Wykład11. Czwórniki

Wstęp

W opisie obwodów elektrycznych bardzo często interesują nas jedynie odpowiedzi dotyczące jednej gałęzi obwodu w zależności od sygnału wymuszającego przyłożonego na wejściu obwodu. W takim przypadku wygodnie jest sprowadzić opis obwodu do zależności występujących między prądami i napięciami na zaciskach uważanych za wejście i wyjście, wprowadzając pojęcie czwórnika. Czwórniki stanowią bardzo użyteczny model obwodu, w którym wyróżnia się jedynie zaciski wejściowe i wyjściowe charakteryzowane przez ich napięcia i prądy. Każdemu czwórnikowi można przyporządkować zwarty opis macierzowy, ułatwiający znacznie obliczenia dowolnych funkcji definiowanych dla danego obwodu.

Wykład jedenasty poświęcony jest podstawowym informacjom o czwórnikach. Zostaną podane definicje oraz podstawowe opisy macierzowe czwórników: impedancyjny, admitancyjny, hybrydowy oraz łańcuchowy. Rozpatrzone zostaną różne połączenia czwórnikowe oraz opisy macierzowe takich układów. Pokazany zostanie związek transmitancji operatorowej z opisem macierzowym czwórnika.

11.1 Definicja czwórnika

Czwórnik jest elementem czterozaciskowym, mającym dwie pary uporządkowanych zacisków, z których jedna para jest wejściem a druga para wyjściem Oznaczenie czwórnika z zaznaczonymi zwrotami prądów i napięć końcówkowych jest przedstawione na rys. 11.1.

Rys. 11.1. Oznaczenie czwórnika z zaznaczonymi zwrotami prądów i napięć

W odniesieniu do wejścia i wyjścia czwórnika musi być spełniony warunek równości prądów:

$$I_1 = I_1^{'} \tag{11.1}$$

$$I_2 = I_2^{'} \tag{11.2}$$

jak to zaznaczono na rysunku. Sygnały prądu i napięcia po stronie wejściowej oznaczać będziemy ze wskaźnikiem 1, a po stronie wyjściowej – ze wskaźnikiem 2. Przyjmiemy umownie, że oba prądy: na wejściu i wyjściu są zwrócone do prostokąta oznaczającego czwórnik.

W zależności od elementów tworzących obwód, czwórnik może być liniowy (gdy wszystkie elementy obwodu są liniowe) lub nieliniowy. W dalszych rozważaniach ograniczymy się wyłącznie do czwórników liniowych. Czwórnik nazywać będziemy **pasywnym**, jeśli nie wytwarza energii a jedynie pobiera ją ze źródła zasilającego i przetwarza w określony sposób. Czwórnik złożony z samych elementów pasywnych R, L, C i M jest zawsze czwórnikiem pasywnym. Czwórnik pasywny jest zdolny do gromadzenia i rozpraszania energii pobranej ze źródła, może ją również oddawać na zewnątrz, jednak w dowolnej chwili czasowej *t* energia ta nie może przewyższać energii pobranej. Czwórnik, który nie spełnia powyższych warunków jest **czwórnikiem aktywnym** (generatorem energii).

11.2 Równania czwórnika

Czwórnik może być scharakteryzowany za pomocą dwóch równań liniowych wiążących ze sobą dwie wielkości prądowe i dwie napięciowe dotyczące bramy wejściowej i wyjściowej: I_1, I_2, U_1 oraz U_2. Zależności te można przedstawić w postaci ogólnej $f(I_1, I_2, U_1, U_2)=0$ w której *f*(.) jest funkcja liniową. Przekształcając i porządkując te równania można uzyskać jawną postać zależności opisujących czwórnik. W zależności od wyboru zmiennych można wyróżnić 6 podstawowych równań czwórnika. Są to

- postać admitancyjna, w której prądy wejściowy i wyjściowy (I_1, I_2) są wyrażone w zależności od napięć zewnętrznych (U_1, U_2)
- postać impedancyjna, w której napięcia wejściowe i wyjściowe (U_1, U_2) są wyrażone w zależności od prądów końcówkowych (I_1, I_2)
- postać hybrydowa w której para wielkości (U_1, I_2) jest wyrażona jako funkcja drugiej pary (I_1, U_2)
- postać hybrydowa odwrotna w której para wielkości (I_1, U_2) jest wyrażona jako funkcja drugiej pary (U_1, I_2)
- postać łańcuchowa w której para wielkości (U_1, I_1) dotycząca zacisków wejściowych jest wyrażona jako funkcja drugiej pary (U_2, I_2) związanej z zaciskami wyjściowymi

- postać łańcuchowa odwrotna w której para wielkości (U_2, I_2) dotycząca zacisków wyjściowych jest wyrażona jako funkcja drugiej pary (U_1, I_1) związanej z zaciskami wejściowymi (ta postać jest rzadko stosowana).

11.2.1 Równanie admitancyjne

Jeżeli za zmienne niezależne przyjmie się napięcia obu bram U_1 oraz U_2 czwórnik przyjmie opis admitancyjny, który można wyrazić w postaci

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \mathbf{Y} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \tag{11.3}$$

Macierz **Y** jest nazywana **macierzą admitancyjną** a parametry tej macierzy mają interpretację admitancji operatorowych.

11.2.2 Równanie impedancyjne

Jeżeli za zmienne niezależne przyjmie się prądy obu bram I_1 oraz I_2 , czwórnik przyjmie opis impedancyjny, który można wyrazić w postaci

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \mathbf{Z} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \tag{11.4}$$

Macierz **Z** jest nazywana **macierzą impedancyjną** a parametry tej macierzy mają interpretację impedancji operatorowych. Łatwo jest udowodnić, że macierze impedancyjna i admitancyjna są powiązane relacją

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Z}^{-1} \tag{11.5}$$

11.2.3 Równania hybrydowe

Przy opisie hybrydowym za zmienne niezależne wybiera się prąd wejściowy i napięcie wyjściowe czwórnika. Równanie hybrydowe przyjmuje się w postaci

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \mathbf{H} \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \tag{11.6}$$

w której **H** jest **macierzą hybrydową**. Jak widać z opisu hybrydowego parametr H_{11} ma interpretację impedancji a H_{22} admitancji. Parametry H_{12} i H_{21} są bezwymiarowe i wyrażają stosunek odpowiednio dwu napięć i dwu prądów w obwodzie.

Zamieniając zmienne wejściowe i wyjściowe otrzymuje się opis hybrydowy odwrotny czwórnika w postaci

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \mathbf{G} \begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \tag{11.7}$$

Stanowi on odwrotność opisu hybrydowego macierzą **H**. Obie macierze powiązane są następująca relacją $\mathbf{G} = \mathbf{H}^{-1}$.

11.2.4 Równanie łańcuchowe

Równanie łańcuchowe czwórnika uzależnia prąd i napięcie na wejściu czwórnika od prądu i napięcia na jego wyjściu

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \tag{11.8}$$

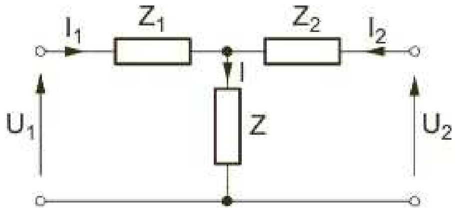
W równaniu tym, inaczej niż w pozostałych opisach, przyjmuje się z definicji prąd I_2 wypływający z czwórnika, w związku z czym przy założonym na wstępie zwrocie prądu do czwórnika w opisie pojawia się prąd wyjściowy ze znakiem minus. Elementy **macierzy łańcuchowej A** nazywane są parametrami łańcuchowymi czwórnika.

Każdy z przedstawionych typów macierzy jednoznacznie opisuje czwórnik. Wybór któregoś z nich jest uwarunkowany strukturą obwodu, sposobem połączenia czwórników, łatwością wyznaczenia parametrów, itp. Przejście z jednego opisu do drugiego polega na przegrupowaniu zmiennych i wyznaczeniu odpowiednich relacji między tymi zmiennymi.

Duża liczba stosowanych opisów macierzowych czwórnika wynika również z faktu, że dla niektórych czwórników pewne opisy mogą nie istnieć. Najbardziej uniwersalne pod tym względem są opisy hybrydowe wykorzystujące macierz **H** lub **G**, które można otrzymać dla większości obwodów elektrycznych.

Przykład 11.1

Wyznaczyć opis czwórnika przedstawionego na rys. 11.2. Czwórnik ten nosi nazwę czwórnika typu T i jest jedną z najpopularniejszych struktur czwórnikowych.



Rys. 11.2. Schemat obwodu do przykładu 11.1

Rozwiązanie

Z prawa napięciowego i prądowego Kirchhoffa zastosowanego do obwodu z rys. 11.2 można napisać następujące równania (*Y=1/Z*)

$$I_1 = I - I_2 = YU_2 + (1 + Z_2 Y)(-I_2)$$
$$U_1 = U_2 + Z_1 I_1 - Z_2 I_2$$

Po podstawieniu równania pierwszego do drugiego otrzymuje się

$$U_1 = (1 + Z_1 Y)U_2 + (Z_1 + Z_2 + Z_1 Z_2 Y)(-I_2)$$

Jeśli jako opis macierzowy przyjmiemy równanie łańcuchowe to zależności określające prąd wejściowy i napięcie wejściowe w funkcji prądu i napięcia wyjściowego można zapisać w postaci

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + Z_1 Y & Z_1 + Z_2 + Z_1 Z_2 Y \\ Y & 1 + Z_2 Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

Macierz łańcuchowa **A** dana jest więc wzorem

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 + Z_1 Y & Z_1 + Z_2 + Z_1 Z_2 Y \\ Y & 1 + Z_2 Y \end{bmatrix}$$

Jeśli jako opis macierzowy przyjmiemy równanie impedancyjne, wówczas z przetworzenia równania łańcuchowego otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z + Z_1 & Z \\ Z & Z + Z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Macierz impedancyjna dana jest więc w postaci

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z + Z_1 & Z \\ Z & Z + Z_2 \end{bmatrix}$$

Jest to macierz symetryczna, która jest równa macierzy oczkowej obwodu tworzącego analizowany czwórnik.

11.3 Związek transmitancji operatorowych z opisem czwórnikowym

Opis macierzowy czwórników jest najbardziej uniwersalnym opisem układu czterokońcówkowego, obejmującym wszystkie cztery wielkości zewnętrzne: prądy i napięcia obu bram. Jest zatem idealny do wyznaczenia dowolnej transmitancji układu, gdyż z jednego równania czwórnikowego wynikają wszystkie możliwe związki między wielkościami bramowymi. Pokażemy związek opisu transmitancyjnego z parametrami macierzowymi czwórnika.

11.3.1 Transmitancja napięciowa

Weźmy pod uwagę transmitancję napięciową, jako stosunek napięcia wyjściowego do napięcia wejściowego w dziedzinie operatorowej przy założeniu zerowego prądu obciążenia czwórnika ($I_2(s) = 0$)

$$T_u(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} \tag{11.9}$$

Z równania łańcuchowego, wobec $I_2(s) = 0$ otrzymujemy

$$U_1(s) = A_{11}U_2(s) \tag{11.10}$$

Stąd

$$T_u(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{A_{11}} \tag{11.11}$$

O transmitancji napięciowej decyduje jeden parametr łańcuchowy A_{11} czwórnika. W identyczny sposób uzyskać można relację wiążącą transmitancję napięciową z parametrami dowolnego opisu czwórnikowego. Przykładowo na podstawie opisu admitancyjnego z równania drugiego czwórnika, wobec $I_2 = 0$, wynika

$$I_2 = Y_{21}U_1 + Y_{22}U_2 = 0 \tag{11.12}$$

Stąd

$$T_u(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = -\frac{Y_{21}}{Y_{22}} \tag{11.13}$$

11.3.2 Impedancja wejściowa

Określenie funkcji impedancji wejściowej układu czwórnika wymaga ustalenia przy jakiej impedancji obciążenia badany jest czwórnik. Załóżmy w ogólności obciążenie czwórnika impedancją Z_o. Z równań łańcuchowych czwórnika otrzymuje się

$$\begin{aligned} U_1(s) &= A_{11}U_2(s) + A_{12}(-I_2(s)) = A_{11}U_2(s) + A_{12}Y_oU_2(s) \\ I_1(s) &= A_{21}U_2(s) + A_{22}(-I_2(s)) = A_{21}U_2(s) + A_{22}Y_oU_2(s) \end{aligned} \tag{11.14}$$

gdzie Y_o oznacza admitancję obciążenia (odwrotność impedacji Z_o, $Y_o=1/Z_o$). Z powyższych równań otrzymuje się

$$Z_{we}(s) = \frac{U_1(s)}{I_1(s)} = \frac{A_{11} + A_{12}Y_o}{A_{21} + A_{22}Y_o} \tag{11.15}$$

Impedancja wejściowa czwórnika obciążonego jest funkcją wszystkich parametrów łańcuchowych tego czwórnika. Pewne uproszczenia powstają w stanach szczególnych obciążeń. Na przykład w stanie jałowym na zaciskach wyjściowych ($Y_o=0$)

$$Z_{we}(s) = \frac{A_{11}}{A_{21}} \tag{11.16}$$

oraz w stanie zwarcia na wyjściu ($Y_o = \infty$)

$$Z_{we}(s) = \frac{A_{12}}{A_{22}} \tag{11.17}$$

impedancja wejściowa zależy wyłącznie od dwóch parametrów łańcuchowych. Podobne zależności określające impedancję wejściową otrzymać można na podstawie dowolnego opisu czwórnikowego.

Przykład 11.2

Określić wyrażenie na transmitancję napięciową i impedancję wejściową czwórnika z przykładu 11.1 (rys. 11.2)

Rozwiązanie

Macierz łańcuchowa czwórnika z rys. 11.2 ma postać

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 + Z_1 Y & Z_1 + Z_2 + Z_1 Z_2 Y \\ Y & 1 + Z_2 Y \end{bmatrix}$$

Transmitancja napięciowa w stanie jałowym na wyjściu jest więc równa

$$T_u(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{A_{11}} = \frac{1}{1 + Z_1 Y} = \frac{Z}{Z + Z_1}$$

Wobec braku obciążenia czwórnika przez impedancję Z_2 nie przepływa prąd, stąd całe napięcie wyjściowe pochodzi z impedancji poprzecznej Z (dzielnik impedancyjny).

Impedancja wejściowa czwórnika przy obciążeniu bramy wyjściowej impedancją Z_o na podstawie wzoru (11.15) jest równa

$$Z_{we}(s) = \frac{U_1(s)}{I_1(s)} = \frac{A_{11} + A_{12} Y_o}{A_{21} + A_{22} Y_o} = \frac{(1 + Z_1 Y) + (Z_1 + Z_2 + Z_1 Z_2 Y) Y_o}{Y + (1 + Z_2 Y) Y_o}$$

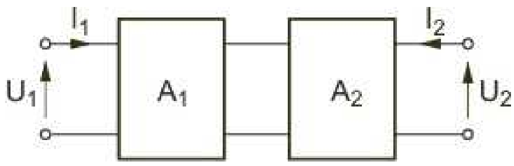
Jest ona funkcją wszystkich parametrów układu oraz impedancji obciążenia.

11.4 Połączenia czwórników

Mnogość opisów czwórnikowych wynika również z różnorodności połączeń, jakie są możliwe przy założeniu dostępności obu bram: wejściowej i wyjściowej. Rozważymy tu podstawowe połączenia czwórników między sobą: połączenie łańcuchowe, szeregowe, równoległe oraz szeregowo-równoległe i równolegle-szeregowe.

11.4.1 Połączenie łańcuchowe

Połączenie łańcuchowe (zwane również kaskadowym) czwórników to takie połączenie , w którym zaciski wejściowe jednego czwórnika są przyłączone do zacisków wyjściowych poprzedniego. Przykład połączenia łańcuchowego dwu czwórników przedstawiony jest na rys. 11.3.



Rys. 11.3. Połączenie łańcuchowe czwórników

Łatwo jest pokazać, że macierz łańcuchowa **A** czwórników połączonych kaskadowo jest równa iloczynowi macierzy łańcuchowych poszczególnych czwórników tworzących to połączenie

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \tag{11.18}$$

Przy większej liczbie czwórników połączonych kaskadowo macierz łańcuchowa wypadkowa jest równa iloczynowi macierzy łańcuchowych wszystkich czwórników branych w kolejności ich występowania w łańcuchu.

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \cdots \mathbf{A}_n \tag{11.19}$$

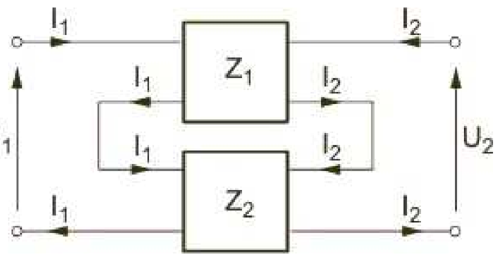
Należy zwrócić uwagę, że przy mnożeniu macierzy istotna jest kolejność tych macierzy, gdyż w ogólności $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \neq \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1$.

11.4.2 Połączenie szeregowe czwórników

Dwa czwórniki są połączone szeregowo, jeśli spełnione są warunki:

- prąd wejściowy jednego czwórnika jest równy prądowi wejściowemu drugiego a prąd wyjściowy jednego czwórnika jest równy prądowi wyjściowemu drugiego
- napięcie wejściowe (wyjściowe) połączenia jest równe sumie napięć wejściowych (wyjściowych) każdego czwórnika.

Na rys. 11.4 przedstawiono układ dwu **czwórników połączonych szeregowo**, spełniający powyższe warunki.



Rys. 11.4. Połączenie szeregowe czwórników

Łatwo jest pokazać, że w połączeniu szeregowym czwórników macierz impedancyjna **Z** połączenia jest równa sumie macierzy impedancyjnych każdego czwórnika. Oznacza to, że

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 \tag{11.20}$$

Przy większej liczbie czwórników połączonych szeregowo macierz impedancyjna wypadkowa jest równa sumie macierzy impedancyjnych wszystkich czwórników występujących w połączeniu.

$$\mathbf{Z} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{Z}_i \tag{11.21}$$

Kolejność sumowania macierzy impedancyjnych nie odgrywa żadnej roli.

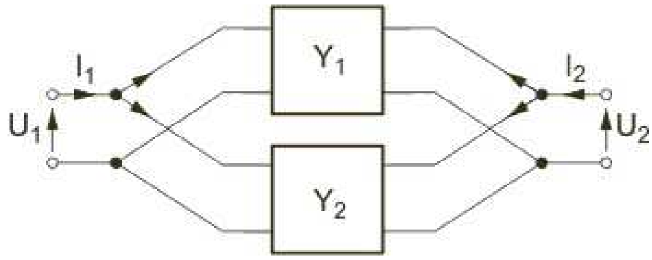
11.4.3 Połączenie równoległe czwórników

Dwa **czwórniki są połączone równolegle**, jeśli spełnione są warunki:

- napięcie wejściowe każdego czwórnika jest takie samo, podobnie jak napięcie wyjściowe
- prąd wejściowy (wyjściowy) połączenia jest równy sumie prądów wejściowych (wyjściowych) każdego czwórnika.

Ponadto w tym przypadku należy zapewnić spełnienie warunków regularności połączenia zdefiniowanych odpowiednią równością prądów (wzory (11.1) i (11.2)).

Na rys. 11.5 przedstawiono układ dwu czwórników połączonych równolegle, spełniający powyższe warunki.



Rys. 11.5. Połączenie równoległe czwórników

Łatwo jest pokazać, że w połączeniu równoległym czwórników macierz admitancyjna **Y** połączenia jest równa sumie macierzy admitancyjnych każdego czwórnika. Oznacza to, że

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2 \qquad (11.22)$$

Przy większej liczbie czwórników połączonych równolegle macierz admitancyjna wypadkowa jest równa sumie macierzy admitancyjnych wszystkich czwórników występujących w połączeniu.

$$\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{Y}_i \qquad (11.23)$$

Kolejność sumowania macierzy admitancyjnych nie odgrywa żadnej roli.

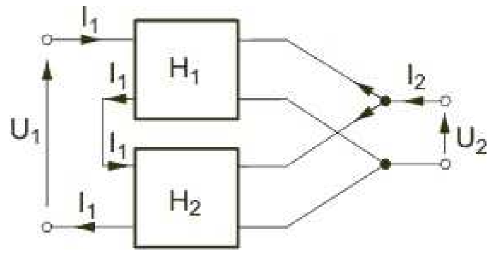
11.4.4 Połączenie szeregowe-równoległe czwórników

Dwa **czwórniki** są **połączone szeregowo-równolegle**, jeśli spełnione są warunki:

- prąd wejściowy każdego czwórnika jest taki sam a napięcie wejściowe połączenia jest równe sumie napięć wejściowych każdego czwórnika
- prąd wyjściowy połączenia jest równy sumie prądów wyjściowych każdego czwórnika a napięcie wyjściowe obu czwórników jest takie samo.

Ponadto w tym przypadku należy zapewnić spełnienie warunku regularności połączenia zdefiniowanego odpowiednią równością prądów (wzór (11.2)).

Na rys. 11.6 przedstawiono układ dwu czwórników połączonych szeregowo-równolegle (szeregowo po stronie zacisków wejściowych i równolegle po stronie zacisków wyjściowych), spełniający powyższe warunki.



Rys. 11.6. Połączenie szeregowo-równoległe czwórników

Łatwo jest pokazać, że w połączeniu szeregowo-równoległym czwórników macierz hybrydowa **H** połączenia jest równa sumie macierzy hybrydowych **H** każdego czwórnika. Oznacza to, że

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 \tag{11.24}$$

Przy większej liczbie czwórników połączonych szeregowo-równolegle macierz hybrydowa **H,** wypadkowa dla całego połączenia jest równa sumie macierzy hybrydowych **H** wszystkich czwórników występujących w połączeniu.

$$\mathbf{H} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{H}_i \tag{11.25}$$

Kolejność sumowania macierzy hybrydowych nie odgrywa żadnej roli.

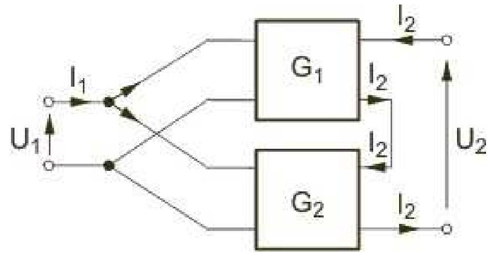
11.4.5 Połączenie równoległo-szeregowe czwórników

Dwa **czwórniki** są **połączone równolegle-szeregowo**, jeśli spełnione są warunki:

- napięcie wejściowe każdego czwórnika jest takie samo a prąd wejściowy połączenia jest równy sumie prądów wejściowych każdego czwórnika
- prąd wyjściowy każdego czwórnika jest taki sam a napięcie wyjściowe połączenia jest równe sumie napięć wyjściowych każdego z nich.

Ponadto w tym przypadku należy zapewnić spełnienie warunku regularności połączenia zdefiniowanego odpowiednią równością prądów (wzór (11.1)).

Na rys. 11.7 przedstawiono układ dwu czwórników połączonych równolegle-szeregowo (równolegle po stronie zacisków wejściowych i szeregowo po stronie zacisków wyjściowych), spełniający powyższe warunki.



Rys. 11.7. Połączenie równoległo-szeregowe czwórników

Łatwo jest pokazać, że w połączeniu równolegle-szeregowym czwórników macierz hybrydowa odwrotna **G** połączenia jest równa sumie macierzy hybrydowych **G** każdego czwórnika. Oznacza to, że

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2 \tag{11.26}$$

Przy większej liczbie czwórników połączonych równolegle-szeregowo macierz hybrydowa odwrotna **G,** wypadkowa dla całego połączenia jest równa sumie macierzy hybrydowych **G** wszystkich czwórników występujących w połączeniu.

$$\mathbf{G} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{G}_i \tag{11.27}$$

Kolejność sumowania macierzy nie odgrywa żadnej roli.

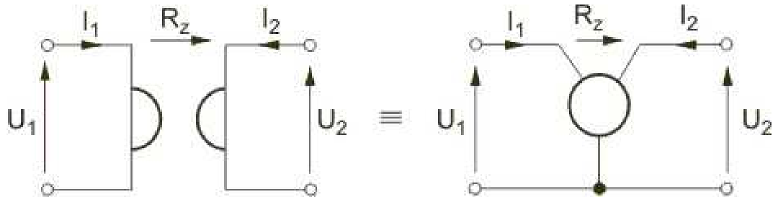
11.5 Wybrane zastosowania czwórników

11.5.1 Żyrator

Żyrator jest czwórnikiem pasywnym bezstratnym opisanym macierzą łańcuchową

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & R_z \\ G_z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \tag{11.28}$$

Parametr G_z jest nazywany konduktancją a $R_z = 1/G_z$ rezystancją żyracji. Używane w praktyce oznaczenia graficzne żyratora przedstawione są na rys. 11.8.

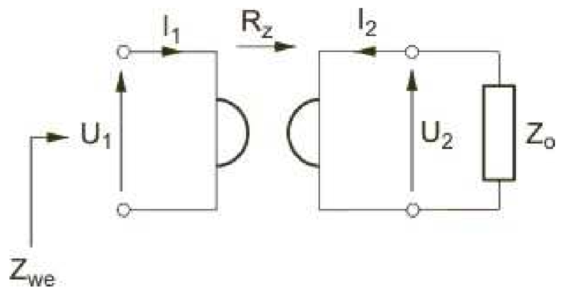


Rys. 11.8. Oznaczenia graficzne żyratora

Znak minus występujący przy prądzie wyjściowym wynika z przyjętego zwrotu prądu wyjściowego (do pudełka). Równaniu łańcuchowemu żyratora odpowiada opis admitancyjny o postaci

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & G_z \\ -G_z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \tag{11.29}$$

Najważniejszą własnością żyratora jest przetwarzanie impedancji obciążenia w impedancję odwrotnie proporcjonalną do niej. Rozważmy układ żyratora obciążonego impedancją Z_o (rys. 11.9).



Rys. 11.9. Układ żyratora obciążonego impedancją

Impedancja wejściowa takiego układu zdefiniowana w postaci

$$Z_{we} = \frac{U_1}{I_1} \tag{11.30}$$

po uwzględnieniu wzoru (11.15) wobec $A_{11} = 0$, $A_{12} = R_z$, $A_{12} = G_z$, $A_{22} = 0$ jest równa

$$Z_{we} = \frac{A_{11} + A_{12}Y_o}{A_{21} + A_{22}Y_o} = \frac{R_z^2}{Z_o} \tag{11.31}$$

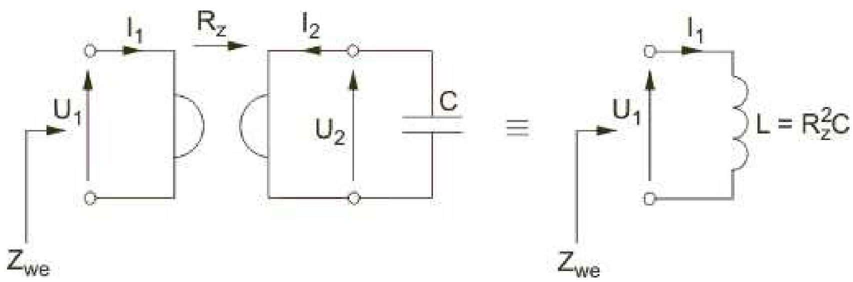
Impedancja układu żyratora obciążonego impedancją Z_o jest odwrotnie proporcjonalna do impedancji obciążenia ze współczynnikiem proporcjonalności równym R_z^2. Jeśli żyrator zostanie obciążony kondensatorem o impedancji operatorowej równej $Z_o = 1/sC$ (rys. 11.10) to impedancja wejściowa układu jest równa

$$Z_{we} = sR_z^2C \tag{11.32}$$

Jest to postać odpowiadająca ogólnemu opisowi impedancji operatorowej cewki Z_L=sL. Zatem układ żyratora obciążonego pojemnością C przedstawia sobą cewkę o indukcyjności L równej

$$L = R_z^2C \tag{11.33}$$

Powyższej zależności matematycznej można przyporządkować transformację układową zilustrowaną na rys. 11.10.



Rys. 11.10. Realizacja indukcyjności przy pomocy żyratora

Żyrator jako czwórnik jest łatwo realizowalny w praktyce przy wykorzystaniu układów tranzystorowych lub wzmacniaczy operacyjnych. Z tego względu układy wykorzystujące żyratory są powszechnie stosowane w układach elektronicznych (np. filtrach) eliminując z nich cewki, trudno realizowalne w technologii scalonej.

11.5.2 Konwerter ujemno-impedancyjny (NIC)

Konwerter ujemno-impedancyjny (NIC) jest czwórnikiem aktywnym (wytwarzającym energię) posiadającym własność przetwarzania prądu bądź napięcia z ujemnym znakiem. Wyróżnia się dwa rodzaje konwerterów ujemno-impedancyjnych

- NIC z inwersją prądu (INIC)

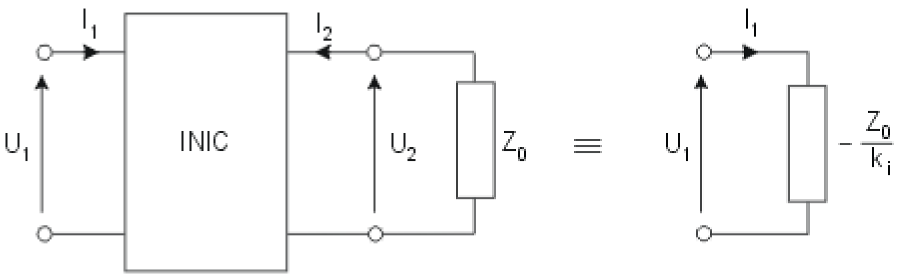
$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -k_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \tag{11.34}$$

- NIC z inwersją napięcia (VNIC)

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_u & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \tag{11.35}$$

Parametr *k* (k_i dla konwertera ujemno-impedancyjnego prądu oraz k_u dla konwertera ujemno-impedancyjnego napięcia) jest współczynnikiem przetwarzania bądź prądu bądź napięcia. W konwerterze INIC prąd wejściowy jest proporcjonalny do prądu wyjściowego z ujemnym współczynnikiem proporcjonalności $-k_i$ przy niezmienionej wartości napięcia wejściowego. W konwerterze VNIC napięcie wejściowe jest proporcjonalne do napięcia wyjściowego z ujemnym współczynnikiem proporcjonalności $-k_u$ przy niezmienionym prądzie wejściowym.

Konwerter impedancyjny przetwarza impedancję obciążenia w impedancję wejściową z ujemnym znakiem. Rozważmy układ konwertera INIC obciążonego impedancją Z_o, przedstawiony na rys. 11.11



Rys. 11.11. Układ konwertera ujemno-impedancyjnego obciążonego impedancją

Wykorzystując równania konwertera i uwzględniając równanie opisujące obciążenie $U_o = Z_o(-I_2) = U_2$ impedancja wejściowa układu opisana jest zależnością

$$Z_{we} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{U_2}{-k_i(-I_2)} = -\frac{Z_o}{k_i} \tag{11.36}$$

Jak z powyższego równania wynika konwerter ujemno-impedancyjny obciążony impedancją Z_o reprezentuje sobą (z punktu widzenia wejścia) impedancję ujemną $-Z_o / K_i$. Podobną własność ma konwerter ujemno-impedancyjny napięcia (VNIC).

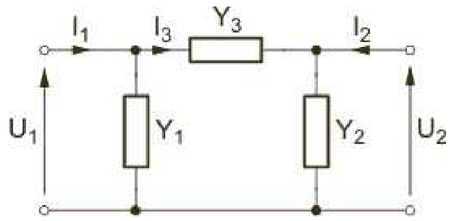
Cecha ta może być wykorzystana do realizacji rezystancji ujemnej. Mianowicie przyjmując obciążenie konwertera rezystancją $Z_o = R_o$ otrzymuje się impedancję wejściową równą $Z_{we} = -R_o / K_i$. Należy pamiętać, że ujemna rezystancja zastosowana samodzielnie prowadzi do niestabilności układu (wobec ujemnych wartości rezystancji bieguny układu znajdą się w prawej półpłaszczyźnie). Z tego względu stosuje się ją zwykle w specjalnych połączeniach z innymi elementami obwodowymi zapewniającymi stabilne działanie układu, gdzie konwerter spełnia rolę układu kompensującego straty.

Konwerter ujemno-impedancyjny jest łatwo realizowalny w technologii scalonej przy wykorzystaniu tranzystorów lub wzmacniaczy operacyjnych. Z tego względu jest chętnie wykorzystywany w elektronice przy realizacji filtrów, generatorów i innych układów przetwarzania sygnałów.

Ćwiczenia

Ćwiczenie 11.1

Wyznaczyć macierzowy opis czwórnikowy czwórnika typu Π o strukturze podanej na rys. 11.12.



Rys. 11.12. Struktura i oznaczenia admitancji w czwórniku typu Π

Rozwiązanie

Układ równań Kirchhoffa opisujących obwód

$$I_1 = Y_1 U_1 + I_3$$
$$I_2 = Y_2 U_2 - I_3$$
$$I_3 = Y_3 (U_1 - U_2)$$

Równania czwórnikowe

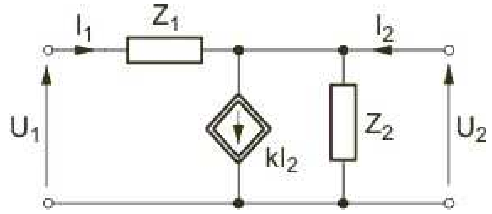
$$I_1 = (Y_1 + Y_3)U_1 - Y_3U_2$$
$$I_2 = -Y_3U_1 + (Y_2 + Y_3)U_2$$

Macierz admitancyjna

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 + Y_3 & -Y_3 \\ -Y_3 & Y_2 + Y_3 \end{bmatrix}$$

Ćwiczenie 11.2

Wyznaczyć macierz łańcuchową czwórnika odpowiadającego obwodowi z rys. 11.13. Określić na tej podstawie transmitancję napięciową układu.



Rys. 11.13. Schemat obwodu do zadania 11.2

Rozwiązanie

Z równań Kirchhoffa dla obwodu z rys. 11.13 otrzymuje się

$$U_1 = Z_1 I_1 + U_2 = Z_1\left(kI_2 - I_2 + \frac{U_2}{Z_2}\right) + U_2$$

$$I_1 = kI_2 - I_2 + \frac{U_2}{Z_2}$$

Opis łańcuchowy czwórnika

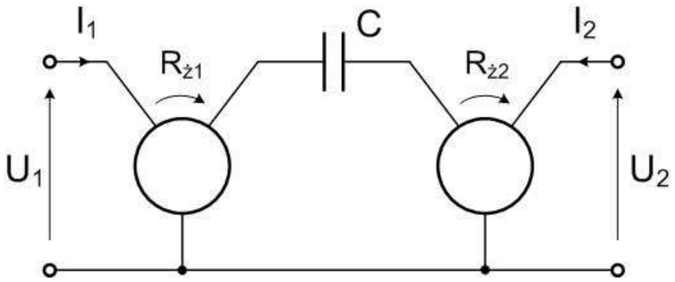
$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \dfrac{Z_1}{Z_2} & Z_1 - kZ_1 \\ \dfrac{1}{Z_2} & 1 - k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

Transmitancja napięciowa określana przy założeniu $I_2 = 0$ jest równa

$$T_u(s) = \frac{1}{A_{11}} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Ćwiczenie 11.3

Określić macierz admitancyjną czwórnika przedstawionego na rys. 11.14. Przyjąć wartość rezystancji żyracji $R_{ż1}$=1Ω, $R_{ż2}$=2Ω i pojemności C=1F.



Rys. 11.14 Schemat obwodu do przykładu 11.3

Rozwiązanie

Przedstawiony obwód można rozłożyć na trzy, połączone łańcuchowo czwórniki. Pierwszy i trzeci czwórnik są żyratorami, natomiast środkowy jest to nieuziemiona pojemność C.

Dla połączeń łańcuchowych czwórników należy posługiwać się opisem łańcuchowym. Macierz łańcuchowa obwodu jest iloczynem macierzy łańcuchowych poszczególnych czwórników obwodu, czyli

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\dot{\mathbf{Z}}1} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{A}_{\dot{\mathbf{Z}}2}.$$

Macierze żyratorów mają postać:

$$\mathbf{A}_{\dot{\mathbf{Z}}1} = \begin{bmatrix} 0 & R_{ż1} \\ \dfrac{1}{R_{ż1}} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{\dot{\mathbf{Z}}2} = \begin{bmatrix} 0 & R_{ż2} \\ \dfrac{1}{R_{ż2}} & 0 \end{bmatrix}.$$

Dla czwórnika zawierającego pojemność z praw Kirchhoffa otrzymujemy równania

$$I_1 = -I_2$$
$$U_1 + \frac{1}{sC} I_2 = U_2$$

Po uporządkowaniu układu równań prawa Ohma dla kondensatora otrzymuje się

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{1}{sC} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{1}{sC} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

zawierający macierz łańcuchową czwórnika.

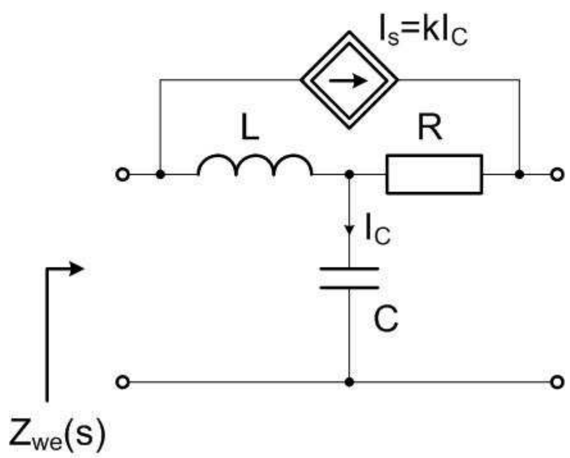
Po wymnożeniu macierzy łańcuchowych otrzymujemy wynik w postaci:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \dfrac{R_{ż1}}{R_{ż2}} & 0 \\ \dfrac{1}{sCR_{ż1}R_2} & \dfrac{R_{ż2}}{R_{ż1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 1/(2s) & 2 \end{bmatrix}.$$

Zadania sprawdzające

Zadanie 11.1

Określić impedancję $Z_{we}(s)$ obwodu przedstawionego na rys. 11.15. Przyjąć L=1H, C=1F, R=1Ω.



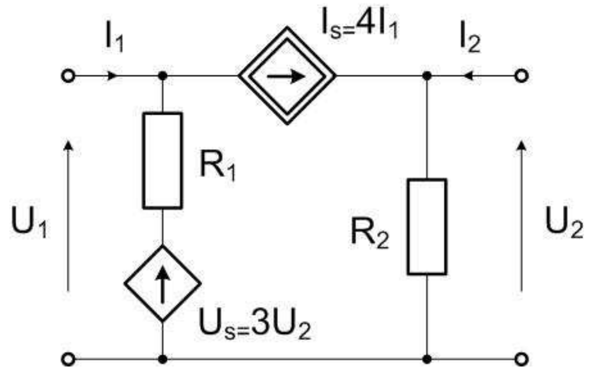
Rys. 11.15 Schemat obwodu do zadania 11.1

Rozwiązanie

$$Z_{WE}(s) = \frac{s^2LC(1-k)+1}{sC} = \frac{s^2(1-k)+1}{s}$$

Zadanie 11.2

Określić macierz łańcuchową oraz impedancję wejściową czwórnika przedstawionego na rys. 11.16. Przyjąć wartości rezystancji R_1=2Ω i R_2=1Ω



Rys. 11.16 Schemat obwodu do zadania 11.2

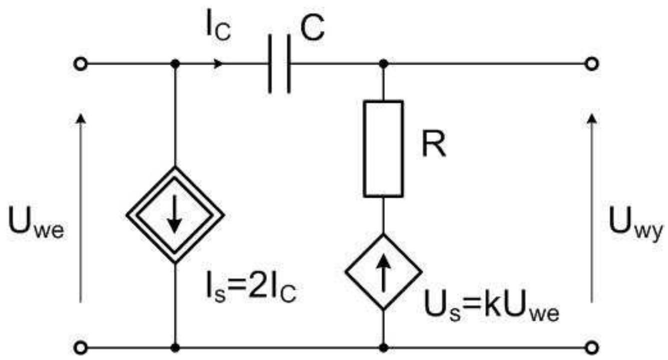
Rozwiązanie

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1{,}5 & -1{,}5 \\ 0{,}25 & 0{,}25 \end{bmatrix}$$

$$Z_{WE} = 6$$

Zadanie 11.3

Wyznaczyć transmitancję napięciową obwodu przedstawionego na rys. 11.17. Określić odpowiedź impulsową i charakterystykę częstotliwościową przyjmując wartości elementów *R*=2Ω, C=3F, k=3.



Rys. 11.17 Schemat obwodu do zadania 11.3

Rozwiązanie

Transmitancja napięciowa: $T(s) = \dfrac{k + RsC}{1 + RsC} = \dfrac{s + 0.5}{s + 1/6}$

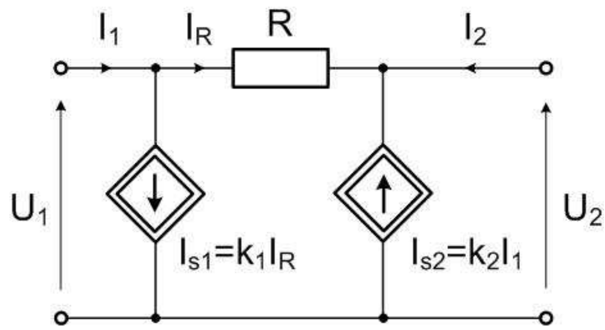
Charakterystyka amplitudowa: $|T_u(j\omega)| = \sqrt{\dfrac{\omega^2 + 0.5^2}{\omega^2 + \left(\dfrac{1}{6}\right)^2}}$

Charakterystyka fazowa: $\varphi(\omega) = \mathrm{arctg}(2\omega) - arctg(6\omega)$

Odpowiedź impulsowa: $h(t) = \delta(t) + \frac{1}{3}e^{-\frac{1}{6}t}$

Zadanie 11.4

Określić macierz admitancyjną czwórnika przedstawionego na rys. 11.18. Przyjąć wartość rezystancji R=4Ω, k_1=3, k_2=3.



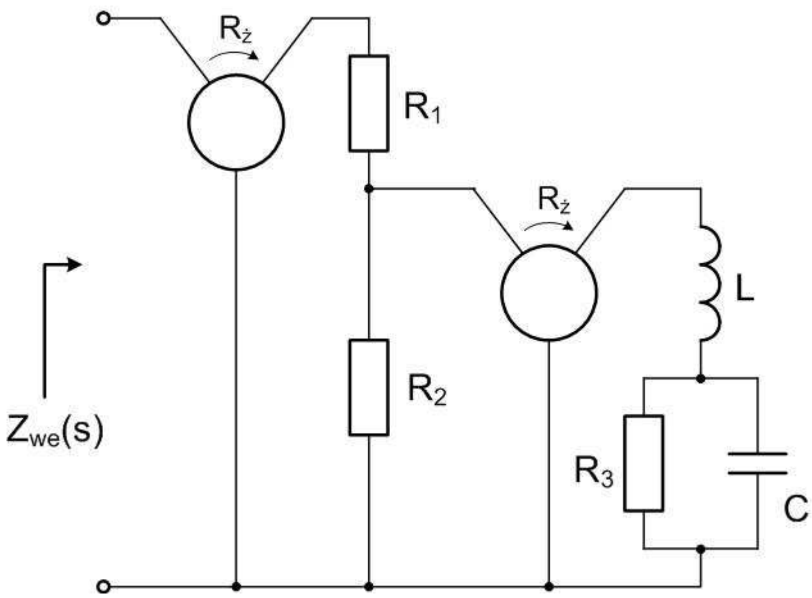
Rys. 11.18 Schemat obwodu do zadania 11.4

Rozwiązanie

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 0{,}75 & -0{,}75 \\ -2{,}5 & 2{,}5 \end{bmatrix}$$

Zadanie 11.5

Obliczyć impedancję wejściową obwodu $R_ż$=1Ω, R_1=1Ω, R_2=2Ω, R_3=1Ω, C=1F, L=1H.



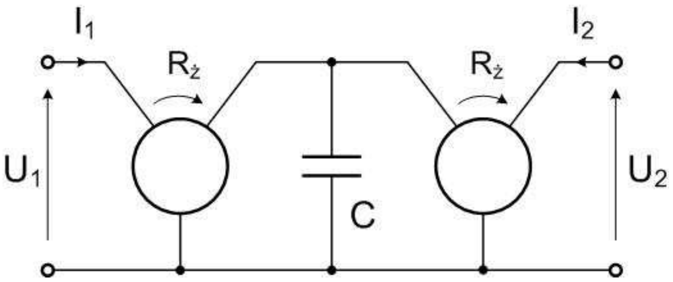
Rys. 11.19 Schemat obwodu do zadania 11.5

Rozwiązanie

$$Z_{WE}(s) = \frac{2s^2+3s+3}{2s^2+5s+5}$$

Zadanie 11.6

Obliczyć macierz łańcuchową układu przedstawionego na rysunku 11.20.



Rys. 11.20. Schemat obwodu do zadania 11.6

Rozwiązanie

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & sR_{ż}C \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Test do wykładu 11

1. Transmitancja napięciowa układu jest powiązana z macierzą łańcuchową **A** równaniem
   a) $H(s)=A_{11}$
   xb) $H(s)=1/A_{11}$
   c) $H(s)=A_{11}/A_{22}$
   d) $H(s)=-A_{21}/A_{22}$

2. Impedancja wejściowa czwórnika obciążonego zależy w ogólności od
   xa) wszystkich parametrów łańcuchowych czwórnika
   b) wyłącznie od parametrów A_{11} i A_{22}
   c) wyłącznie od parametrów A_{11} i A_{12}
   d) nie zależy od żadnego z parametrów łańcuchowych

3. Macierze impedancyjna **Z** i admitancyjna **Y** czwórnika są powiązane ze sobą relacją
   a) $\mathbf{Z}=-\mathbf{Y}$
   xb) $\mathbf{Z}=\mathbf{Y}^{-1}$
   c) $\mathbf{Z}=\mathbf{Y}$
   d) $\mathbf{Z}=(\mathbf{Y+1})^{-1}$

4. W połączeniu równoległym 2 czwórników macierz admitancyjna czwórnika zastępczego jest równa
   a) iloczynowi obu macierzy admitancyjnych

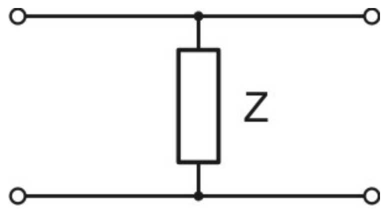
xb) sumie obu macierzy admitancyjnych
c) różnicy obu macierzy admitancyjnych
d) ilorazowi obu macierzy admitancyjnych

5. W połączeniu kaskadowym 2 czwórników macierz łańcuchowa czwórnika zastępczego jest równa
    xa) iloczynowi obu macierzy łańcuchowych
    b) sumie obu macierzy łańcuchowych
    c) różnicy obu macierzy łańcuchowych
    d) ilorazowi obu macierzy łańcuchowych

6. Żyrator obciążony pojemnością jest równoważny
    a) rezystorowi
    b) kondensatorowi
    xc) cewce
    d) połączeniu szeregowemu rezystancji i cewki

7. NIC obciążony indukcyjnością jest równoważny
    a) rezystorowi o wartości ujemnej
    b) cewce o indukcyjności dodatniej
    xc) cewce o indukcyjności ujemnej
    d) kondensatorowi o pojemności ujemnej

8. Macierz hybrydowa czwórnika z rys. 11.21 jest równa



Rys. 11.21. Schemat obwodu do pytania 8

xa) $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & Y \end{bmatrix}$

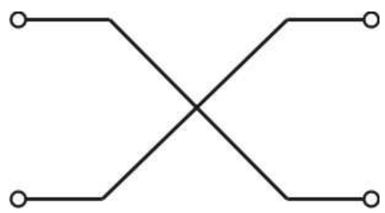
b) $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & Y \end{bmatrix}$

c) $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & Z \end{bmatrix}$

d) $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & Y \end{bmatrix}$

gdzie $Y=Z^{-1}$.

9. Macierz łańcuchowa czwórnika z rys. 11.22 jest równa



Rys. 11.22. Schemat obwodu do pytania 9

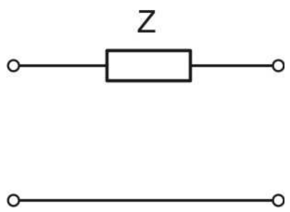
xa) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

10. Macierz admitancyjna czwórnika z rys. 11.23 jest równa



Rys. 11.23. Schemat obwodu do pytania 10

xa) $\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y & -Y \\ -Y & Y \end{bmatrix}$

b) $\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y & Y \\ Y & Y \end{bmatrix}$

c) $\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} -Y & -Y \\ -Y & -Y \end{bmatrix}$

d) $\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} -Y & Y \\ Y & -Y \end{bmatrix}$

gdzie $Y=Z^{-1}$.