

metoda potencjałów węzłowych

### 1. Identyfikacja problemu = po czym poznać, że zadanie trzeba rozwiązać tą metodą:

- metoda służy do wyliczania napięć i prądów w obwodzie. Jest to metoda macierzowa, rozmiar macierzy zależy od liczby węzłów, zatem dla ich dużej liczby policzenie macierzy odwrotnej będzie skomplikowane
- metoda jest szczególnie przydatna w zadaniach, gdzie jest dużo źródeł napięć/prądów i nie można kombinować z wyznaczaniem impedancji zastępczych
- **najczęściej jest wykorzystywana przy wyznaczaniu napięć w zadaniach na stan nieustalony przy wymuszeniu prądem stałym**

### Rozwiązanie

### 2. Przekształcenia symboliczne

(jak w zadaniach na rozptyw prądów, bilans mocy, impedancję zast., metodę Thevenina):

- źródła napięć i prądów zmieniane z wartości chwilowych (funkcji czasu) na wartości skuteczne zespolone:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \Psi_u) \quad \rightarrow \quad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} e^{j\Psi_u} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} (\cos(\Psi_u) + j \sin(\Psi_u))$$

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \Psi_i) \quad \rightarrow \quad I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\Psi_i} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} (\cos(\Psi_i) + j \sin(\Psi_i))$$

- impedancje cewek i kondensatorów

cewka:

$$Z_L = j\omega L = jX_L$$

kondensator:

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -jX_C$$

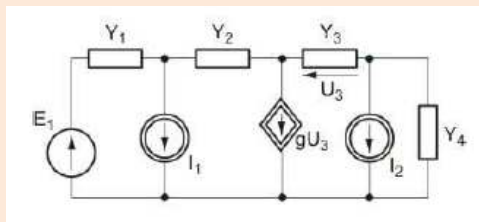
### 3. Analiza węzłów

1. należy dokładnie przeanalizować liczbę węzłów:
  1. "scalić" węzły połączone tylko "drucikiem" (gałęzią bez żadnych elementów)
  2. w razie potrzeby - gdy takich "scaleń" jest dużo lub dotyczą kilku węzłów - należy przerysować obwód już po wszystkich "scaleniach"
  3. po "scaleniach" węzłów należy określić poszczególne gałęzie oraz ich podłączenie do węzłów
2. Spośród węzłów wybieramy **węzeł odniesienia** i oznaczamy go na schemacie obwodu symbolem uziemienia:



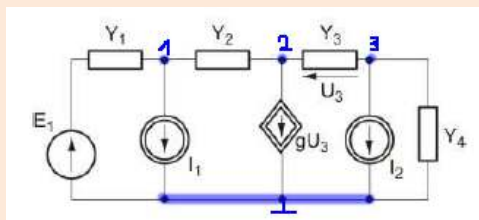
3. Resztę węzłów numerujemy według uznania :D
4. Wyznaczamy admitancje wszystkich elementów. Admitancja (Y) to odwrotność impedancji wyliczonej w etapie poprzednim (dla każdego elementu):
$$Y = \frac{1}{Z}$$
oczywiście **źródła** prądu i napięcia nie mają admitancji
5. wyznaczamy prądy płynące w gałęziach - ale **tylko** w tych gałęziach, w których **są źródła prądu lub napięcia**

### Przykład

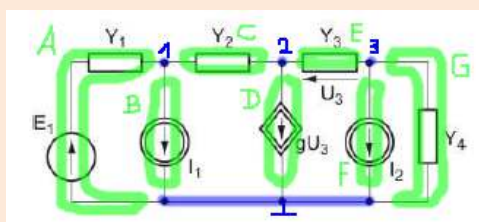


na rysunku już są wyznaczone admitancje oraz wielkości symboliczne zespolone napięć i prądów źródeł

Analizujemy węzły - na poniższym rysunku na niebiesko zaznaczone jest scalanie węzłów, które połączone były tylko drucikiem. Dodatkowo wybrany jest węzeł odniesienia oraz reszta jest ponumerowana.



Ważne jest też dokładne rozdzielanie gałęzi - poniżej wszystkie gałęzie pozaznaczane na zielono i oznaczone literkami:



Wyznaczamy prądy w gałęziach ze źródłami prądu/napięcia:

gałąź A:

$$I_A = E_1 Y_1$$

gałąź B:

$$I_B = I_1$$

gałąź C - brak źródła prądu/napięcia

gałąź D:

$$I_D = gU_3$$

gałąź E - brak źródła prądu/napięcia

gałąź F:

$$I_F = I_2$$

gałąź G - brak źródła prądu/napięcia

## 4. Macierz węzłowa

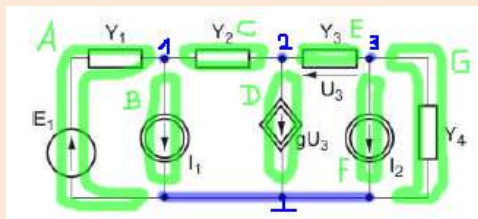
1. Macierz węzłowa jest macierzą kwadratową o liczbie wierszy i kolumn równej liczbie ponumerowanych węzłów (bez uwzględniania węzła odniesienia). Dodatkowo macierz jest symetryczna względem przekątnej głównej
2. Wyznaczanie wyrazów na przekątnej głównej - są to "admitancje własne" węzłów



1. kolejne pozycje na przekątnej głównej wyznaczone są zgodnie z wprowadzoną numeracją węzłów

2. Dla każdego węzła sumujemy admitancje wszystkich gałęzi podłączonych do tego węzła - i taką sumę wstawiamy do macierzy na odpowiednie miejsce przekątnej
3. Wyznaczanie elementu w i-tym wierszu oraz j-tej kolumnie, poza przekątną ( $i \neq j$ ) - są to "admitancje wzajemne" węzłów i oraz j.  
Wartość ta jest równa admitancji wszystkich gałęzi łączących **bezpośrednio** te dwa węzły z **dostawionym znakiem minus**.  
Jeśli te dwa węzły nie są połączone bezpośrednio żadną gałęzią, to do macierzy wstawiamy w tym miejscu 0.  
Oczywiście tak wyliczoną wartość wstawiamy w i-tym wierszu oraz j-tej kolumnie oraz symetrycznie: w j-tym wierszu i i-tej kolumnie
4. otrzymaną macierz oznaczamy literą **Y**

#### Przykład c. d.



wyrazy na głównej przekątnej:

węzeł nr 1: dołączone do niego są gałęzie A, B, C, zatem jego admitancja własna jest równa sumie admitancji tych gałęzi i wynosi:

$$Y_1 + Y_2$$

węzeł nr 2: dołączone do niego są gałęzie C, D, E, zatem jego admitancja własna wynosi:

$$Y_2 + Y_3$$

węzeł nr 3: dołączone do niego są gałęzie E, F, G zatem jego admitancja własna wynosi:

$$Y_3 + Y_4$$

admitancje wzajemne:

węzeł 1 i 2: połączone są bezpośrednio tylko gałęzią C, zatem ich admitancja wzajemna jest równa admitancji tej gałęzi z minusem i wynosi  $-Y_2$

węzeł 2 i 3: połączone są bezpośrednio tylko gałęzią E, zatem ich admitancja wzajemna wynosi  $-Y_3$

węzeł 1 i 3 nie są połączone bezpośrednio żadną gałęzią, więc ich admitancja wzajemna jest równa 0

Mamy już wszystkie elementy macierzy węzłowej - wypisujemy ją:

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 + Y_2 & -Y_2 & 0 \\ -Y_2 & Y_2 + Y_3 & -Y_3 \\ 0 & -Y_3 & Y_3 + Y_4 \end{pmatrix}$$

normalnie wszystkie admitancje dają się policzyć, bo są dane (albo impedancje). Dlatego tutaj trzeba wstawić te liczby, żeby dostać macierz liczbową

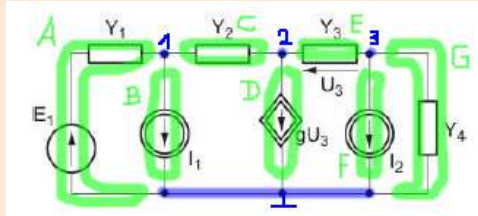
## 5. Wektor wymuszeń prądowych

Wyznaczamy wektor wymuszeń prądowych.

1. Dla każdego węzła sprawdzamy jakie prądy do niego wpływają, a jakie wypływają - uwzględniamy tylko prądy ze źródeł napięć i prądów w poszczególnych gałęziach, które wyznaczyliśmy w etapie analizy węzłów dla każdej gałęzi.

- Na i-tym miejscu wektora wymuszeń prądowych jest suma prądów wpływających i wypływających do i-tego węzła (zgodnie z przyjętą numeracją), przy czym prądy **wpływające** bierzemy z **plusem**, a prądy **wypływające** - z **minusem**.
- otrzymany wektor oznaczamy literą  $I_{zr}$

Przykład c. d.



węzeł nr 1:

wpływa do niego prąd z gałęzi A, wypływa prąd z gałęzi B (a gałąź C nie miała żadnych źródeł, więc ją tu pomijamy). Zatem prąd wymuszenia dla węzła nr 1 wynosi:

$$I_A - I_B = E_1 Y_1 - I_1$$

węzeł nr 2:

wpływa z niego prąd z gałęzi D, zatem prąd wymuszenia dla tego węzła wynosi:

$$-I_D = -gU_3$$

węzeł nr 3:

wpływa z niego prąd z gałęzi F, zatem prąd wymuszenia dla tego węzła wynosi:

$$-I_F = -I_2$$

Wszystkie wymuszenia prądowe policzone (dla wszystkich węzłów), więc można wypisać wektor wymuszeń prądowych:

$$I_{zr} = \begin{pmatrix} E_1 Y_1 - I_1 \\ -gU_3 \\ -I_2 \end{pmatrix}$$

Tutaj należy wstawić dane z zadania - powinien wyjść wektor liczbowy. Wyjątek stanowią zadania ze źródłami sterowanymi - w takim przypadku zależność opisująca sterowanie zostanie we wzorku na wektor w postaci literek.

## 6. Równanie macierzowe

- Zapisujemy równanie macierzowe opisujące obwód:

$$Y \cdot V = I_{zr}$$

gdzie V oznacza wektor szukanych potencjałów w węzłach:

- UWAGA! Jeśli w obwodzie występowały źródła sterowane (czyli takie, gdzie prąd lub napięcie jest uzależnione od jakiegoś innego napięcia/prądu w obwodzie), to w wektorze prądów wymuszeń pojawi się wielkość do usunięcia, zastąpienia potencjałami węzłowymi. I tak:

- jeśli sterowanie zależy od prądu na jakimś elemencie układu, to prąd wyliczamy z prawa Ohma dla gałęzi, w której ten element się znajduje.

Jako napięcie w gałęzi bierzemy różnicę potencjałów węzłów, które są na końcach gałęzi:

$$U_{gałąź} = V_i - V_j$$

Jeśli jednym z końców gałęzi jest węzeł odniesienia, to wstawiamy zamiast V wartość 0

Z prawa Ohma liczymy prąd:

$$I_{gałąź} = U_{gałąź} \cdot Y_{gałąź}$$

gdzie  $Y_{gałąź}$  to admitancja gałęzi

po wstawieniu pierwszego wzoru:

$$I_{gałąź} = (V_i - V_j) \cdot Y_{gałąź}$$

I taki prąd wstawiamy do wektora wymuszeń w miejsce wzorka dla źródła sterowanego

- jeśli sterowanie zależy od napięcia na jakimś elemencie układu, to napięcie to wyliczamy z prawa Ohma dla gałęzi, w której ten element się znajduje. Najpierw wyznaczamy napięcie na całej gałęzi jako różnicę potencjałów węzłów końcowych tej gałęzi:

$$U_{gałąź} = V_i - V_j$$

Jeśli jednym z końców gałęzi jest węzeł odniesienia, to wstawiamy zamiast V wartość 0

Z prawa Ohma liczymy prąd płynący przez gałąź:

$$I_{gałąź} = U_{gałąź} \cdot Y_{gałąź}$$

gdzie  $Y_{gałąź}$  to admitancja gałęzi.

A teraz z prawa Ohma dla danego elementu liczymy napięcie na tym elemencie:

$$U_{element} = \frac{I_{gałąź}}{Y_{element}}$$

gdzie  $Y_{element}$  to admitancja samego elementu (nie całej gałęzi)

wstawiamy do ostatniego wzorka dwa poprzednie:

$$U_{element} = \frac{U_{gałąź} \cdot Y_{gałąź}}{Y_{element}} = \frac{(V_i - V_j) \cdot Y_{gałąź}}{Y_{element}}$$

3. Jeśli były źródła sterowane, to po wstawieniu powyżej wyliczonych wzorów należy przenieść wartości stojące przy  $V_i$  i  $V_j$  z przeciwnymi znakami do i-tej i j-tej kolumny macierzy

#### Przykład c. d.

Wyliczone macierz i wektory:

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 + Y_2 & -Y_2 & 0 \\ -Y_2 & Y_2 + Y_3 & -Y_3 \\ 0 & -Y_3 & Y_3 + Y_4 \end{pmatrix}$$

$$I_{zr} = \begin{pmatrix} E_1 Y_1 - I_1 \\ -g U_3 \\ -I_2 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}$$

Równanie macierzowe:

$$\begin{pmatrix} Y_1 + Y_2 & -Y_2 & 0 \\ -Y_2 & Y_2 + Y_3 & -Y_3 \\ 0 & -Y_3 & Y_3 + Y_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 Y_1 - I_1 \\ -g U_3 \\ -I_2 \end{pmatrix}$$

W obwodzie było jedno źródło sterowane, dlatego w wektorze prądów wymuszonych jest wyrażenie  $g U_3$ , które należy usunąć. Zgodnie ze schematem  $U_3$  to napięcie na rezystorze w gałęzi E.

Określamy napięcie na tej gałęzi zgodnie z kierunkiem  $U_3$  ze schematu. Końcem tej gałęzi z uwzględnieniem kierunku jest węzeł 2, a początkiem tej gałęzi jest węzeł 3. Zatem napięcie na tej gałęzi liczone w tym kierunku jest równe różnicy potencjałów węzła końcowego (nr 2) i węzła początkowego (nr 3):

$$U_{gałąź} = V_2 - V_3$$

Jako że w tej gałęzi występuje tylko jeden element, to napięcie na nim jest równe napięciu na całej gałęzi, czyli:

$$U_3 = U_{\text{gałąź}} = V_2 - V_3$$

i taką zależność wstawiamy do równania macierzowego:

$$\begin{pmatrix} Y_1 + Y_2 & -Y_2 & 0 \\ -Y_2 & Y_2 + Y_3 & -Y_3 \\ 0 & -Y_3 & Y_3 + Y_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 Y_1 - I_1 \\ -g(V_2 - V_3) \\ -I_2 \end{pmatrix}$$

widać, że w wektorze prądów wymuszeń pojawiły się potencjały  $V_2$  i  $V_3$ . Trzeba je przerzucić do odpowiednich kolumn w macierzy (wiersz pozostaje bez zmian jak ich aktualne położenie - czyli drugi).

Wcześniej wyznaczamy współczynnik  $g$  przez te potencjały.

$$\begin{pmatrix} Y_1 + Y_2 & -Y_2 & 0 \\ -Y_2 & Y_2 + Y_3 & -Y_3 \\ 0 & -Y_3 & Y_3 + Y_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 Y_1 - I_1 \\ -gV_2 + gV_3 \\ -I_2 \end{pmatrix}$$

Zatem współczynnik przy  $V_2$  z przeciwnym znakiem dodajemy do elementu w kolumnie drugiej, a współczynnik przy  $V_3$  również z przeciwnym znakiem dodajemy do elementu w kolumnie trzeciej:

$$\begin{pmatrix} Y_1 + Y_2 & -Y_2 & 0 \\ -Y_2 & Y_2 + Y_3 + g & -Y_3 - g \\ 0 & -Y_3 & Y_3 + Y_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 Y_1 - I_1 \\ 0 \\ -I_2 \end{pmatrix}$$

i już mamy uporządkowane równanie

W tym wzorze po usunięciu wzorków wynikających ze źródeł sterowanych powinny zostać już tylko same dane liczbowe oraz wektor  $V$  w postaci zmiennych  $V_i$

## 7. Rozwiązanie równania macierzowego

1. Aby rozwiązać równanie należy wyznaczyć macierz odwrotną  $Y^{-1}$

Kalkulator potrafi tylko dla macierzy  $2 \times 2$  i  $3 \times 3$

2. Metoda standardowa liczenia macierzy odwrotnej

1. przypadek macierzy  $1 \times 1$  (co oznacza, że był tylko jeden węzeł - a w zadaniach z egzaminu to bardzo możliwe)

W tym przypadku macierz to po prostu liczba:

$$Y = a_{11}$$

Wektor potencjałów węzłowych to też tylko jeden element:

$$V = V_1$$

Wektor prądów wymuszonych to też jedna liczba:

$$I_{\text{zr}} = i_1$$

Wyliczona macierz odwrotna to:

$$Y^{-1} = \frac{1}{a_{11}}$$

A rozwiązanie równania to:

$$V_1 = \frac{1}{a_{11}} i_1$$

2. przypadek macierzy  $2 \times 2$  (co oznacza, że były dwa węzły)

W tym przypadku macierz ma postać:

$$Y = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Wektor potencjałów węzłowych:

$$V = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

Wektor prądów wymuszonych to też jedna liczba:

$$I_{\text{zr}} = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

Wyliczona macierz odwrotna to:

$$Y^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Aby rozwiązać równanie czyli wyznaczyć wektor V trzeba pomnożyć macierz odwrotną i wektor prądów wymuszonych:

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

3. przypadek macierzy **3x3** (co oznacza, że były 3 węzły)

W tym przypadku macierz ma postać:

$$Y = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Wektor potencjałów węzłowych:

$$V = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}$$

Wektor prądów wymuszonych to też jedna liczba:

$$I_{zr} = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix}$$

Wyznacznik macierzy:

$$\det(Y) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Macierz odwrotną liczy się klasycznie - każdy element to wyznacznik macierzy dopełnień algebraicznych, czyli macierzy z wykreślonym wierszem i kolumną elementu, który teraz liczymy i przemnożony przez (-1) do potęgi równej sumie nr wiersza i kolumny (np. dla elementu w 1 wierszu i 2 kolumnie liczymy wyznacznik macierzy z wykreślonym pierwszym wierszem i drugą kolumną przemnożony przez  $(-1)^{1+2}$ ):

$$Y^{-1} = \frac{1}{\det(Y)} \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} & (-1)^{1+2} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} & (-1)^{1+3} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \\ (-1)^{2+1} \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} & (-1)^{2+2} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} & (-1)^{2+3} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \\ (-1)^{3+1} \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} & (-1)^{3+2} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix} & (-1)^{3+3} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Aby rozwiązać równanie czyli wyznaczyć wektor V trzeba pomnożyć macierz odwrotną i wektor prądów wymuszonych:

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(Y)} \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} & (-1)^{1+2} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} & (-1)^{1+3} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \\ (-1)^{2+1} \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} & (-1)^{2+2} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} & (-1)^{2+3} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \\ (-1)^{3+1} \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} & (-1)^{3+2} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix} & (-1)^{3+3} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix}$$

## 8. Wyznaczenie prądów w obwodzie

1. Dla każdej gałęzi wypisujemy wzór na prąd przez nią płynący:

- Jeśli gałąź nie zawiera żadnych źródeł napięcia U:

$$I_{gałąź} = (V_j - V_i) Y_{gałąź}$$

gdzie  $V_i$  oraz  $V_j$  to wyliczone z równania macierzowego potencjały w węzłach i oraz j, a węzły te są początkiem i końcem wyliczanej gałęzi. Początek i koniec

ustalamy zgodnie z kierunkiem przepływu prądu (strzałka wypływa z początku (węzeł i) i wpływa w koniec (węzeł j)).

Jeśli początek lub koniec gałęzi to węzeł odniesienia (ten z symbolem uziemienia), to zamiast V wstawiamy 0.

- Jeśli gałąź zawiera źródła napięcia:

$$I_{gałąź} = (V_j + E - V_i)Y_{gałąź}$$

gdzie  $V_i$  oraz  $V_j$  to wyliczone z równania macierzowego potencjały w węzłach i oraz j, a węzły te są początkiem i końcem wyliczanej gałęzi. Początek i koniec ustalamy zgodnie z kierunkiem przepływu prądu (strzałka wypływa z początku (węzeł i) i wpływa w koniec (węzeł j)).

**E to suma wszystkich źródeł napięcia na tej gałęzi, przy czym z plusem bierzemy te źródła, które mają zgodny z prądem gałęziowym kierunek, a z minusem - jeśli przeciwny.**

Jeśli początek lub koniec gałęzi to węzeł odniesienia (ten z symbolem uziemienia), to zamiast V wstawiamy 0.

- Jeśli gałąź zawiera źródła prądu - to nie trzeba nic liczyć - prąd jest równy sumie prądów źródeł (jeśli jest więcej niż jedno - i znów bierzemy z plusem kierunki zgodne z przyjętym kierunkiem prądu w gałęzi, a z minusem - przeciwny)

2. Jeśli konieczne jest wyznaczenie napięcia na poszczególnych elementach gałęzi, to korzystamy z wyliczonego wcześniej prądu w gałęzi oraz impedancji elementu:

$$U_{element} = \frac{I_{gałąź}}{Y_{element}}$$