

Práctica 4

Probabilidades

2023

¿Con qué vamos a trabajar?

- Vectores bivariados discretos y continuos.
- Calculo de probabilidades.
- Conjunta y marginales.
- Esperanza, varianza y covarianza.
- Distribución condicional.

Manos a la obra

1. De una urna que contiene 3 bolillas numeradas 1, 2 y 3, se extraen sin reposición y sucesivamente 2 bolillas. Sea X el número de la primer bolilla e Y el de la segunda.
 - a) Hallar $p_{XY}(x, y)$, $p_X(x)$ y $p_Y(y)$.
 - b) Calcular $\mathbb{P}(X < Y)$.
 - c) ¿Son X e Y independientes?
2. Sea (X, Y) un vector aleatorio discreto con función de probabilidad puntual conjunta dada por

Y/X	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0.0519	0.1779	0.2668	0.2287	0.1225	0.0420	0.0090	0.0011	0.0001
1	0.0000	0.0000	0.0001	0.0009	0.0046	0.0147	0.0294	0.0336	0.0168

- a) ¿Cuál es la distribución de Y ?
- b) Calcular $\mathbb{P}(g(X) \neq Y)$, siendo $g(x)$ la función definida por

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$g(x)$	0	0	0	0	1	1	1	1	1

3. Sea (X, Y) un vector aleatorio con distribución uniforme sobre el trapecio de vértices $(-6, 0)$, $(-3, 4)$, $(3, 4)$ y $(6, 0)$.
 - a) Hallar la densidad conjunta de (X, Y) y las funciones de densidad marginales.

b) ¿Son X e Y independientes? Justificar.

4. Sea (X, Y) un v.a. con densidad:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2x^2} & \text{si } |x| \leq 1 ; 0 < y < x^2 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} ,$$

a) Hallar $f_X(x)$ y $f_Y(y)$.

b) ¿Son X e Y independientes? Justificar.

c) Calcular $cov(X, Y)$.

d) Probar que $W = Y/X^2$ tiene distribución uniforme en el intervalo $(0, 1)$.

5. Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad conjunta dada por

$$f_{XY}(x, y) = e^{-y}, 0 \leq x \leq y .$$

a) Represente en el plano el soporte de la densidad. Es decir, la región en la cual la vale diferente de cero.

b) Hallar $\mathbb{P}(X \geq Y)$.

c) Hallar f_X y $f_{Y/X=x}$, para $x > 0$

6. Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad dada por

$$f_{X,Y}(x, y) = cxy I_{0 \leq x \leq 1} I_{0 \leq y \leq x} .$$

a) Calcule c .

b) Calcule $P(5Y \leq X)$.

c) Calcule f_Y , f_X . Calcule $\mathbb{P}(Y \leq 1/4/X = 1/2)$.

d) Calcular $cov(X, Y)$

7. Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad conjunta dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-x}e^{-2y} & \text{si } 0 < x, y \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (1)$$

a) Son X e Y independientes?

b) Calcular $P(X > 1, Y < 1)$

c) Calcular $P(X \leq Y)$.