5.3 Ekstremum warunkowe funkcji dwóch zmiennych

Jeżeli dana jest funkcja ciągła $f(x,y)$ w obszarze $(x,y) \in U$ to często występuje w tym obszarze warunek $g(x,y) = 0$ Ekstremum warunkowe polega na wyznaczaniu punktów ekstremalnych funkcji $f(x,y)$ spełniających dodatkowy warunek. Inaczej mówiąc poszukuje się ekstremum lokalne funkcji $f(x,y)$ nie w całym obszarze U,ale w punktach krzywej o równaniu $g(x,y) = 0$ leżącej w obszarze U.

Praktyczną metodą wyznaczania punktów ekstremalnych dla funkcji dwóch zmiennych jest metoda współczynników nieoznaczonych Lagrange?a. Polega ona na wyznaczaniu lokalnych punktów ekstremalnych funkcji pomocniczej

$$F(x,y;\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y),$$

gdzie λ jest nieznanym współczynnikiem.

Warunkiem koniecznym istnienia ekstremum warunkowego jest spełnienie układu równań

$$\begin{cases} F_x(x,y;\lambda) = f_x(x,y) + \lambda g_x(x,y) = 0 \\ F_y(x,y;\lambda) = f_y(x,y) + \lambda g_y(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \tag{5.1}$$

Każdy punkt spełniający układ równań (5.1) nazywamy punktem stacjonarnym funkcji $f(x,y)$ przy warunku $g(x,y) = 0$.

Warunek dostateczny istnienia ekstremum warunkowego funkcji $f(x,y)$ w punktach stacjonarnych P_0 wyznacza znak wyrażenia

$$W(P_0) = F_{xx}(P_0)F_{yy}(P_0) - [F_{xy}(P_0)]^2.$$

Jeżeli $W > 0$ to w tym punkcie istnieje ekstremum oraz jeżeli F_{xx} jest dodatnia to jest minimum w tym punkcie, jeżeli F_{xx} jest ujemna to jest maksimum w tym punkcie. Jeżeli $W < 0$ w tym punkcie nie istnieje ekstremum warunkowe.

Przykład 5.4. Znaleźć ekstremum funkcji $f(x,y) = x + 2y$ przy warunku $x^2 + y^2 = 5$.

Rozwiązanie. Równanie $z = x + 2y$ jest równaniem płaszczyzny w przestrzeni trójwymiarowej. Natomiast warunek jest okręgiem o środku w punkcie $(0,0)$ i promieniu $\sqrt{5}$. Ekstremum warunkowe wyznaczy na tej płaszczyźnie punkty ekstremalne odpowiadające punktom leżącym na tym okręgu. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} f(x,y) =& x + 2y \\ g(x,y) =& 5 - x^2 - y^2 \end{aligned}$$

Warunki konieczne dla funkcji $F(x,y;\lambda) = x + 2y + \lambda(5 - x^2 - y^2)$ są następujące

$$\begin{cases} F_x = 1 - 2\lambda x = 0 \\ F_y = 2 - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

Po rozwiązaniu tego układu równań (nieliniowych) otrzymujemy, że punktami stacjonarnymi są $A(1,2)$ i $B(-1,-2)$. Ponieważ

$$F_{xx} = -2\lambda, \quad F_{yy} = -2\lambda, \qquad F_{xy} = 0,$$

zatem

$$W(A) = W(B) = 4\lambda^2 > 0.$$

Oznacza to, że w obu punktach stacjonarnych są ekstrema warunkowe. Ponadto $F_{xx}(A) < 0$, czyli jest maximum warunkowe funkcji $f(x,y)$ w A równe 5 oraz $F_{xx}(B) > 0$, czyli jest minimum warunkowe funkcji $f(x,y)$ w B równe -5. □