3.1 Pochodne funkcji, ekstrema

Definicja 3.1. Mówimy, że funkcja $y = f(x)$ jest *różniczkowalna w punkcie* x_0, jeżeli istnieje granica właściwa ilorazu różnicowego

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

gdzie $\Delta x = x_0 - x$, granicę taką oznaczamy $f'(x_0)$ i nazywamy pochodną funkcji f w punkcie x_0. Jeżeli funkcja posiada pochodną w każdym punkcie przedziału (a, b) to funkcję nazywamy różniczkowalną w przedziale (a, b). Dla oznaczenia pochodnej w przedziale (a, b) używamy następujących symboli

$$\frac{df}{dx}, \quad \frac{dy}{dx}, \quad f'(x).$$

Jeżeli pochodna istnieje to możemy ją wyznaczyć obliczając dla każdego x granicę

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

W praktyce pochodne obliczamy znając pochodne funkcji elementarnych oraz korzystając z reguł różniczkowania.

Reguły różniczkowania

Jeżeli istnieje pochodna funkcji $f(x)$ oraz $g(x)$ w przedziale (a, b) to

1) $(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x), \quad C$ – stała,

2) $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$,

3) $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$,

4) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}, \quad$ gdzie $\quad g(x) \neq 0$,

5) $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Podstawowe wzory pochodnych funkcji elementarnych

1) $(x^n)' = nx^{n-1}, \quad n \in \mathbb{R}$,

2) $(a^x)' = a^x \ln a$,

3) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$,

4) $(\sin x)' = \cos x$,

5) $(\cos x)' = -\sin x$,

6) $(\operatorname{arc\,tg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$,

7) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

8) $(\sinh x)' = \cosh x$,

9) $(\cosh x)' = \sinh x$,

10) $(\operatorname{tgh})' = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$,

11) $(\operatorname{ctgh})' = -\dfrac{1}{\sinh^2 x}$,

Ze wzorów podstawowych oraz reguł różniczkowania możemy wyprowadzić następujące wzory

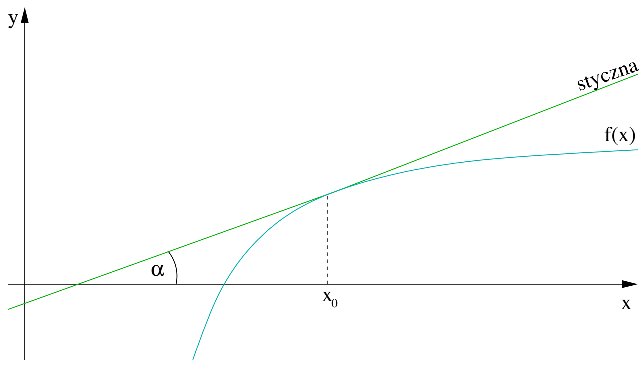
$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad (e^x)' = e^x,$$
$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad (\text{const})' = 0,$$
$$(x^x)' = \left(e^{x \ln x}\right)' = x^x(\ln x + 1).$$

Interpretacja geometryczna i fizyczna pochodnej

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest różniczkowalna w punkcie x_0, to jej pochodna wyraża się wzorem

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha,$$

gdzie α jest kątem jaki tworzy styczna do krzywej $y = f(x)$ w punkcie $x = x_0$ z dodatnim kierunkiem osi Ox.



Rysunek 3.1: Interpretacja geometryczna pochodnej funkcji

Jeżeli ruch punktu materialnego odbywa się po krzywej $y = f(x)$, to pochodna $f'(x)$ wzdłuż krzywej wyznacza chwilową szybkość ruchu tego punktu materialnego.

Pochodne wyższych rzędów

Pochodne wyższych rzędów liczymy ze wzoru rekurencyjnego

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} f(x)\right].$$

Pochodną rzędu n oznaczamy $f^{(n)}(x)$. Mamy zatem

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left[f'(x)\right], \qquad f'''(x) = \frac{d}{dx}\left[f''(x)\right].$$

Przykład 3.2. Podamy przykłady obliczania pochodnych z użyciem wspomnianych wcześniej reguł

1) $f(x) = 2x^3 \sin x \quad f'(x) = 2[3x^2 \sin x + x^3 \cos x] = 6x^2 \sin x + 2x^3 \cos x$

2) $f(x) = \frac{1+x^2}{2-x} \quad f'(x) = \left(\frac{1+x^2}{2-x}\right)' = \frac{2x(2-x)-(1+x^2)(-1)}{(2-x)^2} = \frac{-x^2+4x+1}{(2-x)^2}$

3) $f(x) = \sin^2 x \quad f'(x) = 2\sin x \cos x = \sin 2x$

4) $f(x) = \sin x^2 \quad f'(x) = 2x \cos x^2$

5) $f(x) = 4x\sqrt{x^2-1} \quad f'(x) = 4\sqrt{x^2-1} + \frac{4x}{2\sqrt{x^2-1}}2x = \frac{8x^2-4}{\sqrt{x^2-1}}$

Monotoniczność, ekstrema lokalne funkcji różniczkowalnych

Jeżeli dla $x \in (a,b), f'(x) > 0$ to w przedziale (a,b) funkcja jest *rosnąca*. Jeżeli dla $x \in (a,b)$, $f'(x) < 0$ to w przedziale (a,b) funkcja jest *malejąca*. Jeżeli w pewnym przedziale $f'(x) > 0$ lub $f'(x) < 0$ to funkcja w tym przedziale jest monotoniczna.

Funkcja może osiągać dla $x = x_0$ ekstremum lokalne (minimum lub maksimum). Warunkiem koniecznym na to aby funkcja osiągała w punkcie x_0 ekstremum jest aby $f'(x_0) = 0$. Warunkiem wystarczającym na to aby funkcja osiągała w punkcie x_0 ekstremum, jest aby w otoczeniu x_0 pochodna zmieniała znak. Jeżeli znak pochodnej zmienia się z $+$ na $-$ to funkcja w x_0 osiąga maksimum. W przeciwnym przypadku gdy pochodna zmienia znak z $-$ na $+$ to funkcja w x_0 osiąga minimum. Zaznaczamy to w następującej tabeli

x		x_0		x_1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

tzn. dla x_0 mamy maximum natomiast dla x_1 minimum. Istnieje równoważny warunek wystarczający istnienia ekstremum. Funkcja $f(x)$ posiada w x_0 ekstremu jeżeli $f'(x_0) = 0$ oraz $f''(x_0) \neq 0$ przy czym jeśli $f''(x_0) < 0$ to w x_0 mamy maximum natomiast jeśli $f''(x_0) > 0$ to w x_0 mamy minimum.

Przykład 3.3. Wyznaczyć przedziały monotoniczności oraz ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{5x}{1+x^2}. \tag{3.1}$$

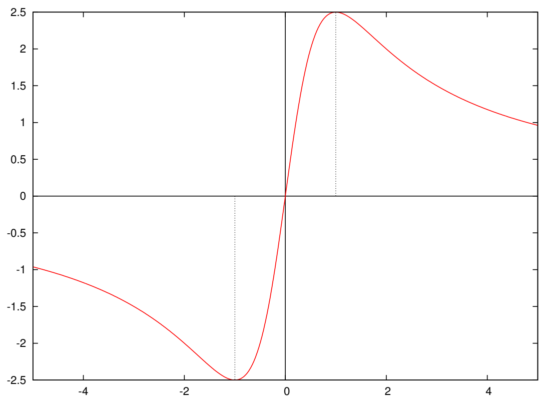
Rozwiązanie. Obliczamy $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{5(1+x^2) - 5x2x}{(1+x^2)^2} = \frac{5+5x^2-10x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{5(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

Znak pochodnej zależy od znaku wyrażenia $1-x^2$. Funkcja kwadratowa $y = 1-x^2$ jest dodatnia w przedziale $(-1,1)$ oraz ujemna w przedziałach $(-\infty,-1)$ oraz $(1,\infty)$. Oznacza to, że $f'(x) > 0$ gdy $x \in (-1,1)$, $f'(x) < 0$ gdy $x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty)$ oraz $f'(x) = 0$ gdy $x = -1$ lub $x = 1$. Mamy zatem minimum w punkcie $x = -1$ oraz maximum w punkcie $x = 1$.

x		-1		1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

$\square$



Rysunek 3.2: Wykres funkcji (3.1)

Za pomocą drugiej pochodnej funkcji f klasy C^2 można dokładniej określić kształt badanej funkcji.

Łuk krzywej nazywa się *wypukłym* w punkcie x_0, jeżeli punkty tego łuku w otoczeniu punktu x_0 znajdują się ponad styczną do łuku w punkcie x_0, *wklęsłym*, jeżeli punkty z otocznia x_0 znajdują się pod styczną do łuku w punkcie x_0. Punkt w którym łuk przechodzi z wklęsłego na wypukły, lub odwrotnie nazywa się *punktem przegięcia krzywej.*

Słuszne są następujące twierdzenia

Twierdzenie 3.4. *1. Jeżeli w przedziale (a,b) $f''(x) < 0$, to w tym przedziale funkcja f jest wklęsła.*

2. *Jeżeli w przedziale* (a, b) $f''(x) > 0$, *to w tym przedziale funkcja* f *jest wypukła.*

3. *Warunkiem koniecznym istnienia punktu przegięcia w* x_0 *jest* $f''(x_0) = 0$.

4. *Warunkiem wystarczającym istnienia punktu przegięcia w* x_0 *jest zmiana znaku* $f''(x)$ *w otoczeniu tego punktu.*

Co można przedstawić

x		x_0	
$f''(x)$	$+$	0	$-$
	wyp.	p.p.	wkl.

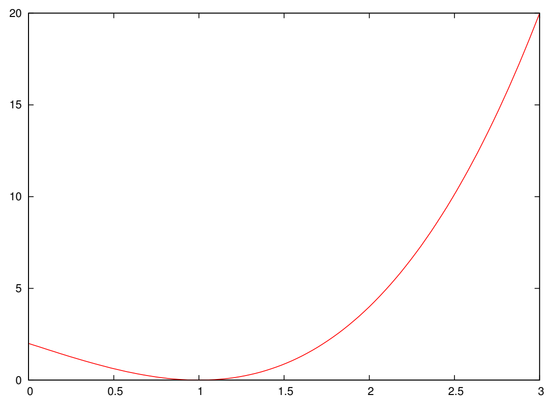
x		x_0	
$f''(x)$	$-$	0	$+$
	wkl.	p.p.	wyp.

Czasami zachodzi konieczność wyznaczenia największej lub najmniejszej wartości funkcji w przedziale domkniętym. Funkcja $f(x)$ różniczkowalna w tym przedziale może mieć wartość największą lub najmniejsza tylko w takim punkcie w którym ma ekstremum (lokalne) lub na krańcach tego przedział

Przykład 3.5. Wyznaczymy największą oraz najmniejszą wartość funkcji

$$f(x) = x^3 - 3x + 2 \tag{3.2}$$

na przedziale $\langle 0, 3\rangle$. Wyznaczamy wartości funkcji na krańcach przedziału. Mamy $f(0) = 2$, $f(3) = 20$. Wyznaczamy ekstrema, $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$. Stąd $f'(x) = 0$ dla $x = -1$ lub $x = 1$. Ponieważ punkt -1 nie należy do przedziału $\langle 0, 3\rangle$ to nie jest dla nas istotny. Zauważmy, że $f''(x) = 6x$ oraz $f''(1) = 6 > 0$. Oznacza to, że dla $x = 1$ mamy minimum. Ponadto $f(1) = 0$. Porównujemy wartości $f(0) = 2, f(1) = 0, f(3) = 20$. Wynika stąd, że dla $x = 1$ funkcja f posiada wartość najmniejszą, natomiast dla $x = 3$ wartość największą.



Rysunek 3.3: Wykres funkcji (3.2)

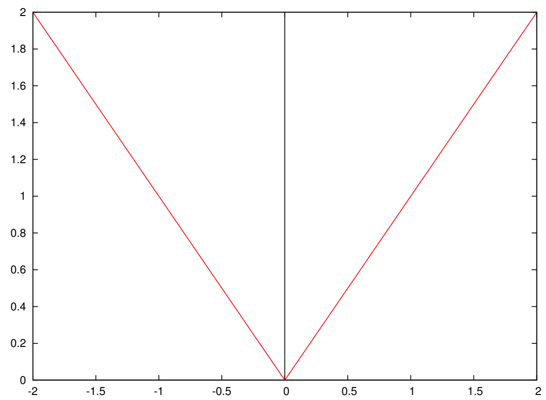
W przypadku gdy funkcja nie jest różniczkowalna korzystamy z następującej definicji ekstremum funkcji.

Mówimy, że funkcja $f(x)$ posiada w punkcie x_0 minimum (maximum) lokalne *właściwe* jeśli istnieje otoczenie $(x_0 - h, x_0 + h)$ punktu x_0 takie, że $f(x) > f(x_0)$, $(f(x) < f(x_0))$ dla dowolnego punktu $x \in (x_0 - h, x_0) \cup (x_0, x_0 + h)$. W przypadku gdy znaki $>, <$ zastąpimy znakami $\geq, \leq$ to mówimy o *ekstremach niewłaściwych.*

Przykład 3.6. Rozpatrzmy funkcję

$$f(x) = |x|, \tag{3.3}$$

która nie jest różniczkowalna w punkcie $x = 0$. Widać, że $f(x) = 0$ oraz $f(x) > 0$ dla $x \neq 0$. Oznacza to, że funkcja posiada minimum lokalne właściwe w punkcie $x = 0$.



Rysunek 3.4: Wykres funkcji (3.3)

Wyrażenia nieoznaczone, reguła de l'Hospitala

Rozpatrujemy następujące wyrażenia które nazywamy wyrażeniami nieoznaczonymi

$$\frac{0}{0}, \qquad \frac{\infty}{\infty}, \qquad 0 \cdot \infty, \qquad \infty - \infty, \qquad 0^0, \qquad , \infty^0, \qquad , 1^\infty.$$

Wyrażenia takie występują przy obliczaniu granic funkcji. Rozpatrzmy funkcję $f(x) = g(x)/h(x)$ w którym funkcje $g(x), h(x)$ są różniczkowalne w otoczeniu punktu x_0. Jeżeli przy $x \to x_0$ wyrażenie $g(x)/h(x)$ jest typu

$$\frac{0}{0}, \qquad \frac{\infty}{\infty}$$

oraz istnieje granica

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g'(x)}{h'(x)} = a,$$

to

$$\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{h(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{g'(x)}{h'(x)}=a.$$

Fakt ten nazywamy regułą de l'Hospitala. Dla podkreślenia tego, że korzystamy z reguły de l'Hospitala używamy następującego oznaczenia $\stackrel{H}{=}$. Niektóre wyrażenia nieoznaczone możemy przekształcić do postaci ∞/∞ lub $0/0$ a następnie korzystać z reguły de l'Hospitala.

Przykład 3.7. 1) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{2-\sqrt{x+1}}\underset{[\frac{0}{0}]}{\stackrel{H}{=}}\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x-3)'}{(2-\sqrt{x+1})'}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{-1/(2\sqrt{x+1})}=-4$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{3x^2}\underset{[\frac{0}{0}]}{\stackrel{H}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(3x^2)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{6x}\underset{[\frac{0}{0}]}{\stackrel{H}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{6}=0$

3) $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=|0\cdot\infty|=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x}\underset{[\frac{\infty}{\infty}]}{\stackrel{H}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{(1/x)'}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=0$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=|\infty-\infty|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}\underset{[\frac{0}{0}]}{\stackrel{H}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}\underset{[\frac{0}{0}]}{\stackrel{H}{=}}$
$\underset{[\frac{0}{0}]}{\stackrel{H}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}=\dfrac{1}{2}$

Wzór Taylora i Maclaurina

Rozpatrzmy funkcję f której wszystkie pochodne do rzędu $(n-1)$ włącznie są ciągłe w przedziale domkniętym $\langle x_0, x\rangle$ oraz istnieje pochodna rzędu n w przedziale otwartym (x_0, x). Wówczas istnieje takie $C\in(x_0,x)$, że wartość funkcji $f(x)$ możemy przedstawić wzorem zwanym *wzorem Taylora*

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''}{2!}(x_0)(x-x_0)^2+\dots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+R_n(x),$$

gdzie wyrażenie

$$R_n(x)=\frac{f^n(C)}{n!}(x-x_0)^n$$

nazywa się resztą wzoru Taylora. Wzór Taylora możemy zapisać w postaci

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x).$$

W szczególnym przypadku gdy $x_0=0$ otrzymujemy wzór który nazywamy *wzorem Maclaurina*

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+R_n(x),$$

gdzie

$$R_n(x)=\frac{f^n(C)}{n!}x^n.$$

Jeżeli funkcja $f(x)$ ma wszystkie pochodne w pewnym otoczeniu punktu x_0 oraz reszta szeregu dąży do zera przy $n \to \infty$, to wzory Taylora oraz Maclaurina będą wykorzystywane do rozwijania funkcji $f(x)$ w otoczeniu punktu x_0 w szereg funkcyjny zwany szeregiem potęgowym.

Można korzystać z następującego wzoru przybliżonego

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!},$$

skąd dla $x = 1$ mamy

$$e = e^1 \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}.$$