## 1.2 Szeregi liczbowe

Rozpatrzmy ciąg liczbowy $\{a_n\}$ który może być zbieżny lub rozbieżny. Z wyrazów tego ciągu tworzymy nowy ciąg sum częściowych o wyrazach

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{n=1}^{n} a_n.$$

Ciąg sum częściowych nazywamy *szeregiem liczbowym* i oznaczamy symbolem

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

Szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazywamy *zbieżnym* jeżeli ciąg sum częściowych $\{S_n\}$ jest zbieżny.

Granicę

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

nazywamy *sumą szeregu*. Jeżeli granica ciągu $\{S_n\}$ nie istnieje (lub równa się $\pm\infty$) to szereg nazywamy rozbieżnym. Niestety tylko w szczególnych przypadkach można wykazać zbieżność lub rozbieżność szeregu poprzez badanie granicy ciągu $\{S_n\}$. W praktyce korzysta się z warunku koniecznego zbieżności szeregu tzn. jeśli szereg jest zbieżny to

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Wynika stąd, że jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ to szereg jest rozbieżny. Należy podkreślić, że spełnienie *warunku koniecznego* zbieżności szeregu nie gwarantuje zbieżności szeregu.

**Przykład 1.15.** Rozpatrzmy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

który nazywamy szeregiem *harmonicznym*. Można pokazać, że jest to szereg rozbieżny. Natomiast

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 1/n = 0$$

tzn. szereg spełnia warunek konieczny zbieżności szeregu.

Wygodnym narzędziem sprawdzania zbieżności szeregów są *kryteria zbieżności*. Kryteria zbieżności ułatwiają stwierdzenie czy dany szereg jest zbieżny czy rozbieżny. Ich wadą jest jednak to, że w przypadku zbieżności nie dostajemy odpowiedzi ile wynosi suma szeregu. Wyznaczanie sum szeregów jest odrębnym i na ogół bardzo trudnym zagadnieniem. W celu oszacowania sumy szeregu zbieżnego możemy obliczyć sumę częsciową $S_n$ dla dostatecznie dużego $n$.