylko wtedy gdy $R(A) = R(A|B)$.*

Ponadto

- *jeśli $R(A) = R(A|B) = n$ to rozwiązanie jest dokładnie jedno*
- *jeśli $R(A) = R(A|B) = r < n$ to rozwiązań jest nieskończenie wiele zależnych od $(n - r)$ parametrów.*
- *jeśli $R(A) \neq R(A|B)$ to układ jest sprzeczny.*

Aby określić rodzaj układu obliczmy rzędy macierzy A oraz $A|B$ następnie porównujemy tak otrzymane rzędy ze sobą oraz z ilością niewiadomych.

Przykład 9.5. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 2x + 3y = -1 \\ 5x + 3y = 2 \end{cases}$$

Rozwiązanie. Wypisujemy macierze główną oraz rozszerzoną

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \qquad A|B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Z macierzy wybieramy podmacierz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

której wyznacznik jest różny od 0 i wynosi -1. Oznacza to, że $R(A) = 2$. następnie obliczamy $|A|B|$ (tutaj $A|B$ jest macierzą kwadratową, w ogólności nie musi tak być). Mamy

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 18 + 6 - 10 - 15 + 9 - 8 = 0$$

macierz $A|B$ nie może być więc rzędu 3. Ostatecznie $R(A) = R(A|B) = 2$. Ponieważ 2 jest równe ilości niewiadomych to mamy dokładnie jedno rozwiązanie.

Przy badaniu rzędu macierzy wybraliśmy podmacierz składającą się ze współczynników przy niewiadomych w pierwszym i trzecim równaniu. Aby rozwiązać układ skreślamy równanie którego współczynniki występują poza wybraną podmacierzą tzn. równanie drugie. Otrzymujemy układ Cramera

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 5x + 3y = 2 \end{cases}$$

Obliczamy $W = -1$ oraz $W_1 = -1$ i $W_2 = 1$. Stąd $x = W_1/W = 1$, $y = W_2/W = -1$. Para $(1, -1)$ jest również rozwiązaniem równania drugiego. □

Przykład 9.6. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ x - \ \ y + 2z = 0 \end{cases}$$

Rozwiązanie. Jest to układ dwóch równań z trzema niewiadomymi ($m = 2, n = 3$). Macierz główna i rozszerzona mają postać

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad A|B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Obydwie macierze mają po dwa wiersze. Oznacza to, że $R(A) \leq 2$, $R(A|B) \leq 2$. Ponadto macierz

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

będąca podmacierzą macierzy A ma wyznacznik równy -5 tzn. różny od 0. Stąd $R(A) = R(A|B) = 2$. Układ posiada zatem rozwiązanie, ponadto rozwiązań jest nieskończenie wiele zależnych od $3 - 2 = 1$ parametru. Elementy wybranej podmacierzy są współczynnikami przy niewiadomych x, y. Niewiadomą której współczynnik znajduje się poza wybraną podmacierzą traktujemy jako parametr tzn.

$$z = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Porządkując układ otrzymujemy

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 - t \\ x - y = -2t \end{cases}$$

Powyższy układ jest układem Cramera o wyznaczniku

$$W = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5$$

Obliczamy wyznaczniki W_1, W_2

$$W_1 = \begin{vmatrix} 1-t & 3 \\ -2t & -1 \end{vmatrix} = -1 + t + 6t = 7t - 1$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1-t \\ 1 & -2t \end{vmatrix} = -4t - 1 + t = -3t - 1$$

Stąd

$$x = \frac{W_1}{W} = \frac{7t-1}{-5} = -\frac{7}{5}t + \frac{1}{5} \qquad y = \frac{W_2}{W} = \frac{-3t-1}{-5} = \frac{3}{5}t + \frac{1}{5}$$

Układ posiada nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od parametru t.

$$\begin{cases} x = -\frac{7}{5}t + \frac{1}{5} \\ y = \frac{3}{5}t + \frac{1}{5} \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

□

Układy jednorodne

Układ równań liniowych nazywamy *jednorodnym* jeśli wyrazy wolne układu są zerowe. Układ jednorodny w postaci macierzowej zapisujemy następująco

$$Ax = 0$$

gdzie 0 jest macierzą zerową. Macierzą rozszerzoną układu jednorodnego jest macierz $A|0$. W przypadku układów jednorodnych rząd macierzy rozszerzonej jest zawsze równy rzędowi macierzy głównej. Oznacza to, że układ jednorodny posiada zawsze rozwiązanie. W przypadku gdy rząd jest równy ilości niewiadomych mamy jedno rozwiązanie. Rozwiązaniem tym jest rozwiązanie zerowe tzn. $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. Jeżeli A jest macierzą kwadratową oraz $\det A = 0$, to układ jednorodny posiada rozwiązania niezerowe, jeżeli natomiast $\det A \neq 0$, zera to układ jednorodny posiada tylko rozwiązanie zerowe.

Przykład 9.7. Rozwiązać układ jednorodny

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ 3x + y - z = 0 \\ 8x + y + z = 0 \end{cases}$$

Rozwiązanie. Macierzą główną układu jest

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 8 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Łatwo sprawdzić, że $|A| = 0$. Istotnie

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 9 + 8 - 24 + 2 + 3 = 24 - 24 = 0$$

Oznacza to, że $R(A) < 3$. Biorąc podmacierz

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

macierzy A sprawdzamy, że

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5$$

Stąd $R(A) = 2$. Układ jest zatem nieoznaczony gdyż $r = 2 < 3 = n$. Za parametr możemy przyjąć niewiadomą której współczynniki nie występują w macierzy

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

tzn. $z = t, t \in \mathbb{R}$. Skreślamy trzecie równanie skąd mamy

$$\begin{cases} 2x - y = -3t \\ 3x + y = \quad t \end{cases}$$

Jest to układ Cramera z parametrem t. Obliczamy wyznaczniki $W = |A|$, W_1 , W_2. Mamy

$$\begin{vmatrix} -3t & -1 \\ t & 1 \end{vmatrix} = -3t + t = -2t \qquad \begin{vmatrix} 2 & -3t \\ 3 & t \end{vmatrix} = 2t - (-9t) = 2t + 9t = 11t$$

Stąd

$$x = \frac{W_1}{W} = \frac{-2t}{5} \qquad y = \frac{W_2}{W} = \frac{11t}{5}$$

Rozwiązaniem jest więc

$$\begin{cases} x = -\frac{2}{5}t \\ y = \frac{11}{5}t \\ z = t \qquad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$