2.3 Ciągłość

Funkcję f określoną w punkcie x_0 nazywamy *ciągłą w punkcie* x_0 gdy istnieje granica właściwa funkcji w x_0 oraz jest ona równa wartości funkcji w tym punkcie tzn.

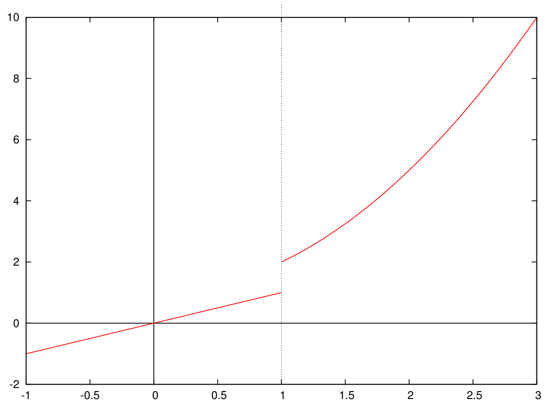
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Funkcję nazywamy *ciągłą w przedziale* (a, b) gdy jest ona ciągła w każdym punkcie tego przedziału. Funkcje elementarne są funkcjami ciągłymi w swojej dziedzinie. Suma, różnica iloczyn, iloraz funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą. Jeżeli funkcja jest funkcją ciągłą w przedziale domkniętym $\langle a, b\rangle$ to ma w tym przedziale wartość największą oraz najmniejszą.

Przykład 2.8. Funkcja

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x < 1 \\ x^2 + 1 & \text{dla } x \geq 1 \end{cases} \tag{2.2}$$

nie jest ciągła w punkcie $x = 1$ ponieważ nie istnieje granica funkcji w tym punkcie.



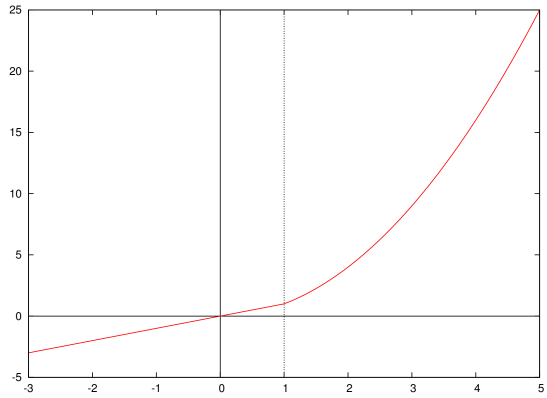
Rysunek 2.5: Wykres funkcji (2.2)

Przykład 2.9. Funkcja

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x < 1 \\ x^2 & \text{dla } x \geq 1 \end{cases} \tag{2.3}$$

jest ciągła w punkcie $x = 1$ ponieważ

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1).$$



Rysunek 2.6: Wykres funkcji (2.3)

Czasami badamy jednostronną ciągłość funkcji w punkcie. Funkcję określoną w lewostronnym otoczeniu punktu x_0 tzn. dla $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0\rangle, \varepsilon > 0$, nazywamy lewostronnie ciągłą w x_0 jeżeli

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

Analogicznie możemy zdefiniować funkcje prawostronnie ciągłą w punkcie x_0, dla $x \in \langle x_0, x_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ jeżeli

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Funkcja (2.2) z poprzedniego przykładu jest prawostronnie ciągła w punkcie $x = 1$. Jest natomiast nieciągła. Nieciągłość funkcji w punkcie może być

pierwszego rodzaju – gdy różnica granicy lewostronnej i prawostronnej w tym punkcie jest wielkością skończoną

drugiego rodzaju – gdy jedna z granic lewostronna lub prawostronna tym punkcie jest granicą niewłaściwą.