Universidade Federal do Ceará
Campus de Quixadá
Matemática Computacional - Trabalho Prático 01
Prof. Paulo Henrique Macêdo

Sistemas Lineares e Raízes de Equação
Trabalho em equipe: Máximo de 2 pessoas

Sistemas Lineares

Questões

1. Implemente, na linguagem que desejar, os métodos abaixo.

   a) Eliminação de Gauss;

   b) Função para a verificação de convergência dos métodos de Jacobi e Gauss-Seidel;

   c) Método de Jacobi com precisão genérica ϵ de entrada;

   d) Gauss-Seidel com precisão genérica ϵ de entrada.

2. Compare as soluções retornadas pelos três métodos acima (Eliminação de Gauss, Jacobi e Gauss-Seidel) rodando-os para os sistemas lineares cujas matrizes ampliadas são as seguintes (utilize $\epsilon = 10^{-5}$ para os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel):

   a)
$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 1 & 12 \\ 1 & 10 & 1 & 12 \\ 1 & 1 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

   b)
$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

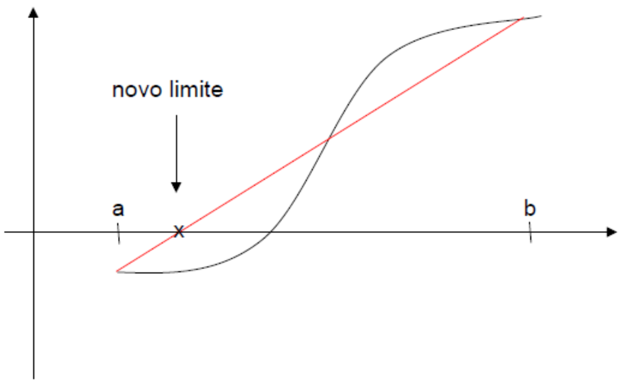
   c)
$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & -1 & 10 \\ 2 & 10 & 8 & 20 \\ 7 & 1 & 10 & 30 \end{pmatrix}$$

   d)
$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 6 \\ 3 & 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

OBS: Não esqueça de verificar a garantia de convergência nas aplicações dos métodos de Jacobi e Gauss-Seidel!

Raízes de Equação

No método da posição falsa, a função $f(x)$ é aproximada por uma função linear $g(x)$.



O coeficiente angular da função $g(x)$ é:

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \tag{1}$$

Considerando $(x_0, y_0) = (a, f(a))$,$(x_1, y_1) = (b, f(b))$,$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ e $(x, 0)$ é a raiz da função $g(x)$. Temos então:

$$\begin{array}{rcl}
y - y_0 &=& m(x - x_0) \\
-f(a) &=& \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a) \\
-f(a) &=& x\frac{f(b)-f(a)}{b-a} - a\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \\
x\frac{f(b)-f(a)}{b-a} &=& -f(a) + a\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \\
x\frac{f(b)-f(a)}{b-a} &=& \frac{-f(a)(b-a)+a(f(b)-f(a))}{b-a} \\
x(f(b) - f(a)) &=& -bf(a) + af(a) + af(b) - af(a) \\
x(f(b) - f(a)) &=& af(b) - bf(a) \\
x &=& \dfrac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}
\end{array}$$

A raiz de $g(x)$ é utilizada como uma aproximação da raiz de $f(x)$. A ideia do método da posição falsa é partir de um intervalo $[a_0, b_0]$, com $f(a_0)f(b_0) < 0$, e, em cada passo do algoritmo, encontrar um intervalo menor $[a_k, b_k]$ com $f(a_k)f(b_k) < 0$. Na iteração k, temos:

$$c_k = \frac{a_{k-1} f(b_{k-1}) - b_{k-1} f(a_{k-1})}{f(b_{k-1}) - f(a_{k-1})} \tag{2}$$

Se $f(c_k)f(a_{k-1}) < 0$, então $a_k = a_{k-1}$ e $b_k = c_k$, caso contrário, $a_k = c_k$ e $b_k = b_{k-1}$. O processo é repetido até que seja encontrada uma raiz aproximada, suficientemente compatível com o erro estimado. A única diferença entre o método da posição falsa e o método da bissecção é que o último utiliza $c_k = \frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}$

A interpretação gráfica do método da posição falsa pode ser vista na Figura **??**.

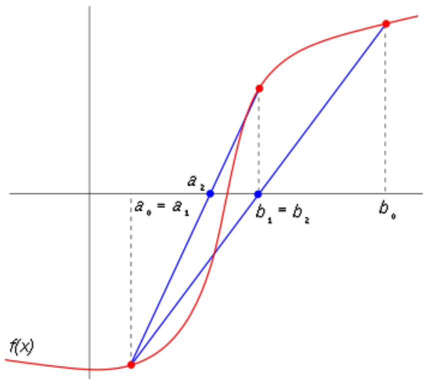


Figura 1: Interpretação Gráfica do método da posição falsa.

Se a função é côncava ou convexa em $[a, b]$, então o método da Posição Falsa mantém fixa uma das extremidades durante todo o processo, como demonstrado na Figura **??**.

A execução do método da bissecção para encontrar a raiz x da função $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x$ com $\varepsilon = 0.001$ e $x \in [-1, 0.5]$ pode ser acompanhada pela Tabela **??**.

Um resumo da execução do método da bisseção:

x	-0.000244141
Iterações	10
Intervalo da solução	(-0.000976562,0.000488281)
Erro absoluto	0.00073266

A execução do método da posição falsa para encontrar a raiz x da função $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x$ com $\varepsilon = 0.001$ e $x \in [-1, 0.5]$ pode ser acompanhada pela Tabela **??**.

Um resumo da execução do método da posição falsa:

x	0.000266329
Iterações	19
Intervalo da solução	(-1,0.00039944)
Erro absoluto	0.000798704

A interpretação gráfica do método da posição falsa pode ser vista na Figura **??**.

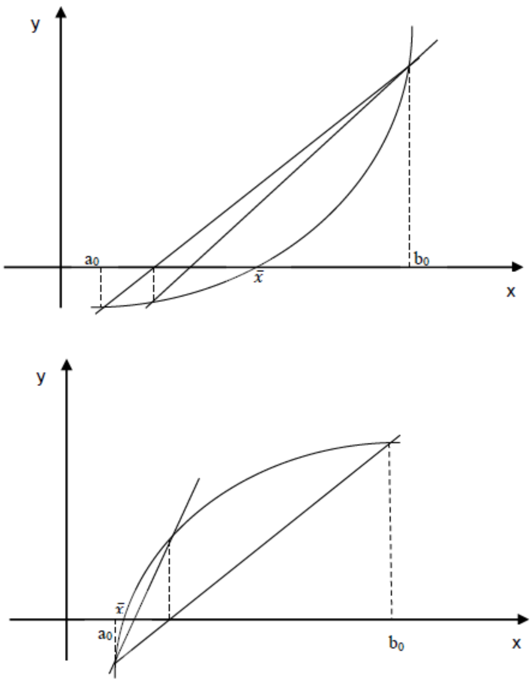


Figura 2: Comportamento do método da posição falsa quando a função f é côncava ou convexa no intervalo $[a, b]$.

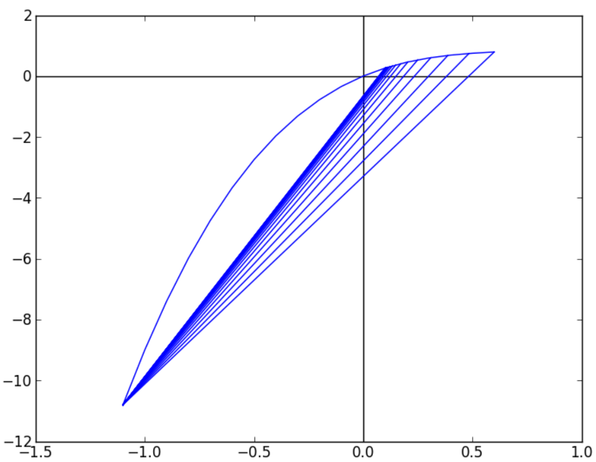


Figura 3: Interpretação gráfica da execução do método da posição falsa.

Observe que neste caso, uma das extremidades do intervalo ficou fixa durante toda a execução do método da posição falsa.

Na literatura, podemos encontrar algumas adaptações do método da posição

k	a_k	b_k	c_k	$f(c_k)$	$b_k - a_k$
0	-1.00000	0.50000	-0.25000	-1.03125	1.50000
1	-0.25000	0.50000	0.12500	0.31641	0.75000
2	-0.25000	0.12500	-0.06250	-0.20361	0.37500
3	-0.06250	0.12500	0.03125	0.08990	0.18750
4	-0.06250	0.03125	-0.01562	-0.04786	0.09375
5	-0.01562	0.03125	0.00781	0.02319	0.04688
6	-0.01562	0.00781	-0.00391	-0.01178	0.02344
7	-0.00391	0.00781	0.00195	0.00584	0.01172
8	-0.00391	0.00195	-0.00098	-0.00293	0.00586
9	-0.00098	0.00195	0.00049	0.00146	0.00293
10	-0.00098	0.00049	-0.00024	-0.00073	0.00146

Tabela 1: Iterações do método da bissecção.

falsa para ter uma convergência mais rápida. O método de Pégaso é umas dessas adaptações. Durante o método de Pégaso, os pesos atribuídos aos pontos $[a_k, b_k]$ são modificados apropriadamente.

Método de Pégaso

A ideia do método de Pégaso é partir dos valores $(a_0, f(a_0), b_0, f(b_0))$, com $f(a_0)f(b_0) < 0$, e encontrar novos valores $(a_k, f(a_k), b_k, f(b_k))$, com $f(a_k)f(b_k) < 0$, em cada iteração do método. Na iteração k, temos:

$$c_k = \frac{a_{k-1}F(b_{k-1}) - b_{k-1}F(a_{k-1})}{F(b_{k-1}) - F(a_{k-1})}$$

Se $f(a_{k-1})f(c_k) < 0$, então

$$(a_k, f(a_k), b_k, f(b_k)) \leftarrow (a_{k-1}, f(a_{k-1})\frac{f(b_{k-1})}{f(b_{k-1}) + f(c_k)}, c_k, f(c_k)) \qquad (3)$$

Note que o valor $f(a_k)$ é reduzido por um fator $\frac{f(b_{k-1})}{f(b_{k-1})+f(c_k)}$ para evitar a retenção de um ponto como ocorre no método da posição falsa. Com isso, estamos diminuindo o valor do ponto fixo na média ponderada e aumentando a velocidade de convergência. Em alguns casos, o valor de c_k pode passar da raiz, ou seja, $f(a_{k-1})f(c_k) > 0$. Quando isso acontece, consideramos que aconteceu um estouro. Essa condição será tratada a seguir:

Se $f(a_{k-1})f(c_k) > 0$, então

$$(a_k, f(a_k), b_k, f(b_k)) \leftarrow (b_{k-1}, f(b_{k-1}), c_k, f(c_k)) \qquad (4)$$

Observe que o ponto fixo da função muda de a_{k-1} para b_{k-1} tornando a condição $f(b_{k-1})f(c_k) < 0$ satisfeita. Dessa forma, a aproximação passa a ser contrária à anterior.

A execução do método de Pégaso para encontrar a raiz ξ da função $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x$ com $\varepsilon = 0.001$ e $\xi \in [-1, 0.5]$ pode ser acompanhada pela Tabela **??**.

Um resumo da execução do método da Pégaso:

k	a_k	b_k	c_k	$f(c_k)$	$b_k - a_k$
0	-1.00000	0.50000	0.38462	0.67592	1.50000
1	-1.00000	0.38462	0.28789	0.57987	1.38462
2	-1.00000	0.28789	0.20994	0.47202	1.28789
3	-1.00000	0.20994	0.14964	0.36605	1.20994
4	-1.00000	0.14964	0.10471	0.27257	1.14964
5	-1.00000	0.10471	0.07224	0.19659	1.10471
6	-1.00000	0.07224	0.04932	0.13846	1.07224
7	-1.00000	0.04932	0.03342	0.09586	1.04932
8	-1.00000	0.03342	0.02253	0.06557	1.03342
9	-1.00000	0.02253	0.01513	0.04448	1.02253
10	-1.00000	0.01513	0.01014	0.03000	1.01513
11	-1.00000	0.01014	0.00678	0.02016	1.01014
12	-1.00000	0.00678	0.00453	0.01351	1.00678
13	-1.00000	0.00453	0.00303	0.00904	1.00453
14	-1.00000	0.00303	0.00202	0.00604	1.00303
15	-1.00000	0.00202	0.00135	0.00403	1.00202
16	-1.00000	0.00135	0.00090	0.00269	1.00135
17	-1.00000	0.00090	0.00060	0.00180	1.00090
18	-1.00000	0.00060	0.00040	0.00120	1.00060
19	-1.00000	0.00040	0.00027	0.00080	1.00040

Tabela 2: Iterações do método da posição falsa.

k	a_k	b_k	c_k	$f(c_k)$	$b_k - a_k$
0	-1.00000	0.50000	0.38462	0.67592	1.50000
1	-1.00000	0.38462	0.21161	0.47467	1.38462
2	-1.00000	0.21161	0.03496	0.10007	1.21161
3	-1.00000	0.03496	-0.00825	-0.02503	1.03496
4	0.03496	-0.00825	0.00039	0.00118	0.04321
5	-0.00825	0.00039	0.00000	0.00001	0.00865

Tabela 3: Execução do método de Pégaso.

x	4.29961e-006
Iterações	5
Intervalo da solução	(-0.00825343,0.000393277)
Erro absoluto	1.28987e-005

A interpretação gráfica do método de Pégaso pode ser vista na Figura **??**.

Uma comparação entre os três métodos:

	Bissecção	Posição Falsa	Pégaso
x	-0.000244141	0.000266329	4.29961e-006
Iterações	10	19	5
Intervalo da solução	(-0.000976562,0.000488281)	(-1,0.00039944)	(-0.00825343,0.000393277)
Erro absoluto	0.00073266	0.000798704	1.28987e-005

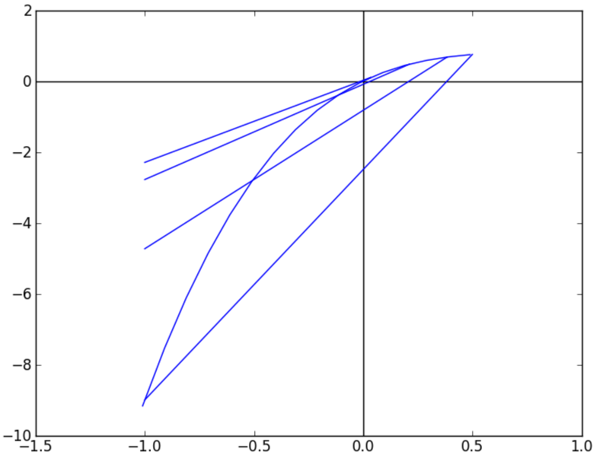


Figura 4: Interpretação gráfica da execução do método de Pégaso.

Questões

3. Implemente, na linguagem que desejar, os métodos abaixo. Cada método deve receber um intervalo inicial $[a, b]$ e a precisão ϵ para encontrar a raíz de uma função $f(x)$ no intervalo $[a, b]$.

   a) Método da Bissecção;

   b) Método da Posição Falsa;

   c) Método de Pégaso.

4. Compare os três métodos para encontrar uma raiz, usando um mesmo intervalo inicial $[a, b]$ em cada método, nas seguintes situações:

   a) $f(x) = x^5 - 3x^4 - 3x^2 + 2$, com $\epsilon = 2^{-5}$;

   b) $f(x) = \sqrt{x} - 5^{-x}$, com $\epsilon = 10^{-3}$;

   c) $f(x) = x^5 - x^4 - 4x + 1$, com $\epsilon = 0.01$;

   d) $f(x) = 0.05x^3 - 0.4x^2 + 3xSen(x)$, com $\epsilon = 0.005$.