Wykład 3. Moc w obwodach RLC przy wymuszeniu sinusoidalnym

Wstęp

Jednym z najważniejszych pojęć w elektrotechnice jest moc elektryczna. Jest ona ściśle związana ze zjawiskami energetycznymi zachodzącymi w obwodzie. Przepływ prądu w obwodzie jest związany z energią wydzielaną lub gromadzoną na poszczególnych elementach. Wielkościom prądu i napięcia przyporządkować można różne rodzaje mocy. W obwodach elektrycznych o przebiegach sinusoidalnych definiuje się cztery rodzaje mocy: moc chwilową, czynną, bierną i pozorną zespoloną.

Wykład trzeci poświęcony jest zagadnieniom związanym z obliczaniem mocy chwilowej $p(t)$, mocy czynnej P, mocy biernej Q oraz mocy pozornej zespolonej S. Poznamy wzory wiążące poszczególne rodzaje mocy z prądami i napięciami w obwodzie RLC przy wymuszeniu sinusoidalnym w stanie ustalonym. Podane zostaną wzory wyrażające energię zgromadzoną w cewce i kondensatorze. Ostatnim fragmentem wykładu są zagadnienia dopasowania odbiornika do źródła rzeczywistego o niezerowej impedancji wewnętrznej.

3.1. Moc chwilowa

Oznaczmy wartość chwilową napięcia i prądu gałęzi odpowiednio przez $u(t)=U_m\sin(\omega t)$ oraz $i(t)=I_m\sin(\omega t-\varphi)$. *Dla* uproszczenie przyjęto fazę początkową napięcia równą zeru.

Moc chwilowa $p(t)$, jako jedyna z mocy jest funkcją czasu i definiuje się ją w postaci iloczynu wartości chwilowych prądu $i(t)$ oraz napięcia $u(t)$ w obwodzie

$$p(t)=u(t)i(t) \tag{3.1}$$

Przy wymuszeniu sinusoidalnym moc chwilowa opisana jest wzorem

$$\begin{aligned} p(t)&=u(t)i(t)=U_mI_m\sin(\omega t)\sin(\omega t-\varphi)=\frac{U_mI_m}{2}\left[\cos\varphi-\cos(2\omega t-\varphi)\right]= \\ &=|U||I|[\cos-\cos(2\omega t-\varphi)] \end{aligned} \tag{3.2}$$

3.2. Moc czynna

Moc czynną definiuje się jako wartość średnią za okres z mocy chwilowej, to jest

$$P = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} p(t)dt \tag{3.3}$$

Podstawiając do powyższego wzoru funkcję określającą moc chwilową w obwodzie, po wykonaniu operacji całkowania otrzymuje się

$$P = |U||I|\cos\varphi \tag{3.4}$$

Moc czynna w obwodzie o wymuszeniu sinusoidalnym jest więc wielkością stałą (niezależną od czasu) równą iloczynowi modułów wartości skutecznych napięcia i prądu oraz cosinusa kąta przesunięcia fazowego między wektorem napięcia i prądu. Współczynnik $\cos\varphi$ odgrywa ogromną rolę w praktyce i nosi specjalną nazwę **współczynnika mocy**.
Moc czynna stanowi składową stałą mocy chwilowej. Jest ona nieujemna dla obwodu RLC a w granicznym przypadku przy $\varphi = \pm\pi/2 \;\rightarrow\; \mathrm{P_L} = \mathrm{P_C} = 0$ jest równa zeru. Moc czynna osiąga wartość największą $P = |U||I|$ gdy $\varphi = 0$, to znaczy gdy odbiornik ma charakter rezystancyjny, $\cos\varphi = 1$. Wartość najmniejszą (*P*=0) moc osiąga w przypadku granicznym, gdy $\varphi = \pm\pi/2$, to znaczy gdy odbiornikiem jest cewka idealna lub kondensator idealny dla których $\cos\varphi = 0$. Oznacza to, że **na elementach reaktancyjnych nie wydziela się moc czynna**.
Z przytoczonych rozważań wynika, moc czynną wydzielaną w rezystorze można opisać następującymi wzorami

$$P = |U||I|\cos\varphi = R|I|^2 = G|U|^2 \tag{3.5}$$

w których prąd *I* oraz napięcie *U* odpowiadają rezystorowi *R*. Jednostką mocy czynnej jest **wat** (W), przy czym 1W=1AV. W praktyce stosuje się również wielokrotności wata w postaci kilowata (1kW=1000W) lub megawata (1MW=10^6W) oraz wartości ułamkowe, np. miliwat (mW) lub mikrowat (μW).

Do pomiaru mocy czynnej służy watomierz. Klasyczny watomierz jest przyrządem pomiarowym posiadającym cewkę prądową (o impedancji wewnętrznej bliskiej zeru) do pomiaru prądu gałęziowego obwodu i cewkę napięciową (o impedancji wewnętrznej bliskiej nieskończoności) do pomiaru napięcia między punktami obwodu, dla którego mierzymy moc czynną. Początki uzwojeń obu cewek oznaczać będziemy na schematach przy pomocy gwiazdek. Pozycja znaku gwiazdki przy cewce prądowej wskazuje kierunek prądu I_w watomierza przyjęty za dodatni (prąd płynie od gwiazdki do watomierza). W przypadku cewki napięciowej pozycja gwiazdki wskazuje przyjęty kierunek wyższego potencjału (napięcia U_w) obwodu. Wskazanie watomierza jest wówczas określone wzorem (3.4), które przy naszych oznaczeniach prądu i napięcia watomierza przyjmą postać $P = |U_w||I_w|\cos\varphi$. Przyjmując założenie idealizujące, że impedancja cewki prądowej watomierza jest równa zeru a cewki napięciowej równa nieskończoności watomierz nie ma żadnego wpływu na rozpływy prądów i rozkłady napięć w badanym obwodzie elektrycznym.

3.3. Moc bierna

W obwodach elektrycznych prądu sinusoidalnego definiuje się trzecią wielkość energetyczną będącą iloczynem napięcia i prądu oraz sinusa kąta przesunięcia fazowego między nimi. Wielkość ta oznaczana jest literą *Q* i nazywana **mocą bierną**

$$Q = |U||I|\sin\varphi \tag{3.6}$$

Jednostką mocy biernej jest **war** (var) będący skrótem nazwy *woltamper reaktywny*.

W przypadku rezystora, dla którego przesunięcie fazowe jest równe zeru ($\varphi = 0 \;\; \rightarrow \;\; \mathrm{Q_R} = 0$) moc bierna jest zerowa **Moc bierna może się więc wydzielać jedynie na elementach reaktancyjnych,** gdyż tylko dla nich przesunięcie fazowe prądu i napięcia jest różne od zera. Przesunięcie fazowe prądu i napięcia na elementach reaktancyjnych (cewce i kondensatorze) przyjmuje wartość *+90* dla cewki oraz *-90* dla kondensatora, co oznacza, że sinus kąta jest odpowiednio równy równy *+1* dla cewki (moc bierna cewki jest uważana za dodatnią) oraz *–1* dla kondensatora (moc bierna kondensatora jest uważana za ujemną). Stąd przy uwzględnieniu znaku wzór na moc bierną elementów reaktancyjnych o reaktancji *X* może być przedstawiony w trzech równorzędnych postaciach

$$Q_X = \pm|U||I|\sin\varphi = \pm X|I|^2 = \pm\frac{1}{X}|U|^2 \tag{3.7}$$

W ogólności kąt przesunięcia fazowego φ uważa się za dodatni dla obwodów o charakterze indukcyjnym (napięcie wyprzedza prąd) a za ujemny dla obwodów o charakterze pojemnościowym (napięcie opóźnia się względem prądu). Moc bierna obwodów o charakterze indukcyjnym jest w sumie mocą indukcyjną, kojarzona z wartością dodatnią a moc bierna obwodów o charakterze pojemnościowym jest w sumie mocą pojemnościową i kojarzoną z wartością ujemną.

3.4. Moc pozorna zespolona

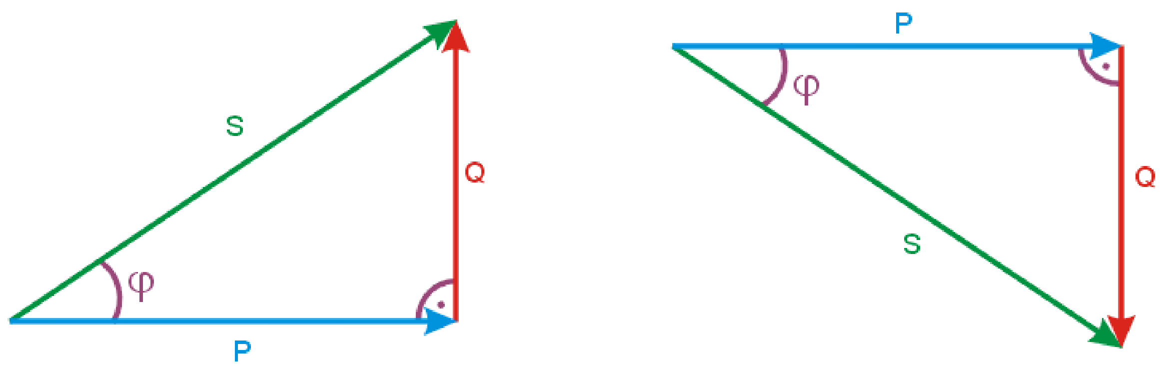
Czwartym rodzajem mocy wprowadzanym w obwodach elektrycznych jest tak zwana moc pozorna zespolona. Jest ona proporcjonalna do wartości skutecznych prądu i napięcia, i oznaczana literą *S*. Moc pozorna zespolona definiowana jest formalnie jako liczba zespolona w postaci iloczynu wartości skutecznej zespolonej napięcia *U* i wartości skutecznej sprzężonej prądu *I*

$$S = UI^{*} = P + jQ \tag{3.8}$$

Tak zdefiniowana moc pozorna zespolona przedstawia sobą sumę mocy czynnej (część rzeczywista *S*) oraz mocy biernej (część urojona *S*), stąd

$$S = P + jQ \tag{3.9}$$

Biorąc pod uwagę, że operator *j* oznacza przesunięcie wektora o kąt 90°, ostatniej zależności na moc pozorną przyporządkować można wykres wektorowy mocy, tzw. **trójkąt mocy** przedstawiony na rys. 3.1.



a) b)

Rys. 3.1. Wykres wektorowy mocy dla obwodu a) o charakterze indukcyjnym, b) o charakterze pojemnościowym

Zależność na moc pozorną zespoloną można przedstawić również w postaci wykładniczej $S = |S|e^{j\varphi}$. W zależności tej $|S|$ wyraża **moduł mocy pozornej zespolonej**, zwany również mocą pozorną która może być wyrażona w postaci iloczynu modułów wartości skutecznych prądu i napięcia

$$|S| = |U||I| = \sqrt{P^2 + Q^2} \tag{3.10}$$

Z wykresu wektorowego obwodu przedstawionego na rys. 3.1 możliwe jest wyznaczenie współczynnika mocy. Mianowicie

$$\cos\varphi = \frac{P}{|S|} \tag{3.11}$$

Wartość współczynnika mocy wyznaczona z powyższej zależności jest identyczna z wartością wynikającą z relacji prądowo-napięciowych zachodzących dla wielkości bramowych (zewnętrznych) obwodu. Dla ułatwienia korzystania z pojęć mocy zestawiono poniżej najważniejsze postacie wzorów na moc czynną, bierną i pozorną

- Moc pozorna zespolona

$$S = UI^* = P + jQ \tag{3.12}$$

- Moc czynna

$$P = \mathrm{Re}(S) = |U||I|\cos\varphi = |I_R|^2 R = \frac{|U_R|^2}{R} \tag{3.13}$$

- Moc bierna

$$Q = \mathrm{Im}(S) = |U||I|\sin\varphi = \pm|I_X|^2 X = \pm\frac{|U_X|^2}{X} \tag{3.14}$$

Znak plus dotyczy mocy biernej cewki a minus kondensatora.

3.5. Bilans mocy

W obwodzie elektrycznym, jak w każdym układzie fizycznym obowiązuje prawo zachowania energii. W przypadku obwodów prawo to przekształca się w tak zwane prawo bilansu mocy.

Jeśli całkowitą moc pozorną zespoloną wytworzoną przez źródło (lub wiele źródeł występujących w obwodzie) oznaczymy przez S_g a sumaryczną moc pozorną zespoloną wydzieloną w elementach odbiornika przez S_o, to biorąc pod uwagę prawo zachowania energii obie moce muszą być sobie równe, to znaczy S_g=S_o. Jest to tak zwana zasada bilansu mocy w obwodach elektrycznych.

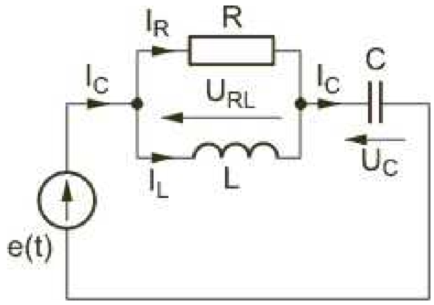
W tak sformułowanej zasadzie bilansu mocy przyjmuje się standardowo, że zwroty prądów i napięć w elementach odbiornikowych są przeciwne sobie a w elementach źródłowych takie same. Jeśli przyjmiemy ujednoliconą zasadę znakowania prądów i napięć na elementach obwodu, zakładającą, że niezależnie od rodzaju elementu zwroty prądu i napięcia na gałęzi są przeciwne sobie, to zasadę bilansu mocy można sformułować w ten sposób, że **suma mocy pozornej zespolonej liczonej po wszystkich elementach w obwodzie elektrycznym jest równa zeru, $S_g+S_o=0$.**

PROGRAM W JAVIE moce_demo

Dla zilustrowania wprowadzonych tu pojęć mocy oraz zasady bilansowania się mocy rozpatrzymy przykład obwodu przedstawionego na rys. 3.2.

Przykład 3.1

Niech dany będzie obwód RLC o strukturze przedstawionej na rys. 3.2 zasilany z sinusoidalnego źródła napięcia $e(t)=100\sqrt{2}\sin(\omega t+45^{\circ})\,\mathrm{V}$ przy $\omega=1\frac{rad}{s}$. Wartości elementów obwodu są następujące: $R=1\Omega$, $C=0{,}5F$, $L=1H$.



Rys. 3.2. Schemat obwodu do przykładu 3.1

Należy wyznaczyć wartości skuteczne zespolone prądów i napięć elementów oraz moce w obwodzie.

Rozwiązanie

Wartości zespolone impedancji i napięcia wymuszającego w obwodzie przy danych wartościach elementów są równe: $Z_L=j\omega L=j1$, $Z_C=-j1/\omega C=-j2$, $E=100e^{j45^{o}}$.

Impedancja zastępcza połączenia równoległego L i R równa się $Z_{RL} = \frac{RZ_L}{R+Z_L} = 0.707e^{j45^o}$.

Impedancja zastępcza połączenia szeregowego C i Z_{RL} jest równa $Z = Z_C + Z_{RL} = 0{,}5 + j0{,}5 - j2 = 1{,}58e^{-j71{,}6^o}$.

Zgodnie z prawem Ohma prąd *I* w obwodzie jest równy

$$I_C = \frac{E}{Z} = \frac{100e^{j45^o}}{1{,}58e^{-j71{,}6^o}} = 63{,}3e^{j116{,}6^o}$$

Napięcia na poszczególnych elementach obwodu dane są w postaci

$$U_C = Z_C I_C = 126{,}6e^{j26{,}6^o}$$

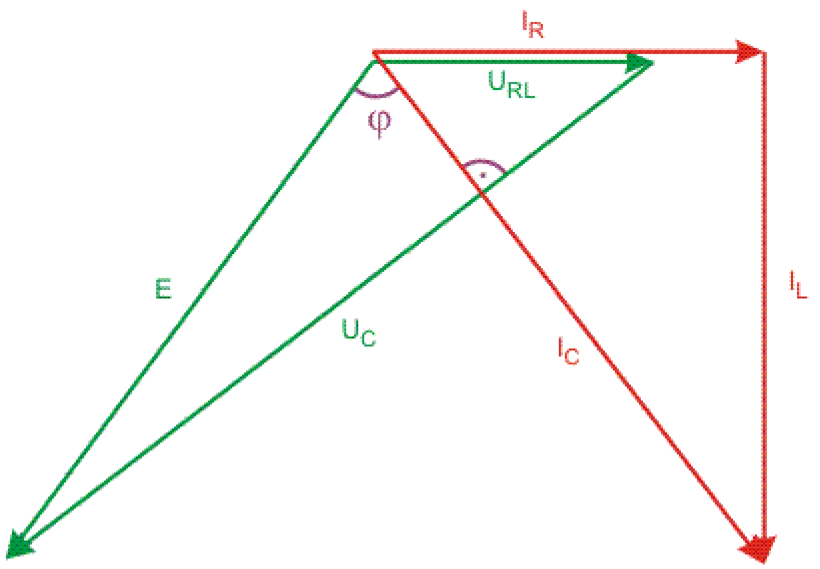
$$U_{RL} = Z_{RL} I_C = 44{,}72e^{j161{,}6^o}$$

Prądy cewki i rezystora obliczone z prawa Ohma równają się

$$I_L = \frac{U_{RL}}{Z_L} = 44{,}72e^{j71{,}6^o}$$

$$I_R = \frac{U_{RL}}{R} = 44{,}72e^{j161.6^o}$$

Na rys. 3.3 przedstawiono wykres wektorowy prądów i napięć w obwodzie.



Rys. 3.3. Wykres wektorowy prądów i napięć w obwodzie z rys. 3.2

Poszczególne rodzaje mocy wydzielonej w obwodzie równają się:

- Moc pozorna zespolona wydawana przez źródło

$$S = E \cdot I_C^{*} = (2000 - j6000)\mathrm{V} \cdot \mathrm{A}$$

- Moc czynna rezystora

$$P_R = |I_R|^2 R = 2000\mathrm{W}$$

- Moc bierna cewki i kondensatora

$$Q_L = \mathrm{Im}(U_{RL} \cdot I_L^{*}) = 2000\,\mathrm{var}$$

$$Q_C = \mathrm{Im}(U_C \cdot I_C^{*}) = -8000\,\mathrm{var}$$

Całkowita moc bierna wydzielona na cewce i kondensatorze równa się

$$Q = Q_L + Q_C = -6000\,\mathrm{var}$$

Moc wydzielona na rezystorze oraz cewce i kondensatorze równa się dokładnie mocy dostarczonej przez źródło. Bilans mocy generowanej przez źródło i mocy wydzielonej w odbiorniku jest zatem równy zeru.

3.6 Energia magazynowana w cewce i kondensatorze

Cewka i kondensator traktowane jako idealne elementy obwodowe należą do elementów magazynujących energię elektryczną i z tego punktu widzenia odgrywają ogromną rolę w elektrotechnice

.

3.6.1 Energia magazynowana w idealnym kondensatorze

Rozpatrzmy kondensator o pojemności *C* zasilany ze źródła napięciowego *u*(*t*). Obliczymy energię dostarczoną do tego kondensatora w czasie od t_0 do *t*. Energia ta może być obliczona jako całka z mocy chwilowej

$$W(t_0,t) = \int_{t_0}^{t} p(\tau)d\tau \tag{3.15}$$

Uwzględniając wzór na moc chwilową i dokonując odpowiednich operacji całkowania otrzymujemy

$$W(t_0,t)=\int_{t_0}^{t}u(\tau)i(\tau)d\tau=\int_{t_0}^{t}u(\tau)C\frac{du(\tau)}{d\tau}d\tau=C\int_{u(t_0)}^{u(t)}udu \tag{3.16}$$

Załóżmy, że czas t_0 jest taką chwilą, w której napięcie $u(t)$ jest zerowe. W takim razie wzór na energię upraszcza się do postaci

$$W(t_0,t)=C\int_{0}^{u(t)}udu=\frac{1}{2}Cu^2(t) \tag{3.17}$$

Zasadniczą cechą kondensatora idealnego jest jego bezstratność, co oznacza, że energia zgromadzona na nim pozostaje w nim zmagazynowana. Zatem kondensator naładowany do napięcia stałego *U* posiada energię równą

$$W=\frac{1}{2}CU^2 \tag{3.18}$$

Jest to bardzo ważna własność kondensatora, wykorzystywana do magazynowania energii elektrycznej.

3.6.2 Energia magazynowana w idealnej cewce

Rozpatrzmy cewkę o indukcyjności *L* zasilaną ze źródła napięciowego $u(t)$. Obliczymy energię dostarczoną do tej cewki w czasie od t_0 do t. Energia ta, podobnie jak w przypadku kondensatora, może być obliczona jako całka z mocy chwilowej

$$W(t_0,t)=\int_{t_0}^{t}p(\tau)d\tau \tag{3.19}$$

Uwzględniając wzór na moc chwilową i dokonując odpowiednich operacji całkowania otrzymujemy

$$W(t_0,t)=\int_{t_0}^{t}u(\tau)i(\tau)d\tau=\int_{t_0}^{t}i(\tau)L\frac{di(\tau)}{d\tau}d\tau=L\int_{i(t_0)}^{i(t)}idi \tag{3.20}$$

Załóżmy, że czas t_0 jest taką chwilą, w której prąd cewki $i(t)$ jest zerowy. W takim razie wzór na energię upraszcza się do postaci

$$W(t_0,t) = L\int_0^{i(t)} i\,di = \frac{1}{2}Li^2(t) \tag{3.21}$$

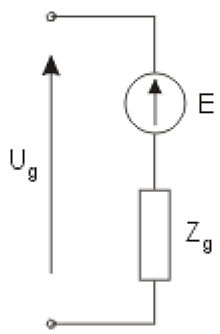
Zasadniczą cechą cewki idealnej jest jej bezstratność, co oznacza, że energia dostarczona do niej pozostaje w niej zmagazynowana. Zatem cewka, przez która przepływa prąd stały *I* posiada energię równą

$$W = \frac{1}{2}LI^2 \tag{3.22}$$

W odróżnieniu od kondensatora, w którym energia związana była z napięciem między okładkami (ładunkiem) energia cewki jest uzależniona od prądu (strumienia magnetycznego). Stąd przyjmuje się, że kondensator magazynuje energię w polu elektrycznym a cewka w polu magnetycznym.

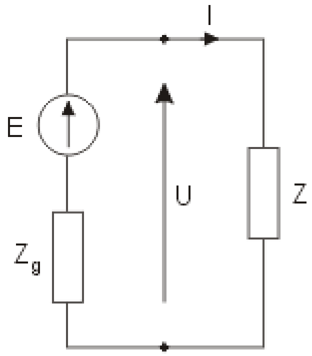
3.7 Dopasowanie odbiornika do źródła

Rzeczywiste źródło energii elektrycznej można przedstawić w postaci szeregowego połączenia idealnego źródła napięcia E oraz impedancji wewnętrznej źródła Z_g jak to przedstawiono na rys. 3.4



Rys. 3.4. Model rzeczywistego źródła napięciowego generatora

Rozważmy elementarny obwód złożony z rzeczywistego źródła napięcia oraz impedancji odbiornika Z jak to przedstawiono na rys. 3.5.



Rys. 3.5. Rzeczywiste źródło napięcia obciążone impedancją Z

Przyjmijmy ogólny model impedancji wewnętrznej źródła w postaci

$$Z_g = R_g \pm jX_g \tag{3.23}$$

Podobnie założymy, że impedancję odbiornika stanowi połączenie szeregowe rezystancji R oraz reaktancji $\pm X$, to jest

$$Z = R \pm jX \tag{3.24}$$

Dopasowanie odbiornika do generatora rozumiemy jako dobór takiej impedancji odbiornika, przy której odbiornik pobierze ze źródła maksymalną moc czynną. Z analizy obwodu przedstawionego na rys. 3.5 wynika, że moc czynna P odbiornika jest określona zależnością

$$P = |I|^2 R = \frac{|E|^2}{|Z_g + Z|^2} R = \frac{|E|^2 R}{(R_g + R)^2 + (\pm X_g \pm X)^2} \tag{3.25}$$

Przy ustalonej wartości rezystancji odbiornika wyrażenie powyższe osiąga maksimum dla

$$X = -X_g \tag{3.26}$$

Znak minus oznacza, że reaktancja odbiornika powinna mieć charakter odwrotny do reaktancji generatora. Przy indukcyjnym charakterze impedancji źródła, odbiornik powinien mieć charakter pojemnościowy a przy charakterze pojemnościowym generatora odbiornik powinien mieć charakter indukcyjny.
Po uwzględnieniu tej zależności wyrażenie na moc przyjmie uproszczoną postać

$$P = \frac{|E|^2 R}{(R_g + R)^2} \tag{3.27}$$

Wydzielenie maksymalnej mocy czynnej na rezystorze wymaga, aby pochodna funkcji mocy względem rezystancji R równała się zeru, czyli

$$\frac{dP(R)}{dR} = 0 \tag{3.28}$$

czyli

$$\frac{(R_g + R)^2 - 2R(R_g + R)}{(R_g + R)^4}|E| = 0 \tag{3.29}$$

Równane powyższe jest spełnione dla wartości rezystancji obciążenia równej rezystancji źródła, czyli

$$R = R_g \tag{3.30}$$

Można łatwo sprawdzić, że przy takim warunku druga pochodna funkcji mocy względem rezystancji jest ujemna, co oznacza, że mamy do czynienia z maksimum mocy. Ostatecznie stwierdzamy, że warunkiem dopasowania odbiornika do generatora ze względu na moc czynną jest

$$Z = Z_g^* = R_g - jX_g \tag{3.31}$$

Łatwo jest pokazać, że przy spełnieniu powyższego warunku na impedancji odbiornika wydzieli się maksymalna moc czynna $P_{\max}$ równa

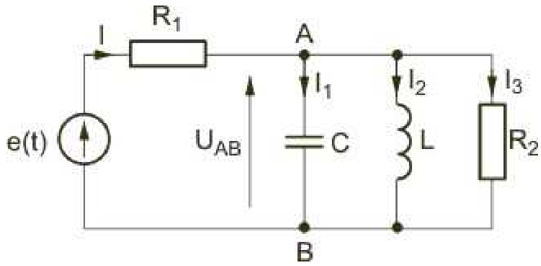
$$P_{\max} = \frac{|E|^2}{4R_g} \tag{3.32}$$

Biorąc pod uwagę, że w obwodzie istnieją dwie identyczne rezystancje (odbiornika i generatora), przez które przepływa identyczny prąd moc maksymalna odbiornika stanowi 50% całkowitej mocy wydzielanej przez źródło idealne.

Ćwiczenia

Ćwiczenie 3.1

Sporządzić bilans mocy w obwodzie przedstawionym na rys. 3.6. Przyjąć następujące wartości elementów: $e(t) = 50\sqrt{2}\sin(\omega t)\,\mathrm{V}$, $\omega = 1\frac{rad}{s}$, $L = 10\mathrm{H}$, $C = 0{,}1\mathrm{F}$, $R_1 = 15\Omega$, $R_2 = 10\Omega$.



Rys. 3.6. Schemat obwodu do ćwiczenia 3.1

Rozwiązanie

Wartości symboliczne elementów obwodu:

$$\omega = 1$$

$$E = 50$$

$$Z_L = j\omega L = j10$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j10$$

Impedancje obwodu:

$$\frac{1}{Z_{AB}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C} = 0{,}1$$

$$Z_{AB} = 10$$

$$Z = Z_{AB} + R_1 = 25$$

Prądy i napięcia w obwodzie:

$$I = E / Z = 2$$

$$U_{AB} = IZ_{AB} = 20$$

$$I_1 = \frac{U_{AB}}{Z_C} = j2$$

$$I_2 = \frac{U_{AB}}{Z_L} = -j2$$

$$I_3 = \frac{U_{AB}}{R_2} = 2$$

Moc wydawana prze źródło

$$S_E = EI^* = 50 \cdot 2 = 100 + j0$$

Moce elementów

$$P_{R_1} = |I|^2 R_1 = 60W$$

$$P_{R_2} = |I_3|^2 R_2 = 40W$$

$$Q_L = |I_2|^2 \omega L = 40\,\mathrm{var}$$

$$Q_C = -|I_1|^2 \frac{1}{\omega C} = -40\,\mathrm{var}$$

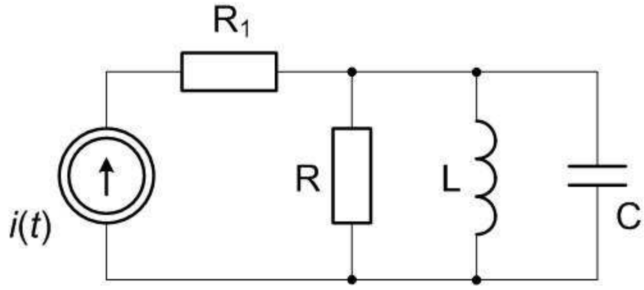
Moc całkowita odbiornika

$$S_{odb} = P_{R_1} + P_{R_2} + jQ_L + jQ_C = 100 + j0$$

Moc odbiornika jest dokładnie równa mocy źródła.

Ćwiczenie 3.2

Wyznaczyć moduły wartości skutecznych prądów oraz moc czynną w obwodzie przedstawionym na rys. 3.7. Przyjąć następujące wartości elementów: $i(t) = 2\sqrt{2}\sin(\omega t + 90°)A$, $\omega = 1\frac{rad}{s}$, $L = 10\text{H}$, $C = 0.2\text{F}$, $R_1 = 5\Omega$, $R = 5\Omega$.



Rys. 3.7. Schemat obwodu do ćwiczenia 3.2

Rozwiązanie

Wyznaczamy impedancję zastępczą połączenia równoległego elementów R, C i L:

$$Z_{RLC} = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}} = 4 - j2$$

Napięcie na tych elementach wyniesie

$$U_{RLC} = I \cdot Z_{RLC} = 4 + j8$$

Prądy poszczególnych elementów będą miały wartości

$$I_R = \frac{U_{RLC}}{R} = 0.8 + j1.6$$

$$I_C = U_{RLC} \cdot j\omega C = -1.6 + j0.8$$

$$I_L = \frac{U_{RLC}}{j\omega L} = 0.8 - j0.4$$

Wartości skuteczne prądów:

$$|I_R| = \sqrt{0.8^2 + 1.6^2} = 1.79$$

$$|I_{R1}| = 2$$

$$|I_L| = \sqrt{0.8^2 + 0.4^2} = 0.89$$

$$|I_C| = \sqrt{0.8^2 + 1.6^2} = 1.79$$

Moc czynna

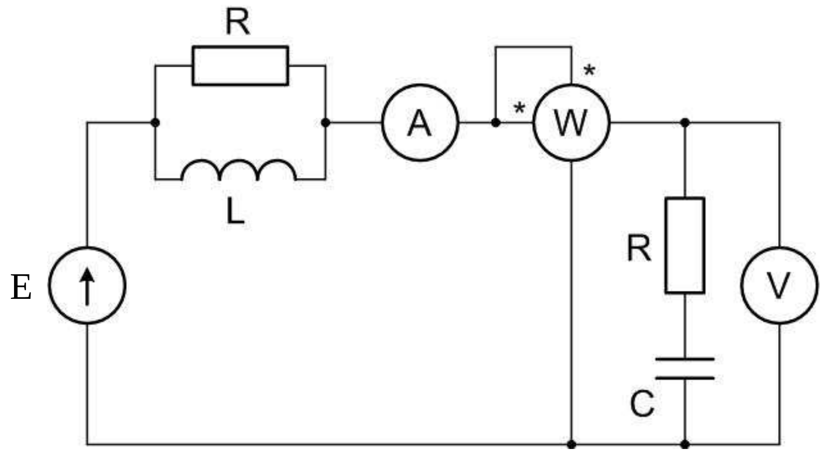
$$P_R = |I_R|^2 R = 16.02W$$

$$P_{R1} = |I|^2 R_1 = 20W$$

$$P = P_R + P_{R1} = 36.02W$$

Ćwiczenie 3.3

Wyznaczyć wskazania przyrządów w obwodzie przedstawionym na rys. 3.3. Przyjąć następujące wartości elementów: $e(t) = 20\sqrt{2}\sin(\omega t)V$, $\omega = 1\frac{rad}{s}$, $L = 1\text{H}$, $C = 1\text{F}$, $R = 1\Omega$.



Rys. 3.8. Schemat obwodu do ćwiczenia 3.3

Rozwiązanie

Wyznaczamy impedancję zastępczą obwodu:

$$Z = \frac{R \cdot j\omega L}{R + j\omega L} + R + \frac{1}{j\omega C} = 1.5 - j0.5$$

Prąd w obwodzie wyniesie

$$I = \frac{E}{Z} = 30 - j10$$

i będzie jednocześnie prądem cewki prądowej watomierza.

Napięcie na gałęzi zawierającej rezystor i kondensator będzie miało wartość

$$U_V = I \cdot \left(R + \frac{1}{j\omega C} \right) = 20 - j40$$

i będzie równocześnie napięciem cewki napięciowej watomierza.

Moc czynna watomierza wyniesie

$$P_R = \text{Re}\left(U_V \cdot I^*\right) = \text{Re}\left(1000 - j1000\right) = 1000W$$

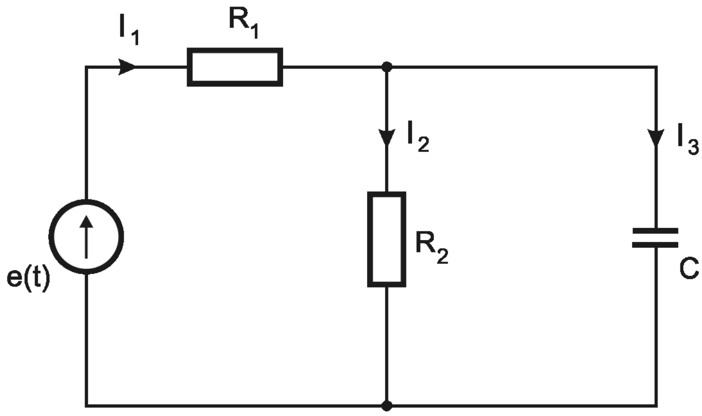
Wskazanie woltomierza:

$$\left|U_V\right| = \sqrt{20^2 + 40^2} = 44.72V$$

Zadania sprawdzające

Zadanie 3.1

Obliczyć rozpływ prądów w obwodzie oraz sprawdzić bilans mocy. Dane:
$e(t) = 10\sqrt{2}\sin(t + 90^\circ)$, R_1=5R_2=10C=0.1 F.



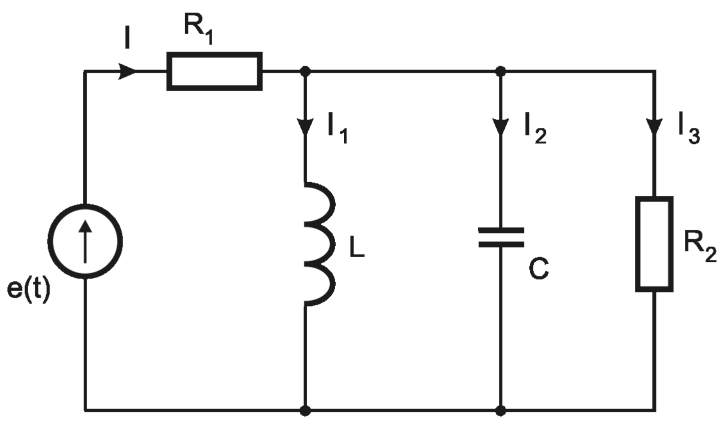
Rys. 3.9. Schemat obwodu do zadania 3.1

Rozwiązanie

I_1 = -0,4+*j*0,8, I_2 = 0,2+*j*0,6, I_3 = -0,6+*j*0,2, P_{odb} = 8, Q_{odb} = –4, S_{gen} = 8-*j*4
(wyniki odpowiednio: prąd w amperach, napięcie w woltach, moc czynna w watach, moc bierna w warach).

Zadanie 3.2

Wyznaczyć rozpływy prądów w obwodzie. Sporządzić bilans mocy.
Dane: $e(t) = 10\sqrt{2}\sin(t + 90^\circ)$, R_1 = 2 R_2 = 1 C = 0.5 F, L = 1 H



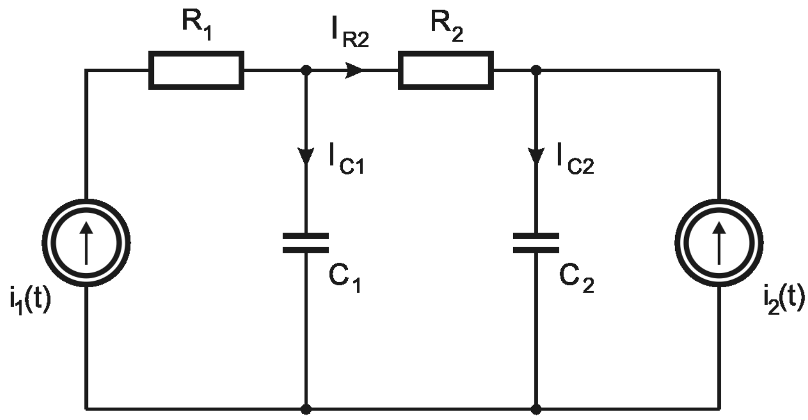
Rys. 3.10. Schemat obwodu do zadania 3.2

Rozwiązanie

I = 0,5+j3,5, I_1 = 3+j1, I_2 = -1,5-j0,5, I_3 = -1+j3, P_{odb} = 35, Q_{odb} = 5, S_{gen} = 35+j5
(wyniki odpowiednio: prąd w amperach, moc czynna w watach, moc bierna w warach).

Zadanie 3.3

Wyznaczyć rozpływy prądów w obwodzie. Sporządzić bilans mocy. Dane:
$i_1(t) = 5\sin(t - 45^\circ)$, $i_2(t) = 10\sqrt{2}\sin(t + 90^\circ)$, R_1 = R_2 = 1 □ C_1 = C_2 = 1 F.



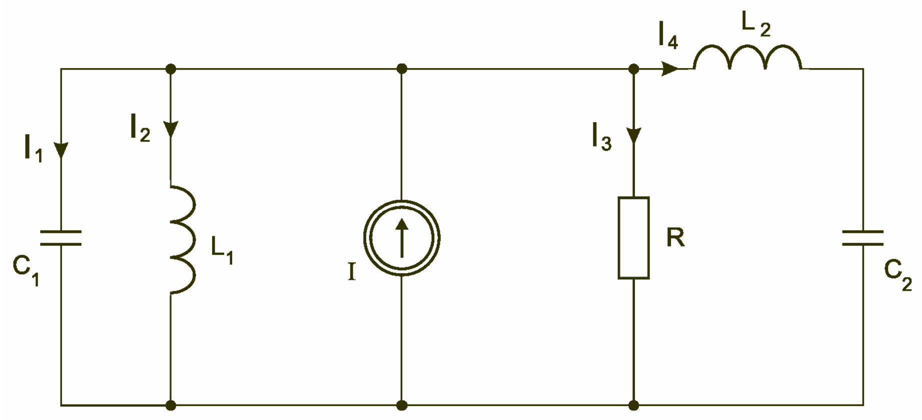
Rys. 3.11. Schemat obwodu do zadania 3.3

Rozwiązanie

I_{C1} = 4+j3, I_{C2} = -1,5+j4,5, I_{R1} = 2,5-j2,5, I_{R2} = -1,5-j5,5, P_{odb} = 45, Q_{odb} = -47,5, S_{gen}=45-j2,5
(wyniki odpowiednio: prąd w amperach, moc czynna w watach, moc bierna w warach).

Zadanie 3.4

Obliczyć prądy i bilans mocy w obwodzie przedstawionym na rys. 3.12. Dane:
$i(t) = 10\sqrt{2}\sin(t + 45^\circ)$, R=5□$L_1$=2□$L_2$=1□$C_1$ = 0.5 F, C_2 = 0,5 F.



Rys. 3.12. Schemat obwodu do zadania 3.4

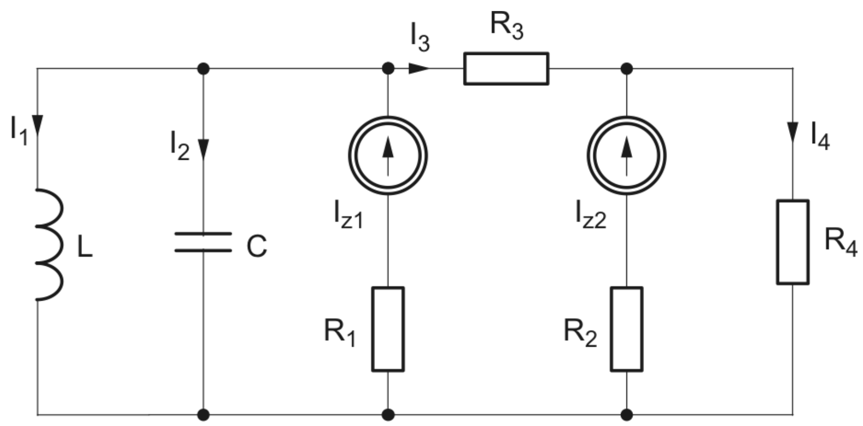
Rozwiązanie

I_1 = 2,72+j4,08, I_2 = -2,72-j4,08, I_3 =1,63-j1,09, I_4 = 5,44+j8,16, P_{odb} = 19,225, Q_{odb} = -96,125, $S_{źr}$ = 19,225-j96,125
(wyniki odpowiednio: prąd w amperach, moc czynna w watach, moc bierna w warach).

Zadanie 3.5

Obliczyć prądy i bilans mocy w obwodzie przedstawionym na rys.3.13. Dane:

$i_{z1}(t) = 5\sin(t - \frac{\pi}{2})$, $i_{z2}(t) = 2\sin(t + \frac{\pi}{4})$, R_1=20□R_2 = 5 □R_3 = 10 □R_4 = 10 □L = 1 □C = 1 F.



Rys. 3.13. Schemat obwodu do zadania 3.5

Rozwiązanie

I_1 = -60,71-j10, I_2 = 60,71+j10, I_3 = -j3,54, I_4 = 1-j2,54, P_{odb} = 462, Q_{odb} = 0, $S_{źr}$ = 462+j0
(wyniki odpowiednio: prąd w amperach, moc czynna w watach, moc bierna w warach).

Test do wykładu 3

1) Jednostką mocy czynnej jest
xa) wat
b) var
c) V·A
d) kV·A

2) Przez rezystor R=10Ω przepływa prąd o wartości 10A. Ile wynosi moc czynna wydzielona na rezystorze?
xa) 1000W
b) 1000var
c) 100W
d) 10W

3) Przez cewkę o reaktancji X_L=10Ω przepływa prąd o wartości 10A. Ile wynosi moc czynna wydzielona na cewce?
a) 1000W
b) 1000var
xc) 0
d) 100W

4) Przez kondensator o reaktancji X_C=2Ω przepływa prąd o wartości 20A. Ile wynosi moc bierna kondensatora?
xa) -800var
b) 800 var
c) 0
d) 800W

5) Przez szeregowo połączone kondensator o reaktancji X_C=10Ω i cewkę o reaktancji X_L=20Ω przepływa prąd o wartości 20A. Ile wynosi moc bierna układu?
a) 4000var
b) -4000 var
c) 0
xd) 8000var

6) W obwodzie szeregowym RLC o R=20Ω, X_C=10Ω i X_L=20Ω płynie prąd o wartości 10A. Ile wynosi moc pozorna zespolona układu?
a) S=2000-j1000
xb) S=2000+j1000
c) S=2000
d) S=2000+3000

7) W obwodzie złożonym z rezystora R=10Ω połączonego szeregowo z równolegle połączonymi cewka i kondensatorem o X_C=10Ω i X_L=20Ω płynie prąd o wartości 10A. Ile wynosi moc pozorna zespolona układu (wynik w V·A)?
a) S=1000+j2000
xb) S=1000-j2000
c) S=1000
d) nie można obliczyć

8) Kondensator C=10μF został naładowany do napięcia U=1000. Ile wynosi energia zgromadzona w tym kondensatorze?
xa) W_e=5A·Vs
b) W_e=10A·Vs
c) W_e =5mV·As
d) W_e=-5A·Vs

9) Źródło rzeczywiste napięcia o E=100 i R_w=2Ω zasila odbiornik rezystancyjny. Przy jakiej wartości rezystancji R_o odbiornika wydzieli się na nim maksymalna moc?
xa) R_o=2Ω
b) R_o=∞
c) R_o=0

d) R_o=100Ω

10) Źródło rzeczywiste napięcia o E=100 i impedancji wewnętrznej równej Z_w=2+j1 zasila odbiornik. Przy jakiej wartości impedancji Z_o odbiornika wydzieli się na nim maksymalna moc (wynik w Ω)?

xa) Z_o=2-j1
b) Z_o=2+j1
c) Z_o=-j1
d) Z_o=2