9.2 Metoda macierzowa, metoda wyznacznikowa

Najprostszym do rozwiązania jest układ równań liniowych, w którym liczba niewiadomych równa jest ilości równań oraz macierz główna układu jest nieosobliwa tzn. $\det A \neq 0$. Układ taki nazywamy układem Cramera.

Układ Cramera można rozwiązać posługując się metodą macierzową. W tym celu mnożymy równanie

$$AX = B$$

lewostronnie przez A^{-1}. Stąd otrzymujemy

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

stąd oraz z faktu $A^{-1}A = \mathbb{I}$ dostajemy

$$X = A^{-1}B.$$

Przykład 9.2. Rozwiązać metodą macierzową układ

$$\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$$

Rozwiązanie. Mamy

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ponieważ $|A| = -5 \neq 0$ to jest to układ Cramera musimy obliczyć $A^{-1}B$. Wyznaczamy macierz odwrotną

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A^D)^T.$$

Otrzymujemy

$$A^{-1} = \frac{1}{-5}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{-5}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

mamy zatem

$$A^{-1}B = \frac{1}{-5}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{-5}\begin{bmatrix} 2 \cdot (-1) + (-3) \cdot 1 \\ -3 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{-5}\begin{bmatrix} -5 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

otrzymujemy więc

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

a stąd $x = 1, y = -1$. $\square$

Układ Cramera możemy również rozwiązać stosując inną metodę, zwaną *metodą wyznacznikową* lub *metodą Cramera.* W tym celu mając układ Cramera obliczamy $W = |A|$ oraz W_i, $i = 1, \dots, n$ gdzie W_i jest wyznacznikiem macierzy powstałej z macierzy A przez zamianę kolumny i kolumną wyrazów wolnych

$$W_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{1,2} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{2,2} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n,2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad W_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_2 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \dots$$

lub ogólnie

$$W_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(i-1)} & b_2 & a_{1(i+1)} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2(i-1)} & b_2 & a_{2(i+1)} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(i-1)} & b_n & a_{n(i+1)} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

dla $i = 1, \dots, n$. Układ Cramera jest zawsze oznaczony tzn. posiada dokładnie jedno rozwiązanie dane wzorem

$$x_1 = \frac{W_1}{W}, \; x_2 = \frac{W_2}{W}, \; \dots, \; x_n = \frac{W_n}{W}$$

Przykład 9.3. Metodą wyznacznikową rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 3 \\ x - 2y - 3z = -3 \\ 3x + y + z = 4 \end{cases}$$

Rozwiązanie. Obliczamy wyznaczniki W, W_1, W_2, W_3

$$W = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 + 2 - 27 + 12 + 6 - 3 = -14$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ -3 & -2 & -3 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -6 - 6 - 36 + 16 + 9 + 9 = -14$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -6 + 8 - 27 + 18 + 24 - 3 = 14$$

$$W_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -16 + 3 - 27 + 18 + 6 - 12 = -28$$

Otrzymujemy stąd

$$x_1 = \frac{W_1}{W} = \frac{-14}{-14} = 1, \quad x_2 = \frac{W_2}{W} = \frac{14}{-14} = -1, \quad x_3 = \frac{W_3}{W} = \frac{-28}{-14} = 2.$$

□