Práctica 5

Probabilidades

2023

¿Con qué vamos a trabajar?

- Distribución condicional
- Esperanza condicional
- Teoría de la predicción
- *Clasificación*

Manos a la obra

1. Sea (X, Y) un vector aleatorio con densidad

$$f_{XY}(x,y) \;=\; \begin{cases} cx^2y & \text{si } x^2 \leq y \leq 1 \;, \\ 0 & \text{caso contrario} \,. \end{cases}$$

   a) Calcular $\mathbb{P}(Y \leq 0{,}3)$.
   b) Calcular $\mathbb{P}(Y \leq 0{,}3 \mid X = x)$.
   c) Calcular $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{E}(Y \mid X = x)$ y $\mathbb{E}(Y \mid X)$.
   d) Calcular $cov(X, Y)$ y $\rho(X, Y)$, recordando que $\rho(X, Y) = cov(X, Y)/(\sigma_X \sigma_Y)$.

2. (Ej. 5 de la Práctica 4) Sea (X, Y) un vector aleatorio con densidad

$$f_{XY}(x,y) \;=\; \begin{cases} e^{-y} & \text{si } 0 \leq x \leq y \;, \\ 0 & \text{caso contrario} \,. \end{cases}$$

   a) Hallar la distribución de X y la de $Y \mid X = x$. Identificar a qué familia pertenece cada distribución.
   b) Calcular $\mathbb{P}(Y > 1{,}3 \mid X = 0{,}8)$.
   c) Calcular $\mathbb{E}(Y \mid X = x)$ y $\mathbb{E}(Y \mid X)$.
   d) Calcular $cov(X, Y)$ y $\rho(X, Y)$, recordando que $\rho(X, Y) = cov(X, Y)/(\sigma_X \sigma_Y)$.

3. (Ej. 6 de la Práctica 4)Sea (X, Y) un vector aleatorio con funcion de densidad dada por

$$f_{X,Y}(x,y) \;=\; cxy \; I_{0 \leq x \leq 1} I_{0 \leq y \leq x} \;.$$

   a) Halla el valor de c.
   b) Calcular $\mathbb{P}(1/8 < Y \leq 1/4 \mid X = 1/2)$.

c) Calcular $\mathbb{E}(Y)$ y $\mathbb{E}(Y \mid X = 1/2)$ y $\mathbb{E}(Y \mid X)$.

d) Calcular el mejor predictor lineal para Y basado en X.

4. Sean $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ variables independientes. Probar que la distribución de $X \mid X+Y = n$ es Binomial y especificar sus parámetros.

5. Sea $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Suponga que $X \mid N = n \sim \mathcal{B}(n, p)$. Calcular $\mathbb{E}(X)$ y la distribucion de X.

6. $X \sim \mathcal{U}(0, 1)$, $Y \mid X = x \sim \mathcal{B}(n, x^2/3)$.

   a) Calcular $\mathbb{E}(Y)$.

   b) Obtener una expresión para $F_Y(y)$ en término de los parámetros dados.

7. $X \sim \mathcal{U}(-a, a)$, $Y \mid X = x \sim \mathcal{N}(\beta_0 + \beta_1 x, \sigma^2)$.

   a) Hallar $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y \mid X)$ y $\mathbb{E}(Y)$

   b) Hallar $V(X)$, $V(Y \mid X)$, $V(Y)$.

8. $(X_i)_{i\geq 1}$ iid, $\mathbb{E}(X_i) = \mu$. $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Hallar la esperanza de

$$Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

9. Cada alumno inscripto en un curso de pobabilidad debe rendir dos examens. Denote por X la nota que obtiene en el primero y por Y la nota que obtiene en el segundo. El vector aleatorio (X, Y) tiene funcion de densidad conjunta dada por

$$f_{XY}(x, y) \;=\; \begin{cases} c\,\frac{1}{10 - x/2} & \text{si } 0 \leq x \leq 10 \;;\; x/2 \leq y \leq 10 \;, \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \tag{1}$$

   a) Represente en el plano el soporte de la densidad. Es decir, la region en la cual la densidad vale diferente de cero. Son la variables independientes?

   b) Halle c.

   c) Calcule la funcion de densidad de X. Si el primer examen se aprueba con 5, hallar la probabilidad de aprobarlo.

   d) Hallar $f_{Y|X=x}(y)$, para $x \neq 0$. Cual es la distribucion de $Y \mid X = x$?

   e) Calcular $\mathbb{E}(Y \mid X)$ y $\mathbb{E}(Y)$.

   f) Hallar el mejor predictor lineal para la nota del segundo examen basado en la nota del primero. ¿Qué valor se utilizaría para predecir la nota del segundo examen siendo que en el primero se obtuvo un 6?

   g) Calcular $V(Y)$. Para ello, recordar que $V(Y) = \mathbb{E}\{V(Y \mid X)\} + V(\mathbb{E}(Y \mid X))$.

   h) Suponiendo que el curso consta de 36 alumnos cuyas notas son i.i.d, distribuidas segun la densidad f_{XY}, definida en (1). Aproximar la probabilidad de que el promedio de las notas de los 36 alumnos correspondientes al segundo examen sea mayor o igual a 6.