Zadania do lekcji 1 i 2

Zadanie 1. Dane są dwie liczby przybliżone a=0,035 i b=0,031. Wszystkie cyfry tych liczb są dokładne tzn.: błędy bezwzględne tych liczb są równe 0,0005. Obliczyć błędy względne tych liczb i błąd względny różnicy $a- b$. Określić w procentach wszystkie błędy względne.

Zadanie 2. Dane są trzy liczby przybliżone : a=0,26, b=1,31, c= -0,21 . Wszystkie cyfry tych liczb są dokładne. Obliczyć błąd względny iloczynu tych liczb.

Zadanie 3. Obliczyć błąd względny i bezwzględny ilorazu liczb przybliżonych a/b jeśli a=2,34, b=1,23 i błąd bezwzględny każdej z tych liczb wynosi 0,001.

Zadanie 4. Obliczyć maksymalny błąd bezwzględny i względny przekątnej prostokąta o bokach a=2,16cm i b=1,75cm, jeśli błąd przyrządu pomiarowego użytego do obliczenia a i b wynosi 0,01cm. Podać wskaźniki uwarunkowania.

Zadanie 5. Obliczyć wartość funkcji $f(x,y) = \frac{1}{x} + xy$, jej błąd bezwzględny i względny oraz wskaźniki uwarunkowania dla x =5,34 , y = 1,34 , jeśli argumenty są obarczone błędem bezwzględnym 0,005.

Zadanie 6. Obliczyć wartość funkcji $f(x,y) = y^2 x + 2y$, jej błąd bezwzględny i względny oraz wskaźniki uwarunkowania dla x =1,21 , y = 1,43 jeśli argumenty są obarczone błędem bezwzględnym 0,002.

Zadanie 7. Obliczyć maksymalny błąd bezwzględny i błąd względny przekątnej prostopadłościanu o bokach a=2,16cm i b=1,75cm c = 2,13cm, jeśli błąd przyrządu pomiarowego użytego do obliczenia a , b i c wynosi Δ =0,01cm. Podać wskaźniki uwarunkowania.

Zadanie 8. Dany jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n}{n^4+8}$, obliczyć jego przybliżoną sumę, przyjmując dokładność $\varepsilon = 10^{-6}$.

Zadanie 9. Dany jest szereg $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n} \frac{n^2}{(n+1)!}$, obliczyć jego przybliżoną sumę, przyjmując dokładność $\varepsilon = 10^{-8}$.

Zadania do lekcji 3,4 i 5.

Zadanie 1. Dana jest funkcja za pomocą tabelki:

X_k	Y_k
2	0,3
3	1,0

4	2,1
6	3,8

Znaleźć wielomian interpolacyjny Lagrange\`a i obliczyć jego wartość dla x = 2,6; x = 3,4, x=5,5.

Zadanie 2. Dana jest funkcja za pomocą tabelki:

X_k	Y_k
1	0,32
3	1,03
4	2,12
6	3,86
7	2,15

Znaleźć wielomian interpolacyjny Newtona i obliczyć jego wartość dla x = 1,6; x = 5,4, x=6,5.

Zadanie 3. Mając dane wartości funkcji $y_i = f(x_i)$ w punktach x_i , za pomocą wielomianu interpolacyjnego, obliczyć jej przybliżone wartości w punktach z_k. Podać współczynniki wielomianu Newtona (tzn. wartości tych ilorazów różnicowych, które występują w wielomianie Newtona).

Dane:

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} \qquad z = \begin{bmatrix} 0.23 \\ 1.75 \\ 2.58 \\ 3.04 \\ 4.86 \\ 5.15 \\ 6.67 \\ 7.04 \\ 8.32 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} 0.34 \\ 0.23 \\ 0.51 \\ 0.59 \\ 0.74 \\ 0.49 \\ 0.36 \\ 0.32 \\ 0.45 \\ 0.41 \end{bmatrix}$$

Zadanie 4. Dla funkcji $f(x)$ w przedziale <a,b> znaleźć wielomian interpolacyjny stopnia n = 3 z a)węzłami równoodległymi, b) węzłami Czebyszewa. Podać wartości błędów między funkcją $f(x)$ a wielomianami dla wartości z_1 i z_2 .

Dane: $f(x)= x + \cos(2x)$ $a=1$ $b= 4$ z_1= 1,256, z_2 = 3,258

Zadanie 5. Dla funkcji $f(x)$ w przedziale <a,b> narysować wielomian interpolacyjny stopnia

n = 8 z a)węzłami równoodległymi, b) węzłami Czebyszewa. Podać wykresy błędów między funkcją $f(x)$ a wielomianami.

Dane: $f(x)= | x - 2,8 |$ a=2   b= 4

Zadanie 6. Funkcję $f(x) = x^4 + \sin(2x)$ w przedziale [0,1] przybliżamy interpolacyjną funkcją sklejaną $S_3(x)$ o 4 węzłach równoodległych. Podać wartości wszystkich współczynników *c* funkcji $S_3(x)$. Obliczyć błąd przybliżenia $|f(x)-S_3(x)|$ w punkcie $x = 0.752$.

Zadanie 7. Dla funkcji *f(x)* w przedziale <a,b> znaleźć interpolacyjną funkcję sklejaną stopnia 3 $S_3(x)$ dla 5 węzłów. Podać wartości współczynników funkcji sklejanej oraz wartości błędów między funkcją *f(x)* a funkcją sklejaną $S_3(x)$ dla z_1 i z_2.

Dane: $f(x)= | x - 1,2 |$ a=0,5   b= 1,4 z_1= 0,734, z_2 = 1,121

Zadania do lekcji 6 i 7.

Zadanie 1. Dana jest baza funkcji aproksymacyjnej : $\{2,\ x+1,\ \sqrt{x-2}\ \}$ i cztery punkty węzłowe X_i = 2, 3, 6, 11. Podać macierz *M* dla tej bazy.

Zadanie2. Funkcja *f(x)* jest dana w 7 punktach za pomocą tabelki:

X_i	Y_i
0	0,1
0,2	0,25
0,4	0,2
0,6	0,3
0,8	0,2
1,0	0,15
1,2	0,1

Znaleźć aproksymacyjną funkcję $F(x) = a_0 \sin x + a_1 x + a_2 e^{2x}$, obliczyć błąd średni, wykonać odpowiedni rysunek.

Zadanie 3. Dla danych z zadania 2, znaleźć wielomiany aproksymacyjne algebraiczne stopnia drugiego i trzeciego. Obliczyć dla nich błędy średnie, wykonać rysunki.

Zadanie 4. Dla danych z zadania 2 znaleźć drugi i trzeci wielomian aproksymacyjny trygonometryczny. Obliczyć błędy, wykonać rysunki, porównać wyniki z wynikami zadania 2 i 3.

Zadanie 5. Funkcja *f(x)* dana jest za pomocą tabelki:

X_i =	Y_i =
0	4.113
0.1	4.444
0.2	4.77
0.3	4.994
0.4	5.177
0.5	5.557
0.6	5.576
0.7	5.931
0.8	6.119
0.9	6.272
1	6.371
1.1	6.52
1.2	6.62
1.3	6.738
1.4	6.639

znaleźć wielomiany aproksymacyjne algebraiczne stopnia drugiego i trzeciego. Obliczyć dla nich błędy średnie, wykonać rysunki.

Zadanie 6. Funkcja *f(x)* dana jest za pomocą tabelki:

x_i =	y_i =
0	0
0.5	1.038
1	0.947
1.5	0.307
2	-0.238
2.5	-0.245
3	0.245
3.5	0.806
4	1.013
4.5	0.789
5	0.429
5.5	0.316
6	0.585
6.5	1.028
7	1.301

znaleźć piąty wielomian aproksymacyjny trygonometryczny. Obliczyć błąd średni, wykonać rysunek.

Zadanie 7. Wyznaczyć wielomian aproksymacyjny stopnia 1 dla funkcji $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$ w przedziale <0, 1>.

Zadania do lekcji 8 i 9.

Zadanie 1. Znaleźć przedziały izolacji dla równania opisanego wielomianem piątego stopnia:

$x^5 - 5x^4 - x^3 + 5x^2 - 2x + 1 = 0$.

Zadanie 2. Znaleźć przedziały izolacji dla równania: $e^{-x-1} - \sqrt{x^2+1} + 3 = 0$.

Zadanie 3. Znaleźć rzeczywiste pierwiastki równania: $\ln(x^2 + 11) + x^3 - 4 = 0$ metodą bisekcji z dokładnością 10^{-5}, gdzie jako dokładność przyjąć różnicę między kolejnymi przybliżeniami. Podać: z jaką dokładnością jest spełnione równanie dla znalezionych pierwiastków, pierwiastki, ilość iteracji, ciągi iteracyjne.

Zadanie 4. Rozwiązać równanie z zadania 3 metodą siecznych z dokładnością 10^{-10}. Podać punkty startu, pierwiastki, dokładność spełnienia równania, ciągi przybliżeń. Porównać wyniki z wynikami otrzymanymi metodą bisekcji.

Zadanie 5. Znaleźć wszystkie pierwiastki równania : $\sin(x) - x^3 - 1 = 0$ metodą stycznych z dokładnością 10^{-12}. Podać punkty startu, pierwiastki, dokładność spełnienia równania, ciągi przybliżeń.

Zadanie 6. Znaleźć wszystkie pierwiastki równania: $e^{x-1} - 3x^3 - 38 = 0$ z dokładnością 10^{-10}. Zastosować dwie metody : siecznych i stycznych. Porównać wyniki.

Zadanie 7. Rozwiązać układ równań nieliniowych:

$$x^2 + y^2 - 4 = 0$$
$$x^2 - y^3 = 0$$

z dokładnością 10^{-8}, gdzie jako warunek stopu przyjąć $|z^{\langle n \rangle} - z^{\langle n-1 \rangle}| < 10^{-8}$, wektory *z* są kolejnymi przybliżeniami pierwiastka $p = \begin{bmatrix} xp \\ yp \end{bmatrix}$.

Zadanie 8. Znaleźć dowolne rozwiązanie układu równań nieliniowych:

$$(x-2)^2 + y^2 - z = 0$$
$$x^2 + y^2 - 4 + z^2 = 0$$
$$z + y + 2x - 3 = 0$$

z dokładnością 10^{-8}, gdzie jako warunek stopu przyjąć $|v^{\langle n \rangle} - v^{\langle n-1 \rangle}| < 10^{-8}$, wektory *v* są kolejnymi przybliżeniami pierwiastka $p = \begin{bmatrix} xp \\ yp \\ zp \end{bmatrix}$.

Zadania do lekcji 10 i 11.

Zadanie 1. Obliczyć przybliżoną wartość całki z funkcji $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ w przedziale [0,2] metodą prostą trapezów oraz metodą prostą parabol. Porównać wyniki z wartością "dokładną" (obliczoną za pomocą funkcji pierwotnej).

Zadanie 2. Obliczyć przybliżoną wartość całki z funkcji $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ w przedziale [0,2] za pomocą wielomianu interpolacyjnego stopnia 1 z 2 węzłami Legendre`a oraz wielomianu stopnia 2 z 3 węzłami Legendre`a. Porównać wyniki z wartością "dokładną" (obliczoną za pomocą funkcji pierwotnej) i z wynikami z zadania 1.

Zadanie 3. Obliczyć przybliżoną wartość całki z funkcji $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ w przedziale [0,2] metodą złożoną trapezów oraz metodą złożoną parabol dzieląc przedział całkowania na 10 części (w każdej z metod). Porównać wyniki z wartością "dokładną" (obliczoną za pomocą funkcji pierwotnej).

Zadanie 4. Obliczyć przyblizoną wartość całki z funkcji $f(x) = \cos(x^2)$ w przedziale $\left\langle \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ z dokładnością do 10^{-6}. Zastosować metodę złożoną trapezów i parabol. Podać ilość podprzedziałów w każdej z metod.

Zadanie 5. Obliczyć całkę z zadania 4 metodą złożoną opartą na 2 węzłach Legendre`a. Przyjąć dokładność 10^{-6}.

Zadanie 6. Obliczyć długość łuku krzywej $y = \cosh(x)$ w przedziale [0, 2] z dokładnością do 10^{-8}. Wybrać dowolną metodę numeryczną.

Zadanie 7. Obliczyć pole pod krzywą $y = \frac{\sin(x)}{x}$, a nad osią $0x$, jeśli $x \in \left\langle \frac{\pi}{6}, \pi \right\rangle$. Przyjąć dokładność 10^{-5}. Zastosować złożoną metodę parabol.

Rozwiązanie zadań z lekcji 1 i 2.

Rozwiązanie zad 1:

$$a = 0{,}035 \quad b = 0{,}031 \quad \Delta a = 0{,}0005 \quad \Delta b = 0{,}0005 \quad \delta a = \frac{\Delta a}{|a|} = 0{,}014 \quad \delta b = \frac{\Delta b}{|b|} = 0{,}016$$

$$r = a - b = 0{,}004 \quad \Delta r = \Delta a + \Delta b = 0{,}001 \quad \delta r = 0{,}25$$

Błędy względne składników to 1,4% dla *a* i 1,6% dla *b* , natomiast błąd względny różnicy jest bardzo duży w porównaniu z błędami składników i wynosi 25%. Ten niekorzystny efekt jest związany z odejmowaniem liczb przybliżonych bliskich.

Rozwiązanie zad 2:

$$a = 0{,}26 \quad b = 1{,}31 \quad c = -0{,}21 \quad \Delta a = \Delta b = \Delta c = 0{,}005$$

$$\delta a = \frac{\Delta a}{|a|} = 0{,}019 \quad \delta b = \frac{\Delta b}{|b|} = 0{,}004 \quad \delta c = \frac{\Delta c}{|c|} = 0{,}024$$

$$i = a \cdot b \cdot c = -0{,}072 \quad \delta i = 0{,}047$$

Wyniki są podane z dokładnością do trzech cyfr po przecinku, błędy względne czynników są odpowiednio równe: 1,9%; 0,4%; 2,4% a błąd względny wyniku równa się 4,7%.

Rozwiązanie zad 3:

$$a = 2{,}34 \quad b = 1{,}23 \quad \Delta a = \Delta b = 0{,}001 \quad \delta a = \frac{\Delta a}{|a|} = 0{,}0004 \quad \delta b = \frac{\Delta b}{|b|} = 0{,}0008$$

$$ir = \frac{a}{b = 1{,}902} \quad \delta ir = 0{,}0012 \quad \Delta ir = 0{,}0024$$

Błąd względny *a* wynosi 0,04%, błąd względny *b* wynosi 0,08%, błąd względny ilorazu równa się 0,24%.

Rozwiązanie zad 4:

$$a = 2{,}16cm \quad b = 1{,}75cm \quad \Delta a = \Delta b = 0{,}01cm \quad \delta a = \frac{\Delta a}{|a|} = 0{,}0046 \quad \delta b = \frac{\Delta b}{|b|} = 0{,}0057$$

$$p(a,b) = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \frac{\partial p}{\partial a} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \frac{\partial p}{\partial b} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad p = 2.78cm^2$$

$$\Delta p = \left|\frac{\partial p}{\partial a}\right|\Delta a + \left|\frac{\partial p}{\partial b}\right|\Delta b = 0{,}014cm^2 \quad \delta p = 0{,}0051 \quad w1 = 0{,}604 \quad w2 = 0{,}396$$

Rozwiązanie zad 5:

$$x = 5{,}34 \quad y = 1{,}34 \quad \Delta x = \Delta y = 0{,}005 \quad f(x,y) = -6{,}97 \quad \delta x = 0{,}00094 \quad \delta y = 0{,}0037$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} + y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x \quad \Delta f = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\Delta y = 0{,}034 \quad \delta f = 0{,}0048 \quad w1 = 1{,}054,\ w2 = 1{,}027$$

Rozwiązanie zad 6:

$$x = 1{,}21 \quad y = 1{,}43 \quad \Delta x = \Delta y = 0{,}002 \quad \delta x = 0{,}0017 \quad \delta y = 0{,}0014$$

$$f(x,y) = 5{,}33 \quad \Delta f = 0{,}015 \quad \delta f = 0{,}0028 \quad w1 = 0{,}464,\ w2 = 1{,}464$$

Rozwiązanie zad 7:

$$a = 2{,}16cm \quad b = 1{,}75cm \quad c = 2{,}13cm \quad \Delta a = \Delta b = \Delta c = 0{,}01cm \quad \delta a = \frac{\Delta a}{|a|} = 0{,}0046$$

$$\delta b = \frac{\Delta b}{|b|} = 0{,}0057 \quad \delta c = \frac{\Delta c}{|c|} = 0{,}0047 \quad p(a,b,c) = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \quad p = 3{,}5cm^2$$

$$\frac{\partial p}{\partial a} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad \frac{\partial p}{\partial b} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad \frac{\partial p}{\partial c} = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\Delta p = \left|\frac{\partial p}{\partial a}\right|\Delta a + \left|\frac{\partial p}{\partial b}\right|\Delta b + \left|\frac{\partial p}{\partial c}\right|\Delta c = 0{,}017cm^2 \quad \delta p = 0{,}0049 \quad w1 = 0{,}38, w2 = 0{,}25, w3 = 0{,}37$$

Rozwiązanie zad 8:

Sumujemy szereg naprzemienny zbieżny. Jeśli za przybliżoną sumę szeregu będziemy brać *n*-tą sumę częściową, to błąd bezwzględny między dokładną sumą a jej przybliżeniem nie będzie przekraczał wartości bezwzględnej pierwszego odrzuconego wyrazu czyli $|a_{n+1}|$. Zatem będziemy brać tyle wyrazów, aż sąsiednie sumy będą się różnić o mniej niż podana dokładność 0,000001.

$$s_1 = \frac{2}{9} \qquad s_2 = s_1 + a_2 = \frac{2}{9} + \frac{(-1)\cdot 4}{2^4+8} \qquad s_n = s_{n-1} + (-1)^{n+1}\frac{2n}{n^2+8}$$

i sumujemy tak długo, aż $|s_n - s_{n-1}| < \varepsilon = 0{,}000001$. Okazuje się , że potrzeba przesumować n=126 wyrazów i wtedy przybliżona suma będzie wynosić s_n=0,102770.

Rozwiązanie zad 9:

Sumujemy szereg naprzemienny zbieżny. Jeśli za przybliżoną sumę szeregu będziemy brać *n*-tą sumę częściową, to błąd bezwzględny między dokładną sumą a jej przybliżeniem nie będzie przekraczał wartości bezwzględnej pierwszego odrzuconego wyrazu czyli $|a_{n+1}|$. Zatem będziemy brać tyle wyrazów, aż sąsiednie sumy będą się różnić o mniej niż podana dokładność 0,00000001. W tym zadaniu sumujemy od drugiego wyrazu.

$$s_2 = \frac{2^2}{3!} \qquad s_3 = s_2 + a_3 = \frac{2^2}{3!} + \frac{(-1)\cdot 3^2}{4!} \qquad s_n = s_{n-1} + (-1)^n\frac{n^2}{(n+1)!}$$

i sumujemy tak długo, aż $|s_n - s_{n-1}| < \varepsilon = 0{,}00000001$. Okazuje się , że potrzeba przesumować n=13 wyrazów i wtedy przybliżona suma będzie wynosić s_n=0,39636168.

Rozwiązanie zadań z lekcji 3,4 i 5

Rozwiązanie zad 1.:

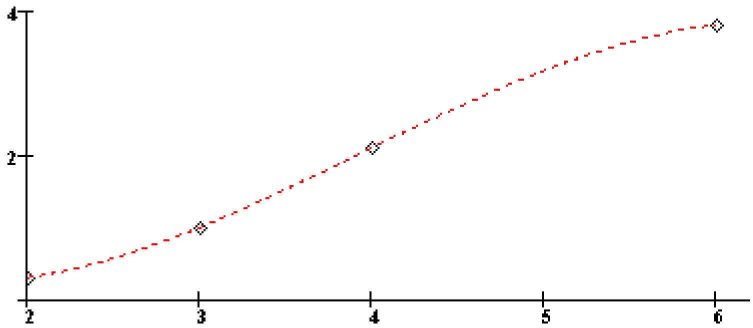
Węzłów jest 4 , wielomian może być co najwyżej 3 stopnia. Skorzystamy ze wzoru na wielomian Lagrange`a dla n=3:

$$WL_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}y_2 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}y_3$$

Po wstawieniu i uporządkowaniu wielomianu otrzymujemy (współczynniki są podane z dokładnością do 3 liczb po przecinku):

$$WL_3(x) = 1{,}8 - 2{,}142x + 0{,}838x^2 - 0{,}071x^3$$

Rysunek wielomianu interpolacyjnego:



Obliczamy przybliżone wartości funkcji dla podanych punktów jako wartości obliczonego wielomianu:

$$f(2{,}6) \cong WL_3(2{,}6) = 0{,}648, \quad f(3{,}4) \cong WL_3(3{,}4) = 1{,}416, \quad f(5{,}5) \cong WL_3(5{,}5) = 3{,}570$$

Rozwiązanie zad.2:

Utworzymy tablicę ilorazów różnicowych (w trzeciej kolumnie są ilorazy różnicowe I rzędu, w czwartej ilorazy II rzędu, w piątej ilorazy III rzędu i w szóstej jeden iloraz IV rzędu):

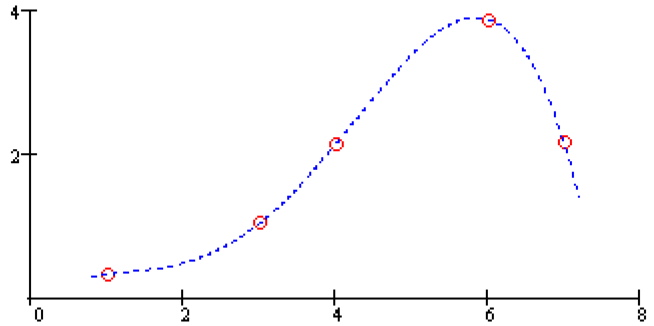
$$Ilorazy = \left| \begin{array}{llllll} 1 & 0.32 & & & & \\ 3 & 1.03 & 0.355 & & & \\ 4 & 2.12 & 1.09 & 0.245 & & \\ 6 & 3.86 & 0.87 & -0.073 & -0.064 & \\ 7 & 2.15 & -1.71 & -0.86 & -0.197 & -0.022 \end{array} \right.$$

I skorzystamy ze wzoru na wielomian interpolacyjny Newtona dla n=4 (jest 5 węzłów , wielomian jest stopnia 4):

$$WN_n(x) = y_0 + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) +$$
$$+ f(x_0, x_1, x_2, x_3)(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

Po obliczeniu otrzymamy postać (wyniki podane są z dokładnością do trzech cyfr po przecinku):

$$WN_4(x) = -0{,}132 + 0{,}958x - 0{,}731x^2 + 0{,}247x^3 - 0.022x^4$$



Obliczamy przybliżone wartości funkcji dla podanych punktów jako wartości obliczonego wielomianu:

$$f(1{,}6) \cong WN_4(1{,}6) = 0{,}395, \quad f(5{,}4) \cong WN_4(5{,}4) = 3{,}725, \quad f(6{,}5) \cong WN_4(6{,}5) = 3{,}391,$$

Rozwiązanie zad. 3:

Jeśli odrzucimy w macierzy ilorazów różnicowych pierwszą kolumnę, którą stanowią węzły, to pozostałe kolumny utworzą macierz kwadratową 10x10 , szukane współczynniki leżą na przekątnej tej macierzy. Aby zatem odczytać szukane współczynniki trzeba utworzyć macierz ilorazów różnicowych i odczytać z niej następujące liczby:

$$f(x_0) = y_0 = 0{,}34, \quad f(x_0, x_1) = -0{,}11, \quad f(x_0, x_1, x_2) = 0{,}195, \quad f(x_0, x_1, x_2, x_3) = -0{,}098,$$
$$f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = 0{,}036, \quad f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = -0{,}013,$$
$$f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 0{,}005, \quad f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = -0.001,$$
$$f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) = 0.0003, \quad f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9) = -0{,}00006$$

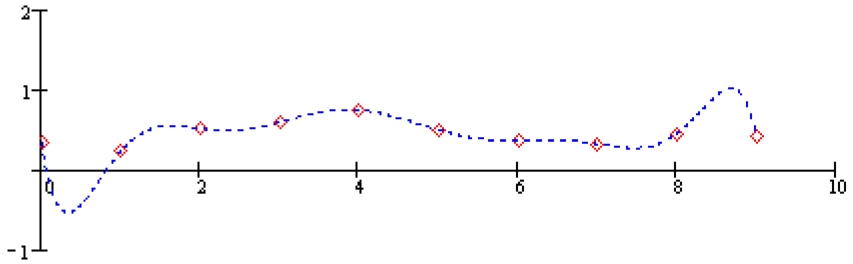
Po skorzystaniu z ogólnego wzoru na wielomian interpolacyjny Newtona:

$$WN_n(x) = y_0 + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \ldots +$$
$$f(x_0, x_1, \ldots x_n)(x - x_0)(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n-1})$$

otrzymamy wartości wielomianu dla punktów z_k:

$$z = \begin{bmatrix} 0.23 \\ 1.75 \\ 2.58 \\ 3.04 \\ 4.86 \\ 5.15 \\ 6.67 \\ 7.04 \\ 8.32 \end{bmatrix} \qquad WN_4(z) = \begin{bmatrix} -0,472 \\ 0,537 \\ 0,502 \\ 0,601 \\ 0,532 \\ 0,45 \\ 0,356 \\ 0,314 \\ 0,75 \end{bmatrix}$$

Podamy jeszcze wykres tego wielomianu:



Rozwiązanie zad.4:

Aby uzyskać węzły równoodległe, dzielimy przedział <a, b> na *n* części i oznaczamy przez $h = \frac{b-a}{n}$, wtedy węzły równoodległe (o *h*) można zapisać: $x_i = a + i \cdot h \quad i = 0,1,\dots n$.

Wielomiany będą stopnia 3, wielomian o węzłach równoodległych oznaczymy przez $Wr_3(x)$, wielomian o węzłach Czebyszewa oznaczymy przez $Wc_3(x)$.

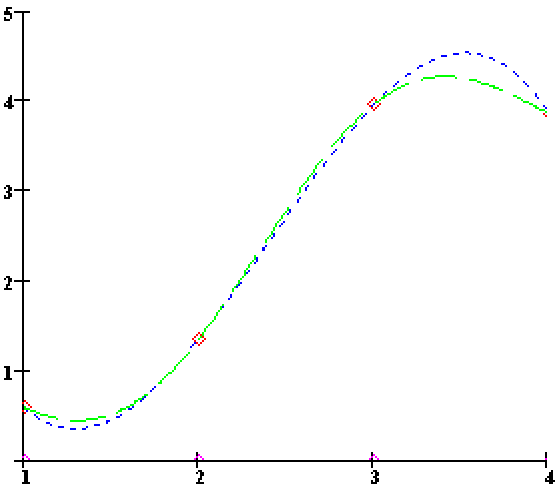
Zbudujemy wielomian $Wr_3(x)$ dla węzłów równoodległych: n=3, h=1, $x_i = 1, 2, 3, 4$, wartości funkcji w tych węzłach: $y_i = 0{,}584;\ 1{,}346;\ 3{,}96;\ 3{,}854$. Liczymy ilorazy różnicowe dla węzłów równoodległych (wszystkie wartości podajemy z dokładnością do trzech cyfr po przecinku chyba że są mniejsze)

$$Ilorazyrów = \left| \begin{array}{lllll} 1 & 0,584 & & & \\ 2 & 1,346 & 0,763 & & \\ 3 & 3,96 & 2,614 & 0,926 & \\ 4 & 3,854 & -0,106 & -1,36 & -0,762 \end{array} \right.$$

Korzystając ze wzoru na wielomian interpolacyjny Newtona mamy:

$$Wr_3(x) = 0{,}584 + 0{,}763(x-1) + 0{,}926(x-1)(x-2) - 0{,}762(x-1)(x-2)(x-3)$$

Wykres wielomianu $Wr_3(x)$ i funkcji *f(x)* (funkcja narysowana na zielono)



Zbudujemy wielomian $Wc_3(x)$ dla węzłów Czebyszewa: n=3, ogólny wzór na węzły:

$$x_k = \frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right) + \frac{b+a}{2} \qquad k = 0,1,2 \ldots n$$

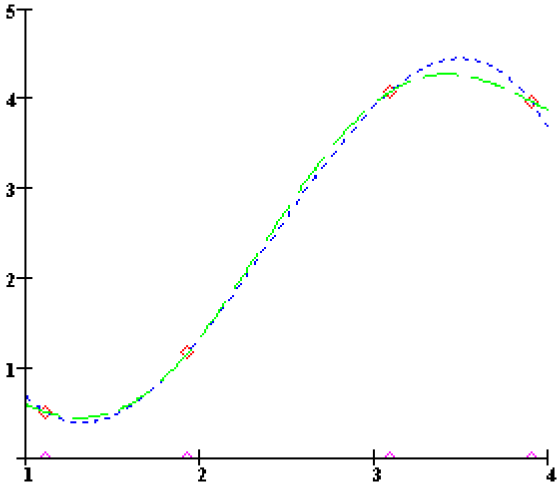
zatem $x_i = 1{,}114;\ 1{,}926;\ 3{,}074;\ 3.886$, wartości funkcji w tych węzłach:
$y_i = 0{,}503;\ 1{,}168;\ 4{,}069;\ 3{,}968$ Liczymy ilorazy różnicowe dla węzłów równoodległych
(wszystkie wartości podajemy z dokładnością do trzech cyfr po przecinku chyba że są mniejsze)

$$IlorazyCz = \left|\begin{array}{lllll} 1{,}114 & 0{,}503 & & & \\ 1{,}926 & 1{,}168 & 0{,}819 & & \\ 3{,}074 & 4{,}069 & 2{,}523 & 0{,}87 & \\ 3{,}886 & 3{,}968 & -0{,}119 & -1{,}348 & -0{,}8 \end{array}\right.$$

Korzystając ze wzoru na wielomian interpolacyjny Newtona mamy:

$$Wc_3(x) = 0{,}503 + 0{,}819(x-1{,}114) + 0{,}87(x-1{,}114)(x-1{,}926)$$
$$-0.8(x-1{,}114)(x-1{,}926)(x-3{,}074)$$

Wykres wielomianu $Wc_3(x)$ i funkcji *f(x)* (funkcja narysowana na zielono)

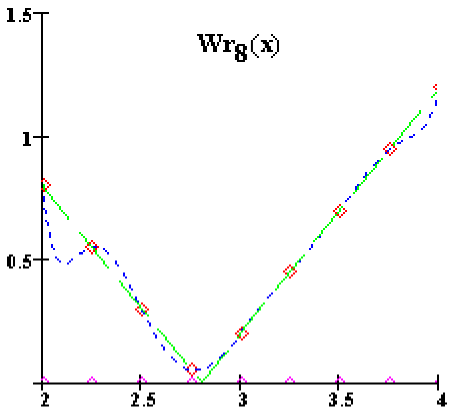


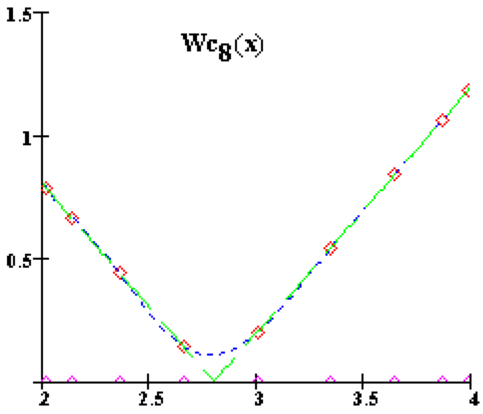
Błędy :

$|Wr_3(z_1) - f(z_1)| = 0{,}098$ $|Wr_3(z_2) - f(z_2)| = 0{,}146$

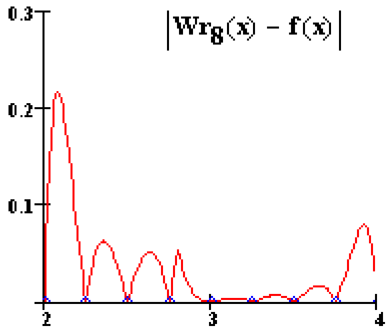
$|Wc_3(z_1) - f(z_1)| = 0{,}049$ $|Wc_3(z_2) - f(z_2)| = 0{,}091$

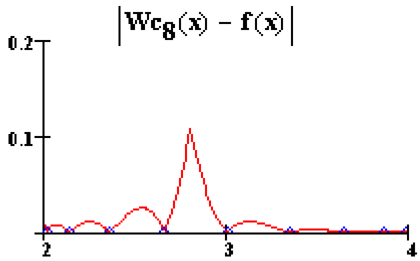
Rozwiązanie zad 5:
Obliczyć wielomiany stopnia 8 tak jak w były obliczane w zadaniu 5. Pierwsze dwa rysunki to rysunki wielomianu $Wr_8(x)$ i wielomianu $Wc_8(x)$,





następne dwa to rysunki funkcji błędów $|Wr_8(x) - f(x)|$ i $|Wc_8(x) - f(x)|$:





Dla danych z zadania wielomian z węzłami Czebyszewa daje mniejszy błąd (ocena z drugiej pary rysunków).

Rozwiązanie zad 6:
Dzielimy odcinek <0, 1> na 3 części i otrzymujemy 4 węzły równoodległe:
$x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = \frac{2}{3},\ x_3 = 1$ oraz wartości danej funkcji w węzłach:
$y_0 = 0,\ y_1 = 0{,}631,\ y_2 = 1{,}169,\ y_3 = 1{,}909$.

Wyliczamy ze układu równań na współczynniki *c* (z tematu: Interpolacja funkcjami sklejanymi) biorąc za $\alpha = f'(0) = 2, \ \beta = f'(1) = 3{,}168$.

Otrzymujemy:

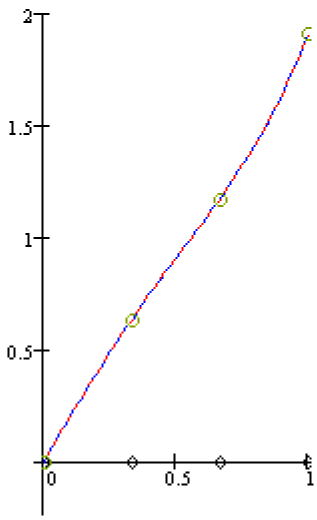
$c_{-1} = -0{,}113, \ c_0 = 0{,}001, \ c_1 = 0{,}11, \ c_2 = 0{,}192, \ c_3 = 0{,}294, \ c_4 = 0{,}544$

(obliczenia podaliśmy z dokładnością do 3 cyfr po przecinku).

Zatem funkcja interpolacyjna ma postać:

$$S_3(x) = c_{-1}\Phi_{-1}(x) + c_0\Phi_0(x) + c_1\Phi_1(x) + c_2\Phi_2(x) + c_3\Phi_3(x) + c_4\Phi_4(x) =$$
$$= -0{,}113 \cdot \Phi_{-1}(x) + 0{,}001 \cdot \Phi_0(x) + 0{,}11 \cdot \Phi_1(x) + 0{,}192 \cdot \Phi_2(x) +$$
$$+ 0{,}294 \cdot \Phi_3(x) + 0{,}544 \cdot \Phi_4(x)$$

Wykres funkcji i $S_3(x)$:



Na rysunku obie funkcje prawie się pokrywają, zaznaczone są węzły i punkty w których funkcja sklejana przyjmuje dokładnie takie wartości jak funkcja dana.

| $f(x) - S_3(x)$ | dla $x = 0.752$ wynosi 0,00075.

Rozwiązanie zad 7.:
Dzielimy odcinek <0,5; 1,4> na 4 części i otrzymujemy 5 węzłów równoodległych w których obliczamy wartości danej funkcji.

Wyliczamy z układu równań współczynniki *c* (z tematu: Interpolacja funkcjami sklejanymi) biorąc za $\alpha = f'(0) = -1, \ \beta = f'(1) = 1$.

Otrzymujemy:

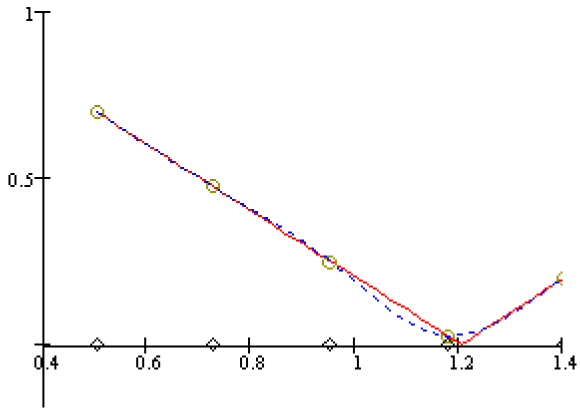
$c_{-1} = 0{,}153,\ c_0 = 0{,}117,\ c_1 = 0{,}078,\ c_2 = 0{,}047,\ c_3 = -0{,}015,\ c_4 = 0{,}039,\ c_5 = 0{,}06$

(obliczenia podaliśmy z dokładnością do 3 cyfr po przecinku).

Zatem funkcja interpolacyjna ma postać:

$$S_3(x) = c_{-1}\Phi_{-1}(x) + c_0\Phi_0(x) + c_1\Phi_1(x) + c_2\Phi_2(x) + c_3\Phi_3(x) + c_4\Phi_4(x) + c_5\Phi_5(x) =$$
$$= -0{,}113 \cdot \Phi_{-1}(x) + 0{,}001 \cdot \Phi_0(x) + 0{,}11 \cdot \Phi_1(x) + 0{,}192 \cdot \Phi_2(x) +$$
$$+ 0{,}294 \cdot \Phi_3(x) + 0{,}544 \cdot \Phi_4(x) + 0{,}06 \cdot \Phi_5(x)$$

Wykres funkcji i $S_3(x)$:



Na rysunku funkcja jest zaznaczona kolorem czerwonym, narysowane są na osi Ox węzły, oraz kółeczkami punkty w których funkcja interpolacyjna pokrywa się z daną funkcją.

| $f(x) - S_3(x)$ | dla x = 0.734 wynosi 0,0006, a dla x = 1,121 równa się 0,0302.

Rozwiązanie zadań z lekcji 6 i 7

Rozwiązanie zad.1.

Dana jest baza funkcji aproksymacyjnej : $\{2,\ x+1,\ \sqrt{x-2}\ \}$ i cztery punkty węzłowe X_i = 2, 3, 6, 11.

Przyjmujemy za bazę funkcje: $\varphi_0(x) = 2,\ \varphi_1(x) = x+1,\ \varphi_2(x) = \sqrt{x-2}$. Macierz *M* budujemy w następujący sposób: ma ona trzy kolumny i cztery wiersze. Kolumn jest tyle ile funkcji bazowych, a wierszy tyle ile węzłów. W pierwszej kolumnie będzie zerowa funkcja bazowa dla wszystkich węzłów, ponieważ jest ona stała, to będą same dwójki. W drugiej kolumnie wstawiamy wartości funkcji $\varphi_1(x) = x+1$ dla wszystkich węzłów po kolei, w trzeciej wartości funkcji $\varphi_2(x) = \sqrt{x-2}$ dla wszystkich węzłów. W wyniku tych operacji dostajemy macierz:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 7 & 2 \\ 2 & 12 & 3 \end{bmatrix}$$

Rozwiazanie zad.2.
Funkcja *f(x)* jest dana w 7 punktach za pomocą tabelki:

X_i	Y_i
0	0,1
0,2	0,25
0,4	0,2
0,6	0,3
0,8	0,2
1,0	0,15
1,2	0,1

Szukamy aproksymacyjnej funkcji $F(x) = a_0 \sin x + a_1 x + a_2 e^{2x}$. Budujemy macierz *M* dla danej bazy funkcji $\{\sin x,\ x,\ e^{2x}\}$ i danych węzłów. W pierwszej kolumnie będą występować wyrazy $\sin X_i$, w drugiej X_i, w trzeciej $\exp(2X_i)$.

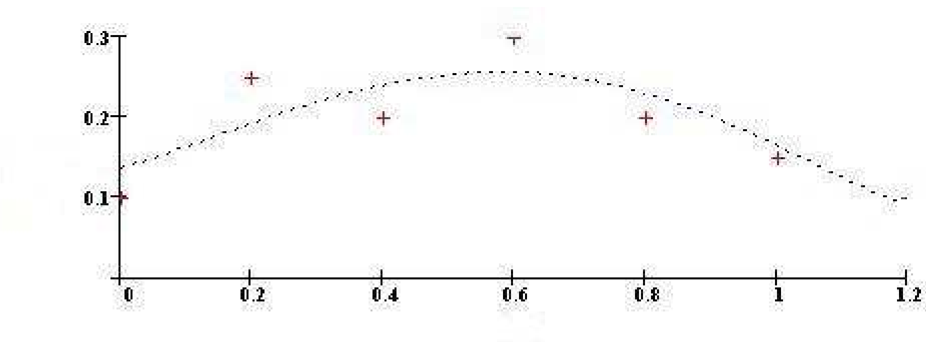
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0.199 & 0.2 & 1.492 \\ 0.389 & 0.4 & 2.226 \\ 0.565 & 0.6 & 3.32 \\ 0.717 & 0.8 & 4.953 \\ 0.841 & 1 & 7.389 \\ 0.932 & 1.2 & 11.023 \end{pmatrix}$$

Aby wyliczyć współczynniki a_0, a_1, a_2 trzeba rozwiązać układ równań liniowych 3x3 w postaci macierzowej można go zapisać następująco: $M^T MA = M^T Y$. Po rozwiązaniu otrzymujemy współczynniki: $a_0 = 5{,}184, a_1 = -5{,}206, a_2 = 0{,}136$

Zatem szukana funkcja ma postać: $F(x) = 5{,}184 \sin x - 5{,}206\, x + 0{,}136 e^{2x}$

Błąd średni: bl= 0,037.

Rysunek:



Rozwiązanie zad.3.
Funkcja *f(x)* jest dana w 7 punktach za pomocą tabelki:

X_i	Y_i
0	0,1
0,2	0,25
0,4	0,2
0,6	0,3
0,8	0,2
1,0	0,15
1,2	0,1

Znaleźć wielomiany aproksymacyjne algebraiczne stopnia drugiego i trzeciego. Obliczyć dla nich błędy średnie, wykonać rysunki.

Dla wielomianu stopnia 2 macierz *M* ma trzy kolumny, w pierwszej występują jedynki, w drugiej węzły , a w trzeciej kwadraty węzłów.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0.2 & 0.04 \\ 1 & 0.4 & 0.16 \\ 1 & 0.6 & 0.36 \\ 1 & 0.8 & 0.64 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1.2 & 1.44 \end{pmatrix}$$

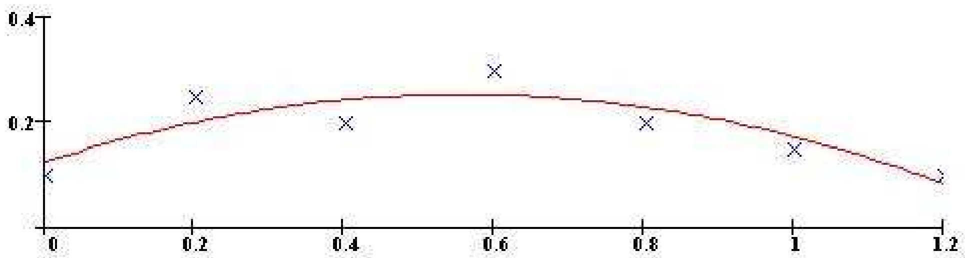
Rozwiązując układ (3x3) $M^T MA = M^T Y$, otrzymujemy :

$a_0 = 0{,}124,\ a_1 = 0{,}464,\ a_2 = -0{,}417$

Wielomian aproksymacyjny stopnia 2: $W_2(x) = 0{,}124 + 0{,}464x - 0{,}417x^2$

Błąd średni: bl= 0,036

Rysunek:



Dla wielomianu stopnia 3 do poprzedniej macierz dodajemy jeszcze jedną kolumnę sześcianów węzłów

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.2 & 0.04 & 8 \times 10^{-3} \\ 1 & 0.4 & 0.16 & 0.064 \\ 1 & 0.6 & 0.36 & 0.216 \\ 1 & 0.8 & 0.64 & 0.512 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1.2 & 1.44 & 1.728 \end{pmatrix}$$

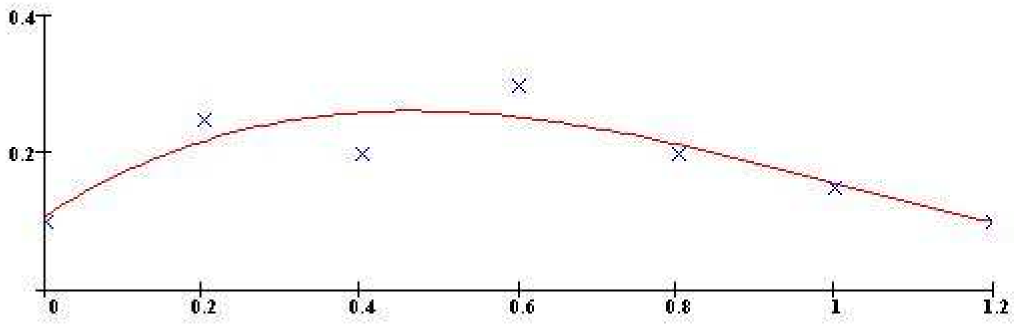
I po rozwiązaniu ponownym układu (4x4) $M^T MA = M^T Y$ otrzymujemy :

$a_0 = 0{,}107,\ a_1 = 0{,}742,\ a_2 = -1{,}042,\ a_3 = 0{,}347$

Wielomian aproksymacyjny stopnia 3: $W_3(x) = 0{,}107 + 0{,}742\,x - 1{,}042\,x^2 + 0{,}347\,x^3$

Błąd średni: bl= 0,032

Rysunek:



Wielomiany niewiele się różnią od siebie, błędy są tego samego rzędu, dla stopnia 3 są trochę mniejsze.

Rozwiązanie zad.4.
Funkcja *f(x)* jest dana w 7 punktach za pomocą tabelki:

X_i	Y_i
0	0,1
0,2	0,25
0,4	0,2
0,6	0,3
0,8	0,2
1,0	0,15
1,2	0,1

Aby znaleźć drugi i trzeci wielomian aproksymacyjny trygonometryczny, skorzystamy ze wzorów z tematu : Wielomiany trygonometryczne.

Z węzłów odczytujemy *n = 6, h*=0,2, zatem $l = \frac{n+1}{2}h = 3{,}5 \cdot 0{,}2 = 0{,}7$

Dla drugiego wielomianu trygonometrycznego mamy:

$$a_0 = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} y_i,\quad a_1 = \frac{2}{n+1}\sum_{i=0}^{n} y_i \cos(\frac{\pi}{l}x_i),\quad b_1 = \frac{2}{n+1}\sum_{i=0}^{n} y_i \sin(\frac{\pi}{l}x_i),$$

$$a_2 = \frac{2}{n+1}\sum_{i=0}^{n} y_i \cos(2\frac{\pi}{l}x_i),\quad b_2 = \frac{2}{n+1}\sum_{i=0}^{n} y_i \sin(2\frac{\pi}{l}x_i)$$

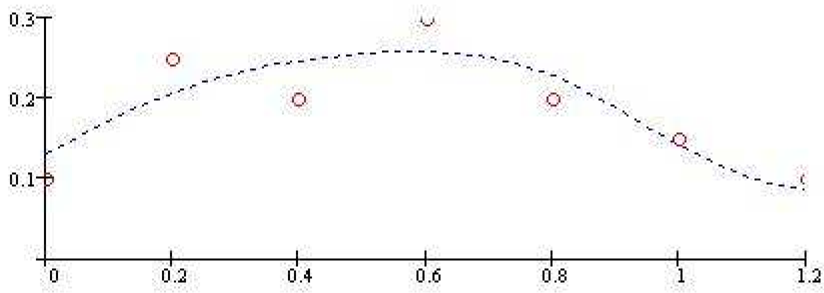
Wyliczając współczynniki a_0, a_1, b_1, a_2, b_2 z powyższych wzorów dostajemy:

$a_0 = 0{,}186,\ a_1 = -0{,}06,\ b_1 = 0{,}06,\ a_2 = 0{,}005,\ b_2 = 0{,}013$

Zatem:

$$T_2(x) = 0{,}186 - 0{,}06\cos(\frac{\pi}{l}x) + 0{,}06\sin(\frac{\pi}{l}x) + 0{,}005\cos(2\frac{\pi}{l}x) + 0{,}013\sin(2\frac{\pi}{l}x)$$

Błąd średni dla tej funkcji aproksymacyjnej wynosi b2=0,0332.



Dla trzeciego wielomianu trygonometrycznego dochodzą dodatkowo jeszcze dwa współczynniki:

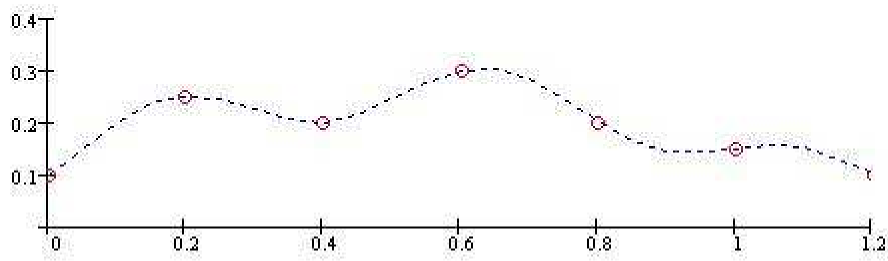
$$a_3 = \frac{2}{n+1}\sum_{i=0}^{n} y_i \cos(3\frac{\pi}{l}x_i),\quad b_3 = \frac{2}{n+1}\sum_{i=0}^{n} y_i \sin(3\frac{\pi}{l}x_i)$$

które po wyliczeniu równają się $a_3 = -0{,}031,\ b_3 = 0{,}035$
Zatem:

$$T_3(x) = 0{,}186 - 0{,}06\cos(\frac{\pi}{l}x) + 0{,}06\sin(\frac{\pi}{l}x) + 0{,}005\cos(2\frac{\pi}{l}x) + 0{,}013\sin(2\frac{\pi}{l}x) -$$

$$-0{,}031\cos(3\frac{\pi}{l}x) + 0{,}035\sin(3\frac{\pi}{l}x)$$

Błąd średni dla tego wielomianu równa się b3=0. To znaczy, że w węzłach funkcja dana pokrywa się z funkcją aproksymacyjną , która w tym wypadku jest funkcją interpolacyjną. Zauważmy, że ilość węzłów jest równa 7 i ilość funkcji bazowych równa jest 7.



Rozwiązanie zad.5.
Funkcja jest dana za pomocą tabelki:

X_i =	Y_i =
0	4.113
0.1	4.444
0.2	4.77
0.3	4.994
0.4	5.177
0.5	5.557
0.6	5.576
0.7	5.931
0.8	6.119
0.9	6.272
1	6.371
1.1	6.52
1.2	6.62
1.3	6.738
1.4	6.639

Przyjmujemy *n*=14 (jest 15 węzłów) i korzystamy z wzorów z tematu :Wielomian algebraiczny.

Dla wielomianu stopnia dwa dostajemy współczynniki: $a_0 = 4{,}112,\ a_1 = 3{,}263,\ a_3 = -0{,}995$.

Zatem wielomian ma postać:

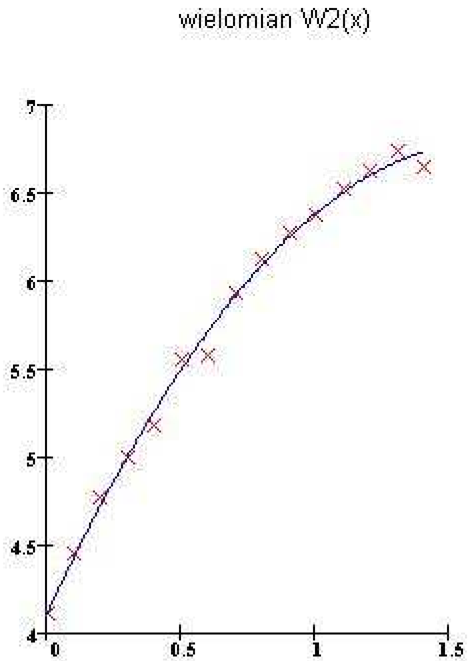
$$W_2(x) = 4{,}112 + 3{,}263x - 0{,}995x^2$$.

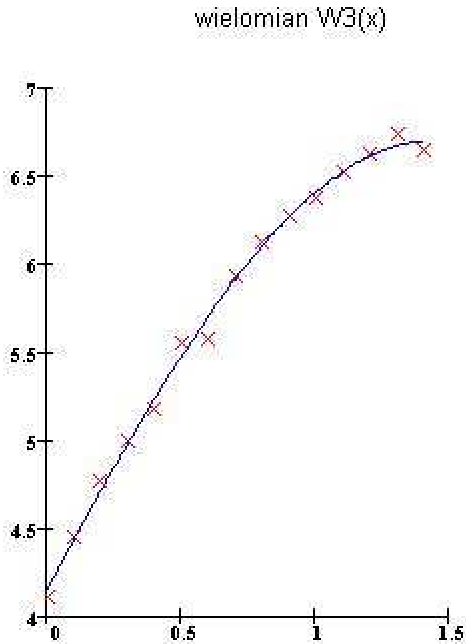
Dla wielomianu stopnia trzeciego mamy: $a_0 = 4{,}149,\ a_1 = 2{,}88,\ a_2 = -0{,}288,\ a_3 = -0{,}336$

Wielomian:

$$W_3(x) = 4{,}149 + 2{,}88x - 0{,}288x^2 - 0{,}336x^3$$

Na rysunku (poniżej) zestawione są dwa wielomiany, różnice są bardzo małe, dla wielomianu drugiego stopnia średni błąd b2=0,05635, dla trzeciego stopnia b3=0,05238.





Rozwiązanie zad.6.
Funkcja *f(x)* dana jest za pomocą tabelki:

x_i =	y_i =
0	0
0.5	1.038
1	0.947
1.5	0.307
2	-0.238
2.5	-0.245
3	0.245
3.5	0.806
4	1.013
4.5	0.789
5	0.429
5.5	0.316
6	0.585
6.5	1.028
7	1.301

Z tabelki odczytujemy n=14 , h=0,5, $l = \frac{n+1}{2}h$ =3,75.

Skorzystamy ze wzoru na współczynniki dla piątego wielomianu trygonometrycznego:

$$a_0 = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} y_i, \quad a_k = \frac{2}{n+1}\sum_{i=0}^{n} y_i \cos(k\frac{\pi}{l}x_i), \quad b_k = \frac{2}{n+1}\sum_{i=0}^{n} y_i \sin(k\frac{\pi}{l}x_i),$$

$gdzie\ \ k = 1,2,3,4,5$

Obliczając te współczynniki dostajemy:

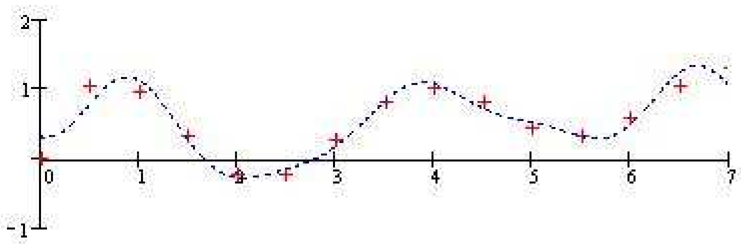
$$a_0 = 0{,}555,\ a_1 = 0{,}136,\ b_1 = -0{,}257,\ a_2 = 0{,}327,\ b_2 = 0{,}115,\ a_3 = -0{,}339,\ b_3 = -0{,}033$$
$$a_4 = -0{,}205,\ b_4 = -0{,}042,\ a_5 = -017,\ b_5 = -0{,}031$$

Wielomian ma postać:

$$T_5(x) = a_0 + a_1\cos(\frac{\pi}{l}x) + b_1\sin(\frac{\pi}{l}x) + a_2\cos(2\frac{\pi}{l}x) + b_2\sin(2\frac{\pi}{l}x) +$$
$$+ a_3\cos(3\frac{\pi}{l}x) + b_3\sin(3\frac{\pi}{l}x) + a_4\cos(4\frac{\pi}{l}x) + b_4\sin(4\frac{\pi}{l}x) +$$
$$+ a_5\cos(5\frac{\pi}{l}x) + b_5\sin(5\frac{\pi}{l}x)$$

Błąd średni: bl= 0,152.

Rysunek:



Rozwiązanie zad.7.

Aby wyznaczyć wielomian aproksymacyjny stopnia 1 dla funkcji $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ w przedziale <0, 1> trzeba skorzystać z przykładu z tematu: Aproksymacja funkcji ciągłej.

Funkcja aproksymacyjna ma postać $F(x) = a_0 + a_1 x$ gdzie dwa współczynniki znajdziemy z zerowania się pochodnych funkcji:

$$H(a_0, a_1) = \int_0^1 \left(f(x) - (a_0 + a_1 x)\right)^2 dx$$ po a_0 i po a_1.

$$\frac{\partial H}{\partial a_0} = (-2)\int_0^1 (f(x) - (a_0 + a_1 x))dx = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial a_1} = (-2)\int_0^1 (f(x) - (a_0 + a_1 x))x dx = 0$$

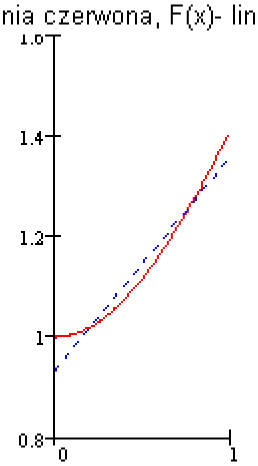
Stąd:

$$\begin{matrix} \int_0^1 (a_0 + a_1 x)dx = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx \\ \int_0^1 (a_0 x + a_1 x^2)dx = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\cdot x dx \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} a_0 + \frac{1}{2}a_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})) \\ \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{3}a_1 = \frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1) \end{cases}$$

Po rozwiązaniu układu otrzymujemy: $a_0 = 0{,}934$, $a_1 = 0{,}427$.

Zatem szukany wielomian aproksymacyjny to: W(*x*)=0,934 + 0,427*x*.

f(x)- linia czerwona, F(x)- linia niebieska

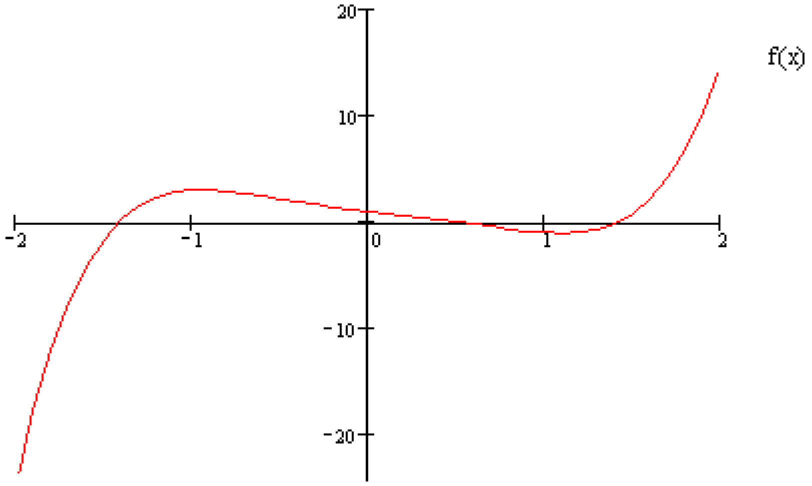


Rozwiązanie zadań z lekcji 8 i 9

Rozwiązanie zad.1.
Znaleźć przedziały izolacji dla równania opisanego wielomianem piątego stopnia:

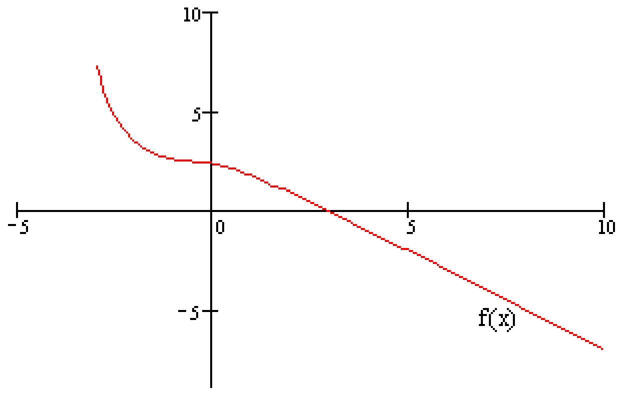
$$x^5 - 5x^4 - x^3 + 5x^2 - 2x + 1 = 0.$$

Na rysunku wielomian opisujący lewą stronę równania przecina się trzy razy z osią 0*x*.



Możemy podać następujące przedziały izolacji: (-2 ; -1) , (0, 1) i (1, 2).

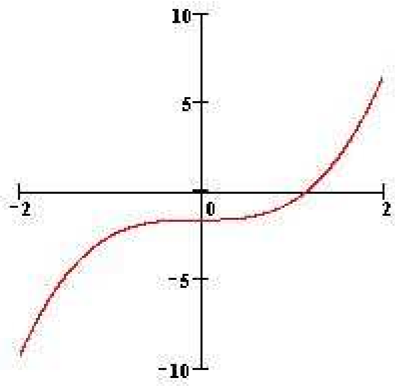
Rozwiązanie zad.2.
Znaleźć przedziały izolacji dla równania: $e^{-x-1} - \sqrt{x^2 + 1} + 3 = 0$



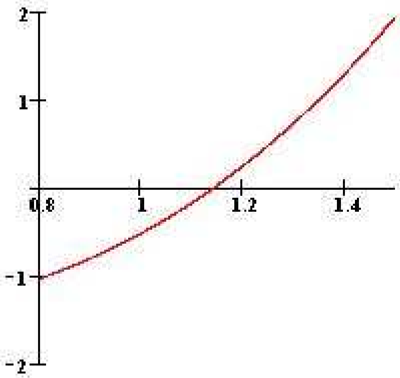
Równanie ma jeden pierwiastek w przedziale (1, 5).

Rozwiązanie zad.3.

Narysujemy funkcję opisującą równanie $f(x) = \ln(x^2 + 11) + x^3 - 4$ w dużym przedziale np.: <-5, 5>. A następnie w mniejszym <-2, 2>



oraz ostatecznie wybierzemy jako przedział izolacji jedynego pierwiastka: <1,1 ; 1,2>.



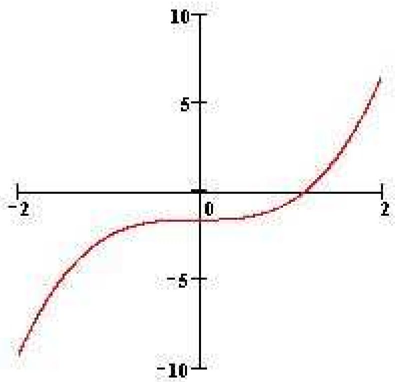
Stosując metodę bisekcji tak długo, aż $| x_n - x_{n-1} | \le 10^{-5}$ dostajemy pierwiastek przybliżony p=1,14217, f(p)= - 0, 0000135, pierwiastek otrzymaliśmy po 14 iteracjach . Poniżej podany jest wektor w którym po kolei występują wszystkie przybliżenia pierwiastka.

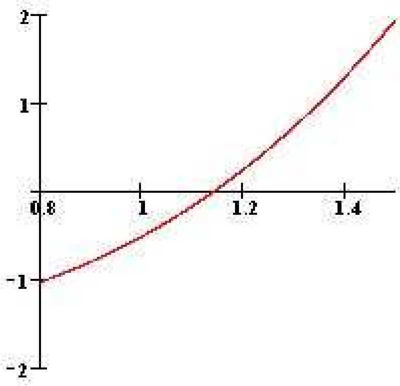
$x_i =$

1.1
1.15
1.125
1.1375
1.14375
1.14063
1.14219
1.14141
1.1418
1.14199
1.14209
1.14214
1.14216
1.14218
1.14217

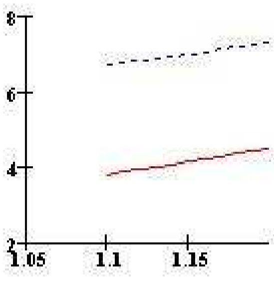
Rozwiązanie zad 4.:

Narysujemy funkcję opisującą równanie $f(x) = \ln(x^2 + 11) + x^3 - 4$ w dużym przedziale np.: <-5, 5>. A następnie w mniejszym
<-2, 2> oraz ostatecznie wybierzemy jako przedział izolacji jedynego pierwiastka: <1,1 ; 1,2>, tak jak w zadaniu 3.





Narysujemy pochodne pierwszą i drugą w tym przedziale:



Widać na rysunku, że pierwsza (czerwona linia) i druga (niebieska linia) pochodna są w tym przedziale dodatnie. Za punkty startu wybieramy punkty w których funkcja jest też dodatnia, np.: x_0=1,2, x_1=1,19. Możemy zastosować wzór iteracyjny z tematu: Metoda siecznych :

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

startując z dwóch podanych punktów. Aby uzyskać żądaną dokładność musimy wykonać 5 iteracji, otrzymamy wtedy: *p*=1,1421724855,
wartość *f(p)*=0, poniżej podany jest wektor w którym po kolei występują wszystkie przybliżenia pierwiastka.

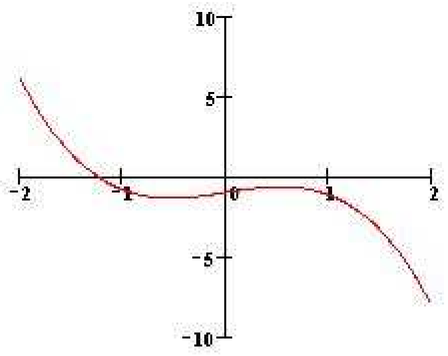
X_i =

1.2
1.19
1.144393553
1.1422604202
1.1421726516
1.1421724856
1.1421724855

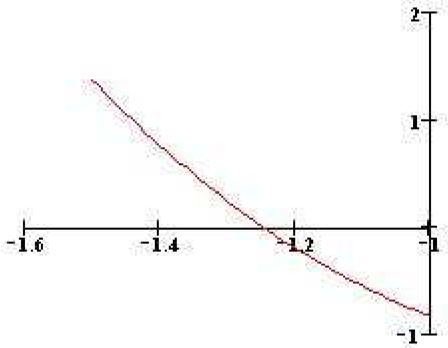
W porównaniu z metodą bisekcji , ta metoda już po 5 iteracjach daje dokładność dwa razy lepszą niż metoda bisekcji po 14 iteracjach.

Rozwiązanie zad.5.:

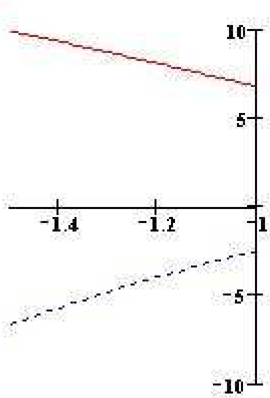
Narysujemy funkcję opisującą równanie $f(x) = \sin(x) - x^3 - 1$ w dużym przedziale np.: <-5, 5>, a następnie w mniejszym <-2, 2> . Funkcja tylko raz przecina się z osią 0*x*, równanie ma jeden pierwiastek rzeczywisty.



Ale w tym przedziale funkcja “przegina” się to znaczy, że druga pochodna zmienia znak. Nie możemy wybrać tak dużego przedziału. Zawężamy go tak, by pochodne nie zmieniały znaku, np.: <-1,5 ; -1>.



Narysujemy pochodne pierwszą i drugą w tym przedziale:



Widać na rysunku, że pierwsza pochodna (niebieska linia) jest ujemna, druga pochodna (czerwona linia) jest dodatnia . Za punkt startu wybieramy punkt w których funkcja jest też dodatnia, czyli lewy koniec przedziału x_0= -1,5 . Możemy zastosować wzór iteracyjny z tematu: Metoda stycznych :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

startując podanego punktu. Aby uzyskać żądaną dokładność musimy wykonać 5 iteracji, otrzymamy wtedy: *p*= -1,249052148501, wartość *f(p)*=0, poniżej podany jest wektor w którym po kolei występują wszystkie przybliżenia pierwiastka.

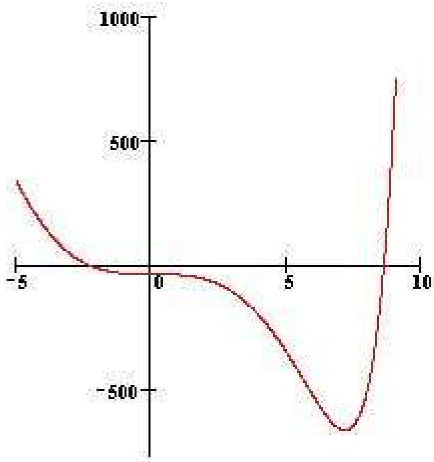
$\mathbf{X_i}$ =

-1.5
-1.293763914524
-1.250869154003
-1.249055333767
-1.249052148511
-1.249052148501

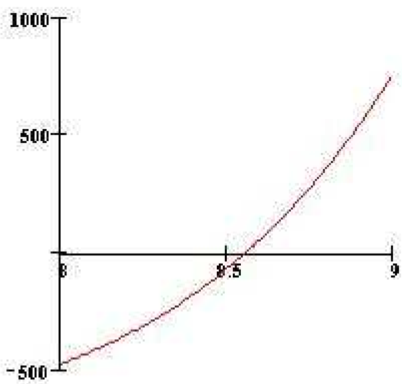
Rozwiązanie zad.6.

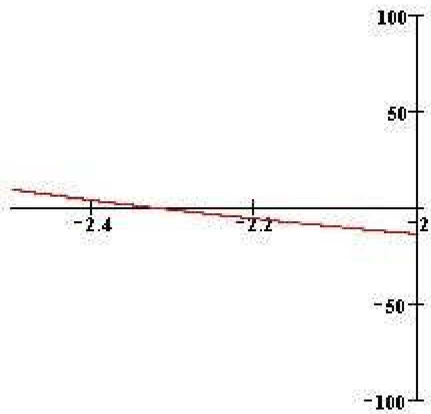
Narysujemy funkcję opisującą równanie $f(x) = e^{x-1} - 3x^3 - 38$ w dużym przedziale np.:

<-5, 9>.

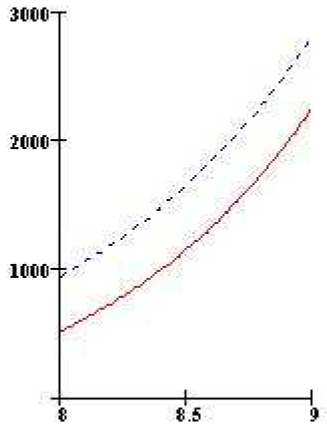


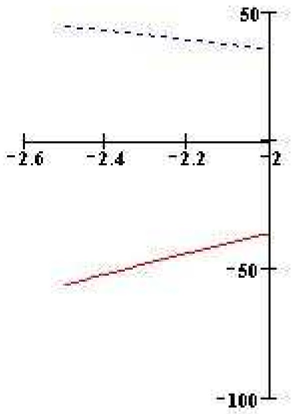
W tym przedziale są wszystkie rzeczywiste pierwiastki równania. Wydzielimy dwa przedziały izolacji: <8, 9> i <-2,5 ; -2> i znajdziemy pierwiastki po kolei, najpierw dodatni później ujemny. Wykresy funkcji w tych przedziałach są następujące:





Poniżej wykresy pochodnych : pierwszej (czerwona linia) i drugiej (niebieska linia-przerywana) , jak widać pochodne nie zmieniają znaku w tych przedziałach.





Szukamy dodatniego pierwiastka metodą siecznych: korzystamy ze wzoru:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}.$$

Za punkty startu przyjmujemy x_0=9, x_1=8.99, dostajemy po 7 iteracjach pierwiastek *p*=8,5598575963 i $f(p) = -2{,}274 \cdot 10^{-13}$.

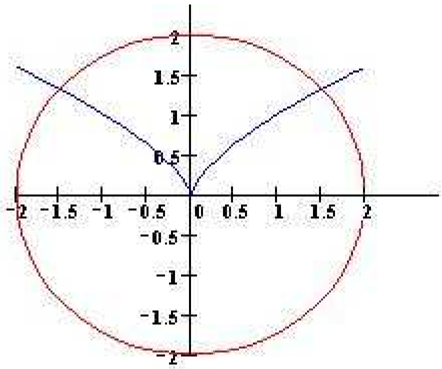
Ten sam pierwiastek obliczamy drugą metodą: korzystamy ze wzoru: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Za punkt startu wybieramy punkt w których funkcja jest też dodatnia x_0=9 . Po 5 iteracjach dostajemy ten sam pierwiastek. Metoda ta jest szybsza od poprzedniej, wykonaliśmy o dwie iteracje mniej doprowadzające do tego samego wyniku.

Szukamy w ten sam sposób drugiego pierwiastka – ujemnego.

Dla metody siecznych wybieramy jako punkty startu x_0= -2.5, x_1= -2,49, dostajemy po 6 iteracjach pierwiastek *p*1= -2,3303316706 , $f(p1) = -7{,}105 \cdot 10^{-15}$. Dla metody stycznych dostajemy ten pierwiastek po 5 iteracjach, startując z punktu x_0= -2.5

Rozwiązanie zad.7:
Na rysunku pierwsze równanie jest reprezentowane przez okrąg (czerwona linia), drugie przez parabolę półsześcienną (niebieska linia).



Widać , że układ ma dwa pierwiastki. Będziemy stosować metodę Newtona dla układów opisaną wzorem: $z^{<n+1>} = z^{<n>} - (J(z^{<n>}))^{-1} F(z^{<n>})$. Lewą stronę pierwszego równania oznaczymy przez $f_1(x, y)$, lewą stronę drugiego równania oznaczymy przez $f_2(x, y)$. Oznaczmy przez :

gdzie $F(x,y) = \begin{bmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{bmatrix}$, $J(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}$, a $z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Aby uzyskać ciąg przybliżeń zbieżny do pierwiastka o dodatnich współrzędnych bierzemy (korzystając z rysunku) jako punkt startu: $z^{\langle 0 \rangle} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}$, wtedy po 5 iteracjach otrzymujemy:

$z^{\langle 5 \rangle} = \begin{bmatrix} xp \\ yp \end{bmatrix}$

xp = 1,50726136, *yp* = 1,31459621 , $F(z^{\langle 5 \rangle}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Cały ciąg iteracji przedstawia macierz, w kolumnach są kolejne wektory *z* , w pierwszej kolumnie jest wektor startu, w ostatniej wektor rozwiązanie.

$$\begin{pmatrix} 1.5 & 1.5 & 1.50720165 & 1.50726135 & 1.50726136 & 1.50726136 \\ 1.5 & 1.33333333 & 1.31481481 & 1.31459624 & 1.31459621 & 1.31459621 \end{pmatrix}$$

Jeśli wstawimy za punkt startu $z^{\langle 0 \rangle} = \begin{bmatrix} -1.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}$ to otrzymamy rozwiązanie:

xp = -,50726136, *yp* = 1,31459621.

Rozwiązanie zad.8.

Mamy dany układ:

$$(x-2)^2 + y^2 - z = 0$$
$$x^2 + y^2 - 4 + z^2 = 0$$
$$z + y + 2x - 3 = 0$$

Będziemy stosować metodę Newtona dla układów opisaną wzorem:
$v^{\langle n+1 \rangle} = v^{\langle n \rangle} - (J(v^{\langle n \rangle}))^{-1} F(v^{\langle n \rangle})$. Lewą stronę pierwszego równania oznaczymy przez $f_1(x, y, z)$, lewą stronę drugiego równania oznaczymy przez $f_2(x, y, z)$, lewą stronę trzeciego równania oznaczymy przez $f_3(x,y,z)$, Oznaczmy przez :

gdzie $F(x,y,z) = \begin{bmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \\ f_3(x,y,z) \end{bmatrix}$, $J(x,y,z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{bmatrix}$, a $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

Aby uzyskać ciąg przybliżeń zbieżny do pierwiastka o dodatnich współrzędnych bierzemy jako punkt startu: $v^{\langle 0 \rangle} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.2 \\ 2 \end{bmatrix}$, bo wartości składowych funkcji *F* są małe : $F(v^{\langle 0 \rangle}) = \begin{bmatrix} 0{,}29 \\ 0{,}29 \\ -0{,}2 \end{bmatrix}$.
Ponieważ nie mamy pomocniczego rysunku układu równań, szukamy tak wektora startu, aby równania przyjmowały małe wartości, tak jak w tym wypadku.

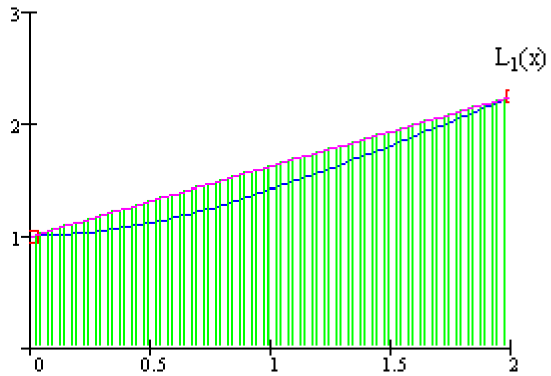
Wtedy po 6 iteracjach otrzymujemy: $v^{\langle 6 \rangle} = \begin{bmatrix} xp \\ yp \\ zp \end{bmatrix}$

xp = 0,63442491, *yp* = -0,15889173 , *zp*= 1,89004192, $F(v^{\langle 6 \rangle}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Rozwiązanie zadań z lekcji 10 i 11.

Rozwiązanie zad.1.

Stosując wzór trapezów:



$$S(f) = \frac{h}{2}(f(a) + f(b))$$

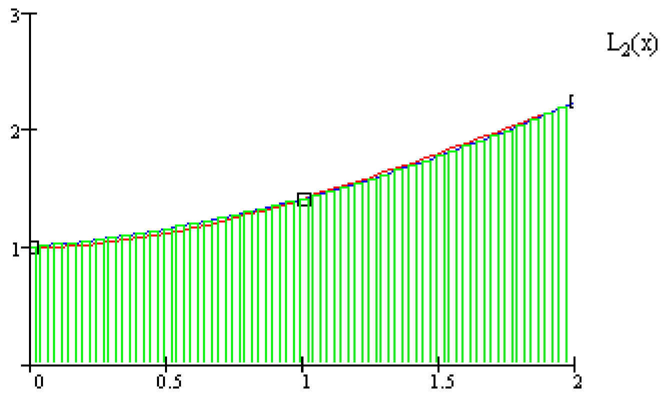
gdzie *h*=2, otrzymujemy wartość *S(f)*= 3,236068. Ponieważ funkcja pierwotna dla podanej jest bardzo skomplikowana to ją podajemy

$$F(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}a\sinh(x), \quad calka = F(b) - F(a) = 0{,}2957886$$

(podajemy wyniki z dokładnością do 6 cyfr po przecinku).

Błąd całkowania = 0,278182, co stanowi 8,6%.

Stosując wzór parabol:



$$S(f) = \frac{h}{3}(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b))$$

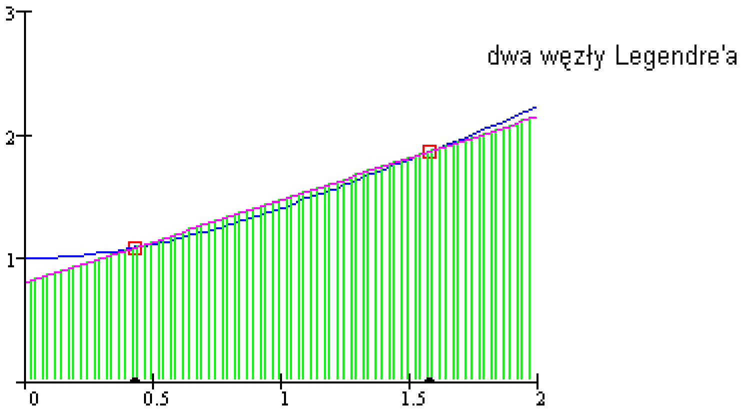
gdzie *h* =1, otrzymujemy wartość *S(f)* = 2,964307. Błąd całkowania = 0,006422, co stanowi 0,22%.

Rozwiązanie zad.2.

Ponieważ funkcja pierwotna dla podanej jest bardzo skomplikowana to ją podajemy

$$F(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}a\sinh(x), \quad calka = F(b) - F(a) = 0{,}2957886$$

Stosując wzór (2 węzły Legendre`a):

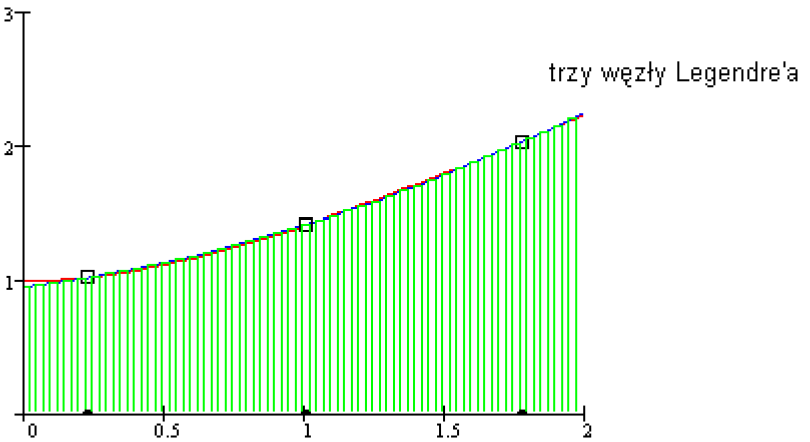


$$S(f) = \frac{b-a}{2}\left(A_0 f\left(\frac{b-a}{2}t_0 + \frac{b+a}{2}\right) + A_1 f\left(\frac{b-a}{2}t_1 + \frac{b+a}{2}\right)\right)$$

gdzie t_0 = -0,57735, t_1 = 0,57735, A_0 =1, A_1 =1, otrzymujemy *S(f)*=2,953276,

błąd całkowania =0,004609, co stanowi 0,15%.

Stosując wzór (3 węzły Legendre`a)



$$S(f) = \frac{b-a}{2}\left(A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)\right)$$

gdzie

$t_0 = -0{,}774597, t_1 = 0, t_2 = 0{,}774597, A_0 = \frac{5}{9}, A_1 = \frac{8}{9}, A_2 = \frac{5}{9}$

$x_0 = \frac{b-a}{2}t_0 + \frac{b+a}{2}, x_1 = \frac{b-a}{2}t_1 + \frac{b+a}{2}, x_2 = \frac{b-a}{2}t_2 + \frac{b+a}{2}$

Otrzymujemy *S(f)*=2,958215, błąd całkowania =0,000329, co stanowi 0,01%.

Rozwiązanie zad.3.:

Stosując metodę złożoną trapezów wykorzystamy wzór:

$$S(f) = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2\left(f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{m-1})\right) + f(x_m)\right)$$

Gdzie m=10, $h=(b-a)/m$, $x_i = a + ih$, $i=0,1,\dots m$.

Wyniki : *S(f)* =2,960867, błąd całkowania= 0,003.

Stosując metodę złożoną trapezów korzystamy ze wzoru:

$$S(f) = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 2\left(f(x_2) + f(x_4)\dots + f(x_{m-2})\right) + 4\left(f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{m-1})\right) + f(x_m)\right)$$

Gdzie m, h, x_i są takie jak powyżej (m jest parzyste).

Wyniki : *S(f)*=2,957885, błąd całkowania=0,00000094.

Błędy całkowania obliczaliśmy porównując wyniki przybliżone z wynikami otrzymanymi za pomocą funkcji pierwotnej (tak jak w zadaniu 1 i 2):

$$F(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}a\sinh(x), \quad calka = F(b) - F(a) = 0{,}2957886$$

Rozwiązanie zad.4.:

Aby zagwarantować wymaganą dokładność znajdziemy dla obu metod ilość podprzedziałów. Wykorzystamy wzory z tematu: Uwagi o dokładności.

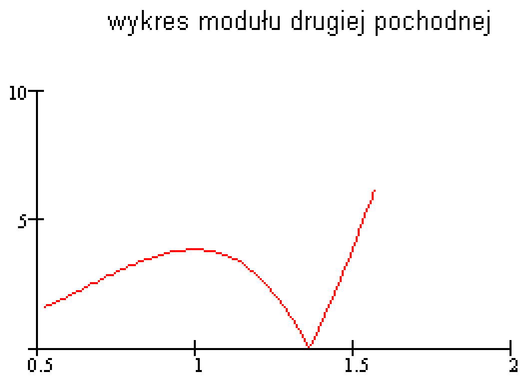
Dla metody trapezów przyjmujemy wzór:

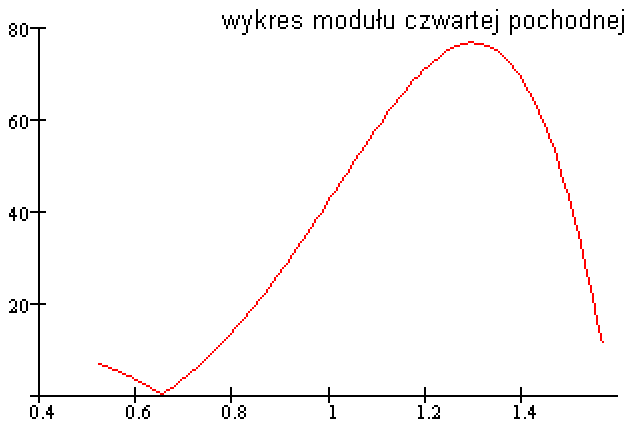
$$m = \left[\sqrt{\frac{(b-a)^3}{12\varepsilon} M2} \right] + 1$$

Dla metody parabol wzór:

$$m = 2 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5}{180\varepsilon} M4} \right] + 2$$

Z rysunków oszacujemy wartości *M2* i *M4*.





Niech *M2*=6,3, a *M4*=77. Korzystając z powyższych wzorów na ilość podprzedziałów, otrzymujemy dla metody trapezów *m*=777, dla metody parabol *m*=28. Wstawiając te ilości podprzedziałów odpowiednio do poniższych wzorów otrzymujemy wyniki.

Stosujemy wzór złożony trapezów: *m* =777

$$h = \frac{b-a}{m}, \quad x_k = a + k \cdot h, \quad k = 0,1 \ldots m$$

$$S(f) = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2\left(f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{m-1})\right) + f(x_m)\right)$$

i wzór złożony parabol: *m*=28

$$h = \frac{b-a}{m}, \quad x_k = a + k \cdot h, \quad k = 0,1 \ldots m$$

$$S(f) = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 2\left(f(x_2) + f(x_4) \ldots + f(x_{m-2})\right) + 4\left(f(x_1) + f(x_3) + \ldots + f(x_{m-1})\right) + f(x_m)\right)$$

Przybliżoną wartość całki równa się 0,329462 dla obu metod, tylko różne są ilości podprzedziałów, które prowadzą do tego wyniku z błędem nie przekraczającym podany 10^{-6}.

Rozwiązanie zad.5:

Ilość podprzedziałów trzeba obliczyć ze wzoru:

$$m = \left[\sqrt[4]{\frac{(b-a)^5 M4}{270\,\varepsilon}} \right] + 1,$$

gdzie [ ] to część całkowita liczba w tym nawiasie.

M4 to górna ograniczenie modułu czwartej pochodnej funkcji podcałkowej. W rozwiązaniu zadania 4 przyjęliśmy z rysunku *M4*=77. Możemy obliczyć z powyższego wzoru ilość podprzedziałów gwarantującą wymaganą dokładność : *m* =25. Dzielimy podany przedział na 25 podprzedziałów i w każdym z nich stosujemy metodę opartą na 2 węzłach Legendre`a. To znaczy **w każdym** podprzedziale [a_j, b_j] trzeba przeliczyć dwa węzły według wzoru:

$$x_{0j} = \frac{b_j - a_j}{2} t_0 + \frac{b_j + a_j}{2}, \quad x_{1j} = \frac{b_j - a_j}{2} t_1 + \frac{b_j + a_j}{2}$$ gdzie

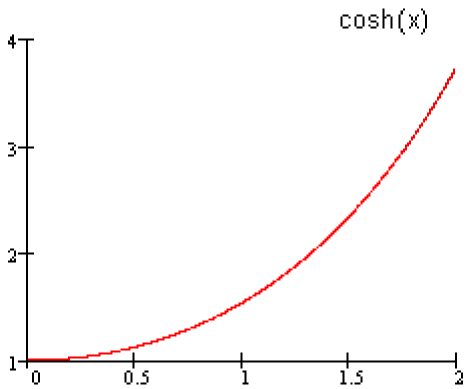
$t_0 = -0{,}577350, t_1 = 0{,}577350, A_0 = 1, A_1 = 1$

i przesumować wartości: $\frac{b_j - a_j}{2}\left(A_0 f(x_{0j}) + A_1 f(x_{1j})\right)$ po wszystkich *m* podprzedziałach.

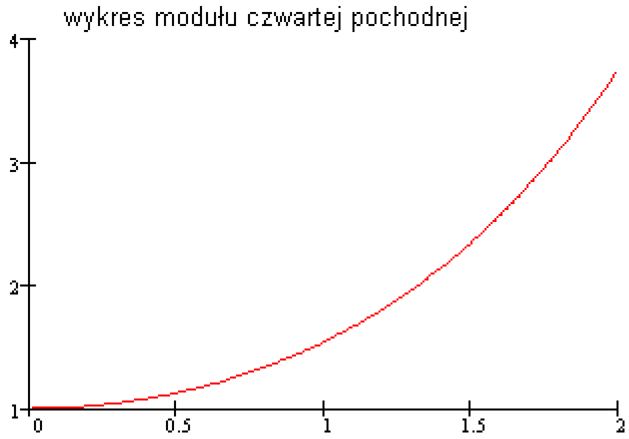
Wtedy otrzymamy taki sam wynik jak w zadaniu 4, czyli całka=0,329462, tylko w tym wypadku ilość podprzedziałów jest mniejsza niż w poprzednich metodach.

Rozwiązanie zad.6.

Ze względu na lepszą dokładność wybierzemy metodę parabol. Skorzystamy ze wzoru na długość łuku: $l = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx$, jeśli krzywa jest opisana wzorem *y=y(x)* w przedziale [a, b].



W naszym przypadku funkcją podcałkową będzie $f(x) = \sqrt{1 + \sinh^2(x)}$.



Odczytując z rysunku wartość *M4* = 3,8, wstawiając do poniższego wzoru *M4*, dokładność, *a* i *b* mamy ilość podprzedziałów:

$$m = 2 \cdot \left\lfloor \frac{1}{2} \cdot \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5}{180\,\varepsilon} M4} \right\rfloor + 2 = 92$$

Możemy teraz zastosować wzór złożony parabol: *m*=92

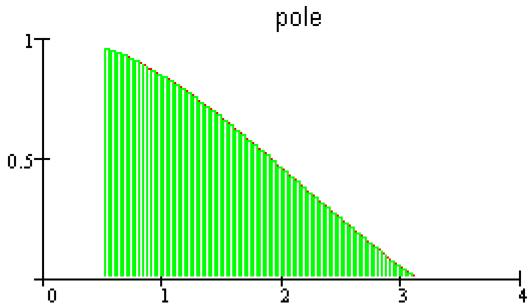
$$h = \frac{b-a}{m}, \quad x_k = a + k \cdot h, \quad k = 0,1...m$$

$$S(f) = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 2\left(f(x_2) + f(x_4).... + f(x_{m-2})\right) + 4\left(f(x_1) + f(x_3) + ... + f(x_{m-1})\right) + f(x_m)\right)$$

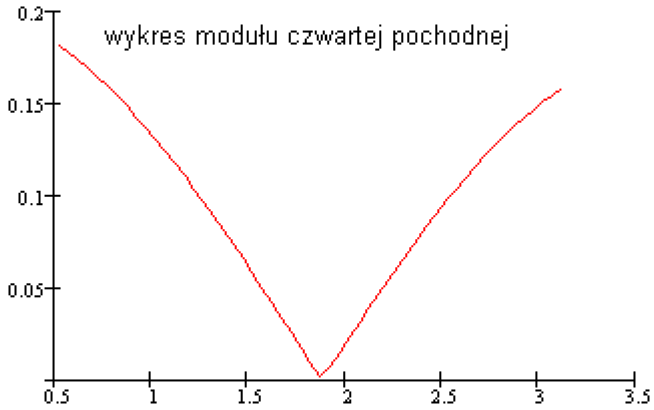
Przybliżona wartość długości łuku równa się 3,62686041 z błędem nie przekraczającym podany 10^{-8}.

Rozwiązanie zad.7.

Ponieważ podana funkcja jest w przedziale [a, b] dodatnia, szukane pole to całka z tej funkcji w podanym przedziale. Wykres funkcji i zaznaczone pole na rysunku poniżej:



W naszym przypadku funkcją podcałkową będzie $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$.



Odczytując z rysunku (modułu czwartej pochodnej) wartość *M4* = 0,18, wstawiając do poniższego wzoru *M4*, dokładność, *a* i *b* mamy ilość podprzedziałów:

$$m = 2 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5}{180\varepsilon} M4} \right] + 2 = 12$$

Możemy teraz zastosować wzór złożony parabol: *m*=12

$$h = \frac{b-a}{m}, \;\; x_k = a + k \cdot h, \;\; k = 0,1 \ldots m$$

$$S(f) = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 2\left(f(x_2) + f(x_4) \ldots + f(x_{m-2})\right) + 4\left(f(x_1) + f(x_3) + \ldots + f(x_{m-1})\right) + f(x_m)\right)$$

Przybliżona wartość pola równa się 0,33625, z błędem nie przekraczającym podany 10^{-5}.