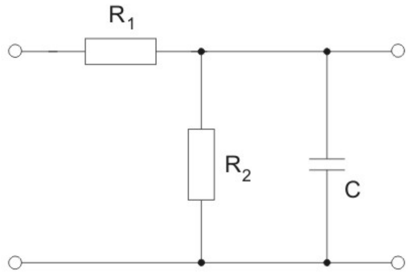
Rozwiązanie zestawu zadań nr 5 z Podstaw Elektrotechniki i Elektroniki

Zad. 1
Wyznaczyć transmitancję napięciową układu przedstawionego na rys. 1. Określić odpowiedź impulsową i skokową.

Dane:
$R_1 = 5\ \Omega$
$R_2 = 10\ \Omega$
$C = 0{,}1$ F



Rozwiązanie:

Impedancja zastępcza R_2C*:*

$$Z_2(s) = \frac{R_2 \frac{1}{sC}}{R_2 + \frac{1}{sC}} = \frac{10 \cdot \frac{10}{s}}{10 + \frac{10}{s}} = \frac{10}{s+1}$$

Transmitancja napięciowa:

$$T_V(s) = \frac{Z_2}{R_1 + Z_2} = \frac{\frac{10}{s+1}}{5 + \frac{10}{s+1}} = \frac{10}{5s+5+10} = \frac{10}{5s+15} = \frac{2}{s+3}$$

Odpowiedź impulsowa:

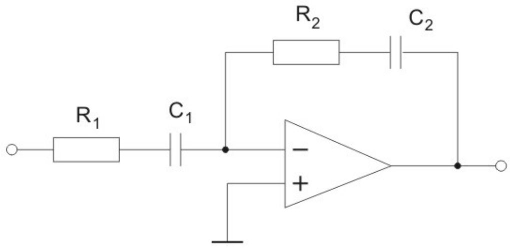
$$h(t) = L^{-1}\left[T_V(s)\right] = 2e^{-3t}$$

Odpowiedź skokowa:

$$y(t) = L^{-1}\left[\frac{T_V(s)}{s}\right] = L^{-1}\left[\frac{2}{s(s+3)}\right] = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}e^{-3t}$$

Zad. 2
Wyznaczyć transmitancję napięciową, odpowiedź skokową i impulsową oraz charakterystyki częstotliwościowe dla obwodu z rysunku.

Dane:
$R_1 = 5$ kΩ
$R_2 = 10$ kΩ
$C_1 = 1$ μF
$C_2 = 5$ μF



Rozwiązanie:

Impedancja operatorowa $Z_1(s)$ i $Z_2(s)$:

$$Z_1(s) = R_1 + \frac{1}{sC_1} = 5\cdot 10^3 + \frac{10^6}{s} = \frac{10^6}{s}\left(5\cdot 10^{-3}s + 1\right)$$

$$Z_2(s) = R_2 + \frac{1}{sC_2} = 10^4 + \frac{10^6}{5s} = \frac{10^6}{s}\left(10^{-2}s + 0{,}2\right)$$

Transmitancja napięcia:

$$T_V(s) = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} = -\frac{10^{-2}s + 0{,}2}{5\cdot 10^{-3}s + 1} = -\frac{2s + 40}{s + 200}$$

Odpowiedź impulsowa:

$$h(t) = L^{-1}\left[T_V(s)\right] = -L^{-1}\left[2 + \frac{-360}{s+200}\right] = -2\delta(t) + 360e^{-200t}$$

Odpowiedź skokowa:

$$y(t) = L^{-1}\left[\frac{T_V(s)}{s}\right] = L^{-1}\left[\frac{2s+40}{s(s+200)}\right] = -\frac{40}{200} - 1{,}8e^{-200t}$$

Charakterystyki częstotliwościowe:

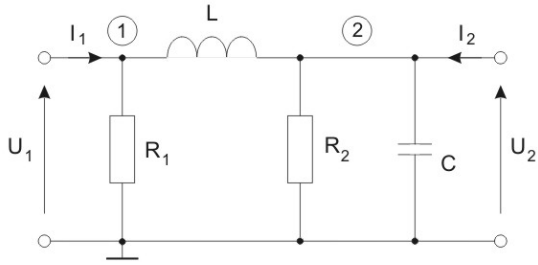
$$T_V(j\omega) = T_V(s)\Big|_{s=j\omega} = -\frac{2j\omega + 40}{j\omega + 200} = \frac{\sqrt{40^2 + (2\omega)^2}}{\sqrt{200^2 + \omega^2}}\cdot\frac{e^{j\cdot \mathrm{arctg}\frac{2\omega}{40}}}{e^{j\cdot \mathrm{arctg}\frac{\omega}{200}}}e^{j180^\circ}$$

$$\left|T_V(j\omega)\right| = \sqrt{\frac{1600 + 4\omega^2}{4\cdot 10^4 + \omega^2}}$$

$$\varphi(\omega) = 180^\circ + \mathrm{arctg}\frac{\omega}{20} - \mathrm{arctg}\frac{\omega}{200}$$

Zad. 3
Określić opis admitancyjny czwórnika.

Dane:
$R_1 = 2\ \Omega$
$R_2 = 5\ \Omega$
$C = 0{,}5$ F
$L = 1$ H



Na tej podstawie określić transmitancję napięciową obwodu.

Rozwiązanie:

Z równań węzłowych obwodu względem punktu odniesienia mamy:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{sL} & -\dfrac{1}{sL} \\ -\dfrac{1}{sL} & \dfrac{1}{R_2}+sC+\dfrac{1}{sL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}5+\dfrac{1}{s} & -\dfrac{1}{s} \\ -\dfrac{1}{s} & 0{,}2+0{,}5s+1/s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Transmitancja napięciowa obliczana przy założeniu $I_2 = 0$:

$$I_2 = 0 = -\frac{1}{s}V_1 + (0{,}2+0{,}5s)V_2$$

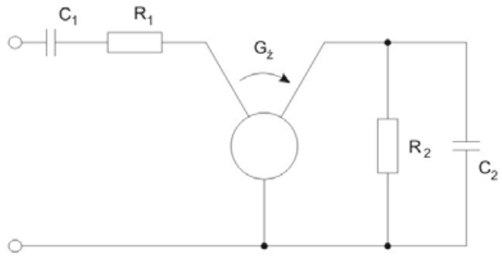
Stąd:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{1}{s}}{0{,}2+0{,}5s}$$

$$T_V(s) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{2}{s(s+0{,}4)}$$

Zad. 4
Wyznaczyć impedancję wejściową $Z_{we}(s)$ układu

Dane:
$R_1 = 1\ \text{k}\Omega$
$R_2 = 2\ \text{k}\Omega$
$C_1 = 5\ \mu\text{F}$
$C_2 = 1\ \mu\text{F}$
$G_ż = 10^{-3}$



Rozwiązanie:

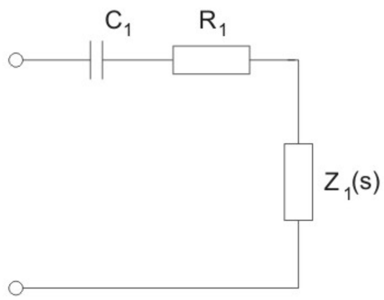
Impedancja

$$Z_2(s) = \frac{1}{\frac{1}{R_2} + sC_2} = \frac{1}{0{,}5 \cdot 10^{-3} + 10^{-6} s} :$$

Impedancja wejściowa żyratora obciążonego $Z_2(s)$ jest równa:

$$Z_1(s) = \frac{R_ż^2}{Z_2(s)} = 10^6 \left(0{,}5 \cdot 10^{-3} + 10^{-6} s\right) = 0{,}5 \cdot 10^3 + s$$

Postać obwodu po uproszczeniu:



Impedancja wejściowa obwodu:

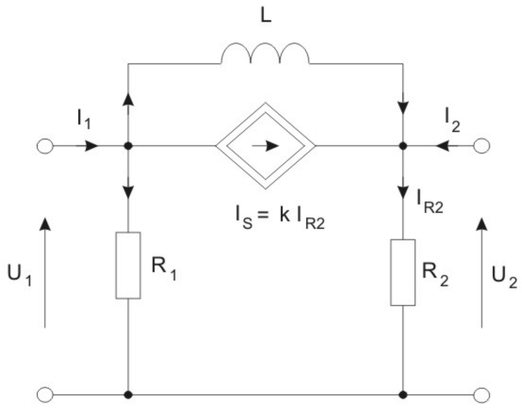
$$Z_{we}(s) = R_1 + \frac{1}{sC_1} + Z_1(s) = 10^3 + \frac{10^6}{5s} + 0{,}5 \cdot 10^3 + s$$

$$Z_{we}(s) = 1{,}5 \cdot 10^3 + s + \frac{1}{5 \cdot 10^{-6} s}$$

Jest to połączenie szeregowe rezystancji R = 1,5 kΩ, indukcyjności L = 1H oraz pojemności C = 5μF.

Zad. 5
Wyznaczyć opis łańcuchowy czwórnika. Na jego podstawie wyznaczyć transmitancję napięciową $T_V(s)$.

Dane:
$R_1 = 2\ \Omega$
$R_2 = 5\ \Omega$
$L = 0{,}5$ H
$k = 3$



Rozwiązanie:

Z równań Kirchhoffa otrzymuje się:

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1} + k\frac{U_2}{R_2} + \frac{1}{sL}\left(U_1 - U_2\right)$$

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2} - k\frac{U_2}{R_2} - \frac{1}{sL}\left(U_1 - U_2\right) \quad \rightarrow \quad U_1 = U_2\left[\frac{sL}{R_2} - \frac{ksL}{R_2} + 1\right] - I_2 sL$$

$$I_1 = \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{sL}\right]\cdot U_2\left[\frac{sL}{R_2} - \frac{ksL}{R_2} + 1\right] - \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{sL}\right] I_2 \cdot sL + U_2\left[\frac{k}{R_2} - \frac{1}{sL}\right]$$

$$\boxed{I_1 = U_2\left[\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{sL}\right)\left(\frac{sL}{R_2} - \frac{ksL}{R_2} + 1\right) + \left(\frac{k}{R_2} - \frac{1}{sL}\right)\right] - I_2\left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{sL}\right] sL}$$

Po wstawieniu liczb:

$$U_1 = U_2\left(0{,}1s - 0{,}3s + 1\right) - I_2 \cdot 0{,}5s$$

$$I_1 = U_2\left[\left(0{,}5 + \frac{2}{s}\right)\left(0{,}1s - 0{,}3s + 1\right) + \left(0{,}6 - \frac{2}{s}\right)\right] - I_2 \cdot 0{,}5s\left(0{,}5 + \frac{2}{s}\right)$$

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-0{,}2s+1) & 0{,}5s \\ \left(0{,}5+\dfrac{2}{s}\right)\left(-0{,}2s+1\right)+\left(0{,}6-\dfrac{2}{s}\right) & 0{,}5s\left(0{,}5+\dfrac{2}{s}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

Więc transmitancja napięciowa równa się:

$$T_V(s) = \frac{1}{A_{11}} = \frac{1}{-0{,}2s+1}$$