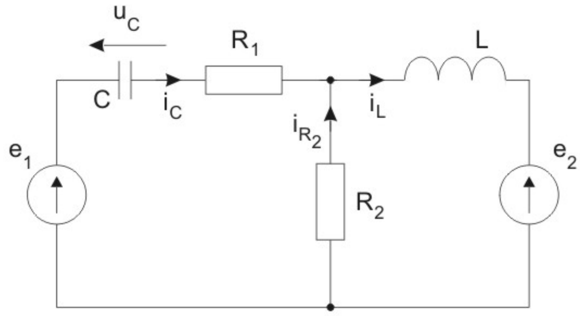
Rozwiązanie zestawu zadań nr 4 z Podstaw Elektrotechniki i Elektroniki

Zad. 1
Wyznaczyć równanie stanu $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$ obwodu.

Dane:
$R_1 = R_2 = 2\ \Omega$
$L = 1$ H
$C = 0{,}5$ F



Rozwiązanie:

Równania wyjściowe:

$$e_1 = u_C + R_1 C \frac{du_C}{dt} + L\frac{di_L}{dt} + e_2$$
$$C\frac{du_C}{dt} = i_L + \frac{1}{R_2}\left(e_2 + L\frac{di_L}{dt}\right)$$

Po podstawieniu liczb mamy:

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{du_C}{dt} + u_C = e_1 - e_2$$
$$\frac{di_L}{dt} - \frac{du_C}{dt} + 2i_L = -e_2$$

stąd:

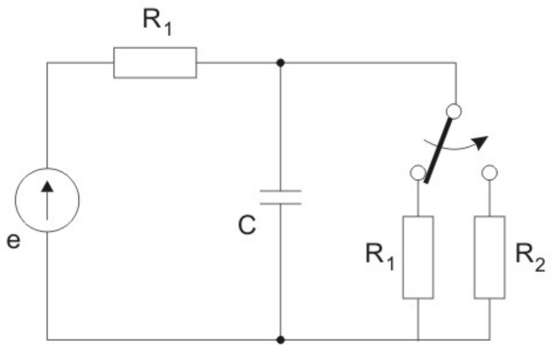
$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{1}{2}u_C - i_L + \frac{1}{2}\left(e_1 - 2e_2\right)$$
$$\frac{du_C}{dt} = -\frac{1}{2}u_C + i_L + \frac{1}{2}e_1$$

stąd:

$$\begin{bmatrix} \frac{di_L}{dt} \\ \frac{du_C}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

Zad. 2
Określić przebieg $u_c(t)$ w stanie nieustalonym w obwodzie po przełączeniu.

Dane:
$R_1 = 100\ \Omega$
$R_2 = 300\ \Omega$
$C = 1000\ \mu\text{F}$
$e(t) = 20$ V



Rozwiązanie:

1) Warunki początkowe w obwodzie (stan ustalony przed przełączeniem).

Wobec ω=0 kondensator stanowi przerwę. Prąd płynie w obwodzie: e-R_1-R_1. Jego wartość:

$$I = \frac{e}{2R_1} = \frac{20}{200} = 0{,}1\text{A}$$

Napięcie na kondensatorze:

$$IR_1 = 10$$
$$\boxed{u_C(0^-) = 10\text{V}}$$

2) Stan ustalony w obwodzie po przełączeniu.

Obwód podobny do tego z punktu 1 przy zastąpieniu R_1 przez R_2. Prąd płynie w obwodzie: e-R_1-R_2. Jego wartość:

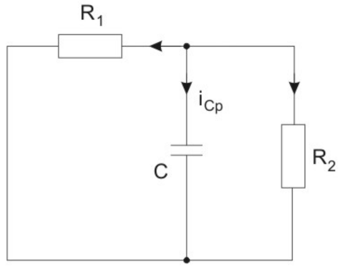
$$I = \frac{e}{R_1 + R_2} = \frac{20}{400} = \frac{1}{20}\text{A}$$

Napięcie ustalone na kondensatorze:

$$\boxed{u_{Cu}(t) = IR_2 = 15\text{V}}$$

3. Stan przejściowy (metoda klasyczna).

Obwód dla stanu przejściowego pokazuje rysunek .



Z prawa prądowego Kirchhoffa:

$$C\frac{du_{Cp}}{dt} = -\frac{u_{Cp}}{R_1} - \frac{u_{Cp}}{R_2}$$

Po wstawieniu liczb otrzymuje się

$$10^{-3}\frac{du_{Cp}}{dt} = -u_{Cp}\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{300}\right)$$

$$\frac{du_{Cp}}{dt} = -u_{Cp}(10 + 3{,}33) = -13{,}33u_{Cp}$$

$$s = -13{,}33$$

$$u_{Cp}(t) = Ae^{-13{,}33t}$$

4. Rozwiązanie pełne

$$u_C(t) = u_{Cu}(t) + u_{Cp}(t) = 15 + Ae^{-13{,}33t}$$

Z warunku początkowego

$$10 = 15 + A \quad \rightarrow \quad A = -5$$

Przebieg napięcia $u_C(t)$

$$\boxed{u_C(t) = 15 - 5\mathrm{e}^{-13{,}33}}$$

Zad. 3
Obliczyć transformatę odwrotną Laplace'a dla funkcji:

a) $X(s) = \dfrac{s+5}{(s+1)(s+2)(s+8)}$

b) $X(s) = \dfrac{s}{(s+1)^2(s+2)}$

c) $X(s) = \dfrac{s+2}{s^2+2s+20}$

Rozwiązania:

a)

$$x(t) = \lim_{s\to-1}\frac{s+5}{(s+1)(s+2)(s+8)}e^{st}(s+1) + \lim_{s\to-2}\frac{s+5}{(s+1)(s+2)(s+8)}e^{st}(s+2) + \lim_{s\to-8}\frac{s+5}{(s+1)(s+2)(s+8)}e^{st}(s+8)$$

$$x(t) = \frac{4}{1\cdot 7}e^{-t} + \frac{3}{-1\cdot 6}e^{-2t} + \frac{-3}{-7\cdot(-6)}e^{-8t}$$

$$x(t) = \frac{4}{7}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{14}e^{-8t}$$

b)

$$x(t) = \lim_{s\to-1}\frac{d}{ds}\frac{s}{(s+1)^2(s+2)}e^{st}(s+1)^2 + \lim_{s\to-2}\frac{s}{(s+1)^2(s+2)}e^{st}(s+2)$$

$$x(t) = \left.\frac{(s+2)[e^{st}+tse^{st}] - se^{st}}{(s+2)^2}\right|_{s=-1} + \frac{-2}{(-1)^2}e^{-2t} = [e^{-t} - te^{-t} + e^{-t}] - 2e^{-2t}$$

$$x(t) = 2e^{-t} - te^{-t} - 2e^{-2t}$$

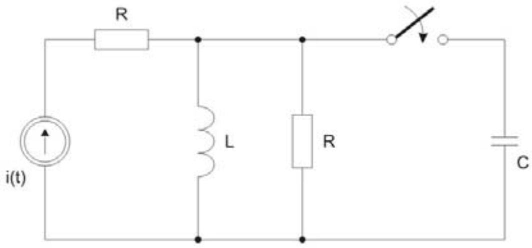
c)

$$X(s) = \frac{(s+1) + 1\cdot\frac{\sqrt{19}}{\sqrt{19}}}{(s+1)^2 + \left(\sqrt{19}\right)^2}$$

$$x(t) = e^{-t}\cos\sqrt{19}t + \frac{1}{\sqrt{19}}e^{-t}\sin\sqrt{19}t$$

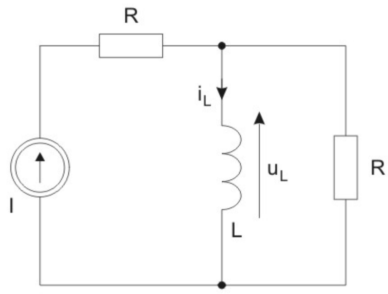
Zad 4.
Wyznaczyć przebiegi $u_C(t)$ oraz $i_L(t)$ w stanie nieustalonym w obwodzie po przełączeniu.

Dane:
$i(t) = 2\sqrt{2}\sin(t+90^\circ)$
R = 1/2 Ω
L = 1 H
C = 1 F



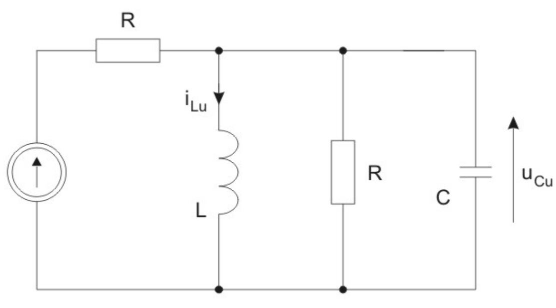
Rozwiązanie:

1. *Warunki początkowe – stan ustalony w obwodzie przed przełączeniem*



$$I = 2e^{j90}$$
$$Z_L = j\omega L = j1$$
$$U_L = I\frac{Z_L \cdot R}{Z_L + R} = 2e^{j90^\circ}\,\frac{j\cdot 0{,}5}{j+0{,}5} = 2e^{j90^\circ}\,\frac{0{,}5e^{j90^\circ}}{1{,}12e^{j63{,}4^\circ}} = 0{,}89e^{j116{,}6^\circ}$$
$$I_L = \frac{U_L}{Z_L} = 0{,}89e^{j26{,}6^\circ}$$
$$i_L(t) = 0{,}89\sqrt{2}\sin\left(t+26{,}6^\circ\right)$$
$$i_L(0^-) = 0{,}56\text{A}$$
$$u_C(0^-) = 0\text{V}$$

2. *Stan ustalony po przełączeniu*



$$Z_C = -j\frac{1}{\omega C} = -j1$$

$$Z_{LC} = \frac{Z_C Z_L}{Z_C + Z_L} = \infty$$

$$U_{Cu} = I \cdot R = 1e^{j90^\circ} \quad \rightarrow \quad u_{Cu}(t) = \sqrt{2}\sin(t + 90^\circ) \quad \rightarrow \quad u_{Cu}(0^+) = \sqrt{2}$$

$$I_{Lu} = \frac{U_{Cu}}{Z_L} = \frac{1e^{j90^\circ}}{j1} = 1 \quad \rightarrow \quad i_{Lu}(t) = \sqrt{2}\sin(t) \quad \rightarrow \quad i_{Lu}(0^+) = 0$$

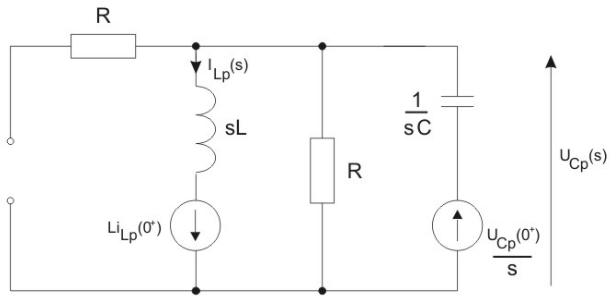
3. Stan przejściowy

Warunki początkowe dla stanu przejściowego

$$u_{Cp}(0^+) = u_C(0^-) - u_{Cu}(0^+) = 0 - 1{,}41 = -1{,}41\text{V}$$

$$i_{Lp}(0^+) = i_L(0^-) - i_{Lu}(0^+) = 0{,}56 - 0 = 0{,}56\text{A}$$

Obwód w stanie przejściowym (schemat operatorowy)



Z metody potencjałów węzłowych

$$U_{Cp}(s) = \frac{-\frac{0{,}56}{s} - 1{,}41}{2 + s + \frac{1}{s}} = \frac{-(1{,}41s + 0{,}56)}{s^2 + 2s + 1} = \frac{-1{,}41s - 0{,}56}{(s+1)^2}$$

$$u_{Cp}(t) = \lim_{s \to -1} \frac{d}{ds}\left[\frac{-1{,}41s - 0{,}56}{(s+1)^2} e^{st}(s+1)^2\right]$$

$$u_{Cp}(t) = te^{st}(-1{,}41s - 0{,}56) + e^{st}(-1{,}41)\Big|_{s=-1} = 0{,}85te^{-t} - 1{,}41e^{-t}$$

Prąd kondensatora

$$i_{Cp} = C\frac{du_{Cp}}{dt} = 0{,}85\left[e^{-t} - te^{-t}\right] + 1{,}41e^{-t} = 2{,}26e^{-t} - 0{,}85te^{-t}$$

Prąd rezystora

$$i_{Rp} = \frac{u_{Cp}}{R} = 1{,}7te^{-t} - 2{,}82e^{-t}$$

Prąd cewki

$$i_{Lp}(t) = -i_{Rp}(t) - i_{Cp}(t) = 0{,}56e^{-t} - 0{,}85te^{-t}$$

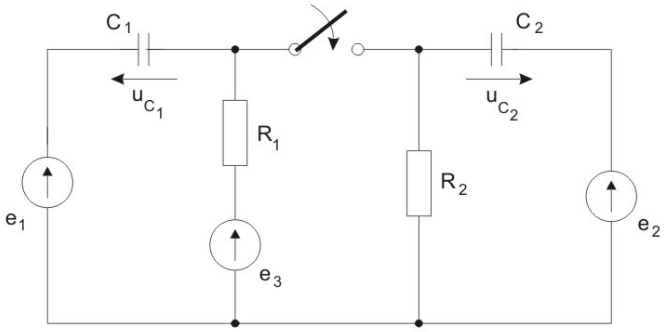
4. *Pełne rozwiązanie*

$$i_L(t) = i_{Lu}(t) + i_{Lp}(t) = \sqrt{2}\sin t + 0{,}56e^{-t} - 0{,}85te^{-t}$$
$$u_C(t) = u_{Cu}(t) + u_{Cp}(t) = \sqrt{2}\sin(t + 90^{\circ}) + 0{,}85te^{-t} - 1{,}41e^{-t}$$

Zad. 5

Wyznaczyć przebiegi napięć na kondensatorach w stanie nieustalonym po przełączeniu w obwodzie.

Dane:
$e_1(t) = 100$ V
$e_2(t) = 200$ V
$e_3(t) = 50$ V
$R_1 = 100\ \Omega$
$R_2 = 200\ \Omega$
$C_1 = 50\ \mu F$
$C_2 = 100\ \mu F$

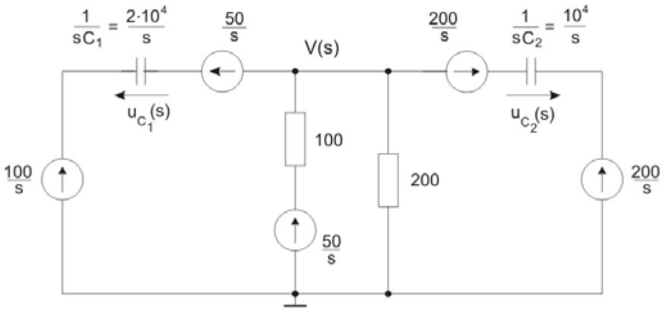


Rozwiązanie:

1. *Warunki początkowe (stan ustalony przed przełączeniem)*

$$u_{C_1}(t) = e_1 - e_3 = 50 \quad \rightarrow \quad u_{C_1}(0^-) = 50$$
$$u_{C_2}(t) = e_2 = 200 \quad \rightarrow \quad u_{C_2}(0^-) = 200$$

2. *Stan nieustalony metodą operatorową*



Z metody potencjałów węzłowych

$$V(s)=\frac{\frac{50}{s100}+25\cdot 10^{-4}}{\frac{1}{100}+\frac{1}{200}+s\cdot 0{,}5\cdot 10^{-4}+s\cdot 10^{-4}}=\frac{0{,}5+s\cdot 25\cdot 10^{-4}}{s\left(0{,}015+s\cdot 1{,}5\cdot 10^{-4}\right)}$$

$$V(s)=\frac{0{,}33\cdot 10^{4}+s\cdot 16{,}6}{s(s+100)} \quad\rightarrow\quad v(t)=\lim_{s\to 0}\frac{0{,}33\cdot 10^{4}}{s(s+100)}e^{st}s+\lim_{s\to -100}\frac{0{,}33\cdot 10^{4}-16{,}66\cdot 100}{s(s+100)}e^{st}(s+100)$$

$$v(t)=33{,}3-16{,}34e^{-100t}$$

$$u_{C_1}(t)=100-v(t)=66{,}7+16{,}34e^{-100t}$$
$$u_{C_2}(t)=200-v(t)=166{,}7+16{,}34e^{-100t}$$

Zad. 6

Określić częstotliwość drgań własnych powstałych w stanie nieustalonym w obwodzie szeregowym RLC, jeśli L = 10mH, C = 1μF, R = 100 Ω. Jak zmieni się ta częstotliwość, jeśli R = 10 Ω?

Rozwiązanie:

Pulsacja drgań własnych obwodu szeregowego RLC

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

Dla R=100 Ω *mamy*

$$\omega = \sqrt{10^8 - \frac{10^4}{4 \cdot 10^{-4}}} = \sqrt{0{,}75 \cdot 10^8} = 8660 \frac{rad}{s}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 1378\text{Hz}$$

Dla R=10 Ω *mamy*

$$\omega = \sqrt{10^8 - \frac{10^2}{4 \cdot 10^{-4}}} = \sqrt{0{,}9975 \cdot 10^8} = 9987 \frac{rad}{s}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 1589{,}6\text{Hz}$$