

3.3 Ćwiczenia do samodzielnego rozwiązania

Ćwiczenie 3.1. Korzystając z reguły d'Hospitala obliczyć następujące granice

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$. Odp. $\frac{a}{b}$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$. Odp. 2.

c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$. Odp. 0.

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x}$. Odp. 0.

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x^2}$. Odp. 0.

Ćwiczenie 3.2. Zbadać funkcje (wynik zilustrować tabelą).

a) $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$,

b) $f(x) = \frac{(x-1)^2}{1+x^2}$.

Odp.

a) rosnąca dla $x \in (-\infty, -2)$ oraz $x \in (0, \infty)$, malejąca dla $x \in (-2, 0)$, maksimum dla $x = -2$, minimum dla $x = 0$.

b) rosnąca dla $x \in (-\infty, -1)$ oraz $x \in (1, \infty)$, malejąca dla $x \in (-1, 1)$, maksimum dla $x = -1$, minimum dla $x = 1$.

Ćwiczenie 3.3. Obliczyć pochodne funkcji złożonych podanych w Ćwiczeniu 2.3. Odpowiedzi

a) $h'(x) = 2 \cos x (-\sin x)$,

b) $h'(x) = \frac{1}{\sin x} \cos x$,

c) $h'(x) = e^{x^2+1} 2x$,

d) $h'(x) = \frac{4x}{3\sqrt[3]{1+x^2}}$.

Ćwiczenie 3.4. Zbadać wypukłość i wklęsłość funkcji

a) $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + 4$,

b) $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Odp.

- a) $f''(x) > 0$ dla $x \in (2, \infty)$ – wypukła, $f''(x) < 0$ dla $x \in (-\infty, 2)$ – wklęsła.
- b) $f''(x) > 0$ dla $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ – wypukła, $f''(x) < 0$ dla $x \in (-1, 1)$ – wklęsła,
dla $x_1 = -1$ oraz $x_2 = 1$ punkty przegięcia.