2.2 Granice funkcji

Istnieją dwie definicje granicy właściwe funkcji $f(x)$ w punkcie x_0.

Definicja 2.3 (Heinego)**.** Liczbę g nazywamy *granicą funkcji* f w punkcie x_0, jeżeli dla każdego ciągu punktów $\{x_n\}$ o wyrazach z sąsiedztwa punktu x_0 ciąg $\{f(x_n)\}$ jest zbieżny do g. Zapisujemy to

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = g.$$

Definicja 2.4 (Cauchy'ego)**.** Liczba g jest granicą funkcji f przy $x \to x_0$, jeżeli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $\delta > 0$, że dla każdego x spełniającego warunek $0 < |x - x_0| < \delta$ spełniona jest nierówność $|f(x) - g| < \varepsilon$.

Definicje Heinego i Cauchy'ego są równoważne.

Zachodzą następujące własności granicy. Jeżeli

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \quad \text{oraz} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = b,$$

to

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = a \pm b,$$
$$\lim_{x\to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = a \cdot b.$$

Wśród granic wyróżniamy granice *niewłaściwe* w punkcie x_0. Są to takie granice dla których

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$$

W praktyce musimy czasami korzystać z *granic jednostronnych.* Granice takie zapisujemy następująco

- granica lewostronna w x_0

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0,\ x<x_0} f(x)$$

- granica prawostronna w x_0

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0,\ x>x_0} f(x)$$

Granice jednostronne w punkcie mogą być różne. jeżeli granice jednostronne w punkcie są równe to funkcja w punkcie x_0 posiada granicę.

Często korzystamy przy obliczaniu granic ze wzorów

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 0.$$

Przykład 2.5. Obliczymy następujące granice

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2 \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 2 \cdot 1 = 2,$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{5x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{4x5x} \frac{4x}{\cos 4x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{4}{5} \frac{\sin 4x}{4x} \frac{1}{\cos 4x} = \frac{4}{5},$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 4x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{3}{4} \frac{\sin 3x}{3x} \frac{4x}{\sin 4x} = \frac{3}{4},$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 - x}{4x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x(x-1)}{4x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(x-1)}{4} = -\frac{1}{4},$

e) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{3x^4 + 2x}{5x^4 - 8x^2} = \lim\limits_{x\to \infty} \frac{3 + \frac{2}{x^3}}{5 - \frac{8}{x^2}} = \frac{3}{5},$

f) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x/2}\right)^{x/2}\right]^2 = e^2.$

Asymptoty

Granice funkcji wykorzystuje się również do wyznaczania asymptot funkcji.

Definicja 2.6. Prostą $x = a$ nazywamy *asymptotą pionową* funkcji $f(x)$ jeżeli co najmniej jedna z granic jednostronnych funkcji w punkcie $x = a$ jest granicą niewłaściwą tzn. gdy

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

lub

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$$

Prostą $y = ax + b$ nazywamy *asymptotą ukośną* funkcji $f(x)$ w ∞ (odpowiednio $-\infty$) jeżeli

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \qquad \left(\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0\right)$$

W przypadku gdy $a = 0$ to mówimy o asymptocie poziomej o równaniu $y = b$.

Stałe a, b występujące w definicji asymptoty obliczamy w następujący sposób

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - ax].$$

Analogiczne rachunki wykonujemy następnie dla $x \to -\infty$. Zazwyczaj asymptoty ukośna dla $x \to \infty$ oraz $x \to -\infty$ są identyczne choć nie zawsze tak musi być.

Przykład 2.7. Wyznaczyć asymptoty funkcji

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1} \tag{2.1}$$

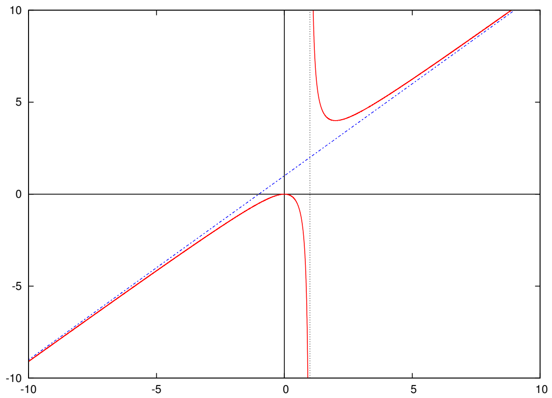
Rozwiązanie. Funkcja nie jest określona dla $x = 1$. Obliczamy

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2}{x-1} = -\infty \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2}{x-1} = +\infty$$

w punkcie $x = 1$ mamy zatem asymptotę pionową. Sprawdzamy czy istnieje asymptota ukośna. Obliczamy

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x-1} = 1,$$
$$b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x\to\infty} [\frac{x^2}{x-1} - x] = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x-1} = 1$$

asymptotą ukośną dla $x \to \infty$ jest zatem $y = x + 1$. Analogiczne obliczenia dla $x \to -\infty$ prowadzą do takiej samej asymptoty.



Rysunek 2.4: Wykres funkcji (2.1)

□