

Wykład 6. Analiza obwodów RLC przy wymuszeniu niesinusoidalnym

Wstęp

W tym wykładzie zajmiemy się analizą obwodów liniowych RLC w stanie ustalonym przy wymuszeniach okresowych niesinusoidalnych. Odpowiedzi takich obwodów są w ogólności również funkcjami okresowymi niesinusoidalnymi. Wiele urządzeń elektrycznych generuje sygnały okresowe o kształcie różniącym się od sinusoidy. Mogą to być prostowniki diodowe lub tyrystorowe, przeciążone transformatory, pracujące w zakresie nieliniowości krzywej magnesowania, generatory uniwersalne napięć prostokątnych, piłokształtnych itp. Okresowe przebiegi niesinusoidalne nazywać będziemy również odkształconymi, uznając przebiegi sinusoidalne za najbardziej elementarne przebiegi okresowe.

Istnieje konieczność opracowania metodyki analizy obwodów zawierających sygnały niesinusoidalne. Podstawowym problemem w analizie tych obwodów jest wyrażenie przebiegów niesinusoidalnych poprzez funkcje sinusoidalne, dla których analiza jest bardzo prosta. Metodą powszechnie stosowaną jest rozwinięcie funkcji czasowych opisujących przebieg niesinusoidalny w szereg Fouriera.

Zostanie pokazane, że dowolne różne od sinusoidalnego wymuszenie okresowe spełniające warunki Dirichleta może być przedstawione jako suma algebraiczna wielu wymuszeń harmoniczych (sinusoidalnych) o częstotliwościach będących wielokrotnością częstotliwości podstawowej. Rozwinięcie szeregu Fouriera zostanie zaprezentowane tutaj w postaci trygonometrycznej oraz wykładniczej. Wprowadzone zostanie twierdzenie Parsevala, pozwalające wyrazić wartość średnią za okres iloczynu dwu funkcji okresowych poprzez współczynniki rozwinięcia wykładniczego Fouriera obu funkcji. Podane zostaną wzory na wartość skuteczną sygnałów niesinusoidalnych oraz na moce występujące w obwodzie o przebiegach niesinusoidalnych. Wprowadzone zostanie nowe pojęcie mocy – moc odkształcenia (deformacji). Poznamy metodę analizy obwodów ze źródłami niesinusoidalnymi w stanie ustalonym przy zastosowaniu zasady superpozycji.



6.1. Szereg Fouriera

Zgodnie z twierdzeniem Fouriera funkcję okresową $f(t)$ o okresie T (częstotliwość $f=1/T$) można przedstawić w postaci szeregu utworzonego ze składowej stałej oraz funkcji sinusoidalnych o częstotliwościach kf , jeśli funkcja ta spełnia **warunki Dirichleta**.

Niech dana będzie funkcja okresowa $f(t)$ określona w przedziale $0-T$, gdzie T oznacza okres tej funkcji. Załóżmy, że funkcja ta spełnia warunki Dirichleta, to znaczy, że w przedziale $0-T$ jest bezwzględnie całkowalna, czyli

$$\int_T |f(t)| dt < \infty \quad (6.1)$$

ma skończoną liczbę maksimów i minimów a w przedziale $0-T$ co najwyżej skończoną liczbę punktów nieciągłości t_k , przy czym w każdym punkcie nieciągłości istnieją skończone granice prawostronna i lewostronna a wartość funkcji w tym punkcie przyjmuje się jako średnią arytmetyczną granicy lewo- i prawostronnej, to jest

$$f(t_k) = \frac{1}{2} [f(t_{k-}) + f(t_{k+})] \quad (6.2)$$

6.1.1. Postać trygonometryczna szeregu Fouriera

Każda funkcja okresowa $f(t)$ spełniająca wymienione wyżej warunki Dirichleta może być wyrażona za pomocą nieskończonego, zbieżnego szeregu Fouriera. Suma tego szeregu dla dowolnego punktu czasu t może być wyrażona w postaci

$$f(t) = F_0 + \sum_{k=1}^{\infty} F_k \sin(k\omega t + \psi_k) \quad (6.3)$$

lub

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cos(k\omega t) + B_k \sin(k\omega t)] \quad (6.4)$$

Szereg po prawej stronie równań (6.3) i (6.4) nazywać będziemy **szeregiem trygonometrycznym Fouriera**. W szeregu tym wyróżnić należy następujące parametry

- | | |
|-------|---|
| k | - rząd harmoniczej ($k = 1, 2, 3, \dots$) |
| F_k | - amplituda k -tej harmoniczej |

$F_0 = A_0$	- składowa stała przebiegu
ψ_k	- faza początkowa k -tej harmonicznej
$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$	- pulsacja harmonicznej podstawowej
$F_1 \sin(\omega t + \psi_1)$	- podstawowa harmoniczna przebiegu
$F_k \sin(k\omega t + \psi_k)$	- k -ta harmoniczna przebiegu ($k = 1, 2, 3, \dots$)

Należy podkreślić, że okres harmonicznej podstawowej jest identyczny z okresem przebiegu niesinusoidalnego $f(t)$. Częstotliwości kolejnych harmonicznych są wielokrotnością częstotliwości harmonicznej podstawowej, czyli $\omega_k = k\omega$. Współczynniki rozwinięcia trygonometrycznego Fouriera wyznacza się z następujących wzorów

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} f(t) dt \quad (6.5)$$

$$A_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} f(t) \cos(k\omega t) dt \quad (6.6)$$

$$B_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} f(t) \sin(k\omega t) dt \quad (6.7)$$

Chwila czasowa t_0 może być wybrana dowolnie a jej wybór nie ma wpływu na wynik transformacji. Obie postacie szeregu Fouriera (6.3) i (6.4) są sobie równoważne, jeśli spełnione są następujące warunki

$$F_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2} \quad (6.8)$$

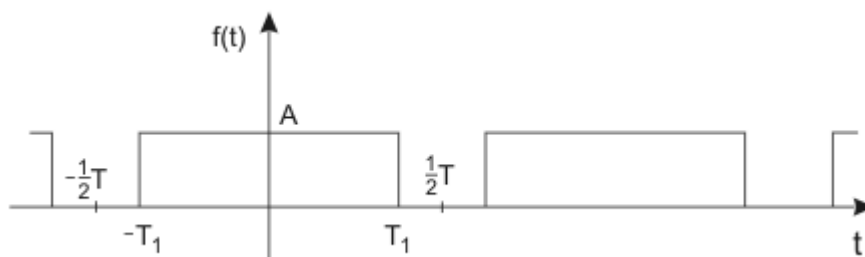
$$\psi_k = \arctg \frac{A_k}{B_k} \quad (6.9)$$

W ogólności szereg Fouriera zawiera nieskończenie wiele harmonicznych. W praktyce większość harmonicznych maleje do zera przy zwiększającym się rzędzie tych harmonicznych. Stąd w obliczeniach uwzględnia się jedynie niewielką liczbę tych

harmonicznym uzyskując zadowalające przybliżenie. Metodę rozkładu przebiegu niesinusoidalnego na szereg Fouriera zilustrujemy na przykładzie przebiegu prostokątnego.

Przykład 6.1

Wyznaczyć rozwinięcie Fouriera dla przebiegu prostokątnego okresowego o okresie T przedstawionego na rys. 6.1



Rys. 6.1. Przebieg prostokątny okresowy

Rozwiązanie

Dla przebiegu podanego na rys. 6.1 pulsacja $\omega = 2\pi / T$. Poszczególne współczynniki rozwinięcia trygonometrycznego Fouriera opisane są wzorami

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T_1}^{T_1} A dt = 2A \frac{T_1}{T}$$

$$A_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(k\omega t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T_1}^{T_1} A \cos(k\omega t) dt = \frac{2A}{\pi \cdot k} \sin(2\pi \cdot k \frac{T_1}{T})$$

$$B_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(k\omega t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T_1}^{T_1} A \sin(k\omega t) dt = 0$$

Z uzyskanych wzorów na współczynniki Fouriera wynika, że zadany przebieg czasowy prostokątny opisać można w postaci nieskończonej sumy harmonicznym o postaci

$$f(t) = 2A \frac{T_1}{T} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2A}{\pi \cdot k} \sin(2k\pi \frac{T_1}{T}) \right] \cos(k\omega t)$$

Wyrażenie o postaci sinusoidalnej stojące przy $\cos(k\omega t)$ oznacza amplitudę k -tej harmonicznej. Jak widać wartość tej amplitudy maleje wraz ze wzrostem k . W ogólnym przypadku przy dowolnej wartości T_1 rozwinięcie w szereg Fouriera zawierać może wszystkie harmoniczne, przy czym amplitudy tych harmonicznych są modulowane funkcją sinusoidalną.

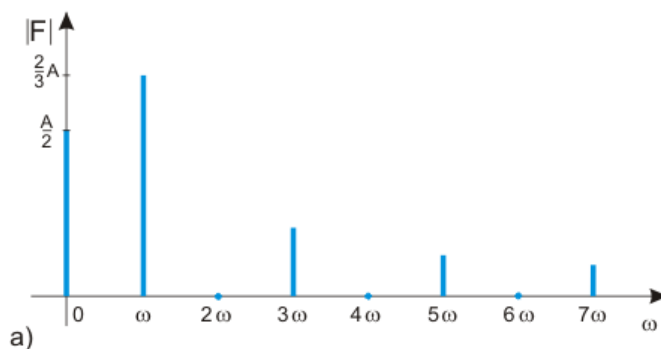
Szczególnie prostą formę przyjmuje rozwinięcie w szereg Fouriera przy wypełnieniu impulsów prostokątnych w stosunku 1:1. Wtedy $T_1 = T / 4$ a rozwinięcie $f(t)$ upraszcza się do postaci

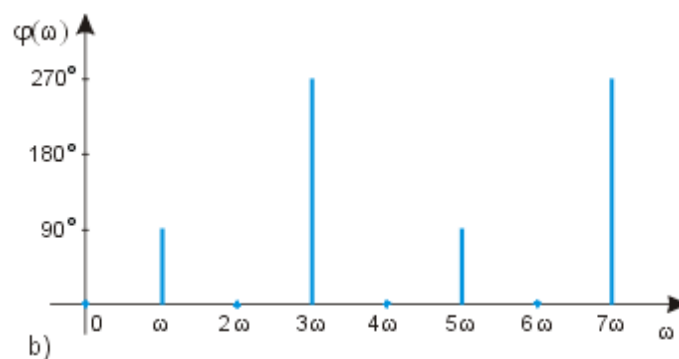
$$f(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \cos(\omega t) - \frac{2A}{3\pi} \cos(3\omega t) + \frac{2A}{5\pi} \cos(5\omega t) - \frac{2A}{7\pi} \cos(7\omega t) + \dots$$

Lub

$$f(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \sin(\omega t + 90^\circ) + \frac{2A}{3\pi} \sin(3\omega t + 270^\circ) + \frac{2A}{5\pi} \sin(5\omega t + 90^\circ) + \frac{2A}{7\pi} \sin(7\omega t + 270^\circ) + \dots$$

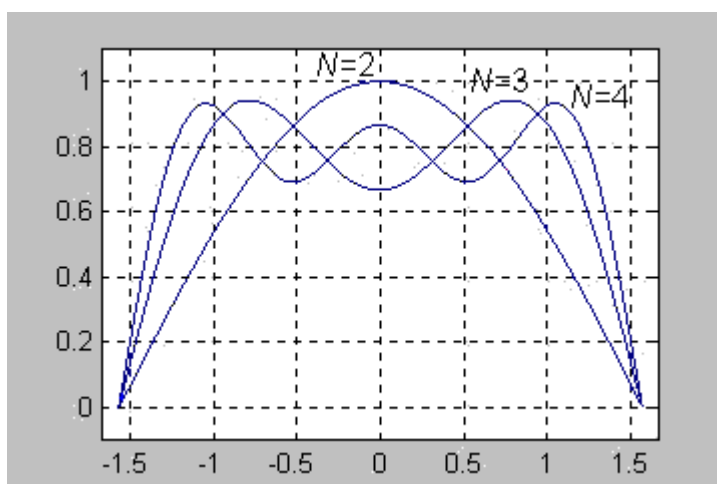
W tym przypadku szereg Fouriera zawiera jedynie harmoniczne nieparzyste a amplituda k -tej harmonicznej jest k -krotnie mniejsza niż harmonicznej podstawowej. Kolejne składniki rozwinięcia różnią się znakiem (znak minus odpowiada wprowadzeniu przesunięcia fazowego o kąt 180°). Rys. 6.2 przedstawia wykres amplitudy i fazy poszczególnych składowych rozkładu Fouriera (w przypadku charakterystyki fazowej jako podstawę przyjęto rozwinięcie do postaci sinusoidalnej).





Rys. 6.2. Wykres amplitudy (a) i fazy (b) składowych rozkładu sinusoidalnego Fouriera (zmienić fazy).

Rozkład przebiegu niesinusoidalnego na składowe harmoniczne oznacza jego aproksymację poprzez nieskończoną sumę składników. Każde ograniczenie tej sumy do liczby skończonej wprowadza pewien błąd aproksymacji, a więc przybliżenie przebiegu rzeczywistego przez funkcje aproksymujące. Na rys. 6.3 przedstawiono efekty przybliżania przebiegu prostokątnego przez ograniczoną sumę harmonicznych przy coraz większej ich liczbie uwzględnianej w aproksymacji ($N=2$, $N=3$, $N=4$, uwzględniając składową zerową).



Rys. 6.3. Przybliżenie impulsu prostokątnego przez skończoną sumę harmonicznych



Jak widać pomimo uwzględnienia w rozwinięciu jedynie 4 harmonicznych przybliżenie jest dość dokładne i odzwierciedla podstawowe cechy kształtu impulsu. Zwiększenie liczby harmonicznych w sumowaniu zwiększa dokładność odwzorowania impulsu prostokątnego.

6.1.2. Postać wykładnicza szeregu Fouriera

W wielu zastosowaniach postać trygonometryczna (6.3) szeregu Fouriera nie jest wystarczająca i dlatego wprowadza się komplementarną postać wykładniczą, wykorzystującą przedstawienie funkcji trygonometrycznych poprzez funkcje wykładnicze. Korzysta się przy tym z definicji funkcji sinusoidalnej i kosinusoidalnej, zgodnie z którymi

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \quad (6.10)$$

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \quad (6.11)$$

Po zastosowaniu elementarnych przekształceń wzoru (6.4) otrzymuje się

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{A_k - jB_k}{2} \right) e^{-jk\omega t} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{A_k + jB_k}{2} \right) e^{jk\omega t} \quad (6.12)$$

Wprowadźmy oznaczenia

$$X_k = \frac{A_k + jB_k}{2} \quad (6.13)$$

oraz

$$X_{-k} = \frac{A_{-k} - jB_{-k}}{2} \quad (6.14)$$

Ze względu na parzystość funkcji kosinusoidalnej i nieparzystość funkcji sinusoidalnej słuszne są następujące równości

$$A_k = A_{-k} \quad (6.15)$$

$$B_k = -B_{-k} \quad (6.16)$$

Oznacza to, że

$$X_k = \frac{A_k + jB_k}{2} = X_{-k}^* \quad (6.17)$$

gdzie znak * oznacza sprzężenie liczby zespolonej. Uwzględnienie tej zależności we wzorze (6.12) prowadzi do wyniku

$$f(t) = A_0 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} X_k e^{jk\omega t} \quad (6.18)$$

Jest to tak zwana postać wykładnicza szeregu Fouriera, w której wartości współczynników rozwinięcia X_k są zespolone w odróżnieniu od rzeczywistych wartości współczynników szeregu trygonometrycznego. Współczynniki te mogą być otrzymane z rozwinięcia trygonometrycznego bądź bezpośrednio z relacji

$$X_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-jk\omega t} dt \quad (6.19)$$

Wykres $|X_k|$ określony dla dyskretnych wartości k reprezentujących sobą dyskretne częstotliwości nazywany jest **widmem amplitudowym** funkcji $f(t)$. Ze względu na to, że współczynniki rozwinięcia wykładniczego spełniają warunek $|X_k| = |X_{-k}|$, widmo amplitudowe jest symetryczne względem osi rzędnych (wartości widma amplitudowego dla dodatnich i ujemnych częstotliwości są identyczne). Z kolei wykres $\arg X_{-k} = -\arg X_k$, czyli **widmo fazowe** jest symetryczne względem początku układu współrzędnych (wartości kąta fazowego dla częstotliwości ujemnych są przeciwne względem tych samych wartości dla częstotliwości dodatnich).

Rozwinięcie funkcji $f(t)$ w postać wykładniczą oznacza rozkład energii sygnału w zakresie częstotliwości dodatniej i ujemnej. Jeśli rzeczywista wartość amplitudy k -tej harmonicznej wynosi F_k , to k -ty prążek widma amplitudowego szeregu wykładniczego Fouriera przyjmie wartość $\frac{F_k}{2}$ dla częstotliwości dodatniej i identyczną wartość dla częstotliwości ujemnej.

Przykład 6.2

Wyznaczyć postać wykładniczą szeregu Fouriera, jeśli

$$f(t) = 5 + 10\cos(\omega t) + 5\sin(\omega t) + 7\cos(3\omega t) + 12\sin(5\omega t)$$

Rozwiązanie

Dla uzyskania postaci wykładniczej szeregu Fouriera skorzystamy z zależności definicyjnych

funkcji sinusoidalnej i kosinusoidalnej: $\sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$, $\cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$. Po

wstawieniu tych zależności do szeregu Fouriera otrzymujemy

$$f(t) = 5 + 10\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} + 5\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} + 7\frac{e^{j3\omega t} + e^{-j3\omega t}}{2} + 12\frac{e^{j5\omega t} - e^{-j5\omega t}}{2j}$$

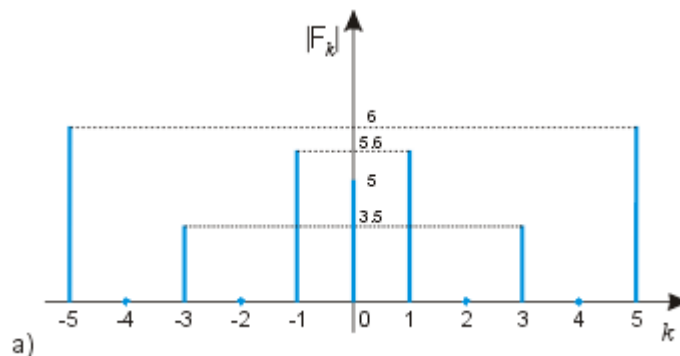
Uwzględniając, że $j = e^{j\pi/2}$ i grupując odpowiednie składniki otrzymujemy

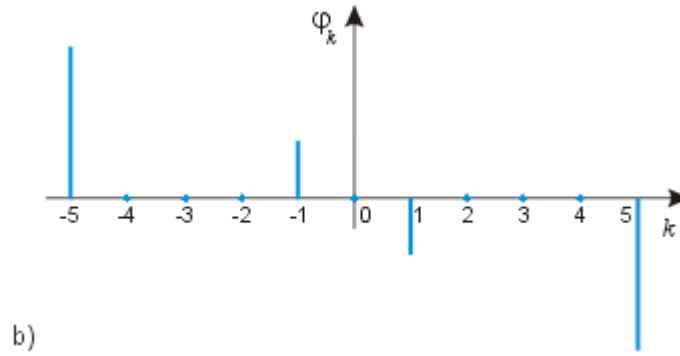
$$f(t) = 6e^{j\pi/2}e^{-j5\omega t} + 3,5e^{-j3\omega t} + (5 + 2,5j)e^{-j\omega t} + 5 + (5 - 2,5j)e^{j\omega t} + 3,5e^{j3\omega t} + 6e^{-j\pi/2}e^{j5\omega t}$$

Po sprowadzeniu liczb zespolonych do postaci wykładniczej otrzymuje się następującą postać wykładniczą szeregu Fouriera

$$f(t) = 6e^{j90^\circ}e^{-j5\omega t} + 3,5e^{-j3\omega t} + 5,6e^{j26,5^\circ}e^{-j\omega t} + 5 + 5,6e^{-j26,5^\circ}e^{j\omega t} + 3,5e^{j3\omega t} + 6e^{-j90^\circ}e^{j5\omega t}$$

Charakterystyka amplitudowa szeregu wykładniczego Fouriera opisującego funkcję $f(t)$ przedstawiona jest na rys. 6.4a, natomiast charakterystyka fazowa na rys. 6.4b.





Rys. 6.4 Charakterystyka amplitudowa (a) i fazowa (b) szeregu wykładniczego Fouriera opisującego funkcję $f(t)$ z przykładu

Częstotliwość zmienia się w zakresie od $-\infty$ do ∞ . Prążki amplitudowe i fazowe zostały rozłożone w sposób symetryczny w obu zakresach, przy czym charakterystyka amplitudowa jest funkcją parzystą a charakterystyka fazowa - nieparzystą. Energia sygnału ściśle związana z amplitudą została zatem rozdzielona na dwie równe części. Rzeczywista amplituda k -tej harmonicznej jest równa podwojonej wartości amplitudy k -tego prążka z zakresu dodatniego lub ujemnego.

6.1.3. Twierdzenie Parsevala

Rozpatrzmy dwie funkcje $f(t)$ i $g(t)$ o tym samym okresie T spełniające warunki Dirichleta. Przedstawmy je w postaci wykładniczej Fouriera

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{jk\omega t} \quad (6.20)$$

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k e^{jk\omega t} \quad (6.21)$$

w której pulsacja podstawowa ω jest określona poprzez okres funkcji $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Przy takich założeniach twierdzenie Parsevala można sformułować następująco.

Twierdzenie Parsevala

Jeśli funkcje $f(t)$ i $g(t)$ są okresowe o tym samym okresie T i obie spełniają warunki Dirichleta, to wartość średnia z iloczynu tych funkcji za okres określona jest zależnością

$$\overline{f(t)g(t)} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t)g(t)dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k g_k^* = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k f_k^* \quad (6.22)$$

w której f_k i g_k są współczynnikami rozwinięcia wykładniczego funkcji zadanych $f(t)$ i $g(t)$ a znak $*$ oznacza operację sprzężenia liczby zespolonej.

Twierdzenie Parsewala określa wartość średnią za okres iloczynu dwu funkcji okresowych $f(t)$ i $g(t)$ o tym samym okresie. Z twierdzenia wynika, że wartość średnią tworzą jedynie iloczyny składników rozkładu wykładniczego o tym samym rzędzie (częstotliwości). Składniki sumy pochodzące od iloczynów składowych różnego rzędu są równe zeru. W szczególnym przypadku gdy $f(t)=g(t)$ wzór Parsewala upraszcza się do postaci

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f^2(t)dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |f_k|^2 \quad (6.23)$$

gdyż mnożenie liczby zespolonej przez sprzężoną oznacza kwadrat modułu liczby zespolonej, $f_k f_k^* = |f_k|^2$. Ostatni wzór wiąże się bezpośrednio z obliczeniem wartości skutecznej przebiegu niesinusoidalnego, rozwiniętego w szereg Fouriera.

6.2. Wartość skuteczna napięcia i prądu niesinusoidalnego

W przypadku analizy obwodów o przebiegach niesinusoidalnych okresowych sygnał prądu i napięcia w obwodzie przedstawiany jest zwykle w postaci szeregu trygonometrycznego Fouriera

$$u(t) = U_0 + \sum_k U_{km} \sin(k\omega t + \psi_k) \quad (6.24)$$

$$i(t) = I_0 + \sum_k I_{km} \sin(k\omega t + \psi_k - \varphi_k) \quad (6.25)$$

w których U_{km} oraz I_{km} są amplitudami k -tej harmonicznej odpowiednio napięcia $u(t)$ i prądu $i(t)$. ψ_k jest fazą początkową k -tej harmonicznej napięcia a φ_k kątem przesunięcia fazowego k -tej harmonicznej prądu względem k -tej harmonicznej napięcia.

Korzystając z twierdzenia Parsewala można łatwo udowodnić, że wartość skuteczna przebiegu składającego się z sumy wielu harmonicznnych może być obliczona na podstawie

wartości skutecznych każdej harmoniczej z osobna. Biorąc pod uwagę zależność (6.23) i uwzględniając relację między wartością maksymalną i skuteczną można pokazać, że wartość skuteczna przebiegu niesinusoidalnego jest pierwiastkiem z sumy kwadratów wartości skutecznych poszczególnych harmoniczych. W przypadku napięcia i prądu opisanych zależnościami (6.24) i (6.25) wzory na moduł wartości skutecznej przyjmują wtedy postać

$$|U| = \sqrt{\sum_k |U_k|^2} = \sqrt{|U_0|^2 + |U_1|^2 + |U_2|^2 + \dots} \quad (6.26)$$

$$|I| = \sqrt{\sum_k |I_k|^2} = \sqrt{|I_0|^2 + |I_1|^2 + |I_2|^2 + \dots} \quad (6.27)$$

w której U_k oraz I_k oznaczają wartości skuteczne zespolone odpowiednio napięcia i prądu k -tej harmoniczej. Wartość skuteczna (moduł) napięcia i prądu niesinusoidalnego jest równa pierwiastkowi kwadratowemu z sumy kwadratów modułów wartości skutecznych zespolonych wszystkich harmoniczych oraz składowej stałej.

W przypadku wystąpienia w przebiegu wielu harmoniczych ważnym wskaźnikiem odkształcenia tego przebiegu od sinusoidy jest **współczynnik zawartości harmoniczych** h . Współczynnik ten definiuje się jako stosunek wartości skutecznej przebiegu $f(t)$ po usunięciu z niego składowej stałej i pierwszej harmoniczej do wartości skutecznej przebiegu po usunięciu z niego jedynie składowej stałej. Przy oznaczeniu wartości skutecznych odpowiednich harmoniczych przez F_k wzór na współczynnik zawartości harmoniczych można zapisać w postaci

$$h = \sqrt{\frac{|F_2|^2 + |F_3|^2 + |F_4|^2 + \dots}{|F_1|^2 + |F_2|^2 + |F_3|^2 + \dots}} \quad (6.28)$$

Jeśli badany przebieg zawiera jedynie składową podstawową (pierwszą) to jak łatwo zauważyć współczynnik zawartości harmoniczych jest równy zeru, co oznacza brak odkształcenia krzywej od postaci sinusoidalnej.

Innym wskaźnikiem często używanym w praktyce jest całkowite zniekształcenie harmoniczne (**THD** – Total Harmonic Distortion) definiowane wzorem

$$THD = \frac{\sqrt{\sum_{k \neq 1} |U_k|^2}}{|U_1|}$$

odnoszące zniekształcenie (pierwiastek z sumy kwadratów modułów wartości skutecznych wszystkich harmonicznym wyższych niż podstawowa) do wartości harmonicznej podstawowej.

6.3. Moc przy przebiegach niesinusoidalnych

Niezależnie od charakteru zmienności w czasie przebiegów prądu i napięcia moc chwilowa w obwodzie jest wyrażona tym samym wzorem $p(t)=u(t)i(t)$. Korzystając z tej zależności oraz uwzględniając twierdzenie Parsewala określającego wartość średnią z iloczynu dwu sygnałów niesinusoidalnych o tym samym okresie można udowodnić, że moc czynna P jako wartość średnia z iloczynu prądu i napięcia w obwodzie

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)i(t)dt \quad (6.29)$$

przy wystąpieniu wielu harmonicznym jest równa sumie mocy czynnych poszczególnych harmonicznym, włączając w to składową stałą

$$P = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} |U_k| |I_k| \cos \varphi_k \quad (6.30)$$

Analogicznie jak dla przebiegów sinusoidalnym również przy przebiegach odkształconym istnieje pojęcie mocy biernej, jako sumy mocy biernych pochodzących od poszczególnych harmonicznym, czyli

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} |U_k| |I_k| \sin \varphi_k \quad (6.31)$$

Analogicznie do obwodów z przebiegami sinusoidalnymi również dla przebiegów niesinusoidalnym wprowadza się pojęcie modułu mocy pozornej jako iloczynu wartości skutecznej napięcia odkształconego przez wartość skuteczną prądu odkształconego, czyli

$$|S| = |U| |I| = \sqrt{\sum_k |U_k|^2 \cdot \sum_k |I_k|^2} \quad (6.32)$$

Należy zaznaczyć, że tak zdefiniowana wielkość oznacza moduł mocy pozornej a nie moc pozorną zespoloną. Z porównania wzorów (6.30), (6.31) i (6.32) wynika, że w odróżnieniu od

przebiegów sinusoidalnych suma kwadratów mocy czynnej i mocy biernej nie jest równa kwadratowi mocy pozornej. Dla zachowania bilansu mocy wprowadza się w związku z tym nowy rodzaj mocy, zwanej mocą odkształcenia lub deformacji. Moc tę oznaczać będziemy literą D . Jej wartość musi być tak dobrana aby wszystkie rodzaje mocy bilansowały się. Przyjęto następujący związek między poszczególnymi rodzajami mocy

$$|S|^2 = P^2 + Q^2 + D^2 \quad (6.33)$$

Oznacza to, że moc deformacji definiuje równanie

$$D = \sqrt{|S|^2 - Q^2 - P^2} \quad (6.34)$$

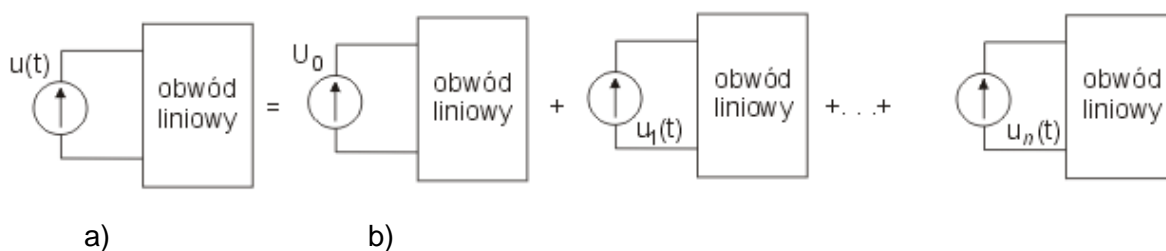
Stosunek mocy czynnej do mocy pozornej nazywamy, przez analogię do przebiegów sinusoidalnych, współczynnikiem mocy i określamy wzorem

$$\cos \nu = \frac{P}{|S|} \quad (6.35)$$

Współczynnik mocy obwodu przy wymuszeniu niesinusoidalnym tylko z definicji przypomina współczynnik mocy obwodu przy wymuszeniu harmonicznym. W rzeczywistości jego interpretacja jest pozbawiona sensu fizycznego jaką posiada $\cos \varphi$.

6.4. Metodyka rozwiązywania obwodów przy wymuszeniu niesinusoidalnym

W przypadku wystąpienia w obwodzie RLC wymuszenia niesinusoidalnego obliczenie odpowiedzi w stanie ustalonym musi uwzględnić fakt istnienia wielu harmonicznym (teoretycznie dowolnej ich liczby) różniących się częstotliwością. Załóżmy, że do obwodu RLC przyłożono okresowe napięcie niesinusoidalne $u(t)$ jak to przedstawiono na rys. rys. 6.5.



Rys. 6.5. Ilustracja zastosowania zasady superpozycji przy rozwiązywaniu obwodów o wymuszeniu napięciowym niesinusoidalnym: a) obwód o wymuszeniu niesinusoidalnym, b) superpozycja obwodów o wymuszeniach sinusoidalnych

Napięcie to można przedstawić w sposób przybliżony za pomocą skończonej sumy n harmoniczných

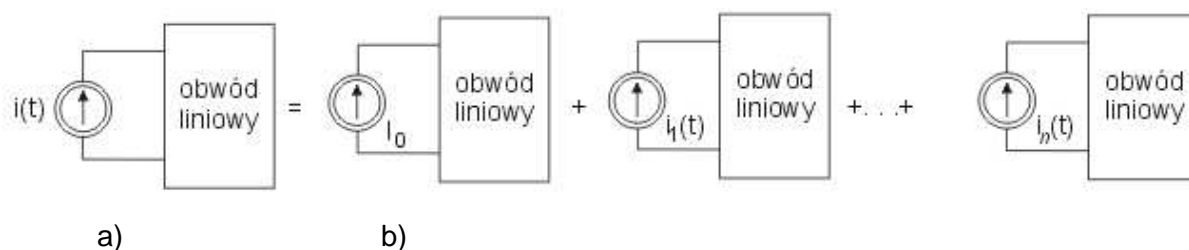
$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^n U_{km} \sin(k\omega t + \psi_k) = U_0 + u_1(t) + u_2(t) + u_3(t) + \dots + u_n(t) \quad (6.36)$$

w której n jest największą wartością harmoniczną uwzględnioną w rozwinięciu Fouriera. Wobec liniowości obwodu można zastosować zasadę superpozycji i obliczyć prądy od poszczególnych źródeł oddzielnie (rys. 6.5b). Przy wymuszeniu typu napięciowego źródła eliminowane z obwodu zwiera się.

W przypadku wystąpienia w obwodzie źródeł wymuszających prądowych

$$i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^n I_{km} \sin(k\omega t + \psi_k) = I_0 + i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) + \dots + i_n(t) \quad (6.37)$$

postępuje się podobnie, analizując obwód dla każdej harmoniczných oddzielnie (rys. 6.6). Ponieważ źródła harmoniczných typu prądowego są połączone równolegle eliminacja danego źródła polega na rozwarciu jego zacisków.



Rys. 6.6 Ilustracja zastosowania zasady superpozycji przy rozwiązywaniu obwodów o wymuszeniu prądowym niesinusoidalnym: a) obwód o wymuszeniu niesinusoidalnym, b) superpozycja obwodów o wymuszeniach sinusoidalnych

Należy przy tym pamiętać, że każde źródło sinusoidalne występujące w superpozycji ma inną częstotliwość, będącą wielokrotnością częstotliwości podstawowej i wynoszącą

$\omega_k = k\omega$. Ponieważ zarówno reaktancja pojemnościowa $X_C^{(k)}$ jak i indukcyjna $X_L^{(k)}$ jest funkcją częstotliwości, zatem reaktancje te dla harmonicznej rzędu k wynoszą odpowiednio

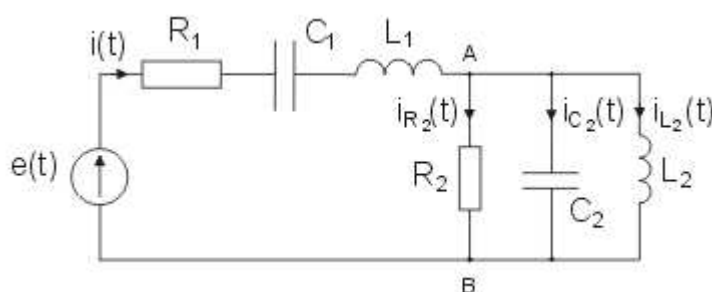
$$X_L^{(k)} = k\omega L = kX_L \quad (6.38)$$

$$X_C^{(k)} = 1/k\omega C = X_C / k \quad (6.39)$$

gdzie $X_L = \omega L$ jest reaktancją indukcyjną dla składowej harmonicznej podstawowej a $X_C = 1/\omega C$ - reaktancją pojemnościową dla harmonicznej podstawowej. Dla każdej harmonicznej wymuszenia należy przeprowadzić oddzielną analizę odpowiedniego obwodu przy zastosowaniu jednej z poznanych wcześniej metod (metoda praw Kirchhoffa, oczkowa, węzłowa, Thevenina itp.). Wynikiem analizy są wartości prądów i napięć poszczególnych gałęzi obwodu oraz odpowiednie moce: czynna i bierna dla każdej harmonicznej. Po wyznaczeniu odpowiedzi dla każdej harmonicznej oddzielnie należy wyznaczyć wypadkowe wartości skuteczne odpowiednich prądów i napięć oraz mocy według wzorów podanych wcześniej w tym wykładzie. Sposób postępowania przy analizie obwodów z przebiegami niesinusoidalnymi zostanie zilustrowany na przykładzie.

Przykład 6.3

Rozważmy schemat obwodu poddanego analizie przedstawiony na rys. 6.6. Przyjmijmy następujące wartości liczbowe parametrów obwodu: $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $L_1 = 1H$, $L_2 = 2H$, $C_1 = 1/4F$, $C_2 = 1/2F$. Wymuszenie napięciowe $e(t)$ opisane jest sumą harmonicznych $e(t) = 10 + 20\sqrt{2}\sin(\omega t) + 10\sqrt{2}\sin(2\omega t)V$, przy czym $\omega = 1\text{rad/s}$. Wyznaczyć wartości skuteczne prądów oraz moce w obwodzie.



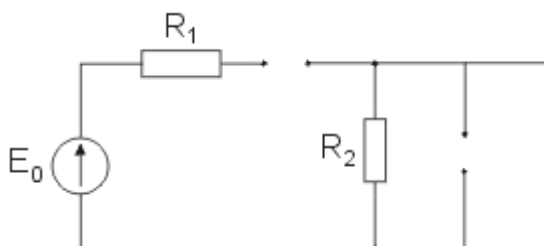
Rys. 6.7. Schemat obwodu do przykładu 6.3

Rozwiązanie

Ze względu na istnienie w wymuszeniu trzech harmoniczných należy dokonać trzech analiz obwodu, za każdym razem zakładając jedno wymuszenie i eliminując pozostałe (wobec wymuszenia napięciowego źródła eliminowane ulegają zwarceniu).

- *Harmoniczna zerowa (składowa stała)*

Harmoniczna zerowa przedstawia sobą wymuszenie stałe (częstotliwość wymuszenia zerowa: $\omega=0$). Oznacza to, że w tym przypadku impedancje cewek są równe zero ($Z_L=j\omega L=0$) a impedancje kondensatorów równe nieskończoności ($Z_C=1/(j\omega C)=\infty$). Obwód dla harmoniczných zerowój przedstawiony jest na rys. 6.8 (wszystkie cewki zwarte, kondensatory rozwarte).



Rys. 6.8 Postać obwodu dla harmoniczných zerowój (składowój stałej)

Wobec przerwy w obwodzie prąd składowój stałej nie może płynąć, stąd $i^{(0)} = 0$ oraz $S^{(0)} = 0$, $u_{C1}^{(0)} = E_0 = 10$. Pozostałe prądy i napięcia w obwodzie są zerowe. Wszystkie moce obwodu wobec zerowój wartości prądów są także równe zero.

- *Harmoniczna podstawowój*

Schemat obwodu dla harmoniczných podstawowój jest identyczny ze schematem ogólnym przedstawionym na rys. 6.7, z tym, że zamiast napięcia $e(t)$ uwzględnionój jest składowój podstawowój $e_1(t) = 20\sqrt{2} \sin(\omega t)$. Przy jednostkowój pulsacji wymuszenia $\omega=1$ reaktancje indukcyjnój i pojemnościowój obwodu dla harmoniczných podstawowój są odpowiednio równe:

$$X_{L1}^{(1)} = \omega L_1 = 1$$

$$X_{L2}^{(1)} = \omega L_2 = 2$$

$$X_{C1}^{(1)} = 1/\omega C_1 = 4$$

$$X_{C2}^{(1)} = 1/\omega C_2 = 2$$

Impedancja połączenia równoległego elementów jest równa $Z_r = R_2 = 2$ (rezonans równoległy elementów). Kolejne obliczenia można przedstawić w następującej formie:

$$I^{(1)} = \frac{20}{1 + j1 - j4 + 2} = 4,7e^{j45^\circ} = I_{R2}^{(1)}$$

$$U_{AB}^{(1)} = R_2 I^{(1)} = 9,4e^{j45^\circ}$$

$$I_{L2}^{(1)} = \frac{U_{AB}^{(1)}}{jX_{L2}} = 4,7e^{-j45^\circ}$$

$$I_{C2}^{(1)} = \frac{U_{AB}^{(1)}}{-jX_{C2}} = -4,7e^{-j45^\circ}$$

$$S^{(1)} = E_1 I^{(1)*} = 20 \cdot 4,7e^{-j45^\circ} = 66,7 - j66,7$$

- *Harmoniczna druga*

Harmoniczna druga reprezentuje sobą również wymuszenie sinusoidalne o częstotliwości dwukrotnie większej niż częstotliwość podstawowa. Schemat obwodu dla tej harmonicznej jest identyczny ze schematem ogólnym obwodu przedstawionym na rys. 6.7, z tym, że zamiast napięcia $e(t)$ przyłożona jest jego druga składowa $e_2(t) = 10\sqrt{2}\sin(2\omega t)$. Przy pulsacji wymuszenia harmonicznej drugiej $\omega_2 = 2\omega = 2$, reaktancje indukcyjna i pojemnościowa dla harmonicznej drugiej są równe:

$$X_{L1}^{(2)} = \omega_2 L_1 = 2$$

$$X_{L2}^{(2)} = \omega_2 L_2 = 4$$

$$X_{C1}^{(2)} = 1/\omega_2 C_1 = 2$$

$$X_{C2}^{(2)} = 1/\omega_2 C_2 = 1$$

Impedancja połączenia równoległego elementów jest teraz równa $Z_r = \frac{1}{Y_r}$, gdzie

$$Y_r = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{jX_{L2}^{(2)}} + \frac{1}{-jX_{C2}^{(2)}} = 0,5 + j0,75.$$

Stąd

$$Z_r = 1,1e^{-j56^\circ}.$$

Kolejność dalszych obliczeń w obwodzie jest następująca:

$$I^{(2)} = \frac{10}{1 + j2 - j2 + 1,1e^{-j56^\circ}} = 5,37e^{j29,6^\circ}$$

$$U_{AB}^{(2)} = Z_r I^{(2)} = 5,97e^{-j26^\circ}$$

$$I_{L2}^{(2)} = \frac{U_{AB}^{(2)}}{jX_{L2}^{(2)}} = 1,49e^{-j116^\circ}$$

$$I_{C2}^{(2)} = \frac{U_{AB}^{(2)}}{-jX_{C2}^{(2)}} = 5,97e^{j64^\circ}$$

$$I_{R2}^{(2)} = \frac{U_{AB}^{(2)}}{R_2} = 2,98e^{-j26^\circ}$$

$$S^{(2)} = E_2 I^{(2)*} = 10 \cdot 5,37e^{-j29,6^\circ} = 46,7 - j26,5$$

Wartości skuteczne prądów w obwodzie są równe:

$$|I| = \sqrt{4,7^2 + 5,37^2} = 7,13A,$$

$$|I_{R2}| = \sqrt{4,7^2 + 2,98^2} = 5,57A$$

$$|I_{L2}| = \sqrt{4,7^2 + 1,49^2} = 4,93A$$

$$|I_{C2}| = \sqrt{4,7^2 + 5,97^2} = 7,62A$$

Wartość skuteczna napięcia źródła jest równa

$$|E| = \sqrt{10^2 + 20^2 + 10^2} = 24,5V$$

Moc pozorna (moduł) wydawana przez źródło jest równa

$$S = |E||I| = 174,65VA$$

Całkowita moc czynna i bierna wydana przez źródło są równe odpowiednio

$$P = P^{(0)} + P^{(1)} + P^{(2)} = 66,7 + 46,7 = 113,4W$$

oraz

$$Q = Q^{(1)} + Q^{(2)} = -66,7 - 26,5 = -93,2var$$

Moc odkształcenia

$$D = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2} = \sqrt{174,65^2 - 113,4^2 - 93,2^2} = 94,64VA$$

W obwodzie powstała bardzo duża moc odkształcenia. Wytlumaczeniem tego faktu jest występowanie zjawiska rezonansu zarówno dla harmonicznej podstawowej (cewka druga i kondensator drugi) jak i dla harmonicznej drugiej (cewka pierwsza i kondensator pierwszy). Moc bierna wypadkowa w elementach reaktancyjnych w stanie rezonansu jest zerowa co pomniejsza moc bierną całego obwodu dla tych harmonicznych. Z drugiej strony wszystkie harmoniczne tworzą wartości skuteczne zarówno prądu jak i napięcia, stąd ich iloczyn tworzący moduł mocy pozornej przyjmuje dużą wartość. W bilansie mocy wpływa to na znaczne zwiększenie mocy deformacji.

Ćwiczenia

Ćwiczenie 6.1

Przedstawić funkcję

$$f(t) = 10 + 20 \sin(\omega t) + 16 \cos(5\omega t) + 8 \cos(7\omega t)$$

w postaci wykładniczej szeregu Fouriera.

Rozwiązanie

Z definicji funkcji sinus i cosinus wynika następująca zależność

$$f(t) = 10 + 20 \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} + 16 \frac{e^{j5\omega t} + e^{-j5\omega t}}{2} + 8 \frac{e^{j7\omega t} + e^{-j7\omega t}}{2}$$

Stąd postać wykładnicza szeregu Fouriera dana jest zależnością

$$f(t) = 4e^{-j7\omega t} + 8e^{-j5\omega t} + 10e^{j90^\circ} e^{-j\omega t} + 10 + 10e^{-j90^\circ} e^{j\omega t} + 8e^{j5\omega t} + 4e^{j7\omega t}$$

Ćwiczenie 6.2

Zapisać twierdzenie Parsevala dla dwu przebiegów czasowych danych w następującej postaci

$$f(t) = 5 + 10\sin(\omega t) + 16\cos(2\omega t) + 12\cos(3\omega t)$$

$$g(t) = 2 + 8\sin(\omega t) + 10\cos(2\omega t) + 12\cos(5\omega t)$$

Rozwiązanie

Z definicji funkcji sinus i cosinus otrzymuje się następujące postaci wykładnicze szeregu Fouriera dla obu funkcji

$$f(t) = 5 + 10 \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} + 16 \frac{e^{j2\omega t} + e^{-j2\omega t}}{2} + 12 \frac{e^{j3\omega t} + e^{-j3\omega t}}{2}$$

$$f(t) = 6e^{-j3\omega t} + 8e^{-j2\omega t} + 5e^{j90^\circ} e^{-j\omega t} + 5 + 5e^{-j90^\circ} e^{j\omega t} + 8e^{j2\omega t} + 6e^{j3\omega t}$$

$$g(t) = 2 + 8 \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} + 10 \frac{e^{j2\omega t} + e^{-j2\omega t}}{2} + 12 \frac{e^{j5\omega t} + e^{-j5\omega t}}{2}$$

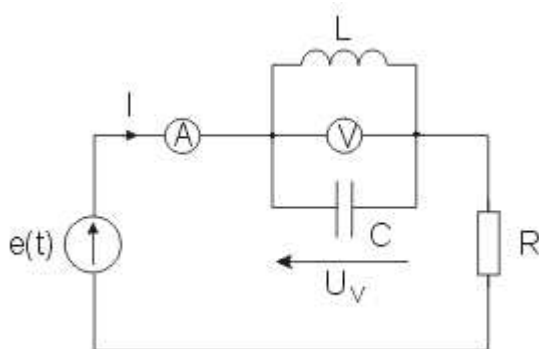
$$g(t) = 6e^{-j5\omega t} + 5e^{-j2\omega t} + 4e^{j90^\circ} e^{-j\omega t} + 2 + 4e^{-j90^\circ} e^{j\omega t} + 5e^{j2\omega t} + 6e^{j5\omega t}$$

Działania określone twierdzeniem Parsevala przyjmą więc postać

$$\overline{f(t)g(t)} = 5 \cdot 2 + 5e^{j90^\circ} \cdot 4e^{-j90^\circ} + 8 \cdot 5 + 6 \cdot 0 + 0 \cdot 6 + 5e^{-j90^\circ} \cdot 4e^{j90^\circ} + 8 \cdot 5 + 6 \cdot 0 + 0 \cdot 6 = 130$$

Ćwiczenie 6.3

Wyznaczyć wskazania przyrządów pomiarowych w obwodzie z rys. 6.9.



Rys. 6.9 Schemat obwodu do zadania 6.3

Przyjąć następującą postać wymuszenia $e(t) = 10 + 20\sqrt{2} \sin(t) + 15\sqrt{2} \sin(2t)$. Wartości parametrów obwodu są następujące: $R=2\Omega$, $L=0,5H$, $C=0,5F$.

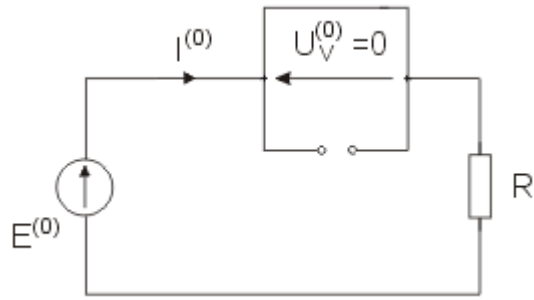
Uwaga: Woltomierze i amperomierze włączone w obwodzie mierzą moduły wartości skutecznych zespolonych odpowiednio napięcia i prądu.

Rozwiązanie

Ponieważ wymuszenie zawiera trzy harmoniczne, należy rozwiązać obwód trzy razy dla każdego wymuszenia oddzielnie.

- *Harmoniczna zerowa (składowa stała)*

Obwód dla składowej stałej $E^{(0)} = 10$ przedstawiony jest na rys. 6.10 (cewka zwarta, kondensator przerwa)



Rys. 6.10. Obwód dla harmonicznej zerowej

$$I^{(0)} = \frac{E^{(0)}}{R} = 5$$

$$U_V^{(0)} = 0$$

- *Harmoniczna podstawowa ($\omega = 1$)*

Kolejność obliczeń jest następująca:

$$E^{(1)} = 20$$

$$Z_L^{(1)} = j\omega L = j0,5$$

$$Z_C^{(1)} = -j / \omega C = -j2$$

$$Z_{LC}^{(1)} = \frac{j0,5(-j2)}{-j1,5} = j0,667$$

$$I^{(1)} = \frac{E^{(1)}}{Z_{LC}^{(1)} + R} = 9 - j3$$

$$U_V^{(1)} = Z_{LC}^{(1)} I^{(1)} = 2 + j6$$

- *Harmoniczna druga ($\omega = 2$)*

Kolejność obliczeń jest następująca:

$$E^{(2)} = 15$$

$$Z_L^{(2)} = j\omega L = j1$$

$$Z_C^{(2)} = -j / \omega C = -j1$$

$$Z_{LC}^{(2)} = \infty$$

$$I^{(2)} = 0$$

$$U_V^{(2)} = 15$$

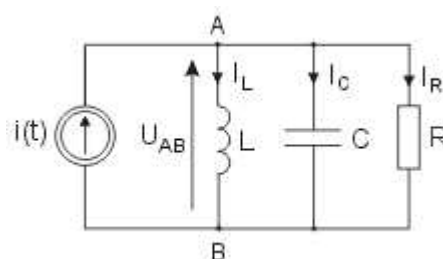
Wskazania amperomierza i woltomierza (moduły odpowiednich wielkości) są równe:

$$|I| = \sqrt{|I^{(0)}|^2 + |I^{(1)}|^2 + |I^{(2)}|^2} = 10.72 \text{ A}$$

$$|U_V| = \sqrt{|U_V^{(0)}|^2 + |U_V^{(1)}|^2 + |U_V^{(2)}|^2} = 16,28 \text{ V}$$

Ćwiczenie 6.4

Wyznaczyć prądy oraz moce: czynną, bierną, pozorną i odkształcenia źródła prądowego w obwodzie przedstawionym na rys. 6.11.



Rys. 6.11 Schemat obwodu do zadania 6.4

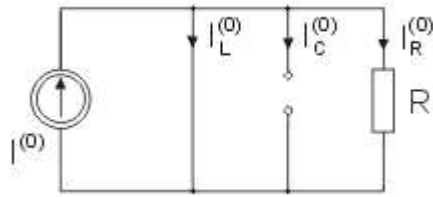
W obwodzie występuje wymuszenie prądowe $i(t)$ dane w następującej postaci $i(t) = 5 + 2\sqrt{2} \sin(t) + \sqrt{2} \sin(3t)$. Przyjąć wartości parametrów: $R=5\Omega$, $L=1\text{H}$, $C=1/9\text{F}$.

Rozwiązanie

Ze względu na występowanie w wymuszeniu trzech harmonicznnych należy zastosować superpozycję źródeł. Zgodnie z tą metodą obliczamy kolejno.

- *Harmoniczna zerowa (składowa stała)*

Obwód dla harmonicznnej zerowej przedstawiony jest na rysunku 6.12 (cewka zwarta, kondensator przerwa).



Rys. 6.12 Schemat obwodu dla harmonicznej zerowej

$$I^{(0)} = 5$$

$$I_L^{(0)} = I^{(0)} = 5$$

$$I_R^{(0)} = I_C^{(0)} = 0$$

$$U_{AB}^{(0)} = 0$$

$$S^{(0)} = U_{AB}^{(0)} I^{(0)} = 0$$

- *Harmoniczna podstawowa ($\omega = 1$)*

Kolejność obliczeń jest następująca:

$$I^{(1)} = 2$$

$$Z_L^{(1)} = j\omega L = j1$$

$$Z_C^{(1)} = -j / \omega C = -j9$$

$$Y_{RLC}^{(1)} = \frac{1}{5} + \frac{1}{j1} + \frac{1}{-j9} = 0,2 - j0,89$$

$$U_{AB}^{(1)} = \frac{I^{(1)}}{Y_{RLC}^{(1)}} = 0,48 + j2,14$$

$$I_L^{(1)} = \frac{U_{AB}^{(1)}}{Z_L^{(1)}} = 2,14 - j0,48$$

$$I_C^{(1)} = \frac{U_{AB}^{(1)}}{Z_C^{(1)}} = -0,24 + j0,053$$

$$I_R^{(1)} = \frac{U_{AB}^{(1)}}{R} = 0,096 + j0,43$$

$$S^{(1)} = U_{AB}^{(1)} I^{(1)*} = 0,96 + j4,28$$

- *Harmoniczna trzecia ($\omega = 3$)*

Kolejność obliczeń jest następująca:

$$I^{(3)} = 1$$

$$Z_L^{(3)} = j\omega L = j3$$

$$Z_C^{(3)} = -j / \omega C = -j3$$

$$Z_{RLC}^{(3)} = R = 5 \text{ (rezonans prądów)}$$

$$U_{AB}^{(3)} = RI^{(3)} = 5$$

$$I_L^{(3)} = \frac{U_{AB}^{(3)}}{Z_L^{(3)}} = -j5/3$$

$$I_C^{(3)} = \frac{U_{AB}^{(3)}}{Z_C^{(3)}} = j5/3$$

$$I_R^{(3)} = \frac{U_{AB}^{(3)}}{R} = 1$$

$$S^{(3)} = U_{AB}^{(3)} I^{(3)*} = 5 + j0$$

Wartości skuteczne prądów i napięć są następujące:

$$|I| = \sqrt{|I^{(0)}|^2 + |I^{(1)}|^2 + |I^{(3)}|^2} = 5,48 \text{ A}$$

$$|I_R| = \sqrt{|I_R^{(0)}|^2 + |I_R^{(1)}|^2 + |I_R^{(3)}|^2} = 1,09 \text{ A}$$

$$|I_L| = \sqrt{|I_L^{(0)}|^2 + |I_L^{(1)}|^2 + |I_L^{(3)}|^2} = 5,70 \text{ A}$$

$$|I_C| = \sqrt{|I_C^{(0)}|^2 + |I_C^{(1)}|^2 + |I_C^{(3)}|^2} = 1,68 \text{ A}$$

$$|U_{AB}| = \sqrt{|U_{AB}^{(0)}|^2 + |U_{AB}^{(1)}|^2 + |U_{AB}^{(3)}|^2} = 5,46 \text{ V}$$

Moce w wydzielone przez źródło w obwodzie:

$$|S| = |U_{AB}| |I| = 29,90 \text{ VA}$$

$$P = P^{(0)} + P^{(1)} + P^{(3)} = 5,96 \text{ W}$$

$$Q = Q^{(0)} + Q^{(1)} + Q^{(3)} = 4,28 \text{ var}$$

$$D = \sqrt{|S|^2 - P^2 - Q^2} = 28,99 \text{ VA}$$

Zadania sprawdzające

Zadanie 6.1

Korzystając z twierdzenia Parsevala wyznaczyć wartość średnią z iloczynu $f(t)$ i $g(t)$

$$f(t) = 5 + 10\cos(\omega t) + 12\sin(2\omega t)$$

$$g(t) = 14 + 8\cos(\omega t + 45^\circ) + 6\sin(2\omega t - 45^\circ)$$

Rozwiązanie

$$\overline{f \cdot g} = 123,4$$

Zadanie 6.2

Korzystając z twierdzenia Parsevala wyznaczyć wartość średnią z iloczynu $f(t)$ i $g(t)$

$$f(t) = 10 + 8\cos(\omega t + 30^\circ) + 10\cos(3\omega t)$$

$$g(t) = 5 + 6\cos(\omega t) + 4\sin(3\omega t + 45^\circ)$$

Rozwiązanie

$$\overline{f \cdot g} = 84.93$$

Zadanie 6.3

Korzystając z twierdzenia Parsevala wyznaczyć wartość średnią z iloczynu $f(t)$ i $g(t)$

$$f(t) = 12 + 14\cos(\omega t - 45^\circ) + 20\sin(2\omega t)$$

$$g(t) = 5 + 10\cos(\omega t) + 8\sin(2\omega t - 30^\circ)$$

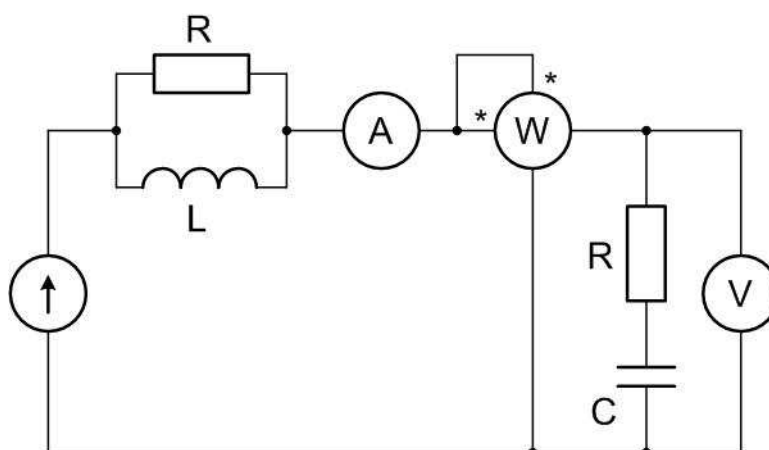
Rozwiązanie

$$\overline{f \cdot g} = 178.78$$

Zadanie 6.4

Wyznaczyć wskazania przyrządów oraz sporządzić bilans mocy w obwodzie przedstawionym na rys. 6.13. Przyjąć następujące wartości elementów:

$$e(t) = 10 + 20\sqrt{2}\sin(\omega t)V, \quad \omega = 1\frac{rad}{s}, \quad L = 1H, \quad C = 1F, \quad R = 1\Omega.$$



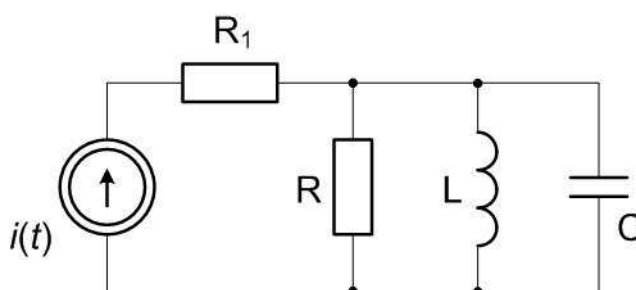
Rys. 6.13. Schemat obwodu do zadania 6.4

Rozwiązanie

$$|I| = 12.65, P = 160W, |V| = 20.54$$

Zadanie 6.5

Wyznaczyć moduły wartości skutecznych prądów oraz obliczyć wszystkie rodzaje mocy wydawanej przez źródło w obwodzie przedstawionym na rys. 6.14. Przyjąć następujące wartości elementów: $i(t) = 5 + 2\sqrt{2} \sin(\omega t + 90^\circ)A$, $\omega = 1 \frac{rad}{s}$, $L = 10H$, $C = 0.2F$, $R_1 = 5\Omega$, $R = 5\Omega$.



Rys. 6.14. Schemat obwodu do zadania 6.5

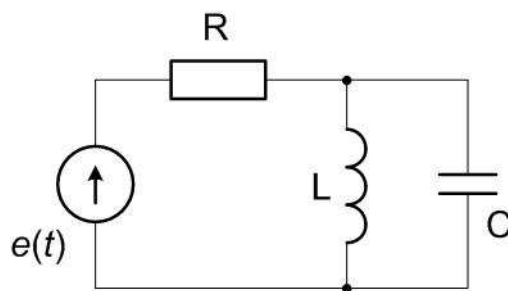
Rozwiązanie

$$|I_R| = 1.79, |I_{R1}| = 5.39, |I_L| = 5.08, |I_C| = 1.79, P = 161, Q = -8, |S| = 167, D = 44.72$$

Zadanie 6.6

Wyznaczyć moduły wartości skutecznych prądów oraz wszystkie rodzaje mocy źródła w obwodzie przedstawionym na rys. 6.15. Przyjąć następujące wartości elementów:

$$e(t) = 10 + 20\sqrt{2} \sin(\omega t)V, \omega = 1 \frac{rad}{s}, L = 1H, C = 0.5F, R = 2\Omega.$$



Rys. 6.15. Schemat obwodu do zadania 6.6

Rozwiązanie

$$|I_R| = 8.66, |I_L| = 14.31, |I_C| = 7.07, P = 150W, Q = 100 \text{ var}, |S| = 193.65, D = 70.71$$

Test do wykładu 6

- 1) Widmo częstotliwościowe sygnału okresowego jest
 - a) ciągłe
 - xb) dyskretne
 - c) może zawierać skończoną liczbę harmoniczných
 - d) zawsze zawiera nieskończoną liczbę harmoniczných
- 2) W rozkładzie na szereg Fouriera sygnału prostokątnego występują jedynie harmoniczne:
 - a) parzyste
 - b) nieparzyste
 - xc) mogą wystąpić harmoniczne zarówno parzyste jak i nieparzyste
 - d) wszystkie harmoniczne z wyjątkiem składowej stałej.
- 3) Sygnał $x(t)$ dany jest wzorem: $x(t) = 10\cos(\omega t - 30^\circ)$. Jego reprezentacja wykładnicza opisana jest wzorem
 - a) $x(t) = 5e^{j30^\circ} e^{j\omega t} + 5e^{-j30^\circ} e^{-j\omega t}$
 - xb) $x(t) = 5e^{-j30^\circ} e^{j\omega t} + 5e^{j30^\circ} e^{-j\omega t}$
 - c) $x(t) = 10e^{-j30^\circ} e^{j\omega t} + 10e^{j30^\circ} e^{-j\omega t}$
 - d) $x(t) = 5e^{j30^\circ} e^{j\omega t} - 5e^{-j30^\circ} e^{-j\omega t}$
- 4) Sygnał $x(t)$ dany jest wzorem: $x(t) = 10\sin(\omega t + 60^\circ)$. Jego reprezentacja wykładnicza opisana jest wzorem
 - a) $x(t) = 5e^{j30^\circ} e^{j\omega t} + 5e^{-j30^\circ} e^{-j\omega t}$
 - xb) $x(t) = 5e^{-j30^\circ} e^{j\omega t} + 5e^{j30^\circ} e^{-j\omega t}$
 - c) $x(t) = 5e^{j60^\circ} e^{j\omega t} + 5e^{-j60^\circ} e^{-j\omega t}$
 - d) $x(t) = 10e^{-j30^\circ} e^{j\omega t} + 10e^{j30^\circ} e^{-j\omega t}$
- 5) Dwa sygnały $x(t)$ oraz $y(t)$ opisane są wzorami: $x(t) = 5 + 10\cos(\omega t + 60^\circ) + 6\cos(3\omega t)$, $y(t) = 8 + 12\cos(\omega t + 30^\circ) + 20\sin(3\omega t)$. Ile wynosi wartość średnia ich iloczynu za okres?
 - a) $\overline{x(t)y(t)} = 100$

xb) $\overline{x(t)y(t)} = 91,96$

c) $\overline{x(t)y(t)} = 121,8$

d) $\overline{x(t)y(t)} = 280$

- 6) Obwód LC zasilany jest ze źródła niesinusoidalnego $e(t)=10\sin(2t)+5\sin(4t+30^\circ)$. Ile wynoszą reaktancje cewki $L=0,5H$ i kondensatora $C=0,1F$ dla tych harmonicznych?

xa) $X_L(2)=1\Omega$, $X_C(2)=5\Omega$, $X_L(4)=2\Omega$, $X_C(2)=2,5\Omega$

b) $X_L(2)=1\Omega$, $X_C(2)=5\Omega$, $X_L(4)=0,5\Omega$, $X_C(2)=10\Omega$

c) $X_L(2)=1\Omega$, $X_C(2)=5\Omega$, $X_L(4)=1\Omega$, $X_C(2)=5\Omega$

d) $X_L(2)=0,5\Omega$, $X_C(2)=10\Omega$, $X_L(4)=1\Omega$, $X_C(2)=5\Omega$

- 7) Sygnał $x(t)$ dany jest wzorem: $x(t)=10+40\sin(\omega t+60^\circ)+20\sin(3\omega t)$. Ile wynosi jego wartość skuteczna?

xa) $|X| = 33,166 \Omega$

b) $|X| = 45,826 \Omega$

c) $|X| = 70 \Omega$

d) $|X| = 70/3 \Omega$

- 8) Prąd i napięcie źródła zasilającego obwód opisane są wyrażeniem $u(t)=5+50\sin(\omega t+60^\circ)+10\sin(3\omega t)$, $i(t)=2+5\sin(\omega t+60^\circ)+4\sin(3\omega t+30^\circ)$. Ile wynosi moc czynna całkowita wydawana przez to źródło?

a) $P=189,2W$

xb) $P=152,3W$

c) $P=135W$

d) $P=294,6W$

- 9) Prąd i napięcie źródła zasilającego obwód opisane są wyrażeniem $u(t)=5+50\sin(\omega t+60^\circ)+10\sin(3\omega t)$, $i(t)=2+5\sin(\omega t+60^\circ)+4\sin(3\omega t+30^\circ)$. Ile wynosi moc bierna całkowita wydawana przez to źródło?

a) $Q=20var$

b) $Q=10var$

xc) $Q=-10var$

d) $Q=0$

- 10) Prąd i napięcie źródła zasilającego obwód opisane są wyrażeniem $u(t)=5+50\sin(\omega t+60^\circ)+10\sin(3\omega t)$, $i(t)=5\sin(\omega t+60^\circ)+4\sin(3\omega t+30^\circ)$. Ile wynoszą poszczególne moce: P , Q , $|S|$, D ?

xa) $P = 142,3W$ $Q = -10var$ $|S| = 164,9VA$ $D = 82,7VA$

b) $P = 152,3W$ $Q = 10var$ $|S| = 164,9VA$ $D = 82,7VA$

c) $P = 142,3W$ $Q = 10var$ $|S| = 164,9VA$ $D = 82,7VA$

d) $P = 142,3W$ $Q = 20var$ $|S| = 164,9VA$ $D = 80,9VA$