

Wykład 9. Zastosowanie metody operatorowej Laplace'a w analizie stanów nieustalonych

Wstęp

Opis obwodów elektrycznych w stanie nieustalonym poprzez układ równań różniczkowych jest wygodną formą analizy przy zastosowaniu metod numerycznych. W przypadku analizowania zjawisk zachodzących w tych obwodach z zastosowaniem metod analitycznych metoda ta jest żmudna przy dużej liczbie elementów indukcyjnych i pojemnościowych i stąd jej zastosowanie ograniczone jest praktycznie do rzędu $n=2$. W takich przypadkach znacznie wygodniejsze jest zastosowanie metod operatorowych, z których najważniejsza to metoda operatorowa Laplace'a. Rachunek operatorowy jako alternatywa do metody klasycznej polega na algebraizacji równań różniczkowych opisujących dany obwód. W ten sposób układ równań różniczkowych zostaje zastąpiony układem równań algebraicznych typu funkcyjnego.

Zastosowanie przekształcenia Laplace'a upraszcza operację rozwiązywania równań różniczkowych zastępując ją rozwiązaniem układu równań algebraicznych. Istota przekształcenia Laplace'a polega na tym, że każdej funkcji czasu $f(t)$ określonej dla $t > 0$ odpowiada pewna funkcja $F(s)$ określona w dziedzinie liczb zespolonych i odwrotnie, każdej funkcji $F(s)$ odpowiada określona funkcja czasu $f(t)$.

W wykładzie tym przedstawimy metodykę stosowania transformacji Laplace'a do rozwiązania stanów nieustalonych w obwodzie elektrycznym RLC bezpośrednio na podstawie struktury obwodu bez stosowania równań różniczkowych. Podamy modele operatorowe rezystora, cewki i kondensatora. Zostanie wprowadzona metoda superpozycji stanów ustalonego i przejściowego rozdziałająca analizę obwodu w stanie ustalonym po przełączeniu od analizy w stanie przejściowym. W szczególności zostanie przedstawiona analiza stanu nieustalonego w obwodzie szeregowym RLC. W zależności od wartości rezystancji mogą powstać trzy przypadki rozwiązania: przypadek oscylacyjny, gdy aktualna rezystancja obwodu jest mniejsza od krytycznej, przypadek aperiodyczny krytyczny, gdy ta rezystancja jest równa rezystancji krytycznej oraz przypadek aperiodyczny, gdy rezystancja obwodu jest większa od krytycznej. Szczególnie interesujący jest przypadek oscylacyjny, w którym przy zasilaniu obwodu napięciem stałym powstają drgania sinusoidalne o tłumionej amplitudzie. Przy rezystancji równej zero w obwodzie powstają drgania sinusoidalne niegasnące.

9.1 Rachunek operatorowy Laplace'a

Zastosowanie przekształcenia Laplace'a upraszcza operację rozwiązywania równań różniczkowych zastępując ją rozwiązaniem układu równań algebraicznych. Istota przekształcenia Laplace'a polega na tym, że każdej funkcji czasu $f(t)$ określonej dla $t > 0$ odpowiada pewna funkcja $F(s)$ określona w dziedzinie liczb zespolonych i odwrotnie, każdej funkcji $F(s)$ odpowiada określona funkcja czasu $f(t)$. Funkcję $f(t)$ nazywamy **oryginałem** i oznaczamy małą literą. Funkcję $F(s)$ nazywamy **transformatą** określoną w dziedzinie zmiennej zespolonej s i oznaczamy dużą literą. Zmienna s jest nazywana **częstotliwością zespoloną**, przy czym $s = \sigma + j\omega$, gdzie ω oznacza pulsację.

W elektrotechnice najczęściej używane jest jednostronne przekształcenie Laplace'a, określone parą równań:

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (9.1)$$

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi \cdot j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st} ds \quad (9.2)$$

w których c jest bliżej nieokreśloną stałą warunkującą położenie granic całkowania w obszarze zbieżności transformaty. Pierwsze z równań definiuje **proste przekształcenie** Laplace'a przyporządkowujące oryginałowi transformatę zmiennej zespolonej s , a drugie **przekształcenie odwrotne** dokonujące transformacji odwrotnej, czyli wyznaczające funkcję oryginału na podstawie $F(s)$. Zakładamy przy tym, że funkcja $f(t)$ jest funkcją czasu, zadaną dla $t > 0$ i równą 0 dla $t < 0$ oraz, że nie rośnie szybciej niż funkcja wykładnicza. Proste przekształcenie Laplace'a określone wzorem (9.1) dokonuje transformacji funkcji czasu $f(t)$ na funkcję $F(s)$ zmiennej zespolonej s . Przekształcenie odwrotne określone wzorem (9.2) dokonuje transformacji funkcji zespolonej $F(s)$ na funkcję czasu $f(t)$. Wzór ten pełni jedynie rolę definicji i w praktyce nie używa się go do wyznaczania transformaty odwrotnej, wykorzystując w zamian własności transformat Laplace'a.

9.1.1 Podstawowe własności przekształcenia Laplace'a.

Z wielu istniejących własności przekształcenia Laplace'a ograniczymy się tutaj do kilku podstawowych, których znajomość jest konieczna do określenia stanów nieustalonych w obwodach RLC.

Liniowość przekształcenia

Transformata Laplace'a odniesiona do sumy dwu funkcji czasowych jest równa sumie transformat każdej funkcji. Zapiszemy to w postaci

$$L[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s) \quad (9.3)$$

$$L^{-1}[a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)] = a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \quad (9.4)$$

w której współczynniki a_1 i a_2 są dowolnymi stałymi, a symbole L i L^{-1} oznaczają odpowiednio transformaty: prostą i odwrotną Laplace'a. Z własności liniowości przekształcenia wynika, że przekształcenie Laplace'a spełnia zasadę superpozycji.

Transformata pochodnej

Transformata pochodnej funkcji czasu spełnia relację

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0^+) \quad (9.5)$$

W której $f(0^+)$ oznacza wartość początkową funkcji $f(t)$ w chwili $t=0$. Mnożenie funkcji $F(s)$ przez zmienną zespoloną s odpowiada w dziedzinie czasu różniczkowaniu funkcji. Stąd operator s nazywany jest **operatorem różniczkowania**.

Transformata całki

Transformata całki funkcji czasu spełnia relację

$$L\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{F(s)}{s} \quad (9.6)$$

Pomnożenie funkcji $F(s)$ przez $1/s$ odpowiada w dziedzinie czasu całkowaniu funkcji. Stąd operator s^{-1} jest nazywany również **operatorem całkowania**.

Transformata splotu

Splot stanowi ważne pojęcie w teorii obwodów, gdyż za jego pośrednictwem określa się odpowiedzi czasowe obwodów rzeczywistych RLC. Splot dwu funkcji czasu $f_1(t)$ i $f_2(t)$ oznaczony w postaci $f_1(t) * f_2(t)$ jest zdefiniowany w następujący sposób

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau \quad (9.7)$$

Transformata Laplace'a splotu jest równa zwykłemu iloczynowi transformat poszczególnych funkcji tworzących splot

$$L[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(s) \cdot F_2(s) \quad (9.8)$$

Powyższa własność nosi w matematyce nazwę twierdzenia Borela. Zauważmy, że mnożenie splotowe dwu funkcji w dziedzinie czasu odpowiada zwykłemu mnożeniu ich transformat w dziedzinie częstotliwości. Własność ta jest szczególnie wygodna w analizie obwodów zarówno w stanie ustalonym jak i nieustalonym. Zamiast żmudnych operacji w dziedzinie czasu wykonuje się transformację Laplace'a funkcji czasowych a następnie wszystkie operacje wykonuje na transformatach, upraszczając w ten sposób wszystkie działania matematyczne.

9.1.2 Przykłady transformat Laplace'a

Obliczanie transformat Laplace'a polega na zastosowaniu wzoru (9.1) przy zadanej funkcji oryginału i przeprowadzeniu działań w nim określonych (całkowanie funkcji i wyznaczenie wartości na granicach całkowania). Obliczanie transformat dla większości funkcji, zwłaszcza bardziej złożonych, nie jest procesem łatwym i dlatego w praktyce inżynierskiej najczęściej posługujemy się tablicami gotowych transformat Laplace'a, których źródło znaleźć można w wielu poradnikach matematycznych jak również podręcznikach poświęconych rachunkowi operatorowemu. W tablicy 9.1 zestawiono wybrane przykłady transformat Laplace'a szczególnie często wykorzystywanych przy rozwiązywaniu stanów nieustalonych w obwodach RLC. W dalszej części tego wykładu będą one wykorzystane do wyznaczania transformat odwrotnych Laplace'a (funkcji czasu odpowiadających transformatom).

Tablica 9.1 Tablica wybranych transformat Laplace'a

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
$1(t)$	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s + \alpha}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$e^{-\alpha t} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$
$e^{-\alpha t} \cos(\omega t)$	$\frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$

Zawartość tablicy przedstawiająca zbiór funkcji czasu wraz z odpowiadającymi im transformatami może służyć zarówno wyznaczaniu transformaty Laplace'a przy zadanej funkcji czasu jak i działaniu odwrotnemu, to jest wyznaczeniu oryginału na podstawie zadanej postaci transformaty.

9.1.3 Wyznaczanie odwrotnej transformaty Laplace'a

Aby wyznaczyć funkcję czasu $f(t)$ na podstawie danej transformaty należy dokonać odwrotnego przekształcenia Laplace'a. Zależność definicyjna określona wzorem (9.2) jest raczej bezużyteczna ze względu na konieczność całkowania złożonych zwykle funkcji, jak również na nieokreślone precyzyjnie granice całkowania (stała c w definicji nie jest dokładnie określona). Najczęściej korzysta się z pośrednich metod wyznaczania oryginału wynikających z własności samego przekształcenia. Niezależnie od metody zastosowanej do wyznaczenia oryginału, zakładać będziemy, że transformata Laplace'a zadana jest w postaci wymiernej, czyli ilorazu dwu wielomianów zmiennej zespolonej s o współczynnikach rzeczywistych.

$$F(s) = \frac{L(s)}{M(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (9.9)$$

Dodatkowo przyjmujemy, że stopień licznika jest mniejszy niż stopień mianownika. Jeśli warunek powyższy byłby niespełniony, należy podzielić licznik przez mianownik tak, aby wymusić spełnienie tego warunku

Istnieje wiele metod obliczania transformaty odwrotnej Laplace'a, wykorzystujących własności przekształcenia. Do najbardziej popularnych należą metoda residuów, rozkładu funkcji wymiernej na ułamki proste, metoda Heaviside'a oraz metoda bazująca na wykorzystaniu tablic transformat Laplace'a. Tutaj ograniczymy się do dwu najbardziej uniwersalnych metod: metody residuów oraz metody tablicowej wykorzystującej tablice transformat Laplace'a.

Metoda residuów

Założmy, że funkcja wymierna $F(s)$ zadana jest w postaci ilorazu dwu wielomianów zmiennej zespolonej s , określona wzorem

$$F(s) = \frac{L(s)}{M(s)} \quad (9.10)$$

Pierwiastki licznika funkcji transformaty są nazywane **zerami** a pierwiastki mianownika **biegunami**. Zauważmy, że bieguny są utożsamiane z pierwiastkami równania charakterystycznego występującego w metodzie klasycznej lub wartościami własnymi macierzy stanu **A**. W **metodzie residuów** korzysta się z następującego twierdzenia.

Twierdzenie

Jeżeli funkcja $F(s)$ jest ilorazem dwu wielomianów $L(s)$ i $M(s)$, przy czym stopień wielomianu mianownika jest wyższy niż stopień wielomianu licznika ($n > m$) to oryginał funkcji $f(t)$ określony jest następującym wzorem

$$L^{-1}[F(s)] = \sum_{i=1}^n \text{res}_{s=s_i} [F(s)e^{st}] \quad (9.11)$$

Sumowanie odbywa się po wszystkich biegunach funkcji operatorowej $F(s)$ niezależnie od tego, czy bieguny są pojedyncze czy wielokrotne.

Residuum funkcji $res[\circ]$ wyznacza się korzystając ze wzorów wynikających z własności przekształcenia Laplace'a.

W przypadku bieguna l-krotnego wzór jest następujący

$$res_{s=s_i} [F(s)e^{st}] = \frac{1}{(l-1)!} \lim_{s \rightarrow s_i} \frac{d^{(l-1)}}{ds^{l-1}} [F(s)(s-s_i)^l e^{st}] \quad (9.12)$$

Szczególnie proste zależności otrzymuje się dla bieguna jednokrotnego s_i . W takim przypadku $l=1$ i wzór na residuum ulega znacznemu uproszczeniu

$$res_{s=s_i} [F(s)e^{st}] = \lim_{s \rightarrow s_i} [F(s)(s-s_i)e^{st}] \quad (9.13)$$

Wzór (9.11) wykorzystujący residuum funkcji jest stosowalny dla dowolnych biegunów funkcji $F(s)$, w tym biegunów rzeczywistych, zespolonych, jednokrotnych i wielokrotnych. Jednakże przy biegunach zespolonych obliczenie residuum jest procesem dość złożonym i metoda nie jest konkurencyjna względem innych.

Przykład 9.1

Jako przykład rozpatrzmy wyznaczenie transformaty odwrotnej Laplace'a funkcji $F(s)$ danej wzorem

$$F(s) = \frac{5s}{(s+1)(s+3)}$$

Zadana funkcja ma dwa bieguny: $s_1 = -1$ oraz $s_2 = -3$. Wykorzystując wzór (9.11) otrzymuje się

$$f(t) = res_{s=s_1} [F(s)e^{st}] + res_{s=s_2} [F(s)e^{st}]$$

Na podstawie wzoru (9.13) otrzymuje się

$$f(t) = \lim_{s \rightarrow s_1} [F(s)(s+1)e^{st}] + \lim_{s \rightarrow s_2} [F(s)(s+3)e^{st}] = \frac{5 \cdot (-1)}{(-1+3)} e^{-1t} + \frac{5 \cdot (-3)}{(-3+1)} e^{-3t} = -2,5e^{-t} + 7,5e^{-3t}$$

Metoda wykorzystująca tablice transformat

Metoda residuów jakkolwiek koncepcyjnie bardzo prosta staje się żmudna, jeśli bieguny układu są zespolone. Jest to szczególnie widoczne przy wysokich stopniach mianownika transmitancji operatorowej. W takich przypadkach zwykle korzystniejsze jest zastosowanie metody wykorzystującej tablice transformat Laplace'a.

Przy korzystaniu z tablic transformat należy poprzez elementarne przekształcenia doprowadzić daną transformatę do postaci standardowej znajdującej się w tablicy transformat (u nas tablica 9.1) a następnie odczytać z niej oryginał. Jest ona szczególnie wygodna jeśli bieguny układu są zespolone, gdyż w procesie przekształcania transformaty nie występuje potrzeba wyznaczania tych biegunów a wszystkie obliczenia dokonywane są na wartościach rzeczywistych. W praktyce przy stosowaniu tej metody transmitancję wyższych rzędów ($n > 2$) rozkłada się na składniki rzędu drugiego i wszystkie przekształcenia dokonuje na wielomianach rzędu pierwszego lub drugiego. Idę metody wyjaśnimy na przykładach liczbowych.

Przykład 9.2

Obliczyć transformatę odwrotną Laplace'a dla funkcji $F(s)$ danej w postaci

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

Wobec zespolonych pierwiastków mianownika wykorzystamy tablicę transformat 9.1. Porównanie postaci danej transformaty z danymi zawartymi w tablicy wskazuje, że należy ją doprowadzić do postaci transformaty odpowiadającej funkcji sinusoidalnej tłumionej wykładniczo (wiersz 7 w tablicy). Kolejność czynności jest tu następująca

$$F(s) = \sqrt{4/3} \frac{\sqrt{3/4}}{(s + 0,5)^2 + (\sqrt{3/4})^2}$$

Porównanie tej postaci z wierszem siódmym tablicy 9.1 pokazuje, że $\alpha = 0,5$ a $\omega = \sqrt{3/4}$.

Funkcja oryginału jest więc określona wzorem

$$f(t) = \sqrt{4/3} e^{-0,5t} \sin(\sqrt{3/4} t)$$

9.2 Modele operatorowe elementów obwodu

Aby uzyskać bezpośrednie przetworzenie postaci oryginalnej obwodu na obwód w dziedzinie operatorowej Laplace'a należy każdy element obwodu zastąpić odpowiednim modelem w dziedzinie operatorowej. Tutaj podamy te modele dla trzech podstawowych elementów obwodu RLC.

9.1.1 Rezystor

Prawo Ohma dotyczące wartości chwilowych prądu i napięcia dla rezystora można zapisać w postaci

$$u_R(t) = Ri_R(t) \quad (9.14)$$

Jest to równanie algebraiczne wiążące prąd i napięcie na zaciskach elementu. Stosując transformację Laplace'a do obu stron równania otrzymuje się

$$U_R(s) = RI_R(s) \quad (9.15)$$

Jak wynika z powyższej zależności impedancja operatorowa dla rezystora jest równa samej rezystancji $Z_R(s) = R$. Rys. 9.1 przedstawia model operatorowy rezystora, obowiązujący w dziedzinie zmiennej zespolonej s .



Rys. 9.1. Model operatorowy rezystora

9.1.2 Cewka

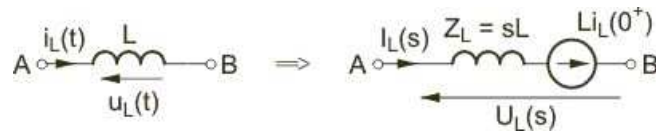
Dla uzyskania modelu operatorowego cewki idealnej zastosujemy przekształcenie Laplace'a bezpośrednio do równania opisującego cewkę w dziedzinie czasu

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \quad (9.16)$$

i wykorzystamy własność dotyczącą transformaty pochodnej. W efekcie otrzymuje się

$$U_L(s) = sLI_L(s) - Li_L(0^+) \quad (9.17)$$

Powyższemu równaniu można przyporządkować schemat obwodowy cewki w dziedzinie operatorowej przedstawiony na rys. 9.2



Rys.9.2 Model operatorowy cewki idealnej



Jest to połączenie szeregowe impedancji operatorowej odpowiadającej cewce idealnej i źródła napięciowego. Zaciski A-B modelu odpowiadają zaciskom A-B w oryginalnym symbolu cewki. Impedancja $Z_L(s) = sL$ jest impedancją operatorową cewki a $Li_L(0^+)$ reprezentuje źródło napięcia stanowiące integralną część modelu.

9.1.3 Kondensator

Dla uzyskania modelu operatorowego kondensatora idealnego skorzystamy z jego opisu w dziedzinie czasu

$$i_c(t) = C \frac{du_c}{dt} \quad (9.18)$$

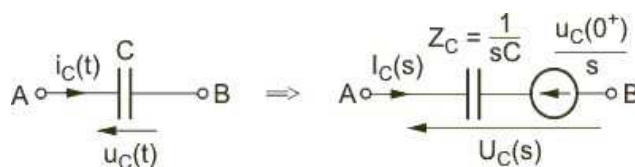
Zastosujemy przekształcenie Laplace'a do obu stron równania kondensatora. W efekcie takiej operacji otrzymuje się

$$I_C(s) = sCU_C(s) - Cu_C(0^+) \quad (9.19)$$

Przepiszemy tę zależność w postaci

$$U(s) = \frac{1}{sC} I_C(s) + \frac{u_c(0^+)}{s} \quad (9.20)$$

Równaniu powyższemu można przyporządkować schemat operatorowy kondensatora przedstawiony na rys. 9.3.



Rys. 9.3 Model operatorowy kondensatora idealnego



W modelu tym funkcja $Z_c = \frac{1}{sC}$ reprezentuje impedancję operatorową kondensatora a $\frac{u_c(0^+)}{s}$ - źródło napięciowe stanowiące integralną część modelu.

Modele operatorowe odpowiadające podstawowym elementom obwodu pozwalają przyporządkować każdemu obwodowi rzeczywistemu jego schemat zastępczy w dziedzinie transformat. W schemacie tym niezerowe warunki początkowe uwzględnione są poprzez dodatkowe źródła napięcia występujące w modelu operatorowym cewki i kondensatora. Taki sposób podejścia do analizy stanu nieustalonego jest wygodny ze względu na to, że umożliwia napisanie równań (algebraicznych, funkcyjnych) w postaci operatorowej bezpośrednio na podstawie schematu zastępczego bez potrzeby tworzenia równań różniczkowych opisujących obwód.

9.3 Prawa Kirchhoffa dla transformat

Dla schematu operatorowego obwodu słuszne są prawa Kirchhoffa, analogiczne do praw obowiązujących w dziedzinie czasu.

Prawo prądowe

Suma transformat prądów w dowolnym węźle obwodu elektrycznego jest równa zero

$$\sum_{k=1}^n I_k(s) = 0 \quad (9.21)$$

Prawo napięciowe

Suma transformat napięć gałęziowych w dowolnym oczku obwodu elektrycznego jest równa zeru

$$\sum_{k=1}^n U_k(s) = 0 \quad (9.22)$$

W równaniach tych transformaty prądów i napięć zastąpiły wartości czasowe występujące w podstawowej wersji praw Kirchhoffa. Znaki prądów i napięć występujących w równaniach (9.21) i (9.22) ustalane są w identyczny sposób jak w przypadku podstawowej wersji praw Kirchhoffa podanych dla wielkości rzeczywistych.

9.4 Obliczenia prądów i napięć w stanie nieustalonym obwodu metodą operatorową

Obliczenia prądów i napięć w stanie nieustalonym obwodu metodą operatorową sprowadzać się będą do wyznaczenia transformaty odpowiedniej wielkości a następnie obliczenia transformaty odwrotnej Laplace'a dla określenia zmiennej w dziedzinie czasu. Do obliczenia transformat prądów i napięć można stosować wszystkie poznane dotąd metody analizy obwodów, w tym metodę równań Kirchhoffa, oczkową, potencjałów węzłowych, Thevenina i Nortona operujące transformatami Laplace'a zamiast wartościami zespolonymi czy wartościami w dziedzinie czasu (dla obwodu rezystancyjnego).

Podstawowymi zaletami metody operatorowej jest łatwość uwzględnienia niezerowych warunków początkowych (przez wprowadzenie źródeł napięciowych w modelu operatorowym) oraz sprowadzenie operacji różniczkowych do działań algebraicznych.

W ogólności rozwiązując stan nieustalony w obwodzie metodą operatorową należy wyróżnić kilka etapów.

1. Określenie warunków początkowych w obwodzie, poprzez wyznaczenie rozwiązania ustalonego obwodu przed przełączeniem i obliczenie wartości napięć na kondensatorach i prądów cewek w chwili $t = 0^-$, to jest $i_L(0^-)$ oraz $u_C(0^-)$
2. Określenie rozwiązania obwodu w stanie ustalonym po przełączeniu przy zastosowaniu metody symbolicznej z wykorzystaniem dowolnej metody analizy. Wynikiem jest postać czasowa rozwiązania ustalonego prądów cewek $i_{Lu}(t)$ i napięć kondensatorów $u_{Cu}(t)$. Przez założenie $t=0$ otrzymuje się wartości prądów i napięć w chwili początkowej, to jest $i_{Lu}(0^+)$ oraz $u_{Cu}(0^+)$.

3. Określenie rozwiązania obwodu w stanie przejściowym po przełączeniu przy zastosowaniu metody operatorowej (najpierw wyznaczenie postaci operatorowej rozwiązania a następnie powrót do oryginału $i_{Lp}(t)$ oraz $u_{Cp}(t)$ poprzez zastosowanie transformaty odwrotnej).
4. Rozwiązanie obwodu w stanie nieustalonym jest sumą składowej ustalonej oraz składowej przejściowej, to jest

$$i_L(t) = i_{Lu}(t) + i_{Lp}(t) \quad (9.25)$$

$$u_C(t) = u_{Cu}(t) + u_{Cp}(t) \quad (9.26)$$

Składowa przejściowa zanika z czasem do zera i pozostaje jedynie składowa ustalona określająca przebieg wielkości w stanie ustalonym. Taka metodyka rozwiązania stanów nieustalonych przy zastosowaniu transformacji Laplace'a nosi nazwę metody **superpozycji stanów**, gdyż rozdziela w sposób jawny stan ustalony od stanu przejściowego. Jest szczególnie zalecana przy wymuszeniach sinusoidalnych, choć obowiązuje również dla obwodów prądu stałego. Zaletą takiego podejścia jest jej uniwersalność i stosowalność do każdego obwodu liniowego RLC niezależnie od rodzaju wymuszenia (wymuszenia stałe lub sinusoidalne mają jedynie wpływ na stan ustalony i są wyeliminowane przy rozwiązywaniu stanu przejściowego).

W celu obliczenia składowej przejściowej w obwodzie należy wykonać następujące etapy:

- utworzenie schematu obwodu dla składowej przejściowej poprzez wyeliminowanie źródeł zewnętrznych wymuszających (zwarcie źródeł napięcia i rozwarcie źródeł prądu); obwód rzeczywisty dla składowej przejściowej w dziedzinie czasu nie zawiera żadnych źródeł wymuszających
- określenie warunków początkowych dla składowej przejściowej przy wykorzystaniu praw komutacji, zgodnie z którymi $x(0^-) = x_u(0^+) + x_p(0^+)$; z równania tego wynikają następujące wzory na warunki początkowe dla składowych przejściowych prądu cewki i napięcia kondensatora

$$i_{Lp}(0^+) = i_L(0^-) - i_{Lu}(0^+) \quad (9.23)$$

$$u_{Cp}(0^+) = u_C(0^-) - u_{Cu}(0^+) \quad (9.24)$$

- utworzenie schematu operatorowego obwodu w stanie przejściowym poprzez zastąpienie elementów rzeczywistych obwodu ich modelami operatorowymi dla

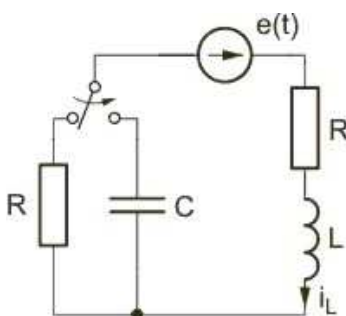
składowej przejściowej i rozwiązanie obwodu względem poszukiwanych prądów i napięć operatorowych

- wyznaczenie transformaty odwrotnej Laplace'a dla poszukiwanych wielkości przejściowych określonych w punkcie poprzednim; w wyniku otrzymuje się $i_{Lp}(t)$ oraz $u_{Cp}(t)$.

Należy podkreślić, że rozbiecie stanu nieustalonego na ustalony i przejściowy jest zalecane jedynie przy istnieniu wymuszeń sinusoidalnych w obwodzie po przełączeniu. Jeśli źródła takie nie występują schemat operatorowy może dotyczyć obwodu całkowitego, bez rozbijania go na schemat dla składowej ustalonej i przejściowej. W takim przypadku pozostawia się zewnętrzne źródła wymuszające w obwodzie przyjmując ich model operatorowy, czyli zastępując postać czasową źródła (wartość stała A przy wymuszeniu stałym) przez funkcję $\frac{A}{s}$. Warunki początkowe również nie podlegają modyfikacji, co oznacza, że $i_L(0^+) = i_L(0^-)$ oraz $u_C(0^+) = u_C(0^-)$.

Przykład 9.3

Określić prąd cewki w stanie nieustalonym po przełączeniu w obwodzie przedstawionym na rys. 9.4. Przyjąć następujące wartości parametrów obwodu: $R=2\Omega$, $L=1\text{H}$, $C=1/4\text{F}$, $e(t) = 10\sqrt{2}\sin(4t + 45^\circ)$. Zakładamy, że przełączanie zapewnia ciągłość prądu cewki podlegającej przełączeniu.



Rys. 9.4. Schemat obwodu do zadania 9.2

Rozwiązanie

1) Warunki początkowe w obwodzie:

$$E = 10e^{j45^\circ}$$

$$\omega = 4$$

$$Z_L = j\omega L = j4$$

$$Z_C = -j1/(\omega C) = -j1$$

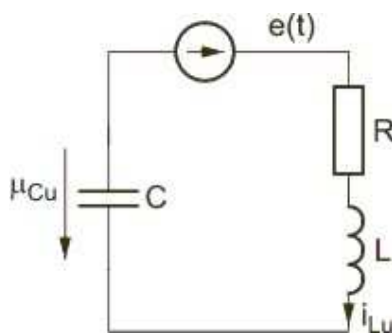
$$I_L = \frac{10e^{j45^\circ}}{4 + j4} = \frac{2,5}{\sqrt{2}}$$

$$i_L(t) = 2,5 \sin(4t)$$

$$i_L(0^-) = 0$$

$$u_C(0^-) = 0$$

2) Stan ustalony po przełączeniu w obwodzie (rys. 9.5)



Rys. 9.5. Schemat obwodu w stanie ustalonym po przełączeniu

$$I_{Lu} = \frac{10e^{j45^\circ}}{2 + j4 - j1} = 2,77e^{-j11,31^\circ}$$

$$U_{Cu} = -j1 \cdot I_{Lu} = 2,77e^{-j101,31^\circ}$$

$$i_{Lu}(t) = 2,77\sqrt{2} \sin(4t - 11,31^\circ)$$

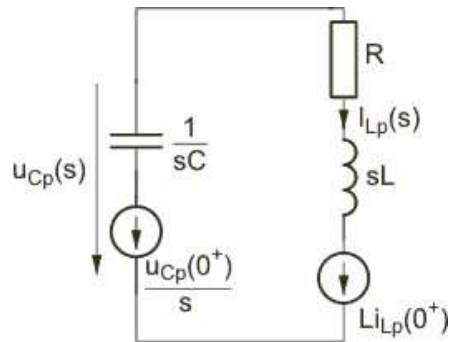
$$u_{Cu}(t) = 2,77\sqrt{2} \sin(4t - 101,31^\circ)$$

$$i_{Lu}(0^+) = -0,76$$

$$u_{Cu}(0^+) = -3,84$$

3) Stan przejściowy po przełączeniu

Schemat operatorowy przedstawiony jest na rys. 9.6.



Rys. 9.6 Schemat operatorowy obwodu po przełączeniu

Warunki początkowe dla stanu przejściowego:

$$i_{Lp}(0^+) = i_L(0^-) - i_{Lu}(0^+) = 0,76$$

$$u_{Cp}(0^+) = u_C(0^-) - u_{Cu}(0^+) = 3,84$$

Postać operatorowa rozwiązania

$$I_{Lp}(s) = \frac{Li_{Lp}(0^+) - \frac{u_{Cp}(0^+)}{s}}{s + 2 + \frac{4}{s}} = \frac{0,76s - 3,84}{s^2 + 2s + 4}$$

Wobec zespolonych biegunów zastosujemy metodę tablicową określenia transformaty odwrotnej. Zgodnie z nią

$$I_{Lp}(s) = \frac{0,76(s+1) - 4,6 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{3}}{(s+1)^2 + (\sqrt{3})^2}$$

$$i_{Lp}(t) = 0,76e^{-t} \cos(\sqrt{3}t) - 2,67e^{-t} \sin(\sqrt{3}t)$$

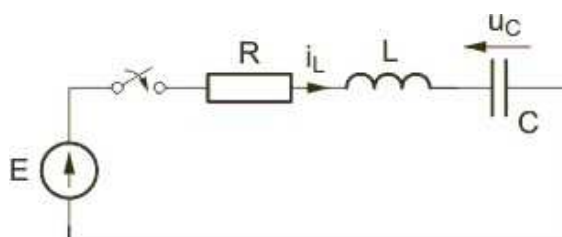
Rozwiązanie całkowite na prąd cewki w stanie nieustalonym

$$i_L(t) = i_{Lu}(t) + i_{Lp}(t) = 2,77\sqrt{2} \sin(4t - 11,31^\circ) + 0,76e^{-t} \cos(\sqrt{3}t) - 2,67e^{-t} \sin(\sqrt{3}t)$$

9.5 Stan nieustalony w obwodzie RLC przy załączeniu napięcia stałego

9.5.1 Rozwiązanie operatorowe

Rozpatrzmy załączenie napięcia stałego E do gałęzi szeregowej RLC przedstawionej na rys. 9.7.



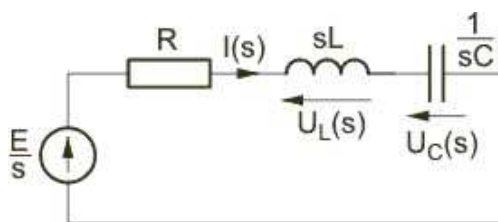
Rys. 9.7. Załączenie napięcia stałego do obwodu szeregowego RLC

Wobec zerowych warunków początkowych (brak wymuszenia w obwodzie przed przełączeniem) mamy $u_C(0^-) = 0$, $i_L(0^-) = 0$. Warunki początkowe napięcia kondensatora i prądu cewki określają równania

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0 \quad (9.27)$$

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0 \quad (9.28)$$

Schemat operatorowy obwodu w stanie nieustalonym przedstawiony jest na rys. 9.8.



Rys. 9.8 Schemat operatorowy obwodu RLC w stanie nieustalonym

Z prawa napięciowego Kirchhoffa zastosowanego do obwodu wynika następująca postać operatorowa prądu cewki

$$I(s) = \frac{E/s}{sL + R + 1/sC} = \frac{E/L}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} = \frac{E/L}{(s-s_1)(s-s_2)} \quad (9.29)$$

gdzie s_1 i s_2 stanowią bieguny funkcji $I(s)$. Dla wyznaczenia transformaty odwrotnej należy obliczyć te bieguny, czyli pierwiastki mianownika transmitancji

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0 \quad (9.30)$$

W wyniku rozwiązania tego równania otrzymuje się dwa pierwiastki (bieguny układu)

$$s_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (9.31)$$

$$s_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (9.32)$$

Z postaci wzoru opisującego bieguny wynika, że w zależności od znaku funkcji podpierwiastkowej możliwe są 3 przypadki rozwiązania.

- Przypadek **aperiodyczny** dla $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$. Przy spełnieniu tego warunku oba bieguny są rzeczywiste i ujemne. Charakter zmian prądu w obwodzie w stanie przejściowym jest aperiodyczny (nieokresowy) zanikający do zera w sposób wykładniczy.
- Przypadek **aperiodyczny krytyczny** występujący dla $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$. Przy spełnieniu tego warunku oba bieguny są rzeczywiste i równe sobie. Charakter zmian prądu w obwodzie w stanie przejściowym jest również aperiodyczny, podobnie jak w przypadku pierwszym, ale czas dochodzenia do wartości ustalonych (z określoną tolerancją) jest najkrótszy z możliwych.
- Przypadek **oscylacyjny** (periodyczny) występujący dla $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$. Przy spełnieniu tego warunku oba bieguny są zespolone (zespolony i sprzężony z nim). Charakter zmian prądu w obwodzie w stanie przejściowym jest sinusoidalny tłumiony, o oscylacjach zanikających do zera.

Rezystancja $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ nazywana jest **rezystancją krytyczną** i oznaczana w postaci R_{kr} .

9.5.2 Przypadek aperiodyczny

Rozpatrzmy najpierw przypadek pierwszy (aperiodyczny). Ze względu na to, że oba bieguny są rzeczywiste w obliczeniach transformaty odwrotnej najwygodniej jest zastosować metodę residuów. Zgodnie z nią przebieg czasowy prądu $i(t)$ można zapisać w postaci

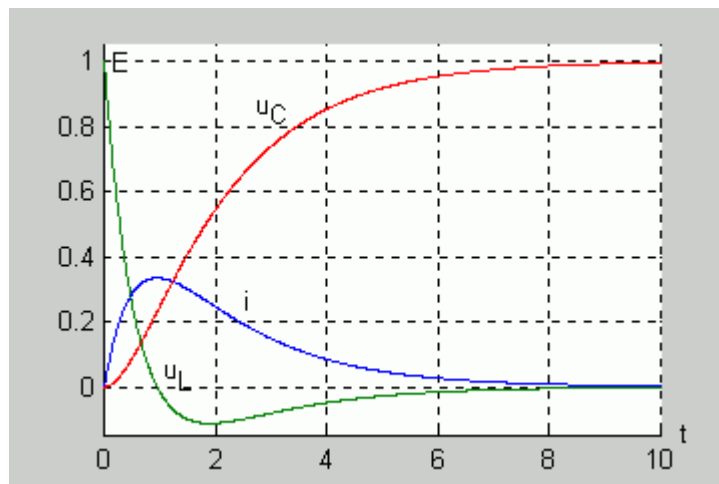
$$i(t) = \frac{E}{2L\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}} \left[e^{s_1 t} - e^{s_2 t} \right] \quad (9.33)$$

W podobny sposób wyznaczyć można pozostałe przebiegi czasowe w obwodzie: napięcie cewki i kondensatora.

$$u_C(t) = E + \frac{E}{2\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}} (s_2 e^{s_1 t} - s_1 e^{s_2 t}) \quad (9.34)$$

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = \frac{E}{2\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}} [s_1 e^{s_1 t} - s_2 e^{s_2 t}] \quad (9.35)$$

Na rys. 9.9 przedstawiono przebiegi prądu, napięcia na kondensatorze i cewce w stanie nieustalonym w obwodzie RLC dla $R = 2,3\Omega$, $C = 1F$ i $L = 1H$ przy załączeniu napięcia stałego $E = 1V$. Dla przyjętych wartości parametrów elementów mamy do czynienia z przypadkiem aperiodycznym.



Rys. 9.9. Przebiegi prądu i napięć w obwodzie RLC dla przypadku aperiodycznego

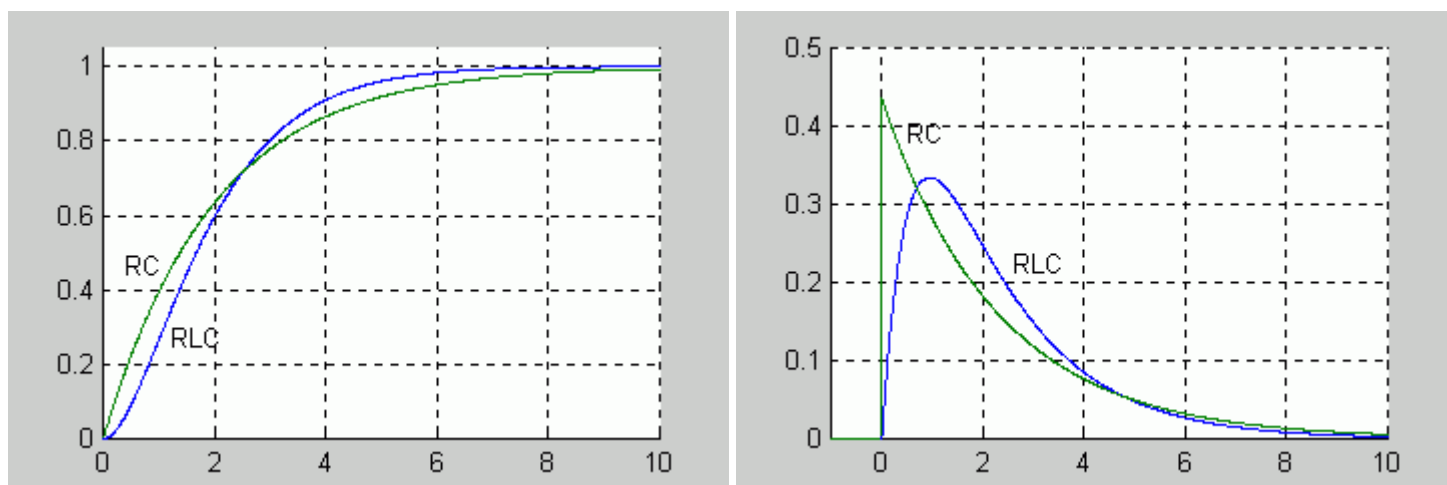


Prąd w obwodzie oraz napięcie na kondensatorze zachowują ciągłość i spełniają prawa komutacji. W stanie ustalonym prąd w obwodzie nie płynie (kondensator w stanie ustalonym stanowi przerwę) a napięcie na kondensatorze przyjmuje wartość napięcia zasilającego E . Zauważmy ponadto, że wartości maksymalnej prądu odpowiada zerowa wartość napięcia na cewce ($u_L(t) = L \frac{di}{dt}$). W chwili, gdy napięcie na cewce osiąga wartość maksymalną ujemną, w przebiegu napięcia na kondensatorze można zauważyć punkt przegięcia.

Interesujące jest porównanie procesu ładowania kondensatora w obwodzie RLC w stanie aperiodycznym (wzór 9.34) oraz w obwodzie RC. Napięcie i prąd kondensatora w obwodzie

RC, jak zostało pokazane wcześniej opisane są funkcjami $u_C(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$,

$i_C(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$. Na rys. 9.10 przedstawiono przebiegi napięcia na kondensatorze (rys. 9.10a) oraz prądu (rys. 9.10b).



Rys. 9.10 Porównanie procesu ładowania kondensatora w obwodzie RC i RLC



W napięciu $u_C(t)$ w obwodzie RLC widoczny jest łagodnie narastający przebieg z punktem przegięcia. Prąd ładowania kondensatora, będący jednocześnie prądem cewki, narasta od wartości zerowej z zachowaniem ciągłości, a więc spełniając warunki nakładane przez prawa komutacji. W obwodzie RC widoczny jest gwałtowny skok prądu w chwili przełączenia (prawa komutacji nie dotyczą prądu kondensatora).

9.5.3 Przypadek aperiodyczny krytyczny

W przypadku aperiodycznym krytycznym, wobec spełnienia relacji $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ oba pierwiastki mianownika są równe i transformata prądu wyraża się wzorem

$$I(s) = \frac{E/L}{\left(s + \frac{R}{2L}\right)^2} \quad (9.36)$$

Zastosowanie wzoru na residuum dla pierwiastka podwójnego $s_1 = s_2 = -\frac{R}{2L} = -\alpha$ prowadzi do następującej postaci prądu cewki $i(t)$

$$i(t) = \frac{E}{L} t e^{-\frac{R}{2L}t} \quad (9.37)$$

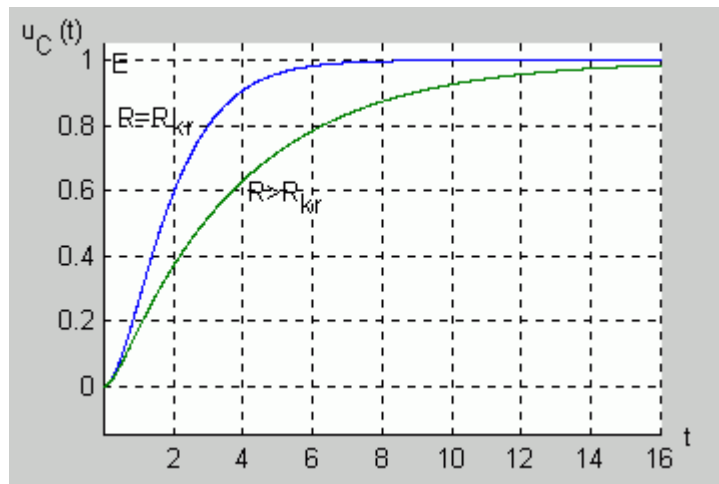
W analogiczny sposób można wyznaczyć pozostałe przebiegi (napięcia kondensatora i cewki) dla stanu aperiodycznego krytycznego. W przypadku napięcia na cewce bezpośrednio poprzez różniczkowanie funkcji czasowej prądu otrzymuje się

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = E e^{-\frac{R}{2L}t} \left(1 - \frac{R}{2L}t\right) \quad (9.38)$$

Napięcie na kondensatorze w stanie nieustalonym można uzyskać bezpośrednio z prawa napięciowego Kirchhoffa napisanego dla obwodu z rys. 9.1 po przełączeniu. Mianowicie

$$u_C(t) = E - Ri_L(t) - u_L(t) = E - E e^{-\frac{R}{2L}t} \left(1 + \frac{R}{2L}t\right) \quad (9.39)$$

Na rys. 9.11 przedstawiono przebieg ładowania kondensatora w stanie aperiodycznym krytycznym na tle przypadku aperiodycznego.



Rys. 9.11. Porównanie procesu ładowania kondensatora w obwodzie RLC dla przypadku aperiodycznego i aperiodycznego krytycznego



Jedyna różnica występuje w czasie trwania stanu przejściowego, który najszybciej zanika dla przypadku krytycznego. Charakter przebiegu prądu i napięć w obwodzie dla przypadku aperiodycznego krytycznego jest podobny do zwykłego przypadku aperiodycznego, z tym, że najszybciej uzyskiwany jest stan ustalony (stan przejściowy trwa najkrócej z możliwych).

9.5.4 Przypadek oscylacyjny

Przypadek oscylacyjny zmian prądu i napięć w obwodzie szeregowym RLC występuje przy spełnieniu warunku $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ a więc przy małych wartościach rezystancji R . W tym przypadku oba bieguny są zespolone. Dla wyznaczenia postaci czasowej prądu wygodniej jest zastosować metodę tablic transformat. W tym celu należy przekształcić wyrażenie na prąd operatorowy w taki sposób, aby doprowadzić je do postaci występującej w tablicy 9.1. Dla zadanej postaci prądu przekształcenia te są jak następuje

$$I(s) = \frac{E/L}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}{\left(s + \frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\right)^2} \cdot \frac{E/L}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} \quad (9.40)$$

Wprowadźmy oznaczenie

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad (9.41)$$

Wielkość ω jest **pulsacją drgań własnych** obwodu RLC występujących w przypadku oscylacyjnym.

Wykorzystując tablicę transformat 9.1 możemy uzyskać postać czasową prądu w obwodzie. Można ją zapisać w postaci

$$i(t) = \frac{E}{\omega L} e^{-\frac{R}{2L}t} \sin(\omega t) \quad (9.42)$$

We wzorze występuje czynnik tłumiący typu wykładniczego $e^{-\frac{R}{2L}t}$. Wielkość $\alpha = \frac{R}{2L}$ nazywana jest **współczynnikiem tłumienia**. Jej wartość jest proporcjonalna do wartości rezystancji. Im większa rezystancja tym większe tłumienie w obwodzie. Odwrotność współczynnika tłumienia charakteryzuje stałą czasową $\tau = \frac{2L}{R}$ obwodu RLC z jaką tłumione są drgania sinusoidalne. Jest widoczne, że prąd w przypadku oscylacyjnym opisany jest funkcją sinusoidalną o amplitudzie zmieniającej się według funkcji wykładniczej.

Wykorzystując podstawowe relacje zachodzące między zmiennymi w obwodzie szeregowym RLC można wyznaczyć pozostałe napięcia w obwodzie w stanie nieustalonym. W przypadku cewki napięcie uzyskuje się przez zróżniczkowanie funkcji opisującej prąd ładowania.

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = -\frac{E}{\omega \sqrt{LC}} e^{-\frac{R}{2L}t} \sin(\omega t - \varphi) \quad (9.43)$$

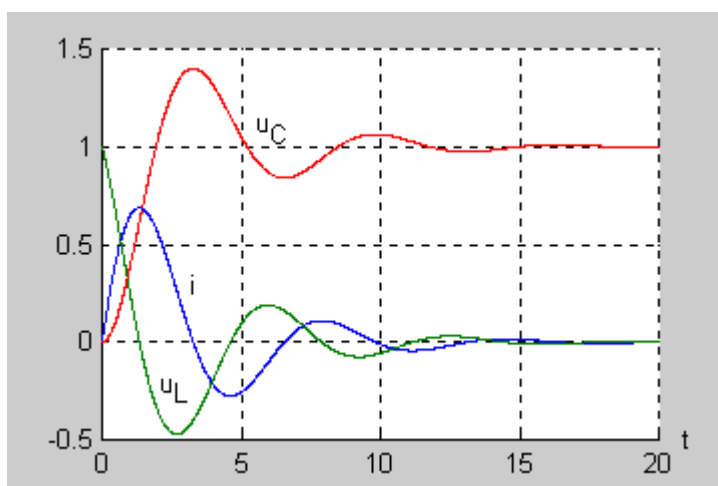
gdzie kąt φ jest określony relacją

$$\varphi = \arctg \frac{\omega}{R/2L} \quad (9.44)$$

Napięcie na kondensatorze wyznaczyć można bezpośrednio z prawa napięciowego Kirchhoffa zastosowanego do obwodu rzeczywistego z rys. 9.1

$$u_C(t) = E - u_L(t) - Ri(t) = E - \frac{E}{\omega L} e^{-\frac{R}{2L}t} \left[R \sin(\omega t) - \sqrt{\frac{L}{C}} \sin(\omega t - \varphi) \right] \quad (9.45)$$

Na rys. 9.12 przedstawiono przebiegi prądu i napięć w stanie nieustalonym w obwodzie RLC przy wystąpieniu przypadku oscylacyjnego, czyli przy $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.



Rys. 9.12. Przebiegi czasowe w obwodzie RLC dla przypadku oscylacyjnego



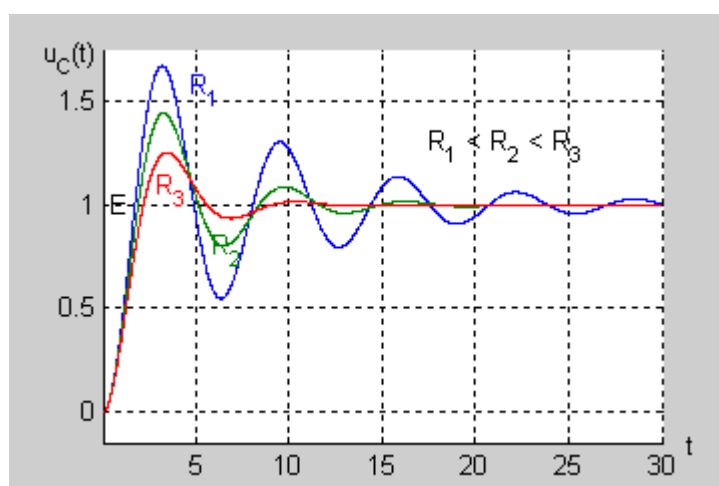
Przebieg prądu ma charakter sinusoidalny, tłumiony wykładniczo do zera. Obwiednie przebiegu prądu są wyznaczone funkcjami $f(t) = \pm \frac{E}{\omega L} e^{-\frac{R}{2L}t}$. Przy zasilaniu obwodu RLC

napięciem stałym wytworzyły się drgania własne o pulsacji $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$. Pulsacja ta zależy wyłącznie od parametrów obwodu RLC. Głównym czynnikiem regulującym wartość pulsacji wobec małej wartości rezystancji R dla przypadku oscylacyjnego jest wartość indukcyjności L oraz pojemności C . Przy danych wartościach L , C i regulowanej wartości rezystancji, pulsacja rośnie dla malejącej wartości rezystancji.

Drgania w obwodzie powstają na skutek wymiany energii między polem elektrycznym kondensatora a polem magnetycznym cewki. Na skutek skończonej wartości rezystancji zachodzi rozpraszanie energii w postaci ciepła wydzielanego na rezystorze. Stąd oscylacje powstające w obwodzie mają charakter malejący. Szybkość tłumienia określa stała tłumienia

$\alpha = \frac{R}{2L}$. Im większa wartość rezystancji tym większe tłumienie w obwodzie i szybsze zanikanie drgań sinusoidalnych do zera.

Na rys. 9.13 przedstawiono przykładowe przebiegi ładowania kondensatora w obwodzie RLC dla przypadków oscylacyjnych przy zmieniającej się wartości rezystancji.



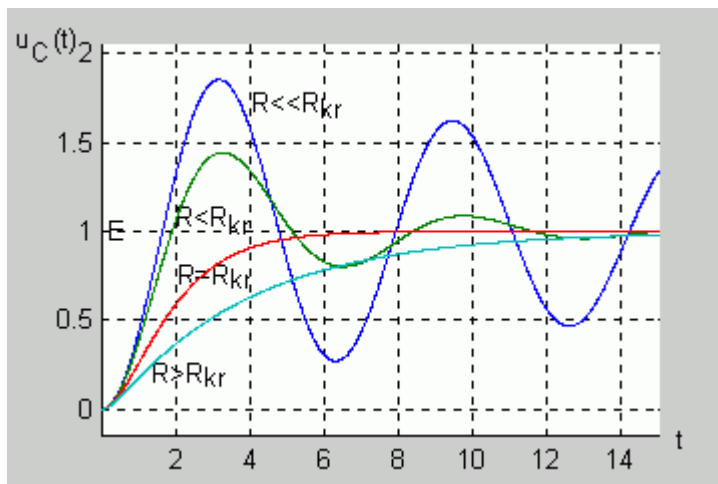
Rys. 9.13. Przebiegi napięcia na kondensatorze dla przypadku oscylacyjnego przy zmieniającej się wartości rezystancji



Widoczne jest, że im mniejsza wartość rezystancji tym dłużej trwa stan przejściowy w obwodzie. Wobec małych wartości rezystancji wynikających z warunku występowania przypadku oscylacyjnego jej wpływ na częstotliwość drgań własnych obwodu (wzór 9.41) jest stosunkowo niewielki.

Należy podkreślić, że jakkolwiek wyrażenia analityczne opisujące przebiegi czasowe w obwodzie dla różnych przypadków tłumienia są znacznie różniące się między sobą, wszystkie reprezentują charakter ciągły analizowanych przebiegów. Poszczególne przypadki przechodzą w siebie nawzajem przy ciągłej zmianie wartości rezystancji. Przy małej rezystancji tłumienie jest małe i przebieg prądu oraz napięć jest oscylacyjny, tłumiony wykładniczo. Wzrost wartości rezystancji powoduje wzrost tłumienia, drgania trwają krócej aż przy pewnej wartości krytycznej $R_{kr} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ przechodzą w przebieg aperiodyczny (krytyczny), przy którym nie obserwuje się już drgań. Dalszy wzrost rezystancji niewiele

zmienia w charakterze jakościowym przebiegów poza wydłużeniem stanu przejściowego. Ilustrację powyższego zjawiska na przykładzie napięcia $u_C(t)$ w obwodzie przedstawiono na rys. 9.14.



Rys. 9.14. Przebiegi napięcia na kondensatorze w obwodzie RLC przy ciągłej zmianie wartości rezystancji



9.6 Program interakcyjny do badania stanów nieustalonych w obwodzie RLC

Poniżej przedstawiono 3 okna programu do symulacji stanów nieustalonych w obwodach RLC, RC oraz RL. Użytkownik wybiera strukturę obwodu poprzez kliknięcie w odpowiednie okno, a następnie ustawia wartości parametrów obwodu i przeprowadza symulację.

SLAJD 30

**PROGRAM w JAVIE – wykr.jar i 3 interfejsy: rlc_demo.html
+ rl_demo.html + rc_demo.html**

Ćwiczenia

Ćwiczenie 9.1

Wyznaczyć transformatę odwrotną Laplace'a dla transmitancji operatorowej $F(s)$

$$F(s) = \frac{s}{(s+2)(s+3)(s+5)^2}$$

Rozwiązanie

W rozważanym przypadku wszystkie bieguny są rzeczywiste, przy czym jeden z nich jest podwójny. Ich wartości są równe: $s_1=-2$, $s_2=-3$, $s_3=s_4=-5$. Najskuteczniejszą metodą pozostaje w tym przypadku metoda residuów, zgodnie z którą

$$f(t) = \text{res}_{s \rightarrow -2} F(s)e^{st} + \text{res}_{s \rightarrow -3} F(s)e^{st} + \text{res}_{s \rightarrow -5} F(s)e^{st}$$

Wartość funkcji residuum dla poszczególnych biegunów jest równa

$$\text{res}_{s \rightarrow -2} F(s)e^{st} = \lim_{s \rightarrow -2} F(s)(s+2)e^{st} = -\frac{2}{9}e^{-2t}$$

$$\text{res}_{s \rightarrow -3} F(s)e^{st} = \lim_{s \rightarrow -3} F(s)(s+3)e^{st} = \frac{3}{4}e^{-3t}$$

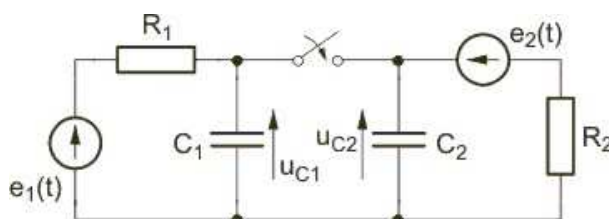
$$\text{res}_{s \rightarrow -5} F(s)e^{st} = \lim_{s \rightarrow -5} \frac{d}{ds} (F(s)(s+5)^2 e^{st}) = -\frac{19}{36}e^{-5t} - \frac{5}{6}te^{-5t}$$

Sumując poszczególne składniki otrzymujemy

$$f(t) = -\frac{2}{9}e^{-2t} + \frac{3}{4}e^{-3t} - \frac{19}{36}e^{-5t} - \frac{5}{6}te^{-5t}$$

Ćwiczenie 9.2

Określić przebieg napięcia na kondensatorze w stanie nieustalonym po przełączeniu metodą operatorową w obwodzie przedstawionym na rys. 9.15. Przyjąć następujące parametry obwodu: $R_1=50\Omega$, $R_2=100\Omega$, $C_1=10\mu\text{F}$, $C_2=20\mu\text{F}$, $e_1(t) = 50\text{V}$, $e_2(t) = 100\text{V}$.

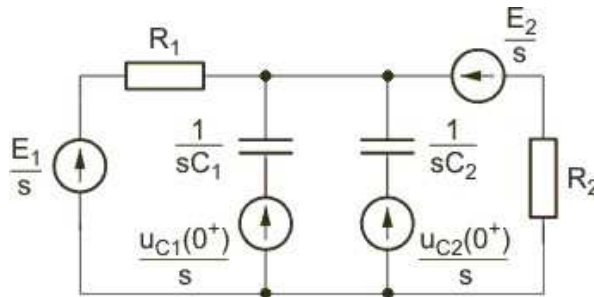


Rys. 9.15 Schemat obwodu do ćwiczenia 9.1

Rozwiązanie

Warunki początkowe: $u_{C1}(0^-) = e_1 = 50$, $u_{C2}(0^-) = e_2 = 100$

Ze względu na wymuszenie stałe nie zachodzi potrzeba stosowania metody superpozycji stanu. Schemat operatorowy obwodu w stanie nieustalonym przedstawiony jest na rys. 9.16



Rys. 9.16 Schemat operatorowy obwodu

Z metody potencjałów węzłowych zastosowanych do obwodu z rys. 9.18 wynika

$$U_C(s) = \frac{\frac{50}{50s} + \frac{100}{100s} + 10^{-5}u_{C1}(0^+) + 2 \cdot 10^{-5}u_{C2}(0^+)}{1/50 + 1/100 + s10^{-5} + 2s10^{-5}}$$

$$U_C(s) = \frac{250s + 2,5 \cdot 10^5}{3s(s + 1000)}$$

Bieguny układu: $s_1 = 0$, $s_2 = -1000$

Transformata odwrotna Laplace'a

$$u_C(t) = \lim_{s \rightarrow 0} U_C(s)se^{st} + \lim_{s \rightarrow -1000} U_C(s)(s + 1000)e^{st}$$

$$u_C(t) = \frac{250}{3} + \frac{50}{3}e^{-1000t}$$

W stanie ustalonym przy $t \rightarrow \infty$ mamy $u_{Cu}(t) = \frac{250}{3}$ V. Zauważmy, że w wyniku przełączenia napięcia na kondensatorach w chwili $t=0$ uległy skokowej zmianie (w obwodzie powstało oczko złożone z samych kondensatorów).

Ćwiczenie 9.3

Wartości indukcyjności i pojemności w obwodzie szeregowym RLC są równe: $L=0,01\text{H}$ oraz $C=1\mu\text{F}$. Określić zmiany częstotliwości drgań własnych tego obwodu w funkcji wartości rezystancji R zmieniającej się od zera do rezystancji krytycznej.

Rozwiązanie

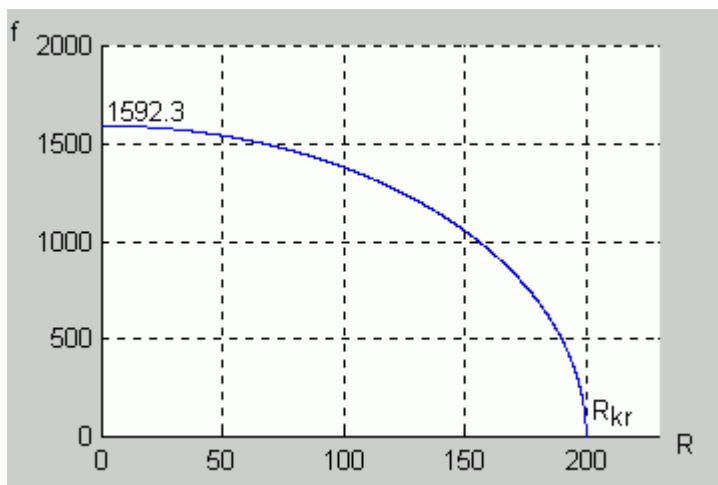
Częstotliwość drgań własnych obwodu szeregowego RLC dana jest wzorem

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{10^8 - 0,25 \cdot 10^4 R^2}$$

Rezystancja krytyczna

$$R_{kr} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 200\Omega$$

Na rys. 9.17 przedstawiono zależność częstotliwości drgań własnych obwodu od wartości rezystancji R w podanym zakresie zmian rezystancji



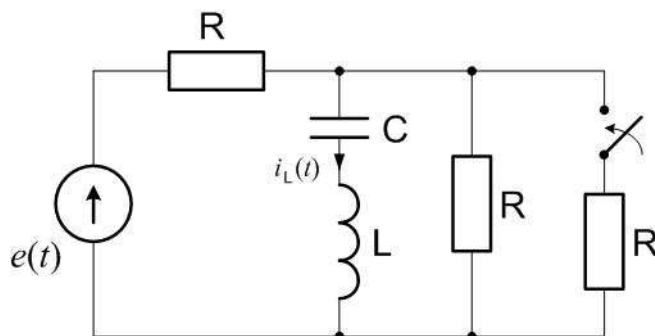
Rys. 9.17. Wykres zależności częstotliwości drgań własnych obwodu od wartości rezystancji



Zadania sprawdzające

Zadanie 9.1

Określić przebiegi $u_C(t)$ oraz $i_L(t)$ w stanie nieustalonym po przełączeniu w obwodzie przedstawionym na rysunku 9.18. Dane: $e(t)=20$, $R=10\Omega$, $L=1\text{H}$, $C=1\text{F}$.



Rys. 9.18. Schemat obwodu do zadania 9.1

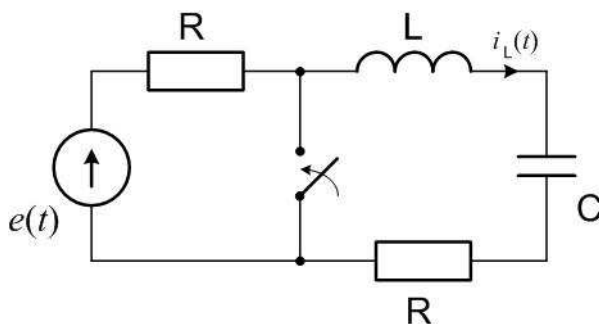
Rozwiązanie

$$i_L(t) = -1,25e^{-\frac{1}{3}t} + 1,25e^{-3t}$$

$$u_C(t) = \frac{20}{3} + 3,75e^{-\frac{1}{3}t} - 0,42e^{-3t}$$

Zadanie 9.2

Określić przebieg $i_L(t)$ oraz $u_C(t)$ w stanie nieustalonym po przełączeniu w obwodzie przedstawionym na rys. 9.19. Parametry elementów obwodu są następujące: $L=1\text{H}$, $C=1\text{F}$, $R=2\Omega$, $e(t) = 10\sqrt{2}\sin(t)$.



Rys. 9.19. Schemat obwodu do zadania 9.2

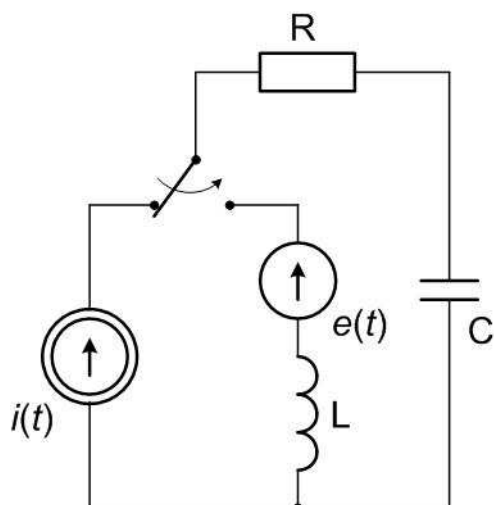
Rozwiązanie

$$i_L(t) = 3,5te^{-t}$$

$$u_C(t) = -10,53te^{-t} + 3,53e^{-t}$$

Zadanie 9.3

Określić przebieg $i_L(t)$ w stanie nieustalonym po przełączeniu w obwodzie przedstawionym na rys. 9.20. Parametry elementów obwodu są następujące: $L=1\text{H}$, $C=1\text{F}$, $R=2\Omega$, $e(t) = 4\text{V}$, $i(t) = 3\sin(t)\text{A}$.



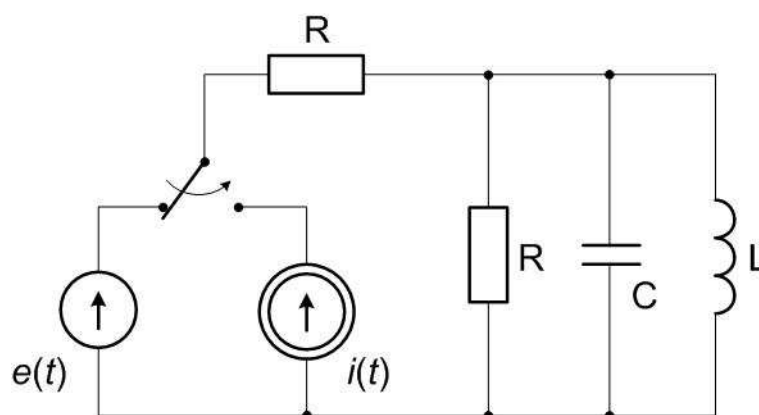
Rys. 9.20. Schemat obwodu do zadania 9.3

Rozwiązanie

$$i_L(t) = 7te^{-t}\text{A}$$

Zadanie 9.4

Określić przebieg czasowy napięcia na kondensatorze w stanie nieustalonym w obwodzie przedstawionym na rys. 9.21. Przyjąć następujące wartości parametrów: $R=5\Omega$, $C=1\text{F}$, $L=1\text{H}$, $e(t) = 20\text{V}$, $i(t) = 5\sqrt{2}\sin(t + 45^\circ)\text{A}$.



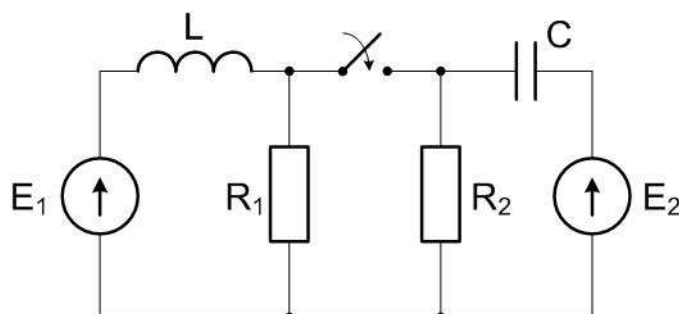
Rys. 9.21. Schemat obwodu do zadania 9.4

Rozwiązanie

$$u_C(t) = 25\sqrt{2} \sin(t + 45) - 25e^{-0.1t} \cos \sqrt{0.99}t - 26,63e^{-0.1t} \sin \sqrt{0.99}t$$

Zadanie 9.5

Obliczyć wartości czasowe napięcia na kondensatorze w stanie nieustalonym w obwodzie przedstawionym na rys. 9.22. Przyjąć następujące wartości parametrów: $R_1=20\Omega$, $R_2=30\Omega$, $C=0.5F$, $L=1H$, $E_1= 50V$, $E_2= 20V$.



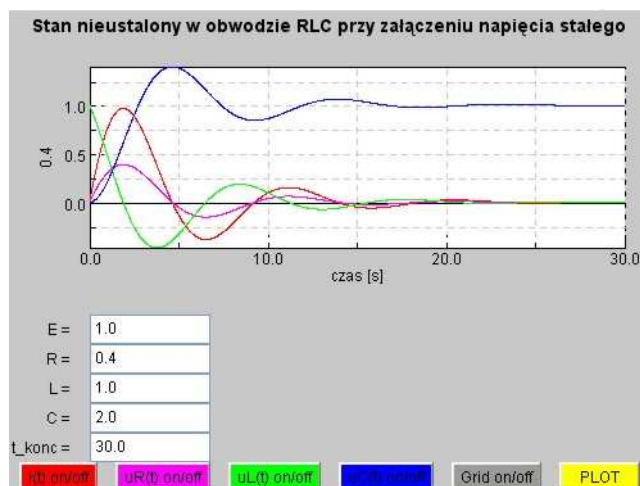
Rys. 9.22. Schemat obwodu do zadania 9.5

Rozwiązanie

$$u_C(t) = -30 + 50e^{-\frac{1}{12}t} \cos \sqrt{\frac{287}{144}}t - \frac{10}{\sqrt{287}}e^{-\frac{1}{12}t} \sin \sqrt{\frac{287}{144}}t$$

Zadanie 9.6

Dokonać analizy stanów nieustalonych w obwodzie RLC dla różnych wartości R , L i C oraz wymuszenia stałego E przy użyciu załączonego programu (rys. 9.23). W przypadku drgań oscylacyjnych oszacować zmierzona eksperymentalnie wartość tłumienia α oraz częstotliwość drgań własnych i porównać je z wartościami określonymi teoretycznie.



Rys. 9.23 Okno graficzne programu do badania stanu nieustalonego w obwodzie RLC

Test do wykładu 9

1. Funkcja operatorowa $X(s)$ dana jest w postaci $X(s) = \frac{3}{s+2}$. Odpowiadający jej oryginał

ma postać

- a) $x(t) = e^{-2t}$
- xb) $x(t) = 3e^{-2t}$
- c) $x(t) = 3e^{2t}$
- d) $x(t) = 3\delta(t) + e^{-2t}$

2. Funkcja operatorowa $X(s)$ dana jest w postaci $X(s) = \frac{2s}{s+5}$. Odpowiadający jej oryginał

ma postać

- a) $x(t) = e^{-5t} + e^{-2t}$
- b) $x(t) = 2e^{-5t}$
- c) $x(t) = 5e^{-2t}$
- xd) $x(t) = 2\delta(t) - 10e^{-5t}$

3. Funkcja operatorowa $X(s)$ dana jest w postaci $X(s) = \frac{2s}{s^2 + 6s + 10}$. Odpowiadający jej

oryginał ma postać

- xa) $x(t) = 2e^{-3t} \cos(t) - 6e^{-3t} \sin(t)$
- b) $x(t) = 2e^{-3t} \cos(t) + 6e^{-3t} \sin(t)$
- c) $x(t) = e^{-3t} \cos(t) + 6e^{-3t} \sin(t)$
- d) $x(t) = 2e^{-3t} \sin(t) - 6e^{-3t} \cos(t)$

4. Model operatorowy kondensatora $C=0.1\text{F}$ naładowanego do wartości początkowej $u_C(0)=2\text{V}$ zawiera:
 - a) Połączone szeregowo impedancję $1/(10\text{s})$ oraz źródło napięcia o wartości $2/\text{s}$
 - b) Połączone równolegle impedancję $1/(10\text{s})$ oraz źródło napięcia o wartości $2/\text{s}$
 - xc) Połączone szeregowo impedancję $10/\text{s}$ oraz źródło napięcia o wartości $2/\text{s}$
 - d) Połączone równolegle impedancję $10/\text{s}$ oraz źródło napięcia o wartości $2/\text{s}$
5. Rezystor $R=2\Omega$ połączono równolegle z kondensatorem $C=0.2\text{F}$ naładowanym wstępnie do napięcia 10 . Napięcie na kondensatorze w stanie nieustalonym można opisać wzorem
 - xa) $u_C(t) = 10e^{-2,5t}$
 - b) $u_C(t) = 10e^{-0,4t}$
 - c) $u_C(t) = 10e^{-10t}$
 - d) $u_C(t) = -10e^{-2,5t}$
6. Źródło napięcia stałego $e(t)=10\text{V}$ dołączono do szeregowego połączenia rezystora $R=5\Omega$ i kondensatora $C=0.1\text{F}$ naładowanym wstępnie do napięcia 5V . Napięcie na kondensatorze w stanie nieustalonym można opisać wzorem (wyniki wyrażone w woltach)
 - a) $u_C(t) = 10 + 5e^{-2t}$
 - xb) $u_C(t) = 10 - 5e^{-2t}$
 - c) $u_C(t) = 5e^{-2t}$
 - d) $u_C(t) = 10 - 5e^{2t}$
7. W obwodzie szeregowym RLC o $R=0,5\Omega$, $C=0.1\text{F}$, $L=0,1\text{H}$ powstaje stan nieustalony o charakterze:
 - xa) Oscylacyjnym o $\omega = 9,68\text{rad} / \text{s}$
 - b) Oscylacyjnym o $\omega = 10\text{rad} / \text{s}$
 - c) Aperiodycznym
 - d) Aperiodycznym krytycznym
8. W obwodzie szeregowym RLC o $C=0.001\text{F}$, $L=0.1\text{H}$ powstaje stan nieustalony. Jaki jest warunek powstania drgań oscylacyjnych w takim obwodzie?
 - a) $R > 20\Omega$
 - xb) $R < 20\Omega$
 - c) $R < 10\Omega$
 - d) $R = 20\Omega$
9. Przy zmniejszaniu się wartości rezystancji R w obwodzie szeregowym RLC częstotliwość drgań własnych obwodu
 - a) maleje
 - xb) rośnie
 - c) nie zmienia się
10. Idealny obwód bezstratny LC przy niezerowych warunkach początkowych generuje drgania sinusoidalne
 - a) tłumione zanikające do zera
 - xb) nietłumione trwające w czasie do nieskończoności
 - c) narastające do wartości nieskończonej
 - d) nietłumione trwające w skończonym czasie