12.1 Pole skalarne i wektorowe

Rozpatrzmy przestrzeń V trójwymiarową z ortogonalnym układem współrzędnych.

Definicja 12.1. Jeżeli każdemu punktowi $M(x, y, z)$ obszaru V przyporządkowana jest dokładnie jedna liczba rzeczywista, to mówimy, że w obszarze V zostało określone *pole skalarne.*

Pole skalarne φ jest określone jeżeli istnieje funkcja $u = \varphi(M) = \varphi(x, y, z)$.

Pole skalarne φ jest klasy C^1 w obszarze V jeżeli funkcja $\varphi(x, y, z)$ ma w tym obszarze ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego rzędu wówczas mówimy, że pole jest różniczkowalne.

Definicja 12.2. Jeżeli każdemu punktowi $M(x, y, z)$ obszaru V przyporządkowany jest dokładnie jeden wektor, to mówimy, że w obszarze V zostało określone *pole wektorowe.*

Pole wekotorowe $\overrightarrow{W}$ jest określone jeżeli istnieją funkcje $[P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)]$ określone w obszarze V, będące współrzędnymi wektora pola, czyli

$$\overrightarrow{W}(P, Q, R) = P(x, y, z)\overline{i} + Q(x, y, z)\overline{j} + R(x, y, z)\overline{k},$$

$\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ są wersorami układu współrzędnych.

Linią pola wektorowego $\overrightarrow{W}(P, Q, R)$ nazywamy linię, której kierunek w każdym punkcie M pokrywa się z wektorem pola w tym punkcie.

Definicja 12.3. Niech funkcja $f(P)$ jest klasy C^1. *Gradientem* tej funkcji nazywamy wektor, którego współrzędnymi są pochodne cząstkowe pierwszego rzędu. Dla $f(x, y, z)$

$$\overrightarrow{W} = \operatorname{grad} f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right].$$

Funkcję f nazywamy *potencjałem* skalarnym pola wektorowego $\overrightarrow{W}$.

Zapisujemy to symbolem $\overrightarrow{W} = \operatorname{grad} f$.

Dla funkcji $f(x, y)$ klasy C^1 wektor $\overrightarrow{W} = \operatorname{grad} f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right] = f_x\overline{i} + f_y\overline{j}$, gdzie $\overline{i}, \overline{j}$ są wersorami układu Oxy.

Niech pole wektorowe $\overrightarrow{W}(P, Q, R)$ posiada współrzędne $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ będące funkcjami klasy C^1.

Definicja 12.4. *Rotacją pola wektorowego* $\overrightarrow{W}(P, Q, R)$ nazywamy wektor zdefiniowany symbolicznie za pomocą wyznacznika:

$$\operatorname{rot} \overrightarrow{W} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

Obliczając wyznacznik otrzymujemy wzór

$$\operatorname{rot}\overrightarrow{W} = \overline{i}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \overline{j}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \overline{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Pole wektorowe nazywamy *bezwirowym* jeżeli $\operatorname{rot}\overrightarrow{W} = 0$.

Można wykazać, że pole potencjalne jest bezwirowe tzn. $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = 0$.

Definicja 12.5. *Dywergencją pola wektorowego* $\overrightarrow{W}(P, Q, R)$ nazywamy wielkość skalarną zdefiniowaną następująco:

$$\operatorname{div}\overrightarrow{W} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Pole wektorowe nazywamy *bezźródłowym*, jeżeli $\operatorname{div}\overrightarrow{W} = 0$.

Można wykazać, że $\operatorname{div}\operatorname{grad} f = 0$, czyli pole potencjalne jest bezźródłowe, $\operatorname{div}\operatorname{rot}\overrightarrow{W} = 0$, czyli pole rotacji różniczkowalnego pola wektorowego jest bezźródłowe.

Dla ułatwienia zapisu operacji w polu wektorowym i skalarnym wprowadza się operator Hamiltona zwany także operatorem „nabla” zdefiniowanym symbolem

$$\nabla = \overline{i}\frac{\partial}{\partial x} + \overline{j}\frac{\partial}{\partial y} + \overline{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

i zwany także pseudowektorem.

Stąd $\nabla f = \operatorname{grad} f$, $\nabla \circ \overrightarrow{W} = \operatorname{div}\overrightarrow{W}$, $\nabla \times \overrightarrow{W} = \operatorname{rot}\overrightarrow{W}$.

Operacja $\nabla\nabla f = \nabla^2 f = \operatorname{div}\operatorname{grad} f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$ zwana jest laplasjanem. Czasem laplasjan f zapisuje się symbolem Δf.

Przykład 12.6. Obliczyć

a) gradient funkcji
$$f(x, y, z) = x^3 + y^2 z$$
w punktach $A(1, 1, 1)$, $B = (3, 2, 0)$.

b) Znaleźć kąt między gradientami w tych punktach.

c) Wyznaczyć punkty, w których gradient tej funkcji jest równy zeru.

Rozwiązanie

a)
$$\operatorname{grad} f = f_x\overline{i} + f_y\overline{j} + f_z\overline{k} = 3x^2\overline{i} + 2yz\overline{j} + y^2\overline{k}$$

$\operatorname{grad} f(A) = 3\overline{i} + 2\overline{j} + \overline{k}$, $\operatorname{grad} f(B) = 27\overline{i} + 4\overline{k} = 27\overline{i} + 0\overline{j} + 4\overline{k}$.

b) Cosinu kąta φ między gradientami wynosi

$$\cos\varphi = \frac{\operatorname{grad} f(A) \cdot \operatorname{grad} f(B)}{|\operatorname{grad} f(A)| \cdot |\operatorname{grad} f(B)|} = \frac{3 \cdot 27 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 1}{\sqrt{9+4+1} \cdot \sqrt{(27)^2 + 16}} =$$
$$= \frac{85}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{729 + 16}} = \frac{85}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{27^2 + 16}} \approx \frac{85}{102} = 0,83.$$

c) $\operatorname{grad} f = 0$, gdy

$$\begin{cases} 3x^2 = 0, \\ 2yz = 0, \\ y^2 = 0, \end{cases}$$

czyli w punkcie $(0,0,0)$.

Przykład 12.7. Przyjmując oznaczenie $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ obliczyć

a) $\operatorname{grad} r$,

b) $\operatorname{grad} \frac{1}{r}$.

a) $\operatorname{grad} r = \frac{2x}{2r}\bar{i} + \frac{2y}{2r}\bar{j} + \frac{2z}{2r}\bar{k} = \frac{x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}}{r} = \frac{[x,y,z]}{r}$.
b) $\operatorname{grad} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}\left[\frac{x}{r}\bar{i} + \frac{y}{r}\bar{j} + \frac{z}{r}\bar{k}\right] = -\frac{1}{r^3}\left[x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}\right] = -\frac{[x,y,z]}{r^3}$.

Przykład 12.8. Dane jest pole indukcji elektromagnetycznej

$$\overrightarrow{D} = \frac{e}{r^3}\vec{r}$$

utworzone przez ładunek e umieszczony w początku układu, gdzie $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\vec{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$. Obliczyć $\operatorname{div} \overrightarrow{D}$.

Rozwiązanie Mamy $\overrightarrow{D} = \frac{e}{r^3}x\bar{i} + \frac{e}{r^3}y\bar{j} + \frac{e}{r^3}z\bar{k}$.

Korzystając z pochodnych mamy

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{ex}{r^3}\right) = e\frac{r^2-3x^2}{r^5},$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{ey}{r^3}\right) = e\frac{r^2-3y^2}{r^5},$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{ez}{r^3}\right) = e\frac{r^2-3z^2}{r^5}.$$

Stąd

$$\operatorname{div} \overrightarrow{D} = \frac{e}{r^5}(3r^2 - 3x^2 - 3y^2 - 3z^2) = \frac{e\cdot(3r^2-3r^2)}{r^5} = 0.$$

Przykład 12.9. Obliczyć rotację pola wektorowego

$$\overrightarrow{W} = zx\bar{i} + xy\bar{j} + yz\bar{k}.$$

Korzystamy ze wzoru

$$\operatorname{rot} \overrightarrow{W} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ zx & xy & yz \end{vmatrix} == \bar{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}(yz) - \frac{\partial}{\partial z}(xy)\right] + \bar{j}\left[\frac{\partial}{\partial z}(zx) - \frac{\partial}{\partial x}(yz)\right] + \bar{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}(xy) - \frac{\partial}{\partial y}(zx)\right] =$$

$$= z\bar{i} + x\bar{j} + y\bar{k} = [z,x,y].$$

Przykład 12.10. Wyznaczyć gradient funkcji skalarnej

$$f(x, y, z) = \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) - 2xyz.$$

Rozwiązanie. Mamy

$$f_x = x^2 - 2yz, \qquad f_y = y^2 - 2xz, \qquad f_z = z^2 - 2xy.$$

Zatem

$$\operatorname{grad} f = [x^2 - 2yz, y^2 - 2xz, z^2 - 2xy].$$

□

Przykład 12.11. Wyznaczyć dywergencję pola wektorowego

(a) $\overrightarrow{W} = [y - x, 2x - y, z]$.

(b) $\overrightarrow{W} = [x^2 + xy + 2z, xyz, x + z]$.

Rozwiązanie. (a) Podstawiając do wzoru otrzymujemy

$$\operatorname{div} \overrightarrow{W} = \frac{\partial}{\partial x}(y - x) + \frac{\partial}{\partial y}(2x - y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = -1 - 1 + 1 = -1.$$

(b) Liczymy jak w (a)

$$\operatorname{div} \overrightarrow{W} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + xy + 2z) + \frac{\partial}{\partial y}(xyz) + \frac{\partial}{\partial z}(x + z) = 2x + y + xz + 1.$$

□

Przykład 12.12. Wyznaczyć rotację pola wektorowego

(a) $\overrightarrow{W} = \left[\frac{1}{2}xy^2, zy^2, xz^2\right]$,

(b) $\overrightarrow{W} = [x^2 + xy + 2z, xyz, x + z]$.

Rozwiązanie. (a) Korzystając z postaci wyznacznikowej rotacji otrzymujemy

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \overrightarrow{W} &= \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{2}xy^2 & zy^2 & xz^2 \end{vmatrix} = \overline{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}(xz^2) - \frac{\partial}{\partial z}(zy^2)\right] \\ &- \overline{j}\left[\frac{\partial}{\partial x}(xz^2) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2}xy^2\right)\right] + \overline{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}(zy^2) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}xy^2\right)\right] = \\ &= \overline{i}(0 - y^2) - \overline{j}(z^2 - 0) + \overline{k}(0 - xy) = [-y^2, -z^2, -xy]. \end{aligned}$$

(b) Analogicznie jak poprzednio otrzymujemy

$$\operatorname{rot}\overrightarrow{W} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2+xy+2z & xyz & x+z \end{vmatrix} = \bar{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}(x+z) - \frac{\partial}{\partial z}(xyz)\right]$$

$$-\bar{j}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x+z) - \frac{\partial}{\partial z}(x^2+xy+2z)\right] + \bar{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}(xyz) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2+xy+2z)\right] =$$

$$= \bar{i}(0-xy) - \bar{j}(1-2) + \bar{k}(yz-x) = [-xy, 1, yz-1].$$

$\square$