8.2 Wyznaczniki

Wyznacznikiem macierzy kwadratowej $A = [a_{i,j}]_{n\times n}$ jest liczba jednoznacznie przyporządkowana tej macierzy oraz oznaczona symbolem $|A|$ lub $\det(A)$. Liczbę kolumn oraz wierszy nazywamy *stopniem wyznacznika*.

$$\text{Dla} \quad A_{1\times 1} = [a_{1,1}], \qquad \text{mamy} \quad \det(A_{1\times 1}) = a_{1,1}$$

$$\text{Dla} \quad A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \quad \text{mamy}$$

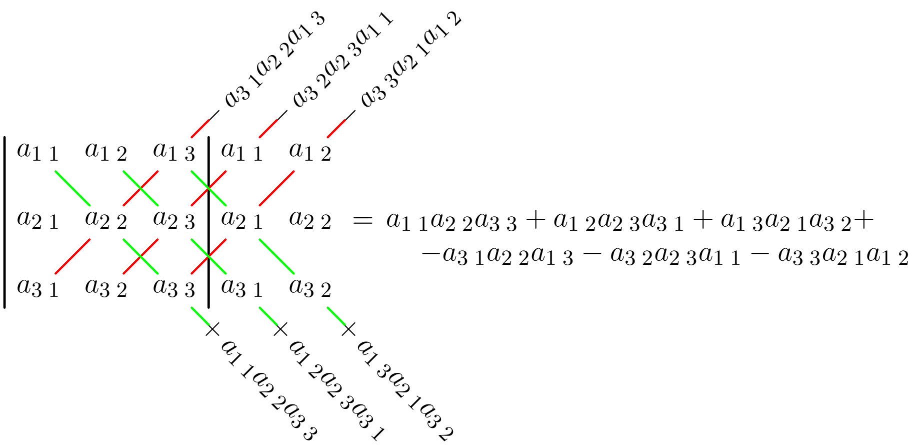
$$\det(A_{2\times 2}) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}$$

Wyznacznik stopnia 2 obliczamy jako różnicę iloczynu elementów na przekątnej głównej i iloczynu elementów na przekątnej bocznej.

Przykład 8.7. Obliczyć wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - (-2) \cdot 5 = 3 + 10 = 13$$

Wyznacznik stopnia 3 obliczamy stosując *metodę Sarrusa* nazywaną również schematem Sarrusa Dopisujemy od prawej strony wyznacznika jego pierwsze dwie kolumny



Rysunek 8.1: Metoda Sarrusa

i wyróżniamy trzy przekątne główne ze znakami + oraz trzy przekątne boczne ze znakami −. Wyznacznik stopnia 3 obliczamy następnie jako sumę iloczynów elementów na wyróżnionych przekątnych z wybranymi znakami + oraz −.

Przykład 8.8. Obliczyć wyznacznik metodą Sarrusa

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 0\cdot 3 + (-1)\cdot 4\cdot 1 + 1\cdot 3\cdot 2 - 1\cdot 0\cdot 1 - 2\cdot 4\cdot 2 - (-1)\cdot 3\cdot 3 =$$
$$= 0 - 4 + 6 - 0 - 16 + 9 = -5$$

Do obliczania wyznaczników stopnia czwartego lub wyższego nie ma gotowych schematów typu metoda Sarrusa. Wyznaczniki wyższego stopnia obliczamy wyrażając je przez wyznaczniki stopnia o jeden niższego.

Definicja 8.9. *Minorem elementu* $a_{i,j}$ macierzy kwadratowej A nazywamy wyznacznik $M_{i,j}$ macierzy powstałej przez skreślenie i-tego wiersza oraz j-tej kolumny macierzy A.

Przykład 8.10. Wyznaczyć minory macierzy

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie. Obliczmy przykładowe minory.

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1\cdot(-2) - 3\cdot 2 = -8$$

skreślamy pierwszy wiersz oraz pierwszą kolumnę.

$$M_{23} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 3 - 4\cdot 2 = -11$$

skreślamy drugi wiersz oraz trzecią kolumnę. □

Zauważmy, że minorów możemy utworzyć tyle ile jest elementów macierzy.

Definicja 8.11. *Dopełnieniem algebraicznym* elementu $a_{i,j}$ macierzy kwadratowej $A = [a_{i,j}]$ nazywamy liczbę

$$A_{i,j} = (-1)^{i+j} M_{i,j}$$

Zauważmy, że $(-1)^{i+j} = -1$ gdy suma $(i+j)$ jest liczbą nieparzystą oraz $(-1)^{i+j} = 1$ gdy suma $(i+j)$ jest liczbą parzystą. Dopełnienie algebraiczne jest więc minorem (podwyznacznikiem) z odpowiednim znakiem. Wszystkie dopełnienia algebraiczne tworzą macierz $A^D = [A_{i,j}]_{n\times n}$ nazywaną macierzą dopełnień algebraicznych macierzy A.

Dopełnienia algebraiczne pozwalają zdefiniować i obliczać wyznaczniki dowolnego stopnia.

Transponowaną macierz dopełnień algebraicznych nazywamy *macierzą dołączoną*.

Definicja 8.12. *Rozwinięciem Laplace'a* (lub krótko rozwinięciem) macierzy A względem k-tej kolumny nazywamy wyrażenie

$$a_{1,k}A_{1,k} + a_{2,k}A_{2,k} + \cdots + a_{n,k}A_{n,k}$$

jest to suma iloczynów elementów k-tej kolumny przez ich dopełnienia algebraiczne. Można pokazać, że rozwinięcie Laplace'a nie zależy od k tzn. dla każdego k jest takie samo.

Rozwinięciem Laplace'a (lub krótko rozwinięciem) macierzy A względem i-tego wiersza nazywamy wyrażenie

$$a_{i,1}A_{i,1} + a_{i,2}A_{i,2} + \ldots + a_{i,n}A_{i,n}$$

jest to suma iloczynów elementów i-tego wiersza przez ich dopełnienia algebraiczne. Można pokazać, że rozwinięcie Laplace'a nie zależy od i tzn. dla każdego i jest takie samo.

Definicja 8.13. Wyznacznikiem macierzy nazywamy liczbę

$$\det(A) = a_{1,k}A_{1,k} + a_{2,k}A_{2,k} + \ldots + a_{n,k}A_{n,k}$$

gdzie k jest dowolnie ustalone.

Wyznacznik macierzy możemy również obliczać w następujący sposób

$$\det(A) = a_{i,1}A_{i,1} + a_{i,2}A_{i,2} + \cdots + a_{i,n}A_{i,n}$$

gdzie i jest dowolnie ustalone. W celu obliczenia wyznacznika dokonujemy rozwinięcia Laplace'a względem dowolnego wiersza lub dowolnej kolumny. Należy zauważyć, że najlepiej wybrać wiersz lub kolumnę w której jest jak najwięcej zer. Rachunki są wówczas krótsze.

Przykład 8.14. Obliczmy wyznacznik stopnia czwartego wykonując rozwinięcie względem pierwszego wiersza

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{aligned} & a_{1,1}A_{1,1} + a_{1,2}A_{1,2} + a_{1,3}A_{1,3} + a_{1,4}A_{1,4} = \\ &= 0 \cdot A_{1,1} + 1 \cdot A_{1,2} + 0 \cdot A_{1,3} + 2 \cdot A_{1,4} = \\ &= 1 \cdot A_{1,2} + 2 \cdot A_{1,4} \end{aligned}$$

Wyznaczymy dopełnienia algebraiczne posługując się wzorem $A_{i,j} = (-1)^{i+j}M_{i,j}$

$$A_{1,2} = (-1)^{1+2}M_{1,2} = -M_{1,2} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -12$$

$$A_{1,4} = (-1)^{1+4}M_{1,4} = -M_{1,4} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -8$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$\det A = A_{1,2} + 2A_{1,4} = -12 + 2(-8) = -28$$

Wyznaczniki obliczyliśmy jako sumę iloczynów elementów pierwszego wiersza przez ich dopełnienia algebraiczne. Okazuje się, że biorąc pod uwagę dowolny inny wiersz lub kolumnę i stosując taką samą procedurę jak z pierwszym wierszem otrzymamy taki sam wynik.

Przykład 8.15. Obliczmy wyznacznik macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

trzema sposobami. Dokonamy rozwinięcia Laplace'a względem pierwszego wiersza potem względem drugiego wiersza a następnie względem pierwszej kolumny.

Rozwinięcie względem pierwszego wiersza

$$|A| = 1(-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2(-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 3(-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) \cdot 0 + 3 \cdot 1 \cdot 0 = 1$$

Rozwinięcie względem drugiego wiersza

$$|A| = 0 + 1(-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 2(-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 1 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) \cdot 1 = 1$$

Rozwinięcie względem pierwszej kolumny

$$|A| = 1(-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 0 + 0 = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 0 + 0 = 1$$

Własności wyznaczników

a) Jeśli macierz kwadratowa ma wiersz lub kolumnę zerową, to jej wyznacznik jest równy zero.

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

drugi wiersz jest zerowy

b) Jeżeli dwa wiersze (kolumny) są proporcjonalne to wyznacznik macierzy jest równy zero.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

pierwszy wiersz w_1 jest proporcjonalny do treciego wiersza w_3, $w_3 = 2w_1$.

c) Transponowanie macierzy nie zmienia wartości wyznacznika

$$\det(A^T) = \det(A)$$

d) Dla dowolnej macierzy A stopnia n oraz dowolnej liczby $k \in \mathbb{R}$ mnożenie wyznacznika przez liczbę jest równoważne z pomnożeniem dowolnego (ale jednego) wiersza przez taką liczbę lub z pomnożeniem dowolnej (ale jednej) kolumny przez taką liczbę.

e) Dla dowolnej macierzy A stopnia n oraz dowolnej liczby $k \in \mathbb{R}$ zachodzi równość

$$\det(kA) = k^n \det(A)$$

f) Wyznacznik iloczynu macierzy kwadratowych tego samego stopnia równy jest iloczynowi wyznaczników tych macierzy (jest to twierdzenie Cauchy'ego)

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

g) Jeżeli do dowolnego wiersza dodamy inny wiersz pomnożony przez dowolną stałą, to wartość wyznacznika nie ulegnie zmianie. Wykonując operację na wierszach lub kolumnach otrzymujemy zazwyczaj macierz różną od macierzy wyjściowej, obydwie macierzy mają jednak taki sam wyznacznik.

Przykład 8.16.

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 6 & 8 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{w_3+(-2)w_1} \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Do trzeciego wiersza dodaliśmy pierwszy wiersz pomnożony przez (-2), zapisujemy to $w_3 + (-2)w_1$. W wyniku takiej operacji otrzymujemy trzeci wiersz zerowy, natomiast pozostałe wiersze pozostaną niezmienione. Z własności a) wynika, że wyznacznik jest zerowy.

h) Jeżeli do dowolnej kolumny dodamy inny kolumnę pomnożony przez dowolną stałą, to wartość wyznacznika nie ulegnie zmianie.

Omówione własności upraszczają obliczanie wyznacznika.

Własności f), g) pozwalają wprowadzić zera do wyznacznika, co znacznie upraszcza jego obliczanie.

Przykład 8.17.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{w_3-w_1} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Odejmujemy od trzeciego wiersza pierwszy wiersz. W ten sposób w trzecim wierszu pojawiają się elementy zerowe. Następnie stosujemy rozwinięcie Laplace'a względem trzeciego wiersza (gdyż jest tam najwięcej zer).

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = a_{3,1}A_{3,1} + a_{3,2}A_{3,2} + a_{3,3}A_{3,3} + a_{3,4}A_{3,4} =$$
$$= 1A_{3,1} + 0A_{3,2} + 0A_{3,3} + 0A_{3,4} =$$
$$= A_{3,1} =$$
$$= (-1)^{3+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= -(3 + 6 + 4 - 6 - 6 - 2) = 1$$

Definicja 8.18. *Macierzą nieosobliwą* nazywamy macierz kwadratową dla której wyznacznik jest różny od zera. Jeżeli $|A| = 0$ to macierz nazywamy *osobliwą*.

Definicja 8.19. *Macierzą odwrotną* do macierzy A nazywamy macierz A^{-1} spełniającą warunki

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{I}$$

Można pokazać, że macierz A^{-1} istnieje wtedy i tylko wtedy gdy A jest macierzą kwadratową oraz $|A| \neq 0$. Macierz odwrotna wyraża się wzorem

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \left(A^D\right)^T$$

gdzie A^D jest macierzą dopełnień algebraicznych macierzy natomiast $\left(A^D\right)^T$ jest macierzą transponowaną macierzy dopełnień algebraicznych.

Przykład 8.20. Znajdziemy macierz odwrotną do macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Wykonując odpowiednie obliczenia mamy $|A| = 1$ oraz

$$A^D = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad (A^D)^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

w celu sprawdzenia poprawności przeprowadzonych rachunków możemy zawsze sprawdzić czy $AA^{-1} = \mathbb{I}$ lub $A^{-1}A = \mathbb{I}$.