11.1 Płaszczyzna i prosta

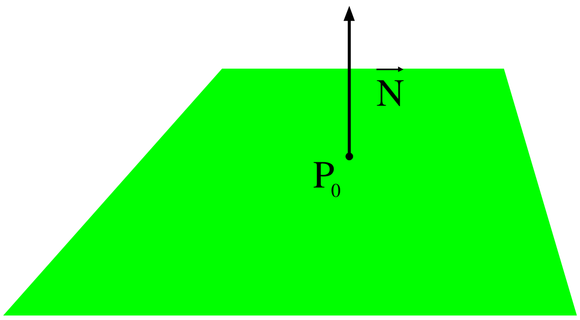
Płaszczyzna jest jednoznacznie zdefiniowana przez punkt należący do płaszczyzny oraz wektor który jest do płaszczyzny prostopadły. Płaszczyzna przechodząca przez punkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ oraz prostopadła do wektora $\vec{N} = [A, B, C]$ jest zbiorem punktów (x, y, z) spełniającym równanie

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

które równoważnie możemy zapisać

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

gdzie $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$. *Kąt między płaszczyznami* jest kątem między wektorami



Rysunek 11.1: Płaszczyzna wyznaczona przez punkt i wektor

prostopadłymi do tych płaszczyzn. Dwie płaszczyzny są równoległe jeśli wektory $\vec{N}_1, \vec{N}_2$ prostopadłe do tych płaszczyzn są równoległe tzn. gdy $\vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = 0$.

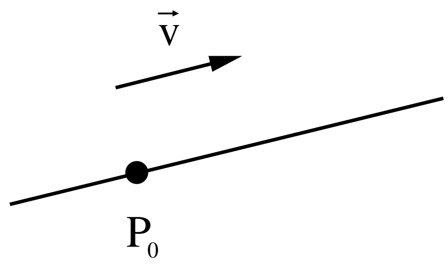
Prosta jest jednoznacznie zdefiniowana przez punkt który do prostej należy oraz wektor który jest do prostej równoległy. Prosta przechodząca przez punkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ oraz równoległa do wektora $\vec{v} = [a, b, c]$ jest zbiorem punktów (x, y, z) spełniających równania

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

które nazywamy równaniem parametrycznym prostej. Czasami prostą zapisujemy w postaci kierunkowej

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Uwaga Liczby a, b, c w powyższym wyrażeniu mogą być zerami (byle nie wszystkie trzy jednocześnie), ponieważ są one współrzędnymi niezerowego wektora, a jak wiadomo niezerowy wektor może mieć zerowe niektóre współrzędne.



Rysunek 11.2: Prosta wyznaczona przez punkt i wektor kierunkowy

Prosta może być również zapisana w postaci krawędziowej jako część wspólna dwóch nierównoległych płaszczyzn. Kąt między prostymi jest kątem między wektorami do tych prostych równoległymi.

Przykład 11.1. Wyznaczyć równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $P(-1, 2, 4)$ oraz równoległej do wektorów $\vec{a} = [0, 3, 5], \vec{b} = [-7, 2, 1]$. Wektor prostopadły do poszukiwanej płaszczyzny musi być prostopadły do $\vec{a}$ oraz $\vec{b}$. Obliczmy $\vec{a} \times \vec{b}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 3 & 5 \\ -7 & 2 & 1 \end{vmatrix} = [-7, -35, 21]$$

Stąd równaniem płaszczyzny jest

$$-7(x+1) - 35(y-2) + 21(z-4) = 0$$

lub po podzieleniu stronami przez (-7) oraz uproszczeniu

$$x + 5y - 3z + 3 = 0.$$

Przykład 11.2. Napisać w postaci parametrycznej równanie prostej powstałej z przecięcia płaszczyzn

$$5x + 2y - 5z + 6 = 0, \qquad 2x + 2y - 3z + 3 = 0$$

Wektorem kierunkowym prostej jest wektor prostopadły do $[5, 2, -5]$ oraz $[2, 2, -3]$. Obliczamy zatem

$$\vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 2 & -5 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = [4, 5, 6]$$

Znajdujemy następnie dowolny punkt należący do prostej, tzn. dowolne rozwiązanie układu

$$\begin{cases} 5x + 2y - 5z + 6 = 0 \\ 2x + 2y - 3z + 3 = 0 \end{cases}$$

niech $z = 0$ wówczas układ przybiera postać

$$\begin{cases} 5x + 2y = -6 \\ 2x + 2y = -3 \end{cases}$$

który rozwiązując dostajemy $x = -1, y = -1/2$. Ostatecznie równaniem parametrycznym poszukiwanej prostej jest

$$\begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = -\frac{1}{2} + 5t \\ z = 6t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Przykład 11.3. Znaleźć punkt przebicia prostej

$$x = 1 + t, \quad y = 1 + 2t, \quad z = 1 + 3t, \qquad t \in \mathbb{R}$$

z płaszczyzną $3x - 2y + z - 5 = 0$.

Rozwiązanie. Punkt przebicia znajduje się wstawiając prawe strony równania opisującego prostą w postaci parametrycznej (w przypadku, gdy równanie prostej jest w innej postaci, wtedy sprowadzamy je postaci paramerycznej), do równania płaszczyzny. Znajdujemy w ten sposób wartość parametru t dla którego prosta przecina płaszczyznę, czyli

$$3(1 + t) - 2(1 + 2t) + (1 + 3t) - 5 = 0.$$

Po rozwiązaniu tego równania otrzymujemy wartość parametru $t = 1$, dla którego prosta przecina zadaną płaszczyznę.

Zatem punktem przebicia prostej z płaszczyzną jest punkt $P(2, 3, 4)$. □

Przykład 11.4. Znaleźć odległość punktu $P(1, 0, 1)$ od płaszczyzny $x + y + z = 8$.

Rozwiązanie. Rozwiązanie otrzymujemy w dwóch etapach.

(1°) Prowadzimy prostą przechodzącą przez punkt P prostopadłą do zadanej płaszczyzny. Prosta ta ma wektor kierunkowy równoległy do wektora $\vec{N}$ normalnego do płaszczyzny czyli do $\vec{N} = [1, 1, 1]$.

Równanie prostej w postaci parametrycznej jest następujące

$$x = 1 + t, \quad y = t, \quad z = 1 + t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Wyznaczamy punkt przebicia prostej z płaszczyzną (patrz Przykład 11.3).

$$(1 + t) + t + (1 + t) = 8,$$

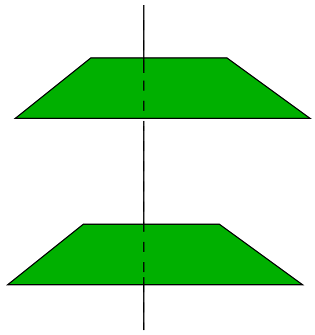
czyli $t = 2$. Zatem punktem przebicia jest $R(3, 2, 3)$.

(2°) Odległość punktu P od płaszczyzny jest równa długości wektora $\overrightarrow{PR}$, czyli

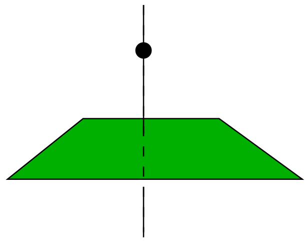
$$d = \sqrt{4 + 4 + 4} = 2\sqrt{3}$$

□

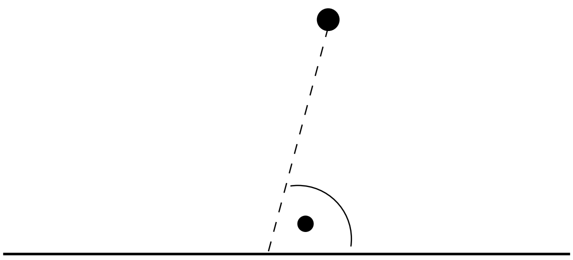
W rozwiązywaniu zadań z geometrii niejednokrotnie mogą pomóc proste rysunki. Poniżej przedstawiamy kilka przykładów.



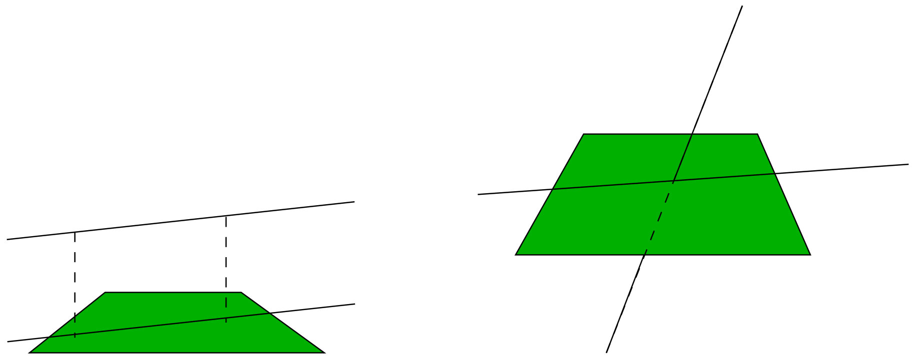
Rysunek 11.3: Odległość między płaszczyznami



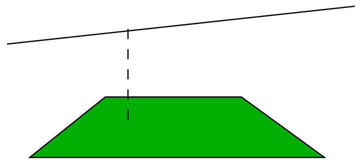
Rysunek 11.4: Odległość punktu od płaszczyzny



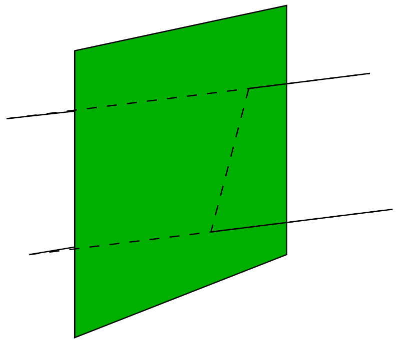
Rysunek 11.5: Odległość punktu od prostej



Rysunek 11.6: Rzut prostej na płaszczyznę



Rysunek 11.7: Odległość prostej od płaszczyzny



Rysunek 11.8: Odległość prostych