

**Zygmunt Filipowicz**

# **ZADANIA Z TEORII OBWODÓW**

# SPIS TREŚCI

1. Obwody liniowe prądu stałego.
2. Obwody nieliniowe prądu stałego.
3. Obwody prądu sinusoidalnego.
4. Obwody trójfazowe.
5. Obwody o wymuszeniu okresowym niesinusoidalnym.
6. Obwody liniowe w stanie nieustalonym i transmitancje operatorowe.

## OD AUTORA

Skrypt „Zadania z teorii obwodów” jest przeznaczony dla studentów pierwszego i drugiego roku studiów na Wydziale Elektrycznym Politechniki Warszawskiej. Skrypt stanowi zbiór zadań, które w formie i treści odpowiadają nowym programom i metodyce nauczania teorii obwodów elektrycznych. Prezentowane w nim zadania dotyczą: liniowych i nieliniowych obwodów elektrycznych w stanie ustalonym, obwodów trójfazowych, obwodów o wymuszeniu okresowym niesinusoidalnym oraz obwodów w stanie nieustalonym i transmitancji operatorowych.

Do wszystkich zadań podano szczegółowe rozwiązania, dla wielu różnymi metodami, w celu sprawdzenia poprawności rozwiązania jak i możliwości jego wyboru.

Pragnę wyrazić podziękowanie recenzentowi prof. dr hab. Janowi Sikorze za cenne i wnikliwe uwagi, które umożliwiły wyeliminowanie wielu błędów i pomyłek.

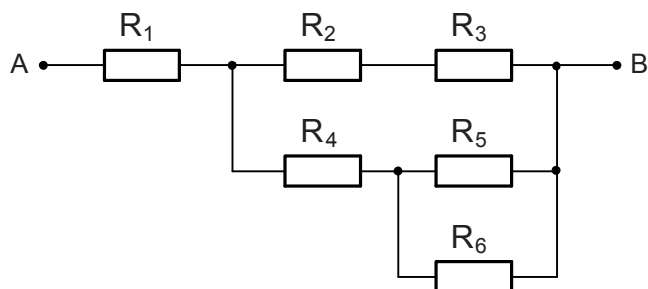
Dziękuję Kolegom z Zakładu Elektrotechniki Teoretycznej, których wiedza i przemyślenia były bardzo pomocne w tym jak najkorzystniej trafić do początkującego kandydata na inżyniera elektryka, jak zachęcić go do rozwiązywania zadań z teorii obwodów, których znajomość pozwoli mu na łatwe opanowanie innych dziedzin elektrotechniki

Słowa podziękowania składam gorąco prof. dr hab. Kazimierzowi Mikołajukowi, którego wykłady i książka „Podstawy analizy obwodów energoelektrycznych” skłoniły mnie do napisania tego skryptu jako uzupełnienie do ćwiczeń, które prowadzę ze studentami.

Autor

## 1. Obwody liniowe prądu stałego

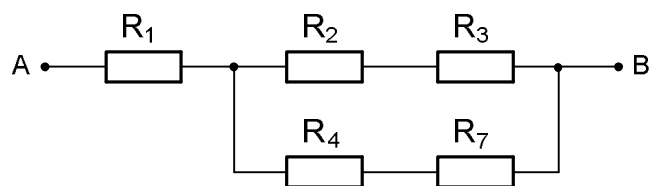
**Zad. 1.1** Obliczyć rezystancje zastępczą (rys1.1a),  $R_1 = 4 \Omega$ ,  $R_2 = 13 \Omega$ ,  $R_3 = 5 \Omega$ ,  $R_4 = 7\Omega$ ,  $R_5 = 3 \Omega$ ,  $R_6 = 6 \Omega$ .



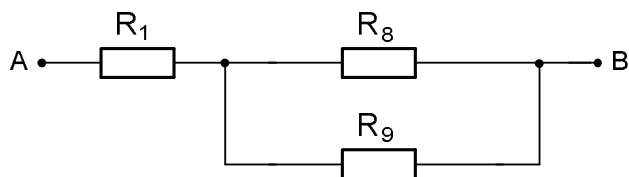
**Rys. 1.1a**

R o z w i ą z a n i e

Na rys. 1.1b przedstawiono kolejne etapy obliczenia.



$$R_7 = \frac{R_5 \cdot R_6}{R_5 + R_6} = \frac{3 \cdot 6}{3 + 6} = 2 \Omega$$

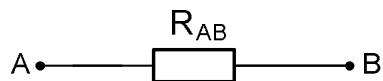


$$R_8 = R_2 + R_3 = 13 + 5 = 18 \Omega$$

$$R_9 = R_4 + R_7 = 7 + 2 = 9 \Omega$$



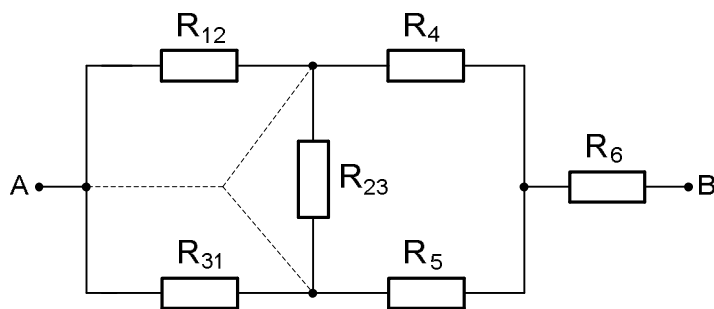
$$R_{10} = \frac{R_8 \cdot R_9}{R_8 + R_9} = \frac{18 \cdot 9}{18 + 9} = 6 \Omega$$



$$R_{AB} = R_1 + R_{10} = 4 + 6 = 10 \Omega$$

**Rys. 1.1b**

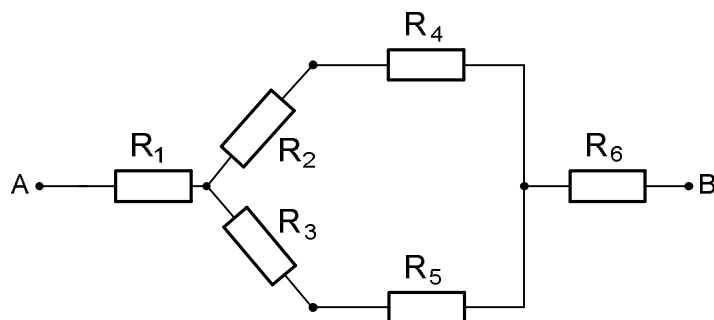
**Zad. 1.2.** Obliczyć rezystancję zastępczą (rys.1.2a),  $R_{12} = 50 \Omega$ ,  $R_{23} = 200 \Omega$ ,  $R_{31} = 250 \Omega$ ,  $R_4 = 40 \Omega$ ,  $R_5 = 20 \Omega$ ,  $R_6 = 35 \Omega$ .



**Rys. 1.2a**

### Rozwiązanie

Trzy rezystory  $R_{12}$ ,  $R_{23}$ ,  $R_{31}$ , połączone w trójkąt zastąpiono trzema rezystorami  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ , połączonymi w gwiazdę (Rys. 1.2b)



**Rys. 1.2b**

$$R_1 = \frac{R_{12} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} = \frac{50 \cdot 250}{50 + 200 + 250} = 25 \Omega$$

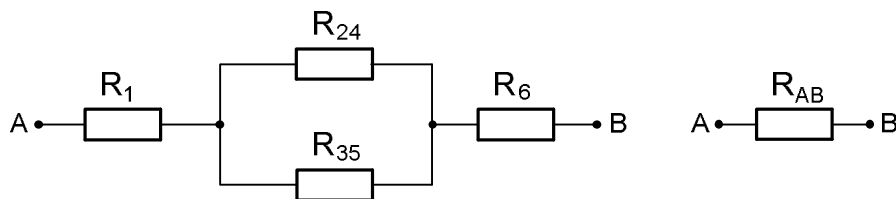
$$R_2 = \frac{R_{23} \cdot R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} = \frac{200 \cdot 50}{50 + 200 + 250} = 20 \Omega$$

$$R_3 = \frac{R_{31} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} = \frac{250 \cdot 200}{50 + 200 + 250} = 100 \Omega$$

Dodając szeregowo połączone rezystory  $R_2$  i  $R_4$  oraz  $R_3$  i  $R_5$  otrzymujemy kolejny uproszczony schemat. (Rys. 1.2c)

$$R_{24} = R_2 + R_4 = 20 + 40 = 60 \Omega$$

$$R_{35} = R_3 + R_5 = 100 + 20 = 120 \Omega$$

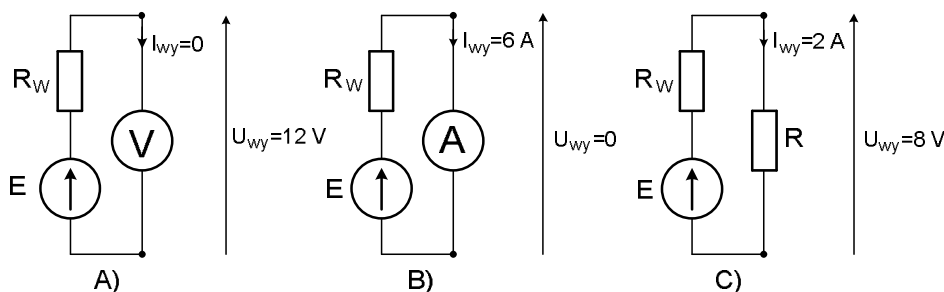


**Rys. 1.2c**

$$R_{AB} = R_1 + \frac{R_{24} \cdot R_{35}}{R_{24} + R_{35}} + R_6 = 25 + \frac{60 \cdot 120}{60 + 120} + 35 = 100 \Omega.$$

**Zad. 1.3.** Narysować charakterystykę napięciowo prądową rzeczywistego źródła napięcia (rys.1.3a).  $E = 12\text{ V}$ ,  $R_W = 2\ \Omega$ , a następnie obciążyć źródło rezystorem  $R = 4\ \Omega$  i zaznaczyć na charakterystyce punkt pracy.

R o z w i a z a n i e



Rys. 1.3a

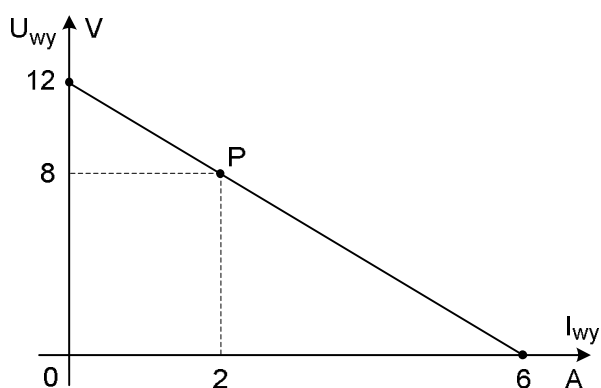
Podłączony do źródła woltomierz (rys. A) mierzy stan jałowy, prąd wyjściowy równa się zero, a napięcie wyjściowe wynosi 12 V. Jest to największe napięcie jakie możemy z tego źródła uzyskać.

Podłączony do źródła amperomierz (rys. B) mierzy stan zwarcia, napięcie wyjściowe równa się zero, a prąd wyjściowy wynosi  $I_{WY} = \frac{E}{R_W} = \frac{12}{2} = 6\text{ A}$ . Jest to największy prąd jaki możemy z tego źródła uzyskać.

Podłączony do źródła rezystor  $R = 4\ \Omega$  (rys. C) ustala punkt pracy P. Prąd wyjściowy wynosi  $I_{WY} = \frac{E}{R_W + R} = \frac{12}{2 + 4} = 2\text{ A}$ , a napięcie wyjściowe  $U_{WY} = I_{WY} \cdot R = 2 \cdot 4 = 8\text{ V}$ .

Zmieniając rezystancję  $R$  od zera do nieskończoności punkt pracy P będzie przesuwiał po prostej przedstawionej na rys. 1.3b, (zwanej prostą obciążenia), która jest charakterystyką prądowo napięciową źródła rzeczywistego.

Równanie tej prostej ma postać  $U_{WY} = E - R_W I_{WY}$ , ( $U_{WY} < E$ ,  $0 < I_{WY} < \frac{E}{R_W}$ )

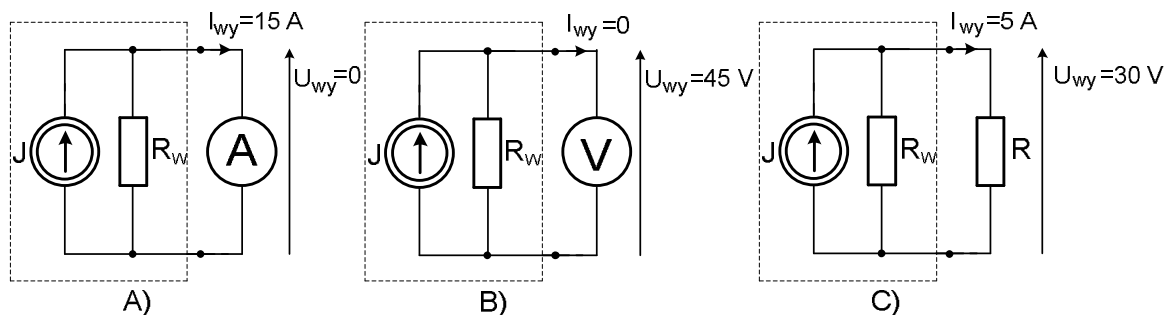


Rys.1.3b.

Na rys. 1.3b. przedstawiono charakterystykę napięciowo prądową rzeczywistego źródła napięcia.

**Zad. 1.4.** Narysować charakterystykę prądowo napięciową rzeczywistego źródła prądu (rys.1.4a).  $J = 15\text{ A}$ ,  $R_w = 3\ \Omega$ , a następnie obciążyć źródło rezystorem  $R = 6\ \Omega$  i zaznaczyć na charakterystyce punkt pracy

**Rozwiązanie**



**Rys. 1.4a**

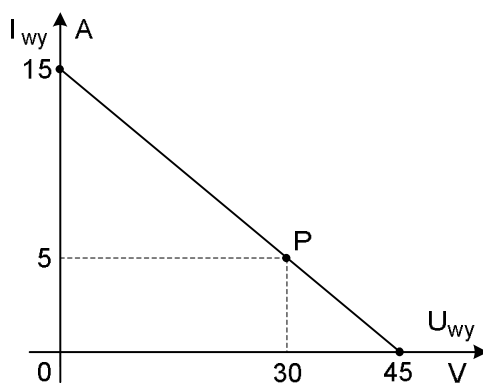
Podłączony do źródła amperomierz (rys. A) mierzy stan zwarcia, prąd wyjściowy wynosi 15 A, a napięcie wyjściowe równa się zero. Jest to największy prąd jaki możemy z tego źródła uzyskać. Przez rezystor  $R_w$  prąd nie płynie, ponieważ napięcie na nim równa się zero, cały prąd źródła płynie przez amperomierz.

Podłączony do źródła woltomierz (rys. B) mierzy stan jałowy, prąd wyjściowy równa się zero, a napięcie wyjściowe wynosi  $U_{wy} = J \cdot R_w = 15 \cdot 3 = 45\text{ V}$ . Jest to największe napięcie jakie możemy z tego źródła uzyskać.

Podłączony do źródła rezystor  $R = 6\ \Omega$  (rys. C) ustala punkt pracy P. Napięcie wyjściowe wynosi  $U_{wy} = \frac{R_w \cdot R}{R_w + R} J = \frac{3 \cdot 6}{3 + 6} 15 = 30\text{ V}$ . Prąd wyjściowy  $I_{wy} = \frac{U_{wy}}{R} = \frac{30}{6} = 5\text{ A}$ .

Zmieniając rezystancję  $R$  od zera do nieskończoności, punkt pracy będzie się przesunął po prostej na rys 1.4b, (zwanej prostą obciążenia), która jest charakterystyką prądowo napięciową rzeczywistego źródła prądu.

Równanie tej prostej ma postać  $I_{wy} = J - \frac{U_{wy}}{R_w}$ , ( $I_{wy} < J$ ,  $0 < U_{wy} < J \cdot R_w$ )

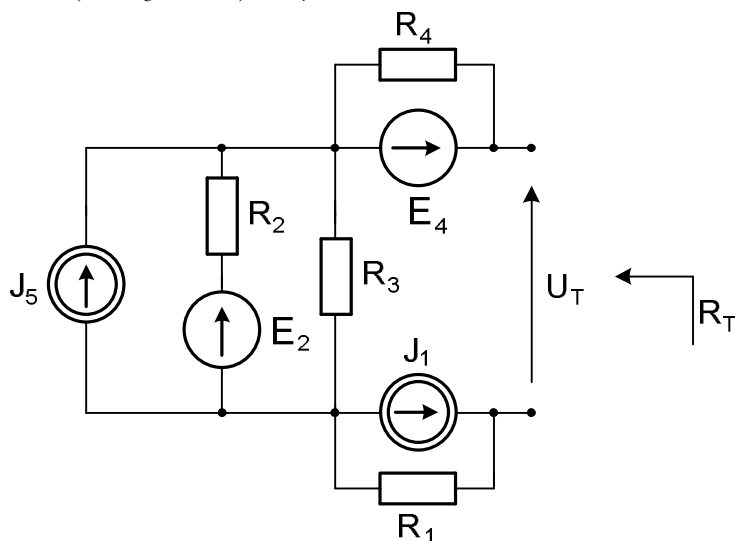


**Rys. 1.4b.**

Na rys.1.4b. przedstawiono charakterystykę prądowo napięciową rzeczywistego źródła prądu.



**Zad. 1.5.** Dla obwodu przedstawionego na rys.1.5a, obliczyć źródło zastępcze  $U_T$ , oraz rezystancję zastępczą  $R_T$ . Dane:  $E_2 = 12\text{ V}$ ,  $E_4 = 32\text{ V}$ ,  $J_1 = 2\text{ A}$ ,  $J_5 = 8\text{ A}$ ,  $R_1 = 10\ \Omega$ ,  $R_2 = 3\ \Omega$ ,  $R_3 = 6\ \Omega$ ,  $R_4 = 20\ \Omega$ .



Rys. 1.5a

Rozwiązanie:

Zamieniając źródło napięciowe na źródło prądowe lub odwrotnie z zachowaniem jego kierunku, a następnie dodając równoległe źródła prądu oraz szeregowo źródła napięcia otrzymamy schemat jak na rys.1.5b

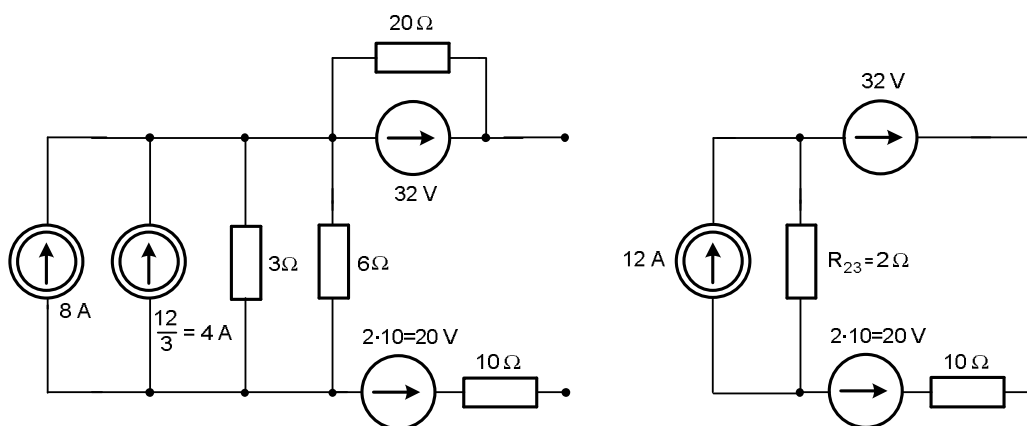
Źródło napięciowe  $E_2$  i rezystor  $R_2$  zamieniamy na źródło prądu

$$J_2 = \frac{E_2}{R_2} = \frac{12}{3} = 4\text{ A}$$

Rezystancja  $R_2$  zostaje połączona równoległe ze źródłem  $J_2$ . Można zamiast rezystancji  $R_2$  wstawić do schematu zastępczego jej odwrotność czyli konduktancję, jednak dla prostoty zamiany źródła napięciowego na prądowe i odwrotnie pozostaniemy przy rezystancji.

$$\text{Konduktancja } G_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{3}\text{ S} \quad (\text{Simensa})$$

Podstawiamy dane liczbowe.



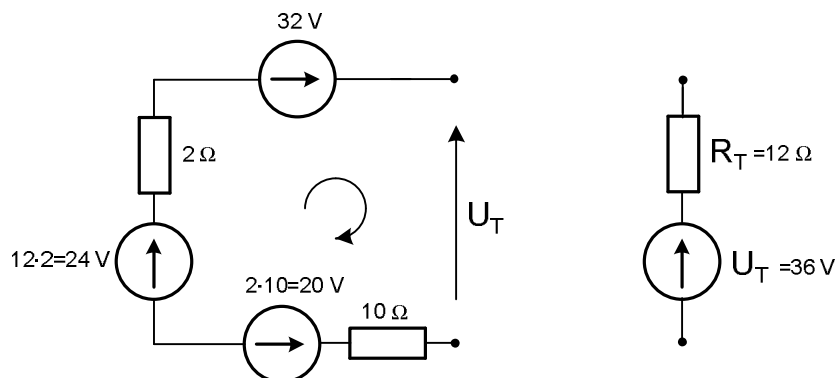
Rys. 1.5b

Dodając równoległe źródła prądu otrzymujemy źródło prądu o wartości 12 A  
 Dodając równoległe połączone rezystory  $R_2$  i  $R_3$  otrzymujemy:

$$\frac{1}{R_{23}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{2} \text{ S} \quad \text{lub prościej przy połączeniu dwu rezystorów} \quad R_{23} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = 2 \text{ } \Omega$$

Zamieniając rzeczywiste źródło prądu na rzeczywiste źródło napięcia otrzymujemy kolejny uproszczony schemat, rys 1.5c

Rezystancja  $R_4$  została opuszczona ponieważ źródło napięciowe  $E_2$  jest idealne (nie ma szeregowo połączonego rezystora) i może być dowolna nie zmieniając  $R_T$ .



**Rys.1.5c**

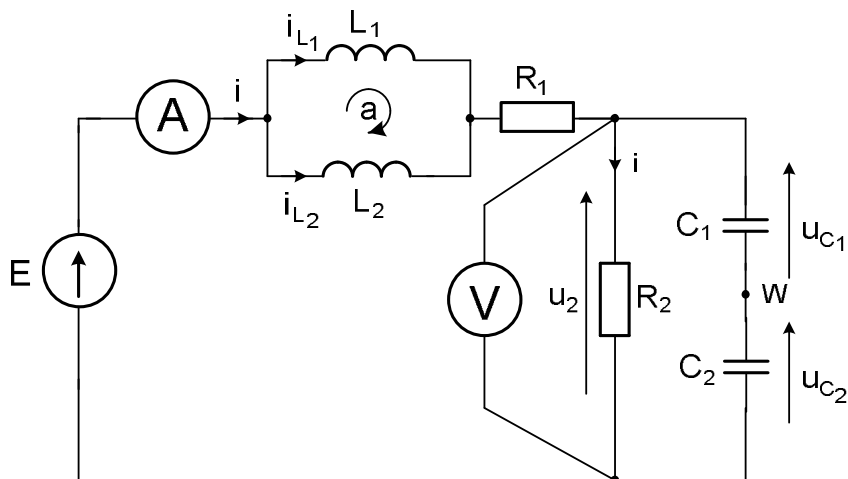
Dodając szeregowo połączone źródła napięciowe z zachowaniem ich kierunku mamy  
 $U_T = 32 + 24 - 20 = 36 \text{ V}$

Rezystancje zastępczą  $R_T$  otrzymamy dodając szeregowo połączone rezystory (przy zwarcu źródeł napięciowych)

$$R_T = 10 + 2 = 12 \text{ } \Omega$$

Zastępowanie dwójnika z wieloma źródłami (napięciowymi i prądowymi) jednym źródłem oraz rezystancjami jedną rezystancją (ogólnie impedancją), jest ważnym w elektrotechnice twierdzeniem Thevenina.

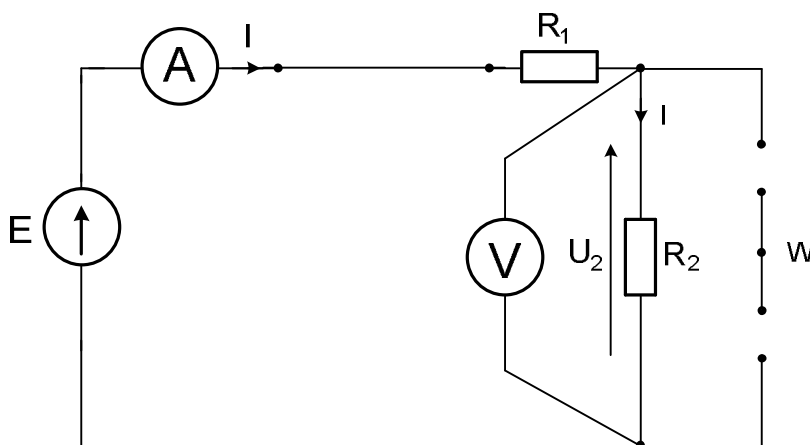
**Zad. 1.6.** Obliczyć wskazania amperomierza i woltomierza, oraz rozpływ prądów między indukcyjnościami połączonymi równolegle, oraz rozkład napięcia między kondensatorami połączonymi szeregowo. Obwód jest w stanie ustalonym (rys 1.6a) Wymuszenie stałe.  
 $E = 500 \text{ V}$ ,  $R_1 = 30 \Omega$ ,  $R_2 = 70 \Omega$ ,  $C_1 = 5 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 2 \mu\text{F}$ ,  $L_1 = 0.8 \text{ H}$ ,  $L_2 = 1.2 \text{ H}$ .



Rys. 1.6a

### R o z w i ą z a n i e

Przy wymuszeniu stałym indukcyjności stanowią zwarcie, a pojemności przerwę.  
 Napięcie na indukcyjności równa się zero. Napięcie na pojemności (pojemnościach), wynika z napięcia elementu do którego są dołączone.  
 Dla prądu stałego w stanie ustalonym przedstawiono obwód na rys. 1.6b, wartości chwilowe są równe wartości skutecznym,  $i = I$ ,  $u = U$ .



Rys. 1.6b

$$I = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{500}{30 + 70} = 5 \text{ A} \quad \text{amperomierz wskaże } 5 \text{ A}$$

$$U_2 = R_2 I = 70 \cdot 5 = 350 \text{ V} \quad \text{woltomierz wskaże } 350 \text{ V}$$

Napięcie na indukcyjności przy przepływie prądu stałego równa się zero,  $u_L = L \frac{di_L}{dt}$  nie ma zmiany prądu w czasie (prąd stały)

W celu obliczenia rozprywu prądu między połączonymi równolegle indukcyjnościami skorzystamy z zasady zachowania ciągłości strumienia w oczku.

$$\psi_{L_1} - \psi_{L_2} = 0$$

$$i_{L_1} L_1 = i_{L_2} L_2$$

$$i = i_{L_1} + i_{L_2} \quad \text{z I praw. Kirchhoffa}$$

po podstawieniu danych

$$i_{L_1} \cdot 0.8 = i_{L_2} \cdot 1.2$$

$$5 = i_{L_1} + i_{L_2}$$

stąd

$$i_{L_1} = 3 \text{ A}, \quad i_{L_2} = 2 \text{ A}.$$

Prąd kondensatora przy naładowaniu go napięciem stałym do stanu ustalonego równa się

zero,  $i_C = \frac{du_C}{dt}$  nie ma zmiany napięcia w czasie (napięcie stałe)

W celu obliczenia rozkładu napięcia pomiędzy szeregowo połączone pojemności skorzystamy z zasady zachowania równości ładunków w węźle.

$$q_{C_1} = q_{C_2}$$

$$C_1 \cdot u_{C_1} = C_2 \cdot u_{C_2}$$

$$u_2 = u_{C_1} + u_{C_2} \quad \text{z II praw. Kirchhoffa}$$

po podstawieniu danych

$$5 \cdot 10^{-6} \cdot u_{C_1} = 2 \cdot 10^{-6} \cdot u_{C_2}$$

$$350 = u_{C_1} + u_{C_2}$$

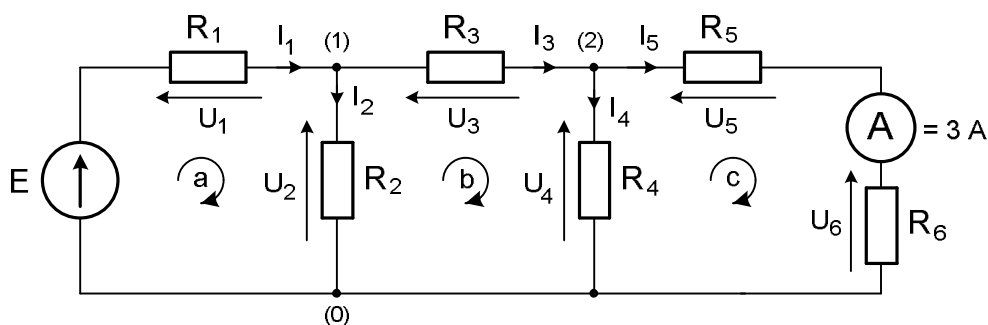
stąd

$$u_{C_1} = 100 \text{ V}, \quad u_{C_2} = 250 \text{ V}.$$

**Zad.1.7.** W obwodzie przedstawionym na rys.1.7a amperomierz wskazuje wartość 3A.

Korzystając z prądowego i napięciowego prawa Kirchhoffa obliczyć wartość źródła E.

$R_1 = 3 \Omega$ ,  $R_2 = 6 \Omega$ ,  $R_3 = 9 \Omega$ ,  $R_4 = 6 \Omega$ ,  $R_5 = 8 \Omega$ ,  $R_6 = 2 \Omega$ .



**Rys. 1.7a**

**R o z w i ą z a n i e**

$$I_5 = 3 \text{ A}$$

$$U_5 = R_5 I_5 = 8 \cdot 3 = 24 \text{ V}$$

$$U_6 = R_6 I_5 = 2 \cdot 3 = 6 \text{ V}$$

Z napięciowego prawa Kirchhoffa dla oczka c

$$U_4 - U_5 - U_6 = 0$$

$$U_4 = U_5 + U_6 = 24 + 6 = 30 \text{ V}$$

Stąd prąd  $I_4$

$$I_4 = \frac{U_4}{R_4} = \frac{30}{6} = 5 \text{ A}$$

Z prądowego prawa Kirchhoffa dla węzła (2)

$$-I_3 + I_4 + I_5 = 0$$

$$I_3 = I_4 + I_5 = 5 + 3 = 8 \text{ A}$$

Stąd napięcie  $U_3$

$$U_3 = R_3 I_3 = 9 \cdot 8 = 72 \text{ V}$$

Z napięciowego prawa Kirchhoffa dla oczka b

$$U_2 - U_3 - U_4 = 0$$

$$U_2 = U_3 + U_4 = 72 + 30 = 102 \text{ V}$$

Stąd prąd  $I_2$

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{102}{6} = 17 \text{ A}$$

Z prądowego prawa Kirchhoffa dla węzła (1)

$$-I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

$$I_1 = I_2 + I_3 = 17 + 8 = 25 \text{ A}$$

Stąd napięcie  $U_1$

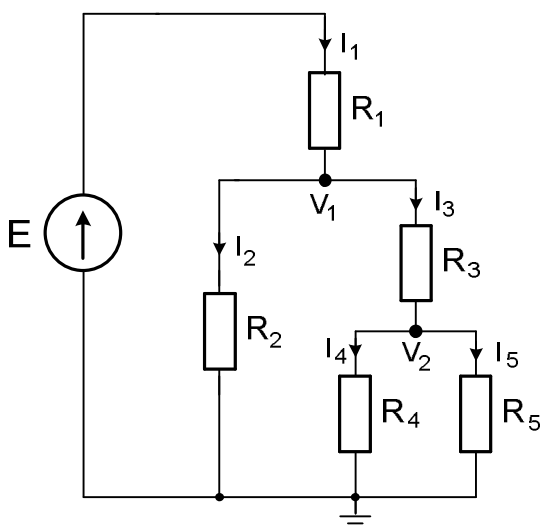
$$U_1 = R_1 I_1 = 3 \cdot 25 = 75 \text{ V}$$

Z napięciowego prawa Kirchhoffa dla oczka a

$$E - U_1 - U_2 = 0$$

$$E = U_1 + U_2 = 75 + 102 = 177 \text{ V}$$

**Zad. 1.8.** Metodą potencjałów węzłowych obliczyć rozpyły prądów, w obwodzie jak na rysunku 1.8a, o parametrach:  $E = 240 \text{ V}$ ,  $R_1 = 2 \Omega$ ,  $R_2 = 24 \Omega$ ,  $R_3 = 6 \Omega$ ,  $R_4 = 9 \Omega$ ,  $R_5 = 18 \Omega$ .



### Rys. 1.8a

Rozwiązanie.

Równania potencjałów dla węzłów  $V_1$  i  $V_2$

$$V_1 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) - V_2 \frac{1}{R_3} = \frac{E}{R_1}$$

$$V_2 \left( \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) - V_1 \frac{1}{R_3} = 0$$

Podstawiając dane liczbowe

$$V_1 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{24} + \frac{1}{6} \right) - V_2 \frac{1}{6} = \frac{240}{2}$$

$$V_2 \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18} \right) - V_1 \frac{1}{6} = 0$$

Po rozwiązaniu układu dwóch równań

$$V_1 = 192 \text{ V}, \quad V_2 = 96 \text{ V}.$$

Prądy gałęziowe

$$I_1 = \frac{E - V_1}{R_1} = \frac{240 - 192}{2} = 24 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{V_1}{R_2} = \frac{192}{24} = 8 \text{ A}$$

$$I_3 = \frac{V_1 - V_2}{R_3} = \frac{192 - 96}{6} = 16 \text{ A}$$

$$I_4 = \frac{V_2}{R_4} = \frac{96}{9} = 10\frac{2}{3} \text{ A}$$

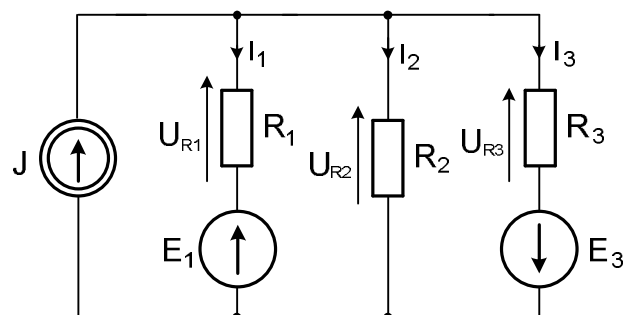
$$I_5 = \frac{V_2}{R_5} = \frac{96}{18} = 5\frac{1}{3} \text{ A}$$

Poprawność obliczeń można sprawdzić z pierwszego prawa Kirchhoffa sumując prądy w węzłach

$$I_1 = I_2 + I_3 \quad 24 = 8 + 16$$

$$I_3 = I_4 + I_5 \quad 16 = 10\frac{2}{3} + 5\frac{1}{3}$$

**Zad. 1.9.** W obwodzie przedstawionym na rys. 1.9a, metodą superpozycji obliczyć prądy  $I_1, I_2, I_3$ .  $E_1 = 250 \text{ V}$ ,  $E_3 = 200 \text{ V}$ ,  $J = 20 \text{ A}$ ,  $R_1 = 10 \Omega$ ,  $R_2 = 5 \Omega$ ,  $R_3 = 20 \Omega$ .

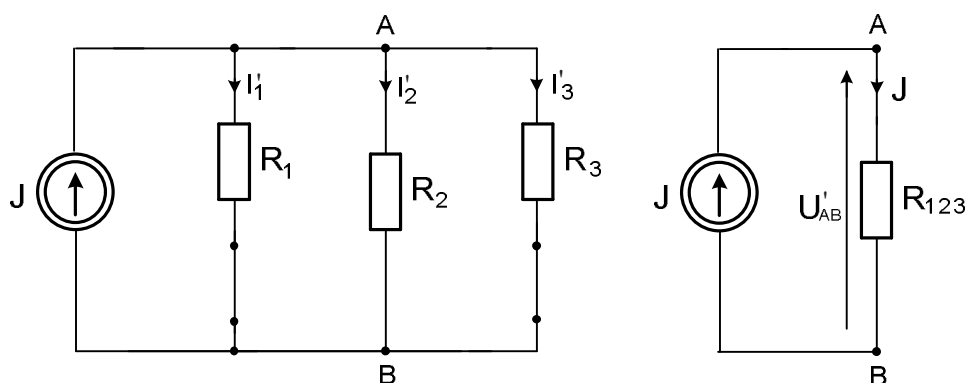


**Rys. 1.9a**

### Rozwiązanie

W obwodzie są trzy źródła wymuszające, więc przedstawiony obwód obliczymy dla każdego źródła oddzielnie z zachowaniem zasady, że w obwodzie pozostaje jedno od którego obliczymy odpowiedź. Pozostałe źródła napięciowe zostają zwarte, a źródła prądowe rozwarte. Każdy z obliczanych prądów będzie składał się z trzech odpowiedzi, których suma jest obliczanym prądem.

1. Od źródła prądowego  $J$ , rys. 1.9b



**Rys. 1.9b**

Połączymy trzy rezystory równolegle, a następnie obliczymy spadek napięcia  $U_{AB}'$

$$\frac{1}{R_{123}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{20} = \frac{7}{20} \quad \rightarrow \quad R_{123} = \frac{20}{7} \, \Omega$$

$$U_{AB}' = J \cdot R_{123} = 20 \cdot \frac{20}{7} = \frac{400}{7} \, \text{V}$$

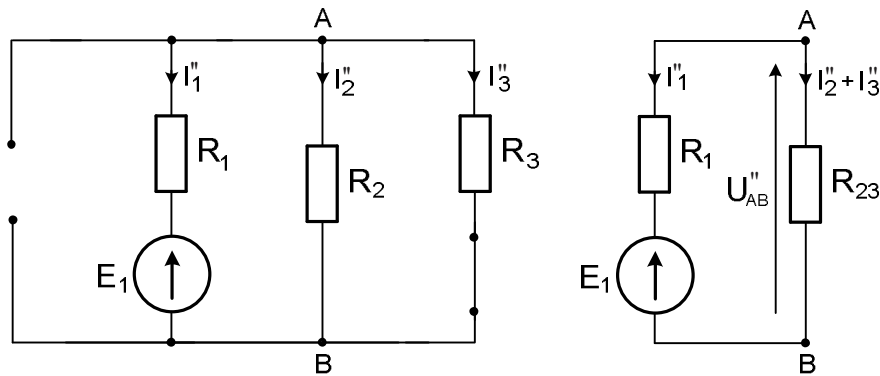
stąd

$$I_1' = \frac{U_{AB}'}{R_1} = \frac{40}{7} \, \text{A}$$

$$I_2' = \frac{U_{AB}'}{R_2} = \frac{80}{7} \, \text{A}$$

$$I_3' = \frac{U_{AB}'}{R_3} = \frac{20}{7} \, \text{A}$$

2. Od źródła napięciowego  $E_1$ , rys. 1.9c



Rys. 1.9c

Połączymy dwa rezystory równolegle  $R_2$  i  $R_3$ , a następnie obliczymy  $U_{AB}''$

$$R_{23} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = \frac{5 \cdot 20}{5 + 20} = 4 \, \Omega$$

$$U_{AB}'' = \frac{E_1}{R_1 + R_{23}} \cdot R_{23} = \frac{250}{10 + 4} \cdot 4 = \frac{500}{7} \, \text{V}$$

Stąd

$$I_2'' = \frac{U_{AB}''}{R_2} = \frac{500}{7 \cdot 5} = \frac{100}{7} \, \text{A}$$

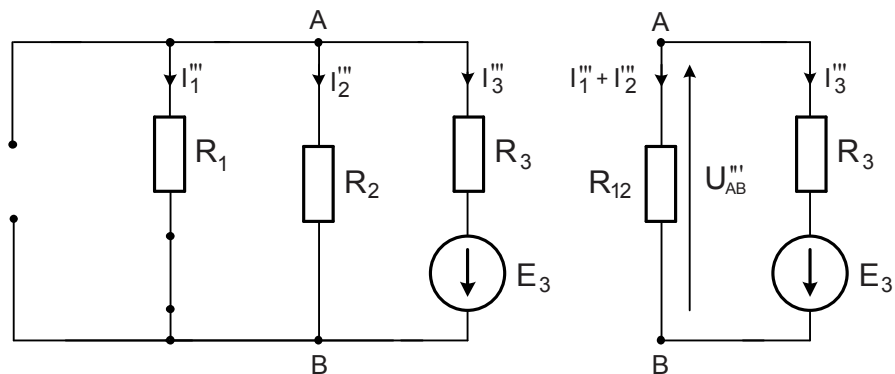
$$I_3'' = \frac{U_{AB}''}{R_3} = \frac{500}{7 \cdot 20} = \frac{25}{7} \, \text{A}$$

Prąd  $I_1''$  obliczymy z prądowego prawa Kirchhoffa dla węzła A

$$I_1'' = -I_2'' - I_3''$$

$$I_1'' = -\frac{125}{7} \, \text{A}$$

3. Od źródła napięciowego  $E_1$ , rys. 1.9d



Rys. 1.9d

Połączymy dwa rezystory równolegle  $R_1$  i  $R_2$ , a następnie obliczymy  $U_{AB}'''$

$$R_{12} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{10 \cdot 5}{10 + 5} = \frac{10}{3} \, \Omega$$



$$U_{AB}''' = -\frac{E_3}{R_{12} + R_3} \cdot R_{12} = -\frac{200}{\frac{10}{3} + 20} \cdot \frac{10}{3} = -\frac{200}{7} \text{ V}$$

minus wyniku ze zwrotu prądu  $I_1''' + I_2'''$  do napięcia źródła  $E_3$

$$I_1''' = \frac{U_{AB}'''}{R_1} = -\frac{200}{7 \cdot 10} = -\frac{20}{7} \text{ A}$$

$$I_2''' = \frac{U_{AB}'''}{R_2} = -\frac{200}{7 \cdot 5} = -\frac{40}{7} \text{ A}$$

$$I_3''' = -I_1''' - I_2''' = \frac{20}{7} + \frac{40}{7} = \frac{60}{7} \text{ A}$$

Dodając prądy od kolejnych wymuszeń otrzymujemy.

$$I_1 = I_1' + I_1'' + I_1''' = \frac{40}{7} - \frac{125}{7} - \frac{20}{7} = -15 \text{ A}$$

$$I_2 = I_2' + I_2'' + I_2''' = \frac{80}{7} + \frac{100}{7} - \frac{40}{7} = 20 \text{ A}$$

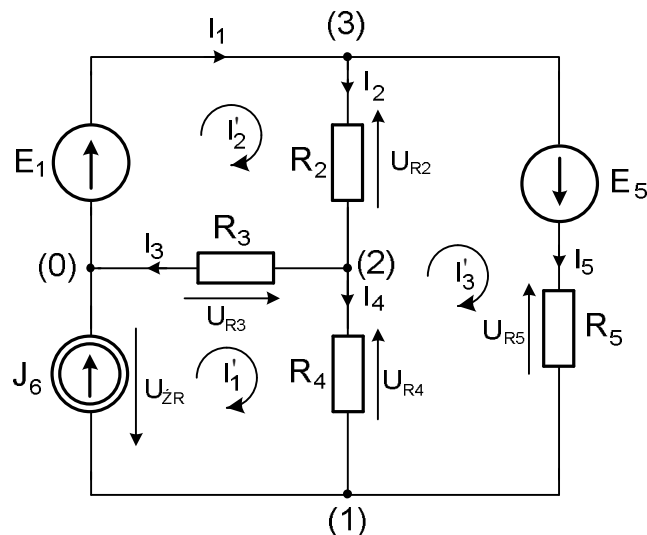
$$I_3 = I_3' + I_3'' + I_3''' = \frac{20}{7} + \frac{25}{7} + \frac{60}{7} = 15 \text{ A}$$

Poprawność otrzymanego wyniku można sprawdzić na podstawie prądowego prawa Kirchhoffa

$$J - I_1 - I_2 - I_3 = 0 \quad \rightarrow \quad 20 - (-15) - 20 - 15 = 0$$

**Zad.1.10.** Dla obwodu przedstawionego na rys. 1.10a. obliczyć prądy: metodą oczkową, metodą potencjałów węzłowych oraz sprawdzić zasadę Tellegena.

Dane:  $E_1 = 10 \text{ V}$ ,  $E_5 = 5 \text{ V}$ ,  $J_6 = 0.5 \text{ A}$ ,  $R_2 = 10 \Omega$ ,  $R_3 = 10 \Omega$ ,  $R_4 = 5 \Omega$ ,  $R_5 = 5 \Omega$ .



**Rys 1.10a**

**Rozwiązanie**

### 1. Metoda oczkowa

W obwodzie jest idealne źródło prądu  $J_6$ . Powoduje to, że prąd oczkowy  $I_1'$  jest dany bezpośrednio. Pozwoli to na zmniejszenie ilości równań niezbędnych do rozwiązania. Można

również pozbyć się idealnych źródeł prądu. Należy taki schemat przekształcić. Zastosować twierdzenie o włączaniu dodatkowych idealnych źródeł prądu.

Na podstawie prądowego prawa Kirchhoffa możemy napisać trzy równania liniowo niezależne, wiążące prądy gałęziowe.

$$\text{dla węzła 1} \quad -I_4 - I_5 + J_6 = 0$$

$$\text{dla węzła 2} \quad -I_2 + I_3 + I_4 = 0$$

$$\text{dla węzła 3} \quad -I_1 + I_2 + I_5 = 0$$

Wypisujemy równania na podstawie napięciowego prawa Kirchhoffa wybierając trzy oczka liniowo niezależne. Przyjmujemy jednakowe zwroty oczek.

Równania napięciowe w oczkach

$$-U_{\dot{Z}R} + U_{R3} - U_{R4} = 0$$

$$E_1 - U_{R2} - U_{R3} = 0$$

$$U_{R2} + E_5 - U_{R5} + U_{R4} = 0$$

Wprowadzamy prądy oczkowe  $I_1'$ ,  $I_2'$ ,  $I_3'$ .

$$I_1 = I_2'$$

$$I_2 = I_2' - I_3'$$

$$I_3 = I_2' - I_1'$$

$$I_4 = I_1' - I_3'$$

$$I_5 = I_3'$$

$$J_6 = I_1' = 0.5 \text{ A} \quad \text{prąd w tej gałęzi wyznacza idealne źródło prądu.}$$

Prąd oczkowy jest to prąd wymyślony (fizycznie nie istniejący) w celu zmniejszenia ilości równań niezbędnych do rozwiązania układu, czyli znalezienia prądów gałęziowych.

W gałęzi należącej tylko do jednego oczka prąd oczkowy jest równy prądowi gałęziowemu.

W gałęzi wspólnej dla dwóch oczek prąd gałęziowy jest równy sumie lub różnicy arytmetycznej prądów oczkowych, zależnie od ich zwrotu.

Pozostają dwie niewiadome  $I_2'$ ,  $I_3'$ , należy rozwiązać dwa równania.

$$E_1 - R_2(I_2' - I_3') - R_3(I_2' - J_6) = 0$$

$$R_2(I_2' - I_3') + E_5 - R_5 I_3' + R_4(J_6 - I_3') = 0$$

Podstawiając dane liczbowe

$$10 - 10(I_2' - I_3') - 10(I_2' - I_1') = 0$$

$$10(I_2' - I_3') + 5 - 5I_3' + 5(0.5 - I_3') = 0$$

Lub macierzowo

$$\mathbf{R} \mathbf{I}' = \mathbf{E}$$

$$\begin{bmatrix} R_2 + R_3 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_4 + R_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2' \\ I_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 + R_3 J_6 \\ E_5 + R_4 J_6 \end{bmatrix}$$

Podstawiając dane liczbowe

$$\begin{bmatrix} 20 & -10 \\ -10 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2' \\ I_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 7.5 \end{bmatrix}$$

Macierz prądów oczkowych

$$\mathbf{I}' = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{E}$$

$$\begin{bmatrix} I_2' \\ I_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & -10 \\ -10 & 20 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 10 \\ 7.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.25 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Stąd poszukiwane prądy oczkowe

$$I_2' = \frac{5}{4} \text{ A}$$

$$I_3' = 1 \text{ A}$$

$$I_1' = \frac{1}{2} \text{ A} \quad \text{prąd oczkowy } I_1' \text{ już określony z wartości źródła prądowego.}$$

Prądy gałęziowe

$$I_1 = I_2' = \frac{5}{4} \text{ A}$$

$$I_2 = I_2' - I_3' = \frac{1}{4} \text{ A}$$

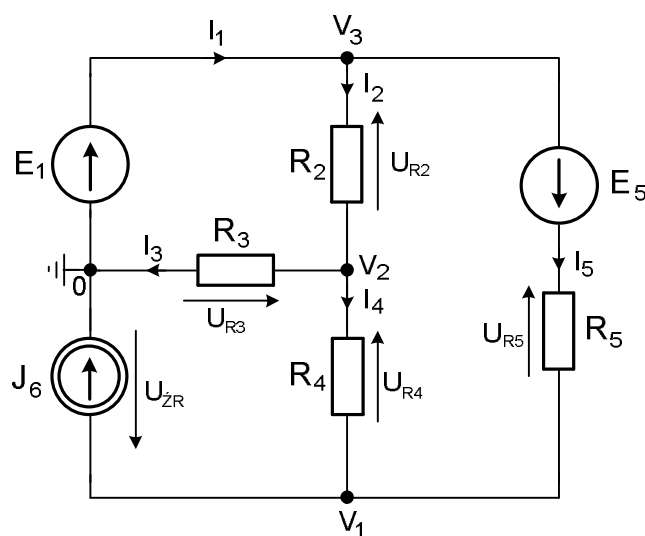
$$I_3 = I_2' - I_1' = \frac{3}{4} \text{ A}$$

$$I_4 = J_6 - I_3' = -\frac{1}{2} \text{ A}$$

$$I_5 = I_3' = 1 \text{ A}$$

## 2. Metoda potencjałów węzłowych.

Na rysunku 1.10b przedstawiono schemat z zaznaczeniem potencjałów węzłowych.



**Rys. 1.10b**

Zakładamy potencjał jednego z węzłów tego obwodu za równy zero,  $V_0 = 0$ . Węzeł zerowy jest węzłem odniesienia.

Równania potencjałów węzłowych.

Pomiędzy węzeł zerowy a węzeł trzeci jest włączone idealne źródło napięciowe  $E_1$  co powoduje, że potencjał  $V_3 = E_1 = 10$  V. Należy wyznaczyć potencjały  $V_2$  i  $V_3$ , do czego wypiszemy dwa równania, liniowo niezależne.

$$\text{dla węzła 1} \quad V_1 \left( \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) - V_2 \frac{1}{R_4} - E_1 \frac{1}{R_5} = -J_6 + \frac{E_5}{R_5}$$

$$\text{dla węzła 2} \quad V_2 \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) - V_1 \frac{1}{R_4} - E_1 \frac{1}{R_2} = 0$$

podstawiając dane liczbowe

$$V_1 \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \right) - V_2 \frac{1}{5} = -\frac{1}{2} + \frac{5}{5} + 10 \cdot \frac{1}{5}$$

$$V_2 \left( \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{5} \right) - V_1 \frac{1}{5} = 10 \cdot \frac{1}{10}$$

Lub macierzowo

$$\mathbf{G} \mathbf{V} = \mathbf{I}_{\dot{\mathbf{Z}}\mathbf{R}}$$

$$\begin{bmatrix} G_4 + G_5 & -G_4 \\ -G_4 & G_2 + G_3 + G_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -J_6 + G_5 E_5 + G_5 E_1 \\ G_2 E_1 \end{bmatrix}$$

Podstawiając dane liczbowe

$$\begin{bmatrix} 0.4 & -0.2 \\ -0.2 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Macierz potencjałów węzłowych

$$\mathbf{V} = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{I}_{\dot{\mathbf{Z}}\mathbf{R}}$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.2 \\ -0.2 & 0.4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2.5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Stąd po rozwiązaniu układu równań

$$V_1 = 10 \text{ V}, \quad V_2 = 7.5 \text{ V}.$$

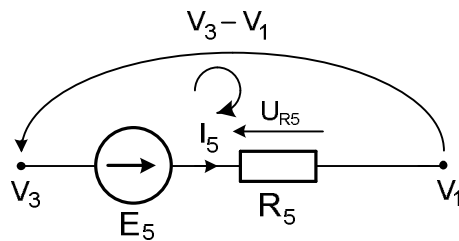
Znając potencjały możemy obliczyć prądy gałęziowe

$$I_2 = \frac{V_3 - V_2}{R_2} = \frac{1}{4} \text{ A}$$

$$I_3 = \frac{V_2}{R_3} = \frac{3}{4} \text{ A}$$

$$I_4 = \frac{V_2 - V_1}{R_4} = -\frac{1}{2} \text{ A}$$

$$I_5 = \frac{V_3 - V_1 + E_5}{R_5} = 1 \text{ A} \quad \text{sposób obliczenia wyjaśnia rys. 1.10c}$$



**Rys. 1.10c**

Z napięciowego prawa Kirchhoffa dla oczka otrzymujemy równanie

$$-E_5 - (V_3 - V_1) + U_{R5} = 0$$

podstawiamy  $U_{R5} = I_5 \cdot R_5$

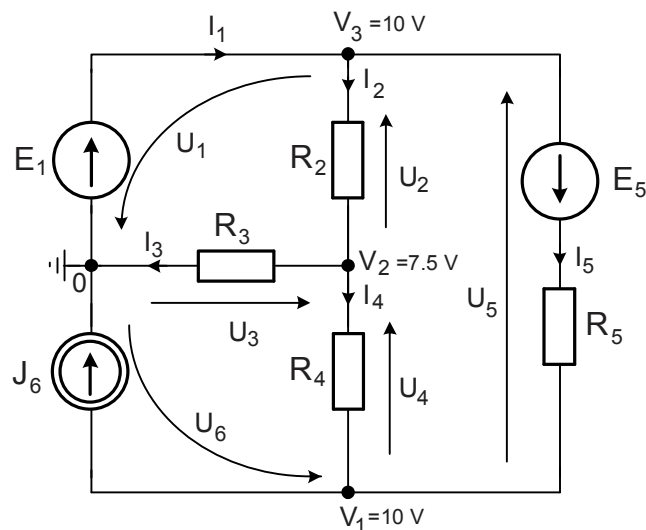
$$I_5 = \frac{V_3 - V_1 + E_5}{R_5}$$

Prąd  $I_1$  wypływający z idealnego źródła napięcia możemy obliczyć z sumy prądów w węźle trzecim.

$$I_1 = I_2 + I_5 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4} \text{ A}$$

### 3. Zasada Tellegena

Do sprawdzenia zasady Tellegena potrzebne są napięcia gałęziowe (prądy już mamy obliczone). Napięcia gałęziowe mają zwrot strzałki przeciwny do prądów gałęziowych.



**Rys. 1.10d**

Napięcia gałęziowe

$$U_1 = -V_3 = -10 \text{ V}$$

$$U_2 = V_3 - V_2 = 2.5 \text{ V}$$

$$U_3 = V_2 = 7.5 \text{ V}$$

$$U_4 = V_2 - V_1 = -2.5 \text{ V}$$

$$U_5 = V_3 - V_1 = 0$$

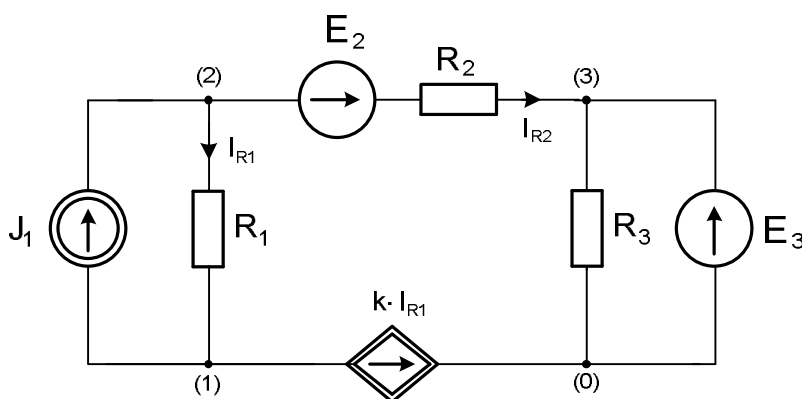
$$U_6 = V_1 = 10 \text{ V}$$

Podstawiając dane liczbowe

$$U \cdot I = U_1 \cdot I_1 + U_2 \cdot I_2 + U_3 \cdot I_3 + U_4 \cdot I_4 + U_5 \cdot I_5 + U_6 \cdot I_6 = \\ = 1.25 \cdot (-10) + 0.25 \cdot 2.5 + 0.75 \cdot 7.5 - 0.5 \cdot (-2.5) + 1 \cdot 0 + 0.5 \cdot 10 = 0$$

W każdej chwili w obwodzie suma mocy oddawanych przez niektóre gałęzie jest równa mocy pobieranych przez pozostałe gałęzie.

**Zad. 1.11.** Metodą potencjałów węzłowych obliczyć prąd  $I_{R2}$  (rys.1.11a). Dane:  $E_2 = 200 \text{ V}$ ,  $E_3 = 100 \text{ V}$ ,  $J_1 = 20 \text{ A}$ ,  $R_1 = 20 \Omega$ ,  $R_2 = 10 \Omega$ ,  $R_3 = 10 \Omega$ ,  $k = 2$



**Rys. 1.11a**

**R o z w i ą z a n i e**

Potencjał węzła  $V_3 = E_3 = 100 \text{ V}$ , ponieważ  $E_3$  jest źródłem idealnym. Rezystor  $R_3$  może mieć dowolną wartość i nie wpływa na rozpył prądów w pozostałej części obwodu.

Równania potencjałów

$$V_1 \frac{1}{R_1} - V_2 \frac{1}{R_1} = -J_1 - k \cdot I_{R1}$$

$$V_2 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - V_1 \frac{1}{R_1} - E_3 \frac{1}{R_2} = J_1 - \frac{E_2}{R_2}$$

Prąd  $I_{R1}$  w zależności od potencjałów  $V_2$  i  $V_1$  wynosi

$$I_{R1} = \frac{V_2 - V_1}{R_1}$$

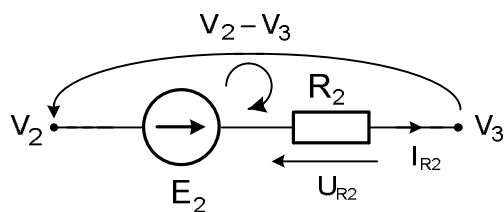
Podstawiając dane liczbowe

$$V_1 \left( \frac{1}{20} \right) - V_2 \left( \frac{1}{20} \right) = -20 - 2 \cdot \frac{V_2 - V_1}{20}$$

$$V_2 \left( \frac{1}{20} + \frac{1}{10} \right) - V_1 \left( \frac{1}{20} \right) - 100 \cdot \frac{1}{10} = 20 - \frac{200}{10}$$

$$\text{Stąd } V_1 = 700 \text{ V}, \quad V_2 = 300 \text{ V}$$

Prąd  $I_{R2}$  obliczymy z różnicy potencjałów, rys. 1.11b



Rys. 1.11b

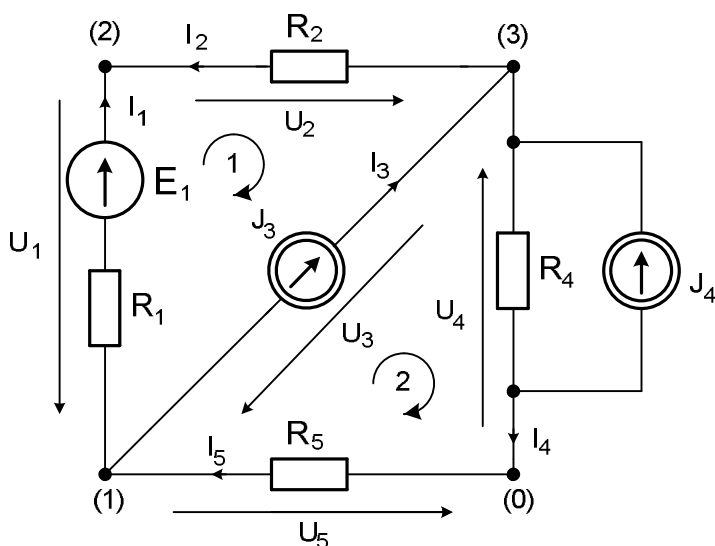
$$U_{R2} - E_2 - (V_2 - V_3) = 0$$

$$I_{R2} = \frac{U_{R2}}{R_2} = \frac{E_2 + V_2 - V_3}{R_2} = 40 \text{ A}$$

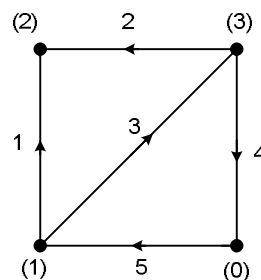
**Zad. 1.12.** Dla obwodu jak na rysunku 1.12a

1. Obliczyć prądy i napięcia wszystkich gałęzi, metodą prądów i napięć gałęziowych
2. Sporządzić bilans mocy na źródłach i rezystorach.
3. Metodą potencjałów węzłowych wyznaczyć potencjały  $(V_1), (V_2), (V_3)$ , względem węzła (0).
4. Sprawdzić zasadę Tellegena

Dane:  $E_1 = 100 \text{ V}$ ,  $J_3 = 1 \text{ A}$ ,  $J_4 = 2 \text{ A}$ ,  $R_1 = 80 \Omega$ ,  $R_2 = 20 \Omega$ ,  $R_4 = 50 \Omega$ ,  $R_5 = 50 \Omega$



Rys. 1.12a



Rys. 1.12b

Rozwiązanie:

1. Metoda prądów i napięć gałęziowych

Na rys.1.12a przedstawiono graf obwodu

ilość węzłów  $n = 4$ , ilość węzłów niezależnych  $n - 1 = 3$

ilość gałęzi  $b = 5$ , ilość oczek niezależnych  $b - n + 1 = 2$

Prądowe prawo Kirchhoffa:

$$(1) \quad I_1 + I_3 - I_5 = 0$$

$$(2) \quad -I_1 - I_2 = 0$$

$$(3) \quad I_2 - I_3 + I_4 = 0$$

Napięciowe prawo Kirchhoffa:

$$1. \quad -U_1 + U_2 + U_3 = 0$$

$$2. \quad -U_3 - U_4 - U_5 = 0$$

Równania gałęziowe:

$$U_1 = R_1 I_1 - E_1$$

$$U_2 = R_2 I_2$$

$$I_3 = J_3$$

$$I_4 = U_4 / R_4 - J_4 \quad \text{stąd} \quad U_4 = I_4 R_4 + J_4 R_4$$

$$U_5 = R_5 I_5$$

Po wstawieniu równań gałęziowych do napięciowego prawa Kirchhoffa otrzymujemy:

$$I_1 = -0.5 \text{ A}$$

$$U_1 = -140 \text{ V}$$

$$I_2 = 0.5 \text{ A}$$

$$U_2 = 10 \text{ V}$$

$$I_3 = 1 \text{ A}$$

$$U_3 = R_1 I_1 - E_1 - R_2 I_2 = -150 \text{ V}$$

$$I_4 = 0.5 \text{ A}$$

$$U_4 = I_4 - (-J_4) R_4 = 125 \text{ V}$$

$$I_5 = 0.5 \text{ A}$$

$$U_5 = 25 \text{ V}$$

2. Bilans mocy:

Rezystory:

$$P = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 = \\ (-0.5)^2 80 + 0.5^2 20 + 2.5^2 50 + 0.5^2 50 = 350 \text{ W}$$

Źródła:

$$P = I_1 E_1 + J_3 (-U_3) + J_4 U_4 = \\ (-0.5) \cdot 100 + 1 \cdot 150 + 2 \cdot 125 = 350 \text{ W}$$

3. Metoda potencjałów węzłowych

Równania potencjałów: - uziemiony węzeł (0)

$$V_1 (G_1 + G_5) - V_2 G_1 = -E_1 G_1 - J_3$$

$$-V_1 G_1 + V_2 (G_1 + G_2) - V_3 G_2 = E_1 G_1$$

$$-V_2 G_2 + V_3 (G_2 + G_4) = J_3 + J_4$$

Stąd po podstawieniu danych:  $V_1 = -25 \text{ V}$ ,  $V_2 = 115 \text{ V}$ ,  $V_3 = 125 \text{ V}$ .

Obliczamy napięcia i prądy gałęziowe;

$$U_1 = V_1 - V_2 = -25 - 115 = -140 \text{ V} \quad I_1 = -0.5 \text{ A}$$

$$U_2 = V_3 - V_2 = 125 - 115 = 10 \text{ V} \quad I_2 = 0.5 \text{ A}$$

$$U_3 = V_1 - V_3 = -25 - 125 = -150 \text{ V} \quad I_3 = 1 \text{ A}$$



$$U_4 = V_3 = 125 \text{ V}$$

$$I_4 = 0.5 \text{ A}$$

$$U_5 = -V_1 = 25 \text{ V}$$

$$I_5 = 0.5 \text{ A}$$

#### 4. Zasada Tellegena

W każdym obwodzie moc chwilowa pobierana przez cały obwód, równa sumie mocy pobieranej przez wszystkie gałęzie, w każdej chwili jest równa zero.

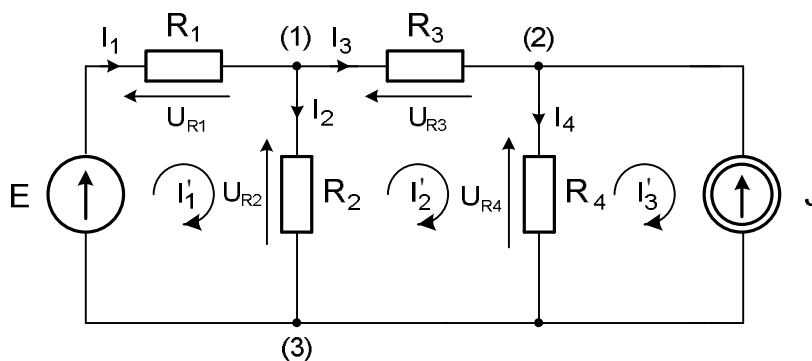
$$P = I_1 U_1 + I_2 U_2 + I_3 U_3 + I_4 U_4 + I_5 U_5 = 0$$

$$P = (-0.5) \cdot (-140) + 0.5 \cdot 10 + 1 \cdot (-150) + 0.5 \cdot 125 + 0.5 \cdot 25 = 0$$

**Zad. 1.13.** Dla obwodu jak na rys. 1.13a obliczyć rozływ prądów:

1. Metodą prądów oczkowych.
2. Metodą potencjałów węzłowych.
3. Metodą prądów i napięć gałęziowych
4. Sprawdzić zasadę Tellegena

Dane:  $E = 100 \text{ V}$ ,  $J = 30 \text{ A}$ ,  $R_1 = 10 \Omega$ ,  $R_2 = 10 \Omega$ ,  $R_3 = 10 \Omega$ ,  $R_4 = 5 \Omega$ .



**Rys. 1.13a**

**R o z w i ą z a n i e**

#### 1. Metoda prądów oczkowych

Na podstawie przyjętych prądów oczkowych wyznaczamy prądy gałęziowe.

$$I_1 = I_1'$$

$$I_2 = I_1' - I_2'$$

$$I_3 = I_2'$$

$$I_4 = I_2' - I_3' \quad I_3' = -J \quad \text{stąd} \quad I_4 = I_2' + J$$

Należy wyznaczyć dwa prądy oczkowe. Prąd  $I_3'$  jest określony przez idealne źródło prądu

Na podstawie napięciowego prawa Kirchhoffa mamy

$$E - U_{R1} - U_{R2} = 0$$

$$U_{R2} - U_{R3} - U_{R4} = 0$$

Podstawiając prądy

$$E - R_1 I_1 - R_2 I_2 = 0$$

$$R_2 I_2 - R_3 I_3 - R_4 I_4 = 0$$

Zastępujemy prądy gałęziowe prądami oczkowymi

$$E - R_1 I_1' - R_2 (I_1' - I_2') = 0$$

$$R_2 (I_1' - I_2') - R_3 I_2' - R_4 (I_2' + J) = 0$$

Podstawiając dane z zadania

$$100 - 20I_1' + 10I_2' = 0$$

$$10I_1' - 25I_2' - 150 = 0$$

Stąd prądy oczkowe

$$I_1' = 2.5 \text{ A} \quad I_2' = -5 \text{ A}$$

Prądy gałęziowe

$$I_1 = I_1' = 2.5 \text{ A}$$

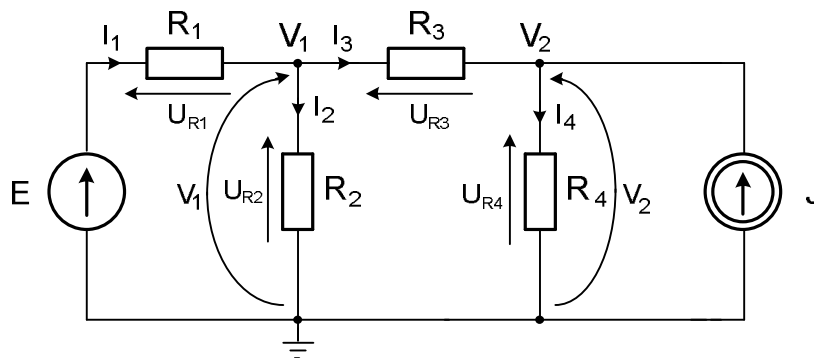
$$I_2 = I_1' - I_2' = -7.5 \text{ A}$$

$$I_3 = I_2' = 2.5 \text{ A}$$

$$I_4 = I_2' + J = 25 \text{ A}$$

## 2. Metoda potencjałów węzłowych

Przyjmujemy jako węzeł odniesienia węzeł trzeci (uziemiający) i względem niego obliczymy potencjał węzła  $V_1$  i  $V_2$ .



Rys. 1.13b

Równania potencjałów

$$V_1 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) - V_2 \frac{1}{R_3} = \frac{E}{R_1}$$

$$V_2 \left( \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) - V_1 \frac{1}{R_3} = J$$

Podstawiając dane mamy

$$V_1 \left( \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \right) - V_2 \frac{1}{10} = 10$$

$$V_2 \left( \frac{1}{10} + \frac{1}{5} \right) - \frac{1}{10} V_1 = 30$$

Stąd  $V_1 = 75 \text{ V}$        $V_2 = 125 \text{ V}$

Prądy gałęziowe

$I_1$  obliczymy z równania:  $V_1 + R_1 I_1 - E = 0$

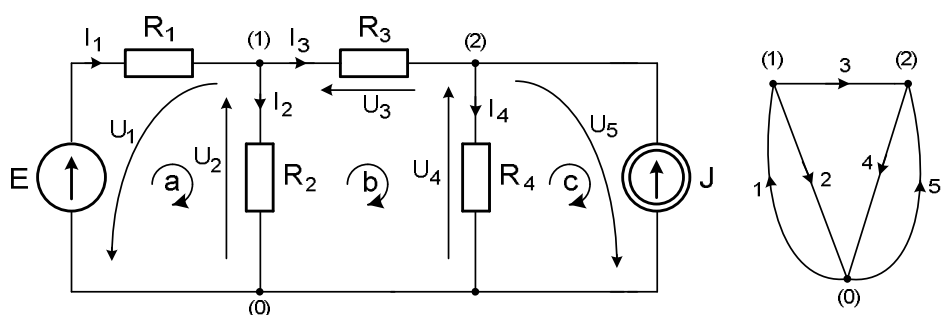
$$I_1 = \frac{E - V_1}{R_1} = \frac{100 - 75}{10} = 2.5 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{V_1}{R_2} = \frac{75}{10} = 7.5 \text{ A}$$

$$I_3 = \frac{U_3}{R_3} = \frac{V_1 - V_2}{R_3} = \frac{75 - 125}{10} = -5 \text{ A}$$

$$I_4 = \frac{U_4}{R_4} = \frac{V_2}{R_4} = \frac{125}{5} = 25 \text{ A}$$

### 3. Metoda prądów i napięć gałęziowych



**Rys.1.13c**

ilość węzłów  $n = 3$ ,      ilość węzłów niezależnych  $n - 1 = 2$

ilość gałęzi  $b = 5$ ,      ilość oczek niezależnych  $b - n + 1 = 3$

gałąź 5 jest idealnym źródłem prądowym, prąd gałęzi 5 wynosi  $I_5 = J$

Mamy  $2b = 10$  niewiadomych, 5 prądów gałęziowych i 5 napięć gałęziowych.

Równania równowagi (wynikające z praw Kirchhoffa)

$$\begin{aligned} -I_1 + I_2 + I_3 &= 0 & -U_1 - U_2 &= 0 \\ -I_3 + I_4 - I_5 &= 0 & U_2 - U_3 - U_4 &= 0 \\ & & U_4 + U_5 &= 0 \end{aligned}$$

Napięcia gałęziowe

$$U_1 = R_1 I_1 - E$$

$$U_2 = R_2 I_2$$

$$U_3 = R_3 I_3$$

$$U_4 = R_4 I_4$$

$$U_5 = -U_4$$

Po wstawieniu równań gałęziowych do napięciowego prawa Kirchhoffa otrzymujemy

$$U_1 = -75 \text{ V} \qquad I_1 = 2.5 \text{ A}$$

$$U_2 = 75 \text{ V} \qquad I_2 = 7.5 \text{ A}$$

$$\begin{array}{ll}
 U_3 = -50 \text{ V} & I_3 = -5 \text{ A} \\
 U_4 = 125 \text{ V} & I_4 = 25 \text{ A} \\
 U_5 = -125 \text{ V} & I_5 = 30 \text{ A}
 \end{array}$$

#### 4. Zasada Tellegena

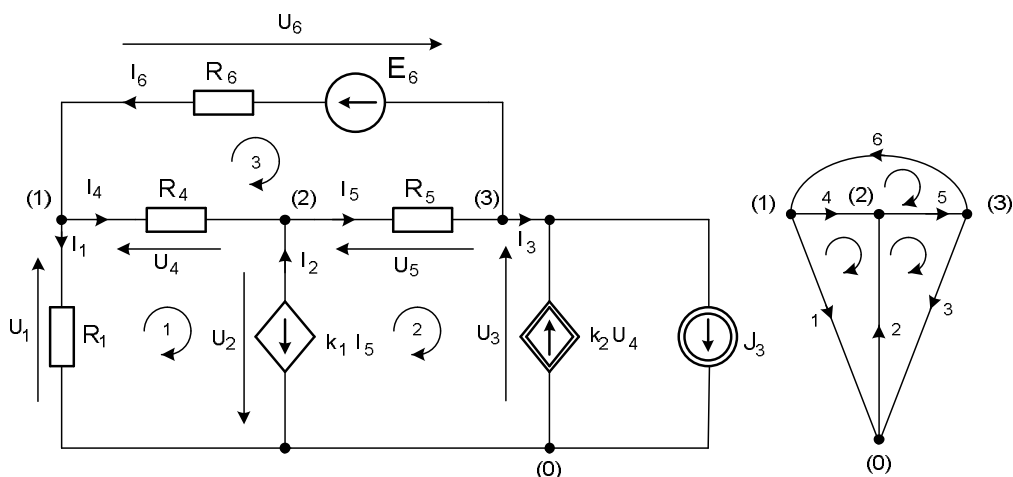
W każdym obwodzie moc chwilowa pobierana przez cały obwód, równa sumie mocy pobieranych przez wszystkie gałęzie, w każdej chwili jest równa zero.

Stąd

$$P = I_1 U_1 + I_2 U_2 + I_3 U_3 + I_4 U_4 + I_5 U_5 = 0$$

$$P = 2.5 \cdot (-75) + 7.5 \cdot 75 + (-5) \cdot (-50) + 25 \cdot 125 + 30 \cdot (-125) = 0$$

**Zad. 1.14.** Obliczyć prądy i napięcia w obwodzie jak na rys. 1.14a, stosując metodę prądów i napięć gałęziowych. Sprawdzić zasadę Tellegena. Dane :  $R_1 = 1 \Omega$ ,  $R_4 = 8 \Omega$ ,  $R_5 = 2 \Omega$ ,  $R_6 = 2 \Omega$ ,  $k_1 = 0.2 \Omega$ ,  $k_2 = 1 \text{ S}$ ,  $E_6 = 68 \text{ V}$ ,  $J_3 = 10 \text{ A}$



Rys. 1.14a

Rozwiązanie :

Równania równowagi:

$$\begin{array}{ll}
 I_1 + I_4 - I_6 = 0 & U_1 - U_4 + U_2 = 0 \\
 -I_2 - I_4 + I_5 = 0 & -U_2 - U_5 - U_3 = 0 \\
 I_3 - I_5 + I_6 = 0 & U_4 + U_5 + U_6 = 0
 \end{array}$$

Napięcia gałęziowe

$$\begin{array}{ll}
 U_1 = R_1 I_1 & U_4 = R_4 I_4 \\
 U_2 = k_1 I_5 & U_5 = R_5 I_5 \\
 I_3 = J_3 - k_2 U_4 & U_6 = R_6 I_6 - E_6
 \end{array}$$

Po wstawieniu równań gałęziowych do napięciowego prawa Kirchhoffa otrzymujemy:

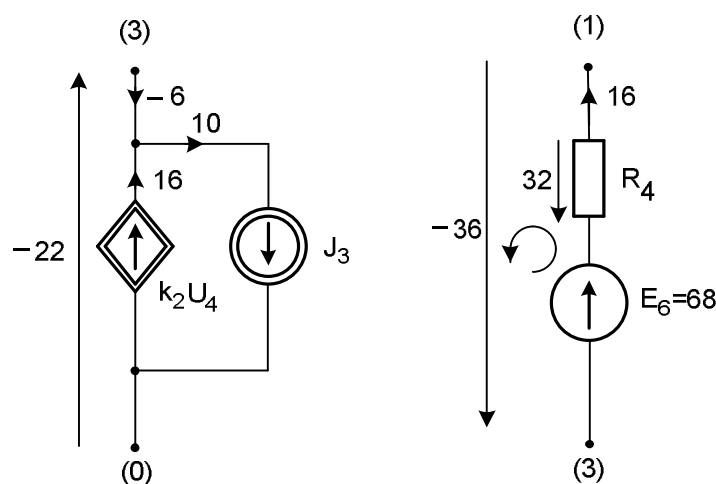
$$\begin{array}{ll}
 I_1 = 14 \text{ A} & U_1 = 14 \text{ V} \\
 I_2 = 8 \text{ A} & U_2 = 2 \text{ V}
 \end{array}$$

$I_3 = -6 \text{ A}$	$U_3 = -22 \text{ V}$
$I_4 = 2 \text{ A}$	$U_4 = 16 \text{ V}$
$I_5 = 10 \text{ A}$	$U_5 = 20 \text{ V}$
$I_6 = 16 \text{ A}$	$U_6 = -36 \text{ V}$

Wstawiając otrzymane wyniki do równań równowagi możemy sprawdzić poprawność rozwiązania.

$14 + 2 - 16 = 0$	$14 - 16 + 2 = 0$
$-8 - 2 + 10 = 0$	$-2 - 20 - (-22) = 0$
$-6 - 10 + 16 = 0$	$16 + 20 + (-36) = 0$

W celu wyjaśnienia rozptywu prądów w gałęzi 3, oraz rozkładu napięć w gałęzi 6 przedstawiono rysunek 1.14b. Prądy i napięcia – wstawiono dane liczbowe.



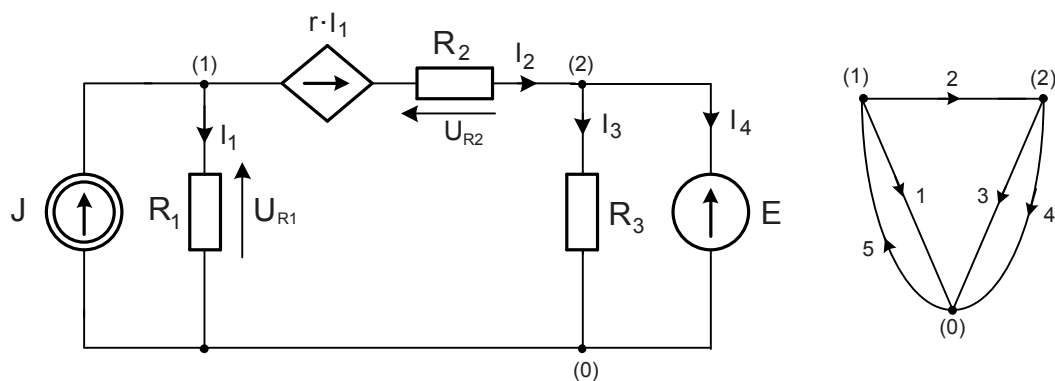
Rys. 1.14b

Zasada Tellegena

$$P = I_1 U_1 + I_2 U_2 + I_3 U_3 + I_4 U_4 + I_5 U_5 + I_6 U_6 = 0$$

$$14 \cdot 14 + 8 \cdot 2 + (-6) \cdot (-22) + 2 \cdot 16 + 10 \cdot 20 + 16 \cdot (-36) = 0$$

**Zad. 1.15.** Dla obwodu jak na rys. 1.15a. metodą potencjałów węzłowych obliczyć rozptyw prądów oraz sprawdzić zasadę Tellegena. Dane:  $E = 70 \text{ V}$ ,  $J = 16 \text{ A}$ ,  $r = 15$ ,  $R_1 = 10 \Omega$ ,  $R_2 = 5 \Omega$ ,  $R_3 = 10 \Omega$ .



Rys. 1.15a

Rozwiązanie

Przyjmujemy jako węzeł odniesienia węzeł (0). Między węzeł (2) a węzeł (0) włączone jest idealne źródło napięciowe  $E$ . Potencjał  $V_2 = E = 70$  V. Do rozwiązania zadania wystarczy wypisać równanie tylko dla węzła (1).

$$-J + I_1 + I_2 = 0$$

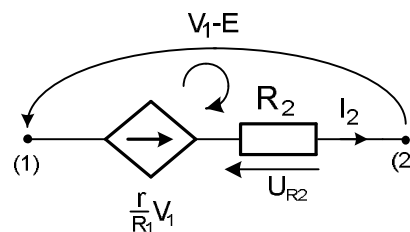
$$U_{R1} = V_1$$

$$I_1 = \frac{1}{R_1} V_1$$

Źródło sterowane

$$r \cdot I_1 = r \cdot \frac{1}{R_1} V_1$$

dla drugiej gałęzi mamy, rys 1.15b



**Rys. 1.15b**

$$I_2 R_2 - \frac{r}{R_1} V_1 - (V_1 - E) = 0$$

stąd

$$I_2 = \frac{r}{R_1 \cdot R_2} V_1 + \frac{1}{R_2} V_1 - \frac{1}{R_2} E$$

Równanie prądów w węźle (1)

$$-J + \frac{1}{R_1} V_1 + \frac{r}{R_1 \cdot R_2} V_1 + \frac{1}{R_2} V_1 - \frac{1}{R_2} E = 0$$

$$V_1 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{r}{R_1 \cdot R_2} + \frac{1}{R_2} \right) = J + \frac{1}{R_2} E$$

Podstawiając dane liczbowe

$$V_1 \left( \frac{1}{10} + \frac{15}{10 \cdot 5} + \frac{1}{5} \right) = 16 + 14$$

$$V_1 = 50 \text{ V}$$

$$I_2 = \frac{15}{10 \cdot 5} 50 + \frac{1}{5} 50 - \frac{1}{5} 70 = 11 \text{ A}$$

$$I_1 = \frac{V_1}{R_1} = \frac{50}{10} = 5 \text{ A}$$

$$I_3 = \frac{E}{R_3} = \frac{70}{10} = 7 \text{ A}$$

Prąd  $I_4$  idealnego źródła napięciowego obliczymy z prądowego prawa Kirchhoffa w węźle (2)

$$I_4 = I_2 - I_3 = 11 - 7 = 4 \text{ A}$$

Poprawności obliczeń można dokonać sumując prądy w węzłach, prądowe prawo Kirchhoffa

$$(1) \quad -J + I_1 + I_2 = 0 \quad \rightarrow \quad -16 + 5 + 11 = 0$$

$$(2) \quad -I_2 + I_3 + I_4 = 0 \quad \rightarrow \quad -11 + 7 + 4 = 0$$

Napięcia gałęziowe

Napięcie gałęziowe na źródle prądu (oznaczymy  $U_5$ ) równa się  $-V_1 = -50$  V ponieważ zwrot źródła prądowego i napięcia gałęziowego na nim musi być przeciwny.

$$U_1 = V_1 = 50 \text{ V}$$

$$U_2 = V_1 - V_2 = -20 \text{ V}$$

$$U_3 = E = 70 \text{ V}$$

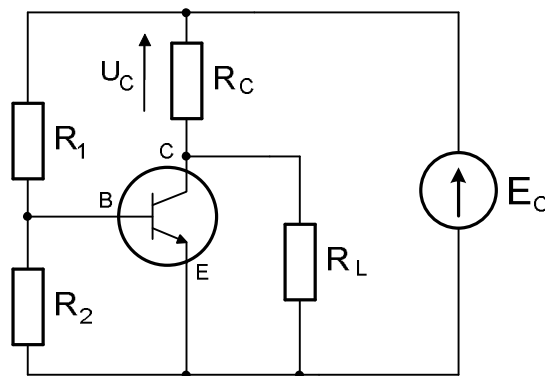
$$U_4 = E = 70 \text{ V} \text{ (prąd } I_4 \text{ jest skierowany przeciwnie)}$$

$$U_5 = -50 \text{ V}$$

Zasada Tellegena

$$P = I_1 U_1 + I_2 U_2 + I_3 U_3 + I_4 U_4 + J U_5 = 5 \cdot 50 + 11 \cdot (-20) + 7 \cdot 70 + 4 \cdot 70 + 16 \cdot (-50) = 0$$

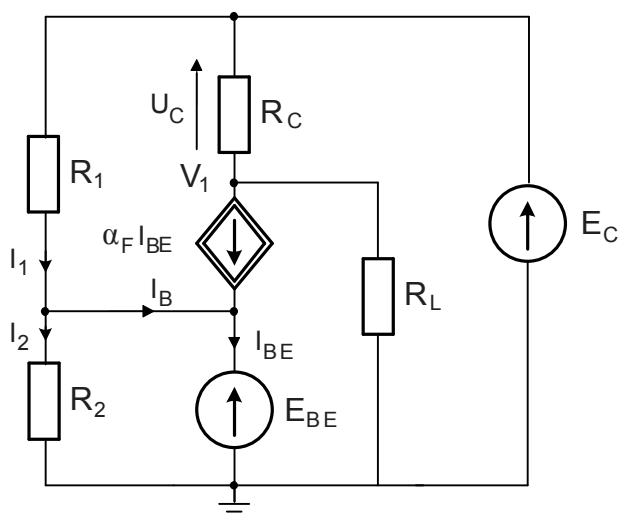
**Zad. 1.16.** W obwodzie prądu stałego z tranzystorem (rys.1.16a), obliczyć napięcie  $U_C$ , jeżeli:  $E_C = 15$  V,  $R_C = R_L = 2$  k,  $R_1 = 30$  k,  $R_2 = 3$  k,  $\alpha_F = 0.95$ ,  $E_{BE} = 0.7$  V



**Rys.1.16a**

**Rozwiązanie:**

Bipolarny tranzystor n-p-n zastępujemy stałoprądowym modelem Ebersa-Molla (rys.1.16b)



**Rys.1.16b**

Równanie potencjałów węzłowych:

$$\left( \frac{1}{R_C} + \frac{1}{R_L} \right) V_1 - \frac{1}{R_C} E_C = -\alpha_F I_{BE}$$

Z prądowego prawa Kirchhoffa mamy

$$I_{BE} - \alpha I_{BE} - I_B = 0$$

$$I_B = I_1 - I_2$$

$$I_B = \frac{E_C - E_{BE}}{R_1} - \frac{E_{BE}}{R_2}$$

$$I_{BE} = \frac{1}{1 - \alpha_F} I_B = \frac{1}{1 - \alpha_F} \left( \frac{E_C - E_{BE}}{R_1} - \frac{E_{BE}}{R_2} \right)$$

$$I_{BE} = 20 \left( \frac{15 - 0.7}{30 \cdot 10^3} - \frac{0.7}{3 \cdot 10^3} \right) = 4.86 \text{ mA}$$

podstawiając dane do równania potencjałów, otrzymujemy

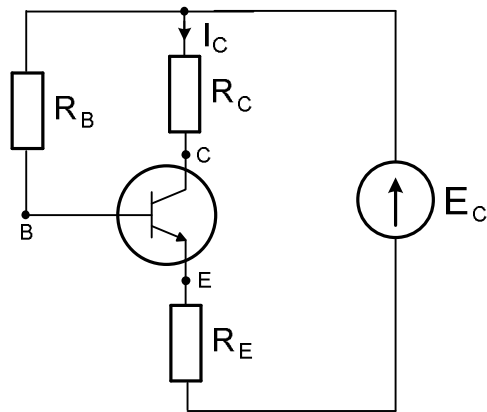
$$\left( \frac{1}{2 \cdot 10^3} + \frac{1}{2 \cdot 10^3} \right) V_1 - \frac{1}{2 \cdot 10^3} 15 = -0.95 \cdot 4.86 \cdot 10^{-3} = 2.88 \text{ V}$$

$$U_C = E_C - V_1 = 15 - 2.88 = 12.12 \text{ V}$$

**Zad. 1.17.** W układzie pokazanym na rys. 1.17a, obliczyć prąd  $I_C$ , dla danych liczbowych:

$$E_C = 24 \text{ V}, \quad R_E = 1 \text{ k}\Omega, \quad R_C = 2 \text{ k}\Omega, \quad R_B = 40 \text{ k}\Omega, \quad \alpha_F = 0.9$$

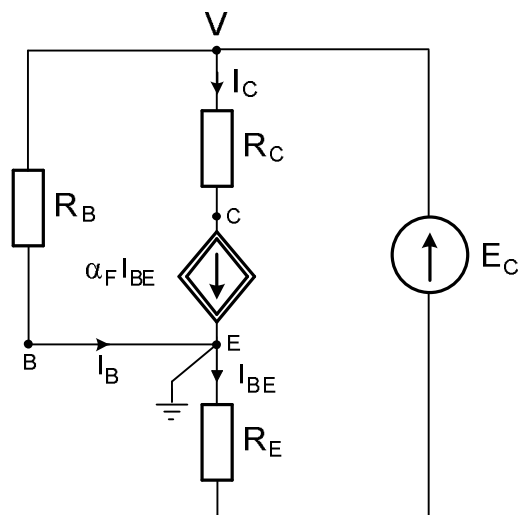




**Rys. 1.17a**

### R o z w i ą z a n i e

W rozpatrywanym układzie, z rezystorem włączonym szeregowo z emiterem możemy pominąć spadek napięcia na złączu baza – emiter i przyjąć najprostszy model tranzystora, przedstawiono to rys.1.17b



**Rys. 1.17b**

Po uziemieniu jednego węzła równanie dla drugiego ma postać

$$\left( \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_E} \right) V = -\alpha_F I_{BE} + \frac{E_C}{R_E}$$

W równaniu nie występuje rezystancja  $R_C$ , ponieważ jest włączona szeregowo ze źródłem prądu i metodzie potencjałów węzłowych zostaje pominięta.

Z prądowego prawa Kirchhoffa dla węzła uziemionego mamy.

$$I_{BE} - \alpha_F I_{BE} - I_B = 0$$

$$I_B = \frac{V}{R_B}$$

stąd

$$I_{BE} = \frac{1}{1 - \alpha_F} \cdot \frac{V}{R_B}$$

podstawiając do równania węzłowego

$$\left( \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_E} \right) V = -\alpha_F \left( \frac{1}{1 - \alpha_F} \cdot \frac{V}{R_B} \right) + \frac{E_C}{R_E}$$

podstawiając dane z zadania mamy

$$\left( \frac{1}{40 \cdot 10^3} + \frac{1}{1 \cdot 10^3} \right) V = -0.9 \left( \frac{V}{0.1 \cdot 40 \cdot 10^3} \right) + \frac{24}{40 \cdot 10^3}$$

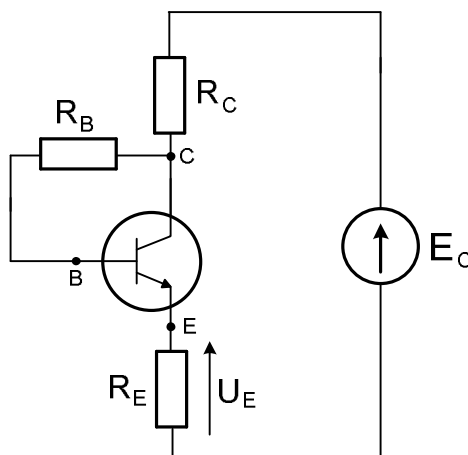
stąd

$$V = 19.2 \text{ V}$$

$$I_{BE} = \frac{19.2}{0.1 \cdot 40 \cdot 10^3} = 4.8 \text{ mA}$$

$$I_C = \alpha_F I_{BE} = 0.9 \cdot 4.8 = 4.32 \text{ mA}$$

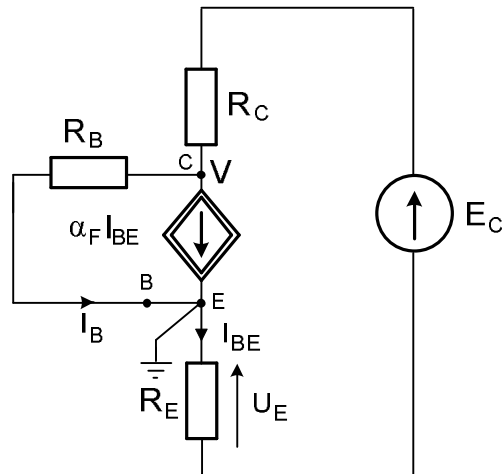
**Zad. 1.18.** Obliczyć napięcie  $U_E$  w układzie jak na rys. 1.18a, dla danych:  $E_C = 24 \text{ V}$ ,  $R_C = 2 \text{ k}\Omega$ ,  $R_E = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_B = 80 \text{ k}\Omega$ ,  $\alpha_F = 0.99$



**Rys. 1.18a**

**Rozwiązanie**

Przyjmujemy uproszczony model tranzystora ( $E_{BE} = 0$ ), rys.1.18b.



**Rys. 1.18b**

Po uziemieniu jednego węzła równanie dla drugiego ma postać

$$\left( \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C + R_E} \right) V = -\alpha_F I_{BE} + \frac{E_C}{R_C + R_E}$$

oraz na podstawie prądowego prawa Kirchhoffa dla węzła uziemionego

$$I_{BE} - \alpha_F I_{BE} - I_B = 0$$

$$I_B = \frac{V}{R_B}$$

$$I_{BE} = \frac{1}{1 - \alpha_F} \cdot \frac{V}{R_B}$$

podstawiając do równania węzłowego

$$\left( \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C + R_E} \right) V = -\alpha_F \left( \frac{1}{1 - \alpha_F} \cdot \frac{V}{R_B} \right) + \frac{E_C}{R_C + R_E}$$

podstawiając dane z zadania

$$\left( \frac{1}{80 \cdot 10^3} + \frac{1}{2 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^3} \right) V = -0.99 \left( \frac{1}{1 - 0.99} \cdot \frac{V}{80 \cdot 10^3} \right) I_{BE} + \frac{24}{2 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^3}$$

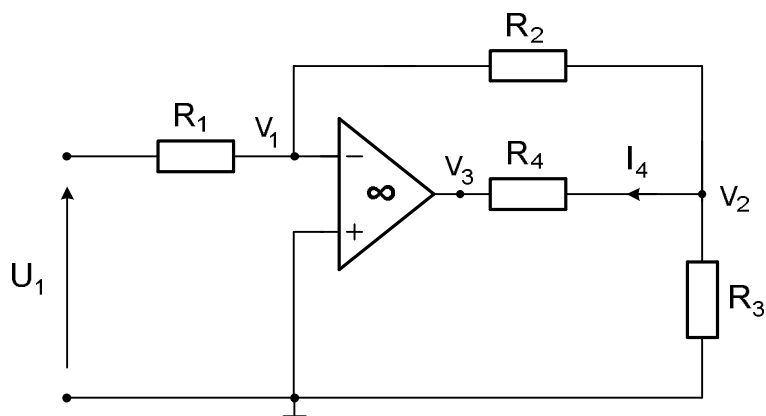
stąd

$$V = 5.05 \text{ V}, \quad I_{BE} = 6.31 \text{ mA}$$

$$U_E = R_E \cdot I_{BE} = 6.31 \text{ V}$$

**Zad. 1.19.** Dla obwodu przedstawionego na rys. 1.19a. obliczyć prąd  $I_4$

$$U_1 = 12 \text{ V}, \quad R_1 = 20 \text{ k}\Omega, \quad R_2 = 8 \text{ k}\Omega, \quad R_3 = 2 \text{ k}\Omega$$



**Rys. 1.19a**

Rozwiązanie

Równania potencjałów [11]:

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)V_1 - \frac{1}{R_2}V_2 = \frac{U_1}{R_1}$$

$$\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)V_2 - \frac{1}{R_2}V_1 - \frac{1}{R_4}V_3 = 0$$

$$V_1 = 0$$

stąd

$$\frac{1}{R_2}V_2 = \frac{U_1}{R_1}$$

$$\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)V_2 - \frac{1}{R_4}V_3 = 0$$

$$V_2 = \frac{R_2}{R_1}U_1$$

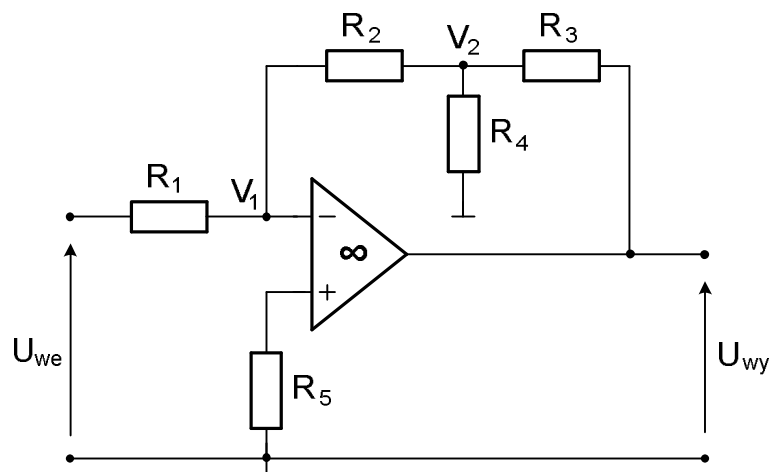
$$V_3 = R_4 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right) \frac{R_2}{R_1} U_1$$

$$I_4 = (V_2 - V_3) \frac{1}{R_4} = \left[ \frac{R_2}{R_1} U_1 - R_4 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right) \frac{R_2}{R_1} U_1 \right] \frac{1}{R_4} =$$

$$-U_1 \frac{1}{R_1} \left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right) = -12 \frac{1}{20 \cdot 10^3} (1 + 4) = -3 \text{ mA}$$

**Zad. 1.20.** Stosując metodę potencjałów węzłowych obliczyć  $U_{wy}$  wzmacniacza potencjometrycznego przedstawionego na rys.1.20a.

Dane:  $U_{we} = 0.5 \text{ V}$ ,  $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 20 \text{ k}\Omega$ ,  $R_3 = 30 \text{ k}\Omega$ ,  $R_4 = 15 \text{ k}\Omega$ .



Rys. 1.20a

R o z w i ą z a n i e

Równania potencjałów mają postać [11]:

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)V_1 - \frac{1}{R_2}V_2 = \frac{1}{R_1}U_{we}$$

$$\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)V_2 - \frac{1}{R_2}V_1 - \frac{1}{R_3}U_{wy} = 0$$

$$V_1 = 0$$

Potencjał  $V_1 = 0$ , ponieważ przy prądzie wejściowym wzmacniacza równym zero spadek napięcia na rezystancji  $R_5$  jest równy zero.

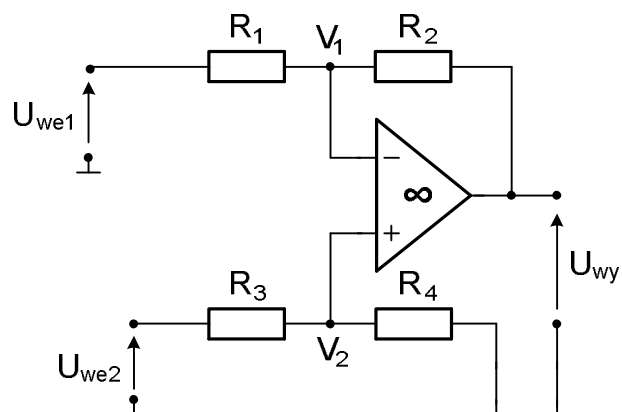
Po rozwiązaniu równań otrzymujemy.

$$\frac{U_{wy}}{U_{we}} = -\frac{R_2}{R_1} \left(1 + \frac{R_3}{R_2} + \frac{R_3}{R_4}\right)$$

Podstawiając dane

$$U_{wy} = 0.5 \left[ -\frac{20 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^3} \left(1 + \frac{30 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^3} + \frac{30 \cdot 10^3}{15 \cdot 10^3}\right) \right] = -4.5 \text{ V.}$$

**Zad. 1.21.** Stosując metodę potencjałów węzłowych obliczyć  $U_{wy}$  wzmacniacza różnicowego przedstawionego na rys.1.21a. Dane:  $U_{we1} = 3 \text{ V}$ ,  $U_{we2} = 8 \text{ V}$ ,  $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 10 \text{ k}\Omega$ .



Rys. 1.21a

### R o z w i ą z a n i e

Równania potencjałów węzłowych dla obwodu mają postać [11]:

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)V_1 - \frac{1}{R_2}U_{wy} = \frac{1}{R_1}U_{we1}$$

$$\left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)V_2 = \frac{1}{R_3}U_{we2}$$

$$V_1 = V_2$$

Po wyeliminowaniu potencjałów  $V_1$  i  $V_2$  otrzymujemy

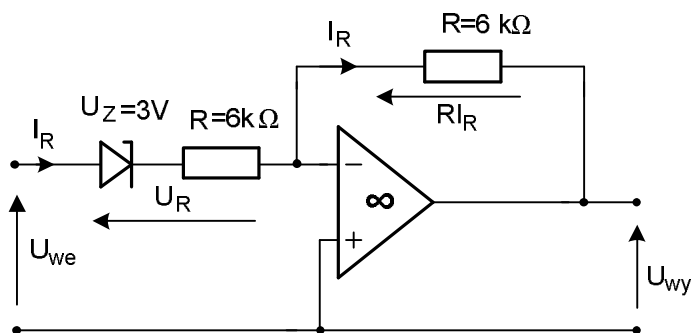
$$U_{wy} = \frac{(R_1 + R_2)R_4}{(R_3 + R_4)R_1}U_{we2} - \frac{R_2}{R_1}U_{we1}$$

Podstawiając dane

$$U_{wy} = \frac{(10^4 + 10^4)10^4}{(10^4 + 10^4)10^4}8 - \frac{10^4}{10^4}3 = 5 \text{ V}$$

## 2. Obwody nieliniowe prądu stałego

**Zad. 2.1.** Dla obwodu przedstawionego na rysunku 2.1a narysować charakterystykę  $U_{wy} = h(U_{we})$ . Przyjąć trójodcinkową charakterystykę diody Zenera:  $U = 0$  dla  $I < 0$ ,  $I = 0$  dla  $0 \leq U \leq 3V$ ,  $U = 3V$  dla  $I > 0$ .



Rys.2.1a

Rozwiązanie:

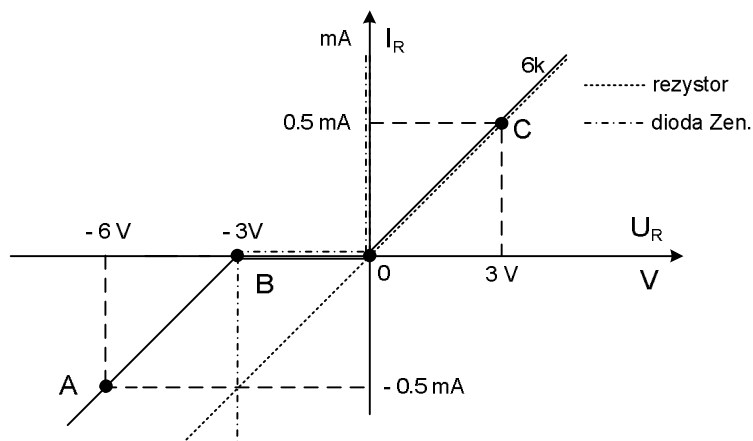
Ponieważ napięcie wejściowe wzmacniacza idealnego dąży do zera, mamy

$$U_{we} = U_R$$

$$U_{wy} = -RI_R, \quad R = 6k\Omega.$$

Jeżeli  $R$  w  $[k\Omega]$ , to  $I$  w  $\frac{[V]}{[k\Omega]} = [mA]$

Na rys. 2.1b przedstawiono charakterystykę rezystora, idealnej diody Zenera oraz charakterystykę wypadkową.



Rys. 2.1b

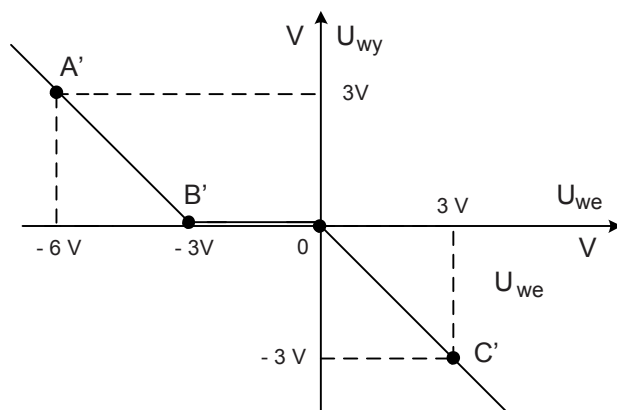
Przenosząc zaznaczone na wykresie punkty zgodnie z wymienionymi równaniami otrzymamy charakterystykę  $U_{wy} = h(U_{we})$ , rys. 2.1c.

$$A(-6V, -0.5mA) \rightarrow A'[-6V, -6k\Omega \cdot (-0.5mA)] \rightarrow A'(-6V, 3V)$$

$$B(-3V, 0) \rightarrow B'(-3V, 0)$$

$$C(3V, 0.5mA) \rightarrow C'[3V, -6k\Omega \cdot (0.5mA)] \rightarrow C'(3V, -3V)$$

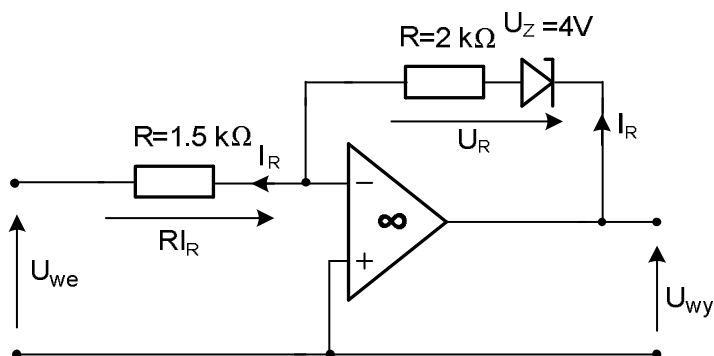




Rys. 2.1c

**Zad. 2.2.** Dla układu przedstawionego na rys. 2.2a narysować charakterystykę  $U_{wy} = h(U_{we})$

Przyjąć trójodcinkową charakterystykę diody Zenera:  $U = 0$  dla  $I < 0$ ,  
 $I = 0$  dla  $0 \leq U \leq 4 \text{ V}$ ,  $U = 4 \text{ V}$  dla  $I > 0$ .



Rys. 2.2a

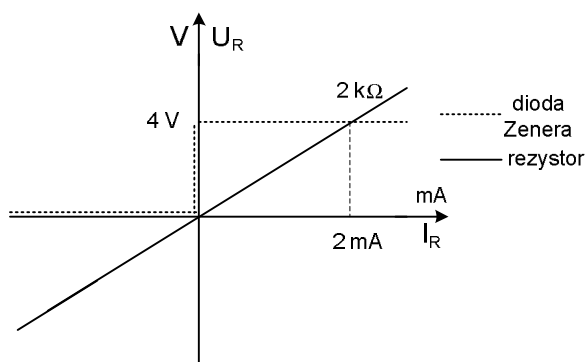
R o z w i ą z a n i e :

Ponieważ napięcie na wejściu wzmacniacza idealnego jest równe zero, mamy

$$U_{we} = -RI_R, \quad R = 1.5 \text{ k}\Omega.$$

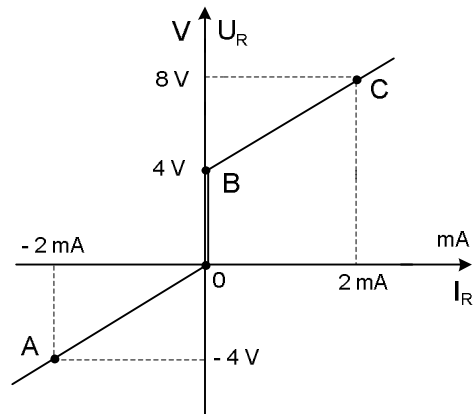
$$U_{wy} = U_R$$

Na rysunku 2.2b. przedstawiono charakterystykę rezystora  $2 \text{ k}\Omega$ , oraz charakterystykę idealnej diody Zenera o napięciu  $4 \text{ V}$ .



Rys. 2.2b

Dodając te charakterystyki otrzymamy charakterystykę wypadkową:



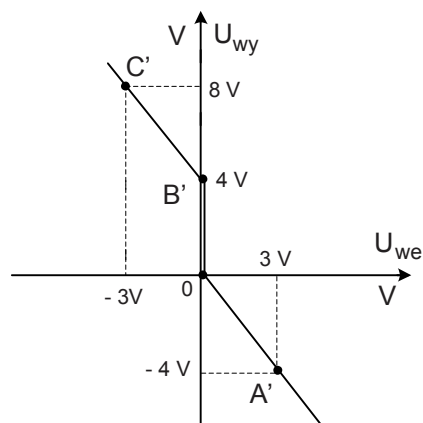
**Rys. 2.2c**

Przenosząc zaznaczone na wykresie punkty zgodnie z wymienionymi równaniami otrzymamy charakterystykę  $U_{wy} = h(U_{we})$

$$A(-2\text{mA}, -4\text{V}) \rightarrow A'[-2\text{mA} \cdot (-1.5\text{k}\Omega), -4\text{V}] \rightarrow A'(3\text{V}, -4\text{V})$$

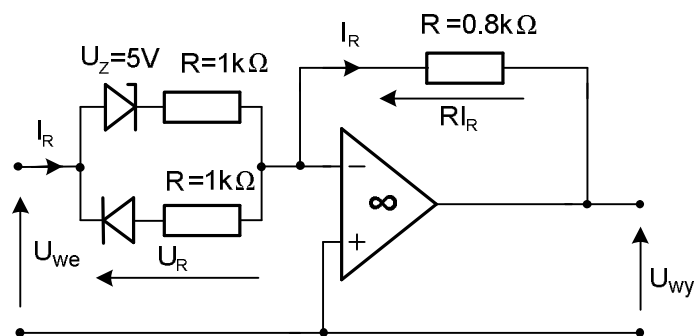
$$B(0, 4\text{V}) \rightarrow B'(0, 4\text{V})$$

$$C(2\text{mA}, 8\text{V}) \rightarrow C'[2\text{mA} \cdot (-1.5\text{k}\Omega), 8\text{V}] \rightarrow C'(-3\text{V}, 8\text{V})$$



**Rys. 2.2d**

**Zad. 2.3.** Dla układu przedstawionego na rys. 2.3a narysować charakterystykę  $U_{wy} = h(U_{we})$   
 Przyjąć trójdcinkową charakterystykę diod Zenera:  $U = 0$  dla  $I < 0$ ,  $I = 0$  dla  $0 \leq U \leq 5\text{V}$ ,  
 $U = 5\text{V}$  dla  $I > 0$ .



Rys. 2.3a

Rozwiązanie:

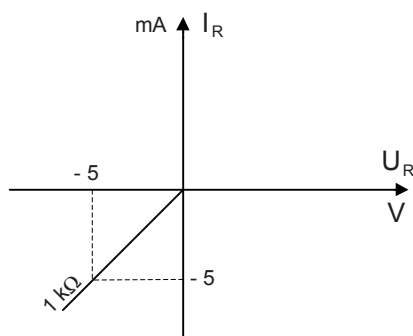
Napięcie wejściowe wzmacniacza idealnego równa się zero, stąd mamy:

$$U_{WE} = U_R$$

$$U_{wy} = -R I_R, \quad R = 0.8\text{ k}\Omega.$$

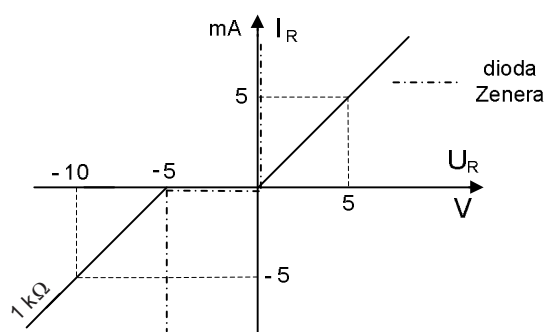
Na rys. 2.3b przedstawiono charakterystykę diody i rezystora, która dla napięć ujemnych jest półprostą, dla dodatnich jest równa zero, dla tak przyjętej polaryzacji diody.

Przy połączeniu szeregowym, napięcia dodają się, przy stałym wspólnym prądzie elementów.



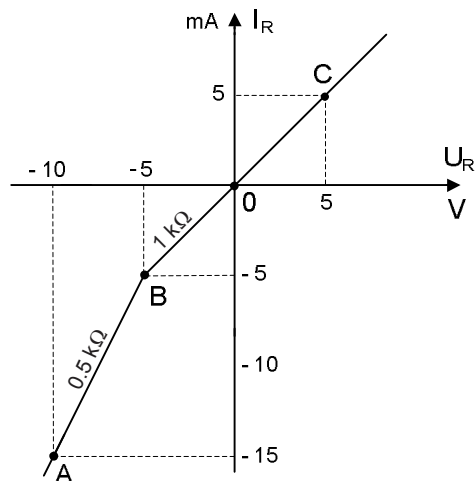
Rys. 2.3b

Rys. 2.3c przedstawia charakterystykę szeregowo połączonej diody Zenera i rezystora  $1\text{ k}\Omega$



Rys. 2.3c

Łącząc przedstawione powyżej charakterystyki, (połączenie równoległe, elementy mają jednakowe napięcie  $U_R$ ) otrzymujemy charakterystykę wypadkową. Na odcinku AB w wyniku równoległego połączenia rezystorów  $1\text{ k}\Omega$ , rezystancja wynosi  $0.5\text{ k}\Omega$ , rysunek 2.3d



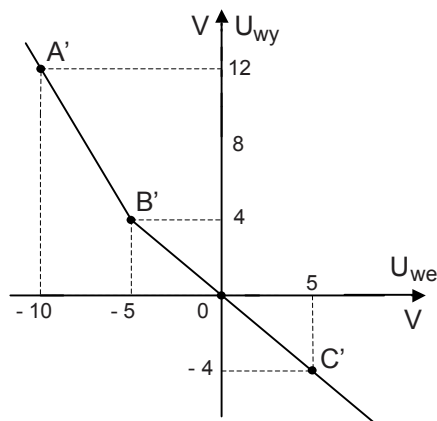
Rys. 2.3d

Przenosząc zaznaczone na wykresie punkty zgodnie z wymienionymi równaniami otrzymamy charakterystykę  $U_{wy} = h(U_{we})$

$$A(-10V, -15mA) \rightarrow A'[-10V, (-15mA) \cdot (-0.8k\Omega)] \rightarrow A'(-10V, 12V)$$

$$B(-5V, -5mA) \rightarrow B'[-5V, (-5mA) \cdot (-0.8k\Omega)] \rightarrow B'(-5V, 4V)$$

$$C(5V, 5mA) \rightarrow [5V, (5mA) \cdot (-0.8k\Omega)] \rightarrow (5V, -4V)$$

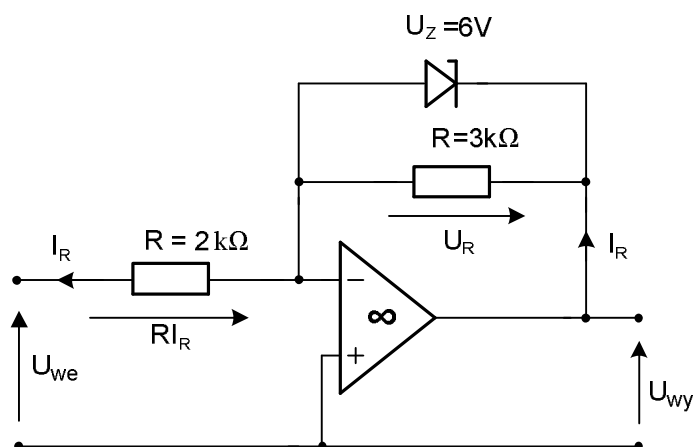


Rys. 2.3e

**Zad. 2.4.** Dla układu przedstawionego na rys. 2.4a narysować charakterystykę  $U_{wy} = h(U_{we})$

Przyjąć trójodcinkową charakterystykę diody Zenera:  $U = 0$  dla  $I < 0$ ,

$I = 0$  dla  $0 \leq U \leq 6 \text{ V}$ ,  $U = 6 \text{ V}$  dla  $I > 0$ .



Rys. 2.4a

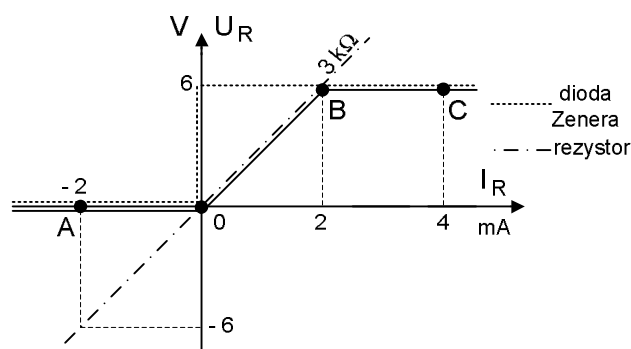
Rozwiązanie:

Ponieważ napięcie na wejściu wzmacniacza idealnego dąży do zera, mamy

$$U_{WE} = -RI_R, \quad R = 2 \text{ k}\Omega.$$

$$U_{WY} = U_R$$

Rysunek 2.4b przedstawia charakterystykę diody Zenera, rezystora 3 kΩ, oraz ich charakterystykę wypadkową z zaznaczonymi punktami A, B, C.



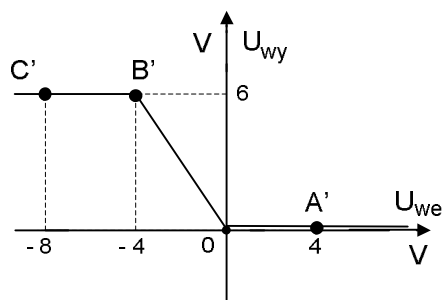
Rys. 2.4b

Przenosząc zaznaczone na wykresie punkty zgodnie z wymienionymi równaniami otrzymamy charakterystykę  $U_{WY} = h(U_{WE})$

$$A(-2\text{mA}, 0) \rightarrow A' [(-2\text{k}\Omega) \cdot (-2\text{mA}), 0] \rightarrow A'(4\text{V}, 0)$$

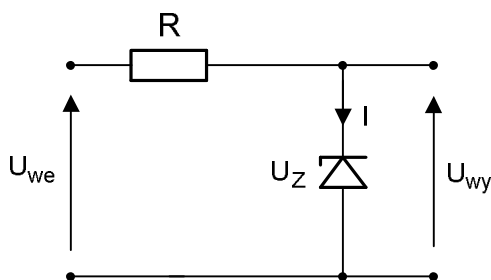
$$B(2\text{mA}, 6\text{V}) \rightarrow B' [(-2\text{k}\Omega) \cdot (2\text{mA}), 6\text{V}] \rightarrow B'(-4\text{V}, 6\text{V})$$

$$C(4\text{mA}, 6\text{V}) \rightarrow C' [(-2\text{k}\Omega) \cdot (4\text{mA}), 6\text{V}] \rightarrow C'(-8\text{V}, 6\text{V})$$



Rys. 2.4c

**Zad. 2.5.** W układzie podanym na rysunku 2.5a wyznaczyć charakterystykę  $U_{wy} = h(U_{we})$ , jeżeli napięcie stabilizacji diody Zenera  $U_Z = 6\text{ V}$ , a rezystancja  $R = 3\text{ k}\Omega$ . Przyjmujemy trójodcinkową charakterystykę diody Zenera:  $U = 0$  dla  $I < 0$ ,  $I = 0$  dla  $0 \leq U \leq 6\text{ V}$ ,  $U = 6\text{ V}$  dla  $I > 0$ .



**Rys. 2.5a**

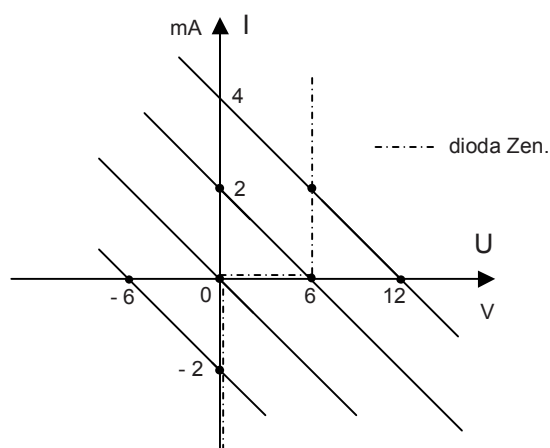
R o z w i ą z a n i e :

Charakterystyka diody Zenera składa się z trzech liniowych odcinków, więc charakterystyka  $U_{wy} = h(U_{we})$  również składa się z trzech liniowych odcinków.

Dla wykreślenia każdego odcinka potrzeba wyznaczyć współrzędne dwóch punktów.

Niezbędne współrzędne wyznaczymy, wykreślając cztery proste obciążenia, dla rezystancji

równej  $3\text{ k}\Omega$ , np.  $\frac{6\text{ V}}{3\text{ k}\Omega} = 2\text{ mA}$ . Przedstawiono to na rysunku 2.5b

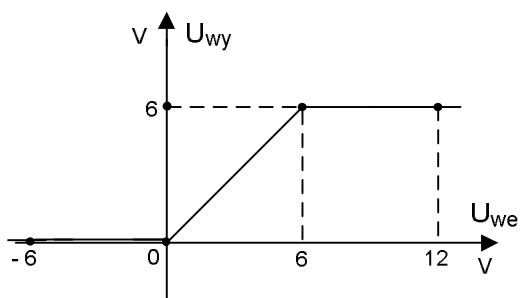


**Rys. 2.5b**

Poszukiwana charakterystyka przechodzi przez punkty o współrzędnych:

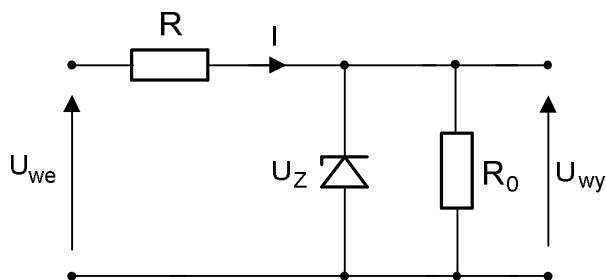
$(-6, 0)$ ,  $(0, 0)$ ,  $(6, 6)$ ,  $(12, 6)$ . Przez te cztery punkty prowadzimy odcinkami liniową funkcję,

$U_{wy} = h(U_{we})$ , tak jak pokazano na rys. 2.5c



**Rys. 2.5c**

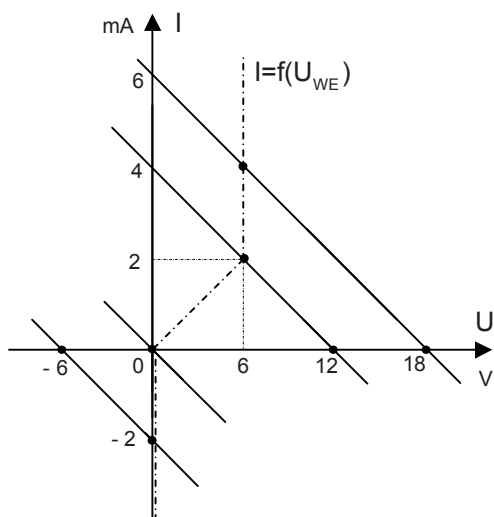
**Zad. 2.6.** Układ z zadania 2.5 został zmodyfikowany przez włączenie rezystora  $R_0 = 3\text{ k}\Omega$  równoległe do diody Zenara. Napięcie diody Zenara jak poprzednio równa się  $6\text{ V}$ ,  $R = 3\text{ k}\Omega$ . Wyznaczyć charakterystykę  $U_{wy} = h(U_{we})$



**Rys. 2.6a**

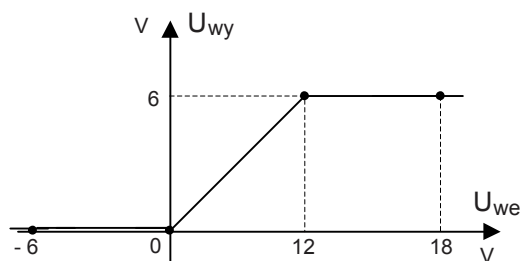
Rozwiązanie:

Podobnie jak w poprzednim przykładzie prowadzimy cztery proste obciążenia, których przecięcia z charakterystyką elementu nieliniowego  $I = h(U_{we})$ , wyznaczają współrzędne czterech punktów charakterystyki  $U_{wy} = h(U_{we})$ .



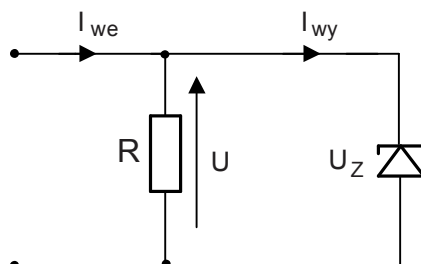
**Rys. 2.6b**

a mianowicie:  $(-6, 0)$ ,  $(0, 0)$ ,  $(12, 6)$ ,  $(18, 6)$ . W wyniku otrzymamy trójdłankową charakterystykę pokazaną na rys. 2.6c



**Rys. 6c**

**Zad. 2.7.** W układzie pokazanym na rys. 2.7a napięcie stabilizacji diody Zenera jest równe  $U_Z = 15\text{ V}$ , a rezystancja  $R = 3\text{ k}\Omega$ . Należy wyznaczyć charakterystykę  $I_{wy} = h(I_{we})$ .



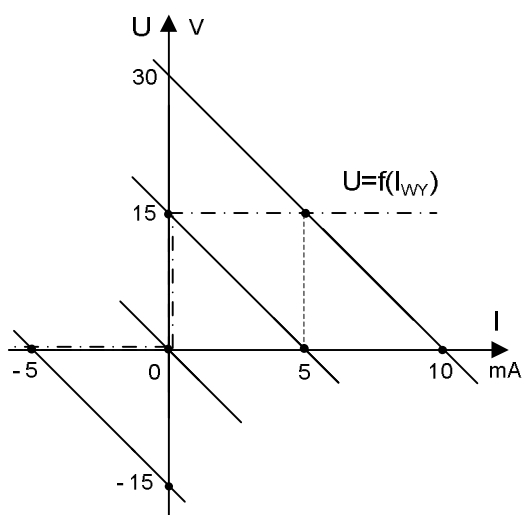
**Rys. 2.7a**

R o z w i ą z a n i e :

Charakterystykę nieliniowego dzielnika prądowego wyznaczamy z równania liniowego:

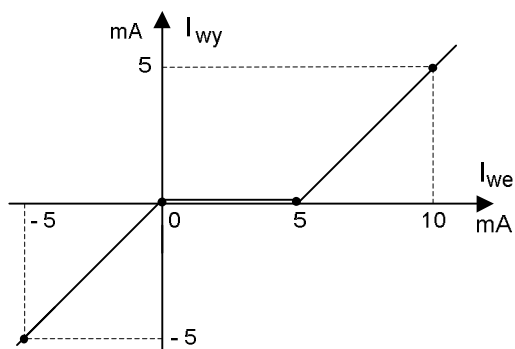
$$I_{wy} = I_{we} - \frac{1}{R}U$$

Rysujemy charakterystykę diody Zenera  $U = f(I_{wy})$ , oraz cztery proste obciążenia odpowiadające czterem prądom  $I_{we}$ .



**Rys. 2.7b**

Punkty przecięcia rodziny prostych obciążenia z charakterystyką elementu nieliniowego wyznaczają cztery punkty charakterystyki  $I_{wy} = h(I_{we})$ .

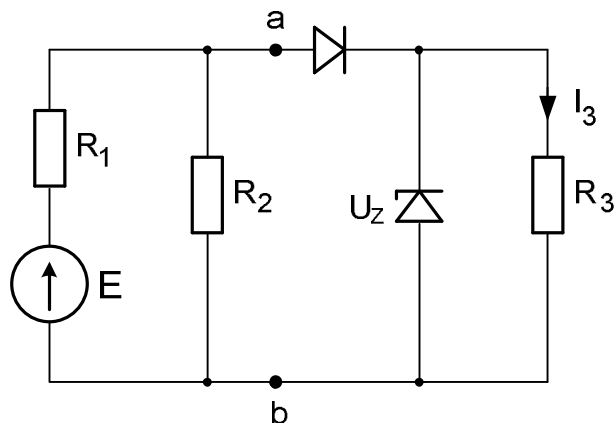


**Rys. 2.7c**



Są to punkty o współrzędnych :  $(-5, -5)$ ,  $(0, 0)$ ,  $(5, 0)$ ,  $(10, 5)$ . Linia łamana poprowadzona przez te punkty jest poszukiwaną charakterystyką nieliniowego dzielnika prądowego.

**Zad. 2.8.** W obwodzie jak na rysunku 2.8a, dioda złączowa i dioda Zenera są idealne, a wartości elementów następujące:  $E = 30 \text{ V}$ ,  $R_1 = 6 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 3 \text{ k}\Omega$ ,  $R_3 = 2 \text{ k}\Omega$ ,  $U_Z = 8 \text{ V}$ . Korzystając z twierdzenia Thevenina, należy obliczyć prąd  $I_3$  płynący w rezystorze  $R_3$ .

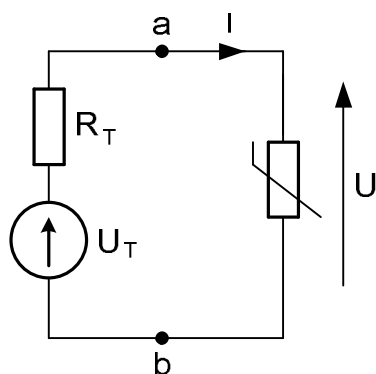


Rys. 2.8a

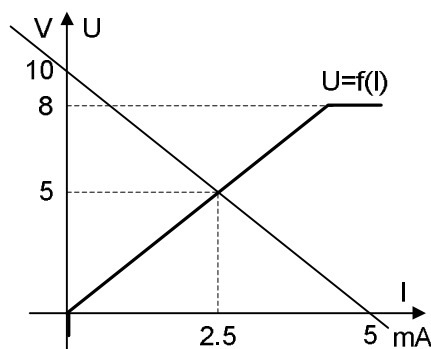
R o z w i ą z a n i e :

Korzystając z twierdzenia Thevenina, dwójnik liniowy znajdujący się na lewo od zacisków ab można zastąpić szeregowo połączonym źródłem napięcia i rezystorem (rys.2.8b)

$$U_T = \frac{E}{R_1 + R_2} R_2 = 10 \text{ V}, \quad R_T = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 2 \text{ k}\Omega.$$



Rys. 2.8b

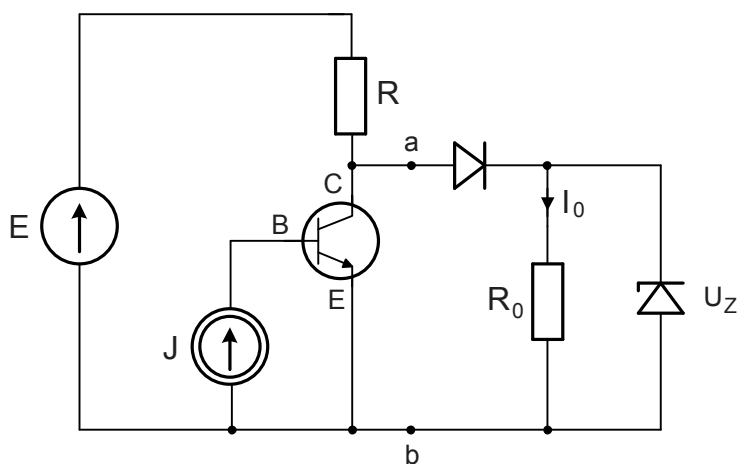


Rys. 2.8c

Szeregowo-równoległe połączenie rezystora i diod usytuowanych na prawo od zacisków ab można zastąpić rezystorem nieliniowym o charakterystyce  $U = f(I)$ . Na rys. 2.8c narysowano charakterystykę obciążenia dwójnika liniowego i charakterystykę  $U = f(I)$  rezystora nieliniowego. Charakterystyki te przecinają się w punkcie o współrzędnych  $I = 2.5 \text{ mA}$ ,  $U = 5 \text{ V}$ . Takie właśnie wartości ma prąd  $I$  oraz napięcie  $U$  w badanym obwodzie.

Dla prądu  $I = 2.5 \text{ mA}$  idealna dioda złączowa stanowi zwarcie, zatem całe napięcie  $U = 5 \text{ V}$  przenosi się na równoległe połączenie rezystora  $R_3$  i diody Zenera. Przy napięciu  $U = 5 \text{ V}$  prąd przez diodę Zenera nie płynie, więc cały prąd  $I = 2.5 \text{ mA}$  płynie przez rezystor  $R_3$ .

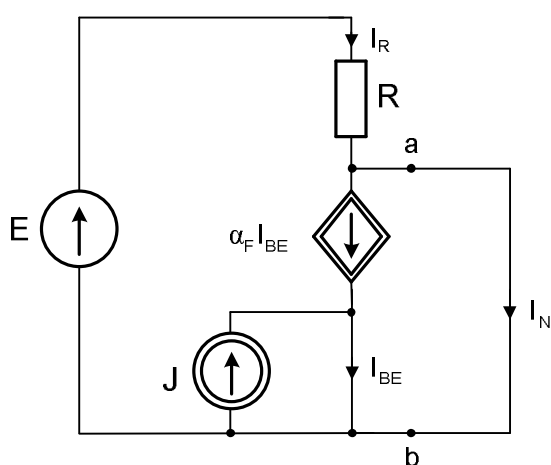
**Zad. 2.9.** Dla obwodu jak na rys. 2.9a, korzystając z twierdzenia Nortona i przyjmując model tranzystora Ebers-Molla obliczyć prąd  $I_0$ . Dane:  $E = 40 \text{ V}$ ,  $J = 100 \text{ mA}$ ,  $R = R_0 = 40 \Omega$ ,  $\alpha_F = 0.9$ ,  $U_Z = 3 \text{ V}$



**Rys. 2.9a**

Rozwiązanie:

Po zastąpieniu tranzystora modelem, odłączeniu dwójnika nieliniowego znajdującego się na prawo od zacisków ab, a następnie zwarcia zacisków ab otrzymamy obwód pokazany na rys. 2.9b, z którego obliczymy prąd zastępczy (zwarciovowy) Nortona.



**Rys. 2.9b**

Dla jednego oczka i dwóch węzłów piszemy równania Kirchhoffa.

$$RI_R - E = 0$$

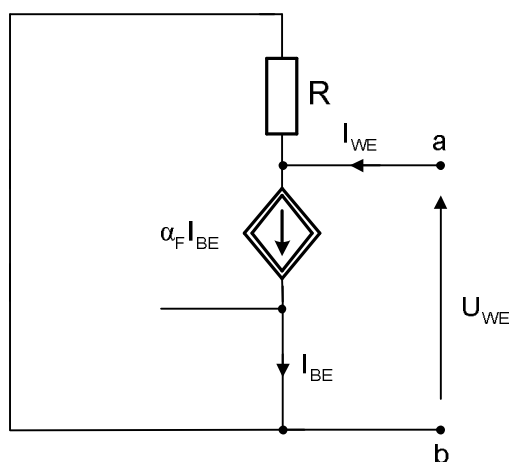
$$-I_R + \alpha_F I_{BE} + I_N = 0$$

$$-\alpha_F I_{BE} + I_{BE} - J = 0$$

Rozwiązując układ trzech równań obliczymy prąd Nortona.

$$I_N = \frac{E}{R} - \frac{\alpha_F}{1 - \alpha_F} J = 100 \text{ mA}$$

Konduktancje zastępczą dwójnika  $G_N$  obliczymy, korzystając z obwodu pokazanego na rys. 2.9c, otrzymanego przez usunięcie źródeł niezależnych i doprowadzenie napięcia  $U_{WE}$  do zacisków ab, a następnie obliczenia prądu  $I_{WE}$



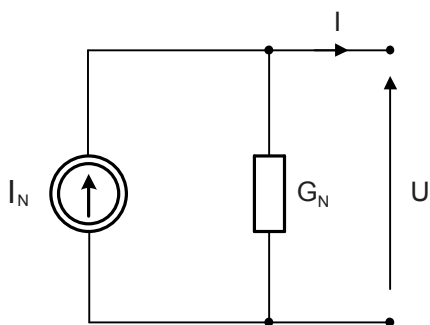
Rys. 2.9c

Z prądowego prawa Kirchhoffa mamy :

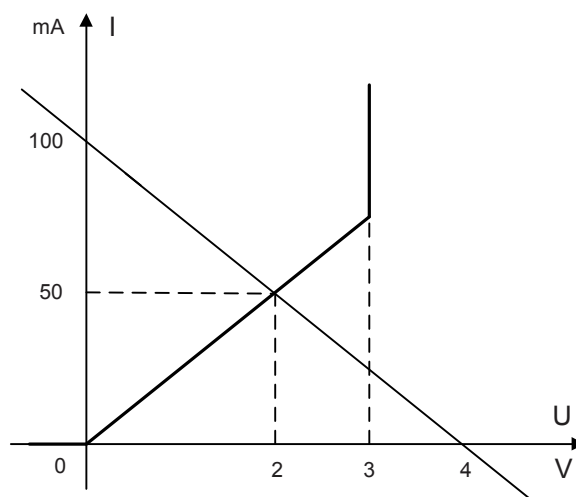
$$-\alpha_F I_{BE} + I_{BE} = 0 \quad \text{stąd} \quad I_{BE} = 0 \quad \text{oraz} \quad I_{WE} = I_{BE} + \frac{U_{WE}}{R} = \frac{U_{WE}}{R}$$

Ostatecznie mamy  $G_N = \frac{I_{WE}}{U_{WE}} = \frac{1}{R} = 0.025 \text{ S}.$

W wyniku obwód z tranzystorem i dwoma źródłami niezależnymi zastąpiliśmy dwójnikiem pokazanym na rys. 2.9d, którego charakterystyką obciążenia jest prosta pokazana na rys. 2.9e.



Rys. 2.9d

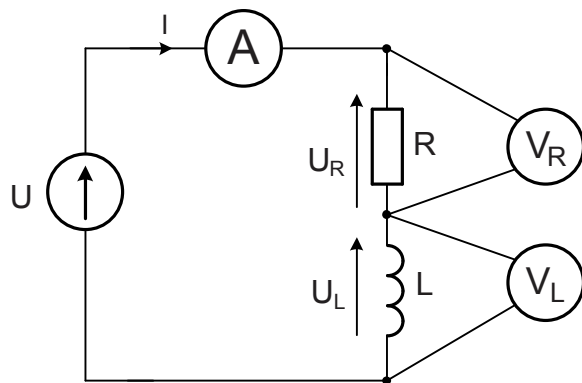


Rys. 2.9e

Na tym samym wykresie narysowano charakterystykę zastępczą dwójnika nieliniowego złożonego z diody złączeniowej, diody Zenera i rezystora. Punkt przecięcia charakterystyk wyznacza punkt pracy układu. Cały prąd  $I = 50 \text{ mA}$  płynie przez rezystor  $R$ , gdyż w tym zakresie napięcie diody Zenera nie pozwala na przewodzenie. Zatem  $I_0 = I = 50 \text{ mA}$

### 3. Obwody prądu sinusoidalnego

**Zad. 3.1.** Dwójnik  $RL$ , jak na rys. 3.1a,  $R = 100\ \Omega$ ,  $L = 0.2\text{ H}$  włączono do sieci o napięciu skutecznym  $U = 230\text{ V}$ , i częstotliwości  $f = 50\text{ Hz}$ . Obliczyć prąd, napięcie na rezystorze i na indukcyjności, oraz moc czynną, bierną i pozorną. Narysować wykres wektorowy. Jak zmieni się wartość prądu jeżeli częstotliwość zmieni się na  $f = 60\text{ Hz}$ . (częstotliwość w Ameryce)



**Rys. 3.1a**

### R o z w i ą z a n i e

W obwodzie są dwa elementy, rezystancja i indukcyjność. Wartość rezystancji nie zależy od częstotliwości i jest taka sama dla prądu stałego ( $\omega = 0$ ) jak i dla prądu zmiennego.

Wartość elementu reaktancyjnego (w zadaniu indukcyjności) zależy od częstotliwości źródła wymuszającego, przedstawiono to na rys. 3.1b.  $X_L = \omega L$ . Dla prądu stałego ( $\omega = 0$ ) wartość  $X_L = 0$ . Indukcyjność stanowi zwarcie.

Wartość indukcyjności  $L$  (jeżeli jest liniowa) jest stała i wynika z jej konstrukcji (zależności między strumieniem skojarzonym a prądem  $L = \frac{\Psi}{i}$ ), jej jednostką jest H (henr).

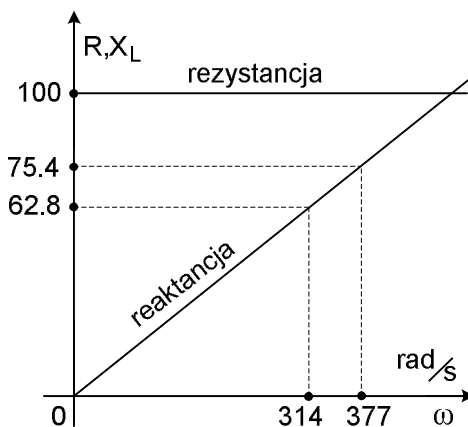
Wartość reaktancji  $X_L$  zmienia się ze zmianą częstotliwości i jej jednostką jest  $\Omega$  (ohm).

Dla częstotliwości 50 Hz pulsacja wynosi  $\omega = 2\pi f \approx 314\text{ rad/s}$ , a reaktancja

$$X_L = \omega L = 314 \cdot 0.2 = 62.8\ \Omega$$

Dla częstotliwości 60 Hz pulsacja wynosi  $\omega = 2\pi f \approx 377\text{ rad/s}$ , a reaktancja

$$X_L = \omega L = 377 \cdot 0.2 = 75.4\ \Omega$$



**Rys. 3.1b**

Wartość skuteczna napięcie zasilającego  $|U| = 230 \text{ V}$ , przyjmując jego fazę za równą zero jego wartość czasowa  $u(t) = 230\sqrt{2} \sin \omega t$ , wartość zespolona skuteczna  $U = 230e^{j0}$

Przedstawiony obwód opisuje równanie wynikające z napięciowego prawa Kirchhoffa dla wartości zespolonych.

$$U_R + U_L = U$$

$$R \cdot I + j\omega L \cdot I = U$$

$$R \cdot I + jX_L \cdot I = U$$

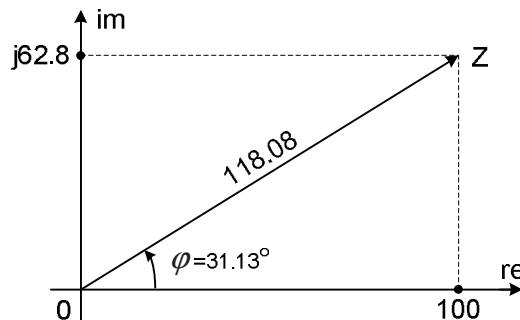
Obliczamy dla częstotliwości 50 Hz,  $\omega = 314 \text{ rad/s}$

$$I(R + jX_L) = U$$

Wprowadzamy oznaczenie

$$Z = R + jX_L = 100 + j62.8 = 118.08e^{j31.13^\circ} \Omega, \text{ impedancja zespolona, zilustrowana na rys. 3.1c}$$

$$\arctg \varphi = \frac{X_L}{R} = \arctg(0.628) \quad \text{stad} \quad \varphi = 31.13^\circ$$



**Rys. 3.1c**

Stąd zespolona wartość prądu

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{230e^{j0}}{118.08e^{j31.13^\circ}} = 1.95e^{-j31.13^\circ} = 1.72 - j0.92 \text{ A}$$

Amperomierz wskaże wartość skuteczną prądu, która jest równa modułowi wartości zespolonej.

$$I_{AMP} = 1.95 \text{ A.}$$

Napięcie na indukcyjności

$$U_L = I \cdot jX_L = 1.95e^{-j31.13^\circ} \cdot j62.8 = 1.95e^{-j31.13^\circ} \cdot 62.8e^{j90^\circ} = 122.46e^{j58.87^\circ} \text{ V}$$

Woltomierz  $V_L$  wskaże wartość skuteczną napięcia, która jest równa modułowi wartości zespolonej.

$$U_{VL} = 122.46 \text{ V.}$$

Napięcie na rezystancji

$$U_R = I \cdot R = 1.95e^{-j31.13^\circ} \cdot 100 = 195e^{-j31.13^\circ} \text{ V}$$

Woltomierz  $V_R$  wskaże wartość skuteczną napięcia, która jest równa modułowi wartości zespolonej

$$U_{VR} = 195 \text{ V}$$

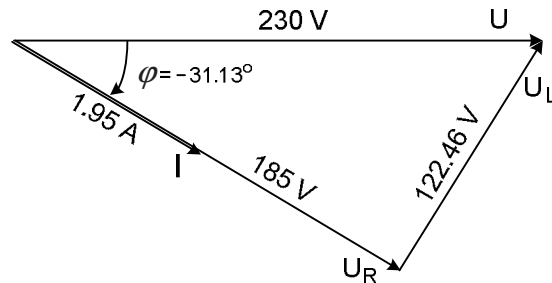
Znając wartość skuteczną prądu i wartość skuteczną napięcia zasilającego obliczymy moc pozorną.

$$|S| = |U| \cdot |I| = 230 \cdot 1.95 = 448.5 \text{ VA.}$$

Moc pozorna zespolona

$$S = P + jQ = U \cdot I^* = 230 \cdot 1.95e^{j31.13^\circ} = 448.5(\cos 31.13^\circ + j \sin 31.13^\circ) = (383.91 + j231.89) \text{ VA.}$$

Moc czynna  $P = 383.91 \text{ W}$ , moc bierna  $Q = 231.89 \text{ var}$ . (dodatnia – charakter indukcyjny)



**Rys. 3.1d.** Wykres wektorowy

Obliczamy prąd dla częstotliwości 60 Hz,  $\omega = 377 \text{ rad/s}$ .

$$X_L = \omega L = 377 \cdot 0.2 = 75.4 \Omega$$

$$Z = R + jX_L = 100 + j75.4 = 125.24e^{j37^\circ} \Omega.$$

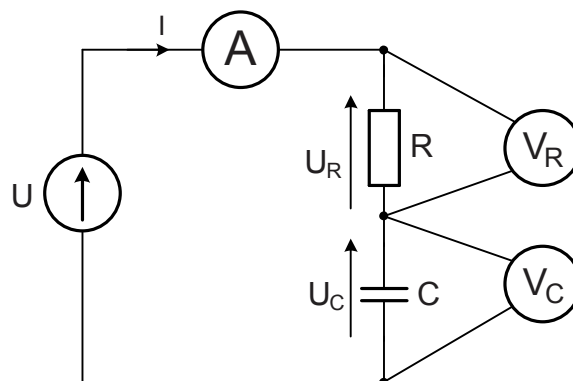
Stąd

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{230e^{j0^\circ}}{125.24e^{j37^\circ}} = 1.84e^{-j37^\circ} \text{ A.}$$

Dla częstotliwości 60 Hz amperomierz wskaże  $I_{AMP} = 1.84 \text{ A}$ .

Wartość prądu zmaleje ponieważ reaktancja indukcyjności wzrośnie (rys. 3.1b)

**Zad. 3.2.** Dwójnik  $RC$ , jak na rys. 3.2a,  $R = 80 \Omega$ ,  $C = 50 \mu F$  włączono do sieci o napięciu skutecznym  $U = 230 \text{ V}$ , i częstotliwości  $f = 50 \text{ Hz}$ . Obliczyć prąd i napięcie na rezystorze i na kondensatorze, oraz moc czynną, bierną i pozorną. Narysować wykres wektorowy. Jak zmieni się wartość prądu jeżeli częstotliwość zmieni się na  $f = 60 \text{ Hz}$ .



**Rys. 3.2a**

Rozwiązanie

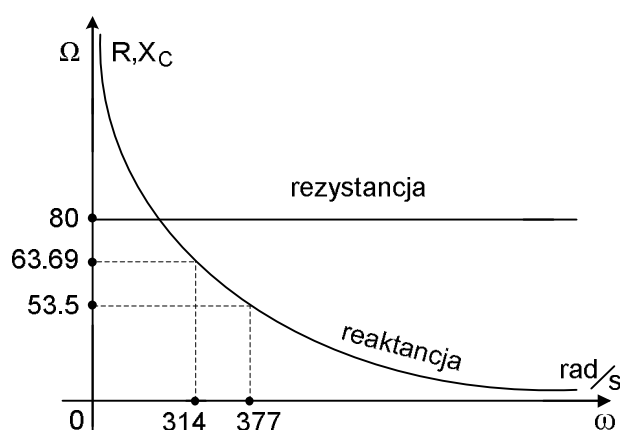
W obwodzie są dwa elementy, rezystancja i kondensator. Wartość rezystancji nie zależy od częstotliwości i jest taka sama dla prądu stałego ( $\omega = 0$ ) jak i dla prądu zmiennego.

Wartość elementu reaktancyjnego (w zadaniu kondensatora) zależy od częstotliwości źródła wymuszającego, przedstawiono to na rys. 3.2b.  $X_C = \frac{1}{\omega C}$ . Dla prądu stałego ( $\omega = 0$ ) wartość

$X_C = \infty$ . Kondensator stanowi przerwę.

Wartość kondensatora C (jeżeli jest liniowa) jest stała i wynika z jego konstrukcji (zależności między ładunkiem a napięciem  $C = \frac{Q}{u}$ ), jej jednostką jest F (farad).

Wartość reaktancji  $X_C$  zmienia się ze zmianą częstotliwości i jej jednostką jest  $\Omega$  (ohm).



**Rys. 3.2b**

Dla częstotliwości 50 Hz pulsacja wynosi  $\omega = 2\pi f \approx 314 \text{ rad/s}$ , a reaktancja

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \cdot 50 \cdot 10^{-6}} = 63.69 \text{ } \Omega$$

Dla częstotliwości 60 Hz pulsacja wynosi  $\omega = 2\pi f \approx 377 \text{ rad/s}$ , a reaktancja

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{377 \cdot 50 \cdot 10^{-6}} = 53.05 \text{ } \Omega$$

Wartość skuteczna napięcie zasilającego  $|U| = 230 \text{ V}$ , przyjmując jego fazę za równą zero jego wartość czasowa  $u(t) = 230\sqrt{2} \sin \omega t$ , wartość skuteczna zespolona  $U = 230e^{j0} \text{ V}$

Przedstawiony obwód opisuje równanie wynikające z napięciowego prawa Kirchhoffa dla wartości zespolonych.

$$U_R + U_C = U$$

$$R \cdot I + \frac{1}{j\omega C} \cdot I = U$$

$$R \cdot I - j \frac{1}{\omega C} \cdot I = U$$

$$R \cdot I - jX_C \cdot I = U$$

Obliczamy dla częstotliwości 50 Hz,  $\omega = 314 \text{ rad/s}$

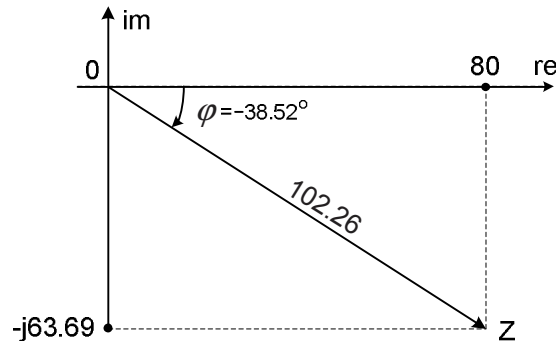
$$I(R - jX_C) = U$$

Wprowadzamy oznaczenie:



$Z = R - jX_C = 80 - j63.69 = 102.26e^{-j38.52^\circ} \Omega$ . jest to impedancja zespolona, zilustrowana na rys. 2.2c, gdzie

$$\arctg\left(-\frac{X_C}{R}\right) = \arctg(-0.796) \quad \text{stąd} \quad \varphi = -38.52^\circ$$



**Rys. 3.2c**

Stąd zespolona wartość prądu

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{230e^{j0^\circ}}{102.26e^{-j38.52^\circ}} = 2.25e^{j38.52^\circ} = 1.85 + j1.28 \text{ A}$$

Amperomierz wskaże wartość skuteczną prądu, która jest równa modułowi wartości zespolonej.

$$I_{AMP} = 2.25 \text{ A}$$

Napięcie na kondensatorze

$$U_C = I \cdot (-jX_C) = 2.25e^{j38.52^\circ} \cdot (-j63.69) = 2.25e^{j38.52^\circ} \cdot 63.69e^{-j90^\circ} = 143.3e^{-j51.48^\circ} \text{ V}$$

Woltomierz  $V_C$  wskaże wartość skuteczną napięcia, która jest równa modułowi wartości zespolonej.

$$U_{VC} = 143.3 \text{ V}$$

Napięcie na rezystancji

$$U_R = I \cdot R = 2.25e^{j38.52^\circ} \cdot 80 = 180e^{j38.52^\circ} \text{ V}$$

Woltomierz  $V_R$  wskaże wartość skuteczną napięcia, która jest równa modułowi wartości zespolonej

$$U_{VR} = 180 \text{ V}$$

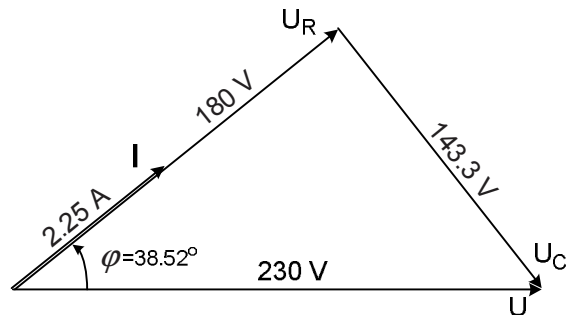
Znając wartość skuteczną prądu i wartość skuteczną napięcia zasilającego obliczymy moc pozorną.

$$|S| = |U| \cdot |I| = 230 \cdot 2.25 = 517.5 \text{ VA}$$

Moc pozorna zespolona

$$S = P + jQ = U \cdot I^* = 230 \cdot 2.25e^{-j38.52^\circ} = 517.5[\cos(-38.52^\circ) + j\sin(-38.52^\circ)] = (404.69 - j322.4) \text{ VA}$$

Moc czynna  $P = 404.69 \text{ W}$ , moc bierna  $Q = -322.4 \text{ var}$ , (ujemna – charakter pojemnościowy)



**Rys. 3.2d.** Wykres wektorowy

Obliczamy prąd dla częstotliwości 60 Hz,  $\omega = 377 \text{ rad/s}$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{377 \cdot 50 \cdot 10^{-6}} = 53.05 \, \Omega$$

$$Z = R - jX_C = 80 - j53.05 = 95.99 e^{-j33.55^\circ}$$

Stąd

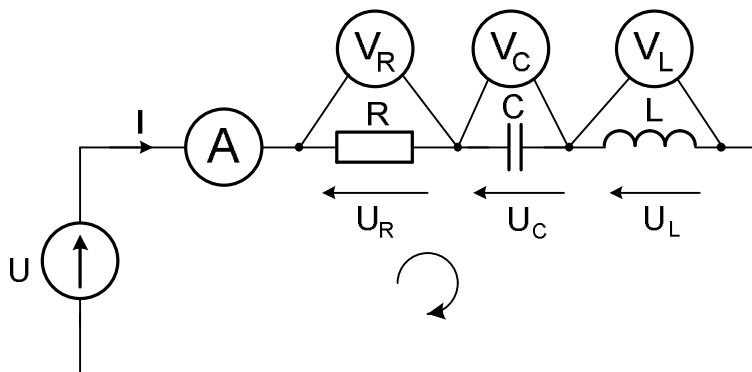
$$I = \frac{U}{Z} = \frac{230 e^{j0^\circ}}{95.99 e^{-j33.55^\circ}} = 2.4 e^{j33.55^\circ}$$

Dla częstotliwości 60 Hz amperomierz wskaże  $I_{AMP} = 2.4 \text{ A}$ .

Wartość prądu wzrośnie ponieważ reaktancja pojemnościowa zmaleje (rys. 3.2b)

**Zad. 3.3.** Dwójnik RCL, jak na rys. 3.3a,  $R = 40 \, \Omega$ ,  $C = 20 \, \mu\text{F}$ ,  $L = 0.2 \text{ H}$  włączono do źródła o napięciu skutecznym  $U = 200 \text{ V}$ . Obliczyć prąd, napięcie na rezystorze, kondensatorze i cewce oraz moc czynną, bierną i pozorną, dla trzech pulsacji:

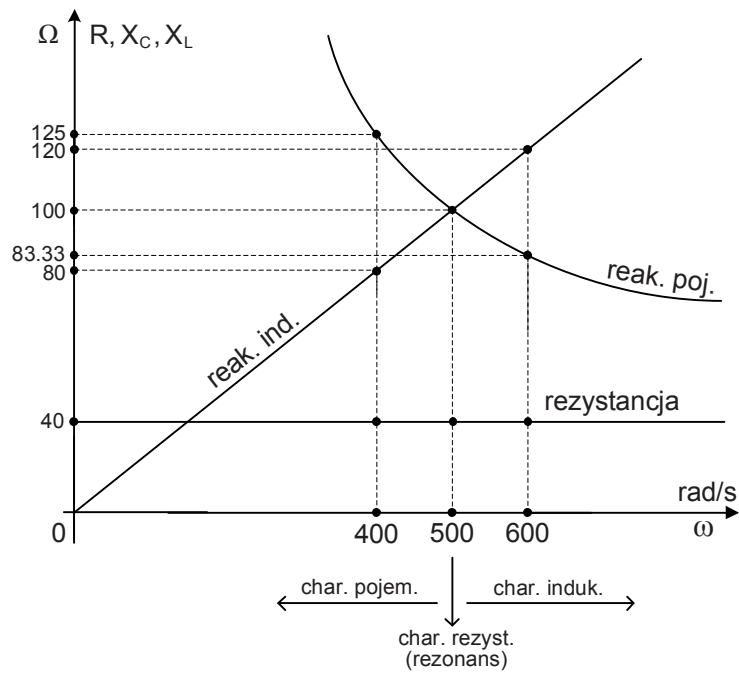
1.  $\omega = 400 \text{ rad/s}$ , 2.  $\omega = 500 \text{ rad/s}$ , 3.  $\omega = 600 \text{ rad/s}$ . Narysować wykresy wektorowe.



**Rys. 3.3a**

## Rozwiązanie

W obwodzie są trzy elementy połączone szeregowo. Rezystancja i dwa elementy reaktancyjne cewka i kondensator. Rezystancja ma wartość stałą w funkcji częstotliwości, natomiast wartość reaktancji pojemnościowej oraz reaktancji indukcyjnej zależy od częstotliwości źródła wymuszającego. Przedstawiono to na rys. 3.3b.



Rys. 3.3b

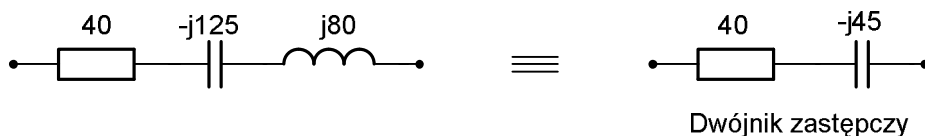
1. Dla pulsacji  $\omega = 400 \text{ rad/s}$ .

$$X_L = \omega L = 400 \cdot 0.2 = 80 \, \Omega.$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{400 \cdot 20 \cdot 10^{-6}} = 125 \, \Omega$$

Impedancja zespolona, schemat rys. 3.3c

$$Z = R + jX_L - jX_C = 40 + j80 - j125 = 40 - j45 = 60.2e^{-j48.37^\circ} \, \Omega$$



Rys. 3.3c

Zespolona wartość prądu.

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{200e^{j0}}{60.2e^{-j48.37^\circ}} = 3.32e^{j48.37^\circ} \text{ A} \rightarrow \text{charakter pojemnościowy.}$$

Amperomierz wskaże wartość skuteczną 3.32 A  
stąd:

$$U_R = I \cdot R = 3.32e^{j48.37^\circ} \cdot 40 = 132.8e^{j48.37^\circ} \text{ V}$$

Woltomierz  $V_R$  wskaże wartość skuteczną 132.8 V

$$U_C = I \cdot (-jX_C) = 3.32e^{j48.37^\circ} \cdot (-j125) = 3.32e^{j48.37^\circ} \cdot 125e^{-j90^\circ} = 415e^{-j41.63^\circ} \text{ V}$$

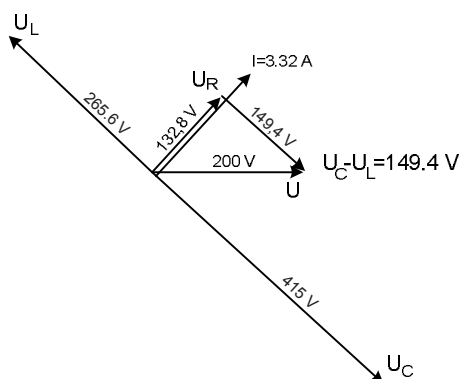
Woltomierz  $V_C$  wskaże wartość skuteczną 415 V

$$U_L = I \cdot jX_L = 3.32e^{j48.37^\circ} \cdot j80 = 3.32e^{j48.37^\circ} \cdot 80e^{j90^\circ} = 265.6e^{j138.37^\circ} \text{ V}$$

Woltomierz  $V_L$  wskaże wartość skuteczną 265.6 V

Moc pozorna zespolona.

$$S = P + jQ = U \cdot I^* = 200e^{j0} \cdot 3.32e^{-j48.37^\circ} = 664[(\cos(-48.37) + j\sin(-48.37))] = \\ = (441.1 - j496.3) \text{ VA}, \quad \rightarrow \quad |S| = 664 \text{ VA}, \quad P = 441.1 \text{ W}, \quad Q = -496.3 \text{ var}.$$



**Rys. 3.3d.** Wykres wektorowy dla  $\omega = 400 \text{ rad/s}$ .

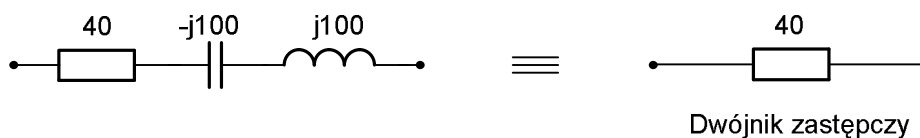
2. Dla pulsacji  $\omega = 500 \text{ rad/s}$ .

$$X_L = \omega L = 500 \cdot 0.2 = 100 \Omega.$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{500 \cdot 20 \cdot 10^{-6}} = 100 \Omega.$$

Impedancja zespolona, schemat rys.2.3e

$$Z = R + jX_L - jX_C = 40 + j100 - j100 = 40 \Omega$$



**Rys. 3.3e.**

Zespolona wartość prądu.

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{200e^{j0}}{40} = 5e^{j0} \text{ A} \quad \rightarrow \quad \text{charakter rezystancyjny (zjawisko rezonansu napięć)}$$

Amperomierz wskaże wartość skuteczną 5 A

$$U_R = I \cdot R = 5e^{j0} \cdot 40 = 200e^{j0} \text{ V}$$

Woltomierz  $V_R$  wskaże wartość skuteczną 200 V.

$$U_C = I \cdot (-jX_C) = 5e^{j0} \cdot (-j100) = 5e^{j0} \cdot 100e^{-j90} = 500e^{-j90} \text{ V}$$

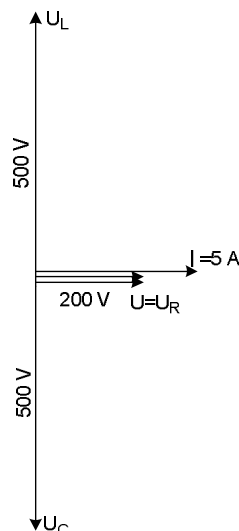
Woltomierz  $V_C$  wskaże wartość skuteczną 500 V.

$$U_L = I \cdot jX_L = 5e^{j0} \cdot j100 = 5e^{j0} \cdot 100e^{j90} = 500e^{j90} \text{ V}$$

Woltomierz  $V_L$  wskaże wartość skuteczną 500 V

Moc pozorna zespolona

$$S = P + jQ = U \cdot I^* = 200 \cdot 5 = 1000 \text{ VA}. \quad \rightarrow \quad |S| = 1000 \text{ VA}, \quad P = 1000 \text{ W}, \quad Q = 0$$



**Rys. 3.3f.** Wykres wektorowy dla  $\omega = 500 \text{ rad/s}$ .

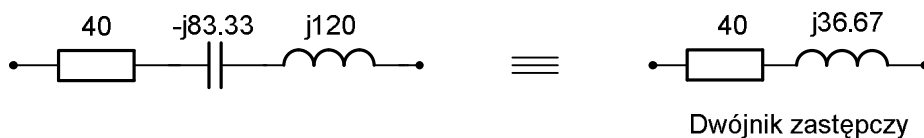
3. Dla pulsacji  $\omega = 600 \text{ rad/s}$ .

$$X_L = \omega L = 600 \cdot 0.2 = 120 \, \Omega.$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{600 \cdot 20 \cdot 10^{-6}} = 83.33 \, \Omega$$

Impedancja zespolona, schemat rys. 2.3g

$$Z = R + jX_L - jX_C = 40 + j120 - 83.33 = 40 + j36.67 = 54.26e^{j42.51^\circ} \, \Omega$$



**Rys. 3.3g.**

Zespolona wartość prądu.

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{200e^{j0}}{54.26e^{j42.51^\circ}} = 3.68e^{-j42.51^\circ} \text{ A} \rightarrow \text{charakter indukcyjny.}$$

Amperomierz wskaże wartość skuteczną 3.68 A.

Stąd.

$$U_R = I \cdot R = 3.68e^{-j42.51^\circ} \cdot 40 = 147.2e^{-j42.51^\circ} \text{ V}$$

Woltomierz  $V_R$  wskaże wartość skuteczną 147.2 V

$$U_C = I \cdot (-jX_C) = 3.68e^{-j42.51^\circ} \cdot (-j83.33) = 3.68e^{-j42.51^\circ} \cdot 83.33e^{-j90^\circ} = 306.65e^{-j132.51^\circ} \text{ V}$$

Woltomierz  $V_C$  wskaże wartość skuteczną 306.65 V

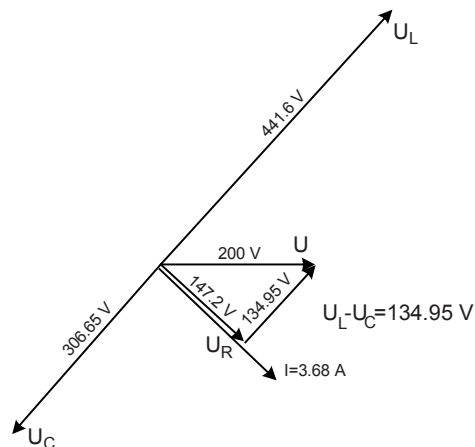
$$U_L = I \cdot jX_L = 3.68e^{-j42.51^\circ} \cdot j120 = 3.68e^{-j42.51^\circ} \cdot 120e^{j90^\circ} = 441.6e^{j47.49^\circ}$$

Woltomierz  $V_L$  wskaże wartość skuteczną 441.6 V

Moc pozorna zespolona.

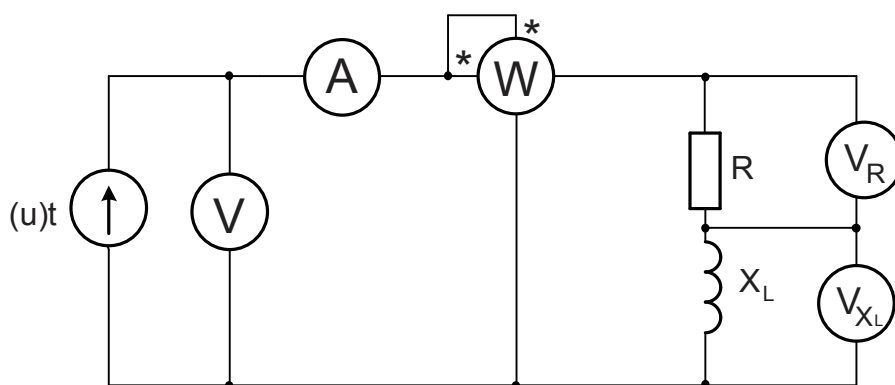
$$S = P + jQ = U \cdot I^* = 200e^{j0} \cdot 3.68e^{j42.51^\circ} = 736(\cos 42.51 + j \sin 42.51) = 542.55 + j497.32$$

$$\rightarrow |S| = 736 \text{ VA}, \quad P = 542.55 \text{ W}, \quad Q = 497.32 \text{ var.}$$



**Rys. 3.3h.** Wykres wektorowy dla  $\omega = 600 \text{ rad/s}$ .

**Zad. 3.4.** W obwodzie jak na rys. 3.4a, przyrządy wskazują: amperomierz  $I = 2 \text{ A}$ , woltomierz  $U = 100 \text{ V}$ , watomierz  $P = 160 \text{ W}$ . Obliczyć wartość rezystancji  $R$ , wartość reaktancji  $X_L$ , oraz napięcia na tych elementach.



**Rys. 3.4a**

Zadanie to można rozwiązać na kilka sposobów, które zostaną przedstawione:

1. Ze wskazania watomierza możemy obliczyć bezpośrednio wartość rezystancji, ponieważ moc czynna wydzieli się na rezystancji w postaci ciepła

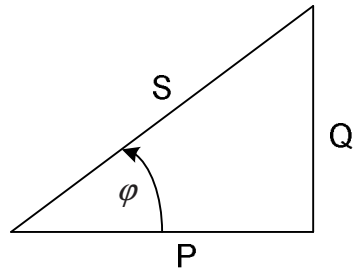
$$P = RI^2 \quad \text{stąd} \quad R = \frac{P}{I^2} = 40 \, \Omega$$

Znając wskazanie woltomierza i amperomierza możemy obliczyć moc pozorną

$$|S| = |U||I| = 100 \cdot 2 = 200 \text{ VA}$$

Co dalej pozwoli obliczyć moc bierną z zależności

$$S^2 = P^2 + Q^2 \quad \text{stąd} \quad Q = \sqrt{S^2 - P^2} = 120 \text{ var}$$



**Rys. 3.4b**

Moc bierna zostanie zgromadzona w indukcyjności w postaci energii pola magnetycznego

$$Q = X_L I^2 \quad \text{stąd} \quad X_L = \frac{Q}{I^2} = 30 \, \Omega$$

2. Znając wskazanie woltomierza (moduł napięcia) oraz wskazanie amperomierza (moduł prądu), możemy obliczyć moduł impedancji  $Z$ .

$$|Z| = \frac{|U|}{|I|} = 50 \, \Omega, \quad \text{znając z poprzedniego } R = 40 \, \Omega$$

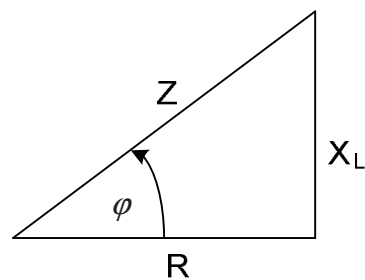
oraz zależność

$$Z^2 = R^2 + X_L^2 \quad \text{stąd} \quad X_L = \sqrt{Z^2 - R^2} = 30 \, \Omega$$

3. Znając wskazanie watomierza i obliczoną wartość mocy pozornej  $S$ , możemy obliczyć  $\cos \varphi$ .

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} = 0.8 \quad \text{stąd} \quad \sin \varphi = 0.6$$

$$R = \cos \varphi |Z| = 40 \, \Omega \quad X_L = \sin \varphi |Z| = 30 \, \Omega$$



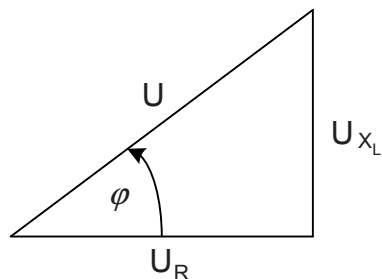
**Rys. 3.4c**

4. Znając wartość rezystancji  $R$  (obliczoną ze wskazań watomierza), możemy obliczyć napięcie na tej rezystancji

$$|U_R| = R |I| = 80 \, \text{V}$$

$$\text{z zależności} \quad U^2 = U_R^2 + U_{X_L}^2 \quad \text{stąd} \quad |U_{X_L}| = \sqrt{U^2 - U_R^2} = 60 \, \text{V}$$

oraz  $X_L = \frac{|U_{X_L}|}{|I|} = 30 \Omega$

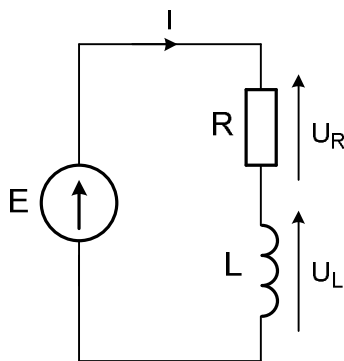


**Rys. 3.4d**

Wskazanie  $V_R = 80 \text{ V}$ , wskazanie  $V_{X_L} = 60 \text{ V}$ .

**Zad. 3.5.** Dla obwodu jak na rys. 3.5a, obliczyć  $i(t)$ ,  $u_R(t)$ ,  $u_L(t)$  i  $p(t)$ .

$$e(t) = 200 \sin(1000t - \frac{\pi}{2}), \quad R = 100 \Omega, \quad L = 0.1 \text{ H}$$



**Rys. 3.5a**

R o z w i ą z a n i e

Wartość skuteczna zespolona napięcia

$$U = \frac{200}{\sqrt{2}} e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j141 \text{ V}$$

Wartość zespolona impedancji

$$X_L = \omega L = 100 \Omega, \quad Z = R + jX_L = 100 + j100 \Omega$$

Wartość skuteczna zespolona prądu

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{-j141}{100 + j100} = \frac{-j141(100 - j100)}{(100 + j100)(100 - j100)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 - j) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}e^{j\frac{5}{4}\pi} = e^{j\frac{5}{4}\pi} \text{ A}$$

Wartość czasowa prądu

$$i(t) = \sqrt{2}|I|\sin(\omega t + \psi_i) = \sqrt{2}\sin(1000t + \frac{5}{4}\pi) \text{ A}$$

Wartość skuteczna zespolona napięcia na indukcyjności

$$U_L = I \cdot jX_L = e^{j\frac{5}{4}\pi} \cdot j100 = e^{j\frac{5}{4}} \cdot 100e^{j\frac{1}{2}\pi} = 100e^{j\frac{7}{4}\pi} \quad \text{lub} \quad U_L = 100e^{-j\frac{1}{4}\pi} \text{ V}$$

Wartość czasowa napięcia na indukcyjności



$$u_L(t) = \sqrt{2}|U_L|\sin(1000t + \psi_{U_L}) = 100\sqrt{2}\sin(1000t - \frac{1}{4}\pi) \text{ V}$$

Wartość skuteczna zespolona napięcia na rezystancji

$$U_R = I \cdot R = e^{j\frac{5}{4}\pi} \cdot 100 = 100e^{j\frac{5}{4}\pi} \text{ V}$$

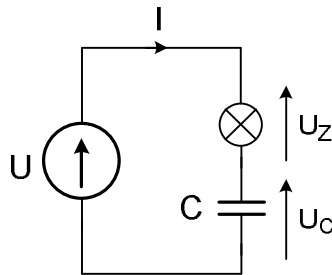
Wartość czasowa napięcia na rezystancji

$$u_R(t) = \sqrt{2}|U_R|\sin(1000t + \psi_{U_R}) = 100\sqrt{2}\sin(1000t + \frac{5}{4}\pi) \text{ V}$$

Wartość mocy chwilowej

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = [200\sin(1000t - \frac{\pi}{2})] \cdot [\sqrt{2}\sin(1000t + \frac{5}{4}\pi)] = 100 + 100\sqrt{2}\sin\left(2000t + \frac{\pi}{4}\right) \text{ VA}$$

**Zad. 3.6.** Obliczyć wartość kondensatora pozwalającego włączyć szeregowo z nim żarówkę 115 V/60 W, do sieci  $u(t) = 230\sqrt{2}\sin 314t$  (rys. 3.6a). Obliczyć moc pozorną, bierną oraz  $\cos\varphi$ . Narysować wykres wektorowy.



**Rys. 3.6a**

**R o z w i ą z a n i e**

Wartość skuteczna napięcia żarówki

$$|U_Z| = 115 \text{ V}$$

Wartość skuteczna napięcia zasilającego  $|U| = 230 \text{ V}$

Żarówka jest rezystorem, którego wartość obliczymy z zależności

$$P = \frac{U_Z^2}{R_Z} \rightarrow R_Z = \frac{U_Z^2}{P} = \frac{115^2}{60} = 220.4 \Omega$$

Obciążenie stanowi dwójnik RC, stąd zależność napięć

$$U^2 = U_C^2 + U_Z^2$$

$$|U_C| = \sqrt{U^2 - U_Z^2} = \sqrt{230^2 - 115^2} = 199.18 \text{ V}$$

Prąd płynący przez żarówkę i kondensator

$$|I| = \frac{|U_Z|}{R_Z} = \frac{115}{220.4} = 0.52 \text{ A} \quad \text{lub bezpośrednio z mocy} \quad |I| = \frac{P}{|U_Z|} = \frac{60}{115} = 0.52 \text{ A}$$

Wartość reaktancji kondensatora

$$X_C = \frac{|U_C|}{|I|} = \frac{199.18}{0.52} = 383 \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} \rightarrow C = \frac{1}{X_C \cdot \omega} = \frac{1}{383 \cdot 314} = 8.31 \mu\text{F}$$

Moc pozorna

$$|S| = |U| \cdot |I| = 230 \cdot 0.52 = 119.6 \text{ VA}$$

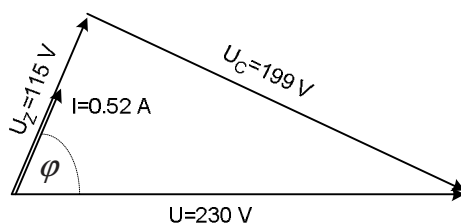
Moc bierna pobierana ze źródła

$$Q = I^2 \cdot X_C = 0.52^2 \cdot 383 = 103.56 \text{ var}$$

Moc pozorna zespolona pobierana ze źródła

$$S = P + jQ = (60 + j103.56) \text{ VA}$$

$$\cos \varphi = \frac{P}{|S|} = \frac{60}{119.6} = 0.5 \rightarrow \varphi = 66.54^\circ$$



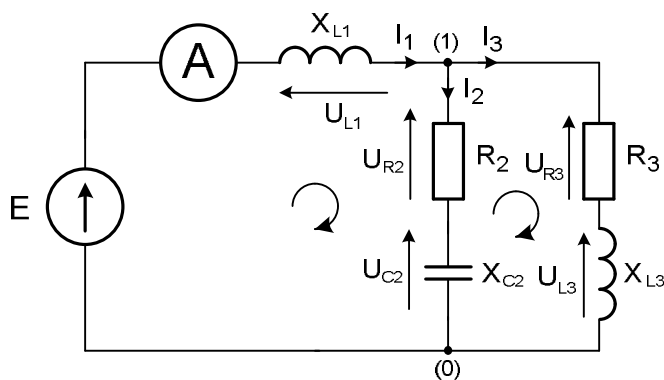
**Rys. 3.6b.** Wykres wektorowy obwodu

**Zad 3.7.** Dla obwodu jak na rys. 3.7a obliczyć : rozpyływ prądów, wskazanie amperomierza oraz narysować wykres wektorowy prądów i napięć. Zadanie rozwiązać:

1. Metodą równań Kirchhoffa.
2. Metodą potencjałów węzłowych.
3. Metodą prądów i napięć gałęziowych. Sprawdzić zasadę Tellegena.

Dane  $e(t) = 240\sqrt{2} \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $X_{L1} = 40 \Omega$ ,  $R_2 = 10 \Omega$ ,  $X_{C2} = 10 \Omega$ ,  $R_3 = 20 \Omega$ ,

$X_{L3} = 20 \Omega$ .



**Rys. 3.7a**

Rozwiązanie

## 1. Metodą równań Kirchhoffa

$$-I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

$$E - U_{L1} - U_{R2} - U_{C2} = 0$$

$$U_{C2} + U_{R2} - U_{R3} - U_{L3} = 0$$

Wstawiając prądy i wartości zespolone impedancji w gałęziach

$$E - I_1 \cdot jX_{L1} - I_2(R_2 - jX_{C2}) = 0$$

$$I_2(R_2 - jX_{C2}) - I_3(R_3 + jX_{L3}) = 0$$

$$I_3 = I_1 - I_2$$

Podstawiając  $I_3$  do drugiego równania napięciowego, oraz wartości liczbowe z zadania mamy

$$j240 - I_1 \cdot j40 - I_2(10 - j10) = 0$$

$$I_2(10 - j10) - I_1(20 + j20) + I_2(20 + j20) = 0$$

Stąd

$$I_1 = (6 + j2) \text{ A}$$

$$I_2 = (4 + j4) \text{ A}$$

$$I_3 = I_1 - I_2 = (2 - j2) \text{ A}$$

Amperomierz wskaże wartość skuteczną prądu  $I_1$ , co odpowiada wartości modułu prądu zespolonego

$$I_1 = 6 + j2 = \sqrt{6^2 + 2^2} e^{j\varphi} = 6.32 e^{j18.43^\circ} \text{ A} \quad \text{gdzie} \quad \arctg \varphi = \frac{2}{6} \rightarrow \varphi = 18.43^\circ$$

Amperomierz wskaże 6.32 A

## 2. Metodą potencjałów węzłowych

Admitancje poszczególnych gałęzi

$$Y_1 = \frac{1}{Z_1} = \frac{1}{j40} = -j \frac{1}{40}$$

$$Y_2 = \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{10 - j10} = \frac{1}{20} + j \frac{1}{20}$$

$$Y_3 = \frac{1}{Z_3} = \frac{1}{20 + j20} = \frac{1}{40} - j \frac{1}{40}$$

Jako węzeł odniesienia (uziemiający) przyjmujemy węzeł (0), równanie potencjałów wypiszemy dla węzła (1)

$$V(Y_1 + Y_2 + Y_3) = E \cdot Y_1$$

podstawiając dane z zadania

$$V \left( -j \frac{1}{40} + \frac{1}{20} + j \frac{1}{20} + \frac{1}{40} - j \frac{1}{40} \right) = j240 \frac{1}{j40}$$

$$\text{stąd} \quad V = 80 \text{ V}$$

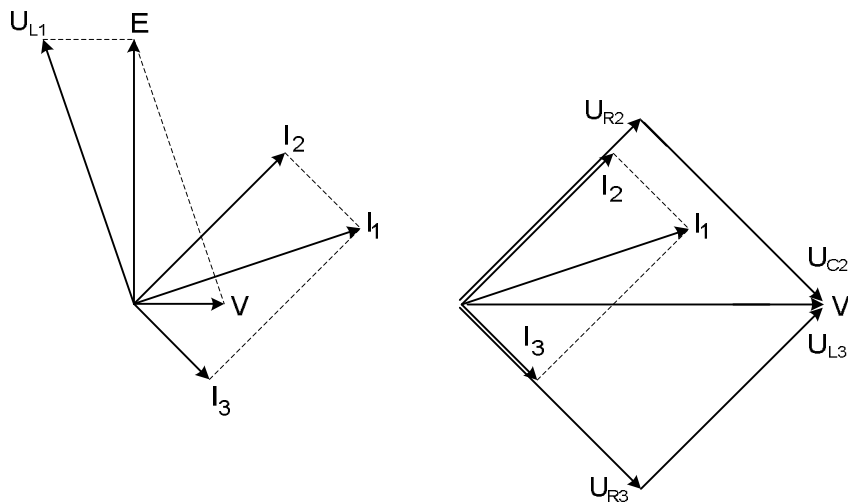
prądy w gałęziach

$$I_2 = V \cdot Y_2 = 80 \left( \frac{1}{20} + j \frac{1}{20} \right) = (4 + j4) \text{ A}$$

$$I_3 = V \cdot Y_3 = 80 \left( \frac{1}{40} - j \frac{1}{40} \right) = (2 - j2) \text{ A}$$

$$I_1 = I_2 + I_3 = (6 + j2) \text{ A}$$

Wykres wektorowy przedstawiono na rys. 3.7b



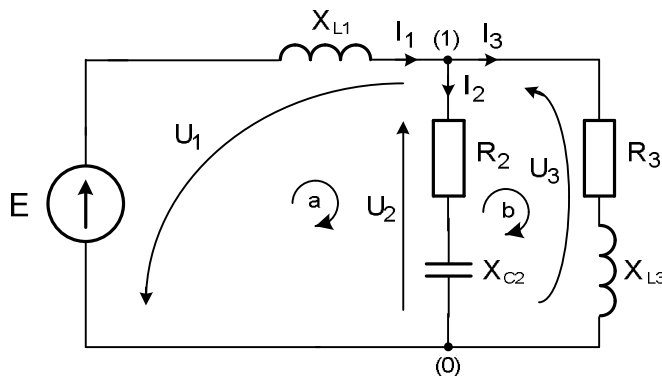
**Rys. 3.7b**

Na wykresie, rys. 3.7b, po stronie prawej napięcie  $V$  powiększono w celu przejrzystego narysowania pozostałych napięć na dwójniku  $RC$  i  $RL$ .

### 3. Metodą prądów i napięć gałęziowych

ilość węzłów  $n = 2$ , ilość węzłów niezależnych  $n - 1 = 1$

ilość gałęzi  $b = 3$ , ilość oczek niezależnych  $b - n + 1 = 2$



**Rys. 3.7c**

Prądowe prawo Kirchhoffa:

$$(2) \quad -I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

Napięciowe prawo Kirchhoffa:

a.  $-U_1 - U_2 = 0$

b.  $U_2 - U_3 = 0$

Równania gałęziowe

$$U_1 = I_1 \cdot jX_{L1} - E$$

$$U_2 = I_2(R_2 - jX_{C2})$$

$$U_3 = I_3(R_3 + jX_{L3})$$

Po wstawieniu równań gałęziowych do napięciowego prawa Kirchhoffa otrzymujemy:

$$U_1 = -80 \quad I_1 = 6 + j2$$

$$U_2 = 80 \quad I_2 = 4 + j4$$

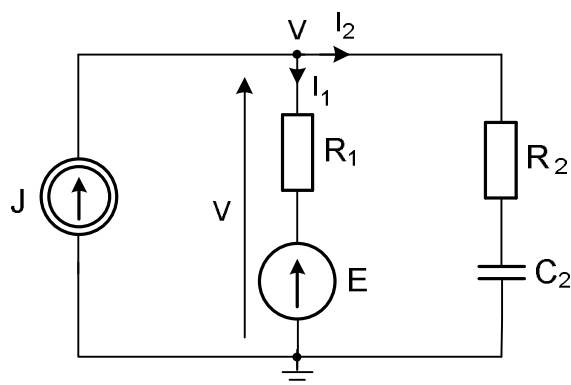
$$U_3 = 80 \quad I_3 = 2 - j2$$

Zasada Tellegena

$$P = U_1 \cdot I_1^* + U_2 \cdot I_2^* + U_3 \cdot I_3^* = -80(6 - j2) + 80(4 - j4) + 80(2 + j2) = 0$$

**Zad. 3.8.** Dla obwodu jak na rys. 3.8a obliczyć rozptyw prądów metodą potencjałów węzłowych. Narysować wykres wektorowy. W celu sprawdzenia poprawności rozwiązania prąd  $I_2$  obliczyć z twierdzenia Thevenina.

Dane:  $E = j120 \text{ V}$ ,  $j = 4\sqrt{2} \cos \omega t \text{ A}$ ,  $R_1 = 20 \Omega$ ,  $R_2 = X_{C2} = 10 \Omega$



**Rys. 3.8a**

**R o z w i ą z a n i e:**

1. Metodą potencjałów węzłowych.

$$V \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 - jX_{C2}} \right) = \frac{E}{R_1} + J$$

$$V \left( \frac{1}{20} + \frac{1}{10 - j10} \right) = \frac{j120}{20} + j4$$

$$V = (40 + j80) \text{ V}$$

$$I_2 = \frac{V}{R_2 - jX_{C2}} = (-2 + j6) \text{ A}$$

Z równania  $V - I_1 \cdot R_1 - E = 0$  obliczymy prąd  $I_1$

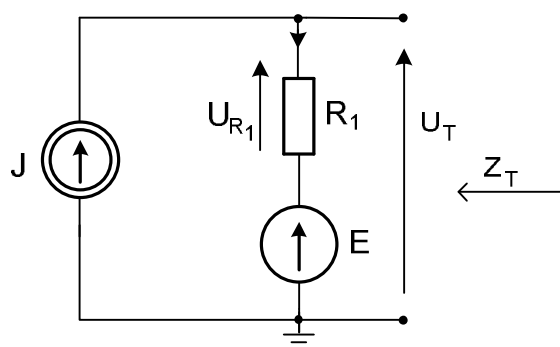
$$I_1 = \frac{V - E}{R_1} = (2 - j2) \text{ A}$$

Wynik można sprawdzić z prądowego prawa Kirchhoffa dla węzła V

$$J = I_1 + I_2$$

## 2. Z twierdzenia Thevenina

Prąd  $I_2$  obliczamy z obwodu przedstawionego na rys 3.8b

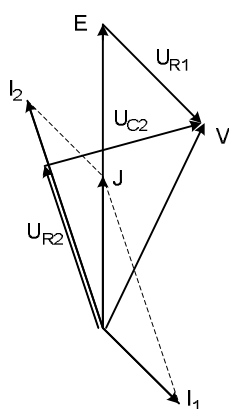


**Rys. 3.8b**

$$Z_T = R_1 = 20 \, \Omega \quad (\text{zwarte źródło napięciowe, rozwarte prądowe})$$

$$U_T = E + R_1 J = j120 + 20 \cdot j4 = j200 \, \text{V}$$

$$I_2 = \frac{U_T}{Z_T + R_2 - jX_{C2}} = \frac{j200}{20 + 10 - j10} = (-2 + j6) \, \text{A}$$

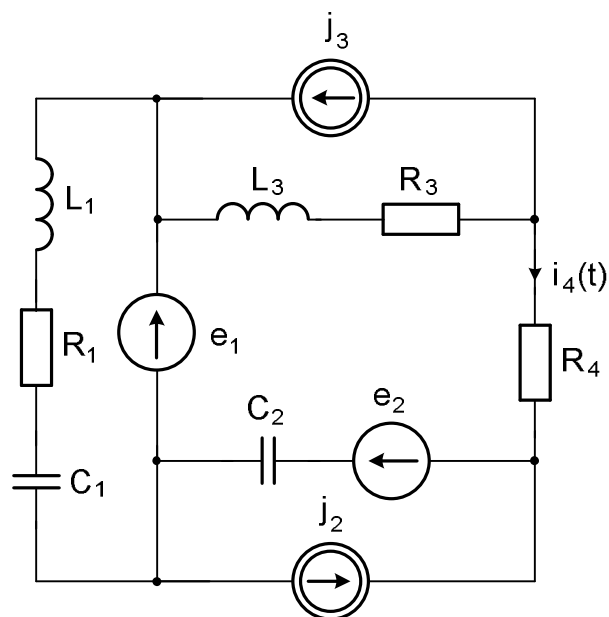


**Rys. 3.8c** wykres wektorowy

**Zad. 3.9.** W obwodzie jak na rys 3.9a obliczyć wartość czasową  $i_4(t)$  metodą Thevenina.

$$e_1(t) = 390\sqrt{2} \sin 100t \, \text{V}, \quad e_2(t) = 50\sqrt{2} \sin\left(100t + \frac{\pi}{2}\right) \text{V}, \quad j_2(t) = 2\sqrt{2} \sin\left(100t + \frac{\pi}{2}\right) \text{A}.$$

$$j_3(t) = 5\sqrt{2} \sin 100t \, \text{A}, \quad R_1 = 20 \, \Omega, \quad R_3 = 10 \, \Omega, \quad R_4 = 30 \, \Omega, \quad L_1 = L_3 = 0.1 \text{H}, \quad C_1 = C_2 = 0.2 \text{mF}$$



**Rys. 3.9a**

### R o z w i a z a n i e

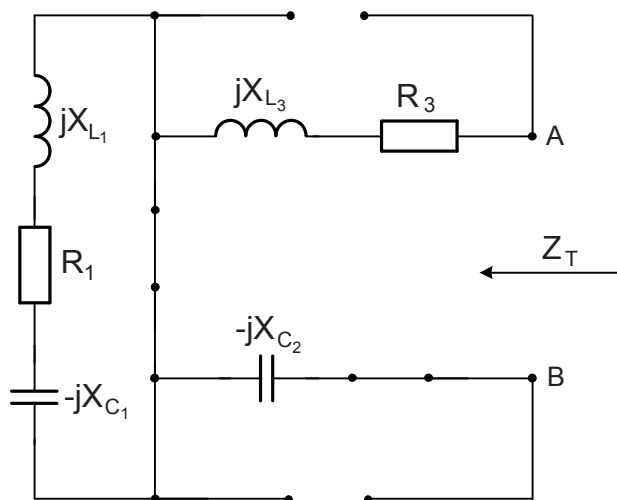
Wartości zespolone źródeł, i elementów reaktancyjnych

$$E_1 = 390 \text{ V}, \quad E_2 = j50 \text{ V}, \quad J_2 = j2 \text{ A}, \quad J_3 = 5 \text{ A}.$$

$$\omega = 100 \text{ r/s}$$

$$\text{stąd} \quad X_{L1} = X_{L3} = \omega L_1 = \omega L_2 = 10 \Omega, \quad X_{C1} = X_{C2} = \frac{1}{\omega C_1} = \frac{1}{\omega C_2} = 50 \Omega$$

Impedancje Thevenena obliczymy po zwarcu źródeł napięcia i rozwarciu źródeł prądu, przedstawiono to na rys. 3.9b.

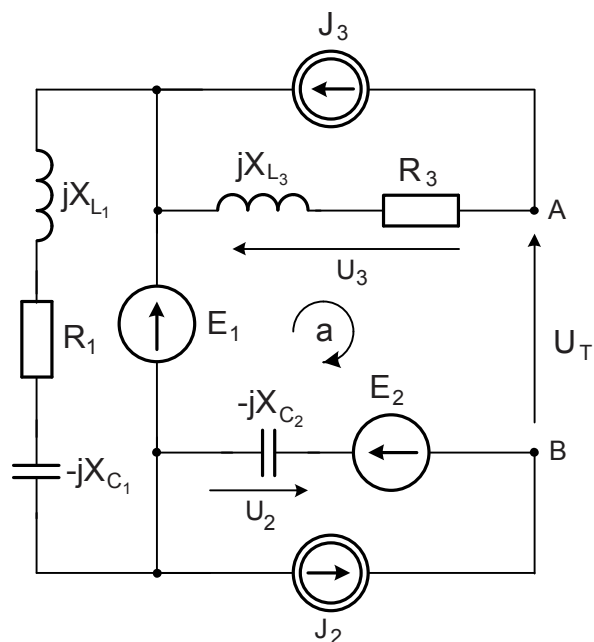


**Rys. 3.9b**

$$Z_T = R_3 + jX_{L3} - jX_{C2} = 10 + j10 - j50 = 10 - j40$$

Napięcie Thevenina obliczymy z obwodu przedstawionego na rys. 3.9c

W obwodzie tym występuje idealne źródło napięcia  $E_1$ , powoduje to, że elementy  $L_1, C_1, R_1$  nie mają wpływu na pozostałe prądy i napięcia.



**Rys. 3.9c**

Wyłączenie rezystora  $R_4$  spowodowało, że prąd w indukcyjności  $L_3$  jest równy wartości źródła prądowego  $J_3$ , a prąd w kondensatorze  $C_2$  równy jest wartości źródła prądowego  $J_2$

$$U_2 = J_2(-jX_{C_2}) = j2 \cdot (-j50) = 100 \text{ V}$$

$$U_3 = J_3(R_3 + jX_{L_3}) = 5(10 + j10) = 50 + j50 \text{ V}$$

Z napięciowego prawa Kirchhoffa dla oczka „a” mamy:

$$E_2 - U_2 + E_1 - U_3 - U_T = 0$$

stąd

$$U_T = E_2 - U_2 + E_1 - U_3 = j50 - 100 + 390 - (50 + j50) = 240 \text{ V}$$

$$I_4 = \frac{U_T}{Z_T + R_4} = \frac{240}{10 - j40 + 30} = \frac{240}{40 - j40} = 3(1 + j) = 3\sqrt{2}e^{j45^\circ}$$

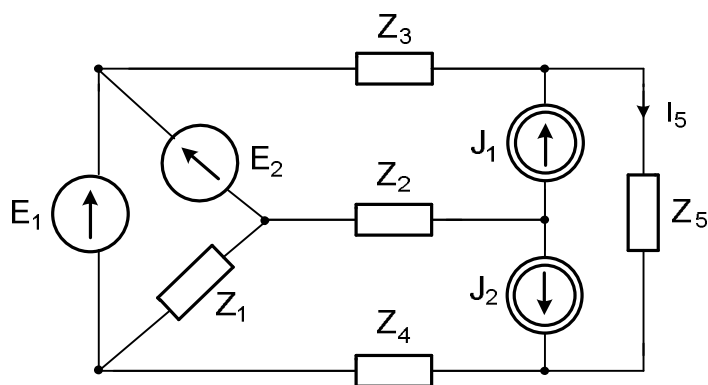
Wartość skuteczna  $|I_4| = 3\sqrt{2}$

Wartość czasowa  $i_4(t) = 6 \sin\left(100t + \frac{\pi}{4}\right)$

**Zad. 3.10.** W obwodzie jak na rys. 3.10a obliczyć prąd  $I_5$  metodą Thevenina.

Dane:  $E_1 = 26 \text{ V}$ ,  $E_2 = 18 \text{ V}$ ,  $J_1 = 5 \text{ A}$ ,  $J_2 = 2 \text{ A}$ ,  $Z_1 = -j10$ ,  $Z_2 = 4 + j3 \Omega$ ,  $Z_3 = 6 - j8 \Omega$ ,  $Z_4 = 14 + j8 \Omega$ ,  $Z_5 = -j40 \Omega$ .

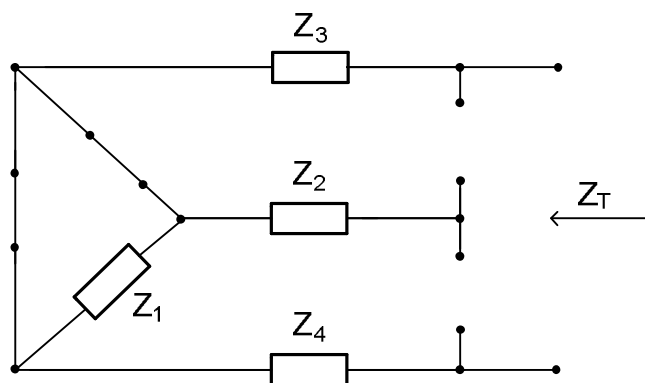




Rys. 3.10a

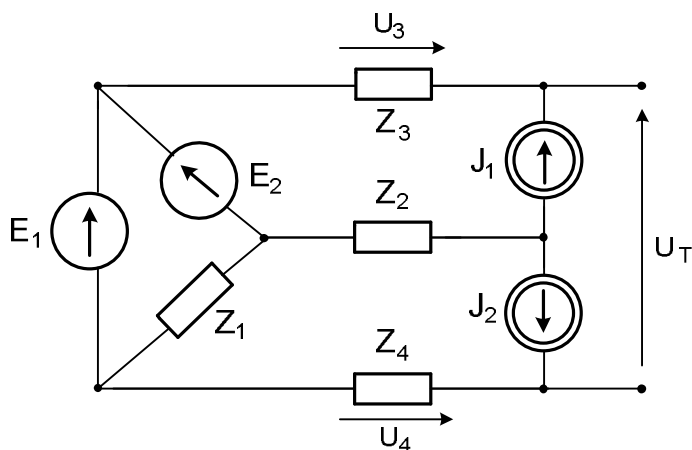
### Rozwiązanie

Impedancję Thevenina obliczymy po odłączeniu  $Z_5$  oraz zwarcia źródeł napięciowych oraz rozwarciu źródeł prądowych, rys. 3.10b



Rys. 3.10b

$$Z_T = Z_3 + Z_4 = 6 - j8 + 14 + j8 = 20$$



Rys. 3.10c

Napięcie Thevenina obliczymy z napięciowego prawa Kirchhoffa, rys. 3.10c. Po odłączeniu rezystancji  $R_5$  źródła prądowe  $J_1$  i  $J_2$  stają się prądami płynącymi przez impedancje, odpowiednio  $Z_3$  i  $Z_4$ . Wybranie sposobu obliczenia napięcia Thevenina jest indywidualne dla

każdego zadania. Należy jednak unikać napięć na źródłach prądu, ponieważ te zależą od pozostałych elementów obwodu i trudniej je wyznaczyć.

$$E_1 + U_3 - U_T - U_4 = 0$$

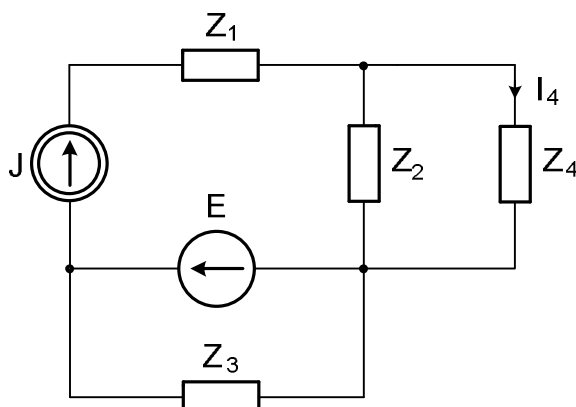
stąd

$$U_T = E_1 + U_3 - U_4 = E_1 + J_1 \cdot Z_3 - J_2 \cdot Z_4 = 26 + 5(6 - j8) - 2(14 + j8) = 28 - j56$$

$$I_5 = \frac{U_T}{Z_T + Z_5} = \frac{28 - j56}{20 - j40} = 1.4 \text{ A}$$

**Zad. 3.11.** Wyznaczyć prąd  $I_4$  korzystając z twierdzenia o zastępczym źródle prądu (Nortona)

$$E = 50 \text{ V}, J = 10 \text{ A}, Z_1 = 2 + j3, Z_2 = 0.5 + j0.5, Z_3 = 2 - j4, Z_4 = 0.5 - j0.5$$



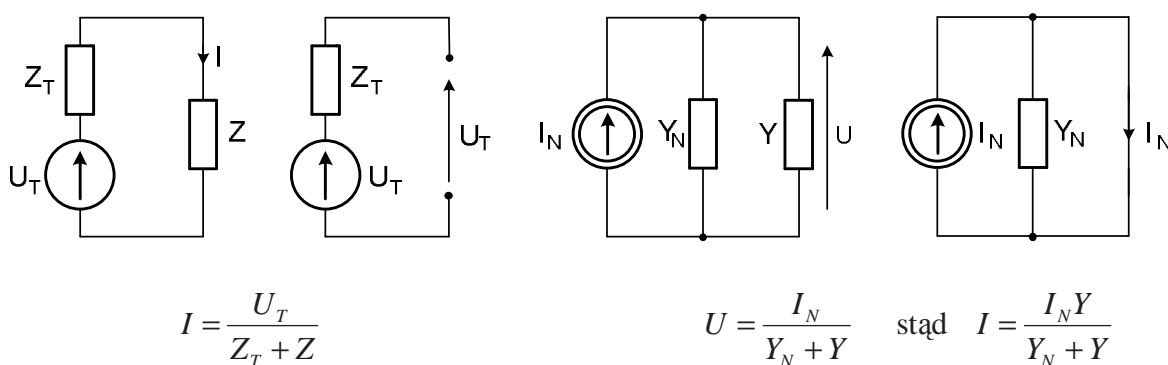
Rys. 3.11a

R o z w i ą z a n i e

Twierdzenie Theveina i twierdzenie Nortona to twierdzenia dualne. Dualizm ten widać wyraźnie jeżeli z twierdzenia Nortona obliczymy napięcie. Znając napięcie prąd obliczymy

z zależności  $I = \frac{U}{Z} = UY$ . Obliczając napięcie, widać łatwość zapamiętania wzorów oraz

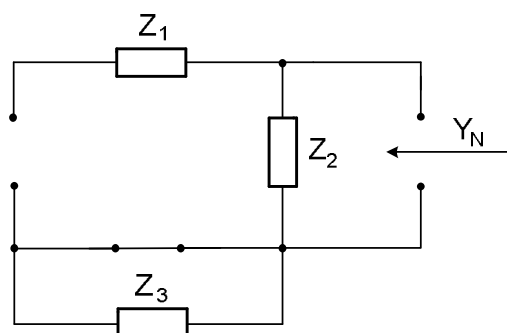
dualizm twierdzenia. Przedstawiono to na rys. 3.11b.



Rys. 3.11b

W literaturze impedancja wewnętrzna (zastępcza) oznaczana jest często jako  $Z_Z$ , a napięcie jałowe przez  $U_Z$ . Tu przyjęto odpowiednio  $Z_T$  i  $U_T$  (od Thevenina).

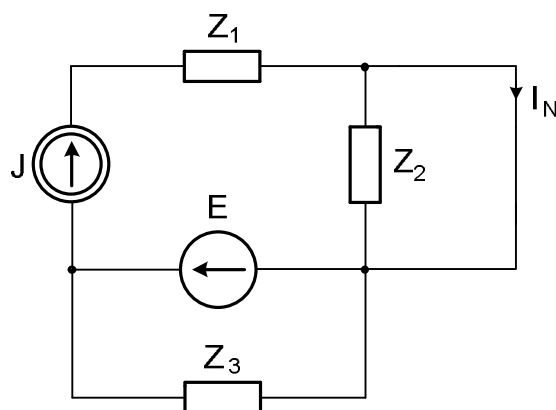
Analogicznie admitancja wewnętrzna (zastępcza) jest oznaczana jako  $Y_Z$ , a prąd zwarciaowy przez  $I_Z$ . Tu przyjęto  $Y_N$  i  $I_N$  (od Nortona)



Rys. 3.11c

Admitancja Nortona

$$Y_N = \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{0.5 + j0.5} = 1 - j$$



Rys. 3.11d

$$I_N = J = 10 \text{ A}$$

Cały prąd źródła prądowego płynie przez zwartą gałąź. Wartość impedancji  $Z_3$  jest dowolna, nie ma wpływu na rozpyływ prądów.

$$Y_4 = \frac{1}{Z_4} = \frac{1}{0.5 - j0.5} = 1 + j$$

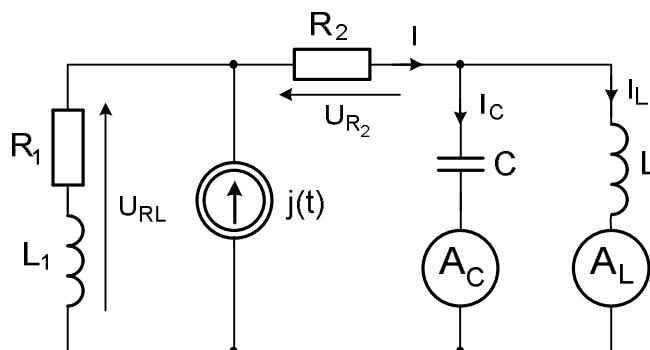
stąd

$$I_4 = \frac{I_N Y_4}{Y_N + Y_4} = \frac{10(1 + j1)}{1 - j + 1 + j1} = 5 + j5 = 5\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$$

**Zad. 3.12.** W obwodzie przedstawionym na rys. 3.12a obliczyć wskazanie amperomierzy.

Narysować wykres wektorowy.  $j(t) = 3\sqrt{2} \cos t$ ,  $R_1 = 30 \Omega$ ,  $R_2 = 60 \Omega$ ,  $X_{L1} = 40 \Omega$ ,

$$X_C = X_L = 15 \Omega.$$



**Rys. 3.12a**

### R o z w i ą z a n i e

Z równości elementów reaktancyjnych,  $X_L = X_C$  wynika, że w obwodzie po stronie prawej jest rezonans prądów.

$$Z_{LC} = \frac{jX_L(-jX_C)}{jX_L - jX_C} = \infty$$

Z tego wynika, że prąd  $I = 0$ , oraz spadek napięcia na rezystorze  $U_{R2} = 0$  (wartość tego rezystora może być dowolna)

Cały prąd źródła  $J$  płynie przez gałąź  $RL$  po stronie lewej.

$$U_{RL} = J(R_1 + jX_{L1}) = j3(30 + j40) = -120 + j90$$

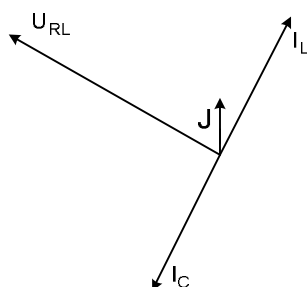
To samo napięcie jest przyłożone do równoległego dwójnika  $LC$ .

$$I_C = \frac{U_{RL}}{-jX_C} = \frac{-120 + j90}{-j15} = -6 - j8$$

stąd wskazanie amperomierza  $A_C = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ A}$

$$I_L = \frac{U_{RL}}{jX_L} = \frac{-120 + j90}{j15} = 6 + j8$$

stąd wskazanie amperomierza  $A_L = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ A}$

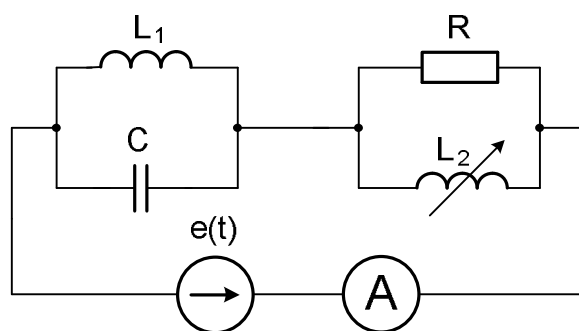


**Rys. 3.12b**

Rysunek 3.12b przedstawia wykres wektorowy. Prądy  $I_L$  i  $I_C$  są przeciwnie skierowane, prostopadłe do  $U_{RL}$  i w sumie są równe zero.

**Zad. 3.13.** Obliczyć wartość indukcyjności  $L_2$ , aby w obwodzie jak na rys. 3.13a wystąpił rezonans napięć. Dla stanu rezonansu obliczyć wskazanie amperomierza. Obliczyć wartości elementów obwodu zastępczego.

$$e(t) = 120\sqrt{2} \sin 10^2 t, \quad L_1 = 0.1 \text{ H}, \quad C = 500 \mu\text{F}, \quad R = 80 \Omega,$$



Rys. 3.13a

### R o z w i ą z a n i e

Wartości reaktancji dla  $\omega = 100 \text{ r/s}$

$$X_{L1} = \omega L_1 = 40 \Omega, \quad X_C = \frac{1}{\omega C} = 20 \Omega.$$

Impedancja złożona jest z dwóch obwodów równoległych,  $L_1 C$  i  $RL_2$ , połączonych szeregowo

$$Z = \frac{jX_{L1}(-jX_C)}{jX_{L1} - jX_C} + \frac{R \cdot jX_{L2}}{R + jX_{L2}} = \frac{j40(-j20)}{j40 - j20} + \frac{80(jX_{L2})}{80 + jX_{L2}} = -j40 + \frac{80(jX_{L2}) \cdot (80 - jX_{L2})}{80^2 + X_{L2}^2} =$$

$$= \frac{80X_{L2}^2}{80^2 + X_{L2}^2} + j\left(\frac{80^2 X_{L2}}{80^2 + X_{L2}^2} - 40\right)$$

Impedancja  $Z = R + jX$

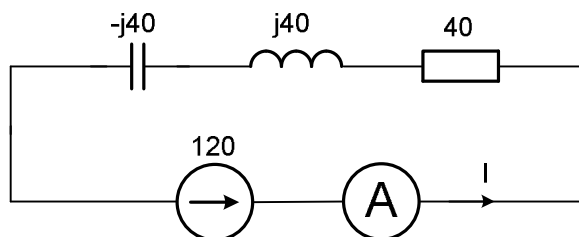
Warunkiem rezonansu jest część urojona  $X = 0$ , oznacza to, że prąd i napięcie w obwodzie są w fazie. Prowadzi to do równania.

$$\left(\frac{80^2 X_{L2}}{80^2 + X_{L2}^2} - 40\right) = 0$$

$$\text{stąd } X_{L2} = 80 \Omega. \quad \rightarrow \quad L_2 = \frac{X_{L2}}{\omega} = 0.08 \text{ H}$$

Znając  $X_{L2}$  możemy obliczyć wartość rezystancji zastępczej

$$R_z = \frac{80X_{L2}^2}{80^2 + X_{L2}^2} = 40 \Omega$$



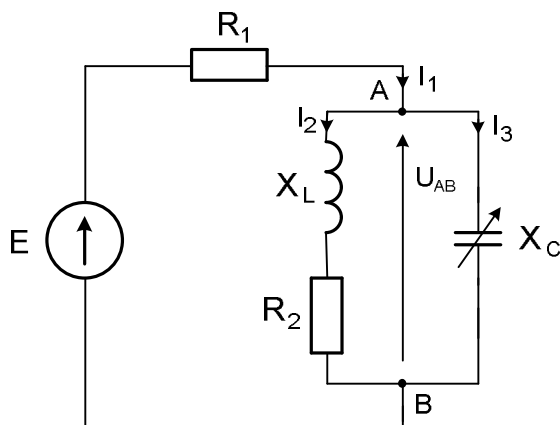
Rys. 3.13b

Schemat zastępczy obwodu dla wartości zespolonych przedstawiono na rys. 3.13b, stąd

$$I = \frac{E}{R} = \frac{120}{40} = 3 \text{ A} \quad (\text{wskazanie amperomierza})$$

Obwód ma charakter rezystancyjny, prąd jest w fazie z napięciem zasilającym.

**Zad. 3.14.** Dla obwodu przedstawionego na rys. 3.14a obliczyć wartość reaktancji  $X_C$ , żeby w obwodzie wystąpił rezonans prądów. Dla stanu rezonansu obliczyć rozpyły prądów oraz narysować wykres wektorowy prądów i napięć. Dane :  $e(t) = 80\sqrt{2} \sin \omega t$ ,  $R_1 = 15 \Omega$ ,  $R_2 = 20 \Omega$ ,  $X_L = 10 \Omega$ . Obliczyć częstotliwość rezonansową oraz wartość kondensatora  $C$  jeżeli w przyjętym układzie wartość indukcyjności  $L$  wynosiłaby  $0.01 \text{ H}$



Rys. 3.14a

### Rozwiązanie

Warunkiem powstania rezonansu prądów (rezonans równoległy) jest  $B = 0$  (susceptancja) gdzie admitancja  $Y_{AB} = G + jB$

admitancja  $Y_{AB} = Y_2 + Y_3$

gdzie  $Y_2 = \frac{1}{R_2 + jX_L}$ ,  $Y_3 = \frac{1}{-jX_C}$

$$Y_{AB} = \frac{1}{R_2 + jX_L} + j\frac{1}{X_C}$$

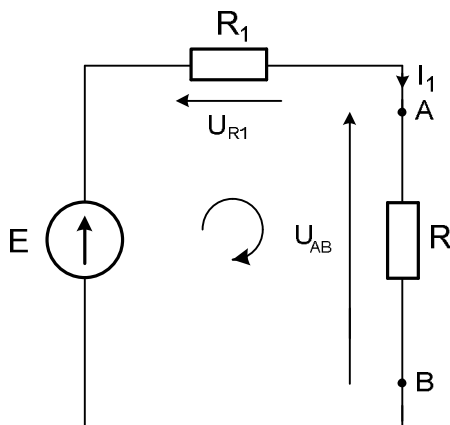
podstawiając dane

$$\begin{aligned} Y_{AB} &= \frac{1}{20 + j10} + j\frac{1}{X_C} = \frac{1}{10(2 + j)} + j\frac{1}{X_C} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1 \cdot (2 - j)}{(2 + j)(2 - j)} + j\frac{1}{X_C} = \\ &= \frac{2}{50} - j\frac{1}{50} + j\frac{1}{X_C} = \frac{1}{25} + j\left(-\frac{1}{50} + \frac{1}{X_C}\right) \\ -\frac{1}{50} + \frac{1}{X_C} &= 0 \end{aligned}$$

stąd  $X_C = 50$

$$G = \frac{1}{25} \text{ S}, \quad \rightarrow \quad R = 25 \Omega$$

Przedstawiony równoległy obwód rezonansowy na zaciskach AB można zastąpić rezystorem o wartości  $25 \Omega$ , przedstawia to rys. 3.14b.



**Rys. 3.14b**

Obliczmy napięcie  $U_{AB}$

$$I_1 = \frac{E}{R_1 + R} = \frac{80}{15 + 25} = 2 \text{ A}$$

$$U_{AB} = I_1 \cdot R = 2 \cdot 25 = 50 \text{ V}$$

Napięcie  $U_{AB}$  jest przyłożone do dwóch gałęzi dwójnika stąd prądy

$$I_2 = \frac{U_{AB}}{R_2 + jX_L} = \frac{50}{20 + j10} = 2 - j$$

$$I_3 = \frac{U_{AB}}{-jX_C} = j \frac{50}{50} = j$$

Dodając prądy  $I_2$  i  $I_3$  otrzymujemy  $I_1$

$$I_1 = I_2 + I_3 = 2$$

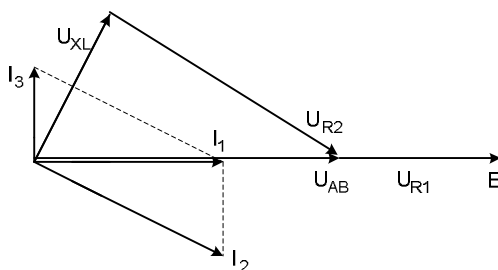
Napięcia na gałęzi  $RL$

$$U_{X_L} = I_2 \cdot jX_L = (2 - j) \cdot j10 = 10 + j20$$

$$U_{R_2} = I_2 \cdot R_2 = (2 - j) \cdot 20 = 40 - j20$$

Napięcie na rezystorze  $U_{R_1} = I_1 \cdot U_{R_1} = 2 \cdot 15 = 30$

Na rys.5c przedstawiono wykres wektorowy.



**Rys. 3.14c**

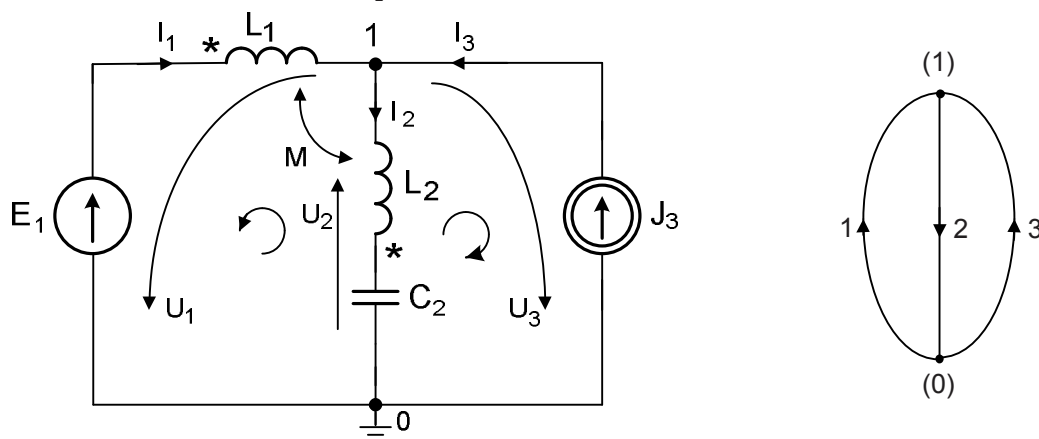
Znając wartość reaktancji  $X_L = 10 \Omega$  możemy obliczyć  $\omega$

$$X_L = \omega L \rightarrow \omega = \frac{X_L}{L} = \frac{10}{0.01} = 10^3 \text{ r/s} \rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{10^3}{2\pi} = 159.2 \text{ Hz}$$

Wartość kondensatora

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \rightarrow C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{10^3 \cdot 50} = 20 \mu\text{F}$$

**Zad. 3.15** Stosując metodę prądów i napięć gałęziowych (rys. 3.15a), obliczyć prądy oraz napięcia gałęziowe. Sprawdzić zasadę Tellegena. Dane:  $E_1 = j60 \text{ V}$ ,  $J_3 = 2 \text{ A}$ ,  $\omega L_1 = 30 \Omega$ ,  $\omega L_2 = 20 \Omega$ ,  $\omega M = 10 \Omega$ ,  $\frac{1}{\omega C_2} = 20 \Omega$ .



**Rys. 3.15a**

**Rozwiązanie:**

ilość węzłów  $n = 2$ , ilość gałęzi  $b = 3$ , ilość oczek niezależnych  $b - n + 1 = 2$

Prądowe prawo Kirchhoffa:

$$(1) \quad -I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

Napięciowe prawo Kirchhoffa:

$$(I) \quad U_1 + U_2 = 0$$

$$(II) \quad U_2 + U_3 = 0$$

Równania gałęziowe:

$$U_1 = j\omega L_1 \cdot I_1 - j\omega M \cdot I_2 - E_1$$

$$U_2 = j\omega L_2 \cdot I_2 - j\omega M \cdot I_1 - j\frac{1}{\omega C_2} \cdot I_2$$

$$I_3 = J_3$$

Po wstawieniu równań gałęziowych do napięciowego prawa Kirchhoffa otrzymujemy:

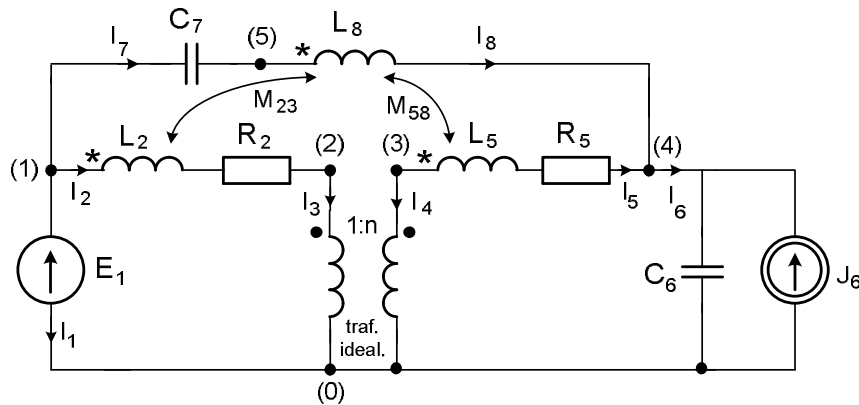
$$\begin{array}{ll} U_1 = j80 \text{ V} & I_1 = 8 \text{ A} \\ U_2 = -j80 \text{ V} & I_2 = 10 \text{ A} \\ U_3 = j80 \text{ V} & I_3 = 2 \text{ A} \end{array}$$



Zasada Tellegena – Moc chwilowa pobierana przez cały obwód, równa sumie mocy pobieranej przez wszystkie gałęzie, w każdej chwili jest równa zero.

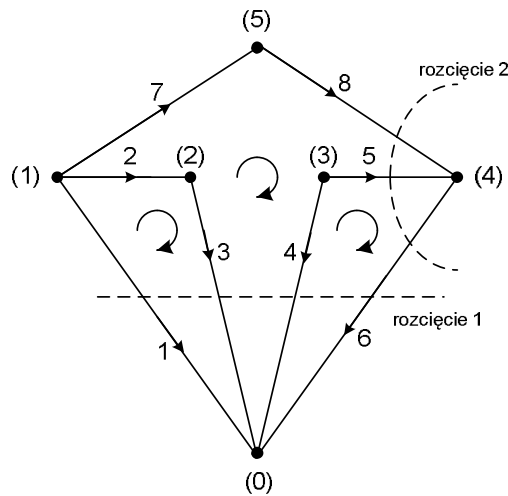
$$P = U_1 \cdot I_1^* + U_2 \cdot I_2^* + U_3 \cdot I_3^* = j80 \cdot 8 - j80 \cdot 10 + j80 \cdot 2 = 0$$

**Zad. 3.16** Dla obwodu jak na rys. 3.16a narysować graf. Narysować dwa dowolne drzewa. Zaznaczyć dwa dowolne rozcięcia. Obliczyć liczbę węzłów niezależnych. Zaznaczyć oczka niezależne (jeden z możliwych układów)



**Rys. 3.16a**

Rozwiązanie

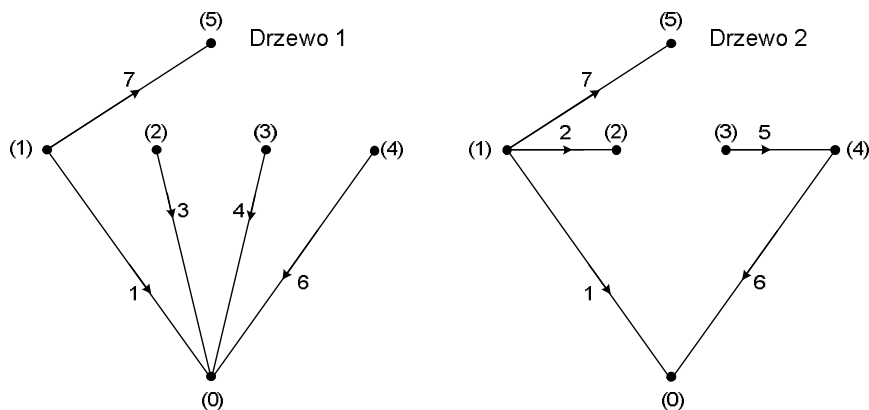


**Rys. 3.16b**

liczba węzłów  $n = 6$ , liczba gałęzi  $b = 8$

liczba węzłów niezależnych  $n - 1 = 5$

liczba oczek niezależnych  $b - n + 1 = 8 - 6 + 1 = 3$

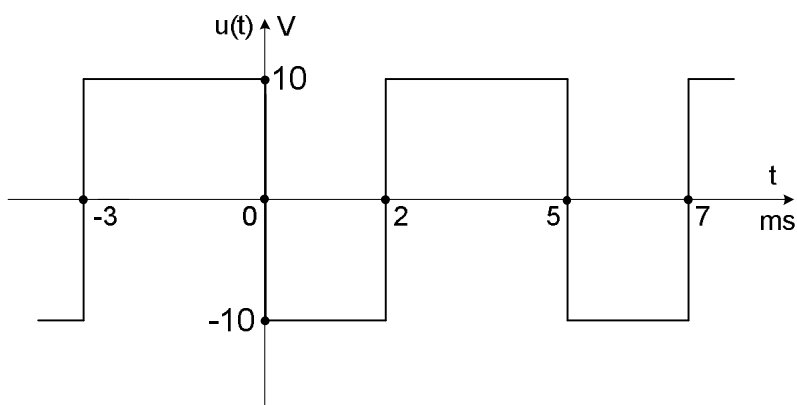


Rys. 3.16c

Przykłady rozcięć: 1,3,4,6. 8,5,6.

Układ oczek niezależnych: (1,2,3), (4,5,6), (3,2,7,8,5,4)

**Zad. 3.17.** Obliczyć wartość skuteczną, oraz wartość średnią cało okresową sygnału okresowego przedstawionego na rys. 3.17a.



Rys. 3.17a

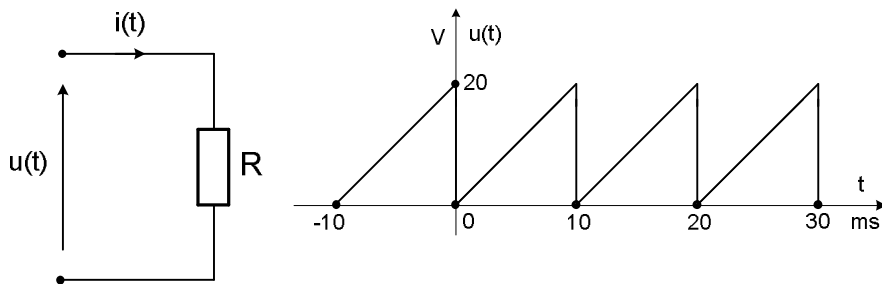
Rozwiązanie

$$T = 5 \text{ ms}$$

$$U_{SR, \text{cal}} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt = \frac{1}{5} \left[ \int_0^2 -20 dt + \int_2^5 20 dt \right] = \frac{20}{5} = 4 \text{ V}$$

$$|U| = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{5} \left[ \int_0^2 400 dt + \int_2^5 400 dt \right]} = 20 \text{ V}$$

**Zad. 3.18.** Obliczyć moc czynną pobieraną przez dwójnik  $R = 5 \text{ k}\Omega$ , przebieg napięcie  $u(t)$  przedstawiono na rys. 3.18a.



**Rys. 3.18a**

Rozwiązanie

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) i(t) dt$$

$$T = 10 \text{ ms},$$

$$u(t) = a \cdot t = \frac{20[\text{V}]}{10[\text{ms}]} \cdot t[\text{ms}] \quad t \in (0, 10 \text{ ms})$$

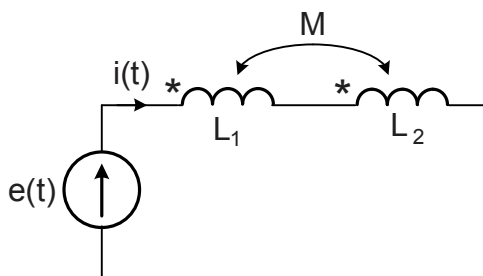
$$i(t) = \frac{1}{R} u(t) = \frac{1}{5 \cdot 10^3 [\Omega]} \cdot \frac{20[\text{V}]}{10[\text{ms}]} \cdot t[\text{ms}] \quad t \in (0, 10 \text{ ms})$$

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = \frac{1}{5 \cdot 10^3 [\Omega]} \cdot \frac{20^2 [\text{V}]^2}{10^2 [\text{ms}]^2} \cdot t^2 [\text{ms}]^2 = 8 \cdot 10^{-4} \frac{[\text{V}][\text{A}]}{[\text{ms}]^2} \cdot t^2 [\text{ms}]^2$$

$$P = \frac{1}{10[\text{ms}]} \int_0^{10[\text{ms}]} 8 \cdot 10^{-4} \frac{[\text{V}][\text{A}]}{[\text{ms}]^2} \cdot t^2 [\text{ms}]^2 dt [\text{ms}] = \frac{1}{10[\text{ms}]} \cdot 8 \cdot 10^{-4} \frac{[\text{V}][\text{A}]}{[\text{ms}]^2} \cdot \frac{1}{3} t^3 \Big|_0^{10[\text{ms}]} =$$

$$= \frac{1}{10[\text{ms}]} \cdot 8 \cdot 10^{-4} \frac{[\text{V}][\text{A}]}{[\text{ms}]^2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 10^3 [\text{ms}]^3 = 26.66 \text{ mW}.$$

**Zad. 3.19.** Dla obwodu jak na rys. 3.19a, obliczyć  $Z$ ,  $i(t)$ ,  $P$ ,  $Q$ . Obliczenia dokonać dla dwóch przypadków sprzężenia magnetycznego (dodatniego i ujemnego). Narysować wykresy wektorowe.  $e(t) = 200\sqrt{2} \sin\left(1000t + \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $L_1 = 20 \text{ mH}$ ,  $L_2 = 180 \text{ mH}$ ,  $k = 1$ .

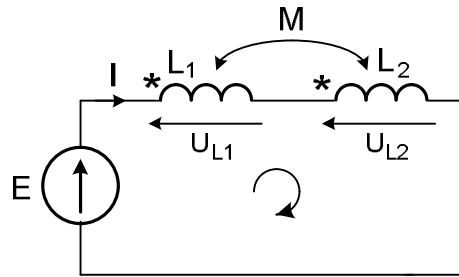


**Rys. 3.19a**

Rozwiązanie

$$E = j200 \text{ V}, \quad M = k\sqrt{L_1 L_2} = 60 \text{ mH}.$$

a) sprzężenie dodatnie



**Rys. 3.19b**

$$E = j\omega L_1 I + j\omega M I + j\omega L_2 I + j\omega M I$$

$$E = j\omega(L_1 + L_2 + 2M)I = ZI$$

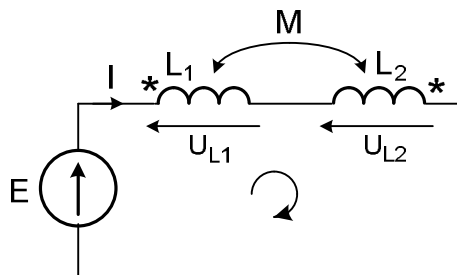
$$Z = j\omega(L_1 + L_2 + 2M) = j1000(20 + 180 + 120) \cdot 10^{-3} = j320 \Omega.$$

$$I = \frac{E}{Z} = \frac{j200}{j320} = 0.625 \text{ A}$$

$$i(t) = 0.625 \sin 1000t$$

$$S = E \cdot I^* = j200 \cdot 0.625 = j125 \text{ VA}, \quad P = 0, \quad Q = 125 \text{ var.}$$

b) sprzężenie ujemne



**Rys. 3.19c**

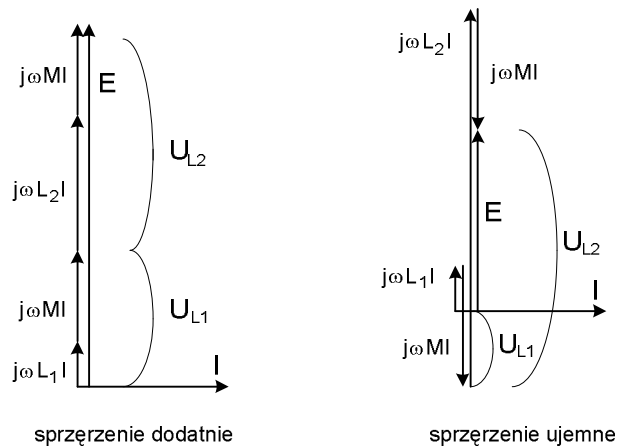
$$E = j\omega L_1 I - j\omega M I + j\omega L_2 I - j\omega M I$$

$$Z = j\omega(L_1 + L_2 - 2M) = j1000(20 + 180 - 120) \cdot 10^{-3} = j80 \Omega$$

$$I = \frac{E}{Z} = \frac{j200}{j80} = 2.5 \text{ A.}$$

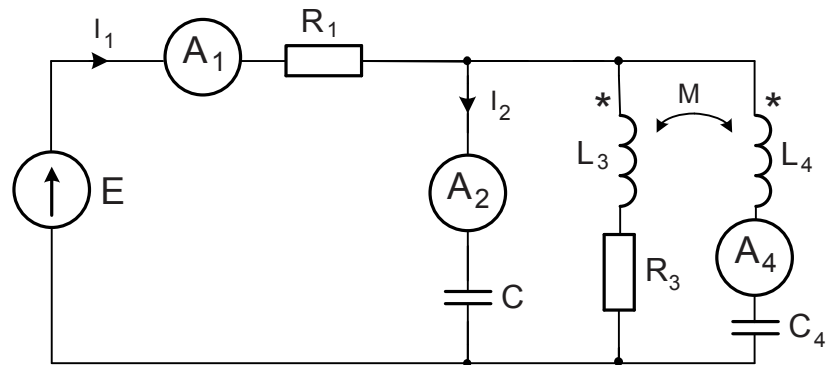
$$i(t) = 2.5\sqrt{2} \sin 1000t$$

$$S = E \cdot I^* = j200 \cdot j2.5 = j500 \text{ VA}, \quad P = 0, \quad Q = 500 \text{ var.}$$



**Rys. 3.19d**

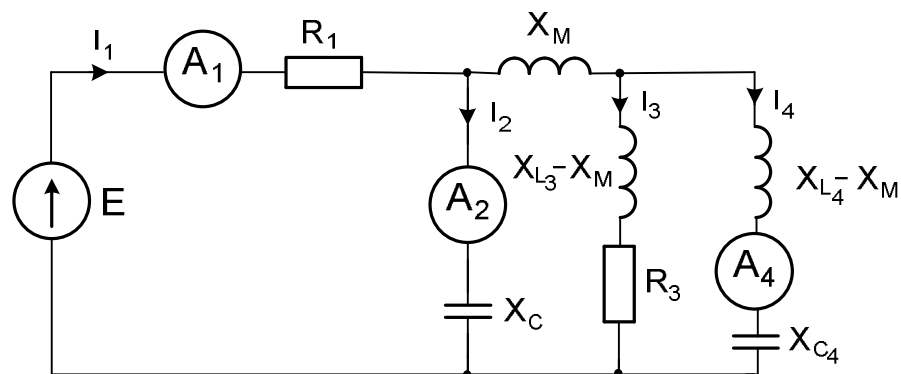
**Zad. 3.20.** W obwodzie jak na rysunku obliczyć wskazania amperomierzy.  $R_1 = 20 \, \Omega$ ,  $R_3 = 10 \, \Omega$ ,  $X_C = 20 \, \Omega$ ,  $X_{L3} = 40 \, \Omega$ ,  $X_{L4} = 30 \, \Omega$ ,  $X_M = 20 \, \Omega$ ,  $X_{C4} = 10 \, \Omega$   
 $e(t) = 100\sqrt{2} \sin(100t + 45^\circ)$ .



**Rys. 3.20a**

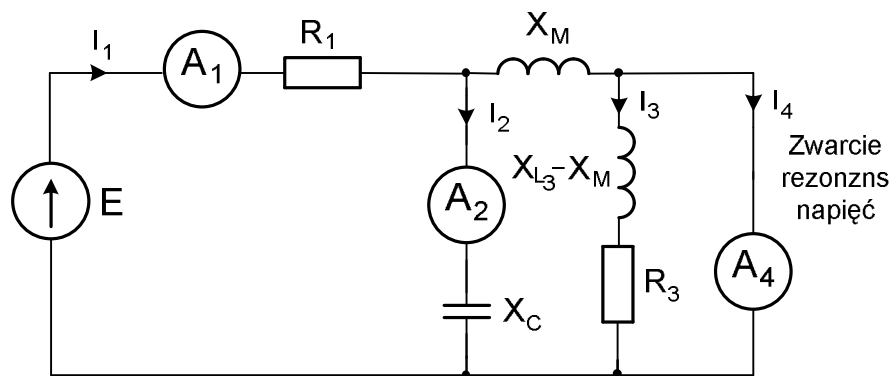
Rozwiązanie:

Dokonujemy eliminacji sprzężenia magnetycznego, (sprężenie dodatnie).



**Rys. 3.20b**

Impedancja w gałęzi czwartej  $Z_4 = -j10 + j(30 - 20) = 0$  Wystąpił rezonans napięć, rys. 3.20c.



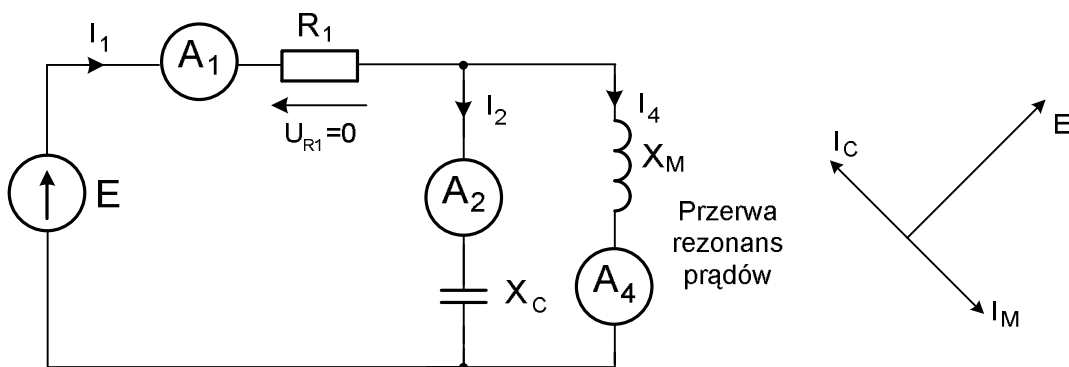
Rys. 3.20c

Prąd  $I_3$  równa się zero, gałąź ta jest zwarta przez gałąź czwartą w której wystąpił rezonans napięć.

Reaktancja kondensatora  $X_C$  i reaktancja  $X_M$  są sobie równe, co prowadzi do rezonansu prądów. Impedancja tej części obwodu wynosi:

$$Z_{MC} = \frac{jX_M \cdot (-jX_C)}{jX_M - jX_C} = \infty, \quad \text{lub admitancja} \quad Y_{MC} = jB_C - jB_M = 0$$

w wyniku czego prąd  $I_1 = 0$ , wskazanie amperomierza  $A_1 = 0$ , rys.4d.



Rys.4d

Napięcie na rezystorze  $R_1$  wynosi zero (wartość  $R_1$  może być dowolna), więc na gałęzi z rezonans wystąpi napięcie równe wartości źródła  $E$ . Znając napięcie można obliczyć prąd w cewce i kondensatorze.

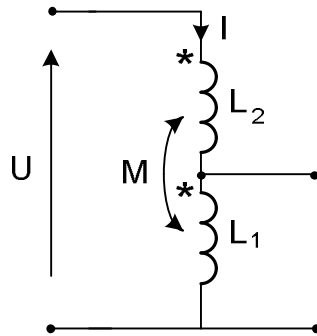
$$I_M = \frac{E}{jX_M} = \frac{100e^{j45^\circ}}{j20} = \frac{100e^{j45^\circ}}{20e^{j90^\circ}} = 5e^{-j45^\circ} \quad \text{amperomierz } A_4 \text{ wskaże } |I_M| = 5 \text{ A}$$

$$I_C = \frac{E}{-jX_C} = \frac{100e^{j45^\circ}}{-j20} = \frac{100e^{j45^\circ}}{20e^{-j90^\circ}} = 5e^{j135^\circ} \quad \text{amperomierz } A_2 \text{ wskaże } |I_C| = 5 \text{ A}$$

Suma tych prądów równa się zero, co pokazano na wykresie wektorowym.

**Zad. 3.21.** Dla dwóch wartości współczynnika sprzężenia  $k = 1$  oraz  $k = 0.9$ , korzystając z twierdzenia Tevenina wyznaczyć schemat zastępczy autotransformatora (rys.3.21a) i obliczyć wartość skuteczną prądu zwarcia, przy rezystancji  $R_{ZW} = 20 \Omega$ .

Dane:  $L_1 = 50 \text{ H}$ ,  $L_2 = 12.5 \text{ H}$ ,  $U = 200 \text{ kV}$ ,  $\omega = 314 \text{ rad/s}$



**Rys. 3.21a**

Rozwiązanie:

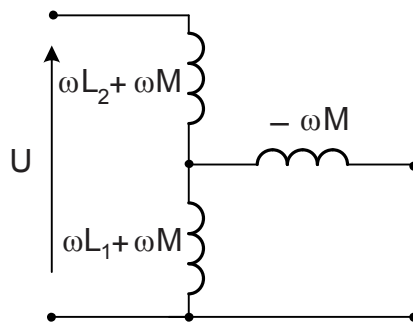
$$M = k\sqrt{L_1 L_2}$$

$$k = 1 \quad M = 25 \text{ H}, \quad \omega M = 7850 \Omega,$$

$$k = 0,9 \quad M = 22,5 \text{ H}, \quad \omega M = 7065 \Omega,$$

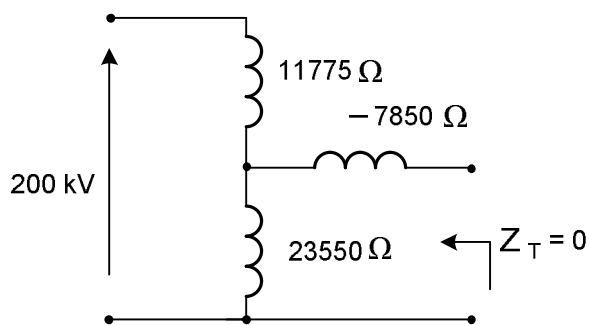
$$\omega L_1 = 15700 \Omega, \quad \omega L_2 = 3925 \Omega$$

Dokonyamy eliminacji sprzężenia. Sprzężenie jest dodatnie.



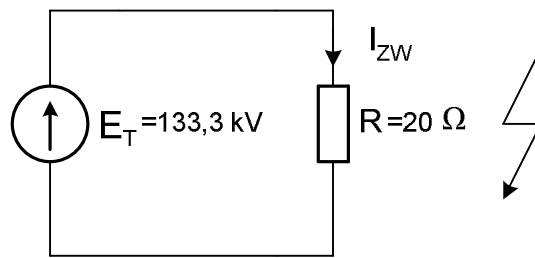
**Rys. 3.21b**

Obliczenia dla współczynnika  $k=1$



**Rys. 3.21c**

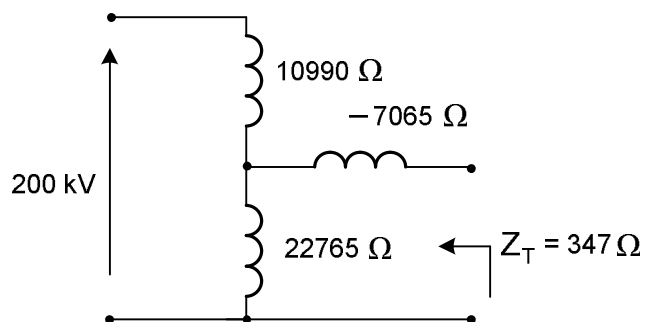
Impedancje Teveniva obliczamy przy zwartym generatorze (200 kV)



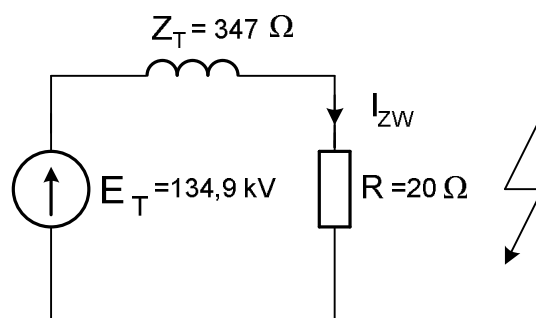
**Rys. 3.21d**

Stąd prąd zwarcia  $I_{ZW} = 6.66 \text{ kA}$

Obliczenia dla współczynnika  $k = 0.9$



**Rys. 3.21e**

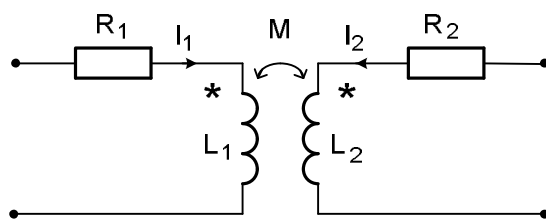


**Rys. 3.21f**

Stąd prąd zwarcia  $I_{ZW} = 0.38 \text{ kA}$

**Zad. 3.22.** Zastąpić cewki sprzężone schematem zastępczym zawierającym transformator idealny. Dane:  $L_1 = 32 \text{ mH}$ ,  $L_2 = 2 \text{ mH}$ ,  $M = 4 \text{ mH}$ ,  $R_1 = 2 \text{ Ω}$ ,  $R_2 = 1 \text{ Ω}$





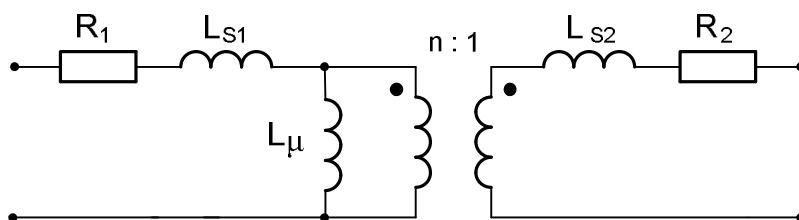
Rys. 3.22a

Rozwiązanie:

$$n = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = 4 \quad k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = 0.5$$

$$L_{S1} = L_1 - nM = (1 - k)L_1 = 16 \text{ mH} \quad L_{\mu} = nM = 16 \text{ mH}$$

$$L_{S2} = L_2 - \frac{1}{n}M = (1 - k)L_2 = 1 \text{ mH}$$



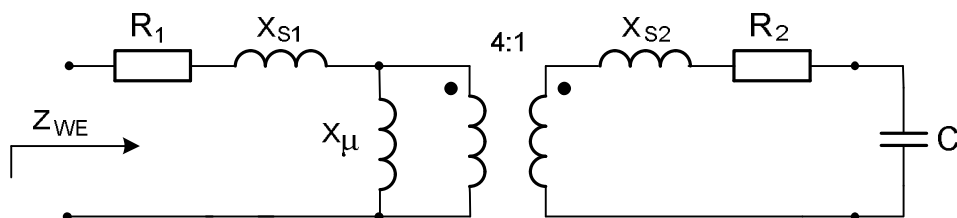
Rys. 3.22b

**Zad. 3.23.** Obwód z zadania 3.22 obciążono kondensatorem pojemności  $C = 1 \text{ mF}$ . Dla pulsacji  $\omega = 10^3 \text{ rad/s}$  obliczyć impedancję wejściową. Obliczeń dokonać:

1. zastępując sprzężenie układem z transformatorem idealnym
2. metodą eliminacji sprzężenia

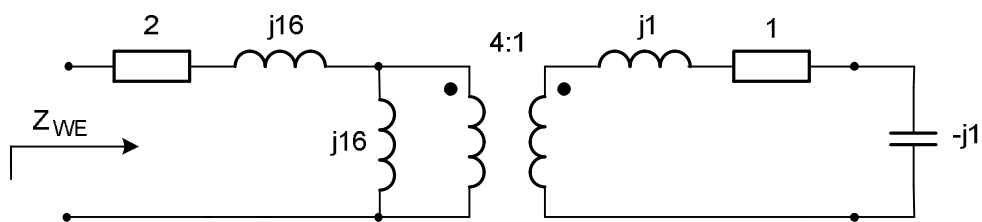
Rozwiązanie  
ad 1.

dla  $\omega = 10^3 \text{ rad/s}$  wartości reaktancji wynoszą;  $X_{S1} = 16 \Omega$ ,  $X_{S2} = 1 \Omega$ ,  $X_{\mu} = 16 \Omega$



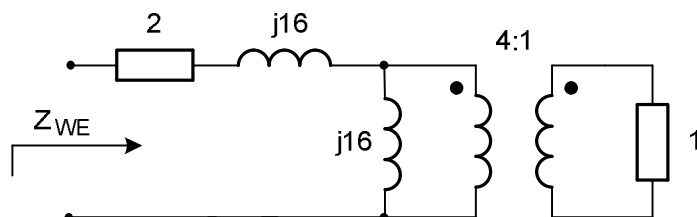
Rys. 3.23a

Wstawiając impedancje zespolone:



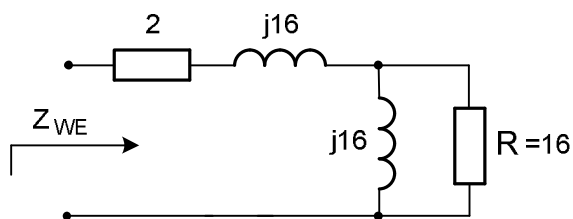
**Rys. 3.23b**

Po stronie wtórnej wystąpił rezonans napięć, z elementów pozostanie tylko rezystor



**Rys. 3.23c**

Rezystor  $R_2$  przenosi się na stronę pierwotną przez pomnożenie jego wartości przez kwadrat przekładni  $n$  (ogólnie wartość impedancji strony wtórnej).  $R_2 = (4)^2 = 16$

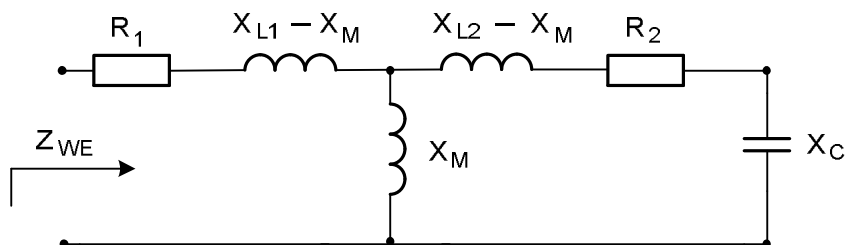


**Rys. 3.23e**

$$Z_{WE} = 2 + j16 + 8 + j8 = 10 + j24 \Omega.$$

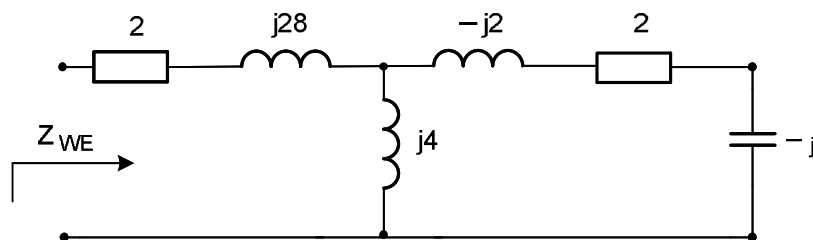
ad. 2

Dokonujemy eliminacji sprzężenia (dodatnie)



**Rys. 3.23f**

Wstawiając impedancje zespolone :



Rys. 3.23g

$$Z_{WE} = 2 + j28 + 8 - j4 = 10 + j24$$

**Zad. 3.24.** Linia długa napowietrzna bezstratna, o długości  $l = 1000$  km jest zasilana napięciem sinusoidalnym o wartości skutecznej  $E_1 = 750$  kV i częstotliwości 50 Hz. Obliczyć napięcie na końcu linii;

Wskazówka: 
$$U(x) = \frac{E_1}{\cos\left(2\pi \frac{l}{\lambda}\right)} \cos\left(2\pi \frac{l-x}{\lambda}\right)$$

R o z w i ą z a n i e

Prędkość rozchodzenia się fali elektromagnetycznej w powietrzu (linia napowietrzna) jest równa  $v = c = 3 \cdot 10^5$  km/s

Stąd

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{3 \cdot 10^5}{50} = 6000 \text{ km}$$

$$\frac{l}{\lambda} = \frac{1000}{6000} = \frac{1}{6}$$

Na końcu linii  $x = l$ , więc mamy

$$U(l) = \frac{E_1}{\cos\left(2\pi \frac{1}{6}\right)} = \frac{750}{0.5} = 1500 \text{ kV}$$

**Zad. 3.25.** Linia długa napowietrzna bezstratna o długości 1000 km, nie obciążona na końcu jest zasilana napięciem o wartości skutecznej 400 kV i częstotliwości 50 Hz. Obliczyć impedancję wejściową linii oraz parametry elementu skupionego odpowiadającego tej impedancji.

R o z w i ą z a n i e

Linia bezstratna  $R = 0$ ,  $G = 0$

$$\gamma = j\omega\sqrt{LC} = j\beta, \quad \alpha = 0, \quad \beta = \omega\sqrt{LC}$$

$$Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Prędkość fazowa fali elektromagnetycznej w powietrzu.

$$v = \frac{\omega}{\beta}, \quad v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}, \quad v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = c, \quad \text{prędkość światła}$$

$$\lambda = vT = \frac{v}{f} = \frac{2\pi v}{\omega} = \frac{2\pi}{\beta} \quad \text{stąd} \quad \beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Jeżeli  $x$  jest odległością od początku linii, a długość linii wynosi  $l$  to

$$U(l) = U_2, \quad I(l) = I_2, \quad \text{oraz}$$

$$U(x) = U_2 \cos \beta(l-x) + jZ_C I_2 \sin \beta(l-x)$$

$$I(x) = \frac{1}{Z_C} [jU_2 \sin \beta(l-x) + Z_C I_2 \cos \beta(l-x)]$$

Impedancją wejściową linii długiej nazywamy stosunek wartości skutecznej zespolonej napięcia na początku linii do wartości skutecznej zespolonej prądu na początku linii.

$$Z_{WE} = \frac{U_1}{I_1}$$

Dla  $x = 0$

$$U_1 = U_2 \cos \beta l + jZ_C I_2 \sin \beta l$$

$$I_1 = \frac{1}{Z_C} [jU_2 \sin \beta l + Z_C I_2 \cos \beta l]$$

Dla linii nie obciążonej na końcu  $I_2 = 0$ . Po wstawieniu tego warunku i podzieleniu stronami powyższych równań dostaniemy

$$Z_{WE} = -jZ_C \operatorname{ctg} 2\pi \frac{l}{\lambda}; \quad Z_C = 300 \, \Omega,$$

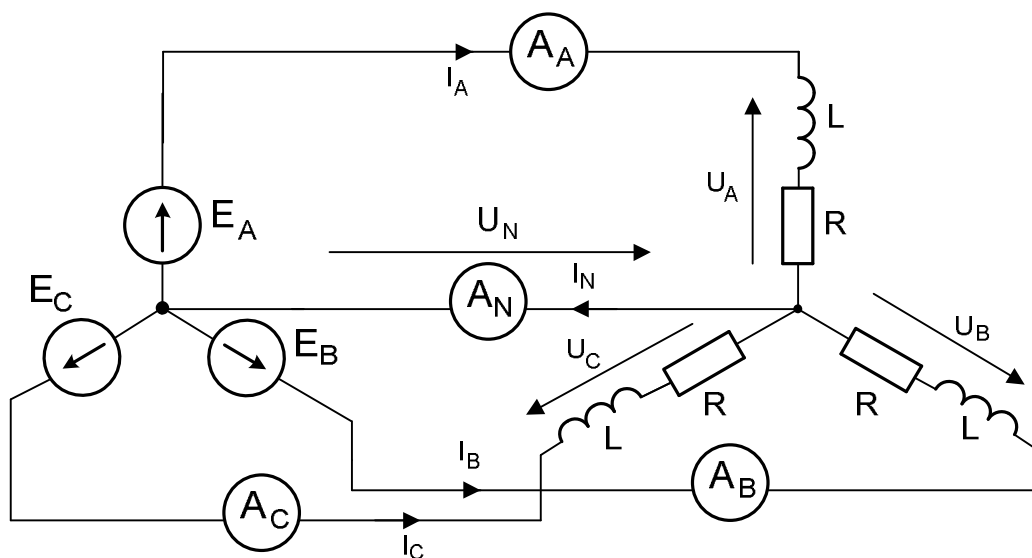
Przyjmujemy dodatkowo  $\lambda = cT = 6000$  km, mamy

$$Z_{WE} = -j300 \operatorname{ctg} 2\pi \frac{1000}{6000} = -j300 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = -j100\sqrt{3} \, \Omega.$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = 100\sqrt{3} \, \Omega \rightarrow C = \frac{1}{314 \cdot 100\sqrt{3}} = 18.38 \, \mu F.$$

## 4. Obwody trójfazowe

**Zad. 4.1.** Generator trójfazowy symetryczny zgodny (rys. 4.1a) o napięciu 230/400 V zasila odbiornik połączony w symetryczną gwiazdę z przewodem zerowym, (impedancja  $Z_N = 0$ )  $R = 30 \Omega$ ,  $L = 0.2$  H. Obliczyć wskazania amperomierzy. Narysować wykres wektorowy. Przyjąć fazę  $E_A$  równą zero.



**Rys. 4.1a**

R o z w i ą z a n i e :

Odbiornik jest symetryczny więc prąd w przewodzie zerowym równa się zero, a napięcia na fazach odbiornika równają się napięciom generatora.  $U_N = 0$ , amperomierz  $A_N = 0$

$$U_A = E_A = 230 \text{ V.}$$

$$U_B = E_B = 230e^{-j120^\circ} = 230\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ V.}$$

$$U_C = E_C = 230e^{j120^\circ} = 230\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ V.}$$

Reaktancja cewki dla  $f = 50$  Hz,  $\omega = 2\pi \cdot f = 314$  rad/s

$$X_L = \omega L = 314 \cdot 0.2 = 62.8 \Omega.$$

Impedancje faz są równe i wynoszą

$$Z_A = Z_B = Z_C = R + jX_L = 30 + j62.8 = 69.6e^{j64.46^\circ} \Omega.$$

Prądy fazowe:

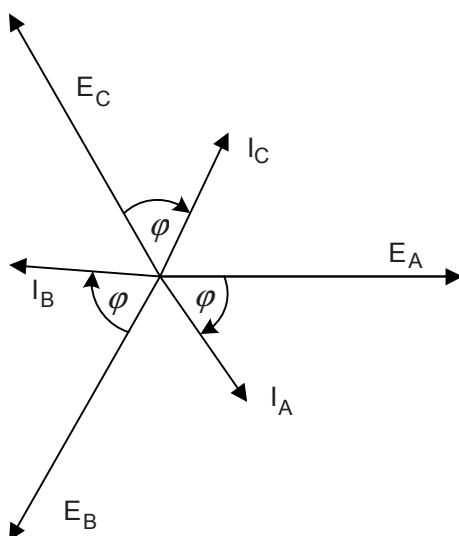
$$I_A = \frac{U_A}{Z_A} = 3.3e^{-j64.46^\circ} \text{ A,} \quad I_B = \frac{U_B}{Z_B} = 3.3e^{j175.54^\circ} \text{ A,} \quad I_C = \frac{U_C}{Z_C} = 3.3e^{j55.54^\circ} \text{ A.}$$

Amperomierze w przewodach fazowych wskazują wartość 3.3 A, są to wartości skuteczne prądów (ich wartość jest równa modułom wartości zespolonych)

Suma prądów w układzie symetrycznym równa się zero

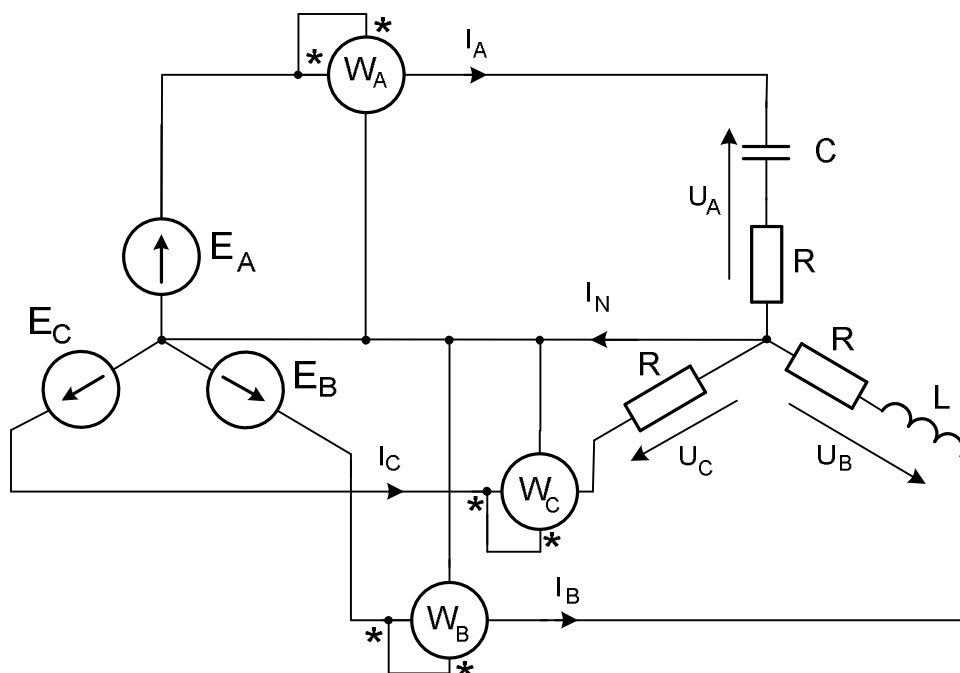
$$I_A + I_B + I_C = 0$$

Rys. 4.1b. przedstawia wykres wektorowy prądów i napięć fazowych. Prądy fazowe tworzą symetryczną gwiazdę, która jest przesunięta (opóźniona) o kąt  $\varphi = -64.46^\circ$  względem napięć fazowych.



Rys. 4.1b.

**Zad. 4.2.** Symetryczny generator trójfazowy (rys.4.2a) o napięciu 230/400 V i częstotliwości  $f = 50$  Hz, zasila niesymetryczny odbiornik połączony w gwiazdę z przewodem zerowym o impedancji  $Z_N = 0$ . Wartości elementów:  $R = 20 \Omega$ ,  $L = 0.1$  H,  $C = 50 \mu\text{F}$ . Obliczyć prądy fazowe, prąd w przewodzie zerowym, wskazania watomierzy oraz narysować wykres wektorowy.



Rys. 4.2a

R o z w i ą z a n i e :

Impedancje poszczególnych faz wynoszą:

$$\omega = 2\pi f = 314 \text{ rad/s} , \quad X_C = \frac{1}{\omega C} = 63.7 \text{ } \Omega , \quad X_L = \omega L = 31.4 \text{ } \Omega.$$

$$Z_A = R - jX_C = 20 - j63.7 = 66.76e^{-j72.6^\circ} \text{ } \Omega$$

$$Z_B = R + jX_L = 20 + j31.4 = 37.23e^{j57.5^\circ} \text{ } \Omega$$

$$Z_C = 20 \text{ } \Omega$$

Prądy fazowe:

Napięcia faz generatora są równe napięciom na odbiorniku:

$$I_A = \frac{E_A}{Z_A} = \frac{230}{66.76e^{-j72.6^\circ}} = 3.44e^{j72.6^\circ} \text{ A}$$

$$I_B = \frac{E_B}{Z_B} = \frac{230e^{-j120^\circ}}{37.23e^{j57.5^\circ}} = 6.18e^{-j177.5^\circ} \text{ A}$$

$$I_C = \frac{E_C}{Z_C} = \frac{230e^{j120^\circ}}{20} = 11.5e^{j120^\circ} \text{ A}$$

Prąd w przewodzie zerowym:

$$I_N = I_A + I_B + I_C = 17.09e^{j130^\circ} \text{ A}$$

Moce pozorne zespolone

$$S_A = E_A I_A^* = 230 \cdot 3.44e^{-j72.6^\circ} = 236.6 - j755 \text{ VA} \quad \text{stąd} \quad P_A = 236.6 \text{ W}$$

$$S_B = E_B I_B^* = 230e^{-j120^\circ} \cdot 6.18e^{j177.5^\circ} = 763 + j1190 \text{ VA} \quad \text{stąd} \quad P_B = 763 \text{ W}$$

$$S_C = E_C \cdot I_C^* = 230e^{j120^\circ} \cdot 11.5e^{-j120^\circ} = 2645 \text{ VA} \quad \text{stąd} \quad P_C = 2645 \text{ W}$$

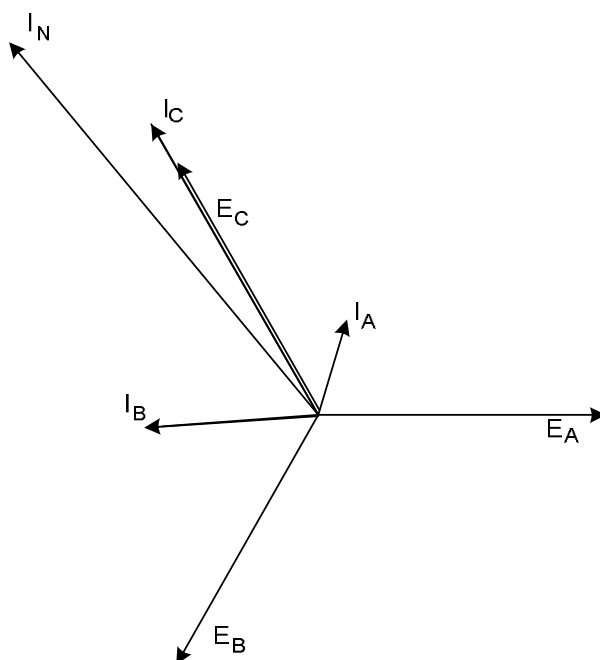
Wynik ten można sprawdzić ze wzoru  $P = RI^2$

$$P_A = (3.44)^2 \cdot 20 = 236.6 \text{ W}$$

$$P_B = (6.18)^2 \cdot 20 = 763 \text{ W}$$

$$P_C = (11.5)^2 \cdot 20 = 2645 \text{ W}$$

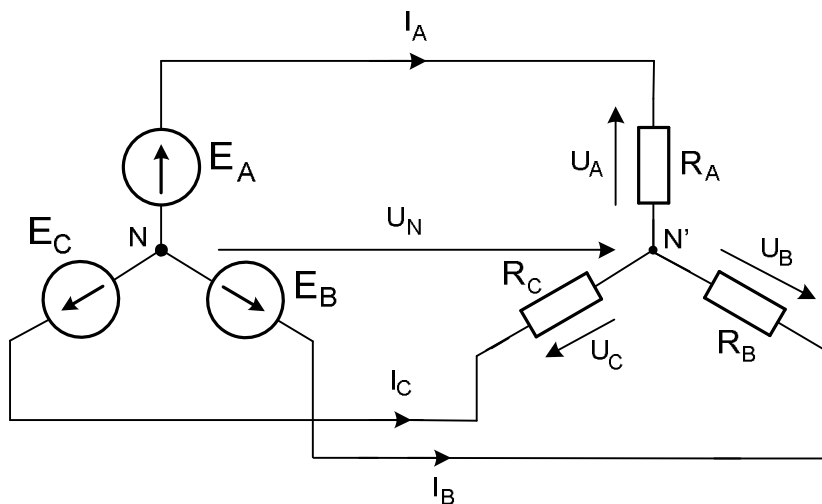




**Rys. 4.2b**

Rys.4.2b. przedstawia wykres wektorowy prądów i napięć.

**Zad. 4.3.** Generator trójfazowy symetryczny zgodny o napięciu fazy  $e_A(t) = 200\sqrt{2} \sin t$  V zasila odbiornik trójfazowy połączony w niesymetryczną gwiazdę bez przewodu zerowego, rys.4.3a. Obciążenie jest rezystancyjne:  $R_A = 25 \Omega$ ,  $R_B = 20 \Omega$ ,  $R_C = 100 \Omega$ . Obliczyć prądy fazowe, oraz moc czynną odbiornika. Narysować wykres wektorowy.



**Rys. 4.3a**

**Rozwiązanie**

Odbiornik jest niesymetryczny bez przewodu zerowego więc należy obliczyć  $U_N$

$$U_N = \frac{Y_A E_A \cdot 1 + Y_B E_B \left( -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + Y_C E_C \left( -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{Y_A + Y_B + Y_C + Y_N}$$

$Y_N = 0 \rightarrow R_N = \infty$  nie ma przewodu zerowego

$$U_N = \frac{\frac{1}{25} \cdot 200 + \frac{1}{20} \cdot 200 \left( -\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \frac{1}{100} \cdot 200 \left( -\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{\frac{1}{25} + \frac{1}{20} + \frac{1}{100}} = 20 - j69.3 \text{ V}$$

stąd prądy fazowe

$$I_A = (E_A - U_N) Y_A = (180 + j69.3) \cdot 0.04 = 7.2 + j2.77 = 7.71 e^{j21.04^\circ} \text{ A}$$

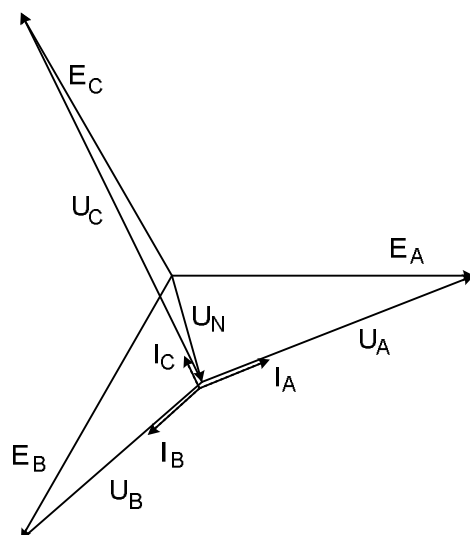
$$I_B = (E_B - U_N) Y_B = (-120 - j103.7) \cdot 0.05 = -6 - j5.19 = 7.93 e^{j220.86^\circ} \text{ A}$$

$$I_C = (E_C - U_N) Y_C = (-120 + j242.3) \cdot 0.01 = -1.2 + j2.42 = 2.7 e^{j116.37^\circ} \text{ A}$$

Poprawność rozwiązania można sprawdzić z pierwszego prawa Kirchhoffa dla węzła  $N'$

$$I_A + I_B + I_C = 0$$

Wykres wektorowy przedstawia rys. 4.3b.



**Rys. 4.3b**

Moc w elemencie rezystancyjnym najprościej można obliczyć z zależności

$$P = U \cdot I, \quad (\cos \varphi = 0) \quad \text{oraz z prawa Ohma} \quad U = R \cdot I \quad \text{lub} \quad I = \frac{U}{R}$$

Podstawiając do wzoru na moc otrzymamy

$$P = R \cdot I^2 = \frac{U^2}{R}$$

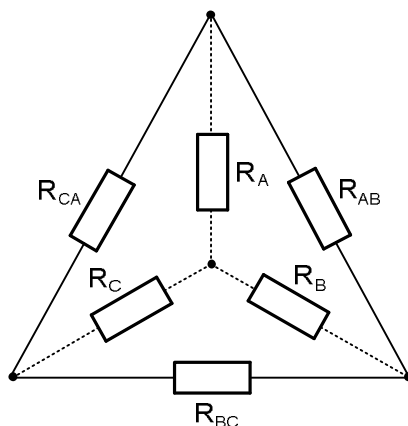
Moc czynną odbiornika

$$P = P_A + P_B + P_C$$

Wartości skuteczne prądów są równe modułom wartości zespolonych

$$P = R_A \cdot I_A^2 + R_B \cdot I_B^2 + R_C \cdot I_C^2 = 25 \cdot 7.71^2 + 20 \cdot 7.93^2 + 100 \cdot 2.7^2 = 3472.8 \text{ W.}$$

Moc czynną odbiornika można obliczyć również bez obliczania  $U_N$  i prądów fazowych, zamieniając niesymetryczną gwiazdę na niesymetryczny trójkąt, rys. 4.3c.



**Rys. 4.3c**

$$R_{AB} = R_A + R_B + \frac{R_A \cdot R_B}{R_C} = 50 \text{ } \Omega.$$

$$R_{BC} = R_B + R_C + \frac{R_B \cdot R_C}{R_A} = 200 \text{ } \Omega.$$

$$R_{CA} = R_C + R_A + \frac{R_C \cdot R_A}{R_B} = 250 \text{ } \Omega.$$

Napięcie skuteczne przyłożone do poszczególnych rezystorów trójkąta jest napięciem międzyfazowym (liniowym) i wynosi  $200\sqrt{3}$

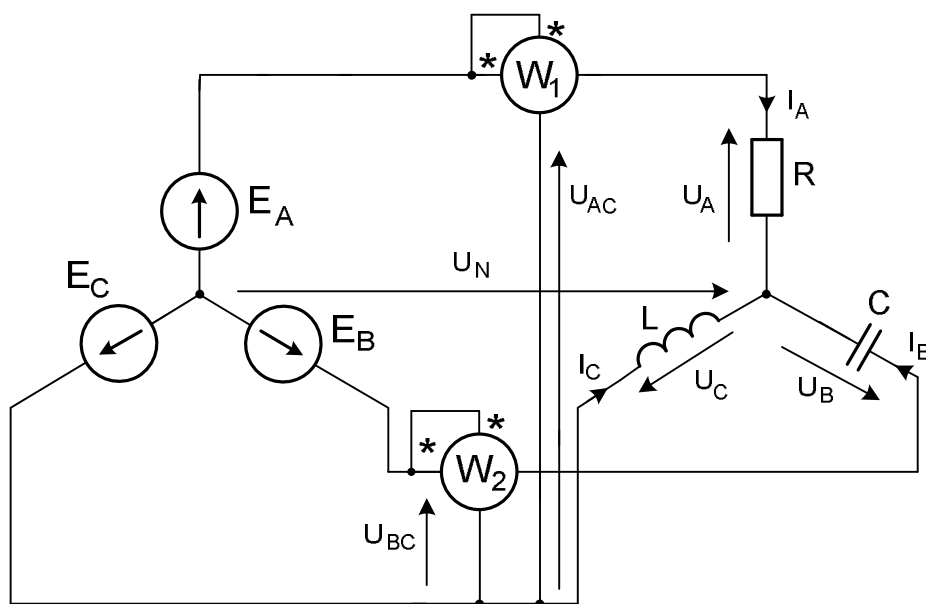
$$\text{Moc } P = \frac{U^2}{R}$$

Stąd suma mocy w poszczególnych rezystorach

$$P = P_{AB} + P_{BC} + P_{CA} = \frac{(200\sqrt{3})^2}{50} + \frac{(200\sqrt{3})^2}{200} + \frac{(200\sqrt{3})^2}{250} = 3480 \text{ W}$$

Po zamianie połączenia w gwiazdę na równoważny trójkąt prądy liniowe nie zmieniają się.

**Zad. 4.4.** Dla obwodu jak na rys. 4.4a, obliczyć rozptył prądów, wskazania watomierzy oraz narysować wykres wektorowy. Dane:  $e_A(t) = 200\sqrt{2} \sin t$ ,  $R = X_L = X_C = 10 \text{ } \Omega$ . Generator symetryczny zgodny.



Rys. 4.4a

Rozwiązanie:

Wartości elementów:

$$\begin{aligned} Z_A &= 10 \, \Omega, & Y_A &= 0.1 \, \text{S} \\ Z_B &= -j10 \, \Omega, & Y_B &= 0.1 \, \text{S} \\ Z_C &= j10 \, \Omega, & Y_C &= -j0.1 \, \text{S} \end{aligned}$$

Układ niesymetryczny bez przewodu zerowego, obliczamy  $U_N$

$$U_N = \frac{Y_A E_A + Y_B E_B + Y_C E_C}{Y_A + Y_B + Y_C} = \frac{0.1 \cdot 200 + j0.1 \cdot 200 \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - j0.1 \cdot 200 \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{0.1 + j0.1 - j0.1} = 546 \, \text{V}.$$

Stąd prądy:

$$\begin{aligned} I_A &= (E_A - U_N) Y_A = -34.6 \, \text{A} \\ I_B &= (E_B - U_N) Y_B = 17.3 - j64.64 \, \text{A} \\ I_C &= (E_C - U_N) Y_C = 17.3 + j64.64 \, \text{A} \end{aligned}$$

Wskazania watomierzy, zostaną obliczone z mocy pozornej zespolonej:

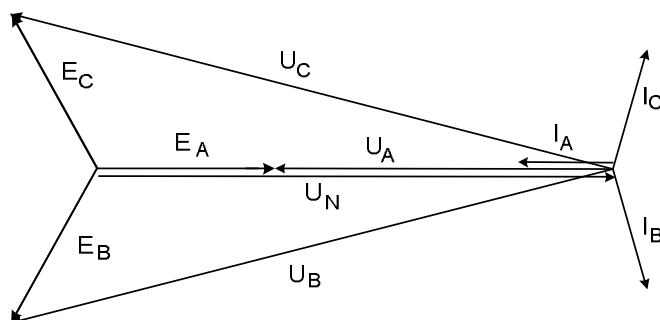
$$S_1 = U_{AC} I_A^* = 200\sqrt{3}e^{-j30}(-34.6) = -10380 + j5993 \, \text{VA}, \quad \text{stąd } P_1 = -10.38 \, \text{kW}.$$

$$S_2 = U_{BC} I_B^* = -j200\sqrt{3}(17.3 + j64.64) = 22349 - j5993 \, \text{VA}, \quad \text{stąd } P_2 = 22.35 \, \text{kW}.$$

Suma wskazań watomierzy jest mocą czynną pobieraną z generatora, wynosi  $P = 11.97 \, \text{kW}$ .  
i jest tracona w rezystorze w postaci ciepła.

Można to sprawdzić licząc  $P = R I_A^2 = 10 (-34.6)^2 = 11.97 \, \text{kW}$ .

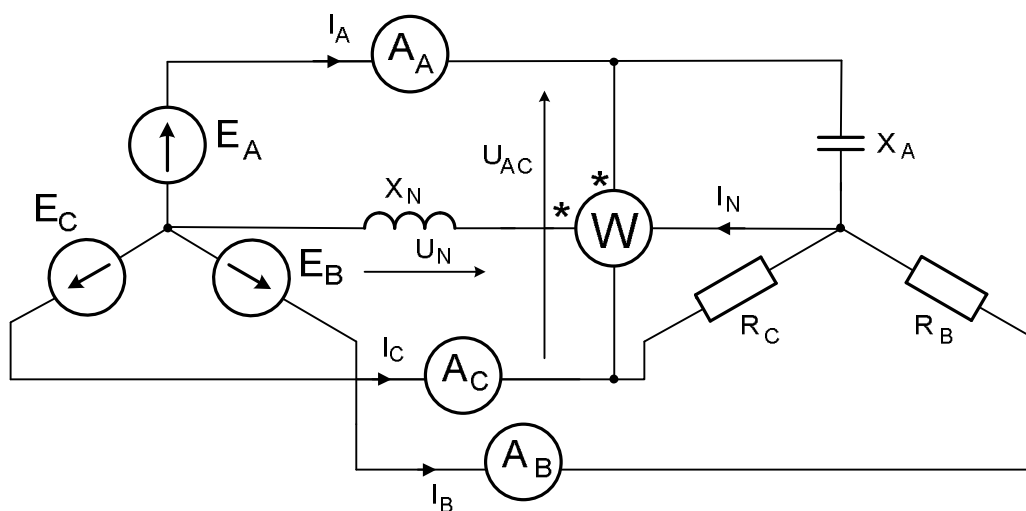
Rys. 4.4b, przedstawia wykres wektorowy prądów i napięć.



**Rys. 4.4b**

**Zad. 4.5.** W obwodzie jak na rys. 4.5a, cewkę prądową watomierza włączono w przewód zerowy, a napięciową na napięcie międzyfazowe. Obliczyć wskazania watomierza, wskazanie amperomierzy oraz narysować wykres wektorowy. Generator symetryczny zgodny.

Dane:  $e_A(t) = 200\sqrt{2} \sin t$  V,  $X_A = R_B = R_C = X_N = 20 \Omega$ .



**Rys. 4.5a**

**Rozwiązanie :**

Admitancje faz wynoszą:

$$Y_A = j0.05 \text{ S}, \quad Y_B = 0.05 \text{ S}, \quad Y_C = 0.05 \text{ S}, \quad Y_N = -j0.05 \text{ S},$$

Układ niesymetryczny z przewodem zerowym, obliczamy  $U_N$

$$U_N = \frac{Y_A E_A \cdot 1 + Y_B |E_B| \left( -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + Y_C |E_C| \left( -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{Y_A + Y_B + Y_C + Y_N}$$

$$U_N = \frac{j0.05 \cdot 200 + 0.05 \cdot 200 \left( -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 0.05 \cdot 200 \left( -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{j0.05 + 0.05 + 0.05 - j0.05} = -100 + j100 \text{ V.}$$

Prądy fazowe:

$$I_A = (E_A - U_N)Y_A = 5 + j15 \text{ A,}$$

$$I_B = (E_B - U_N)Y_B = -j13.66 \text{ A,}$$

$$I_C = (E_C - U_N)Y_C = j3.66 \text{ A,}$$

Wskazania amperomierzy:

$$A_A = 15.81 \text{ A.}$$

$$A_B = 13.66 \text{ A.}$$

$$A_C = 3.66 \text{ A.}$$

Prąd w przewodzie zerowym

$$I_N = U_N Y_N = 5 + j5 \text{ A.}$$

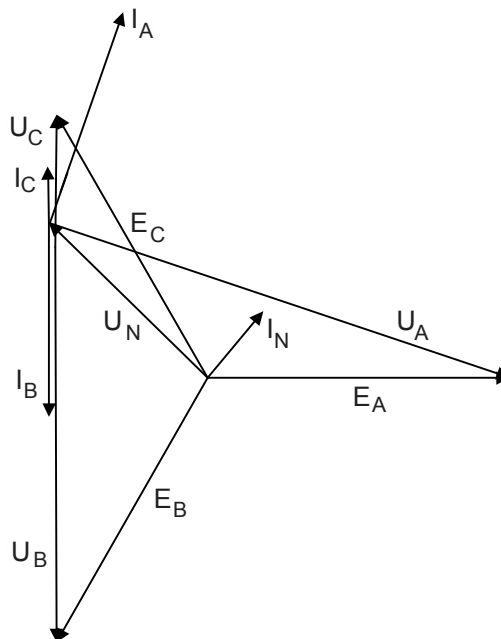
Z prądowego prawa Kirchhoffa sprawdzamy poprawność obliczeń:

$$I_A + I_B + I_C = I_N$$

Wskazania watomierza:

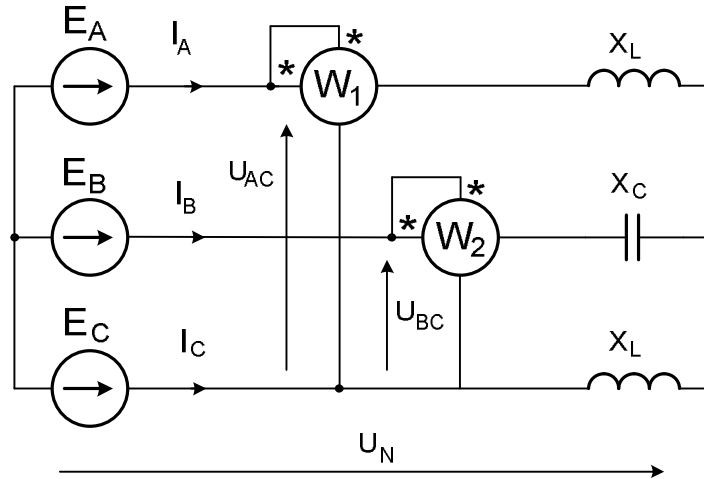
$$S = U_{AC} \cdot I_N^* = 200\sqrt{3}e^{-j30^\circ} (5 - j5) = 2449e^{-j75^\circ} = 633.8 - j2172.3$$

Watomierz wskaże 633.8 W. (jest to tylko wskazanie watomierza, a nie moc czynna obciążenia)



**Rys. 4.5b.** Wykres wektorowy

**Zad. 4.6.** Dla obwodu jak na rysunku 4.6a, obliczyć wskazania watomierzy. Generator symetryczny zgodny o napięciu  $E_A = 200 \text{ V}$ ,  $X_L = X_C = 100 \Omega$



**Rys. 4.6a**

Rozwiązanie:

$$E_A = 200 \text{ V}, \quad E_B = 200 \left( -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \text{ V}, \quad E_C = 200 \left( -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \text{ V}.$$

$$Y_A = -j0,01 \text{ S}, \quad Y_B = j0,01 \text{ S}, \quad Y_C = -j0,01 \text{ S}.$$

$$U_N = \frac{Y_A E_A + Y_B E_B + Y_C E_C}{Y_A + Y_B + Y_C} = 200(1 + j\sqrt{3}) \text{ V}.$$

$$I_A = (E_A - U_N)Y_A = -2\sqrt{3} \text{ A}.$$

$$I_B = (E_B - U_N)Y_B = 3(\sqrt{3} - j) \text{ A}.$$

$$U_{AC} = E_A - E_C = 200 \left( \frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \text{ A}.$$

$$U_{BC} = E_B - E_C = -j200\sqrt{3} \text{ V}.$$

$$S_1 = U_{AC} I_A^* = 200 \left( -\frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) (-2\sqrt{3}) = -600\sqrt{3} + j600 \text{ VA}.$$

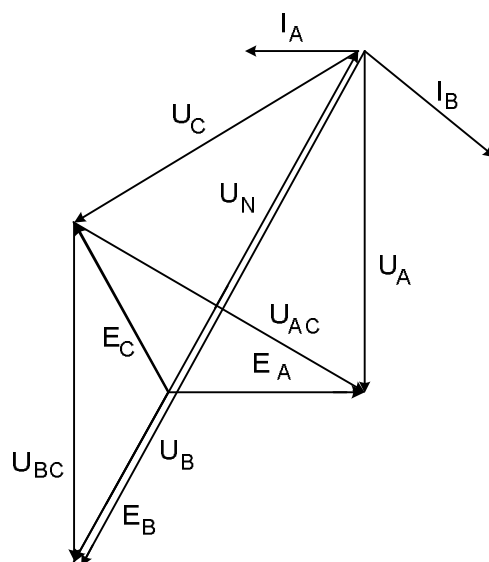
$$P_1 = -600\sqrt{3} \text{ W}.$$

$$S_2 = U_{BC} I_B^* = -j200\sqrt{3} \cdot 3(\sqrt{3} + j) = 600\sqrt{3} - j1800 \text{ VA}.$$

$$P_2 = 600\sqrt{3} \text{ W}.$$

$$P_1 + P_2 = 0$$

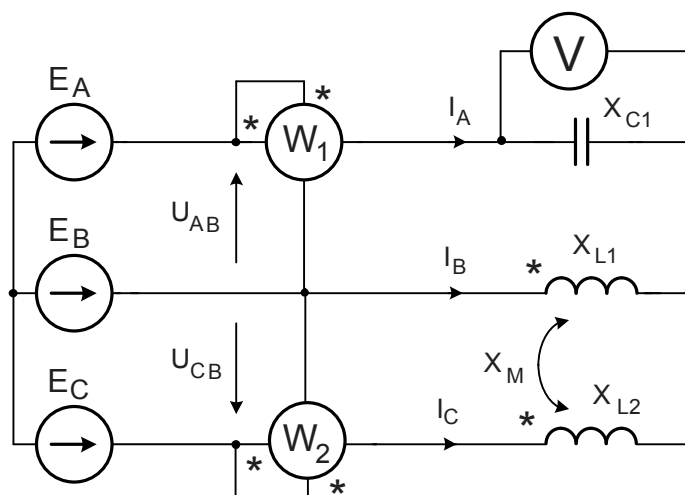
Suma wskazań watomierzy wynosi zero, moc czynna układu jest zero, nie występują elementy rezystancyjne. Na rys. 4.6b. przedstawiono wykres wektorowy.



**Rys. 4.6b**

**Zad. 4.7.** Dla obwodu jak na rysunku 4.7a, obliczyć wskazania watomierzy, wskazanie woltomierza, oraz wykonać wykres wektorowy: Generator symetryczny zgodny.

$$e_A(t) = 200\sqrt{2} \sin t \text{ V}, \quad X_{L1} = X_{L2} = 30 \, \Omega, \quad X_M = 10 \, \Omega, \quad X_{C1} = 10 \, \Omega.$$

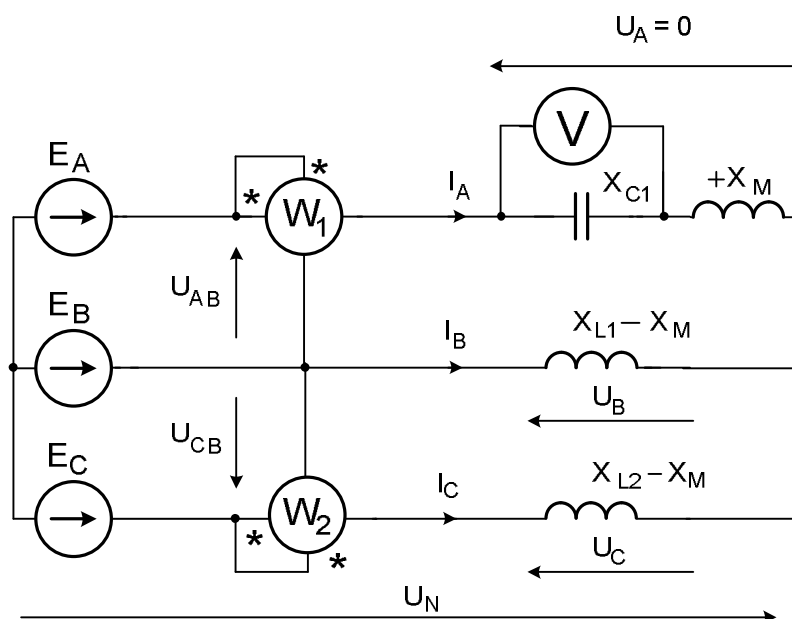


**Rys. 4.7a**

Rozwiązanie:

Dokonujemy eliminacji sprzężenia: (dodatnie)





Rys. 4.7b

Po eliminacji impedancje faz wynoszą:

$$Z_A = -j10 + j10 = 0 \quad (\text{rezonans napięć, zwarcie fazy A})$$

$$Z_B = j30 - j10 = j20 \, \Omega \qquad Z_C = j30 - j10 = j20 \, \Omega$$

$$\text{Napięcie } U_N = E_A = 200 \text{ V}$$

Napięcia fazowe wynoszą:

$$U_A = 0, \quad U_B = 200\sqrt{3}e^{-j150^\circ} \text{ V}, \quad U_C = 200\sqrt{3}e^{j150^\circ} \text{ V}$$

Prądy fazowe:

$$I_B = \frac{U_B}{Z_B} = \frac{200\sqrt{3}e^{-j150^\circ}}{20e^{j90^\circ}} = 10\sqrt{3}e^{j120^\circ} \text{ A}$$

$$I_C = \frac{U_C}{Z_C} = \frac{200\sqrt{3}e^{j150^\circ}}{20e^{j90^\circ}} = 10\sqrt{3}e^{j60^\circ} \text{ A}$$

Prąd zwartej fazy A:

$$I_A = -I_B - I_C = 30e^{-j90^\circ} \text{ A}$$

Wskazania watomierzy:

$$S_1 = U_{AB} I_A^* = 200\sqrt{3}e^{j30^\circ} 30e^{j90^\circ} = -3000\sqrt{3} + j9000 \text{ VA}, \quad \text{stąd} \quad P_{W_1} = -3000\sqrt{3} \text{ W.}$$

$$S_2 = U_{CB} I_C^* = 200\sqrt{3}e^{j90^\circ} 10\sqrt{3}e^{-j60^\circ} = 3000\sqrt{3} + j3000 \text{ VA}, \quad \text{stąd} \quad P_{W_2} = 3000\sqrt{3} \text{ W.}$$

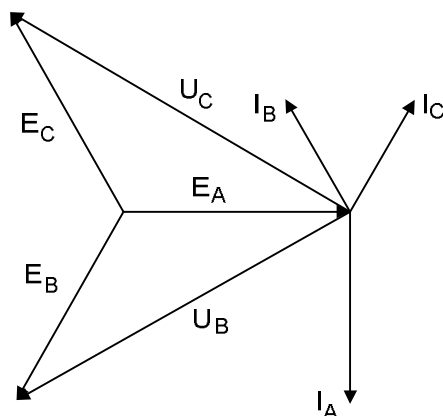
Suma watomierzy jest równa zero, w obwodzie moc czynna nie występuje, są same elementy reaktancyjne.

Wskazanie woltomierza:

$$U_W = I_A \cdot jX_{C1} = 30e^{-j90^\circ} 10e^{-j90^\circ} = 300e^{-j180^\circ} \text{ V.}$$

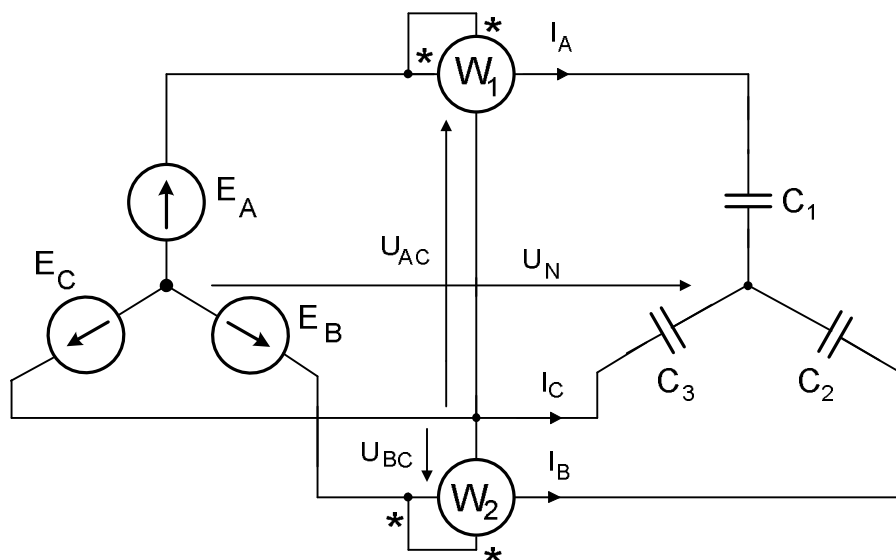
Woltomierz wskaże 300 V.

Rys.4.7c. przedstawia wykres wektorowy.



Rys. 4.7c

**Zad. 4.8.** Dla obwodu jak na rysunku 4.8a, obliczyć rozpyływ prądów, wskazania watomierzy, moc bierną oraz narysować wykres wektorowy. Generator symetryczny zgodny o napięciu faz:  $e_A = 200\sqrt{2} \sin t \text{ V}$ ,  $C_1 = 0.1 \text{ F}$ ,  $C_2 = 0.2 \text{ F}$ ,  $C_3 = 0.7 \text{ F}$



Rys. 4.8a

Rozwiązanie:

Admitancje faz wynoszą:

$$Y_A = j0.1 \text{ S}, \quad Y_B = j0.2 \text{ S}, \quad Y_C = j0.7 \text{ S}.$$

Obciążenie jest niesymetryczną gwiazdą, obliczamy napięcie  $U_N$

$$U_N = \frac{Y_A E_A \cdot 1 + Y_B |E_B| \left( -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + Y_C |E_C| \left( -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{Y_A + Y_B + Y_C + Y_N}$$

$$U_N = \frac{j0.1 \cdot 200 + j0.2 \cdot 200 \left( -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + j0.7 \cdot 200 \left( -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{j0.1 + j0.2 + j0.7} = -70 + j86.6 \text{ V}$$

Prądy fazowe:

$$I_A = (E_A - U_N) Y_A = 8.66 + j27 = 28.35 e^{j72.21^\circ} \text{ A}.$$

$$I_B = (E_A - U_N) Y_B = 51.92 - j6 = 52.26 e^{-j6.59^\circ} \text{ A}.$$

$$I_C = (E_A - U_N) Y_C = -60.62 - j21 = 64.15 e^{j199.1^\circ} \text{ A}.$$

Wskazania watomierzy, obliczymy z mocy pozornej zespolonej:

$$S_1 = U_{AC} I_A^* = 200\sqrt{3} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2} \right) (8.66 - j27) = -2078.53 + j9599.4 \text{ VA}.$$

$$P_{W1} = -2078.4 \text{ W}.$$

$$S_2 = U_{BC} I_B^* = -j200\sqrt{3} (51.92 + j6) = 2078.4 + j17985.6 \text{ VA}.$$

$$P_{W2} = 2078.4 \text{ W}.$$

Suma wskazań watomierzy wynosi zero, w obwodzie nie ma elementów rezystancyjnych.

Moc bierną można obliczyć ze wzoru:  $Q = X_C I^2$  stąd,

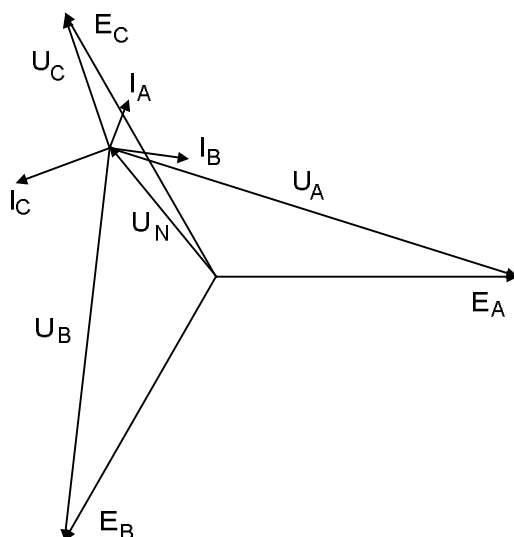
$$Q_A = X_{C1} \cdot I_A^2 = 10 \cdot (28.35)^2 = 8.04 \text{ kvar}.$$

$$Q_B = X_{C2} \cdot I_B^2 = 5 \cdot (52.26)^2 = 13.65 \text{ kvar}.$$

$$Q_C = X_{C3} \cdot I_C^2 = 1.43 \cdot (64.15)^2 = 5.88 \text{ kvar}.$$

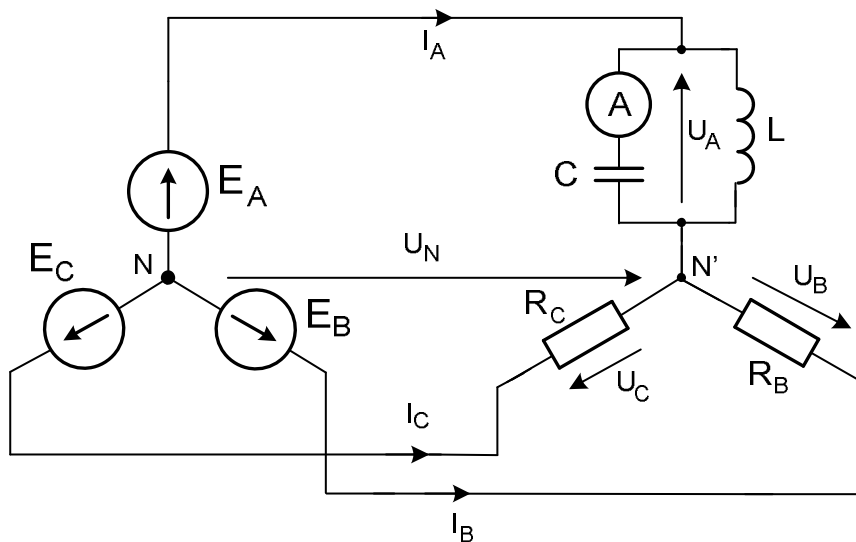
Moc bierna całego obciążenia wynosi 27.57 kvar.

Rys. 4.8b. przedstawia wykres wektorowy.



Rys. 4.8b.

**Zad. 4.9.** Generator trójfazowy symetryczny zgodny (rys. 4.9a) o napięciu fazy  $e_A(t) = 300\sqrt{2} \sin t$  V zasila odbiornik trójfazowy połączony w niesymetryczną gwiazdę bez przewodu zerowego. Obciążenie stanowi:  $X_L = X_C = 20 \Omega$ , połączone równolegle, oraz  $R_B = 50 \Omega$ ,  $R_C = 20 \Omega$ . Obliczyć wskazanie amperomierza. Narysować wykres wektorowy.



Rys. 4.9a

Rozwiązanie

W fazie A jest rezonans prądów stąd  $I_A = 0$

Impedancja  $Z_A = \infty \rightarrow Y_A = 0$ ,  $Y_B = 0.02 \text{ S}$ ,  $Y_C = 0.05 \text{ S}$ .

$$U_N = \frac{Y_A E_A \cdot 1 + Y_B |E_B| \left( -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + Y_C |E_C| \left( -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{Y_A + Y_B + Y_C + Y_N}$$

$$U_N = \frac{0.02 \cdot 300 \left( -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 0.05 \cdot 300 \left( -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{0.02 + 0.05} = -150 + j110.6 \text{ V.}$$

$$U_A = E_A - U_N = 300 + 150 - j110.6 = 450 - j110.6 \text{ V.}$$

stąd wskazanie amperomierza

$$I_{AMP} = \frac{|U_A|}{X_C} = \frac{\sqrt{450^2 + 110.6^2}}{20} = 23.82 \text{ A.}$$

$$U_B = E_B - U_N = -150 - j259.8 + 150 - j110.6 = -j370.4 \text{ V.}$$

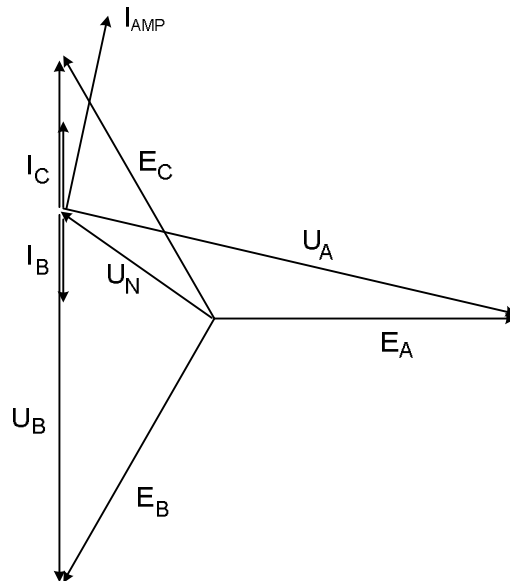
$$U_C = E_C - U_N = -150 + j259.8 + 150 - j110.6 = j149.2 \text{ V.}$$

$$I_B = U_B Y_B = -j370.4 \cdot 0.02 = -j7.4 \text{ A.}$$

$$I_C = U_C Y_C = j149.2 \cdot 0.05 = j7.4 \text{ A.}$$

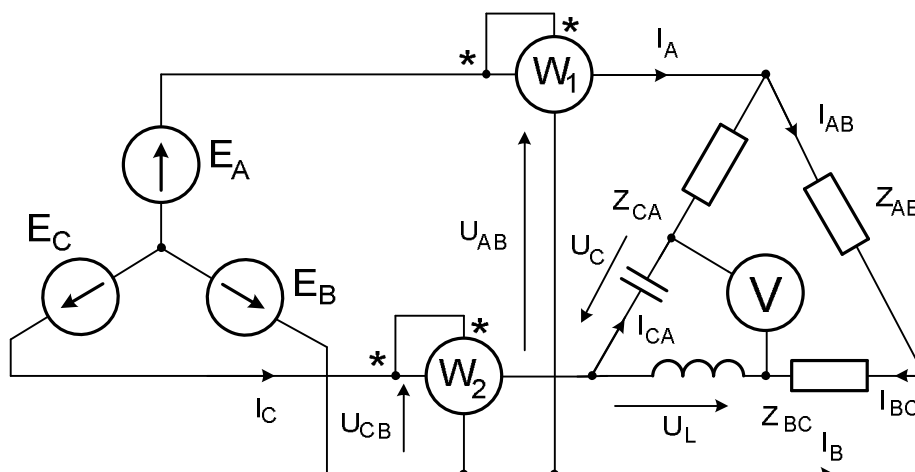
Poprawność obliczeń można sprawdzić z prądowego prawa Kirchhoffa  $I_A + I_B + I_C = 0$

Na rys. 4.9b przedstawiono wykres wektorowy prądów i napięć, zaznaczony prąd amperomierza jest przesunięty o 90 stopni względem napięcia  $U_A$  (kondensator)



**Rys. 4.9b**

**Zad. 4.10.** Dla obwodu jak na rysunku 4.10a, obliczyć wskazania watomierzy, wskazanie woltomierza oraz narysować wykres wektorowy. Generator symetryczny połączony w gwiazdę o napięciu fazowym  $E_A = 50\sqrt{3} \text{ V}$ . Odbiornik połączony w trójkąt, impedancje faz:  $Z_{AB} = 50 \Omega$ ,  $Z_{BC} = 30 + j40 \Omega$ ,  $Z_{CA} = 40 - j30 \Omega$ .



Rys. 4.10a

R o z w i ą z a n i e :

Napięcia międzyfazowe (liniowe) wynoszą odpowiednio:

$$E_{AB} = 150e^{j30} \text{ V}, \quad E_{BC} = 150e^{-j90} \text{ V}, \quad E_{CA} = 150e^{j150} \text{ V}.$$

Prądy w trójkącie:

$$I_{AB} = \frac{E_{AB}}{Z_{AB}} = 3e^{j30} \text{ A}, \quad I_{BC} = \frac{E_{BC}}{Z_{BC}} = 3e^{-j143} \text{ A}, \quad I_{CA} = \frac{E_{CA}}{Z_{CA}} = 3e^{j187} \text{ A}.$$

Prądy watomierzy (prądy liniowe):

$$I_A = I_{AB} - I_{CA}, \quad I_A = 5.58 + j1.86 \text{ A}.$$

$$I_C = I_{CA} - I_{BC} = -0.6 + j1.44 \text{ A}.$$

Moce pozorne zespolone:

$$S_1 = U_{AB} I_A^* = 860 + j178 \text{ VA}.$$

$$S_2 = U_{CB} I_C^* = 220 - j90 \text{ VA}.$$

Moc czynna :

$$P_1 = 860 \text{ W}, \quad P_2 = 220 \text{ W}, \quad P_{CAŁ} = P_1 + P_2 = 1080 \text{ W}.$$

Wynik można sprawdzić korzystając ze wzoru  $P = RI^2$ , w obwodzie są trzy rezystory i ich prądy (wartość skuteczna) jest znana i wynosi w każdej gałęzi trójkąta 3 A.

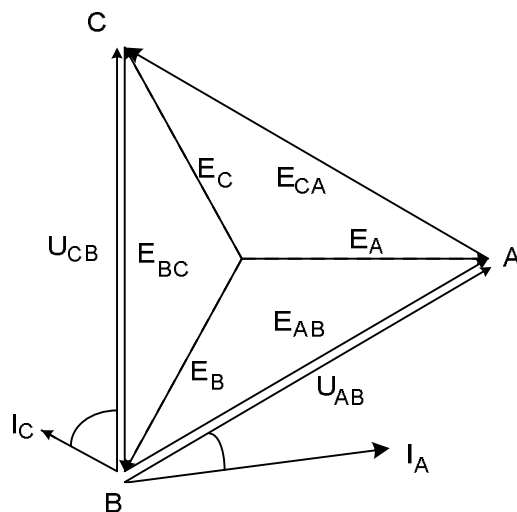
$$P_{CAŁ} = 3^2 (50 + 40 + 30) = 1080 \text{ W}.$$

Wskazanie woltomierza:

$$U_V = U_L + U_C = 3e^{j187} 30e^{-j90} + 3e^{-j143} 40e^{j90} = 72 - j6 = 72.24e^{-j4,8}$$

$|U_V| = 70.24 \text{ V}$  (wartość skuteczna wskazana przez woltomierz)

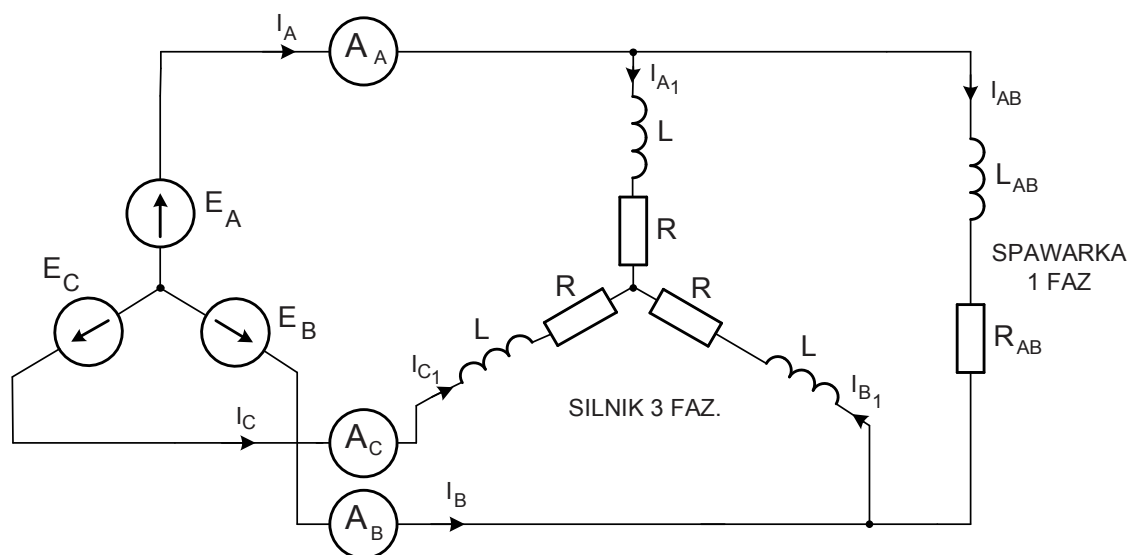
Rys. 4.10b. przedstawia wykres wektorowy.



Rys. 4.10b.

**Zad. 4.11.** Do sieci trójfazowej jak na rysunku 4.11a, o napięciu skutecznym 230/400 V,  $f = 50 \text{ Hz}$ , dołączono silnik trójfazowy połączony w gwiazdę o mocy pozornej 6 kVA i  $\cos \varphi = 0.9$ , oraz spawarkę jednofazową dołączoną na napięcie międzyfazowe (liniowe), o mocy pozornej 4 kVA i  $\cos \varphi = 0.7$ ,

Obliczyć prądy fazowe pobierane z sieci (wskazania amperomierzy). Wykonać wykres wektorowy. Określić wartość uzwojenia ( $R$  i  $L$ ) silnika, oraz spawarki ( $R_{AB}$  i  $L_{AB}$ ).



Rys. 4.11a

Rozwiązanie:

Silnik jest połączony w symetryczną gwiazdę, a więc jedna faza ma moc pozorną równą 2 kVA

Znając moc pozorną możemy obliczyć wartość skuteczną (moduł) prądu  $I_{A1}$

$$|S| = |U| \cdot |I| \quad \text{stad} \quad |I_{A1}| = \frac{|S|}{|U|} = \frac{2000}{230} = 8.69 \text{ A}$$

Z wartości  $\cos \varphi$  możemy wyznaczyć kąt między napięciem a prądem fazy A.

$$\cos \varphi = 0.9 \quad \text{to} \quad \varphi = 25.84^\circ$$

Obciążenie ma charakter indukcyjny, a więc prąd będzie się spóźniał względem napięcia

Z racji symetrii napięcie  $U_{A1} = E_A = 230e^{j0^\circ} \text{ V}$ , (przyjęto fazę  $E_A$  równą zero)

prąd  $I_{A1} = 8.69e^{-j25.84^\circ} \text{ A}$ . Pozostałe prądy gwiazdy będą odpowiednio z racji symetrii przesunięte o  $120^\circ$  i wynoszą:  $I_{B1} = 8.69e^{-j145.84^\circ} \text{ A}$ ,  $I_{C1} = 8.69e^{j94.16^\circ} \text{ A}$ .

Wartości elementów:

$$|Z_A| = \frac{230}{8.69} = 26.47 \Omega \quad \text{stad} \quad R = |Z_A| \cos \varphi = 23.82 \Omega, \quad X_L = |Z_A| \sin \varphi = 11.53 \Omega.$$

$$\text{Stąd } L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{11.53}{314} = 0.037 \text{ H}.$$

Spawarka stanowi obwód  $RL$  dołączony do napięcia liniowego

$$\text{Z mocy pozornej obliczymy wartość skuteczną prądu } |I_{AB}| = \frac{4000}{230\sqrt{3}} = 10.04 \text{ A}.$$

Napięcie międzyfazowe  $U_{AB} = E_{AB} = 230\sqrt{3}e^{j30^\circ} \text{ V}$ , (patrz wykres wektorowy)

Z wartości  $\cos \varphi = 0.7$  mamy  $\varphi = 45.57^\circ$

Obciążenie ma jak poprzednio charakter indukcyjny, więc faza prądu wynosi:

$$\varphi_{AB} = 30^\circ - 45.57^\circ = -15.57^\circ, \text{ a wartość zespolona } I_{AB} = 10.04e^{-j15.57^\circ} \text{ A}.$$

Wartości elementów:

$$|Z_{AB}| = \frac{230\sqrt{3}}{10.04} = 39.68 \Omega \quad \text{stad} \quad R_{AB} = |Z_{AB}| \cos \varphi = 27.77 \Omega, \quad X_{AB} = |Z_{AB}| \sin \varphi = 28.33 \Omega$$

$$\text{Stąd } L_{AB} = \frac{X_{AB}}{\omega} = \frac{28.33}{314} = 0.09 \text{ H}$$

Z prądowego prawa Kirchoffa obliczamy prądy.

$$I_A = I_{A1} + I_{AB} = 8.69e^{-j25.84^\circ} + 10.04e^{-j15.57^\circ} = 18.66e^{-j20.33^\circ} \text{ A}.$$

$$I_B = I_{B1} - I_{AB} = 8.69e^{-j145.84^\circ} - 10.04e^{-j15.57^\circ} = 17e^{j187.4^\circ} \text{ A}.$$

$$I_C = I_{C1} = 8.69e^{j94.16^\circ} \text{ A}.$$

Amperomierze wskażą:

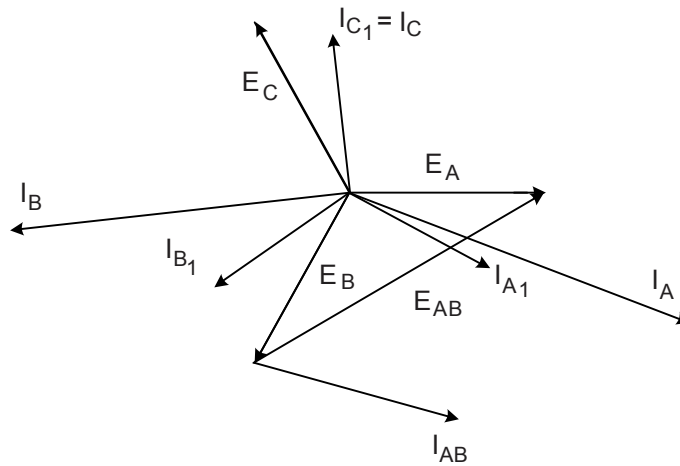
$$A_A = 18.66 \text{ A}, \quad A_B = 17 \text{ A}, \quad A_C = 8.69 \text{ A}.$$

W celu sprawdzenia poprawności obliczeń wystarczy dodać wartości zespolone prądów

$I_A + I_B + I_C = 0$  co ma miejsce w linii trójprzewodowej.

Rys. 4.11b przedstawia wykres wektorowy.

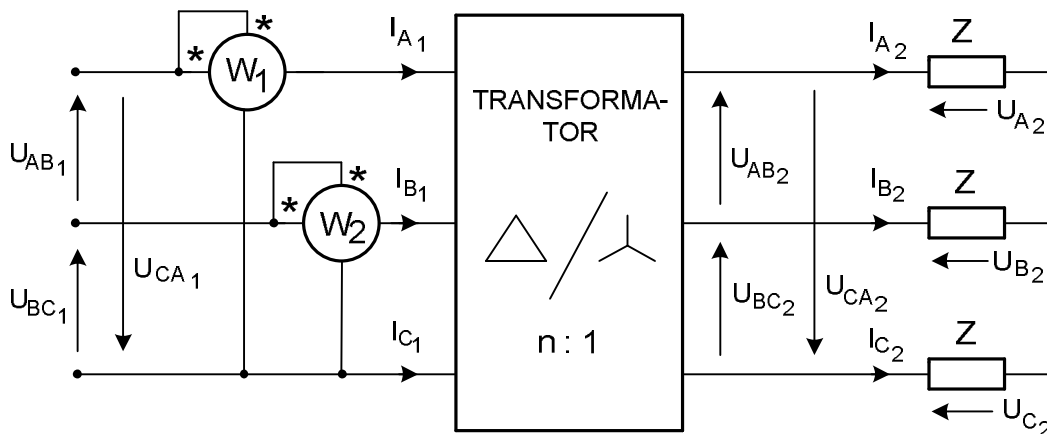




Rys. 4.11b.

**Zad. 4.12.** Dla obwodu jak na rysunku 4.12a, transformator został obciążony układem symetrycznym połączonym w gwiazdę o impedancji faz  $Z = 12 \Omega$ , Przekładnia transformatora  $n = 50$ .

Napięcia liniowe wynoszą:  $U_{AB_1} = 6000 \text{ V}$ ,  $U_{BC_1} = 6000e^{-j120^\circ}$ ,  $U_{CA_1} = 6000e^{j120^\circ}$   
Obliczyć moc czynną pobieraną przez odbiornik.



Rys. 4.12a

Rozwiązanie:

$$U_{AB_2} = \frac{\sqrt{3}}{n} U_{AB_1} e^{j30^\circ} = 208 e^{j30^\circ} \text{ V}, \quad U_{A_2} = \frac{1}{\sqrt{3}} U_{AB_2} e^{-j30^\circ} = 120 \text{ V}, \quad I_{A_2} = \frac{U_{A_2}}{Z} = 10 \text{ A},$$

Prądy watomierzy wynoszą:

$$I_{A_1} = \frac{\sqrt{3}}{n} I_{A_2} e^{-j30^\circ} = \sqrt{3} \cdot 0.2 e^{-j30^\circ} \text{ A}, \quad I_{B_1} = I_{A_1} e^{-j120^\circ} = \sqrt{3} \cdot 0.2 e^{-j150^\circ} \text{ A},$$

Napięcia na watomierzach:

$$U_{AC_1} = -6000 e^{j120^\circ} = 6000 e^{-j60^\circ} \text{ V}, \quad (\text{znak minus oznacza odwrócenie fazy napięcia } U_{CA_1})$$

$$U_{BC_1} = 6000e^{-j120^\circ} \text{ V}$$

Moce pozorne zespolone

$$S_1 = U_{AC_1} I_{A_1}^* = (1799 - j1039) \text{ VA} \quad \text{stąd } P_1 = 1799 \text{ W}$$

$$S_2 = U_{BC_1} I_{B_1}^* = (1799 + j1039) \text{ VA} \quad \text{stąd } P_2 = 1799 \text{ W}$$

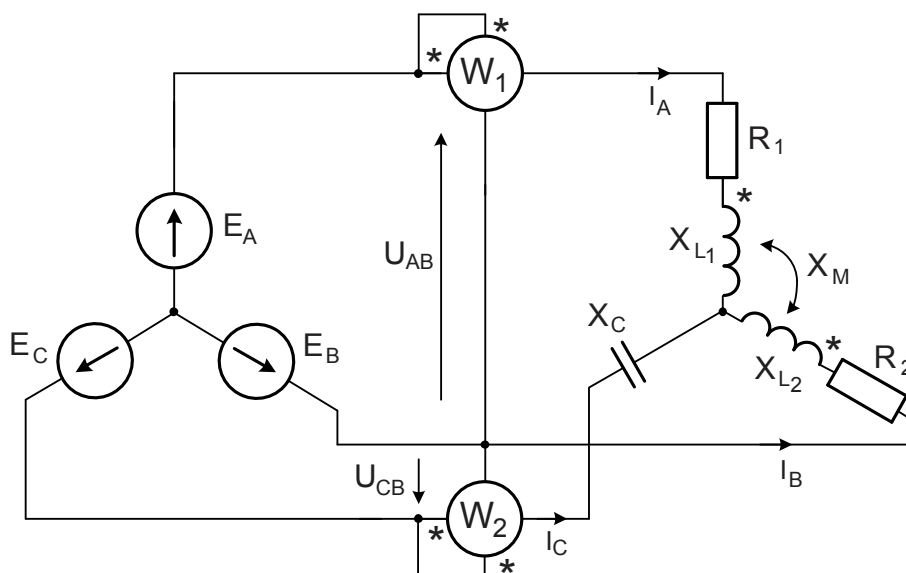
$$\text{Moc całkowita } P = P_1 + P_2 = 3598 \text{ W}$$

Sprawdzenie: Moc czynna wydzieli się w obciążeniu które ma charakter rezystancyjny

$3 \times 12 \Omega$ . Prąd w rezystorze wynosi 10 A. Moc czynna  $3 \times RI^2 = 3600 \text{ W}$ .

Niewielkie różnice w obliczeniach wynikają z zaokrągleń liczb.

**Zad. 4.13.** W obwodzie jak na rys. 4.13a. generator symetryczny o napięciu fazowym  $e_A(t) = 230\sqrt{2} \sin 314t \text{ V}$ , zasila odbiornik połączony w niesymetryczną gwiazdę. Obliczyć wskazania watomierzy. Dane:  $R_1 = 20 \Omega$ ,  $R_2 = 10 \Omega$ ,  $X_{L1} = 30 \Omega$ ,  $X_{L2} = 20 \Omega$ ,  $X_M = 10 \Omega$ ,  $X_C = 10 \Omega$ . Narysować wykres wektorowy.



**Rys. 4.13a.**

**Rozwiązanie**

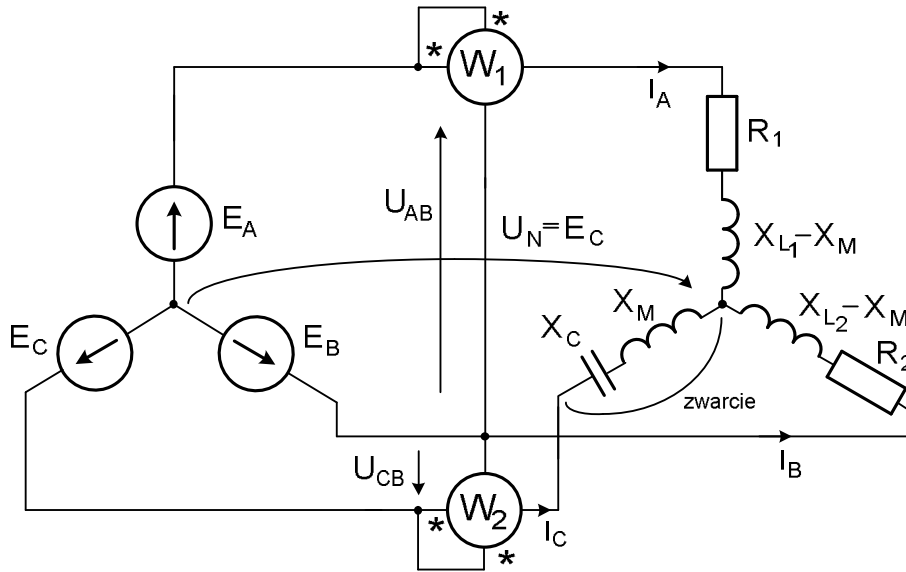
Dokonyjemy eliminacji sprzężenia magnetycznego. Sprzężenie jest dodatnie, prądy  $I_A$  i  $I_B$  są skierowane do gwiazdek.

W obwodzie wystąpił rezonans napięć,  $Z_C = jX_M - jX_C = j10 - j10 = 0$

Stąd w gałęzi C jest to zwarcie  $U_C = 0$

$$U_N = E_C = 230e^{-j120^\circ}$$

Przyjęto  $|E_{AB}| = \sqrt{3}|E_A| = 230\sqrt{3} \approx 400$  V napięcie międzyfazowe (liniowe)



Rys. 4.13b.

Impedancje pozostałych faz

$$Z_A = R_1 + jX_{L1} - jX_M = 20 + j30 - j10 = 20 + j20 = 20\sqrt{2}e^{j45^\circ} \Omega.$$

$$Z_B = R_2 + jX_{L2} - jX_M = 10 + j20 - j10 = 10 + j10 = 10\sqrt{2}e^{j45^\circ} \Omega.$$

Napięcia fazowe

$$U_A = E_A - U_N = 230e^{j0} - 230e^{120} = 230 \left[ 1 - \left( -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right] \approx 400e^{-j30^\circ} \text{ V.}$$

$$U_B = E_B - U_N = 230e^{-j120} - 230e^{j120} = 230 \left[ \left( -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \left( -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right] \approx 400e^{-j90^\circ} \text{ V.}$$

$$U_C = E_C - U_N = 0 \quad \text{rezonans napięć (zwarcie)}$$

Prądy fazowe

$$I_A = \frac{U_A}{Z_A} = \frac{400e^{-j30^\circ}}{20\sqrt{2}e^{j45^\circ}} = 10\sqrt{2}e^{-j75^\circ} \text{ A.}$$

$$I_B = \frac{U_B}{Z_B} = \frac{400e^{-j90^\circ}}{10\sqrt{2}e^{j45^\circ}} = 20\sqrt{2}e^{-j135^\circ} \text{ A.}$$

Prądu  $I_C$  nie można obliczyć w sposób jak powyżej ponieważ napięcie i impedancja fazy C równają się zero.

Prąd  $I_C$  obliczymy na podstawie prądowego prawa Kirchhoffa.

$$I_A + I_B + I_C = 0$$

Stąd

$$I_C = -I_A - I_B = -10\sqrt{2}e^{-j75^\circ} - 20\sqrt{2}e^{-j135^\circ} = 37.41e^{j64^\circ} \text{ A.}$$

Moc pozorna zespolona

$$S_1 = U_{AB} I_A^* = 400e^{j30^\circ} \cdot 10\sqrt{2}e^{j75^\circ} = 5656.85e^{j105^\circ} = 5656.85(\cos 105^\circ + j \sin 105^\circ) = -1464 + j5464.1 = P_1 + jQ_1$$

$$S_2 = U_{CB} I_C^* = 400 e^{j90^\circ} \cdot 37.41 e^{-j64^\circ} = 14964 e^{j26^\circ} = 14964 (\cos 26^\circ + j \sin 26^\circ) = 13449 + j 6559.7 = P_2 + j Q_2$$

Watomierze wskazują moc czynną  $P$ .

Suma wskazań dwóch watomierzy włączonych jak na rysunku ...wskazują moc czynną całego obciążenia.

Stąd

$$P = P_1 + P_2 = -1464 + 13449 = 11985 \text{ W.}$$

Poprawność rozwiązania sprawdzimy obliczając moc czynną w rezystorach  $R_1$  i  $R_2$ .

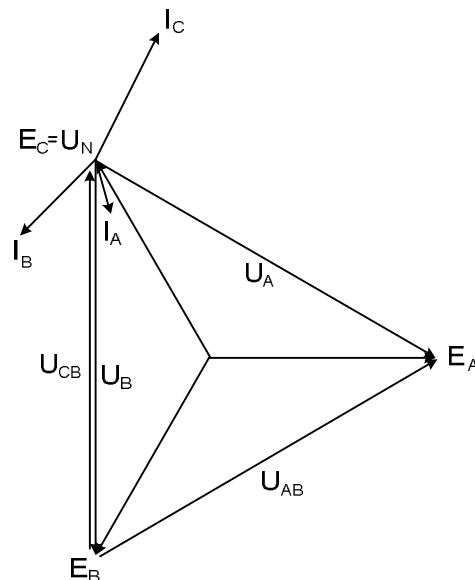
$$P_{R1} = R_1 \cdot |I_1|^2 = 20 \cdot (10\sqrt{2})^2 = 4000 \text{ W.}$$

$$P_{R2} = R_2 \cdot |I_2|^2 = 10 \cdot (20\sqrt{2})^2 = 8000 \text{ W.}$$

$$P_{R1} + P_{R2} = 12000 \text{ W.}$$

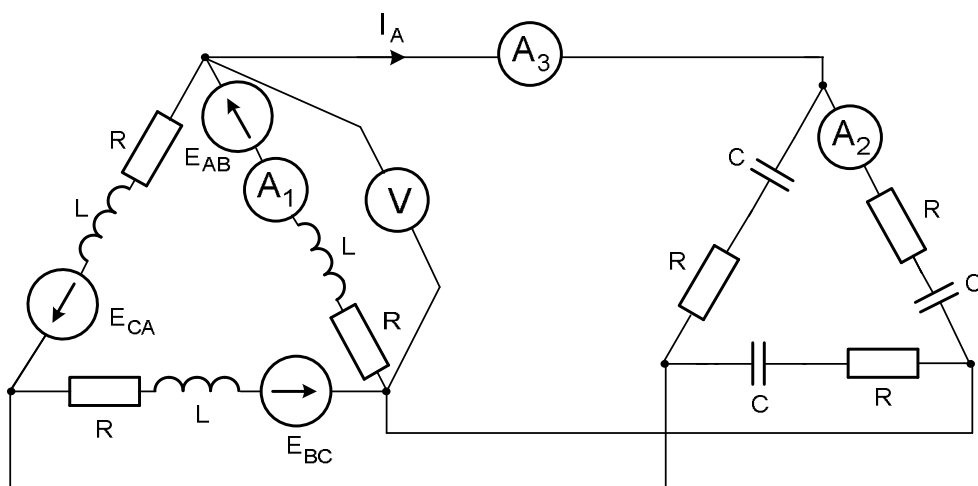
Powstała niewielka różnica, wynika z zaokrąglenia liczb przy obliczeniach.

Rys.4.13c. przedstawia wykres wektorowy prądów i napięć. Na wykresie zaznaczono również napięcia przyłożone do poszczególnych watomierzy.



**Rys. 4.13c**

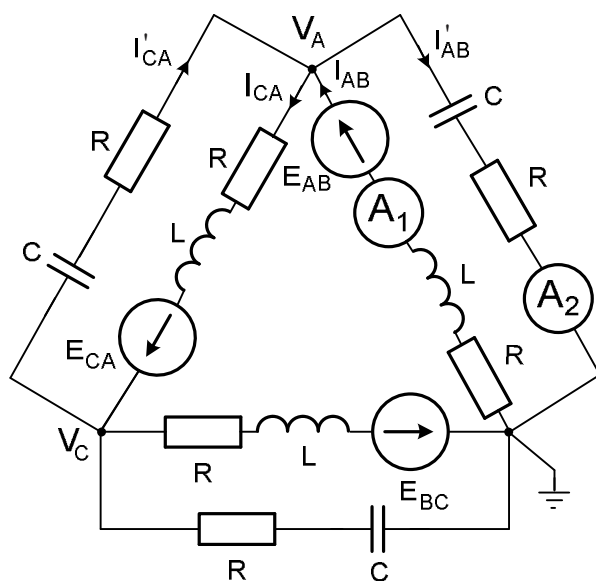
**Zad. 4.14.** Generator trójfazowy symetryczny połączony w trójkąt rys.4.14a. o zadanych wartościach impedancji wewnętrznej zasila odbiornik połączony w trójkąt. Obliczyć wskazania przyrządów.  $e_A(t) = 230\sqrt{2} \sin 314t \text{ V}$ ,  $R = X_L = X_C = 0.5 \Omega$



Rys. 4.14a

### Rozwiązanie

Przedstawiony w zadaniu schemat narysujemy dogodniej do obliczenia metodą potencjałów węzłowych (widać prosto elementy między węzłami oraz dołączone jedną końcówką do wybranego węzła). Przedstawiono to na rys. 4.14b. Uziemiono jeden z węzłów, dla pozostałych wypisano równania.



Rys. 4.14b.

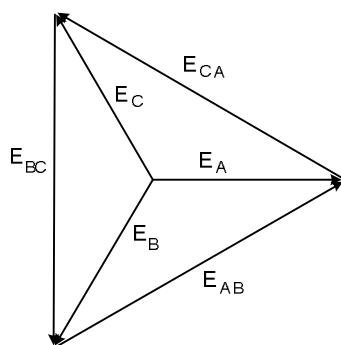
Admitancje poszczególnych gałęzi

$$Y_{RC} = \frac{1}{R - jX_C} = \frac{1}{0.5 - j0.5} = 1 + j \text{ S}, \quad Y_{RL} = \frac{1}{R + jX_L} = \frac{1}{0.5 + j0.5} = 1 - j \text{ S}$$

Napięcia międzyfazowe (liniowe)  $E_{AB} = 230\sqrt{3}e^{j30^\circ} \approx 400e^{j30^\circ} \text{ V}$ .

$$E_{AB} = 400 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2} \right) = 200\sqrt{3} + j200 \text{ V}.$$

Pozostałe napięcia generatora tworzą trójkąt zamknięty i wynoszą, rys. 4.14c.



**Rys. 4.13c**

$$E_{CA} = 400 \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2} \right) = -200\sqrt{3} + j200 \text{ V}$$

$$E_{BC} = -j400 \text{ V}$$

Równania potencjałów

$$V_A(2Y_{RL} + 2Y_{RC}) - V_C(Y_{RL} + Y_{RC}) = E_{AB}Y_{RC} - E_{CA}Y_{RC}$$

$$V_C(2Y_{RL} + 2Y_{RC}) - V_A(Y_{RL} + Y_{RC}) = E_{CA}Y_{RC} - E_{BC}Y_{RC}$$

podstawiając dane liczbowe

$$4V_A - 2V_C = (1+j)(200\sqrt{3} + j200) - (1+j)(-200\sqrt{3} + j200)$$

$$4V_C - 2V_A = (1+j)(-200\sqrt{3} + j200) - (1+j)(-j400)$$

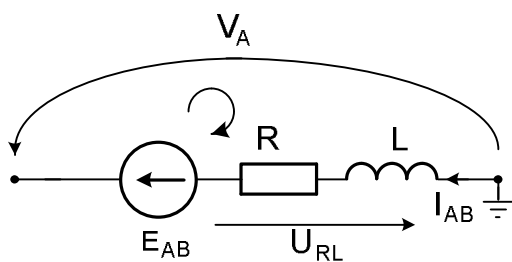
stąd

$$V_A = 100[(1+\sqrt{3}) + j(1-\sqrt{3})] \text{ V.}$$

Wskazanie woltomierza

$$|V_A| = 100\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2 + (\sqrt{3}+1)^2} = 200\sqrt{2} \text{ V.}$$

Wskazanie amperomierza  $A_1$ , ilustruje rys. 4.14d



**Rys. 4.14d**

z napięciowego prawa Kirchhoffa (oczko)

$$E_{AB} - V_A - U_{RL} = 0$$

$$E_{AB} - V_A - I_{AB} \cdot Z_{RC} = 0$$

$$Z_{RL} = 0.5 + j0.5 \Omega.$$

$$I_{AB} = \frac{E_{AB} - V_A}{Z_{RL}} = \frac{(200\sqrt{3} + j200) - 100[(1+\sqrt{3}) + j(1-\sqrt{3})]}{0.5 + j0.5} = 200(\sqrt{3} + j) \text{ A.}$$

$$|I_{A1}| = |I_{AB}| = 200\sqrt{1+3} = 400 \text{ A.}$$

Prąd amperomierza A<sub>2</sub>

$$I_{AB}' = \frac{V_A}{Z_{RC}} = 200(\sqrt{3} + j) \text{ A.}$$

$$|I_{A2}| = |I_{AB}'| = 400 \text{ A.}$$

Z rozwiązania wynika, że prądy amperomierzy A<sub>1</sub> i A<sub>2</sub> są równe.

Obliczamy prąd  $I_{CA}$ , potrzebny do obliczenia wskazań amperomierza A<sub>3</sub>

$$I_{CA} = \frac{E_{CA} + (V_A - V_C)}{Z_{RL}} = -200\sqrt{3} + j200 = 200(-\sqrt{3} + j) \text{ A.}$$

Prąd amperomierza A<sub>3</sub>

$$I_A = I_{AB} - I_{CA} = 200(\sqrt{3} + j) - [200(-\sqrt{3} + j)] = 400\sqrt{3} \text{ A.}$$

$$|I_{A3}| = |I_A| = 400\sqrt{3} \text{ A}$$

Zadanie można obliczyć bezpośrednio wykorzystując symetrie obwodów trójfazowych.

$$E_{AB} = Z_{RL} \cdot I_{AB} + Z_{RC} \cdot I_{AB}'$$

$$I_{AB} - I_{AB} e^{j120^\circ} = I_{AB}' - I_{AB}' e^{j120^\circ}$$

$$I_{AB}(1 - e^{j120^\circ}) = I_{AB}'(1 - e^{j120^\circ})$$

$$I_{AB} = I_{AB}'$$

$$E_{AB} = (Z_{RL} + Z_{RC}) I_{AB}$$

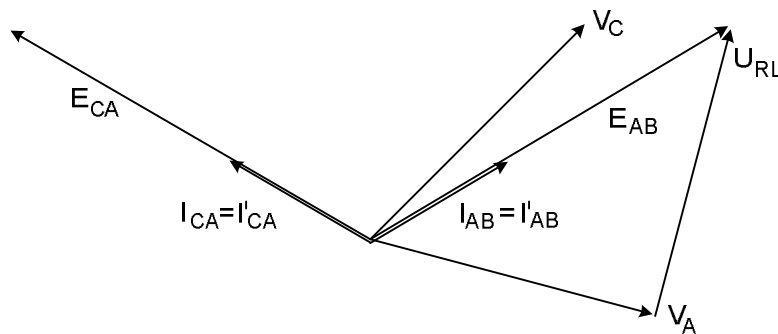
$$I_{AB} \frac{E_{AB}}{Z_{RL} + Z_{RC}} = \frac{200(\sqrt{3} + j)}{0.5 + j0.5 + 0.5 - j0.5} = 200(\sqrt{3} + j) \text{ A.}$$

$$I_{AB}' = 200(\sqrt{3} + j) \text{ A.}$$

Wskazanie amperomierza A<sub>1</sub> jest równe wskazaniu amperomierza A<sub>2</sub> i wynosi 400 A.

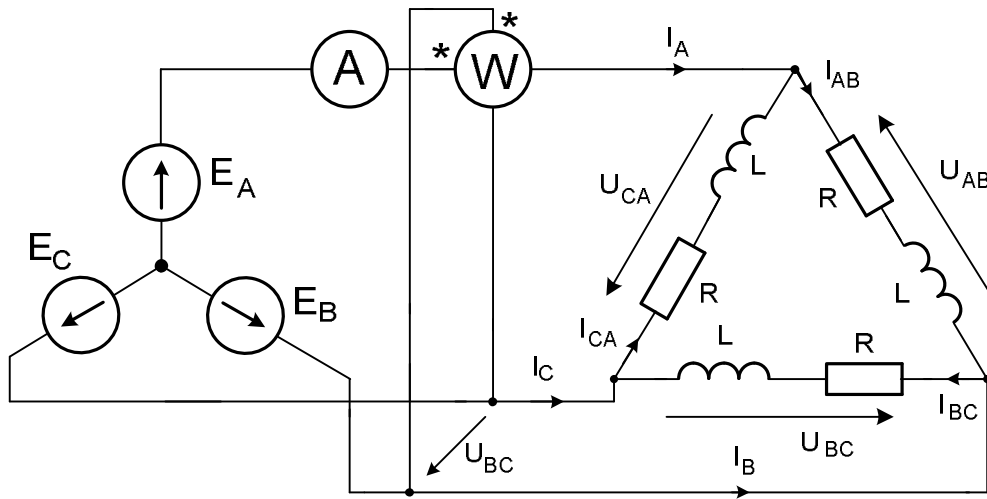
Wskazanie amperomierza A<sub>3</sub> jest równe  $400\sqrt{3}$  A.

Na rysunku 4.14e. przedstawiono wykres wektorowy obliczonych napięć i prądów



**Rys. 4.14e.**

**Zad. 4.15.** Generator trójfazowy symetryczny zgodny o napięciu fazy  $e_A(t) = 200\sqrt{2} \sin t$  V rys. 4.15a, zasila odbiornik trójfazowy połączony w symetryczny trójkąt o impedancji faz  $R = 50 \Omega$ ,  $X_L = 60 \Omega$ . Obliczyć wskazania przyrządów. Co mierzy tak włączony watomierz. Narysować wykres wektorowy.



Rys. 4.15a

### Rozwiązanie

Napięcia liniowe (międzyfazowe) przyłożone do faz trójkąta wynoszą.

$$E_{AB} = 200\sqrt{3}e^{j30^\circ} \text{ V.}$$

$$E_{BC} = 200\sqrt{3}e^{-j90^\circ} \text{ V.}$$

$$E_{CA} = 200\sqrt{3}e^{j150^\circ} \text{ V.}$$

Impedancja faz

$$Z_{AB} = Z_{BC} = Z_{CA} = 50 + j60 = 78.1e^{j50.19^\circ} \Omega. \quad \varphi = 50.19^\circ$$

Prądy fazowe

$$I_{AB} = \frac{E_{AB}}{Z_{AB}} = \frac{200\sqrt{3}e^{j30^\circ}}{78.1e^{j50.19^\circ}} = 4.43e^{-j20.19^\circ} \text{ A.}$$

Pozostałe prądy można napisać z symetrii układu, będą przesunięte w fazie o  $120^\circ$  względem siebie i będą miały równe moduły.  
stąd

$$I_{CA} = 4.43e^{j(-20.19^\circ + 120^\circ)} = 4.43e^{j98.81^\circ} \text{ A.}$$

$$I_{BC} = 4.43e^{j(-20.19^\circ - 120^\circ)} = 4.43e^{-j140.19^\circ} \text{ A.}$$

Prąd  $I_A$  obliczymy z I-go prawa Kirchhoffa.

$$I_A = I_{AB} - I_{CA} = 4.43e^{-j20.19^\circ} - 4.43e^{j98.81^\circ} = 7.67e^{-j50.19^\circ} \text{ A.}$$

Prąd ten można również napisać bezpośrednio wykorzystując symetrię układu.

Prąd  $I_A$  jest przesunięty (opóźniony) względem prądu  $I_{AB}$  o  $30^\circ$ , a jego moduł jest o  $\sqrt{3}$  większy od modułu  $I_{AB}$

$$I_A = 4.43\sqrt{3}e^{j(-20.19^\circ - 30^\circ)} = 7.67e^{-j50.19^\circ} \text{ A.}$$

Amperomierz wskaże wartość 7.67 A.

Wskazanie watomierza

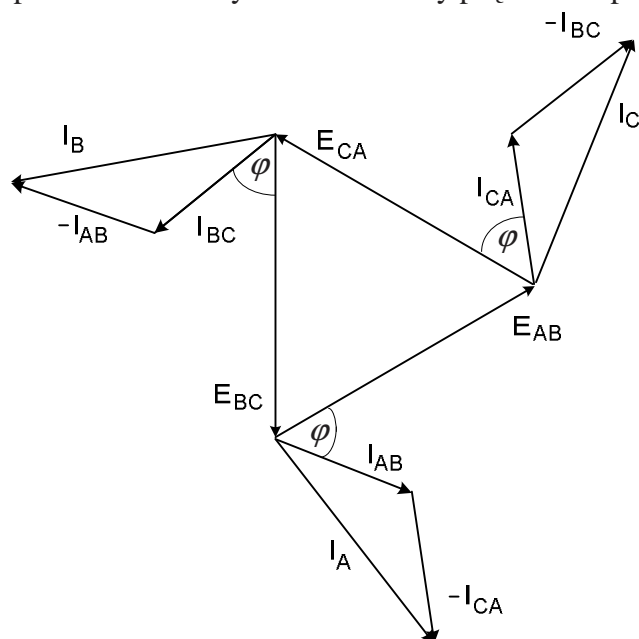
$$S = U_{BC} \cdot I_A^* = 200\sqrt{3}e^{-j90^\circ} \cdot 7.67e^{j50.19^\circ} = 2656.96e^{-j39.81^\circ} = (2040.54 - j1700.45) \text{ VA.}$$

Watomierz wskaże wartość 2040.54 W.



Tak włączony watomierz służy do pomiaru mocy biernej w odbiorniku symetrycznym zasilanym linią trójprzewodową. Wskazanie watomierza należy pomnożyć przez  $\sqrt{3}$   
 $Q = 2040.54\sqrt{3} = 3534.31 \text{ var}$ .

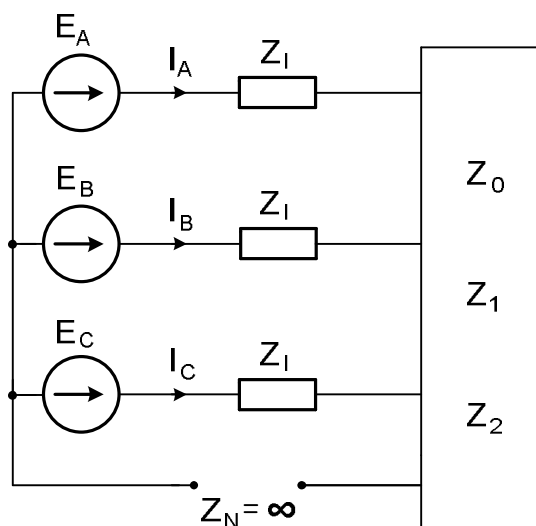
Na rys. 4.15b. przedstawiono wykres wektorowy prądów i napięć.



**Rys. 4.15b.**

**Zad. 4.16.** Silnik indukcyjny przedstawiony na rys. 4.16a. zasilany jest z niesymetrycznego napięcia o napięciach fazowych:  $E_A = 115 \text{ V}$ ,  $E_B = 230e^{-j120^\circ} \text{ V}$ ,  $E_C = 230e^{j120^\circ} \text{ V}$ .

Impedancje silnika dla poszczególnych harmoniczných są równe  $Z_0 = (8 + j12) \Omega$ ,  $Z_1 = (15 + j10) \Omega$ ,  $Z_2 = 5 \Omega$ , a impedancje linii zasilających  $Z_l = j5 \Omega$ . Obliczyć prądy fazowe.



**Rys. 4.16a**

**Rozwiązanie**

Ponieważ układ nie ma przewodu zerowego, więc składowa zerowa prądu nie płynie,  $I_0 = 0$ . Obliczymy składową zgodną i przeciwną.

$$E_1 = \frac{1}{3}(E_A + aE_B + a^2E_C) = \frac{1}{3}(115 + e^{j120^\circ} \cdot 230e^{-j120^\circ} + e^{-j120^\circ} \cdot 230e^{j120^\circ}) = 191.7 \text{ V}$$

$$E_2 = \frac{1}{3}(E_A + a^2E_B + aE_C) = \frac{1}{3}(115 + e^{-j120^\circ} \cdot 230e^{-j120^\circ} + e^{j120^\circ} \cdot 230e^{j120^\circ}) = -38.3 \text{ V}$$

a następnie składową zgodną i przeciwną prądu

$$I_1 = \frac{E_1}{Z_l + Z_1} = \frac{191.7}{j5 + 15 + j10} = 9.04e^{-j45^\circ} \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{E_2}{Z_l + Z_2} = \frac{-38.3}{j5 + 5} = \frac{38.3e^{j180^\circ}}{5\sqrt{2}e^{j45^\circ}} = 5.41e^{j135^\circ} \text{ A}$$

Obliczymy prądy fazowe

$$I_A = I_0 + I_1 + I_2 = 9.04e^{-j45^\circ} + 5.41e^{j135^\circ} = 2.57 - j2.57 = 3.62e^{-j45^\circ} \text{ A}$$

$$I_B = I_0 + a^2I_1 + aI_2 = e^{-j120^\circ} \cdot 9.04e^{-j45^\circ} + e^{j120^\circ} \cdot 5.41e^{j135^\circ} = -10.14 - j7.56 = 12.64e^{j216.7^\circ} \text{ A}$$

$$I_C = I_0 + aI_1 + a^2I_2 = e^{j120^\circ} \cdot 9.04e^{-j45^\circ} + e^{-j120^\circ} \cdot 5.41e^{j135^\circ} = 7.56 + j10.14 = 12.64e^{j53.32^\circ} \text{ A}$$

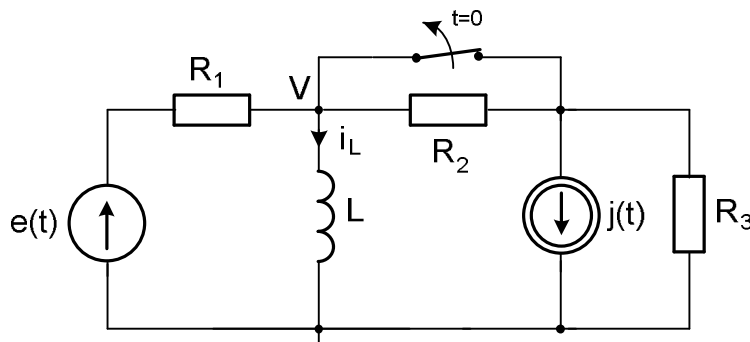
$$|I_A| = 3.62 \text{ A}, \quad |I_B| = |I_C| = 12.64 \text{ A}.$$

## 5. Obwody o wymuszeniu okresowym niesinusoidalnym

**Zad. 6.5** W obwodzie na rys. 6.5a przed otwarciem wyłącznika był stan ustalony. Obliczyć przebieg prądu w indukcyjności po otwarciu wyłącznika. Korzystając z twierdzenia Thevenina zastąpić obwód rezystancyjny szeregowym połączeniem źródła napięcia i rezystora oraz wykorzystać wyrażenie na prąd w indukcyjności w szeregowym obwodzie  $RL$ .

$$e(t) = 100\sqrt{2} \sin\left(100t + \frac{\pi}{2}\right), \quad j(t) = 6\sqrt{2} \sin\left(100t - \frac{\pi}{2}\right), \quad R_1 = 20 \, \Omega, \quad R_2 = R_3 = 10 \, \Omega,$$

$$L = 0.1 \text{ H}$$



Rys. 6.5a

R o z w i ą z a n i e :

$$E = 100e^{j90^\circ} = j100, \quad J = 6e^{-j90^\circ} = -j6, \quad X_L = \omega L = 0.1 \cdot 100 = 10 \, \Omega.$$

Obliczamy warunki początkowe

Prąd w indukcyjności obliczymy metodą potencjałów węzłowych.

$$V \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{jX_L} \right) = \frac{E}{R_1} - J$$

$$V \left( \frac{1}{20} + \frac{1}{10} + \frac{1}{j10} \right) = \frac{j100}{20} - (-j6)$$

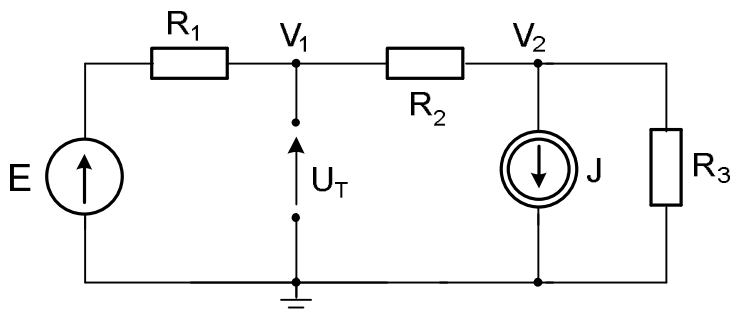
Stąd wartość zespolona

$$V = \frac{j220}{3 - j2}, \quad I_L = \frac{V}{jX_L} = \frac{22}{3 - j2} = 6.11e^{j33.7^\circ}$$

Wartość czasowa

$$i_L(t) = 6.11\sqrt{2} \sin(100t + 33.7^\circ), \quad \text{dla } t = 0 \rightarrow i_L(0) = 4.79 \text{ A}$$

Po otwarciu wyłącznika obwód przedstawiono na rys. 6.5b. Wyłączamy indukcyjność i w jej miejscu obliczamy napięcie Thevenina oraz rezystancję Thevenina.



Rys. 6.5b

$U_T = V_1$ , obliczone zostanie metodą potencjałów węzłowych

$$V_1 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - V_2 \frac{1}{R_2} = \frac{E}{R_1}$$

$$V_2 \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) - V_1 \frac{1}{R_2} = -J$$

Podstawiając dane

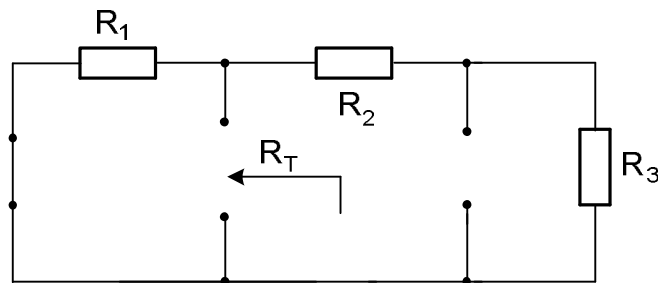
$$V_1 \left( \frac{1}{20} + \frac{1}{10} \right) - V_2 \frac{1}{10} = j5$$

$$V_2 \left( \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \right) - V_1 \frac{1}{10} = -(-j6)$$

Stąd

$$V_1 = U_T = j80$$

Schemat do obliczenia rezystancji Thevenena przedstawiono na rys. 6.5. Źródło napięciowe zostało zwarte, a źródło prądowe rozwarte.



**Rys. 6.5c**

$$R_T = \frac{R_1 \cdot (R_2 + R_3)}{R_1 + (R_2 + R_3)} = 10 \Omega$$

Stała czasowa obwodu

$$\tau = \frac{L}{R_T} = \frac{0.1}{10} = 0.01 \text{ s} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\tau} = 100$$

Wartość czasowa źródła zastępczego

$$u_T = 80\sqrt{2} \sin(100t + 90^\circ), \quad U_m = 80\sqrt{2}$$

Wartość czasową prądu cewki obliczymy bezpośrednio z wartości czasowej jej napięcia.

$$Z_{RL} = 10 + j10 \rightarrow |Z_{RL}| = \sqrt{R_T^2 + X_L^2} = 10\sqrt{2} \Omega.$$

$$\varphi = \arctg \frac{X_L}{R_T} = 1 \rightarrow \varphi = 45^\circ \quad (\text{prąd } i_L \text{ będzie się spóźniał względem napięcia cewki})$$

Stąd

$$i_{Lu} = \frac{U_m}{|Z_{RL}|} \sin(\omega t + 90^\circ - \varphi) = \frac{80\sqrt{2}}{10\sqrt{2}} \sin(100t + 90^\circ - 45^\circ) = 8 \sin(100t + 45^\circ)$$

Składowa ustalona dla  $t = 0$

$$i_{Lu}(0) = 5.67 \text{ A.}$$

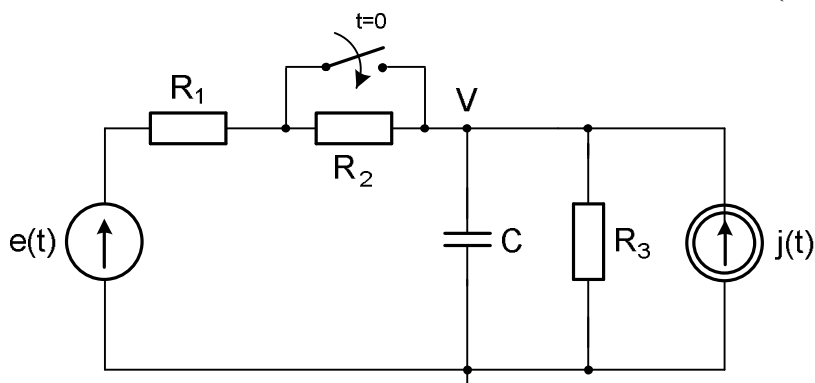
W wyniku prąd nieustalony wyraża się następująco

$$i_L = i_{Lu}(t) + [i_L(0) - i_{Lu}(0)]e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$i_L = 8 \sin(100t + 45^\circ) + (4.78 - 5.67)e^{-100t} = 8 \sin(100t + 45^\circ) - 0.88e^{-100t}$$

**Zad. 6.6.** W obwodzie jak na rys. 6.6a przed zamknięciem wyłącznika był stan ustalony, obliczyć napięcie na kondensatorze po zamknięciu wyłącznika. Korzystając z twierdzenia Thevenina zastąpić obwód rezystancyjny szeregowym połączeniem źródła napięcia i rezystora oraz wykorzystać wyrażenie na napięcie kondensatora w szeregowym obwodzie RC

$$R_1 = R_2 = R_3 = 4 \Omega, \quad C = 5 \text{ mF}, \quad e(t) = 64\sqrt{2} \sin 100t \text{ V}, \quad j(t) = 6\sqrt{2} \sin\left(100t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ A}.$$



Rys. 6.6a

Rozwiązanie

Obliczamy warunki początkowe

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{100 \cdot 5 \cdot 10^{-3}} = 2 \Omega, \quad Z_C = -j2 \Omega, \quad Y_C = j\frac{1}{2} \text{ S}.$$

$$E = 64, \quad J = -j6$$

$$V \left( \frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{Z_C} \right) = \frac{E}{R_1 + R_2} + J$$

$$V \left( \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{-j2} \right) = \frac{64}{8} - j6$$

Stąd

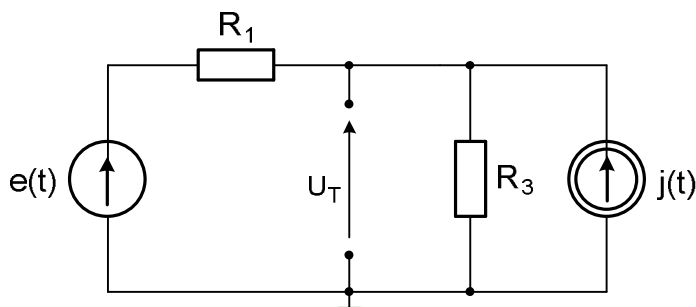
$$V = -j16 \text{ V}$$

Wartość czasowa

$$v(t) = u_C(t) = 16\sqrt{2} \sin(100t - 90^\circ) \text{ V}$$

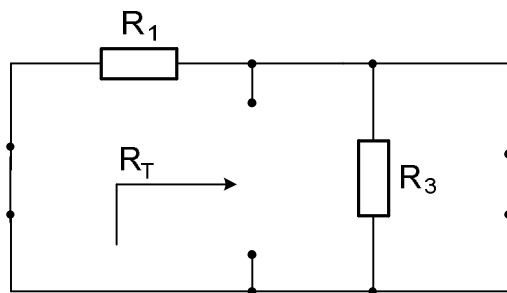
$$u_C(0) = -16\sqrt{2} \approx -22.62 \text{ V}$$

Po zamknięciu wyłącznika obwód przedstawiono na rys. 6.6b. Wyłączamy pojemność i w jej miejscu obliczamy napięcie Thevenina



Rys. 6.6b

Oraz rezystancję Thevenina, rys. 6.6c



**Rys. 6.6c**

$$R_T = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3} = 2 \Omega, \quad (\text{zwarte źródło napięcia i rozwarne źródło prądu})$$

$$U_T \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \right) = \frac{E}{R_1} + J$$

$$U_T \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) = \frac{64}{4} - j6$$

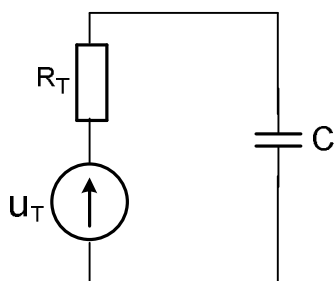
Stąd

$$U_T = 32 - j12 = 34.18e^{-j20.55^\circ} \text{ V}$$

Wartość czasowa źródła zastępczego

$$u_T = 34.18\sqrt{2} \sin(100t - 20.55^\circ), \quad U_m = 34.18\sqrt{2}$$

$$R_T = 2 \Omega, \quad \frac{1}{\omega C} = 2 \Omega, \quad \rightarrow \quad \omega C = 0.5 \text{ S}$$



**Rys. 6.6d**

Wartość czasową napięcia kondensatora  $u_{Cu}$  obliczymy bezpośrednio z wartości czasowej źródła zastępczego i elementów  $R_T$  i  $C$ .

$$u_{Cu} = \frac{U_m}{\omega C \sqrt{R_T^2 + \left( \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \sin \left( \omega t + \psi + \varphi - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\text{przy czym } \varphi = \arctg \frac{1}{R_T \omega C} \rightarrow \varphi = 45^\circ$$

$$u_{Cu} = \frac{34.18\sqrt{2}}{0.5\sqrt{2^2 + 2^2}} \sin \left( 100t - 20.55^\circ + 45^\circ - \frac{\pi}{2} \right) = 34.18 \sin(100t - 65.55^\circ) \text{ V}$$

$$u_{Cu}(0) = -31.11 \text{ V}$$

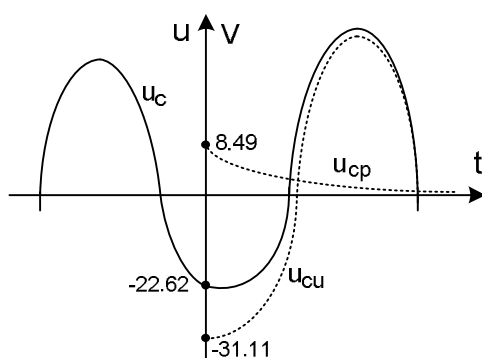
$$\tau = R_T C = 2 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 10^{-2} \rightarrow \frac{1}{\tau} = 100$$

$$u_C = u_{Cu} + [u_C(0) - u_{Cu}(0)]e^{-\frac{1}{RC}t}$$

$$u_C = 34.18 \sin(100t - 65.55^\circ) + [-22.62 - (-31.11)]e^{-100t} \text{ V}$$

$$u_C = 34.18 \sin(100t - 65.55^\circ) + 8.49e^{-100t} \text{ V}$$

Na rys. 6.6e, przedstawiono składową ustaloną i składową przejściową oraz ich sumę, która jest rzeczywistym przebiegiem napięcia na kondensatorze.

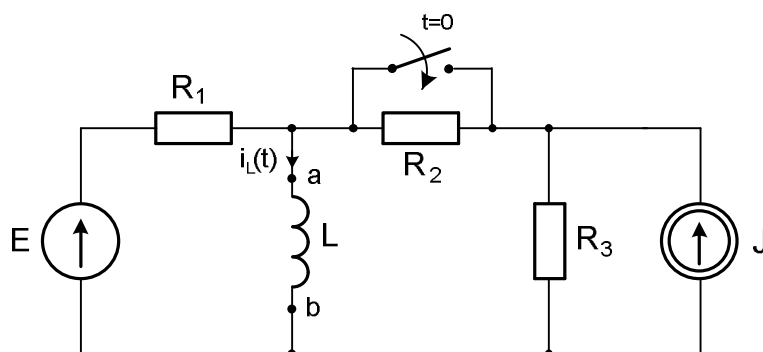


**Rys. 6.6e**

**Zad. 6.7.** W obwodzie na rys. 6.7a przed zamknięciem wyłącznika był stan ustalony. Obliczyć przebieg prądu w indukcyjności po zamknięciu wyłącznika. Korzystając z twierdzenia Thevenina zastąpić obwód rezystancyjny szeregowym połączeniem źródła napięcia i rezystora oraz wykorzystać wyrażenie na prąd w indukcyjności w szeregowym obwodzie  $RL$ .

Narysować składową ustaloną i składową przejściową.

$$E = 54 \text{ V}, \quad J = 20 \text{ A}, \quad L = 0.6 \text{ H}, \quad R_1 = 18 \Omega, \quad R_2 = 11 \Omega, \quad R_3 = 9 \Omega.$$



**Rys. 6.7a**

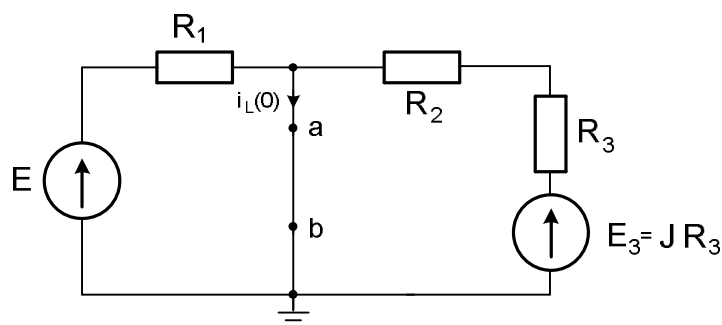
**R o z w i ą z a n i e**

Obliczamy warunki początkowe

Zamienimy źródło prądowe  $J$  na źródło napięciowe, schemat przedstawiono na rys. 7.7b

$$E_3 = R_3 \cdot J = 9 \cdot 20 = 180 \text{ V}$$



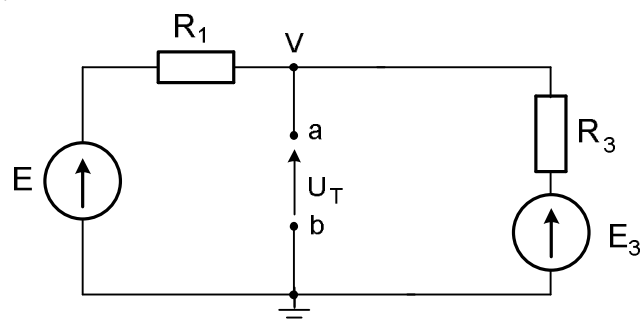


**Rys. 6.7b**

Cewka dla prądu stałego stanowi zwarcie, stąd prąd w zwartej gałęzi będzie sumą od obu wymuszeń i będzie równy warunkowi początkowemu.

$$i_L(0) = \frac{E}{R_1} + \frac{E_3}{R_2 + R_3} = \frac{54}{18} + \frac{180}{11 + 9} = 12 \text{ A}$$

Po zamknięciu wyłącznika i wyłączeniu indukcyjności na jej zaciskach obliczymy napięcie Thevenina, rys. 6.7c.



**Rys. 6.7c**

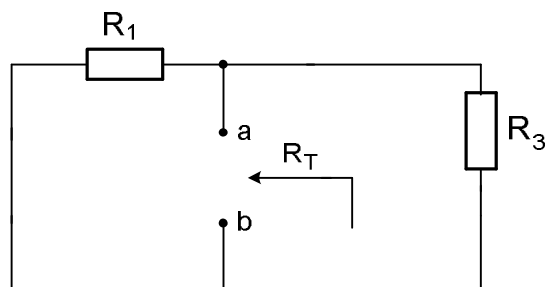
Obliczymy potencjał  $V$ , który jest równy napięciu Thevenina

$$V(G_1 + G_3) = EG_1 + E_3G_3$$

$$V\left(\frac{1}{18} + \frac{1}{9}\right) = 54 \cdot \frac{1}{18} + 180 \cdot \frac{1}{9}$$

$$\text{stąd } V = 138 \text{ V} \rightarrow U_T = 138 \text{ V}$$

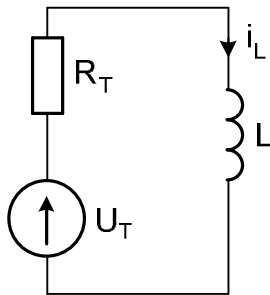
Rezystancje Thevenina obliczymy po zwarcu źródeł napięciowych, rys. 6.7d



**Rys. 6.7d**

$$R_T = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3} = \frac{18 \cdot 9}{18 + 9} = 6 \text{ } \Omega$$

Obwód przedstawia jedno oczko  $RL$  przy wymuszeniu napięciem  $U_T$ , rys. 6.7e.



**Rys. 6.7e**

Stała czasowa obwodu

$$\tau = \frac{L}{R_T} = \frac{0.6}{6} = 0.1 \text{ s} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\tau} = 10$$

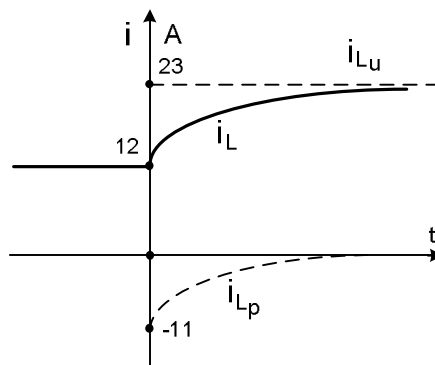
Napięcie na kondensatorze

$$i_L = \frac{U_T}{R_T} + \left[ i_L(0) - \frac{U_T}{R_T} \right] e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{gdzie} \quad \tau = \frac{L}{R_T}$$

$$i_L(t) = \frac{138}{6} + \left[ 12 - \frac{138}{6} \right] \cdot e^{-10t} = 23 - 11e^{-10t}$$

Dla  $t = 0$ ,  $i_L(0^-) = 12 \text{ A}$ , a więc sprawdza warunek początkowy.

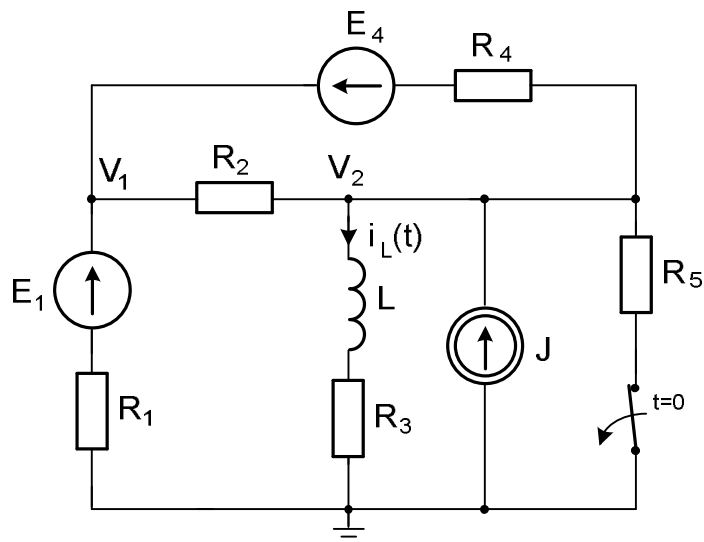
Na rys. 6.7d przedstawiono przebieg prądu w indukcyjności, oraz jego składowe: ustaloną i przejściową



**Rys. 6.7d**

**Zad. 6.8.** W obwodzie na rys. 6.8a przed otwarciem wyłącznika był stan ustalony. Obliczyć przebieg prądu w indukcyjności po otwarciu wyłącznika. Korzystając z twierdzenia Thevenina zastąpić obwód rezystancyjny szeregowym połączeniem źródła napięcia i rezystora oraz wykorzystać wyrażenie na prąd w indukcyjności w szeregowym obwodzie  $RL$ . Narysować składową ustaloną i składową przejściową.

$$E_1 = 60 \text{ V}, \quad E_4 = 80 \text{ V}, \quad J = 40 \text{ A}, \quad L = 0.15 \text{ H}, \quad R_1 = 6 \Omega, \quad R_2 = 12 \Omega, \quad R_3 = 6 \Omega, \\ R_4 = 4 \Omega, \quad R_5 = 8 \Omega.$$



Rys. 6.8a

### R o z w i ą z a n i e

W obwodzie prądu stałego w stanie ustalonym indukcyjność stanowi zwarcie  $U_L = 0$ . Prąd w indukcyjności równa się prądowi rezystora  $R_3$ , który wyznaczmy metodą potencjałów węzłowych.

$$V_1(G_1 + G_2 + G_4) - V_2(G_2 + G_4) = E_1 G_1 + E_4 G_4$$

$$V_2(G_2 + G_3 + G_4 + G_5) - V_1(G_2 + G_4) = J - E_4 G_4$$

Podstawiając dane

$$V_1 \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4} \right) - V_2 \left( \frac{1}{12} + \frac{1}{4} \right) = 60 \cdot \frac{1}{6} + 80 \cdot \frac{1}{4}$$

$$V_2 \left( \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right) - V_1 \left( \frac{1}{12} + \frac{1}{4} \right) = 40 - 80 \cdot \frac{1}{4}$$

Stąd

$$V_2 = 99.31 \text{ V}, \rightarrow i_L(0) = \frac{V_2}{R_3} = \frac{99.31}{6} = 16.55 \text{ A} \quad (\text{warunek początkowy})$$

Po komutacji i wyłączeniu indukcyjności schemat przedstawiono na rys. 7.8b

Napięcie  $U_T$  jak poprzednio zostanie obliczone metodą potencjałów węzłowych

$$V_2 = U_T$$

Rezystancja  $R_3$  jest odłączona, prąd przez nią nie płynie, napięcie na niej jest równe zero i nie wchodzi do równań węzłowych.

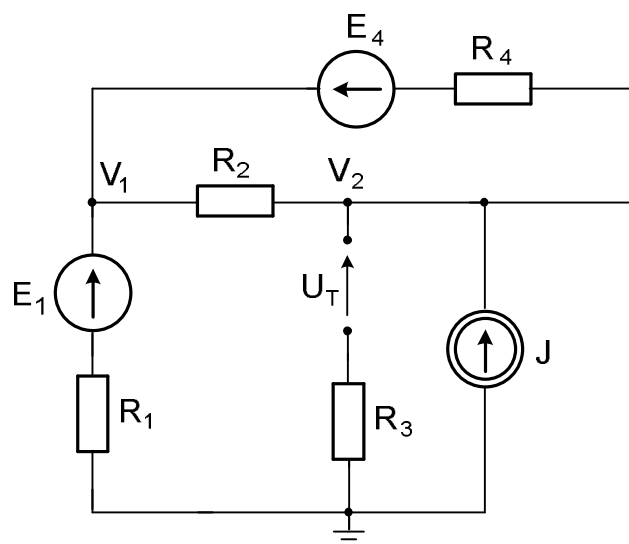
Równania węzłowe

$$V_1(G_1 + G_2 + G_4) - V_2(G_2 + G_4) = E_1 G_1 + E_4 G_4$$

$$V_2(G_2 + G_4) - V_1(G_2 + G_4) = J - E_4 G_4$$

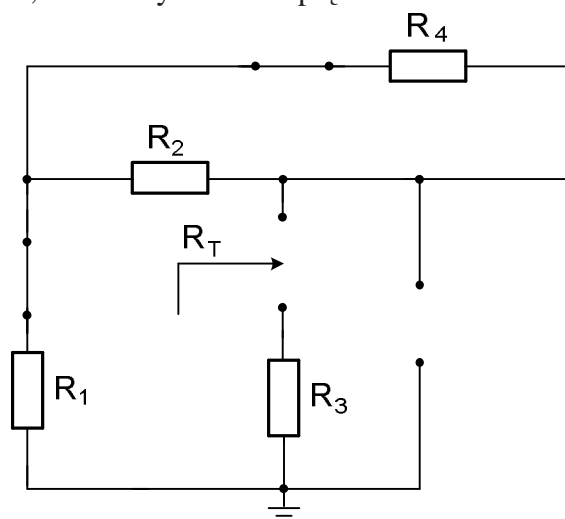
Stąd po podstawieniu danych

$$V_2 = U_T = 360 \text{ V}$$



**Rys. 6.8b**

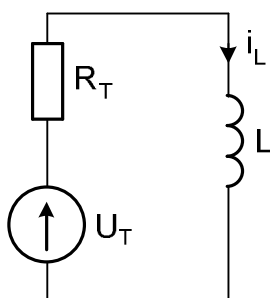
Rezystancje Thevenina, zwieramy źródła napięciowe i rozwieramy prądowe, rys.6.8c



**Rys. 6.8c**

$$R_T = R_3 + R_1 + \frac{R_2 \cdot R_4}{R_2 + R_4} = 6 + 6 + \frac{12 \cdot 4}{12 + 4} = 15 \, \Omega.$$

Schemat został zredukowany do jednego oczka, szeregowego obwodu  $RL$ , rys.6.8d.

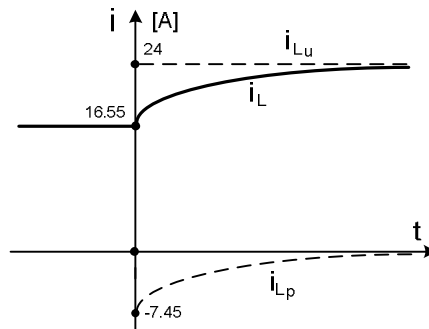


**Rys. 6.8d**

Prąd w indukcyjności

$$i_L(t) = \frac{U_T}{R_T} + \left[ i_L(0) - \frac{U_T}{R_T} \right] e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{gdzie} \quad \tau = \frac{L}{R_T} = \frac{0.15}{15} = 0.01 \rightarrow \frac{1}{\tau} = 100$$

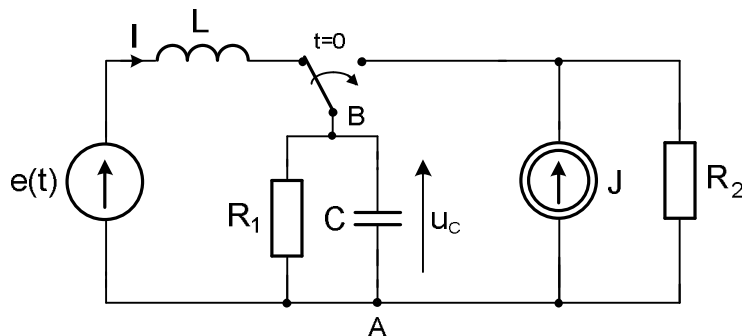
$$i_L(t) = \frac{360}{15} + \left[ 16.55 - \frac{360}{15} \right] e^{-100t} = 24 - 7.45e^{-100t}$$



Rys. 6.8e

Na rys. 6.8e. przedstawiono przebieg prądu w indukcyjności, oraz jego składowe: ustaloną i przejściową,  $i_L(t) = i_{Lu}(t) + i_{Lp}(t)$ . Poprawność rozwiązania można sprawdzić dla chwili  $t = 0$  obliczając warunek początkowy,  $24 - 7.47 = 16.55$

**Zad. 6.9.** W obwodzie jak na rys. 6.9a. obliczyć napięcie na kondensatorze po przełączeniu. Przed przełączeniem był stan ustalony. Dane:  $e(t) = 120 \sin 100t$  V,  $L = 0.1$  H,  $C = 500 \mu F$ ,  $J = 5$  A,  $R_1 = 20 \Omega$ ,  $R_2 = 80 \Omega$ . Skorzystać z twierdzenia Thevenina w zastosowaniu do stanów nieustalonych.



Rys. 6.9a.

Rozwiązanie

Warunki początkowe

Obliczamy impedancje zastępczą na zaciskach AB

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{100 \cdot 500 \cdot 10^{-6}} = 20 \Omega, \quad X_L = \omega L = 100 \cdot 0.1 = 10 \Omega.$$

$$Z_{AB} = \frac{R_1 \cdot (-jX_C)}{R_1 - jX_C} = \frac{20 \cdot (-j20)}{20 - j20} = 10 - j10 = 10\sqrt{2}e^{-j45^\circ} \Omega.$$

$$I = \frac{E}{Z_{AB} + jX_L} = \frac{120}{\sqrt{2}(10 - j10 + j10)} = 6\sqrt{2} \text{ A}$$

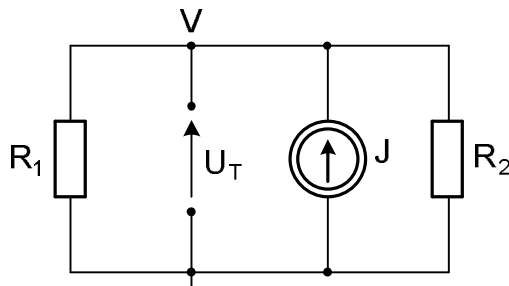
$$U_{AB} = U_C = I \cdot Z_{AB} = 6\sqrt{2} \cdot 10\sqrt{2}e^{-j45^\circ} = 120e^{-j45^\circ}$$

Wartość czasowa napięcia na kondensatorze przed przełączeniem.

$$u_C(t) = 120\sqrt{2} \sin(100t - 45^\circ)$$

Dla czasu  $t = 0$ ,  $u_C(0) = -120 \text{ V}$ .

Po przełączeniu obliczamy napięcie Thevenina ( $U_T$ )



**Rys. 6.9b.**

$$U_T = V$$

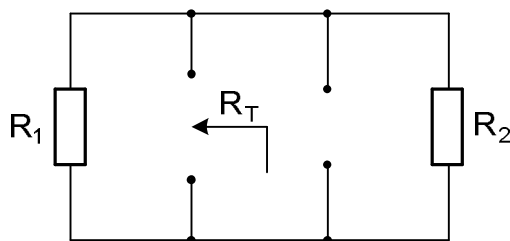
Obliczamy metodą potencjałów węzłowych

$$U_T \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = J$$

$$U_T \left( \frac{1}{20} + \frac{1}{80} \right) = 5$$

Stąd  $U_T = 80 \text{ V}$

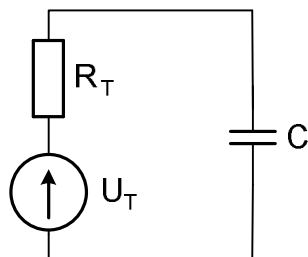
Obliczamy rezystancję Thevenina ( $R_T$ ), rozwieramy źródło prądowe



**Rys. 6.9c.**

$$R_T = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{20 \cdot 80}{20 + 80} = 16 \Omega.$$

Po wprowadzeniu obliczonych wartości, pierwotny schemat sprowadza się do obwodu  $RC$ ,



**Rys. 6.9d.**

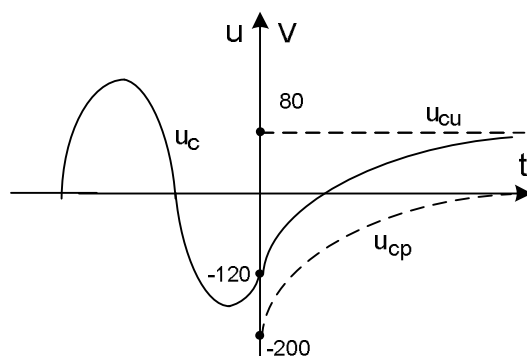
Obliczamy stałą czasową obwodu RC

$$\tau = R_T \cdot C = 16 \cdot 500 \cdot 10^{-6} = 8 \cdot 10^{-3} = 8 \text{ ms} \rightarrow \frac{1}{\tau} = 125$$

Napięcie na kondensatorze

$$u_C(t) = U_T + [u_C(0) - U_T] \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{gdzie} \quad \tau = R_T \cdot C$$

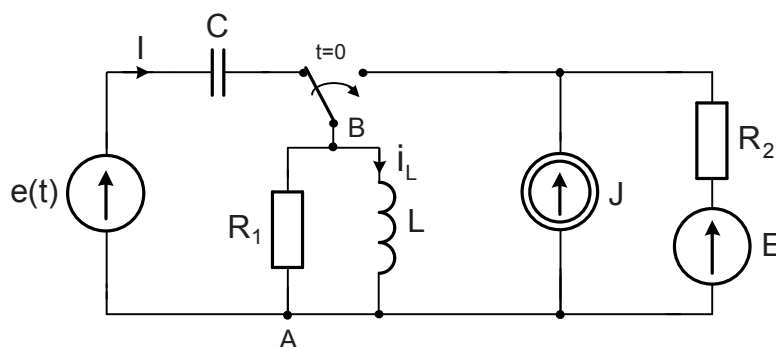
$$u_C(t) = 80 + [-120 - 80] \cdot e^{-125t} = 80 - 200e^{-125t}$$



**Rys. 6.9e.**

Rysunek 6.9e przedstawia przebieg czasowy napięcia na kondensatorze, przed przełączeniem (przebieg sinusoidalny), przełączenie w chwili  $t = 0$  ( $-120 \text{ V}$ ), oraz przebieg napięcia kondensatora po przełączeniu będący sumą składowej ustalonej i składowej przejściowej, który jest rzeczywistym przebiegiem napięcia na kondensatorze.

**Zad. 6.10.** W obwodzie jak na rys. 6.10a. obliczyć prąd w indukcyjności po przełączeniu. Przed przełączeniem był stan ustalony. Dane:  $e(t) = 100\sqrt{2} \sin(200t + 135^\circ) \text{ V}$ ,  $L = 0.2 \text{ H}$ ,  $C = 250 \mu\text{F}$ ,  $E = 300 \text{ V}$ ,  $J = 10 \text{ A}$ ,  $R_1 = 40 \Omega$ ,  $R_2 = 60 \Omega$ . Skorzystać z twierdzenia Thevenina w zastosowaniu do stanów nieustalonych.



**Rys. 6.10a.**

Warunki początkowe

Obliczamy impedancje zastępczą na zaciskach AB

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{200 \cdot 250 \cdot 10^{-6}} = 20 \Omega, \quad X_L = \omega L = 200 \cdot 0.2 = 40 \Omega.$$

$$Z_{AB} = \frac{R_1 \cdot jX_L}{R_1 + jX_L} = \frac{40 \cdot j40}{40 - j40} = 20 + j20 = 20\sqrt{2}e^{j45^\circ} \Omega.$$

$$I = \frac{E}{Z_{AB} - jX_C} = \frac{100e^{j135^\circ}}{(20 - j20 + j20)} = 5e^{j135^\circ} \text{ A}$$

$$U_{AB} = I \cdot Z_{AB} = 5e^{j135^\circ} \cdot 20\sqrt{2}e^{j45^\circ} = 100\sqrt{2}e^{j180^\circ} \text{ V}$$

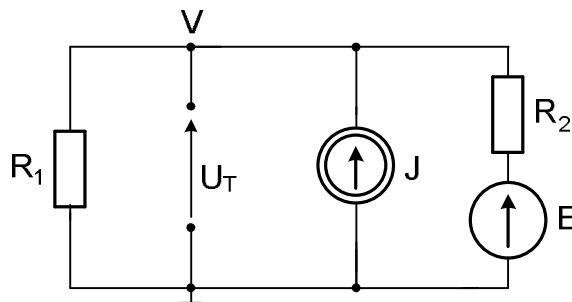
$$I_L = \frac{U_{AB}}{jX_L} = \frac{100\sqrt{2}e^{j180^\circ}}{40e^{j90^\circ}} = 2.5\sqrt{2}e^{j90^\circ} \text{ A}$$

Wartość czasowa prądu cewki

$$i_L(t) = 5\sin(200t + 90^\circ)$$

Dla  $t = 0 \rightarrow i_L(0) = 5 \text{ A}$

Po przełączeniu obliczamy napięcie Thevenina ( $U_T$ )



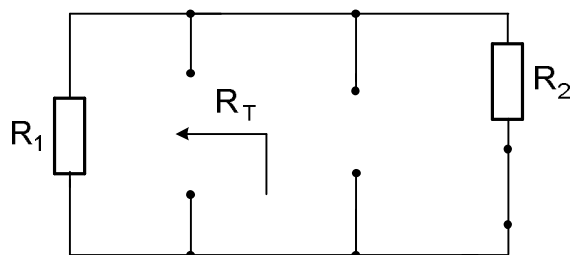
**Rys. 6.10b.**

$$V \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{E}{R_2} + J$$

$$V \left( \frac{1}{40} + \frac{1}{60} \right) = \frac{300}{60} + 10$$

$$V = 360 \text{ V}$$

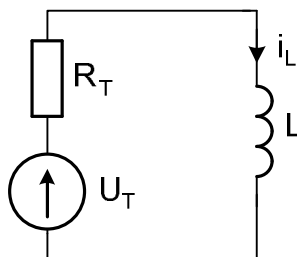
Obliczamy rezystancję Thevenina ( $R_T$ ), rozwieramy źródło prądowe, zwieramy napięciowe.



**Rys. 6.10c.**

$$R_T = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{40 \cdot 60}{40 + 60} = 24 \Omega.$$

Schemat pierwotny sprowadza się do szeregowego obwodu  $RL$





**Rys.6.10c.**

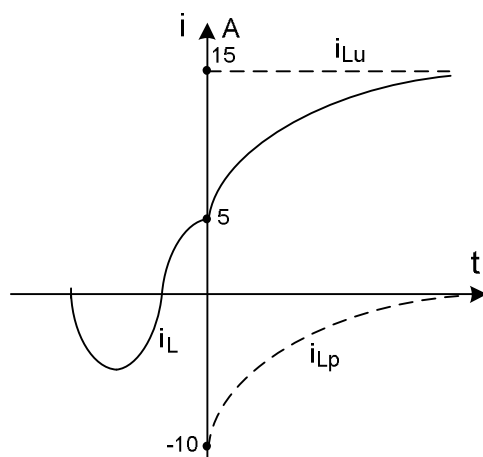
Obliczamy stałą czasową obwodu RL

$$\tau = \frac{L}{R_T} = \frac{0.2}{24} = 0.0083 \text{ s} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\tau} = 120$$

Prąd w indukcyjności

$$i_L(t) = \frac{U_T}{R_T} + \left[ i_L(0) - \frac{U_T}{R_T} \right] \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{gdzie} \quad \tau = \frac{L}{R}$$

$$i_L(t) = \frac{360}{24} + \left[ 5 - \frac{360}{24} \right] \cdot e^{-120t} = 15 - 10e^{-120t}$$

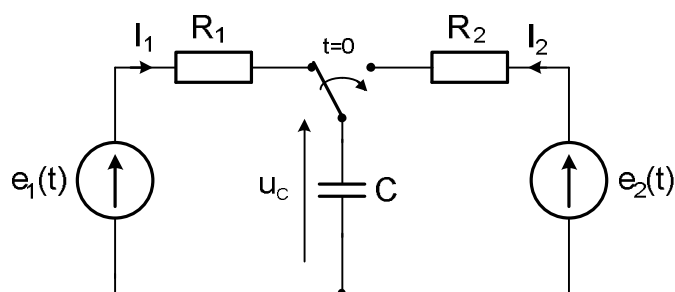
**Rys. 6.10d.**

Rysunek 6.10d. przedstawia prąd w indukcyjności przed przełączeniem (przebieg sinusoidalny), przełączenie w chwili  $t = 0$  (5 A), oraz przebieg prądu po przełączeniu jako sumę składowej ustalonej i składowej przejściowej.

**Zad. 6.11.** W obwodzie przedstawionym na rys. 6.11a, obliczyć metodą operatorową napięcie na kondensatorze oraz prąd kondensatora po przełączeniu. Przed przełączeniem był stan ustalony. Dane:  $e_1(t) = 200 \sin(100t + 90^\circ)$  V,  $R_1 = 50 \Omega$ ,  $R_2 = 10 \Omega$ ,  $C = 0.2$  mF.

Zadanie rozwiązać dla dwóch wartości źródła  $e_2(t)$ .

1.  $e_2(t)$  jest źródłem stałym,  $e_2(t) = E_2 = 300$  V.
2.  $e_2(t)$  jest źródłem sinusoidalnym,  $e_2(t) = 500\sqrt{2} \sin(500t + 135^\circ)$  V.

**Rys. 6.11a**

**R o z w i ą z a n i e**

Obliczamy warunki początkowe, które wynikają z obwodu przed przełączeniem i będą jednakowe dla obydwu przypadków.

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{100 \cdot 0.2 \cdot 10^{-3}} = 50 \Omega.$$

$$Z_1 = R_1 - jX_C = 50 - j50 = 50\sqrt{2}e^{-j45^\circ} \Omega.$$

$$I_1 = \frac{E_1}{Z_1} = \frac{200e^{j90^\circ}}{\sqrt{2} \cdot 50\sqrt{2}e^{-j45^\circ}} = 2e^{j135^\circ} \text{ A.}$$

$$U_C = I_1 \cdot (-jX_C) = 2e^{j135^\circ} \cdot 50e^{-j90^\circ} = 100e^{j45^\circ} \text{ V.}$$

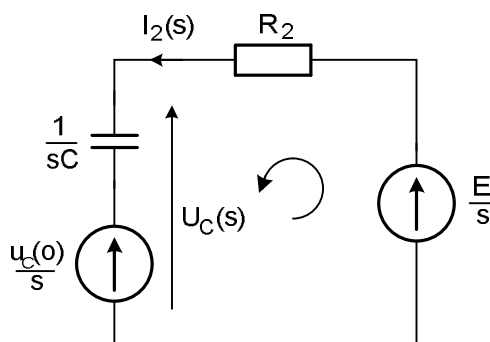
$$u_C(t) = 100\sqrt{2} \sin(100t + 45^\circ)$$

$$\text{Dla } t = 0, \quad u_C(0) = 100 \text{ V.}$$

1. Dla źródła stałego  $E_2 = 300 \text{ V}$ .

Po przełączeniu w obwodzie będzie tylko źródło stałe. Transformata źródła stałego jest prosta i obliczenie transformaty odwrotnej jest łatwe. Zadanie zostanie rozwiązane bezpośrednio, bez rozdzielania na składową ustaloną i składową przejściową. Nie ma wówczas konieczności obliczania stanu ustalonego oraz warunków początkowych dla składowej przejściowej.

Na rys.6.11b. przedstawiono schemat operatorowy.



**Rys. 6.11b**

gdzie

$$\frac{u_C(0)}{s} = \frac{100}{s}, \quad \frac{1}{sC} = \frac{5000}{s}, \quad R_2 = 10, \quad \frac{E}{s} = \frac{300}{s}.$$

Transformata prądu

$$I_2(s) = \frac{\frac{E}{s} - \frac{u_C(0)}{s}}{R_2 + \frac{1}{sC}} = \frac{\frac{300}{s} - \frac{100}{s}}{10 + \frac{5000}{s}} = \frac{\frac{200}{s}}{\frac{10(s+500)}{s}} = \frac{20}{s+500}$$

Transformata napięcie na kondensatorze

$$U_C(s) = I_2(s) \frac{1}{sC} + \frac{u_C(0)}{s} = \frac{20}{s+500} \cdot \frac{5000}{s} + \frac{100}{s} = 10^5 \left[ \frac{1}{s(s+500)} \right] + \frac{100}{s}$$

Transformata odwrotna napięcia na kondensatorze

$$\text{jeżeli: } F(s) = \frac{L(s)}{sM(s)} \quad \text{to} \quad f(t) = \frac{L(0)}{M(0)} + \sum_{k=1}^m \frac{L(s_k)}{s_k M'(s_k)} e^{s_k t}$$

$$u_C(t) = 10^5 \frac{1}{500} + 10^5 \frac{1}{-500} e^{-500t} + 100 = 200 - 200e^{-500t} + 100 = 300 - 200e^{-500t}$$

$$u_C(t) = u_{C_u}(t) + u_{C_p}(t) = 300 - 200e^{-500t}$$

2. Dla źródła sinusoidalnego,  $e_2(t) = 500\sqrt{2} \sin(500t + 135^\circ)$  V.

Po przełączeniu w obwodzie będzie źródło zmienne. Możemy postąpić jak poprzednio wprowadzając do obwodu transformatę wymuszenia sinusoidalnego, jednak po obliczeniu transformaty napięcia czy prądu kondensatora, obliczenie transformaty odwrotnej jest trudne.

Dlatego łatwiej jest podzielić rozwiązanie na dwa etapy. Obliczyć na początku składową ustaloną, a następnie składową przejściową.

Składową ustaloną obliczymy korzystając z metody symbolicznej (liczb zespolonych). Składową przejściową korzystając z rachunku operatorowego. Rozwiązanie takie jest możliwe ponieważ składowa przejściowa nie zależy od wymuszenia, zależy natomiast od warunków początkowych. W schemacie operatorowym dla składowej przejściowej źródła napięciowe zostają zwarte, a źródła prądu rozwarte.

Do obliczenia warunków początkowych dla składowej przejściowej musimy znać stan ustalony, a następnie jego wartość w chwili  $t = 0$

Wartość składowej przejściowej napięcia kondensatora obliczymy z zależności.

$$u_{Cp}(0) = u_C(0) - u_{Cu}(0)$$

Obliczamy stan ustalony po przełączeniu

$$\omega = 500 \text{ rad/s}$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{500 \cdot 0.2 \cdot 10^{-3}} = 10 \Omega.$$

$$Z_2 = R_2 - jX_C = 10 - j10 = 10\sqrt{2}e^{-j45^\circ} \Omega.$$

$$I_2 = \frac{E_2}{Z_2} = \frac{500e^{j135^\circ}}{10\sqrt{2}e^{-j45^\circ}} = 25\sqrt{2}e^{j180^\circ} \text{ A.}$$

$$U_C = I_2 \cdot (-jX_C) = 25\sqrt{2}e^{j180^\circ} \cdot 10e^{-j90^\circ} = 250\sqrt{2}e^{j90^\circ}$$

$$u_{Cu} = 500 \sin(500t + 90^\circ)$$

Składowa ustalona w chwili  $t = 0$

$$u_{Cu}(0) = 500 \text{ V.}$$

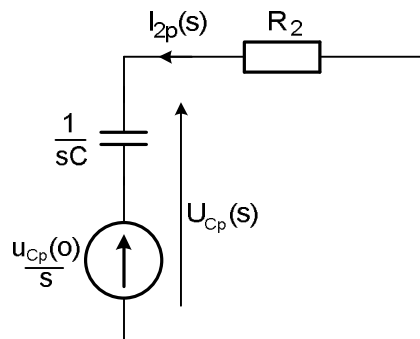
Obliczamy warunki początkowe dla składowej przejściowej

$$u_C(0) = u_{Cu}(0) + u_{Cp}(0)$$

stąd

$$u_{Cp}(0) = u_C(0) - u_{Cu}(0) = 100 - 500 = -400 \text{ V.}$$

Schemat operatorowy dla składowej przejściowej



Rys. 6.11c

gdzie  $\frac{u_{Cp}(0)}{s} = \frac{-400}{s}$

$$I_{2p}(s) = \frac{\frac{u_{Cp}(0)}{s}}{R_2 + \frac{1}{sC}} = \frac{\frac{400}{s}}{10 + \frac{5000}{s}} = \frac{40}{s + 500}$$

Ponieważ prąd  $I_{2p}(s)$  jest skierowany przeciwnie do napięcia  $\frac{u_{Cp}(0)}{s}$  zmieniamy znak na plus.

$$U_{Cp}(s) = I_{2p}(s) \frac{1}{sC} + \frac{u_{Cp}(0)}{s} = \frac{40}{s + 500} \cdot \frac{5000}{s} + \frac{-400}{s} = 2 \cdot 10^5 \left[ \frac{1}{s(s + 500)} \right] - \frac{400}{s}$$

Obliczając transformatę odwrotną ze wzoru jak poprzednio mamy.

$$u_{Cp}(t) = -400e^{-500t}$$

Napięcie na kondensatorze po przełączeniu jest sumą składowej ustalonej i składowej przejściowej.

$$u_C(t) = 500 \sin(500t + 90^\circ) - 400e^{-500t}$$

Dla  $t = 0$

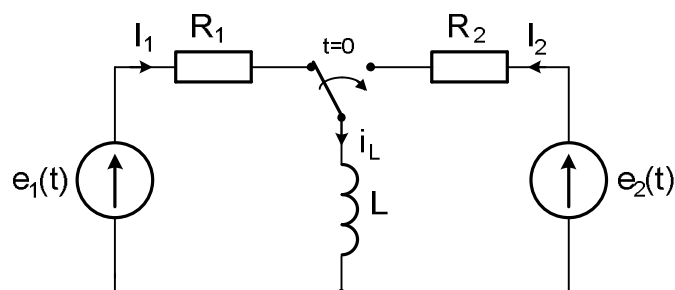
$u_C(0) = 100$  V. Równa się warunkowi początkowemu napięcia na kondensatorze, co potwierdza poprawność rozwiązania.

**Zad. 6.12.** W obwodzie przedstawionym na rys. 6.12a. obliczyć metodą operatorową prąd w indukcyjności po przełączeniu. Przed przełączeniem był stan ustalony.

Dane:  $e_1(t) = 240 \sin(100t + 90^\circ)$  V,  $R_1 = 40 \Omega$ ,  $R_2 = 20 \Omega$ ,  $L = 0.4$  H

Zadanie rozwiązać dla dwóch wartości źródła  $e_2(t)$ .

1.  $e_2(t)$  jest źródłem stałym,  $e_2(t) = E_2 = 100$  V.
2.  $e_2(t)$  jest źródłem sinusoidalnym,  $e_2(t) = 140\sqrt{2} \sin(50t + 135^\circ)$  V.



**Rys. 6.12a.**

**R o z w i ą z a n i e**

Obliczamy warunki początkowe, które wynikają z obwodu przed przełączeniem i będą jednakowe dla obydwu przypadków.

$$X_L = \omega L = 100 \cdot 0.4 = 40 \Omega.$$

$$Z_1 = R_1 + jX_L = 40 + j40 = 40\sqrt{2}e^{j45^\circ} \Omega.$$

$$I_1 = \frac{E_1}{Z_1} = \frac{200e^{j90^\circ}}{\sqrt{2} \cdot 40\sqrt{2}e^{j45^\circ}} = 3e^{j45^\circ} \text{ A.}$$

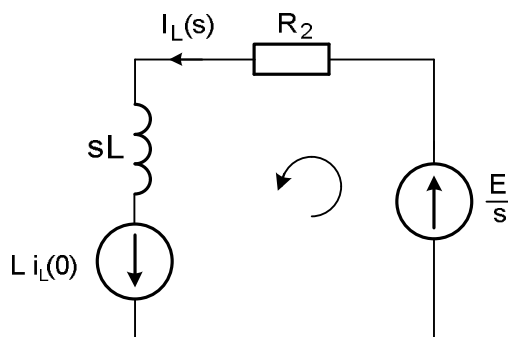
$$i_1(t) = i_L(t) = 3\sqrt{2} \sin(100t + 45^\circ) \text{ V.}$$

Dla  $t = 0$ ,  $i_L(0) = 3$  A.

3. Dla źródła stałego  $E_2 = 100$  V.

Po przełączeniu w obwodzie będzie tylko źródło stałe. Zadanie zostanie rozwiązane bezpośrednio, bez rozdzielania na składową ustaloną i składową przejściową. Nie ma wówczas konieczności obliczania stanu ustalonego oraz warunków początkowych dla składowej przejściowej.

Na rys. 6.12b. przedstawiono schemat operatorowy.



**Rys. 6.12b.**

gdzie

$$Li_L(0) = 0.4 \cdot 3 = 1.2 \quad , \quad sL = 0.4s \quad , \quad R_2 = 20 \quad , \quad \frac{E}{s} = \frac{100}{s} \quad .$$

Transformata prądu  $I_2(s) = I_L(s)$

$$I_L(s) = \frac{\frac{E}{s} + Li_L(0)}{R_2 + sL} = \frac{\frac{100}{s} + 1.2}{20 + 0.4s} = \frac{250 + 3s}{s(s + 50)}$$

Pierwiastki mianownika:  $s_1 = 0$  ,  $s_2 = -50$

Transformata odwrotna

$$\text{jeżeli: } F(s) = \frac{L(s)}{sM(s)} \quad \text{to} \quad f(t) = \frac{L(0)}{M(0)} + \sum_{k=1}^m \frac{L(s_k)}{s_k M'(s_k)} e^{s_k t}$$

$$i_L(t) = \frac{250}{50} + \frac{250 + 3(-50)}{-50 \cdot 1} e^{-50t} = 5 - 3e^{-50t}$$

2. Dla źródła sinusoidalnego,  $e_2(t) = 140\sqrt{2} \sin(50t + 135^\circ)$  V.

Po przełączeniu w obwodzie będzie źródło zmienne. Zadanie zostanie rozwiązane superpozycją stanów, jak zadaniu poprzednim.

Do obliczenia warunków początkowych dla składowej przejściowej musimy znać stan ustalony, a następnie jego wartość w chwili  $t = 0$

Wartość składowej przejściowej prądu w indukcyjności obliczymy z zależności.

$$i_{Lp}(0) = i_L(0) - i_{Lu}(0)$$

Obliczamy stan ustalony po przełączeniu

$$\omega = 50 \text{ rad/s}$$

$$X_L = \omega L = 50 \cdot 0.4 = 20 \, \Omega.$$

$$Z_2 = R_2 + jX_L = 20 + j20 = 20\sqrt{2}e^{j45^\circ}$$

$$I_2 = \frac{E_2}{Z_2} = \frac{140e^{j135}}{20\sqrt{2}e^{j45^\circ}} = \frac{7}{\sqrt{2}}e^{j90^\circ}$$

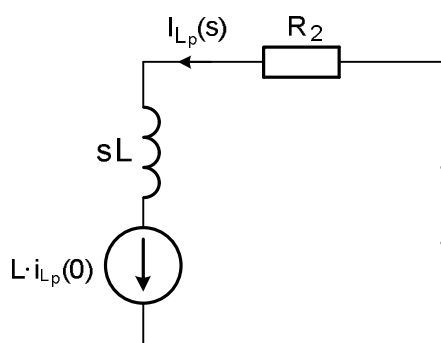
$$i_2(t) = i_{Lu}(t) = 7 \sin(50t + 90^\circ)$$

$$\text{dla } t = 0, \quad i_{Lu}(0) = 7 \text{ A.}$$

Obliczamy warunki początkowe dla składowej przejściowej

$$i_{Lp}(0) = i_L(0) - i_{Lu}(0) = 3 - 7 = -4 \text{ A.}$$

Schemat operatorowy dla składowej przejściowej



**Rys. 6.12c.**

gdzie

$$Li_{Lp} = 0.4 \cdot (-4) = -1.6 \text{ A}, \quad R = 20 \, \Omega, \quad sL = 0.4s$$

stąd

$$I_{Lp}(s) = \frac{Li_{Lp}(s)}{R_2 + sL} = \frac{-1.6}{20 + 0.4s} = -4 \frac{1}{s + 50}$$

Transformata odwrotna składowej przejściowej prądu indukcyjności.

$$i_{Lp}(t) = -4e^{-50t}$$

Prąd w indukcyjności po przełączeniu jest sumą składowej ustalonej i składowej przejściowej.

$$i_L(t) = 7 \sin(50t + 90^\circ) - 4e^{-50t}$$

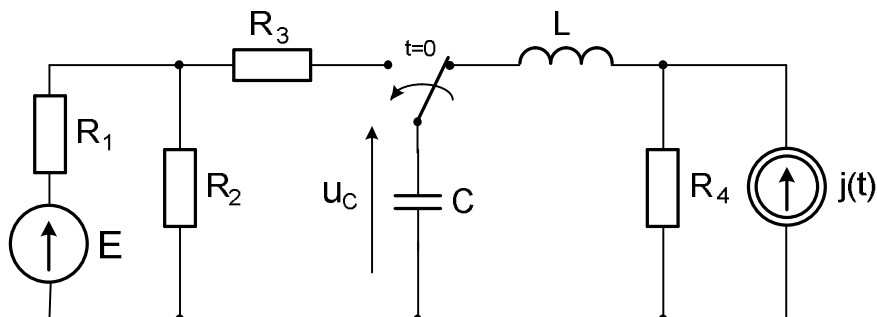
Dla  $t = 0$

$i_L(0) = 3 \text{ A}$ . Równa się warunkowi początkowemu prądu w indukcyjności, co potwierdza poprawność rozwiązania.

**Zad. 6.13.** Dla obwodu przedstawionego na rys. 6.13a. obliczyć metodą operatorową napięcie na kondensatorze po przełączeniu. Przed przełączeniem był stan ustalony.

Dane:  $E = 200 \text{ V}$  (stałe),  $L = 0.02 \text{ H}$ ,  $C = 5 \text{ mF}$ ,  $R_1 = 40 \, \Omega$ ,

$R_2 = 60 \, \Omega$ ,  $R_3 = 76 \, \Omega$ ,  $R_4 = 10 \, \Omega$ ,  $j(t) = 20\sqrt{2} \sin(100t + 135^\circ) \text{ A}$ .



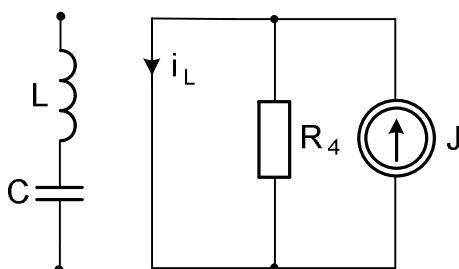
**Rys. 6.13a.**

**Rozwiązanie:**

Obliczamy warunki początkowe:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = 2 \, \Omega, \quad X_L = \omega L = 2 \, \Omega, \quad X_L = X_C, \quad Z_{LC} = 0$$

W obwodzie wystąpił rezonans napięć, przedstawiono to na rys. 6.9b. Cały prąd źródła prądowego płynie przez zwartą gałąź i równa się prądowi  $i_L = i_C$



**Rys. 6.13b.**

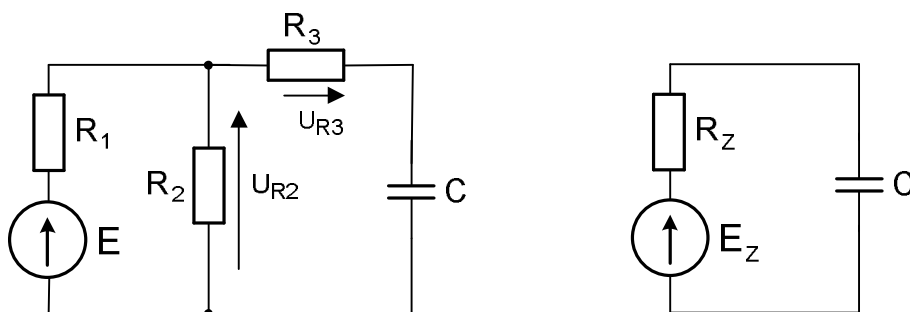
$$I_L = I_C = J = 20e^{j135^\circ}, \quad U_C = I_C \cdot (-jX_C) = 40e^{j45^\circ}$$

Wartość chwilowa napięcia na kondensatorze wynosi:

$$u_C(t) = 40\sqrt{2} \sin(100t + 45^\circ) \quad \text{stąd dla } t = 0 \quad u_C(0) = 40 \, \text{V}$$

Jest to wartość napięcia (stała) jaką kondensator „przenosi” do nowego obwodu po przełączeniu.

Stan ustalony rys. 6.9c



**Rys. 6.13c.**

Prąd w rezystorze  $R_3$  równa się zero, kondensator dla prądu stałego stanowi przerwę. Napięcie  $U_{R3} = 0$ . Stąd napięcie na kondensatorze:

$$U_{R2} = U_C = \frac{E}{R_1 + R_2} R_2 = 120 \, \text{V}$$

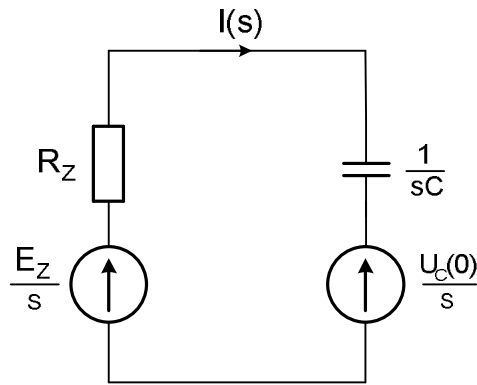
W celu uzyskania prostszego schematu operatorowego zmniejszymy obwód z rys. 6.9c do jednego oczka.

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 24 \, \Omega, \quad R_Z = R_{12} + R_3 = 100 \, \Omega, \quad E_Z = \frac{E}{R_1} R_{12} = 120 \, \text{V}.$$

Wartość źródła  $E_Z$  odłoży się na kondensatorze co potwierdza poprzednie obliczenie

Obliczamy stan nieustalony:

Ponieważ wymuszenie ma charakter stały (prosta transformata) nie będziemy rozkładać obliczeń na składową ustaloną i składową przejściową. Do schematu operatorowego wprowadzimy transformatę wymuszenia, oraz warunki początkowe. Schemat operatorowy przedstawia rys. 6.9d.



**Rys. 6.13d.**

$$I(s) = \frac{\frac{E_Z}{s} - \frac{U_C(0)}{s}}{R_Z + \frac{1}{sC}} = \frac{\frac{120}{s} - \frac{40}{s}}{100 + \frac{200}{s}} = 0.8 \frac{1}{s+2} \quad \text{stąd transformata odwrotna} \quad i(t) = 0.8e^{-2t}$$

Napięcie na kondensatorze:

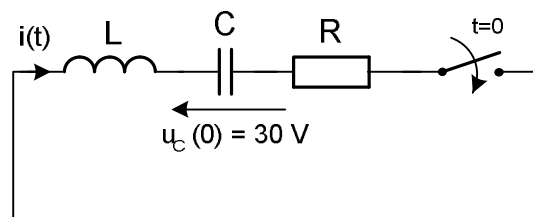
$$U_C(s) = I(s) \frac{1}{sC} + \frac{U_C(0)}{s} = \frac{0.8}{s+2} \cdot \frac{200}{s} + \frac{40}{s} = 160 \frac{1}{s(s+2)} + \frac{40}{s}$$

Transformatę odwrotną obliczymy ze wzoru Heaviside'a dla przypadku gdy jeden z biegunów jest biegunem zerowym.

$$\text{jeżeli: } F(s) = \frac{L(s)}{sM(s)} \quad \text{to} \quad f(t) = \frac{L(0)}{M(0)} + \sum_{k=1}^m \frac{L(s_k)}{s_k M'(s_k)}$$

$$U_C(t) = \frac{160}{2} + \frac{160}{-2} e^{-2t} + 40 = 120 - 80e^{-2t}$$

**Zad. 6.14.** Dwójnik szeregowy  $RLC$  rys. 6.14a. z kondensatorem wstępnie naładowanym do wartości 30 V, został w chwili  $t = 0$  zwarty. Obliczyć metodą operatorową prąd w obwodzie dla trzech wartości rezystora  $R$ ; a)  $R = 12.5 \, \Omega$ , b)  $R = 10 \, \Omega$ , c)  $R = 8 \, \Omega$   
Pozostałe elementy:  $L = 1 \, \text{H}$ ,  $C = 40 \, \text{mF}$ .



**Rys. 6.14a**

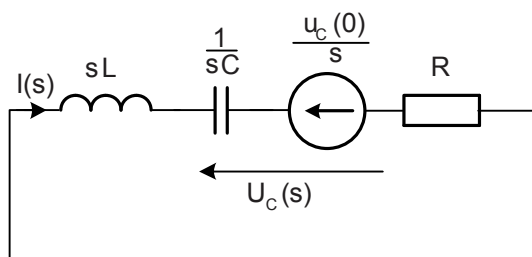
**R o z w i ą z a n i e**

Warunki początkowe

$$u_C(0) = 30 \, \text{V}, \quad i_L(0) = 0$$

Schemat operatorowy przedstawiono na rys. 6.14b.





**Rys. 6.14b**

a)  $R = 12.5 \, \Omega$

$$I(s) = \frac{-\frac{u_c(0)}{s}}{sL + R + \frac{1}{sC}} = \frac{-\frac{30}{s}}{s + 12.5 + \frac{25}{s}} = \frac{-30}{s^2 + 12.5s + 25}$$

$$i(t) = L^{-1} \left[ \frac{-30}{s^2 + 12.5s + 25} \right]$$

Transformata odwrotna:

Pierwiastki mianownika

$$\Delta = b^2 - 4ac = 156.25 - 100 = 56.25$$

$$\sqrt{\Delta} = 7.5 \quad \rightarrow \quad s_1 = -2.5 \quad s_2 = -10 \quad \text{dwa pierwiastki rzeczywiste}$$

Rozładowanie kondensatora ma charakter aperiodyczny.

$$\text{jeżeli: } F(s) = \frac{L(s)}{M(s)} \quad \text{to} \quad f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{L(s_k)}{M'(s_k)} e^{s_k t}$$

pochodna mianownika

$$M'(s) = 2s + 12.5 \quad \text{to}$$

$$i(t) = \frac{-30}{2(-2.5) + 12.5} e^{-2.5t} + \frac{-30}{2(-10) + 12.5} e^{-10t} = -4e^{-2.5t} + 4e^{-10t}$$

b)  $R = 10 \, \Omega$

$$I(s) = \frac{-\frac{u_c(0)}{s}}{sL + R + \frac{1}{sC}} = \frac{-\frac{30}{s}}{s + 10 + \frac{25}{s}} = \frac{-30}{s^2 + 10s + 25}$$

$$i(t) = L^{-1} \left[ \frac{-30}{s^2 + 10s + 25} \right]$$

Transformata odwrotna:

Pierwiastki mianownika

$$\Delta = b^2 - 4ac = 100 - 100 = 0 \rightarrow s_{1,2} = -5 \quad \text{pierwiastek podwójny}$$

Rozładowanie kondensatora ma charakter aperiodyczny krytyczny.

jeżeli:  $F(s) = \frac{L(s)}{M(s)}$  a pierwiastek mianownika jest podwójny (dwukrotny)

$$\text{to } f(t) = \lim_{s \rightarrow s_k} \frac{d}{ds} \left[ \frac{L(s)}{M(s)} (s - s_k)^2 e^{st} \right]$$

$$i(t) = \lim_{s \rightarrow (-5)} \frac{d}{ds} \left[ \frac{-30}{(s+5)^2} [s - (-5)]^2 e^{st} \right] = -30te^{-5t}$$

$$\text{Dla szeregowego dwójnika RLC istnieje zależność } R_K = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 2\sqrt{\frac{1}{40 \cdot 10^{-3}}} = 10 \Omega,$$

co pozwalało przewidzieć, że rozwiązanie będzie miało charakter aperiodyczny krytyczny, a więc taki, który najszybciej osiąga stan ustalony.

c)  $R = 8 \Omega$

$$I(s) = \frac{-\frac{u_C(0)}{s}}{sL + R + \frac{1}{sC}} = \frac{-\frac{30}{s}}{s + 8 + \frac{25}{s}} = \frac{-30}{s^2 + 8s + 25}$$

$$i(t) = L^{-1} \left[ \frac{-30}{s^2 + 8s + 25} \right]$$

Transformata odwrotna

$$\text{Pierwiastki mianownika } \Delta = b^2 - 4ac = 64 - 100 = -36 \quad \sqrt{\Delta} = j6$$

$$s_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = -4 \pm j3 \quad \text{pierwiastki urojone}$$

Rozładowanie kondensatora ma charakter oscylacyjny.

jeżeli:  $F(s) = \frac{L(s)}{M(s)}$  a pierwiastki mianownika są urojone

$$\text{to } f(t) = 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{L(s_k)}{M'(s_k)} e^{s_k t} \right]$$

Pochodna mianownika

$$M' = 2s + 8$$

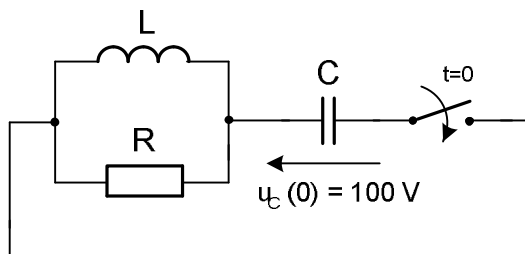
$$i_L(t) = 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{-30}{2(-4 + j3) + 8} e^{(-4 + j3)t} \right] = 2 \operatorname{Re} [(j5)e^{-4t} (\cos 3t + j \sin 3t)] = -10e^{-4t} \sin 3t$$

lub ze wzoru:

$$L^{-1} \left[ \frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2} \right] = e^{-\alpha t} \sin \omega t$$

$$i(t) = L^{-1} \left[ -30 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{(s + 4)^2 + (3)^2} \right] = -10e^{-4t} \sin 3t$$

**Zad. 6.15.** W obwodzie jak na rysunku 6.18a. kondensator został wstępnie naładowany do wartości 100 V. Obliczyć metodą operatorową wartość jego napięcia po zamknięciu wyłącznika. Obliczenia przeprowadzić dla trzech wartości rezystancji.  $R = 5 \Omega$ ,  $R = 5\sqrt{2} \Omega$ ,  $R = 10 \Omega$ . Pozostałe elementy:  $L = 1 \text{ H}$ ,  $C = 5 \text{ mF}$ .



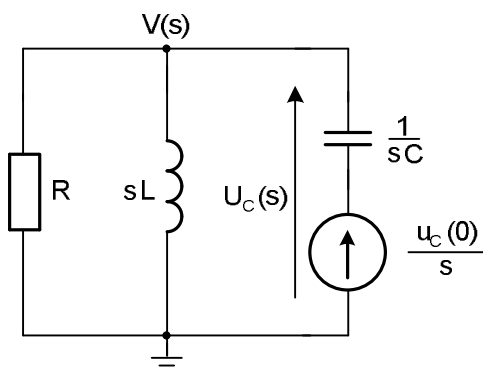
**Rys. 6.18a.**

R o z w i ą z a n i e

Warunki początkowe

$$u_C(0) = 100 \text{ V}, \quad i_L(0) = 0$$

Schemat operatorowy przedstawiono na rys. 6.18b.



**Rys. 6.18b.**

Zastosujemy metodę potencjałów węzłowych

$$V(s) = U_C(s)$$

$$U_C(s) \left( \frac{1}{sL} + \frac{1}{R} + sC \right) = \frac{U_C(0)}{s} \cdot sC$$

$$U_C(s) = \frac{sU_C(0^-)}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}}$$

a)  $R = 5 \Omega$

$$U_C(s) = \frac{100s}{s^2 + 40s + 200}$$

Transformata odwrotna

$$u_C(t) = L^{-1} \left[ \frac{100s}{s^2 + 40s + 200} \right]$$

Pierwiastki mianownika

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1600 - 800 = 800$$

$$\sqrt{\Delta} = 28.28 \quad \rightarrow \quad s_1 = -5.86, \quad s_2 = -34.14 \quad \text{dwa pierwiastki rzeczywiste.}$$

Rozładowanie kondensatora ma charakter aperiodyczny.

$$\text{jeżeli: } F(s) = \frac{L(s)}{M(s)} \quad \text{to} \quad f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{L(s_k)}{M'(s_k)} e^{s_k t}$$

pochoďna mianownika

$$M'(s) = 2s + 40$$

$$u_C(t) = 100 \left[ \frac{-5.86}{2(-5.86) + 40} e^{-5.86t} + \frac{-34.14}{2(-34.14) + 40} e^{-31.14t} \right]$$

$$u_C(t) = -20.72e^{-5.86t} + 120.72e^{-31.14t}$$

$$\text{b) } R = 5\sqrt{2} \, \Omega$$

$$U_C(s) = \frac{100s}{s^2 + 20\sqrt{2}s + 200}$$

$$u_C(t) = L^{-1} \left[ \frac{100s}{s^2 + 20\sqrt{2}s + 200} \right]$$

Pierwiastki mianownika

$$\Delta = b^2 - 4ac = 800 - 800 = 0 \quad \rightarrow \quad s_{1,2} = -10\sqrt{2} \quad \text{pierwiastek podwójny}$$

Rozładowanie kondensatora ma charakter aperiodyczny krytyczny.

$$\text{jeżeli: } F(s) = \frac{L(s)}{M(s)} \quad \text{a pierwiastek mianownika jest podwójny (dwukrotny)}$$

$$\text{to } f(t) = \lim_{s \rightarrow s_k} \frac{L(s)}{M(s)} = \lim_{s \rightarrow s_k} \frac{d}{ds} \left[ \frac{L(s)}{M(s)} (s - s_k)^2 e^{st} \right]$$

$$u_C(t) = \lim_{s \rightarrow (-10\sqrt{2})} 100 \frac{d}{ds} (s \cdot e^{st}) = \lim_{s \rightarrow (-10\sqrt{2})} 100(e^{st} + s \cdot e^{st} \cdot t) = 100e^{-10\sqrt{2}t} [1 + (-10\sqrt{2})t]$$

$$\text{c) } R = 10 \, \Omega$$

$$U_C(s) = \frac{100s}{s^2 + 20s + 200}$$

$$u_C(t) = L^{-1} \left[ \frac{100s}{s^2 + 20s + 200} \right]$$

Pierwiastki mianownika

$$\Delta = b^2 - 4ac = 400 - 800 = -400$$

$$\sqrt{\Delta} = j20 \quad \rightarrow \quad s_{1,2} = -10 \pm j10 \quad \text{pierwiastki zespolone.}$$

Rozładowanie kondensatora ma charakter oscylacyjny.

jeżeli:  $F(s) = \frac{L(s)}{M(s)}$  a pierwiastki mianownika są urojone

$$\text{to } f(t) = 2\operatorname{Re}\left[\frac{L(s_k)}{M'(s_k)}e^{s_k t}\right]$$

Pochodna mianownika

$$M'(s) = 2s + 20$$

$$u_C(t) = 100 \cdot 2\operatorname{Re}\left[\frac{-10 + j10}{2(-10 + j10) + 20}e^{(-10 + j10)t}\right] = 100 \cdot \operatorname{Re}\left[\frac{1}{2}(1 + j)e^{-10t} \cdot e^{j10t}\right] =$$

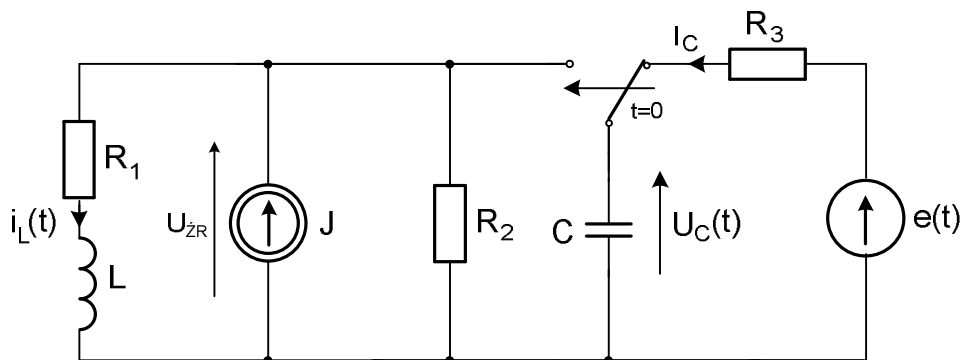
$$= 100 \cdot \operatorname{Re}\left[(1 + j)e^{-10t}(\cos 10t + j \sin 10t)\right] = 100e^{-10t} \cdot \operatorname{Re}(\cos 10t + j \sin 10t + j \cos 10t - \sin 10t) =$$

$$= 100e^{-10t}(\cos 10t - \sin 10t)$$

**Zad. 6.16.** Dla obwodu jak na rysunku 6.16a. obliczyć napięcie kondensatora i prąd w cewce po przełączeniu. Przed przełączeniem w obwodzie był stan ustalony.

Dane:  $e(t) = 40\sin(t + \frac{\pi}{2})$ ,  $J = 10.8 \text{ A}$ ,  $R_1 = 10 \text{ } \Omega$ ,  $R_2 = 0.8 \text{ } \Omega$ ,  $R_3 = 4 \text{ } \Omega$ ,

$L = 1 \text{ H}$ ,  $C = 0.25 \text{ F}$



Rys. 6.16a.

R o z w i ą z a n i e :

Obliczamy warunki początkowe:

1. Napięcie na kondensatorze

$$I_C = \frac{E}{R - jX_C} = 5e^{j135} \text{ A}$$

$$U_C = I_C(-jX_C) = 20e^{j45} \text{ V}$$

$$u_C(t) = 20\sqrt{2}\sin(t + 45) \quad u_C(0) = 20 \text{ V}$$

2. Prąd w cewce:

$$U_{ZR} = J \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 8 \text{ V} \quad i_L(0) = \frac{U_{ZR}}{R_1} = 0.8 \text{ A}$$

Rozwiązanie metodą superpozycji stanów

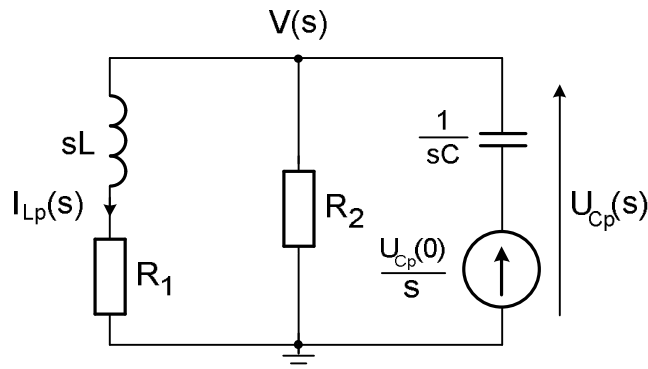
Stan ustalony:

$$u_{Cu} = 8 \text{ V} \quad i_{Lu} = 0.8 \text{ A}$$

Składowa przejściowa:

$$u_{Cp}(0) = u_C(0) - u_{Cu}(0) = 12 \text{ V}$$

$$i_{Lp}(0) = i_L(0) - i_{Lu}(0) = 0$$



**Rys. 6.10b.**

Na rysunku 6.16b. przedstawiono schemat operatorowy dla składowych przejściowych. Składowa przejściowa napięcia na kondensatorze jest równa  $V(s)$ , które zostanie obliczona metodą potencjałów węzłowych:

$$V(s) \left( \frac{1}{R_1 + sL} + \frac{1}{R_2} + sC \right) = \frac{U_{Cp}(0)}{s} sC$$

$$V(s) = U_{Cp}(s)$$

$$U_{Cp}(s) = \frac{12s + 120}{(s + 6)(s + 9)} \quad \text{stąd pierwiastki mianownika: } s_1 = -6, \quad s_2 = -9$$

Transformata odwrotna:

$$u_{Cp}(t) = \frac{L(s_1)}{M'(s_1)} e^{s_1 t} + \frac{L(s_2)}{M'(s_2)} e^{s_2 t} \quad \text{pochodna mianownika: } M'(s) = 2s + 15$$

$$u_{Cp}(t) = 16e^{-6t} - 4e^{-9t} \quad \text{dla } t = 0 \quad u_C(t) = u_{Cu}(t) + u_{Cp}(t)$$

$$u_C(t) = 8 + 16e^{-6t} - 4e^{-9t} \quad \text{dla } t = 0 \quad u_C(0) = 20 \text{ V} \quad \text{odpowiedź sprawdza war. pocz.}$$

Zmiana napięcia na kondensatorze ma charakter aperiodyczny.

Składowa przejściowa prądu w indukcyjności:

$$I_{Lp}(s) = \frac{V(s)}{R + sL} = \frac{12}{(s + 6)(s + 9)}$$

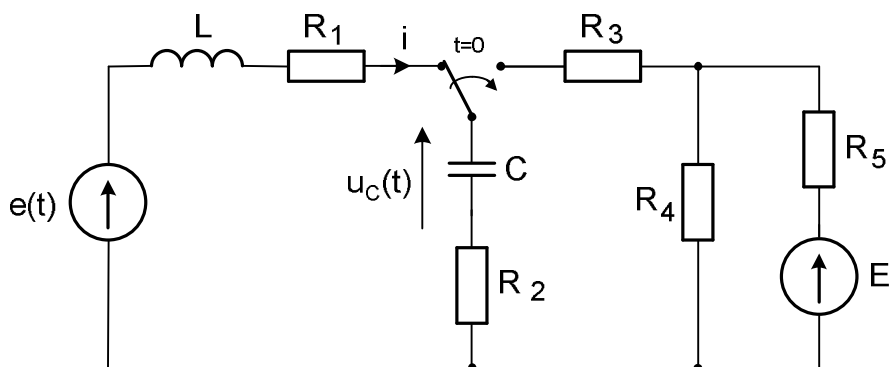
Transformata odwrotna:

$$i_{Lp}(t) = \frac{L(s_1)}{M'(s_1)} e^{s_1 t} + \frac{L(s_2)}{M'(s_2)} e^{s_2 t}$$

$$i_{Lp}(t) = 4e^{-6t} - 4e^{-9t} \quad i_L(t) = i_{Lit}(t) + i_{Lp}(t)$$

$$i_L(t) = 0.8 + 4e^{-6t} - 4e^{-9t} \quad \text{dla } t = 0 \quad i_L(0) = 0.8 \text{ A} \quad \text{odpowiedź sprawdza warunki początkowe.}$$

**Zad. 6.17.** Dla obwodu przedstawionego na rysunku 6.17a, obliczyć metodą operatorową napięcie na kondensatorze po przełączeniu:  $e(t) = 200\sqrt{2} \sin(10^3 t + 45^\circ) \text{ V}$ ,  
 $R_1 = R_2 = R_3 = 50 \Omega$ ,  $R_4 = R_5 = 200 \Omega$ ,  $L = 0.2 \text{ H}$ ,  $C = 10 \mu\text{F}$ ,  $E = 200 \text{ V}$  (stałe).



Rys. 7.17a.

Rozwiązanie:

Warunki początkowe

$$X_L = \omega L = 10^3 \cdot 0.2 = 200 \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{10^3 \cdot 10^{-5}} = 100 \Omega.$$

$$Z = R_1 + R_2 + jX_L - jX_C$$

$$Z = 50 + 50 + j200 - j100 = 100 + j100 \Omega.$$

$$I = \frac{E}{Z} = \frac{200e^{j45^\circ}}{100\sqrt{2}e^{j45^\circ}} = \sqrt{2} \text{ A.}$$

$$U_C = I \cdot (-jX_C) = -j100\sqrt{2} \text{ V}$$

stąd wartość czasowa

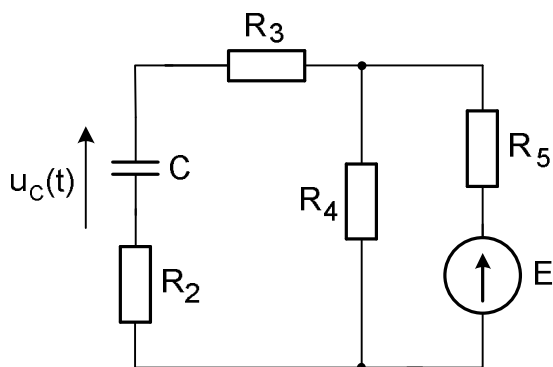
$$u_C(t) = 200 \sin(10^3 t - 90^\circ) \text{ V}$$

dla chwili  $t = 0$

$$u_C(0) = -200 \text{ V}$$

Zadanie zostanie rozwiązane superpozycją stanów:

Stan ustalony



**Rys. 6.17b.**

W stanie ustalonym kondensator jest naładowany, przez rezystory  $R_3$  i  $R_2$  prąd nie płynie, Napięcie na kondensatorze jest równe napięciu na rezystorze  $R_4$ .

$$u_{Cu}(0) = \frac{E}{R_4 + R_5} R_5 = 100 \text{ V}$$

Składowa przejściowa:

Warunki początkowe dla składowej przejściowej obliczymy z zależności:

$$u_C(t) = u_{Cu}(t) + u_{Cp}(t)$$

dla  $t = 0$

$$u_{Cp}(0) = u_C(0) - u_{Cu}(0) = -200 - 100 = -300 \text{ V}$$

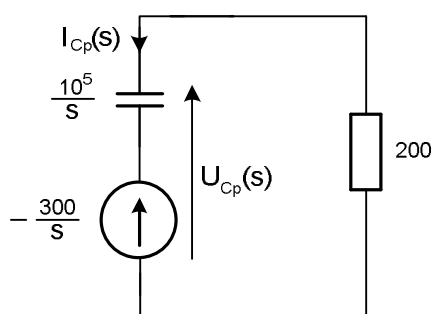
Składowa przejściowa i jej schemat operatorowy rys. 6.17c.

$$R_{23} = R_2 + R_3 = 100 \text{ } \Omega$$

Źródło wymuszające  $E$  zostaje zwarte (składowa przejściowa nie zależy od wymuszenia), rezystory  $R_4$  i  $R_5$  zostają połączone równolegle.

$$R_{45} = \frac{R_4 \cdot R_5}{R_4 + R_5} = 100 \text{ } \Omega$$

W wyniku czego obwód zostanie sprowadzony do jednego oczka, suma rezystancji równa się  $R_Z = R_{23} + R_{45} = 200 \text{ } \Omega$ .



**Rys. 6.17c.**

Prąd w obwodzie

$$I_{Cp}(s) = \frac{U_{Cp}(s)}{R_Z + \frac{1}{sC}} = \frac{\frac{300}{s}}{200 + \frac{10^5}{s}} = 1.5 \frac{1}{s + 500} \rightarrow i_{Cp}(t) = 1.5e^{-500t}$$

Napięcie na kondensatorze, składowa przejściowa:



$$U_{Cp}(s) = I_{Cp}(s) \frac{1}{sC} + \frac{U_C(0^-)}{s} = 1.5 \frac{1}{s+500} \cdot \frac{10^5}{s} + \frac{-300}{s}$$

$$u_{Cp}(t) = L^{-1} \left[ 1.5 \cdot 10^{-5} \frac{1}{s(s+500)} - \frac{300}{s} \right]$$

Pierwiastki mianownika  $s = 0, \quad s_1 = -500$

jeżeli:  $F(s) = \frac{L(s)}{sM(s)}$  to  $f(t) = \frac{L(0)}{M(0)} + \sum_{k=1}^m \frac{L(s_k)}{s_k M'(s_k)} e^{s_k t}$

$$M'(s) = 1$$

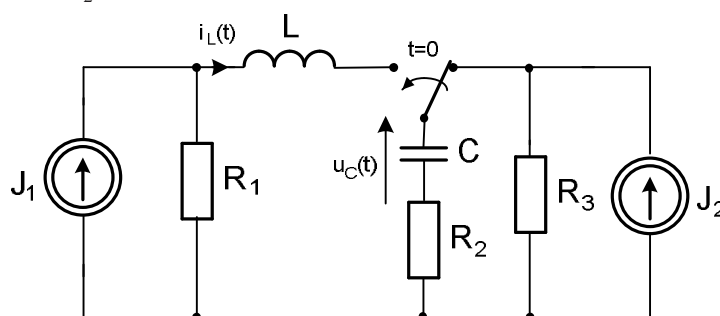
$$u_{Cp}(t) = 1.5 \cdot 10^{-5} \left[ \frac{1}{500} + \frac{1}{-500 \cdot 1} e^{-500t} - 300 \right] = -300 e^{-500t}$$

Napięcie na kondensatorze jest sumą składowej ustalonej i składowej przejściowej

$$u_C(t) = u_{Cu}(t) + u_{Cp}(t) = 100 - 300 e^{-500t}$$

**Zad. 6.18.** Dla obwodu jak na rysunku 6.18a obliczyć metodą operatorową  $i_L(t)$  oraz  $u_C(t)$  po przełączeniu. Przed przełączeniem był stan ustalony.

Dane:  $J_1 = 5 \text{ A}, \quad J_2 = 2 \text{ A}, \quad R_1 = R_3 = 10 \, \Omega, \quad R_2 = 5 \, \Omega, \quad L = 1 \text{ H}, \quad C = 20 \text{ mF}.$



**Rys. 6.18a.**

**R o z w i ą z a n i e :**

Zadanie zostanie rozwiązane metodą superpozycji stanów. Po obliczaniu warunków początkowych nastąpi przełączenie, po czym obliczymy stan ustalony, oraz jego wartość w chwili  $t = 0$ .

Warunki początkowe:

W obwodzie prądu stałego w stanie ustalonym kondensator stanowi przerwę, jest naładowany, przez rezystor  $R_2$  prąd nie płynie. Napięcie na kondensatorze jest równe napięciu na rezystorze  $R_3$ , przez który płynie cały prąd źródła  $J_2$

$$u_C(0) = R_3 \cdot J_2 = 20 \text{ V}$$

$$i_L(0) = 0$$

Stan ustalony:

Po przełączeniu, źródło  $J_1$  jest jak poprzednio stałe i w stanie ustalonym prąd przez indukcyjność nie będzie płynął, a kondensator naładuje się do napięcia:

$$u_{Cu} = R_1 \cdot J_1 = 50 \text{ V} \quad \text{stąd} \quad u_{Cu}(0) = 50 \text{ V}$$

$$i_{Lu} = 0$$

$$i_{Lu}(0) = 0$$

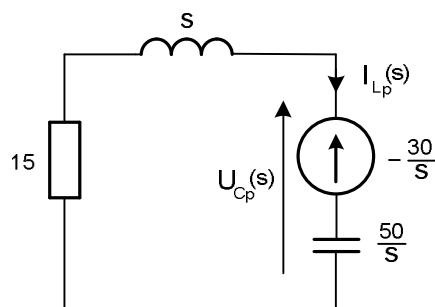
Wyznaczenie warunków początkowych dla składowych przejściowych.

$$u_{Cp}(0) = u_C(0) - u_{Cu}(0) = -30 \text{ V}$$

$$i_{Lp}(0) = i_L(0) - i_{Lu}(0) = 0$$

Składowa przejściowa:

$$\frac{U_{Cp}(0)}{s} = -\frac{30}{s}, \quad \frac{1}{sC} = \frac{50}{s}, \quad sL = s, \quad R = 15.$$



**Rys. 6.18b.**

$$I_{Lp}(s) = \frac{\frac{u_{Cp}(0)}{s}}{sL + R_1 + R_2 + \frac{1}{sC}} = \frac{30}{s^2 + 15s + 50} = \frac{30}{(s+5)(s+10)}$$

pierwiastki mianownika;  $s_1 = -5$ ,  $s_2 = -10$

$$\text{jeżeli: } F(s) = \frac{L(s)}{M(s)} \quad \text{to} \quad f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{L(s_k)}{M'(s_k)} e^{s_k t}$$

$$M'(s) = 2s + 15$$

$$i_{Lp}(t) = \frac{30}{-5 \cdot 2 + 15} e^{-5t} + \frac{30}{-10 \cdot 2 + 15} e^{-10t} = 6e^{-5t} - 6e^{-10t}$$

$$U_{Cp}(s) = I_{Lp}(s) \cdot \frac{1}{sC} + \frac{U_{Cp}(0^+)}{s} = \frac{30}{s^2 + 15s + 50} \cdot \frac{50}{s} - \frac{30}{s} = \frac{1500}{s(s^2 + 15s + 50)} - \frac{30}{s}$$

$$\text{jeżeli: } F(s) = \frac{L(s)}{sM(s)} \quad \text{to} \quad f(t) = \frac{L(0)}{M(0)} + \sum_{k=1}^m \frac{L(s_k)}{s_k M'(s_k)} e^{s_k t}$$

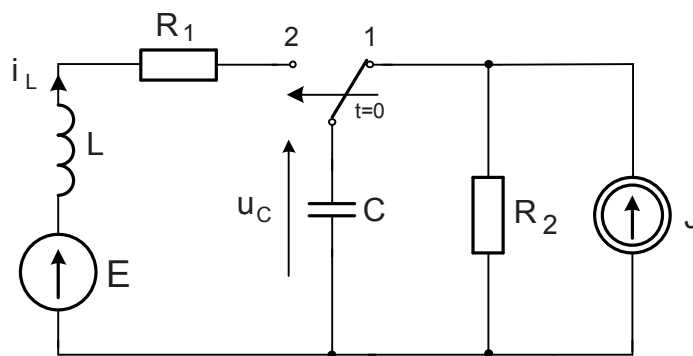
$$u_{Cp}(t) = \frac{1500}{50} + \frac{1500}{-5[2(-5)+15]} e^{-5t} + \frac{1500}{-10[2(-10)+15]} e^{-10t} - 30 = -60e^{-5t} + 30e^{-10t}$$

Całkowite napięcie  $u_C(t)$  oraz całkowity prąd  $i_L(t)$  będący sumą ich składowych ustalonej i przejściowej wynoszą

$$u_C(t) = 50 - 60e^{-5t} + 30e^{-10t}$$

$$i_L(t) = 6e^{-5t} - 6e^{-10t}$$

**Zad 6.19.** Dla obwodu jak na rysunku 6.19a. obliczyć prąd cewki i napięcie na kondensatorze po przełączeniu z poz. 1 na poz. 2, metodą operatorową. Przed przełączeniem był stan ustalony. Dane:  $E = 10 \text{ V}$ ,  $J = 2 \text{ A}$ ,  $C = 0.5 \text{ F}$ ,  $R_1 = R_2 = 2 \Omega$ ,  $L = 1 \text{ H}$ .



**Rys. 6.19a**

R o z w i ą z a n i e :

Zastosujemy metodę superpozycji stanu:

Warunki początkowe:

$$u_C(0) = J \cdot R_2 = 4 \text{ V}$$

$$i_L(0) = 0$$

Składowa ustalona:

$$u_{Cu} = 10 \text{ V}$$

$$i_{Lu} = 0$$

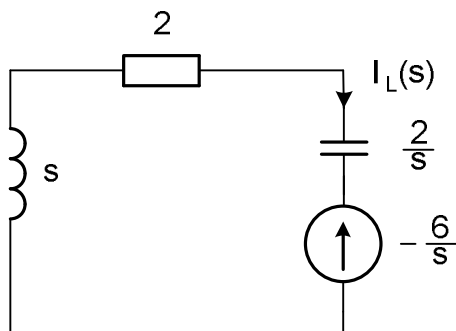
Warunki początkowe dla składowych przejściowych

$$u_{Cp}(0) = u_C(0) - u_{Cu}(0) = -6 \text{ V}$$

$$i_{Lp}(0) = i_L(0) - i_{Lu}(0) = 0$$

Schemat operatorowy dla składowej przejściowej (dane z zadania):

$$\frac{U_{Cp}(s)}{s} = -\frac{6}{s}, \quad sL = s, \quad \frac{1}{sC} = \frac{2}{s}, \quad R = 2.$$



**Rys. 6.19b.**

Prąd  $I_{Lp}(s)$  w postaci operatorowej:

$$I_{Lp}(s) = \frac{\frac{U_{Cp}(0)}{s}}{Z(s)} = \frac{\frac{6}{s}}{s+2+\frac{2}{s}} = \frac{6}{s^2+2s+2}$$

(komentarz: brak minusa przy źródle napięcia wynika ze zwrotu prądu w obwodzie)

pierwiastki mianownika:

$$s_1 = -1+j \quad s_2 = -1-j$$

Transformata odwrotna:

$$L^{-1}\left[\frac{6}{s^2+2s+2}\right] \quad M'(s) = 2s+2$$

Obliczając dowolną metodą, np:

$$i_p(t) = 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{L(s_1)}{M'(s_1)} e^{s_1 t} \right] = 6e^{-t} \sin t \quad \text{Prąd cewki ma charakter oscylacyjny}$$

Napięcie na kondensatorze:

$$U_{Cp}(s) = I(s) \frac{1}{sC} + \frac{U_C(0^-)}{s} = \frac{6}{s^2+2s+2} \cdot \frac{2}{s} + \left( \frac{-6}{s} \right) = 12 \left( \frac{1}{s(s^2+2s+2)} \right) - \frac{6}{s}$$

Mianownik lewej części ułamka ma bieguny:  $s=0$  i bieguny sprzężone  $s_{1,2} = -1 \pm j$

Transformatę odwrotną można obliczyć kilkoma sposobami:

1. Ze wzoru Heaviside'a dla wyodrębnionego bieguna zerowego i biegunów sprzężonych

$$\text{jeżeli: } F(s) = \frac{L(s)}{sM(s)} \quad \text{to} \quad f(t) = \frac{L(0)}{M(0)} + 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{L(s_k)}{s_k M'(s_k)} e^{s_k t} \right], \quad M'(s) = 2s+2$$

$$u_{Cp}(t) = \frac{12}{2} + 12 \cdot 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{(-1+j)[2(-1+j)+2]} \right] e^{(-1+j)t} - 6 = 6 \cdot \operatorname{Re} [ (-1-j)e^{-jt} (\cos t + j \sin t) ] =$$

$$-6e^{-t} \cos t - 6e^{-t} \sin t = -6e^{-t} (\cos t + \sin t)$$

2. Z rozkładu na ułamki proste

$$U_{Cp}(s) = 12 \left( \frac{As+B}{s^2+2s+2} + \frac{C}{s} \right) - \frac{6}{s}$$

$$s(As+B) + (s^2+2s+2)C \equiv 1, \quad A = -1/2, \quad B = -1, \quad C = 1/2$$

$$U_{Cp}(s) = 12 \left( \frac{-1/2s-1}{s^2+2s+2} + \frac{1}{2s} \right) - \frac{6}{s} = -6 \frac{s+2}{s^2+2s+2} = -6 \left( \frac{s}{s^2+2s+2} + \frac{2}{s^2+2s+2} \right)$$

Korzystając dalej ze znanych wzorów

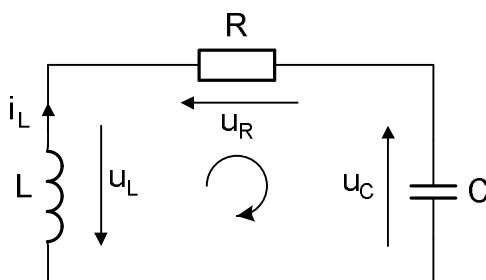
$$L^{-1}\left[\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}\right]=e^{-\alpha t}\cos\omega t \quad L^{-1}\left[\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}\right]=e^{-\alpha t}\sin\omega t$$

Otrzymamy.

$$U_{Cp}(s) = -6\left(\frac{s}{(s+1)^2+1^2} + 2\cdot\frac{1}{(s+1)+1^2}\right) = -6\left(\frac{s+1}{(s+1)^2+1^2} - \frac{1}{(s+1)^2+1^2} + \frac{2}{(s+1)^2+1^2}\right)$$

$$\text{Stąd} \quad u_{Cp}(t) = -6e^{-t}\cos t - 6e^{-t}\sin t = -6e^{-t}(\cos t + \sin t)$$

3. Znając wartość chwilową prądu cewki  $i_{Lp} = 6e^{-t}\sin t$ , która równa się prądowi kondensatora, można z oczka (rys. 6.12c) wyznaczyć napięcie na kondensatorze, bez znajomości jego transformaty.



**Rys. 6.19c**

$$\begin{aligned} u_{Cp} &= -u_{Lp} - u_{Rp} = -L\frac{di_{Lp}}{dt} - Ri = -1\cdot 6\left[ (e^{-t}\cos t + e^{-t}(-1)\sin t) \right] + 2\cdot 6\sin t = -6e^{-t}\cos t - 6e^{-t}\sin t = \\ &= -6e^{-t}(\sin t + \cos t) \\ u_C &= u_{Cu} + u_{Cp} = 10 - 6e^{-t}(\sin t + \cos t) \end{aligned}$$

Korzystając ze znanych wzorów trygonometrycznych,

wzór  $u = a\sin\omega t + b\cos\omega t$  można zapisać w postaci  $u = A\sin(\omega t + \varphi)$

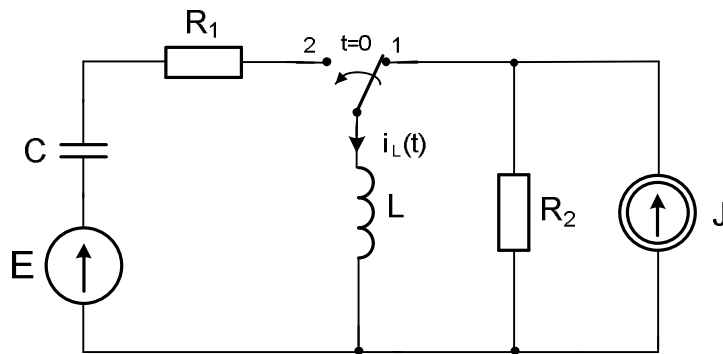
przy czym  $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$

Stąd napięcie na kondensatorze można zapisać jako przesuniętą funkcję sinus

$$A = \sqrt{2} \quad \operatorname{tg}\varphi = 1 \rightarrow \varphi = 45^\circ \quad u_C = 10 - 6\sqrt{2}e^{-t}\sin(t + 45^\circ)$$

Jest to funkcja sinusoidalna tłumiona wykładniczo, przesunięta o składową stałą.

**Zad. 6.20.** Dla obwodu jak na rysunku 6.20a. obliczyć prąd cewki i napięcie na kondensatorze po przełączeniu z poz. 1 na poz. 2, metodą operatorową. Przed przełączeniem w obwodzie był stan ustalony. Dane:  $E = 8\text{ V}$ ,  $J = 12\text{ A}$ ,  $C = 0.1\text{ F}$ ,  $R_1 = R_2 = 6\ \Omega$ ,  $L = 1\text{ H}$ .



Rys. 6.20a.

R o z w i ą z a n i e :

Warunki początkowe

W obwodzie prądu stałego indukcyjność stanowi zwarcie i przez nią płynie cały prąd źródła prądowego. Rezystor  $R_2$  może być dowolny, napięcie na nim równa się zero.

Warunki początkowe.

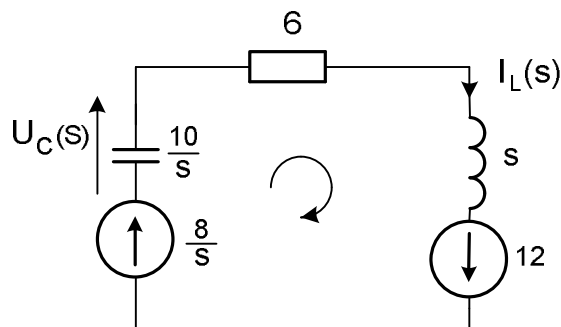
$$i_L(0) = J = 12 \text{ A}$$

$$u_C(0) = 0$$

W obwodzie po przełączeniu jest wymuszenie stałe, zadanie można obliczyć bezpośrednio wprowadzając transformatę napięcia  $E$ . W wyniku otrzymamy składową stałą i składową przejściową. Nie ma wtedy konieczności obliczania stanu ustalonego.

Schemat operatorowy przedstawiono na rys. 6.20b.

$$I_L(s) = \frac{E(s) + Li_L(0)}{R_1 + sL + \frac{1}{sC}} \quad \text{gdzie: } E(s) = \frac{E}{s} = \frac{8}{s}, \quad Li_L(0) = 12, \quad sL = s, \quad \frac{1}{sC} = \frac{10}{s}, \quad R_1 = 6.$$



Rys. 6.20b.

Warunki początkowe prądu cewki są przedstawione w postaci źródła napięciowego

$L \cdot i_L(0) = 12 \text{ A}$  które jest skierowane zgodnie z prądem  $I_L(s)$ .

Warunki początkowe napięcia na kondensatorze są w zadaniu zerowe.

Nie ma źródła napięciowego  $\frac{U_C(0)}{s}$

$$I_L(s) = \frac{12 + \frac{8}{s}}{s + 6 + \frac{10}{s}} = \frac{12s + 8}{s^2 + 6s + 10} = \frac{12s}{s^2 + 6s + 10} + \frac{8}{s^2 + 6s + 10}$$

Pierwiastki mianownika są zespolone i wynoszą

$$s_{1,2} = -3 \pm j$$

Transformatę odwrotną obliczymy dwoma sposobami:

1. Skorzystamy ze wzorów

$$L^{-1}\left[\frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}\right] = e^{-\alpha t} \cos \omega t$$

$$L^{-1}\left[\frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}\right] = e^{-\alpha t} \sin \omega t$$

oraz transformatę zapiszemy w postaci:

$$12 \frac{s}{(s+3)^2 + 1^2} \quad \text{oraz} \quad 8 \frac{1}{(s+3)^2 + 1^2} \quad \text{gdzie} \quad \alpha = 3 \quad \omega^2 = 1$$

Część pierwszą odpowiada transformacie odwrotnej funkcji cosinus i sinus (który należy odjąć), część drugą transformacie funkcji sinus.

$$I_L(s) = 12 \left( \frac{s+3}{(s+3)^2 + 1^2} - 3 \frac{1}{(s+3)^2 + 1^2} \right) + 8 \frac{1}{(s+3)^2 + 1^2}$$

stąd

$$i_L(t) = 12e^{-3t} \cos t - 36e^{-3t} \sin t + 8e^{-3t} \sin t = (12 \cos t - 28 \sin t)e^{-3t} \text{ A.}$$

2. Jeżeli:  $F(s) = \frac{L(s)}{M(s)}$  a pierwiastki mianownika są urojone.

$$\text{to } f(t) = 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{L(s_k)}{M'(s_k)} e^{s_k t} \right]$$

$$M'(s) = 2s + 6 \quad s_{1,2} = -3 \pm j,$$

wystarczy obliczyć dla jednego pierwiastka urojonego  $s = -3 + j$

$$i_L(t) = L^{-1} \left[ 4 \frac{(3s+2)}{s^2 + 6s + 10} \right] = 4 \cdot 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{3(-3+j) + 2}{2(-3+j) + 6} e^{(-3+j)t} \right] = 4 \cdot 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{(3+7j)}{2} e^{-3t} (\cos t + j \sin t) \right] =$$

$$= 12e^{-3t} \cos t - 28e^{-3t} \sin t \quad \text{sprawdza warunki początkowe, dla } t=0 \quad i_L(0) = 12 \text{ A.}$$

Napięcie na kondensatorze

$$U_C(s) = I_L(s) \frac{1}{sC} + \frac{U_C(0)}{s} = \frac{12s+8}{s^2+6s+10} \cdot \frac{10}{s} = 40 \frac{3s+2}{s(s^2+6s+10)}$$

Pierwiastki mianownika  $s=0$ , i jak poprzednio para sprzężona  $s_{1,2} = -3 \pm j$

jeżeli:  $F(s) = \frac{L(s)}{sM(s)}$  pierwiastki mianownika są urojone i jest jeden pierwiastek zerowy

$$\text{to } f(t) = \frac{L(0)}{M(0)} + 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{L(s_k)}{s_k M'(s_k)} e^{s_k t} \right]$$

$$u_{cp}(t) = 40 \left[ \frac{2}{10} + 2 \operatorname{Re} \left( \frac{3(-3+j)+2}{(-3+j) \cdot [2 \cdot (-3+j)+6]} \cdot e^{(-3+j)t} \right) \right]$$

wg wzoru Eulera

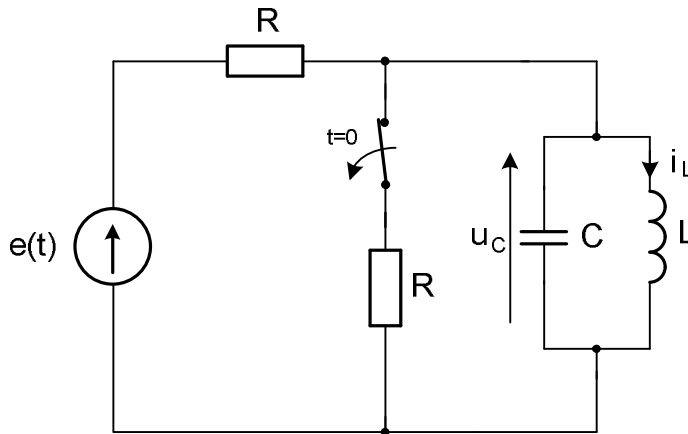
$$e^{jt} = \cos t + j \sin t$$

$$u_C(t) = 40 \left[ \frac{2}{10} + 2 \operatorname{Re} \left( \frac{3(-3+j)+2}{(-3+j) \cdot [2 \cdot (-3+j)+6]} \cdot e^{-3t} (\cos t + j \sin t) \right) \right]$$

$$u_C(t) = 8 - 8e^{-3t} (\cos t - 12 \sin t)$$

dla  $t=0$  sprawdza warunki początkowe  $u_C(0) = 0$

**Zad. 6.21.** Dla obwodu jak na rys. 6.21a. obliczyć prąd w cewce i napięcie na kondensatorze po przełączeniu. Przed przełączeniem był stan ustalony. Zastosować metodę operatorową.  
Dane :  $e(t) = 20 \sin 10t$ ,  $R = 1 \Omega$ ,  $L = 0.1 \text{ H}$ ,  $C = 0.1 \text{ F}$



**Rys. 6.21a.**

R o z w i ą z a n i e :

$$X_L = \omega L = 1 \Omega, \quad X_C = \frac{1}{\omega C} = 1 \Omega \quad \rightarrow \quad \text{rezonans prądów}$$

Obliczamy warunki początkowe.

$$u_C(t) = \frac{e}{2} = 10 \sin 10t \quad \text{dla } t=0 \quad u_C(0) = 0$$

$$i_L(t) = 10 \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = -10 \cos 10t \quad \text{dla } t=0 \quad i_L(0) = -10 \text{ A}$$

Składowa ustalona po przełączeniu.

W obwodzie występuje rezonans prądów, prąd dopływający do równolegle połączonych cewki i kondensatora równa się zero.

$$u_{Cu}(t) = 20 \sin 10t \quad \text{dla } t=0 \quad u_{Cu}(0) = 0$$

$$i_{Lu}(t) = 20 \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = 20 \cos 10t \quad \text{dla } t=0 \quad i_{Lu}(0) = -20 \text{ A}$$

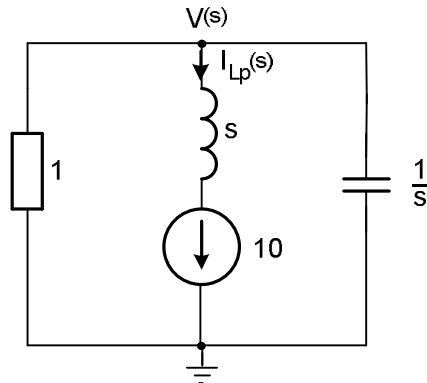
Warunki początkowe dla składowych przejściowych.

$$u_{cp}(0) = u_C(0) - u_{Cu}(0) = 0$$



$$i_{Lp}(0) = i_L(0) - i_{Lu}(0) = 10$$

Schemat operatorowy dla składowych przejściowych



**Rys. 6.21b.**

Metodą potencjałów węzłowych rozwiązujemy układ z rys 6.21b.

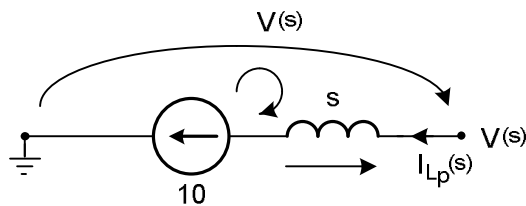
$$\left(1 + s + \frac{1}{s}\right)V(s) = -\frac{10}{s}$$

$$V(s) = -\frac{10}{s^2 + s + 1} \quad \text{stąd pierwiastki mianownika} \quad s_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$u_{cp}(s) = V(s) = \frac{-10}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$u_{cp}(t) = -\frac{20}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t$$

Znając potencjał  $V(s)$  możemy wyznaczyć prąd w indukcyjności z równania napięć w oczku, rys.6.21c.



**Rys. 6.21c.**

$$V(s) - I_{Lp}(s) \cdot s + 10 = 0$$

$$I_{Lp}(s) = \frac{V(s) + 10}{s} = -\frac{10}{s(s^2 + s + 1)} + \frac{10}{s}$$

Transformatę odwrotną obliczymy:

$$\text{jeżeli: } F(s) = \frac{L(s)}{sM(s)} \text{ a pierwiastki mianownika są: } s = 0 \text{ oraz urojone } s_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

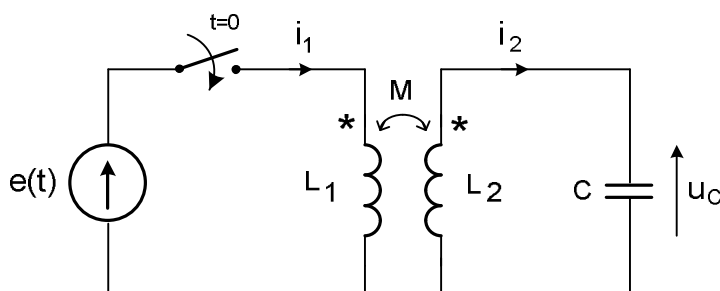
$$\text{to } f(t) = \frac{L(0)}{M(0)} + 2\operatorname{Re}\left[\frac{L(s_k)}{s_k M'(s_k)} e^{s_k t}\right] \quad M'(s_k) = 2s + 1$$

$$\begin{aligned} i_{Lp}(t) &= -\frac{10}{1} + 2\operatorname{Re}\left[\frac{-10}{\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left[2\cdot\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 1\right]} e^{\left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t}\right] + 10 = \\ &= 2\operatorname{Re}\left[\frac{20}{3 + j3} e^{\left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t}\right] = 2\operatorname{Re}\left[\left(5 - j\frac{5}{\sqrt{3}}\right) e^{\frac{1}{2}t} \left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + j\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right] = 10e^{\frac{1}{2}t} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{10}{\sqrt{3}}e^{\frac{1}{2}t} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}t \\ &= \frac{20}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + 60^\circ\right) \\ i_L(t) &= 20\cos 10t + \frac{20}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + 60^\circ\right) \end{aligned}$$

**Zad. 6.22.** Dla obwodu jak na rys.6.22a. obliczyć:  $i_1(t)$ ,  $i_2(t)$ ,  $u_C(t)$ , po załączeniu napięcia.

Przed załączeniem w obwodzie był stan ustalony.

Dane:  $e(t) = 10\sin t$  V,  $L_1 = L_2 = 2$  H,  $M = 1$  H,  $C = 1$  F.



**Rys. 6.22a.**

**R o z w i ą z a n i e :**

Warunki początkowe są zerowe;  $i_1(0) = 0$ ,  $i_2(0) = 0$ ,  $u_C(0) = 0$

Stan ustalony:

Sprężenie ujemne, prąd  $i_1$  skierowany jest do gwiazdki, prąd  $i_2$  skierowany jest od gwiazdki

$$\omega = 1 \text{ rad/s}, \quad X_{L1} = X_{L2} = 2 \, \Omega, \quad X_M = 1 \, \Omega, \quad X_C = 1 \, \Omega.$$

Równania napięciowe w oczkach

$$jX_{L1} \cdot I_1 - jM \cdot I_2 = \frac{10}{\sqrt{2}}$$

$$2j \cdot I_1 - jI_2 = \frac{10}{\sqrt{2}}$$

$$jX_{L2} \cdot I_2 - jM \cdot I_1 + (-jX_C) = 0$$

$$2j \cdot I_2 - jI_1 - jI_2 = 0 \quad \text{stad} \quad I_1 = I_2$$

$$I_1 = \frac{10}{j\sqrt{2}} = -j\frac{10}{\sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} e^{-j90^\circ} \text{ A}$$

$$i_{1u} = i_{2u} = 10 \sin(t - 90^\circ) \text{ A}$$

$$i_{1u}(0) = i_{2u}(0) = -10 \text{ A}$$

$$U_C = \frac{10}{\sqrt{2}} e^{-j90^\circ} \cdot e^{-j90^\circ} = -\frac{10}{\sqrt{2}} \text{ V}$$

$$u_{Cu} = 10 \sin(t - \pi) = -10 \sin t \text{ V}$$

$$u_{Cu}(0) = 0$$

Warunki początkowe dla składowych przejściowych

$$u_{Cp}(0) = u_C(0) - u_{Cu}(0) = 0$$

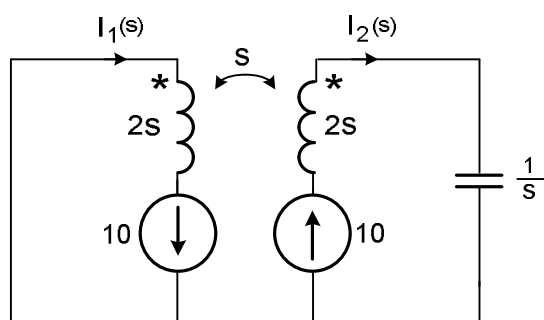
$$i_{1p}(0) = i_1(0) - i_{1u}(0) = 0 - (-10) = 10 \text{ A}, \quad i_{2p}(0) = 10 \text{ A}$$

Stąd

$$L_1 \cdot i_{1p}(0) - M \cdot i_{2p}(0) = 10 \text{ A}$$

$$L_2 \cdot i_{2p}(0) - M \cdot i_{1p}(0) = 10 \text{ A}$$

Schemat operatorowy dla składowej



**Rys. 6.16b**

$$2sI_{1p}(s) - sI_{2p}(s) = 10$$

$$2sI_{2p}(s) - sI_{1p}(s) + \frac{1}{s}I_{2p}(s) = 10$$

stąd:

$$I_{2p}(s) = \frac{10s}{s^2 + \frac{2}{3}} = 10 \frac{s}{s^2 + \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2} \rightarrow i_{2p}(t) = 10 \cos \sqrt{\frac{2}{3}} t$$

$$U_{Cp}(s) = \frac{10s}{s^2 + \frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{s} = 10 \frac{1}{s^2 + \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2} \rightarrow u_{Cp}(t) = 10 \sqrt{\frac{3}{2}} \sin \sqrt{\frac{2}{3}} t$$

$$2sI_{1p}(s) = 10 + I_{2p}(s) \rightarrow I_{1p}(s) = \frac{5}{s} + \frac{5s}{s^2 + \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2}$$

$$I_{1p}(s) = \frac{5}{s} + 5 \frac{s}{s^2 + \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2} \quad \rightarrow \quad i_{1p}(t) = 5 + 5 \cos \sqrt{\frac{2}{3}} t$$

$$u_C(t) = u_{C_u}(t) + u_{C_p}(t) = -10 \sin t + 10 \sqrt{\frac{3}{2}} \sin \sqrt{\frac{2}{3}} t \quad \text{V}$$

$$i_1(t) = i_{1u}(t) + i_{1p}(t) = 10 \sin(t - 90^\circ) + 5 + 5 \cos \sqrt{\frac{2}{3}} t = -10 \cos t + 5 + 5 \cos \sqrt{\frac{2}{3}} t \quad \text{A}$$

$$i_2(t) = i_{2u}(t) + i_{2p}(t) = 10 \sin(t - 90^\circ) + 10 \cos \sqrt{\frac{2}{3}} t = -10 \cos t + 10 \cos \sqrt{\frac{2}{3}} t \quad \text{A}$$

Dla  $t = 0$  wyniki sprawdzają warunki początkowe, które są zerowe.

Poprawność rozwiązania można sprawdzić obliczając pochodną napięcia na kondensatorze,

która jest równa wartości prądu  $i_2(t) = C \frac{du_C}{dt}$

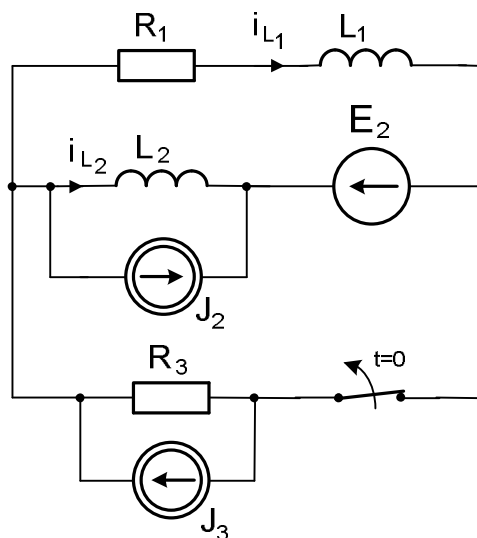
W przedstawionym obwodzie powstaną drgania własne nie tłumione (nie ma elementów

rezystancyjnych) o częstotliwości  $\omega = \sqrt{\frac{2}{3}}$

**Zad. 6.23.** W obwodzie jak na rysunku 6.23a. obliczyć prądy:  $i_{L_1}(t)$ ,  $i_{L_2}(t)$  po przełączeniu.

Przed przełączeniem był stan ustalony.  $E_2 = 40 \text{ V}$ ,  $J_2 = 1 \text{ A}$ ,  $J_3 = 5 \text{ A}$ ,  $R_1 = 20 \Omega$ ,

$R_3 = 5 \Omega$ ,  $L_1 = 2 \text{ H}$ ,  $L_2 = 1 \text{ H}$ .



**Rys. 6.23a.**

### R o z w i ą z a n i e

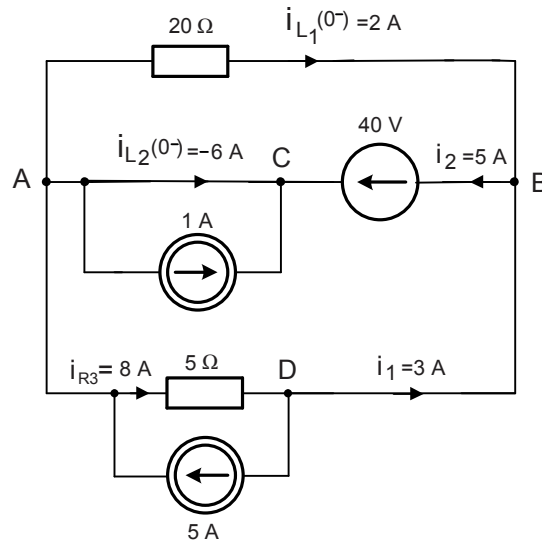
Jeżeli w wyniku przełączenia powstają rozcięcia złożone z samych cewek, źródeł prądu i otwartych wyłączników, to prądy tych cewek przestają być funkcjami ciągłymi.

Ale ciągłość zachowuje suma strumieni skojarzonych cewek należących do takich oczek, w których nie występują idealne źródła prądu tworzące rozcięcia z samymi cewkami. Suma strumieni skojarzonych cewek należących do takich oczek przed przełączeniem jest równa sumie strumieni skojarzonych cewek należących do tych oczek po przełączeniu.

Zasada ta wynika stąd, że w tak wybranych oczkach strumień wypadkowy nie może się zmienić o wartość skończoną w nieskończenie krótkim czasie.[11].

Warunki początkowe.

W obwodzie są wymuszenia stałe, więc indukcyjności stanowią zwarcie co przedstawia schemat na rys. 6.23b. Podstawiono dane liczbowe.



**Rys. 6.23b.**

Po zwarcu indukcyjności  $L_2$  między węzłami AB pozostanie tylko idealne źródło napięciowe

$E_2 = 40 \text{ V}$ , stąd prąd  $i_{L1}(0^-) = \frac{40}{20} = 2 \text{ A}$ .

To samo napięcie jest przyłożone do rezystora  $R_3 = 5 \Omega$ , stąd prąd płynący przez niego

$$i_{R3} = \frac{E_2}{R_3} = \frac{40}{5} = 8 \text{ A}$$

Suma prądów w węźle D

$$i_1 = i_{R3} - J_3 = 8 - 5 = 3 \text{ A}$$

Suma prądów w węźle B

$$i_2 = i_1 + i_{L1}(0^-) = 3 + 2 = 5 \text{ A}$$

Suma prądów w węźle C

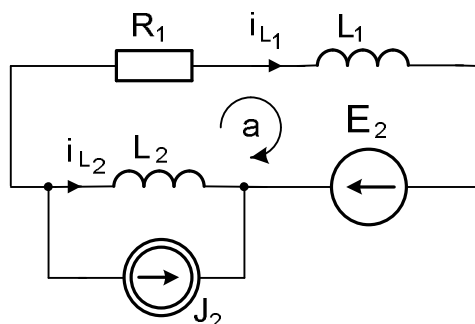
$$i_{L2}(0^-) = -i_2 - J_2 = -5 - 1 = -6 \text{ A}$$

Przed otwarciem wyłącznika prądy cewek wynoszą

$$i_{L1}(0^-) = i_{L1}^- = 2 \text{ A}$$

$$i_{L2}(0^-) = i_{L2}^- = -6 \text{ A}$$

Po otwarciu wyłącznika, rys. 6.23c. powstaje rozcięcie złożone z dwóch cewek i źródła prądu



**Rys. 6.23c.**

Na podstawie zasady zachowania strumienia skojarzonego w oczku **a**, spełniającym warunki zasady, mamy

$$L_1 \cdot i_{L1}^+ - L_2 \cdot i_{L2}^+ = L_1 \cdot i_{L1}^- - L_2 \cdot i_{L2}^-$$

Dodatkowo na podstawie prądowego prawa Kirchhoffa dla rozcięcia

$$i_{L1}^+ + i_{L2}^+ = -J_2$$

Podstawiając dane

$$2 \cdot i_{L1}^+ - 1 \cdot i_{L2}^+ = 2 \cdot 2 - 1 \cdot (-6)$$

$$i_{L1}^+ + i_{L2}^+ = -1$$

Z układu dwóch równań wyznaczamy prądy cewek po otwarciu wyłącznika

$$i_{L1}^+ = 3 \text{ A}, \quad i_{L2}^+ = -4 \text{ A}$$

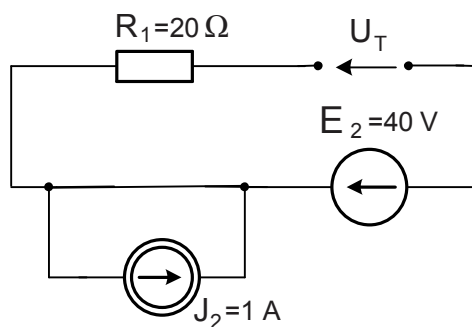
Po otwarciu wyłącznika napięcia na cewkach nie są równe zero. Prądy nie są stałe. Rozpoczyna się stan nieustalony.

Zgodnie z zasadami wyboru zmiennych stanu przedstawiony obwód ma rząd  $n = 1$  i jedną zmienną stanu np.  $i_{L1}$  z warunkami początkowymi  $i_{L1}(0) = 3 \text{ A}$ .

Stan nieustalony zostanie rozwiązany metodą Thevenina

$$i_L(t) = \frac{U_T}{R_T} + \left[ i_L(0) - \frac{U_T}{R_T} \right] \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{gdzie} \quad \tau = \frac{L}{R_T}$$

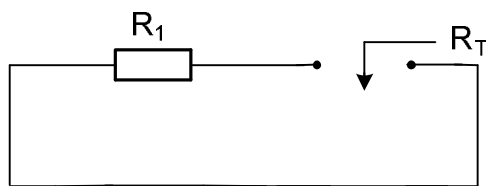
Obliczamy  $U_T$ , rys. 6.23d.



**Rys. 6.23d.**

$$U_T = 40 \text{ V}$$

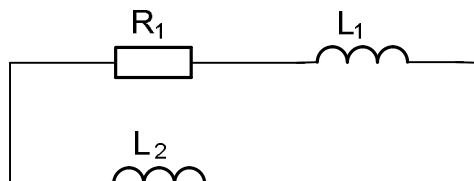
Obliczamy  $R_T$ , rys. 6.23e.



Rys. 6.23e.

$$R_T = 20 \Omega$$

Obliczamy  $\tau$ , rys. 6.23f.



Rys. 6.23f.

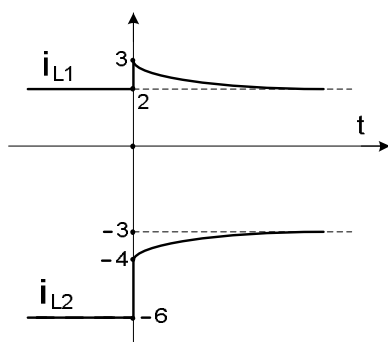
$$L = L_1 + L_2 = 3 \text{ H}$$

$$\tau = \frac{3}{20} = 0.15 \text{ s} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\tau} = 6.66$$

$$i_{L1} = 2 + [3 - 2]e^{-6.66t} = 2 + 1e^{-6.66t}$$

$$i_{L2} = -i_{L1} - J_2 = -3 - 1e^{-6.66t}$$

Na rys. 6.23g. przedstawiono przebiegi prądów w cewkach. Linia przerywaną zaznaczono składowe ustalone. W przypadku indukcyjności  $L_1$  widać skokową zmianę prądu od wartości 2 A do wartości 3 A, po czym następuje klasyczna wykładnicza zmiana do stanu ustalonego. Dla indukcyjności  $L_2$  skok prądu następuje od wartości (–6 A) do wartości (–4 A). po czym następuje wykładnicza zmiana do stanu ustalonego (–3 A)

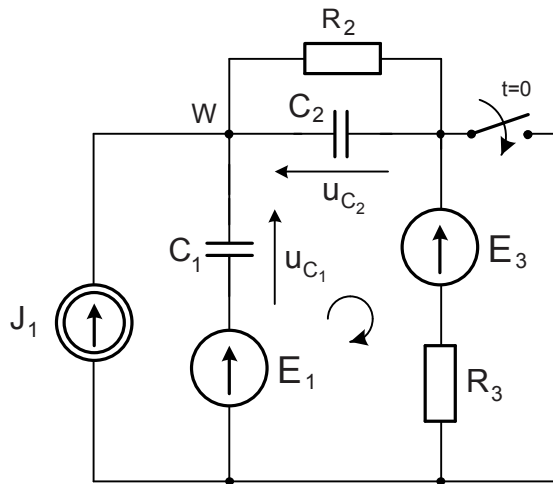


Rys. 6.23g.

**Zad. 6.24.** W obwodzie jak na rysunku 6.24a. obliczyć  $u_{C_1}(t)$  i  $u_{C_2}(t)$  po przełączeniu.

Przed przełączeniem w obwodzie był stan ustalony.  $E_1 = 20 \text{ V}$ ,  $E_3 = 10 \text{ V}$ ,  $J_1 = 2 \text{ A}$ ,

$$R_2 = R_3 = 20 \Omega, \quad C_1 = C_2 = 2.5 \mu\text{F}$$



**Rys. 6.24a.**

### R o z w i ą z a n i e

Jeżeli w wyniku przełączenia powstają oczka złożone z samych kondensatorów, źródeł napięcia i zamkniętych wyłączników, to napięcia tych kondensatorów przestają być funkcjami ciągłymi. Ale ciągłość zachowuje suma ładunków kondensatorów dołączonych do takich węzłów, do których nie są dołączone idealne źródła napięcia tworzące oczka z samymi kondensatorami. Suma ładunków kondensatorów dołączonych do takich węzłów przed przełączeniem jest równa sumie ładunków kondensatorów dołączonych do tych węzłów po przełączeniu.

Zasada ta wynika stąd, że do tak wybranych węzłów nie może dopłynąć skończony ładunek w nieskończenie krótkim czasie.[11]

### Warunki początkowe

Napięcie na kondensatorze  $C_2$  jest równe napięciu na rezystorze  $R_2$  przez który płynie prąd źródła prądowego  $J_1$

$$u_{C_2}^- = u_{C_2}(0^-) = R_2 J_1 = 40 \text{ V}$$

Napięcie na kondensatorze  $C_1$  wyznaczmy z równania (oczko), nap. pr. Kirchhoffa.

$$E_1 + u_{C_1} - u_{C_2} - E_3 - R_3 J_1 = 0$$

stąd

$$u_{C_1}^- = u_{C_1}(0^-) = 70 \text{ V}$$

Po przełączeniu (zwarciu gałęzi  $E_3$  i  $R_3$ ) powstaje oczko złożone z samych kondensatorów i idealnego źródła napięcia.

Napięcia na kondensatorach stają się nie ciągłe. W celu wyznaczenia tych napięć należy obliczyć wartość ładunku w węźle W, dla obu kondensatorów. Jest to zasada zachowania ciągłości ładunku. Ładunki na obydwu kondensatorach są równe. Ładunek  $Q = CU$

$$C_1 u_{C_1}^- + C_2 u_{C_2}^- = C_1 u_{C_1}^+ + C_2 u_{C_2}^+ \quad C_1 = C_2 \quad \text{upraszczamy równanie}$$

$$u_{C_1}^+ - u_{C_2}^+ = -E_1 \quad \text{nap. pr. Kirchhoffa}$$

$$u_{C_1}^+ + u_{C_2}^+ = 70 + 40$$

$$u_{C_1}^+ - u_{C_2}^+ = -20$$

stąd



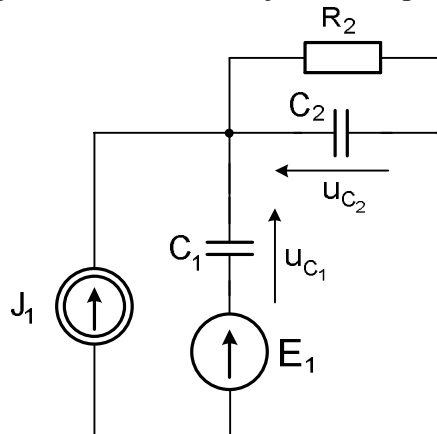
$$u_{C_1}^+ = 45 \text{ V}$$

$$u_{C_2}^+ = 65 \text{ V}$$

Stan nieustalony zostanie rozwiązany metodą Thevenina

Obwód rzędu  $n = 1$ , jedna zmienna stanu np.  $u_{C_1}$  przy warunkach początkowych  $u_{C_1}(0) = 45 \text{ V}$

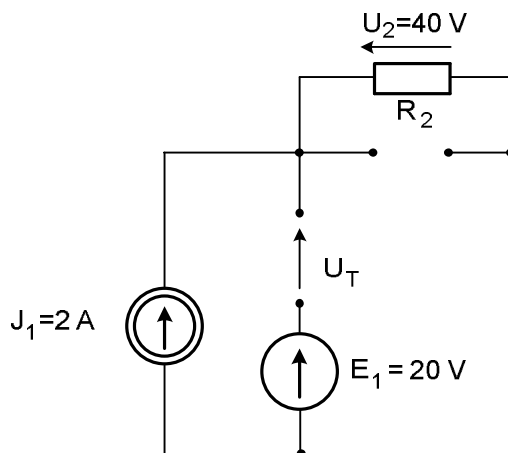
Rozwiązanie ogólne sprowadza się do dwójnika zastępczego Thevenina.



**Rys. 6.24b.**

$$u_C = U_T + [u_C(0) - U_T] e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{gdzie} \quad \tau = R_T C$$

Obliczamy  $U_T$ , rys. 6.20c



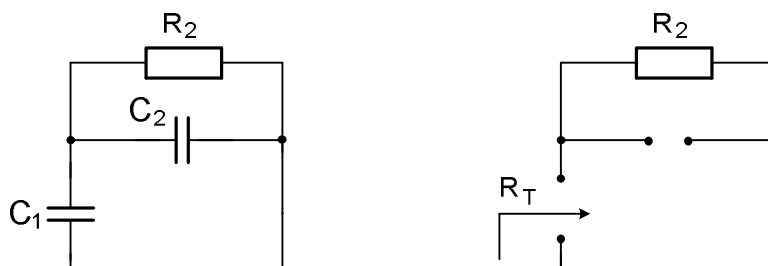
**Rys. 6.24c.**

Na schemacie na rys. 6.24c. kondensator  $C_2$  został również wyłączony, w obwodzie po nim pozostaje przerwa. (w przypadku indukcyjności zwarcie jak w zad. 6.23).

Napięcie Thevenina obliczamy na zaciskach pozostałych po wyłączonym kondensatorze  $C_1$ , którego napięcie przyjęliśmy za zmienną stanu.

$$U_T = U_2 - E_1 = 40 - 20 = 20 \text{ V}$$

Obliczamy stałą czasową  $\tau$  i  $R_T$ , rys. 6.24d.



Rys. 6.24d.

$$C = C_1 + C_2 = 5 \mu\text{F}$$

$$R_T = R_2 = 20 \Omega \quad \tau = R_T C = 5 \mu\text{F} \cdot 20 \Omega = 100 \mu\text{s} \rightarrow \frac{1}{\tau} = 10^{-4}$$

Napięcie na kondensatorze  $C_1$

$$u_{C_1} = 20 + [45 - 20] e^{-10^4 t} = 20 + 25 e^{-10^4 t} \quad \text{dla } t = 0 \quad \text{spełnia war. pocz.}$$

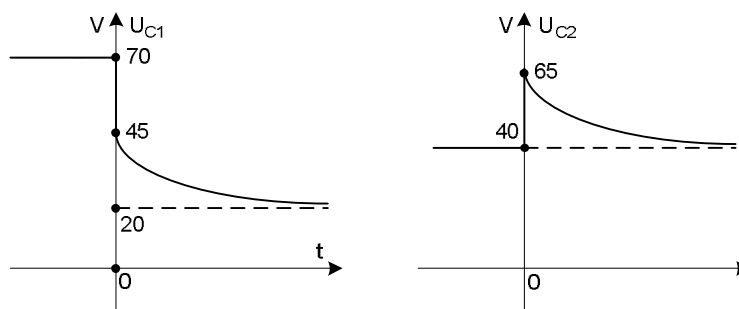
Napięcie na kondensatorze  $C_2$  obliczymy z nap. pr. Kirchhoffa

$$E_1 + u_{C_1} - u_{C_2} = 0$$

stąd

$$u_{C_2} = 20 + 25 e^{-10^4 t} + 20 = 40 + 25 e^{-10^4 t} \quad \text{dla } t = 0 \quad \text{spełnia war. pocz.}$$

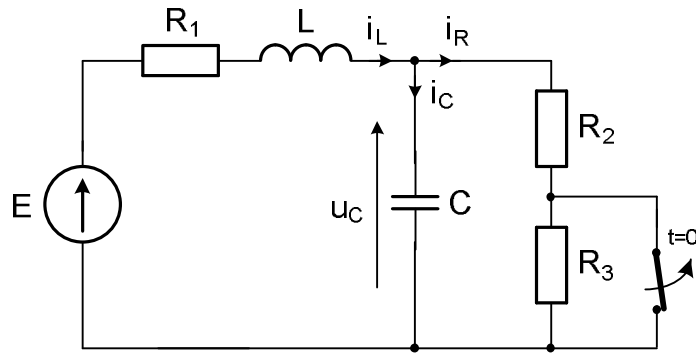
Na rys. 6.24e. przedstawiono przebiegi napięć na kondensatorach. Linia przerywaną zaznaczono składową ustaloną. W przypadku kondensatora  $C_1$  widać skokową zmianę napięcia od wartości 70 V do 45 V, po czym następuje klasyczne rozładowanie do stanu ustalonego (20 V). Dla kondensatora  $C_2$  skok następuje od wartości 40 V do 65 V, po czym następuje rozładowanie do stanu ustalonego (40 V)



Rys. 6.24e.

**Zad. 6.25.** Obliczyć przebieg napięcia na kondensatorze i prąd w cewce rys. 6.21a. stosując metodę zmiennych stanu. Przed otwarciem wyłącznika w obwodzie był stan ustalony.

$$E = 20 \text{ V}, \quad R_1 = 1 \Omega, \quad R_2 = 1 \Omega, \quad R_3 = 9 \Omega, \quad C = 50 \text{ mF}, \quad L = 0.1 \text{ H}.$$



**Rys. 6.25a**

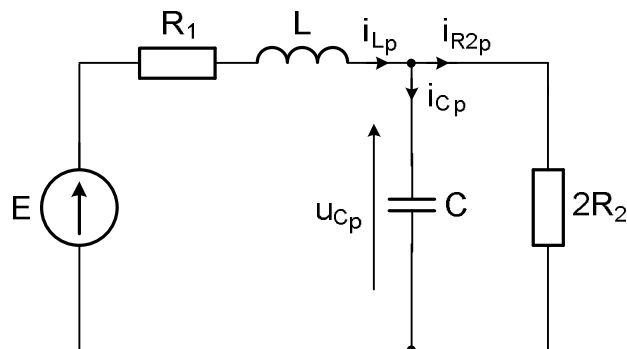
R o z w i ą z a n i e

Warunki początkowe

$$i_L(0) = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{20}{1+1} = 10 \text{ A}$$

$$u_C(0) = R_2 \cdot i_L(0) = 10 \text{ V}$$

Po otwarciu wyłącznika, schemat rys. 6.25b.



**Rys. 6.25b.**

Równania zmiennych stanu

Jako pierwszą zmienną stanu przyjmijmy prąd w cewce  $x_1 = i_L$ , jako drugą  $x_2 = u_C$  napięcie na kondensatorze.

$$i_L = i_C + i_R \quad (\text{z I pr. Kirchhoffa})$$

$$i_C = C \frac{du_C}{dt}, \quad i_R = \frac{u_C}{R_2 + R_3}, \quad \text{stąd}$$

$$i_L = C \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{R_2 + R_3}$$

$$R_1 i_L + L \frac{di_L}{dt} + u_C = E \quad (\text{z II pr. Kirchhoffa})$$

Po uporządkowaniu z zachowaniem kolejności równań otrzymujemy

$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{R_1}{L} i_L - \frac{1}{L} u_C + \frac{1}{L} E$$

$$\frac{du_c}{dt} = \frac{1}{C} i_L - u_c \frac{1}{C(R_2 + R_3)}$$

Zapisane macierzowo

$$\begin{bmatrix} \frac{di_L}{dt} \\ \frac{du_c}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{C(R_2 + R_3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ u_c \end{bmatrix}$$

Stąd macierz **A**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{C(R_2 + R_3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & -10 \\ 20 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\det [\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}] = 0$$

$$[\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -10 & -10 \\ 20 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 10 & 10 \\ -20 & \lambda + 2 \end{bmatrix}$$

Stąd

$$(\lambda + 10)(\lambda + 2) + 200 = 0$$

$$\Delta = -736 \rightarrow \sqrt{\Delta} = j21.13$$

$$\lambda_1 = -6 + j13.56, \quad \lambda_2 = -6 - j13.56$$

Ponieważ pierwiastki są zespolone prąd cewki i napięcie kondensatora będzie miało przebieg o charakterze oscylacyjnym.

Równania stanu można rozwiązać numerycznie.

Na przykład korzystając z programu MATLAB można wykorzystać funkcję ode 23 rozwiązującą układ równań różniczkowych pierwszego rzędu.

```
[t,x]=ode23(@zad1f,[0,1],[10,10]);
```

```
iL=x(:,1);
```

```
uC=x(:,2);
```

```
subplot(2,1,1);plot(t,iL);
```

```
subplot(2,1,2);plot(t,uC);
```

```
function xdot=zad1f(t,x)
```

```
Równanie stanu
```

```
R1=1;
```

```
R2=1;
```

```
R3=9;
```

```
L=1e-1;
```

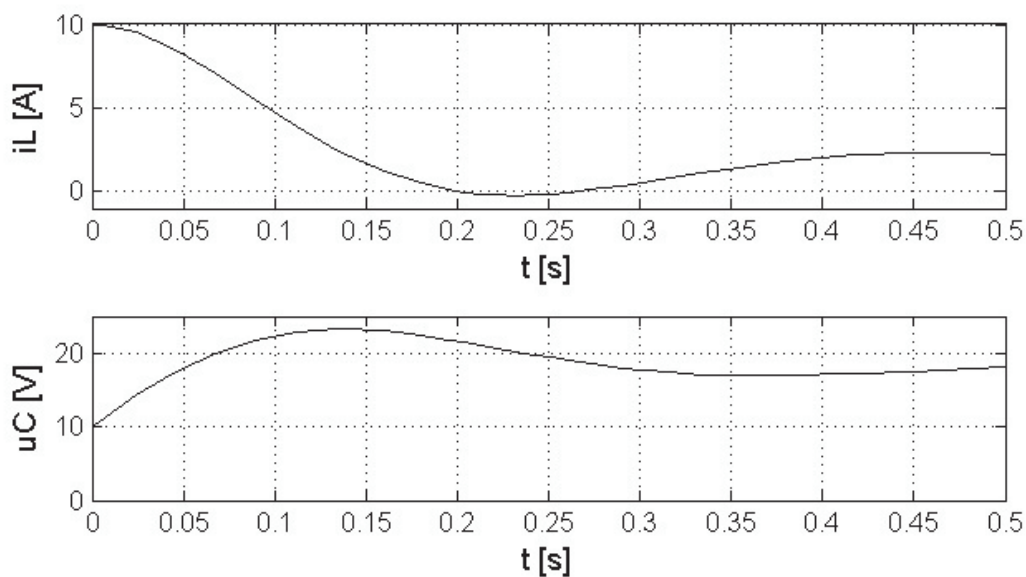
```
C=50e-3;
```

```
E=20;
```

```
A=[-R1/L -1/L; 1/C -1/((R2+R3)*C)];
```

```
B=[E/L; 0];
```

```
xdot=A*x+B;
```



**Rys. 6.25c.**

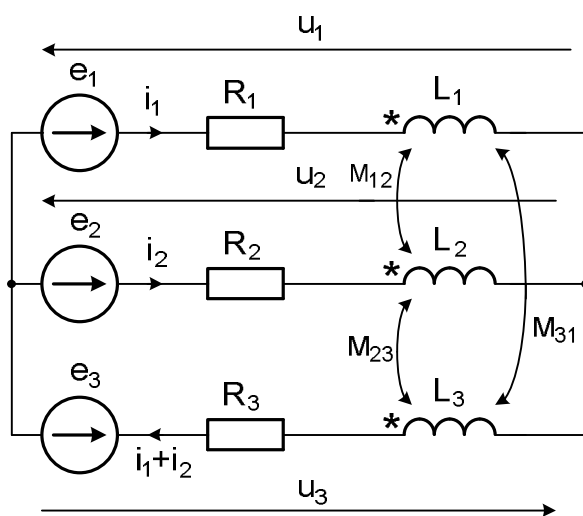
Na rys.6.25c. przedstawiono wykres czasowy prądu w cewce i napięcia na kondensatorze.

**Zad. 6.26.** Wyprowadzić równania stanu w postaci normalnej, rys. 6.26a.

$$R_1 = 2 \Omega, \quad L_1 = 3 \text{ H}, \quad M_{12} = 2 \text{ H},$$

$$R_2 = 4 \Omega, \quad L_2 = 2 \text{ H}, \quad M_{23} = 1 \text{ H},$$

$$R_3 = 2 \Omega, \quad L_3 = 2 \text{ H}, \quad M_{31} = 1 \text{ H}.$$



**Rys. 6.26a.**

**Rozwiązanie**

Pomiędzy cewkami  $L_1$  i  $L_2$  jest sprzężenie dodatnie (prąd  $i_1$  oraz  $i_2$  są skierowane do węzła z gwiazdką)

Pomiędzy cewkami  $L_2$  i  $L_3$  jest sprzężenie ujemne (prąd  $i_2$  jest skierowany do węzła z gwiazdką, a prąd  $i_1 + i_2$  jest skierowany do węzła bez gwiazdki)

Pomiędzy cewkami  $L_1$  i  $L_3$  jest sprzężenie ujemne (prąd  $i_1$  jest skierowany do węzła z gwiazdką a prąd  $i_1 + i_2$  jest skierowany do węzła bez gwiazdki)

Na podstawie II prawa Kirchhoffa

$$u_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{12} \frac{di_2}{dt} - M_{31} \frac{d(i_1 + i_2)}{dt} - e_1$$

$$u_2 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M_{12} \frac{di_1}{dt} - M_{23} \frac{d(i_1 + i_2)}{dt} - e_2$$

$$u_3 = R_3 (i_1 + i_2) + L_3 \frac{d(i_1 + i_2)}{dt} - M_{31} \frac{di_1}{dt} - M_{23} \frac{di_2}{dt} + e_3$$

$$u_1 + u_3 = 0$$

$$u_2 + u_3 = 0$$

Po wstawieniu danych liczbowych

$$u_1 = 2i_1 + 3 \frac{di_1}{dt} + 2 \frac{di_2}{dt} - 1 \frac{d(i_1 + i_2)}{dt} - e_1$$

$$u_2 = 4i_2 + 2 \frac{di_2}{dt} + 2 \frac{di_1}{dt} - 1 \frac{d(i_1 + i_2)}{dt} - e_2$$

$$u_3 = 2(i_1 + i_2) + 2 \frac{d(i_1 + i_2)}{dt} - 1 \frac{di_1}{dt} - 1 \frac{di_2}{dt} + e_3$$

Stąd

$$u_1 = 2i_1 + 2 \frac{di_1}{dt} + 1 \frac{di_2}{dt} - e_1$$

$$u_2 = 4i_2 + 1 \frac{di_2}{dt} + 1 \frac{di_1}{dt} - e_2$$

$$u_3 = 2i_1 + 2i_2 + 1 \frac{di_1}{dt} + 1 \frac{di_2}{dt} + e_3$$

Wstawiając do równań napięciowych

Otrzymujemy

$$4i_1 + 2i_2 + 3 \frac{di_1}{dt} + 2 \frac{di_2}{dt} - e_1 + e_3 = 0$$

$$2i_1 + 6i_2 + 2 \frac{di_1}{dt} + 2 \frac{di_2}{dt} - e_2 + e_3 = 0$$

Zapisujemy macierzowo

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 - e_3 \\ e_2 - e_3 \end{bmatrix}$$

Wprowadzamy oznaczenie

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Obliczamy macierz odwrotną

$$\det M = 2$$

$$M^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Mnożymy lewostronnie przez  $M^{-1}$

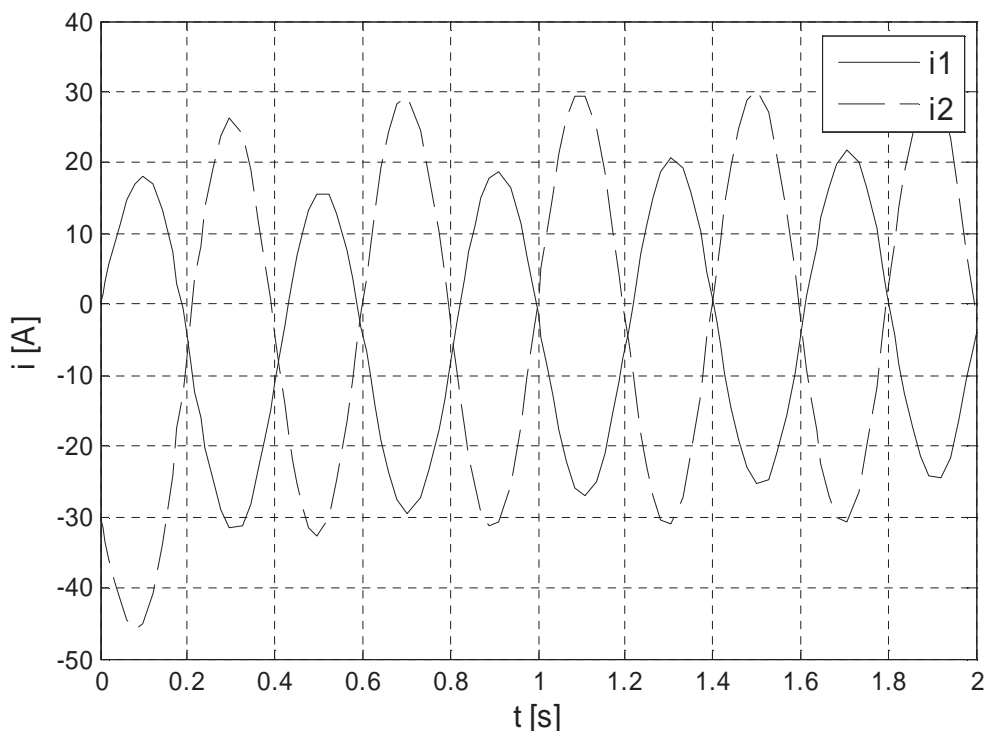
$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 - e_3 \\ e_2 - e_3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 - e_3 \\ e_2 - e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e_1 - 3e_3 - 2e_2 + 2e_3 \\ -2e_1 + 2e_3 + 2e_2 - 2e_3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3/2 & -1 & -1/2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

Korzystając z programu MATLAB i zastosowaniu opcji 'Mass' można rozwiązać równania stanu bez doprowadzania ich do postaci normalnej.

```
options=odeset('Mass',@zad2mass)
[t,x]=ode23(@zad2f,[0,2],[0,-30],options);
i1=x(:,1);
i2=x(:,2);
plot(t,i1,'-k',t,i2,'--k')
function xdot=zad2f(t,x)
Równania stanu
e1=100*sqrt(2)*sin(5*pi*t);
e2=100*sqrt(2)*sin(5*pi*t-2*pi/3);
e3=100*sqrt(2)*sin(5*pi*t+2*pi/3);
A=[-4 -2; -2 -6];
E=[e1-e2; e2-e3];
xdot=zeros(2,1);
xdot=A*x+E;
Macierz M
function M=zad2mass(t,x)
M=[3 2; 2 2];
```

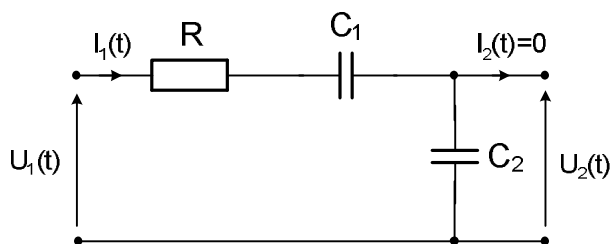


**Rys. 6.26b.**

Na rys.6.26 przedstawiono przebiegi czasowe obliczonych prądów

**Zad. 6.27.** Wyznaczyć transmitancję operatorową typu napięciowego. Wyznaczyć odpowiedź impulsową i skokową dla obwodu przedstawionego na rys 6.27a.

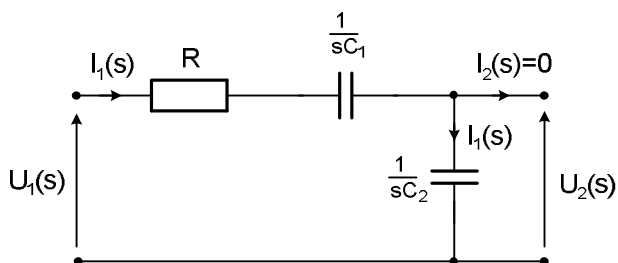
Dane:  $R = 100 \, \Omega$ ,  $C_1 = 2 \, \text{mF}$ ,  $C_2 = 5 \, \text{mF}$ .



Rys. 6.27a

R o z w i ą z a n i e

Schemat operatorowy obwodu przy zerowych warunkach początkowych stosowany do wyznaczania transmitancji przedstawiony jest na rys. 6.27b.



Rys. 6.27b

Wprowadzimy oznaczenia

$$Z_1(s) = R + \frac{1}{sC_1} = 100 + \frac{500}{s}, \quad Z_2(s) = \frac{1}{sC_2} = \frac{200}{s}$$

$$U_1(s) - I_1(s)Z_1(s) - U_2(s) = 0$$

$$I_1(s) = \frac{U_2(s)}{Z_2(s)} \quad \text{ponieważ} \quad I_2(s) = 0$$

$$U_1(s) - \frac{U_2(s)}{Z_2(s)} \cdot Z_1(s) - U_2(s) = 0$$

$$U_1(s) = U_2(s) \left( \frac{Z_1(s)}{Z_2(s)} + 1 \right)$$

$$T(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{200}{100s + 700} = \frac{2}{s + 7}$$

Odpowiedź impulsowa

$$h(t) = L^{-1}[T(s)] = L^{-1}\left[\frac{2}{s + 7}\right] = 2e^{-7t}$$

Odpowiedź skokowa



$$y(t) = L^{-1} \left[ \frac{1}{s} \cdot T(s) \right] = L^{-1} \left[ \frac{1}{s} \cdot \frac{2}{s+7} \right]$$

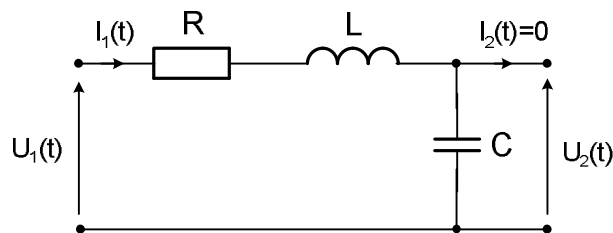
Zera mianownika  $s = 0$ ,  $s = -7$

$$\text{jeżeli: } F(s) = \frac{L(s)}{sM(s)} \text{ to } f(t) = \frac{L(0)}{M(0)} + \sum_{k=1}^m \frac{L(s_k)}{s_k M'(s_k)} e^{s_k t}$$

$$r(t) = \frac{2}{7} - \frac{2}{7} e^{-7t}$$

**Zad. 6.28.** Wyznaczyć transmitancję operatorową typu napięciowego. Wyznaczyć odpowiedź impulsową i skokową dla obwodu przedstawionego na rys. 6.28a.

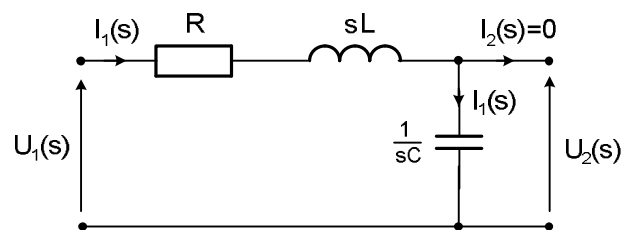
Dane:  $R = 12 \, \Omega$ ,  $L = 1 \, \text{H}$ ,  $C = 10 \, \text{mF}$ .



**Rys. 6.28a.**

R o z w i ą z a n i e

Schemat operatorowy obwodu przy zerowych warunkach początkowych stosowany do wyznaczania transmitancji przedstawiony jest na rys. 6.29b.



**Rys. 6.28b.**

Wprowadzimy oznaczenia

$$Z_1(s) = R + sL = s + 12, \quad Z_2(s) = \frac{1}{sC} = \frac{100}{s}$$

$$U_1(s) - I_1(s)Z_1(s) - U_2(s) = 0$$

$$I_1(s) = \frac{U_2(s)}{Z_2(s)}$$

$$U_1(s) - \frac{U_2(s)}{Z_2(s)} \cdot Z_1(s) - U_2(s) = 0$$

$$U_1(s) = U_2(s) \left( \frac{Z_1(s)}{Z_2(s)} + 1 \right)$$

$$T(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{100}{s^2 + 12s + 100}$$

Pierwiastki mianownika

$$\Delta = 144 - 400 = -256 \rightarrow \sqrt{\Delta} = j16$$

$$s_1 = -6 + j8, \quad s_2 = -6 - j8$$

Odpowiedź impulsowa

$$h(t) = L^{-1}[T(s)] = L^{-1}\left[\frac{100}{s^2 + 12s + 100}\right]$$

korzystając z zależności

$$L^{-1}\left[\frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}\right] = e^{-\alpha t} \sin \omega t \rightarrow h(t) = L^{-1}\left[\frac{100}{(s + 6)^2 + 8^2}\right] = 12.5 e^{-6t} \sin 8t$$

Odpowiedź skokowa

$$y(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{s} \cdot T(s)\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{s} \cdot \frac{100}{s^2 + 12s + 100}\right]$$

Transformatę odwrotną obliczymy ze wzoru

jeżeli:  $F(s) = \frac{L(s)}{sM(s)}$  a pierwiastki mianownika są urojone, oraz  $s = 0$

$$\text{to } f(t) = \frac{L(0)}{M(0)} + 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{L(s_k)}{s_k M'(s_k)} e^{s_k t} \right]$$

stad

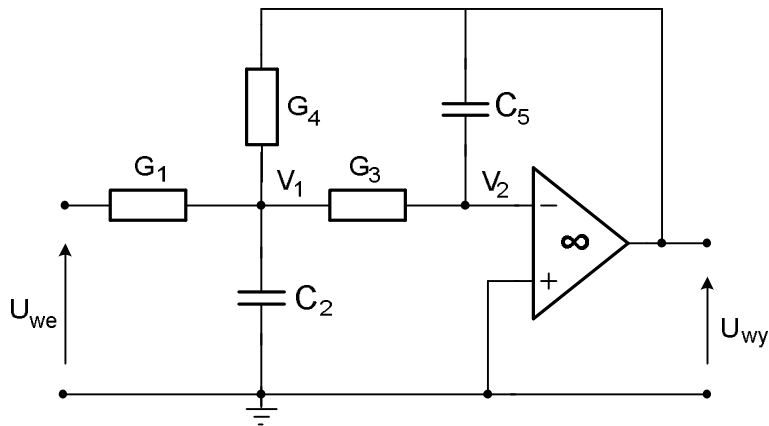
$$M' = 2s + 12$$

$$y(t) = \frac{100}{100} + 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{100}{(-6 + j8)[2(-6 + j8) + 12]} e^{(-6 + j8)t} \right] =$$

$$= 1 + 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{100}{(-6 + j8)j8} e^{-6t} (\cos 8t + j \sin 8t) \right] = 1 - e^{-6t} (\cos 8t + \frac{3}{4} \sin 8t)$$

**Zad. 6.29.** Obliczyć transmitancję  $T(s) = \frac{U_{wy}(s)}{U_{we}(s)}$  dla obwodu jak na rysunku 6.29a.

Dane :  $G_1 = G_3 = 1 \text{ S}$ ,  $G_4 = 2 \text{ S}$ ,  $C_2 = 2 \text{ F}$ ,  $C_5 = 0.5 \text{ F}$



Rys. 6.29a.

Rozwiązanie:

Równania potencjałów węzłowych [11]:

$$(G_1 + G_3 + G_4 + sC_2)V_1(s) - G_3V_2(s) - G_4U_{wy}(s) = G_1U_{we}(s)$$

$$-G_3V_1(s) + (G_3 + sC_5)V_2(s) - sC_5U_{wy}(s) = 0$$

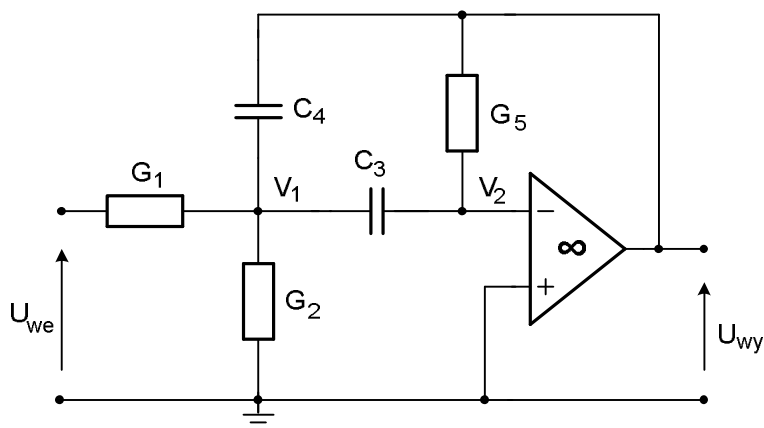
$$V_2(s) = 0$$

Po wyeliminowaniu potencjałów  $V_1(s)$  i  $V_2(s)$  otrzymujemy jedno równanie z którego mamy

$$\frac{U_{wy}(s)}{U_{we}(s)} = -\frac{1}{s^2 + 2s + 2} \quad \text{Obwód jest filtrem dolnoprzepustowym}$$

**Zad. 6.30.** Obliczyć transmitancję  $T(s) = \frac{U_{wy}(s)}{U_{we}(s)}$  dla obwodu jak na rysunku 6.30a.

Dane :  $G_1 = G_5 = 1 \text{ S}$ ,  $G_2 = 4 \text{ S}$ ,  $C_3 = C_4 = 1 \text{ F}$ .



Rys. 6.26a

R o z w ą z a n i e :

Równania potencjałów węzłowych [11]:

$$(G_1 + G_2 + sC_3 + sC_4)V_1(s) - sC_3V_2(s) - sC_4U_{wy}(s) = U_{we}(s)G_1$$

$$-sC_3V_1(s) + (G_5 + sC_3)V_2(s) - G_5U_{wy}(s) = 0$$

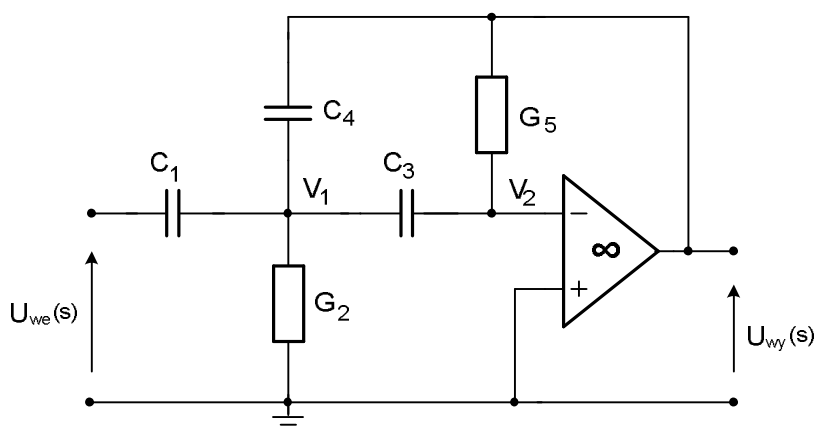
$$V_2(s) = 0$$

Po wyeliminowaniu potencjałów  $V_1(s)$  i  $V_2(s)$  otrzymujemy jedno równanie, z którego mamy:

$$\frac{U_{wy}(s)}{U_{we}(s)} = -\frac{s}{s^2 + 2s + 5} \quad \text{Obwód jest filtrem środkowoprzepustowym}$$

**Zad. 6.31.** Obliczyć transmitancję  $T(s) = \frac{U_{wy}(s)}{U_{we}(s)}$  dla obwodu jak na rysunku 6.31a.

Dane :  $G_2 = 3 \text{ S}$ ,  $G_5 = 1 \text{ S}$ ,  $C_1 = C_3 = C_4 = 1 \text{ F}$ .



**Rys. 6.31a.**

R o z w i ą z a n i e :

Równania potencjałów węzłowych [11]:

$$(G_2 + sC_2 + sC_3 + sC_4)V_1(s) - sC_3V_2(s) - sC_4U_{wy}(s) = sC_1U_{we}(s)$$

$$-sC_3V_1(s) + (G_5 + sC_3)V_2(s) - G_5U_{wy}(s) = 0$$

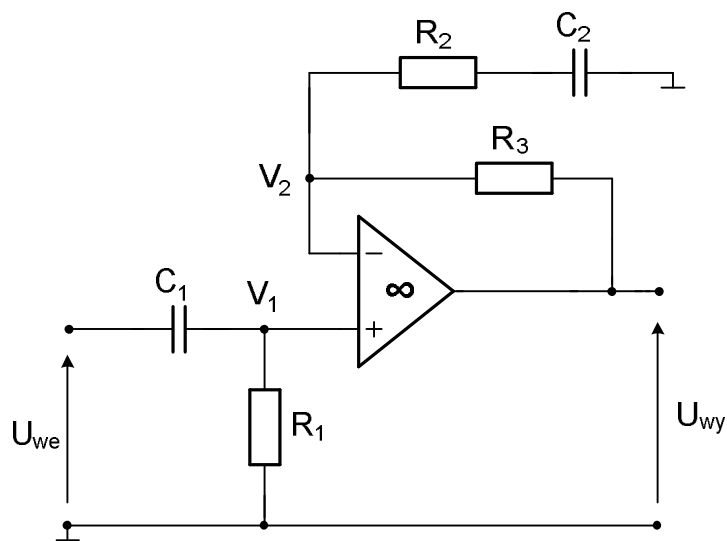
$$V_2(s) = 0$$

Po wyeliminowaniu potencjałów  $V_1(s)$  i  $V_2(s)$  otrzymujemy jedno równanie, z którego mamy

$$\frac{U_{wy}(s)}{U_{we}(s)} = -\frac{s^2}{s^2 + 3s + 3} \quad \text{Obwód jest filtrem górnoprzepustowym}$$

**Zad. 6.33.** Obliczyć transmitancję  $T(s) = \frac{U_{wy}(s)}{U_{we}(s)}$  dla obwodu jak na rysunku 6.33a.

Dane:  $R_1 = R_2 = R_3 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $C_1 = C_2 = 1 \text{ mF}$ .



**Rys. 6.29a**

**Rozwiązanie**

Równania potencjałów węzłowych [11]:

$$\left( \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2 + \frac{1}{sC_2}} \right) V_1(s) - \frac{1}{R_3} U_{wy}(s) = 0$$

$$\left( sC_1 + \frac{1}{R_1} \right) V_2(s) = sC_1 U_{we}(s)$$

$$V_1(s) = V_2(s)$$

z równania drugiego

$$V_2(s) = \frac{sC_1}{sC_1 + \frac{1}{R_1}} U_{we}(s)$$

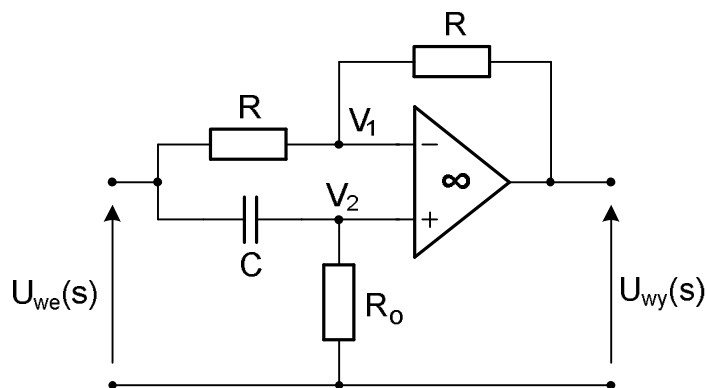
stąd

$$\left( \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2 + \frac{1}{sC_2}} \right) \frac{sC_1}{sC_1 + \frac{1}{R_1}} U_{we}(s) = \frac{1}{R_3} U_{wy}(s)$$

$$T(s) = \frac{U_{wy}(s)}{U_{we}(s)} = \frac{sC_1 R_3}{sC_1 + \frac{1}{R_1}} \left( \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2 + \frac{1}{sC_2}} \right) = \frac{s10^{-3}10^3}{s10^{-3} + \frac{1}{10^3}} \left( \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^3 + \frac{1}{s10^{-3}}} \right) = \frac{2s^2 + s}{s^2 + 2s + 1}$$

**Zad. 6.34.** W obwodzie jak na rys. 6.34a obliczyć wartość rezystancji  $R_0$ , żeby kąt przesunięcia fazowego napięcia wyjściowego względem napięcia wejściowego wynosił  $\varphi = -30^\circ$ .

Dane:  $R = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 0.01 \mu\text{F}$ ,  $f = 1 \text{ kHz}$ .



**Rys.6.34a**

**R o z w i ą z a n i e**

Obliczymy transmitancję napięciową  $T(s) = \frac{U_{wy}(s)}{U_{we}(s)}$ , a następnie na jej podstawie charakterystykę amplitudową i charakterystykę fazową

Potencjały węzłowe  $V_1(s)$  i  $V_2(s)$  spełniają równania [11]:

$$\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\right)V_1(s) - \frac{1}{R}U_{wy}(s) - \frac{1}{R}U_{we}(s) = 0$$

$$\left(\frac{1}{R_0} + sC\right)V_2(s) - sCU_{we}(s) = 0$$

$$V_1(s) = V_2(s)$$

stąd

$$2V_1(s) - U_{wy}(s) = U_{we}(s)$$

$$V_2(s) = U_{we}(s) \frac{sCR_0}{1 + sCR_0}$$

Korzystając z równości potencjałów  $V_1(s)$  i  $V_2(s)$

mamy

$$T(s) = \frac{U_{wy}(s)}{U_{we}(s)} = \frac{sCR_0 - 1}{sCR_0 + 1}$$

Charakterystyka amplitudowa

$$|T(j\omega)| = 1$$

jest stała, równa jedności niezależnie od częstotliwości. Natomiast charakterystyka fazowa

$$\varphi(\omega) = -2 \arctan \omega CR_0$$

Podstawiając dane z zadania otrzymujemy

$$-30^\circ = -2 \arctan 2\pi 10^3 \cdot 10^{-8} R_0$$

$$\operatorname{tg}(-30^\circ) = 2 \cdot 2\pi \cdot 10^{-5} R_0$$

$$-0.577 = -4\pi \cdot 10^{-5} R_0 \quad \text{stąd} \quad R_0 = 4.59 \text{ k}\Omega.$$

## L I T E R A T U R A.

1. Bolkowski St. Teoria obwodów elektrycznych. Warszawa, WNT 2008.
2. Bolkowski St., Brociek W., Rawa H.: Teoria obwodów elektrycznych-zadania. Warszawa, WNT 2006.
3. Cholewicki T.: Elektrotechnika teoretyczna. Warszawa, WNT tom I 1967, tom II 1971.
4. Cichocki A., Mikołajuk K., Osowski St., Trzaska Z.: Zbiór zadań z elektrotechniki teoretycznej. Warszawa, PWN 1976.
5. Cichocki A., Osowski St., Rawa H.: Podstawy elektrotechniki. Warszawa, WNT 1991.
6. Cichowska Z., Pasko M.: Wykłady z elektrotechniki teoretycznej. Cz.II. Prądy sinusoidalnie zmienne. Wyd. Pol. Śl., Gliwice 2004 (wyd.IV).
7. Mikołajuk K., Trzaska Z.: Elektrotechnika teoretyczna. Analiza i synteza obwodów liniowych. Warszawa, PWN 1985,
8. Mikołajuk K., Trzaska Z.: Elektrotechnika teoretyczna. Analiza i synteza obwodów nieliniowych. Warszawa, PWN 1987
9. Mikołajuk K., Trzaska Z.: Zbiór zadań z elektrotechniki teoretycznej. Warszawa, PWN 1976.
10. Mikołajuk K.; Podstawy analizy obwodów energoelektronicznych. Warszawa, PWN 1998.
11. Osowski J, Szabatin J.: Podstawy teorii obwodów. Tom I-III, Warszawa WNT 1995.
12. Osowski J.: Zarys rachunku operatorowego. Warszawa, WNT 1981.
13. Osowski St., Cichocki A., Siwek K.: MATLAB w zastosowaniu do obliczeń obwodowych i przetwarzania sygnałów. Warszawa, WPW 2006.
14. Osowski St., Cichocki A., Siwek K.: Teoria obwodów. Warszawa, WPW 2006.
15. Osowski St., Tobała A. : Analiza i projektowanie komputerowe obwodów z zastosowaniem języków MATLAB i PCNAP. Warszawa, WPW 1996
16. Osowski St.: Komputerowe metody analizy i optymalizacji obwodów elektrycznych. Warszawa, WPW, 1993.
17. Pasko M., Walczak J.: Teoria sygnałów. , Wyd. Pol. Śl., Gliwice 1999.
18. Sikora J.: Podstawy metody elementów skończonych. Warszawa Wydawnictwo Książkowe Instytutu Elektrotechniki. Warszawa 2008.
19. Sikora J.: Numeryczne algorytmy w tomografii impedancyjnej i wiropądowej. Warszawa, WPW 2000.
20. Tadeusiewicz M.: Metody komputerowej analizy stałoprądowej nieliniowych układów elektronicznych. Warszawa, WNT 1991.
21. Tadeusiewicz M.: Teoria obwodów. Łódź, WPL 1994.
22. Walczak J., Pasko M.: Elementy dynamiki liniowych obwodów elektrycznych. Wyd. Pol. Śl., Gliwice 2001.