transmitancja

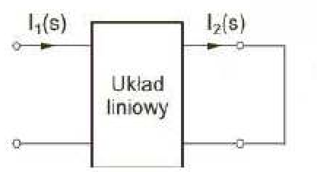
1. Identyfikacja problemu = po czym poznać, że zadanie trzeba rozwiązać tą metodą:

- hasło "transmitancja" w treści zadania :D
- przypadek szczególny: hasło "impedancja wejściowa"

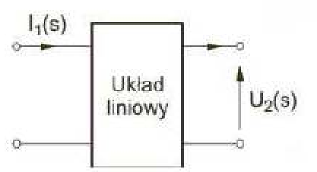
2. Określenie rodzaju transmitancji do policzenia

1. Rodzaj jest podany w treści zadania lub wynika z rysunku układu:
   Prostokąt z napisem Układ liniowy to jakiś obwód zawierający elementy R, C, L (cewki mogą być sprzężone) oraz sterowane źródła prądu lub napięcia (to takie, których wartość wyraża się podanym w zadaniu wzorem np. $I_s=5U_1$). Nie może zawierać żadnych zwykłych źródeł prądu lub napięcia (czyli takich z podaną konkretną wartością lub funkcją e(t), u(t), i(t))
   - Transmitancja napięciowa
     Wyliczana dla rozłączonego wyjścia (zaciski po prawej stronie nie są połączone, zatem **I_2=0**)

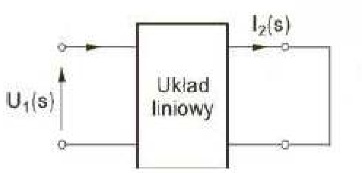
     wzór:
     $$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)}$$
   - Transmitancja prądowa
     Wyliczana dla zwartego wyjścia (zaciski po prawej stronie są połączone, zatem **U_2=0**)



     wzór:
     $$T_i(s) = \frac{I_2(s)}{I_1(s)}$$
   - Transmitancja napięciowo-prądowa
     Wyliczana dla rozłączonego wyjścia (zaciski po prawej stronie nie są połączone, zatem **I_2=0**)



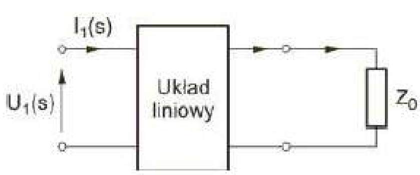
     wzór:
     $$T_{ui}(s) = \frac{U_2(s)}{I_1(s)}$$
   - Transmitancja prądowo-napięciowa
     Wyliczana dla zwartego wyjścia (zaciski po prawej stronie są połączone, zatem **U_2=0**)



wzór:

$$T_{iu}(s) = \frac{I_2(s)}{U_1(s)}$$

- Impedancja wejściowa
  Wyliczana przy określonej impedancji na wyjściu (Z_0) - powinna być podana w zadaniu



wzór:

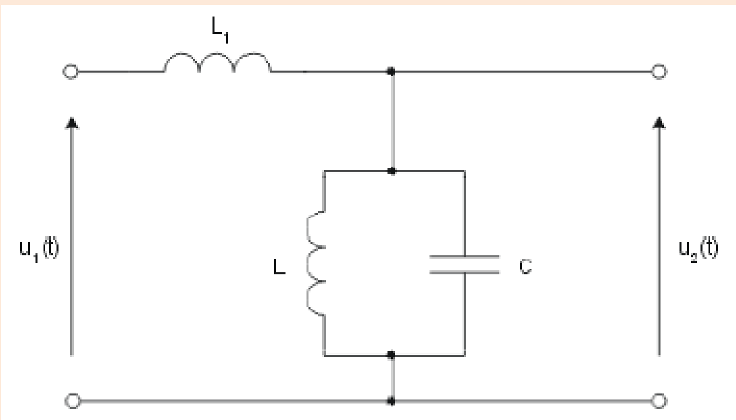
$$Z_{we}(s) = \frac{U_1(s)}{I_1(s)}$$

Rozwiązanie

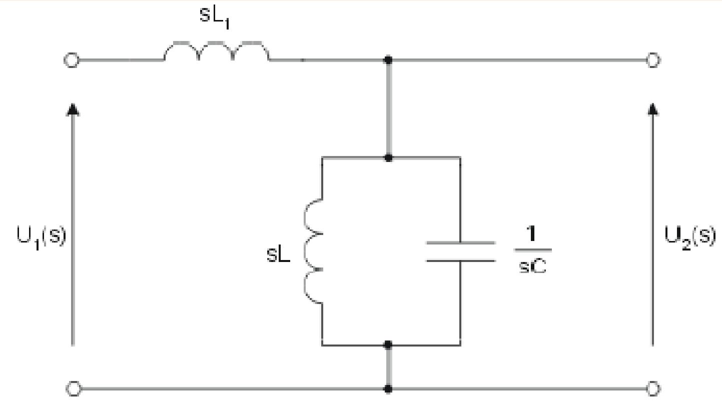
3. Przekształcenia symboliczne

1. dane wejściowe i wyjściowe zamienia się na postać operatorową: $U_1(s)$, $U_2(s)$, $I_1(s)$, $I_2(s)$
2. wprowadza się impedancje operatorowe dla każdego elementu układu (R,L,C) zgodnie z listą:
   - rezystor:
     $Z_R = R$
   - cewka:
     $Z_L = sL$
   - cewka sprzężona - indukcja wzajemna - wzór stosowany po usunięciu sprzężenia:
     $Z_M = \pm sM$ znak w zależności od rodzaju sprzężenia
   - kondensator:
     $Z_C = \frac{1}{sC}$

Przykład



jest to transmitancja napięciowa - na wejściu napięcie $u_1(t)$, na wyjściu napięcie $u_2(t)$
zastępujemy te napięcia oraz parametry elementów zgodnie z powyższym



impedancje zastępcze - operatorowe wynoszą:

$Z_{L1} = sL_1$

$Z_L = sL$

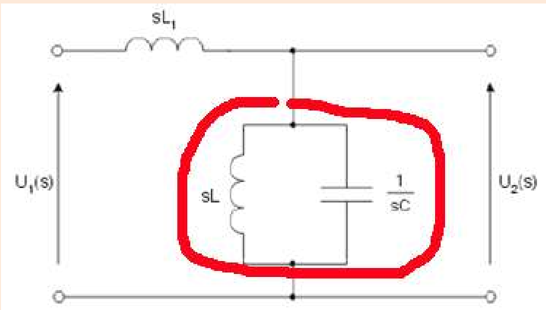
$Z_C = \frac{1}{sC}$

4. Wyznaczenie rozpływu prądów

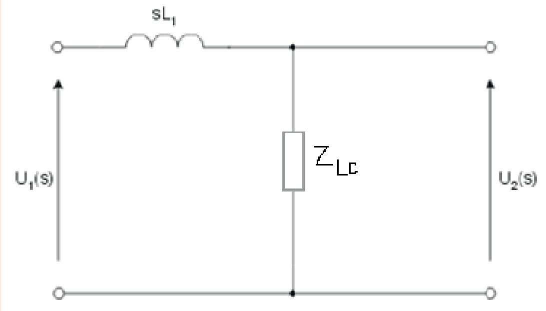
1. Jeśli w układzie występują sprzężenia cewek, to najpierw trzeba je usunąć i rozpływ prądów liczyć na układzie bez sprzężeń
2. Wszędzie tam, gdzie jest to możliwe, trzeba wyliczyć impedancję zastępczą (dla połączeń szeregowych i równoległych, a nawet transfiguracja trójkąt-gwiazdka też może być pomocna, jeśli w jej wyniku da się później zredukować liczbę elementów przez wyliczenie impedancji zastępczej)
3. Po uproszczeniu układu zastosować zwykłą metodę wyznaczania prądów - równania Kirchhoffa, przy czym do równań napięciowych trzeba od razu wstawiać dla każdego elementu U = I Z (zamieniać napięcie na prąd razy impedancja, żeby pozbyć się napięć - co jest istotne, gdy w układzie były cewki sprzężone).
   - WAŻNE: dane wejściowe - napięcia lub prądy na wejściu i wyjściu traktować jako dane (mimo że nie są podane ich konkretne wartości)
   - WAŻNE: korzystać z warunku podanego w p.2 przy wzorze na transmitancję (chodzi o to, że zeruje się wyjściowy prąd lub napięcie - w zależności od rodzaju transmitancji - trzeba z tego skorzystać przy wypisywaniu praw Kirchhoffa)

Przykład c.d.

wprowadzamy impedancję zastępczą za połączone równolegle cewkę i kondensator



po zastąpieniu impedancją zastępczą



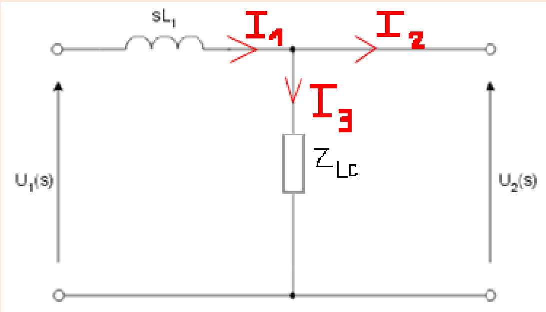
gdzie Z_{LC} wynosi (zgodnie ze wzorem na impedancję zastępczą dla połączenia równoległego):

$$Z_{LC} = \frac{Z_C Z_L}{Z_C + Z_L} = \frac{\frac{1}{sC}\, sL}{\frac{1}{sC} + sL}$$

wzór ten najlepiej rozszerzyć przez sC, żeby pozbyć się ułamka piętrowego (mnożymy górę i dół dużego ułamka przez sC):

$$Z_{LC} = \frac{\frac{1}{sC}\, sL\, sC}{\left(\frac{1}{sC} + sL\right)\, sC} = \frac{sL}{1 + s^2 LC}$$

Teraz trzeba rozrysować prądy (bo już nic więcej nie da się uprościć w tym obwodzie)



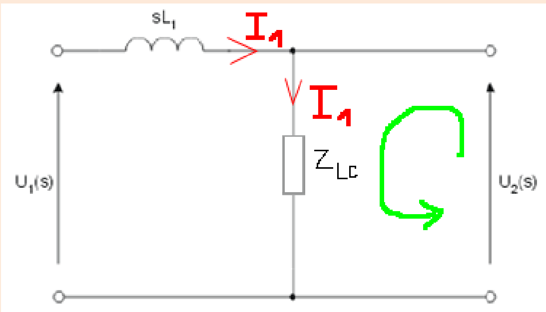
I od razu stosujemy założenie wynikające z rodzaju transmitancji, dla którego prąd wyjściowy jest zerowy, bo styki wyjścia są rozwarte - czyli I_2=0

Zatem z prawa Kirchhoffa dla węzła z rysunku:

$I_1 = I_2 + I_3 = 0 + I_3 = I_3$

czyli w tym obwodzie płynie tylko jeden prąd - I_1

Wyliczamy go z dowolnego oczka, choć prościej będzie z oczka prawego - bo ma tylko jeden element:



$U_2(s) = U_{LC}$

i od razu wstawiamy za U_{LC} impedancję razy prąd

$U_2(s) = Z_{LC}\, I_1$

Wyliczamy I_1

$$I_1 = \frac{U_2(s)}{Z_{LC}} = \frac{U_2(s)(1 + s^2LC)}{sL}$$

I_1 jest uzależnione od U_2 (parametr zadania), operatora s i danych elementów

5. Wyznaczenie transmitancji

1. Jeśli w układzie były sprzężone cewki, to po wyznaczeniu wzorów na prądy trzeba wrócić do układu początkowego (ale wszystkie uproszczenia dotyczące innych elementów - poza sprzężonymi cewkami - można zostawić: chodzi o połączenia równoległe i szeregowe elementów niesprzężonych, które zostały zastąpione impedancjami zastępczymi)
2. Korzystamy z równań napięciowych - wstawiamy do nich policzone w poprzednim punkcie prądy. W wyniku powinno zostać jedno równanie zawierające tylko parametry potrzebne do wyliczenia transmitancji (napięcia lub prądy wejściowe i wyjściowe - w zależności od typu transmitancji). Wyrazy trzeba pogrupować tak, by wyciągnąć przed nawiasy te parametry (jeśli dany parametr występował w kilku wyrazach), a następnie przenieść parametr wejściowy na jedną, a parametr wyjściowy na drugą stronę równania i podzielić stronami - tak żeby dostać prawą stronę równania transmitancji.

Przykład c.d.

wypisujemy równania napięciowe:
oczko lewe:
$$U_1(s) - U_{L1} - U_{LC} = 0$$
$$U_2(s) = U_{LC}$$
Równania są na tyle proste, że od razu można drugie wstawić do pierwszego usuwając U_{LC}
$$U_1(s) - U_{L1} - U_2(s) = 0$$
rozpisujemy U_{L1}
$$U_1(s) - I_1 sL_1 - U_2(s) = 0$$
wstawiamy wyliczony wcześniej prąd
$$U_1(s) - \frac{U_2(s)(1 + s^2LC)}{sL} sL_1 - U_2(s) = 0$$
grupujemy i wyciągamy $U_2(s)$ przed nawias
$$U_1(s) - U_2(s)\left(\frac{1 + s^2LC}{sL} sL_1 + 1\right) = 0$$
przenosimy napięcia na dwie przeciwne strony równania:
$$U_2(s)\left(\frac{1 + s^2LC}{sL} sL_1 + 1\right) = U_1(s)$$
dzielimy przez U_1 i ten duży nawias
$$\frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{\frac{1 + s^2LC}{sL} sL_1 + 1}$$
teraz wystarczy wstawić dane liczbowe za elementy obwodu (czyli za L, C, L_1) - dostaniemy funkcję wyrażoną przez s

na przykład dla danych:
$L = 1H$, $L_1 = 0{,}5H$, $C = 1F$

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{\frac{1 + s^2 \cdot 1 \cdot 1}{s \cdot 1} s \cdot 0.5 + 1} = \frac{1}{\frac{1 + s^2}{2s} s + 1} = \frac{1}{\frac{1 + s^2 + 2}{2}} = \frac{2}{s^2 + 3}$$

6. Charakterystyki częstotliwościowe

1. Charakterystyka amplitudowa
   1. wstawić do wyliczonego wzoru na transmitancję H(s) za s wyrażenie jω, czyli
      $s = j\omega$
      otrzymujemy funkcję zespoloną od parametru ω, którą upraszczamy wyliczając potęgi elementu urojonego j.
      Na koniec porządkujemy wyrazy funkcji tak, by na górze i na dole ułamka pogrupować wyrazy rzeczywiste i urojone w nawiasy.
   2. charakterystyka amplitudowa to moduł z otrzymanej uproszczonej funkcji od ω
      $|H(j\omega)|$
      Jest to w postaci ogólnej moduł z dzielenia liczb zespolonych. W pierwszym kroku rozdzielamy moduł na osobny moduł z licznika i mianownika, po czym stosujemy znany wzorek na moduł liczby zespolonej (pierwiastek z kwadratów części rzeczywistej i części urojonej)
      W szczególności na dole lub na górze ułamka może nie być j - wtedy moduł jest zwykłą wartością bezwzględną i nic z tym nie trzeba robić

Przykład c.d.

wstawiamy
$s = j\omega$
do wzoru transmitancji otrzymanego wcześniej:
$$H(s) = \frac{2}{s^2 + 3}$$
$$H(j\omega) = \frac{2}{(j\omega)^2 + 3} = \frac{2}{-\omega^2 + 3}$$
liczymy moduł otrzymanej funkcji
$$|H(j\omega)| = \left|\frac{2}{-\omega^2 + 3}\right|$$
w tym przypadku już nic więcej nie trzeba robić, bo we wzorku nie ma *j*.

dla treningu poniżej specjalny przykład na sytuację z liczbami zespolonymi:

przykład 2
niech
$$T(s) = \frac{s^2 + 2s}{s^2 + \frac{7}{3}s + \frac{4}{3}}$$
Wtedy charakterystyka częstotliwościowa - moduł tej funkcji - ma postać:
$$T(j\omega) = \frac{(j\omega)^2 + 2(j\omega)}{(j\omega)^2 + \frac{7}{3}(j\omega) + \frac{4}{3}} = \frac{-\omega^2 + 2j\omega}{-\omega^2 + \frac{7}{3}j\omega + \frac{4}{3}}$$
grupujemy wyrazy na rzeczywiste i urojone:

$$T(j\omega) = \frac{-\omega^2 + j2\omega}{\left(\frac{4}{3} - \omega^2\right) + j\frac{7}{3}\omega}$$

teraz wreszcie można policzyć moduł:

$$|T(j\omega)| = \left|\frac{-\omega^2 + j2\omega}{\left(\frac{4}{3} - \omega^2\right) + j\frac{7}{3}\omega}\right|$$

rozdzielamy moduł na oddzielny moduł z licznika i mianownika, po czym stosujemy znany wzorek:

$$|T(j\omega)| = \left|\frac{-\omega^2 + j2\omega}{\left(\frac{4}{3} - \omega^2\right) + j\frac{7}{3}\omega}\right| = \frac{|-\omega^2 + j2\omega|}{\left|\left(\frac{4}{3} - \omega^2\right) + j\frac{7}{3}\omega\right|} = \frac{\sqrt{(-\omega^2)^2 + (2\omega)^2}}{\sqrt{\left(\frac{4}{3} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{7}{3}\omega\right)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{\omega^4 + 4\omega^2}}{\sqrt{\left(\frac{4}{3} - \omega^2\right)^2 + \frac{49}{9}\omega^2}}$$

that's all

2. Charakterystyka fazowa
    1. pierwszy krok taki sam, tak jak w charakterystyce amplitudowej, więc jeśli była liczona, to można skorzystać z tego wyliczenia:
       wstawić do wyliczonego wzoru na transmitancję H(s) za s wyrażenie jω, czyli
       $s = j\omega$
       otrzymujemy funkcję zespoloną od parametru ω, którą upraszczamy wyliczając potęgi elementu urojonego j.
       Na koniec porządkujemy wyrazy funkcji tak, by na górze i na dole ułamka pogrupować wyrazy rzeczywiste i urojone w nawiasy.
    2. charakterystyka fazowa to funkcja kąta fazy zależnego od pulsacji ω. Jeśli doprowadziliśmy funkcję transmitancji do postaci ułamka z dwóch wyrażeń zespolonych, co można zapisać schematem:
       $H(j\omega) = \frac{A + jB}{C + jD}$
       gdzie A, B, C, D to wyrażenia, które nie zawierają j (czyli rzeczywiste)
       to - korzystając z własności dzielenia liczb zespolonych- charakterystyka fazowa ma postać:
       $\varphi(\omega) = arctg\left(\frac{B}{A}\right) - arctg\left(\frac{D}{C}\right)$
       przy czym do określenia kątów, którym równe są arkustangensy trzeba sprawdzić znak wyrażeń A, B (i analogicznie C, D) - zgodnie z poniższą tabelką:
       (chodzi o ustalenie "ćwiartki", w której kąt się znajduje)

A	B	Wartość kąta
+	dowolne	$arctg\left(\frac{B}{A}\right)$
-	dowolne	$180° + arctg\left(\frac{B}{A}\right)$
0	+	90°
0	-	270°

jeśli wyrażenia A, B, C lub D nie są stałego znaku (a mogą takie być, bo zależą od ω, która przyjmuje dowolne wartości > 0), to można zostawić po prostu same arkustangensy (uwaga: pan kalkulator liczy arkustangensy po wybraniu funkcji $\tan^{-1}$ - czyli guzik MODE i guzik TAN)

Przykład c.d.

mamy policzoną transmitancję:

$$H(s) = \frac{2}{s^2 + 3}$$

wstawiamy jak poprzednio $s = j\omega$

$$H(j\omega) = \frac{2}{-\omega^2 + 3}$$

i sprawdzamy jakie mamy dzielenie liczb zespolonych:

$A + jB = 2$

$C + jD = -\omega^2 + 3$

w pierwszym i drugim wyrażeniu po prawej stronie nie występuje *j* czyli współczynniki B i D są zerowe:

A=2, B=0, C=-ω^2, D=0

a więc charakterystyka fazowa wynosi

$$\varphi(\omega) = arctg\left(\frac{0}{2}\right) - arctg\left(\frac{0}{-\omega^2}\right) = arctg(0) - arctg(0) = 0$$

należało się tego spodziewać, bo transmitancja jest funkcją rzeczywistą

i znów dla treningu trudniejsze wyrażenie

przykład 2 c.d.

zgodnie z przeliczoną w poprzednim kroku transmitancją (po podstawieniu $s = j\omega$)

$$T(j\omega) = \frac{-\omega^2 + j2\omega}{\left(\frac{4}{3} - \omega^2\right) + j\frac{7}{3}\omega}$$

sprawdzamy jakie mamy dzielenie liczb zespolonych:

$A + jB = -\omega^2 + j2\omega$

$C + jD = \left(\frac{4}{3} - \omega^2\right) + j\frac{7}{3}\omega$

czyli po porównaniu części rzeczywistych i urojonych po obu stronach każdego równania:

$A = -\omega^2$

$B = 2\omega$

$C = \frac{4}{3} - \omega^2$

$D = \frac{7}{3}\omega$

A jest zawsze <0 bo ω^2>0

B jest zawsze >0 bo ω>0

C jest <0 gdy $\omega < \sqrt{\frac{4}{3}}$ i jest >0 gdy $\omega > \sqrt{\frac{4}{3}}$, jest równe 0, gdy $\omega = \sqrt{\frac{4}{3}}$

D jest zawsze >0 bo ω>0

Zatem podsumowując powyższe równania i nierówności

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} arctg\left(\frac{2\omega}{-\omega^2}\right) - \left(180° - arctg\left(\frac{\frac{7}{3}\omega}{\frac{4}{3} - \omega^2}\right)\right) & gdy\ \omega < \sqrt{\frac{4}{3}} \\ arctg\left(\frac{2\omega}{-\omega^2}\right) - arctg\left(\frac{\frac{7}{3}\omega}{\frac{4}{3} - \omega^2}\right) & gdy\ \omega > \sqrt{\frac{4}{3}} \\ arctg\left(\frac{2\sqrt{\frac{4}{3}}}{-\frac{4}{3}}\right) - 90° & gdy\ \omega = \sqrt{\frac{4}{3}} \end{cases}$$

albo dla uproszczenia można po prostu napisać

$$\varphi(\omega) = arctg\left(\frac{2\omega}{-\omega^2}\right) - arctg\left(\frac{\frac{7}{3}\omega}{\frac{4}{3} - \omega^2}\right)$$

co błędem będzie, ale niedużym

7. Odpowiedź impulsowa i skokowa układu

1. Do policzenia odpowiedzi układu potrzebna będzie transformata Laplace'a - a dokładnie transformata do niej odwrotna. Oto tabelka podstawowych funkcji przeliczonych tą transformatą:

Funkcja czasu - f(t)	Funkcja operatorowa - F(s)
δ(t) - delta Diraca	1
1(t) - funkcja skokowa	s
t	$\frac{1}{s^2}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s+\alpha}$
$sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$e^{-\alpha t}sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$
$e^{-\alpha t}cos(\omega t)$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$

2. Przydatne może też być wyznaczanie residuum funkcji zespolonej w punkcie biegunowym. Pokrótce przypomnienie:

1. Mamy funkcję wymierną zespoloną (dzielenie dwóch wielomianów przez siebie):
   $F(s) = \frac{L(s)}{M(s)}$
   residua liczymy we wszystkich punktach, które są pierwiastkami równania M(s)=0 (czyli wszystkie punkty, w których zeruje się mianownik).
   Dla każdego pierwiastka mianownika konieczne jest określenie jego krotności
   Do liczenia transformaty odwrotnej Laplace'a będzie potrzebna funkcja F(s) przemnożona przez e^{st}
2. residuum funkcji w punkcie s_0 który jest biegunem <u>jednokrotnym</u> wynosi:
   $res_{s=s_0}(F(s)e^{st}) = \lim_{s \to s_0}(F(s)(s - s_0)e^{st})$
3. residuum funkcji w punkcie s_0 który jest biegunem <u>**n**-krotnym</u> wynosi:
   $res_{s=s_0}(F(s)e^{st}) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{s \to s_0} \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}(F(s)(s - s_0)e^{st})$

3. **Odpowiedź impulsowa:**
   sprawdzamy odpowiedź układu na wymuszenie w postaci impulsu, który opisany jest funkcją delta Diraca.
   Odpowiedź impulsowa to transformata odwrotna z transmitancji układu:
   $y(t) = L^{-1}(T(s))$
   Musimy zatem znaleźć transformatę odwrotną do policzonej wcześniej transmitancji. Można to zrobić albo za pomocą tabeli z punktu 1, albo za pomocą wyznaczenia wszystkich residuów.
   1. metoda tabelkowa
      przekształcamy wzór na transmitancję tak, by odpowiadała któremuś ze wzorów z drugiej kolumny tabeli z punktu 1

Przykład c.d.

mamy policzoną transmitancję:

$H(s) = \frac{2}{s^2 + 3}$

wzór ten już prawie jest w postaci transformaty funkcji $sin(\omega t)$, czyli

$L(sin(\omega t)) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$

z mianownika wynika, że $\omega^2 = 3$, czyli $\omega = \sqrt{3}$, ale w liczniku jest 2 zamiast $\sqrt{3}$. W tym celu musimy sobie tam napisać $\sqrt{3}$ i zaraz przemnożyć całość przez odpowiedni ułamek, taki żeby z mnożenia wyszło tyle ile było (czyli 2) - będzie to oczywiście $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (bo $\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} = 2$)

$$L^{-1}(H(s)) = L^{-1}\left(\frac{2}{s^2 + 3}\right) = L^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{s^2 + (\sqrt{3})^2}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} L^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{s^2 + (\sqrt{3})^2}\right)$$

a teraz w nawiasie transformaty odwrotnej mamy dokładnie transformatę funkcji sin dla $\omega = \sqrt{3}$, czyli możemy policzyć tę transformatę odwrotną:

$y(t) = L^{-1}(H(s)) = \frac{2}{\sqrt{3}} sin(\sqrt{3}t)$

i mamy policzoną odpowiedź impulsową układu

   2. metoda residuowa

- znajdujemy wszystkie bieguny (miejsca zerowe mianownika) i ich krotności
- przemnażamy transmitancję przez e^{st} i dla takiej funkcji liczymy residua dla wszystkich znalezionych biegunów
- odpowiedź impulsowa to suma wszystkich residuów:
-

$$y(t) = L^{-1}\big(T(s)\big) = \sum_{i=1}^{n} res_{s=s_i}\left(T(s)e^{st}\right)$$

Przykład c.d.

mamy policzoną transmitancję:

$$H(s) = \frac{2}{s^2+3}$$

znajdujemy miejsca zerowe mianownika, czyli rozwiązujemy równanie:

$$s^2 + 3 = 0$$

najprościej liczyć deltę, ale tu można przenieść 3 na drugą stronę i spierwiastkować:

$$s^2 = -3$$

$$s = \pm\sqrt{-3} = \pm j\sqrt{3}$$

zatem mamy dwa rozwiązania, są to bieguny jednokrotne:

$$s_1 = -j\sqrt{3}$$

$$s_2 = j\sqrt{3}$$

a sama funkcja może być przedstawiona w postaci iloczynowej

$$H(s) = \frac{2}{\left(s - j\sqrt{3}\right)\left(s + j\sqrt{3}\right)}$$

liczymy residua w tych punktach dla zmodyfikowanej funkcji, czyli transmitancji przemnożonej przez e^{st}. Korzystamy ze wzoru prostszego na residuum (ten bez pochodnej), bo mamy krotność = 1

$$res_{s=-j\sqrt{3}}\left(H(s)e^{st}\right) = \lim_{s\to -j\sqrt{3}}\left(H(s)\left(s + j\sqrt{3}\right)e^{st}\right) = \lim_{s\to -j\sqrt{3}}\left(\frac{2}{\left(s - j\sqrt{3}\right)\left(s + j\sqrt{3}\right)}\left(s + j\sqrt{3}\right)e^{st}\right)$$

upraszczamy jeden nawias i liczymy granicę po prostu wstawiając wartość $-j\sqrt{3}$ za s:

$$res_{s=-j\sqrt{3}}\left(H(s)e^{st}\right) = \lim_{s\to -j\sqrt{3}}\left(\frac{2}{\left(s - j\sqrt{3}\right)}e^{st}\right) = \frac{2}{\left(-j\sqrt{3} - j\sqrt{3}\right)}e^{-j\sqrt{3}t} = \frac{2}{-2j\sqrt{3}}e^{-j\sqrt{3}t}$$

podstawiamy za $e^{-j\sqrt{3}t}$ sumę cos i sin zgodnie ze znanym wzorem

$$e^{jA} = cosA + jsinA$$

oraz upraszczamy ułamek i mnożymy górę i dół tego ułamka przez j

$$res_{s=-j\sqrt{3}}\left(H(s)e^{st}\right) = \frac{2}{-2j\sqrt{3}}e^{-j\sqrt{3}t} = \frac{j}{\sqrt{3}}\left(cos\left(-\sqrt{3}t\right) + jsin\left(-\sqrt{3}t\right)\right)$$

i na koniec korzystamy z parzystości cosinusa i nieparzystości sinusa aby usunąć minus z nawiasów tych funkcji (cosinus nie zmieni znaku, a sinus zmieni po tej operacji):

$$res_{s=-j\sqrt{3}}\left(H(s)e^{st}\right) = \frac{j}{\sqrt{3}}\left(cos\left(-\sqrt{3}t\right) + jsin\left(-\sqrt{3}t\right)\right) = \frac{j}{\sqrt{3}}\left(cos\left(\sqrt{3}t\right) - jsin\left(\sqrt{3}t\right)\right)$$

i to samo z drugim residuum:

$$res_{s=j\sqrt{3}}\left(H(s)e^{st}\right) = \lim_{s\to j\sqrt{3}}\left(H(s)\left(s - j\sqrt{3}\right)e^{st}\right) = \lim_{s\to j\sqrt{3}}\left(\frac{2}{\left(s - j\sqrt{3}\right)\left(s + j\sqrt{3}\right)}\left(s - j\sqrt{3}\right)e^{st}\right)$$

$$= \lim_{s\to j\sqrt{3}}\left(\frac{2}{\left(s + j\sqrt{3}\right)}e^{st}\right) = \frac{2}{\left(j\sqrt{3} + j\sqrt{3}\right)}e^{j\sqrt{3}t} = \frac{2}{2j\sqrt{3}}e^{j\sqrt{3}t} = \frac{-j}{\sqrt{3}}\left(cos\left(\sqrt{3}t\right) + jsin\left(\sqrt{3}t\right)\right)$$

mamy policzone wszystkie residua, więc możemy je zsumować by dostać odpowiedź impulsową układu:

$$y(t) = L^{-1}\left(H(s)\right) = res_{s=-j\sqrt{3}}(H(s)e^{st}) + res_{s=j\sqrt{3}}(H(s)e^{st}) =$$

$$= \frac{j}{\sqrt{3}}\left(cos(\sqrt{3}t) - jsin(\sqrt{3}t)\right) + \frac{-j}{\sqrt{3}}\left(cos(\sqrt{3}t) + jsin(\sqrt{3}t)\right) =$$

$$= \frac{j}{\sqrt{3}}\left(cos(\sqrt{3}t) - jsin(\sqrt{3}t) - cos(\sqrt{3}t) - jsin(\sqrt{3}t)\right) = \frac{j}{\sqrt{3}}\left(-2jsin(\sqrt{3}t)\right) = \frac{2sin(\sqrt{3}t)}{\sqrt{3}}$$

wyszło tak samo jak w metodzie tabelkowej - czyli ok.

4. **Odpowiedź skokowa:**
   idea jest identyczna jak w punkcie poprzednim, zmienia się tylko wymuszenie, dla którego sprawdzamy odpowiedź - teraz będzie to funkcja skokowa 1(t). Transformata funkcji skokowej to s, zatem zmieni się trochę sposób wyznaczania odpowiedzi. Jest ona wyrażona transformatą odwrotną z transmitancji układu podzielonej przez operator s, czyli:
   $$y(t) = L^{-1}\left(\frac{1}{s}T(s)\right)$$
   Podobnie jak w poprzednim punkcie wyznaczenie transformaty odwrotnej można zrobić na dwa sposoby - za pomocą tabelki lub wyliczając wszystkie residua - z tym że teraz mamy trochę inną funkcję.

Przykład c.d.

mamy policzoną transmitancję:

$$H(s) = \frac{2}{s^2 + 3}$$

dzielimy ją przez s:

$$\frac{1}{s}H(s) = \frac{2}{s(s^2 + 3)}$$

Metoda tabelkowa:

najpierw musimy rozdzielić ułamek na dwa osobne o różnych mianownikach - jeden równy s, drugi równy $(s^2 + 3)$ - w ten sposób dostaniemy dwa ułamki, które znajdziemy w tabelce:

$$\frac{2}{s(s^2 + 3)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 3}$$

gdzie A, B i C to parametry, które trzeba wyznaczyć sprowadzając sumę ułamków do wspólnego mianownika i porównując współczynniki:

$$\frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 3} = \frac{A(s^2 + 3)}{s(s^2 + 3)} + \frac{s(Bs + C)}{s(s^2 + 3)} = \frac{A(s^2 + 3) + s(Bs + C)}{s(s^2 + 3)}$$

wymnażamy licznik i grupujemy wyrazy przy tych samych potęgach s:

$$\frac{A(s^2 + 3) + s(Bs + C)}{s(s^2 + 3)} = \frac{As^2 + 3A + Bs^2 + Cs}{s(s^2 + 3)} = \frac{(A + B)s^2 + Cs + 3A}{s(s^2 + 3)}$$

porównujemy współczynniki do oryginalnego ułamka:

$$\frac{2}{s(s^2 + 3)} = \frac{(A + B)s^2 + Cs + 3A}{s(s^2 + 3)}$$

$(A + B) = 0$
$C = 0$
$3A = 2$
Bo w oryginalnym ułamku w liczniku nie występowało s^2 ani s
zatem:

$$A = \frac{2}{3}$$

$$B = -\frac{2}{3}$$

$$C = 0$$

czyli:

$$\frac{2}{s(s^2+3)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2+3} = \frac{\frac{2}{3}}{s} - \frac{\frac{2}{3}s}{s^2+3}$$

pierwszy ułamek przypomina transformatę z funkcji $e^{-\alpha t}$ która jest równa $\frac{1}{s+\alpha}$ (u nas $\alpha = 0$)
drugi ułamek przypomina transformatę z funkcji $cos(\omega t)$ która wynosi $\frac{s}{s^2+\omega^2}$ (u nas $\omega^2 = 3$)
Musimy teraz doprowadzić te ułamki dokładnie do postaci z tabelki - tak jak poprzednio przez przemnożenie przez odpowiednią liczbę:

$$\frac{2}{s(s^2+3)} = \frac{\frac{2}{3}}{s} - \frac{\frac{2}{3}s}{s^2+3} = \frac{2}{3}\frac{1}{s} - \frac{2}{3}\frac{s}{s^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2}$$

teraz ułamki idealnie odpowiadają ułamkom z tabeli, więc można policzyć transformatę odwrotną:

$$y(t) = L^{-1}\left(\frac{1}{s}H(s)\right) = L^{-1}\left(\frac{2}{s(s^2+3)}\right) = L^{-1}\left(\frac{2}{3}\frac{1}{s} - \frac{2}{3}\frac{s}{s^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2}\right) =$$

$$= L^{-1}\left(\frac{2}{3}\frac{1}{s}\right) - L^{-1}\left(\frac{2}{3}\frac{s}{s^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2}\right) = \frac{2}{3}L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) - \frac{2}{3}L^{-1}\left(\frac{s}{s^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2}\right) = \frac{2}{3}e^{-0t} - \frac{2}{3}cos\left(\sqrt{3}t\right)$$

czyli

$$y(t) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}cos\left(\sqrt{3}t\right)$$

bo $e^{-0t} = e^0 = 1$

a teraz to samo, tylko za pomocą residuów.

Wyznaczamy pierwiastki mianownika, który teraz jest przemnożony przez s w stosunku do mianownika z odpowiedzi impulsowej - oznacza to, że do zbioru biegunów wyliczonych w tamtym przypadku dojdzie jeszcze jeden - biegun jednokrotny s_0=0. Zatem lista biegunów:

$$s_0 = 0$$

$$s_1 = -j\sqrt{3}$$

$$s_2 = j\sqrt{3}$$

wszystkie są jednokrotne.
Liczymy teraz residua w tych punktach dla funkcji $\frac{1}{s}H(s)e^{st}$

$$res_{s=0}\left(\frac{1}{s}H(s)e^{st}\right) = \lim_{s\to 0}\left(\frac{1}{s}H(s)(s-0)e^{st}\right) = \lim_{s\to 0}\left(\frac{2}{s\left(s-j\sqrt{3}\right)\left(s+j\sqrt{3}\right)}se^{st}\right) =$$

$$= \lim_{s\to 0}\left(\frac{2}{\left(s-j\sqrt{3}\right)\left(s+j\sqrt{3}\right)}e^{st}\right) = \frac{2}{\left(0-j\sqrt{3}\right)\left(0+j\sqrt{3}\right)}e^{0t} = \frac{2}{-j^2\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{2}{3}$$

stosując takie same operacje, jak w wyliczeniach dla odpowiedzi impulsowej liczymy residua w tych samych punktach dla odpowiedzi skokowej:

$$res_{s=-j\sqrt{3}}\left(\frac{1}{s}H(s)e^{st}\right)=\lim_{s\to -j\sqrt{3}}\left(\frac{1}{s}H(s)\left(s+j\sqrt{3}\right)e^{st}\right)=$$
$$=\lim_{s\to -j\sqrt{3}}\left(\frac{2}{s\left(s-j\sqrt{3}\right)\left(s+j\sqrt{3}\right)}\left(s+j\sqrt{3}\right)e^{st}\right)=\lim_{s\to -j\sqrt{3}}\left(\frac{2}{s\left(s-j\sqrt{3}\right)}e^{st}\right)=$$
$$=\frac{2}{-j\sqrt{3}\left(-j\sqrt{3}-j\sqrt{3}\right)}e^{-j\sqrt{3}t}=\frac{2}{-j\sqrt{3}\left(-2j\sqrt{3}\right)}e^{-j\sqrt{3}t}=\frac{1}{\left(j\sqrt{3}\right)^2}e^{-j\sqrt{3}t}=\frac{-1}{3}e^{-j\sqrt{3}t}=$$
$$=\frac{-1}{3}\left(cos\left(-\sqrt{3}t\right)+jsin\left(-\sqrt{3}t\right)\right)=\frac{-1}{3}\left(cos\left(\sqrt{3}t\right)-jsin\left(\sqrt{3}t\right)\right)$$

$$res_{s=j\sqrt{3}}\left(\frac{1}{s}H(s)e^{st}\right)=\lim_{s\to j\sqrt{3}}\left(\frac{1}{s}H(s)\left(s-j\sqrt{3}\right)e^{st}\right)=$$
$$=\lim_{s\to j\sqrt{3}}\left(\frac{2}{s\left(s-j\sqrt{3}\right)\left(s+j\sqrt{3}\right)}\left(s-j\sqrt{3}\right)e^{st}\right)=\lim_{s\to j\sqrt{3}}\left(\frac{2}{s\left(s+j\sqrt{3}\right)}e^{st}\right)=$$
$$=\frac{2}{j\sqrt{3}\left(j\sqrt{3}+j\sqrt{3}\right)}e^{j\sqrt{3}t}=\frac{2}{j\sqrt{3}\left(2j\sqrt{3}\right)}e^{j\sqrt{3}t}=\frac{1}{\left(j\sqrt{3}\right)^2}e^{j\sqrt{3}t}=\frac{-1}{3}e^{j\sqrt{3}t}=$$
$$=\frac{-1}{3}\left(cos\left(\sqrt{3}t\right)+jsin\left(\sqrt{3}t\right)\right)$$

Sumujemy wyliczone residua, żeby otrzymać odpowiedź skokową układu:

$$y(t)=L^{-1}\left(H(s)\right)=res_{s=0}\left(\frac{1}{s}H(s)e^{st}\right)+res_{s=-j\sqrt{3}}\left(\frac{1}{s}H(s)e^{st}\right)+res_{s=j\sqrt{3}}\left(\frac{1}{s}H(s)e^{st}\right)=$$
$$=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\left(cos\left(\sqrt{3}t\right)-jsin\left(\sqrt{3}t\right)\right)-\frac{1}{3}\left(cos\left(\sqrt{3}t\right)+jsin\left(\sqrt{3}t\right)\right)=$$
$$=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\left(cos\left(\sqrt{3}t\right)-jsin\left(\sqrt{3}t\right)+cos\left(\sqrt{3}t\right)+jsin\left(\sqrt{3}t\right)\right)=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\left(2cos\left(\sqrt{3}t\right)\right)=$$
$$=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}cos\left(\sqrt{3}t\right)$$

to samo, co metodą tabelkową - czyli ok.