Práctica 2

Probabilidades

2023

1 ¿Con qué vamos a trabajar?

- Convergencia en probabilidad
- Suma y promedio de variables aleatorias independientes
- Ley de los Grandes Números
- Máximos y mínimos.

2 Manos a la obra

1. Modelo para medición con error aditivo. Se desea determinar una magnitud μ. Para ello se realizarán n medidas repetidas, es decir, se realizarán n mediciones de la misma magnitud en idénticas condiciones, que denotaremos con $X_1, \ldots, X_n$. Asumimos el siguiente modelo para las variables aleatorias X_i

   $$X_i = \mu + \varepsilon_i$$

   donde μ es la verdadera magnitud desconocida, y ε_i es la variable aleatoria que denota el error de la iésima medición. Asumimos que $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (v.a.i.i.d.) con esperanza cero y varianza $\sigma^2 = 0.25$. Notar que los errores son no observables. El supuesto de que $\mathbb{E}(\varepsilon_i) = 0$ refleja la creencia en que el método de medición empleado es exacto. Es decir que no produce errores sistemáticos. La varianza del error, $\sigma^2 = \mathbb{V}(\varepsilon_i)$ representa la precisión del método de medición empleado. Sea

   $$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

   el promedio (o media muestral) de las n observaciones.

   Asumir ahora que el error de medición tiene una distribución normal con media cero. Este modelo probabilístico se conoce como el Modelo de Gauss sin sesgo. Asumir también que el error de medición tiene desvío estándar $\sigma = 0.5$, o sea que $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0; 0.25)$.

   (a) Obtener la distribución de $\overline{X}_n$, su esperanza y su varianza.

   (b) Calcular la probabilidad de que el promedio de $n = 10$ mediciones diste de la verdadera magnitud μ en menos de 0.1 unidades. Notar que no fue necesario conocer el valor de μ para realizar este cálculo.

   (c) Obtener una expresión para la probabilidad de que el promedio de n mediciones diste de la verdadera magnitud μ en menos de 0.1 unidades en función de n. Estudiar la monotonía y el límite cuando n tiende a infinito de esta probabilidad.

(d) Determinar cuán grande debe ser n para que $P\left(|\overline{X}_n - \mu| < 0.1\right) \geq 0.99$.

(e) Calcular la siguiente probabilidad

$$\mathbb{P}\left(\overline{X}_n - \frac{1.96 \times \sqrt{0.25}}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X}_n + \frac{1.96 \times \sqrt{0.25}}{\sqrt{n}}\right)$$

2. Considerar nuevamente el modelo de mediciones propuesto en el ejercicio anterior, suponiendo ahora que ε_i tiene una distribución **desconocida**, pero se sabe que

$$E(\varepsilon_i) = 0\ , \quad V(\varepsilon_i) = 0.25$$

(a) Hallar $\mathbb{E}(\overline{X}_n)$ y $\mathbb{V}(\overline{X}_n)$.

(b) Para $n = 10$ mediciones, usando la desigualdad de Chebyshev, encontrar una cota inferior para

$$P\left(|\overline{X}_n - \mu| < 0.1\right).$$

Comparar el resultado obtenido con el hallado en el ítem (b) del ejercicio anterior.

(c) Determinar cuán grande debe ser n para que $P\left(|\overline{X}_n - \mu| < 0.1\right) \geq 0.99$, usando nuevamente la desigualdad de Chebyshev. Comparar el resultado obtenido con el valor hallado en el ítem (d) del ejercicio anterior.

3. Sea p la probabilidad de que una persona elegida al azar apoye una nueva propuesta legislativa (p desconocida). Si se estima p a partir de la frecuencia relativa f_n que resulta al encuestar a n personas, siendo

$$f_n = \frac{\text{número de personas que apoyan la propuesta}}{n}.$$

Calcular el mínimo tamaño de muestra n requerido para que $\mathbb{P}(|f_n - p| \leq 0.1) \geq 0.95$.

4. Sean $X_i \sim \mathcal{U}(0, \theta)$ iid. Sea

$$M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}.$$

(a) Asumiendo que $\theta = 2$ y $n = 3$ calcular $\mathbb{P}\left(|M_n - \theta| > 0.5\right)$.

(b) Asumiendo que $\theta = 2$, hallar n_0 a partir del cual

$$\mathbb{P}\left(|M_n - \theta| > 0.5\right) \leq 0.1$$

(c) Demostrar que $M_n \xrightarrow{P} \theta$ cuando $n \to \infty$.

5. Sean T_i, $i \geq 1$, variables aleatorias independientes, con $T_i \sim \mathcal{E}(\lambda_i)$. Sea

$$V_n = \min\{T_1, \ldots, T_n\}.$$

(a) Hallar F_n, la función de distribución acumulada de V_n y f_n, su función de densidad. Indicar si V_n tiene una distribución *famosa*. ¿Cuánto vale la esperanza de V_n? ¿Cuánto vale la varianza de V_n?

(b) Asumiendo que $\lambda_i = 1/i$, calcular $\mathbb{P}(V_n \leq 0.64)$ cuando $n = 4$.

6. Sean $(X_n)_{n\geq 1}$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuídas, con $X_n \sim \mathcal{E}(1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y sea

$$Y_n = \frac{X_n}{\ln(n)}.$$

Probar que $Y_n \xrightarrow{P} 0$.

7. Sean $(X_i)_{i\geq 1}$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuídas, con $\mathbb{E}(X_i) = 1$ y $var(X_i) = 1$. Probar que

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{(n\sum_{i=1}^n X_i^2)^{1/2}} \xrightarrow{P} \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

8. Sean $(X_i)_{i\geq 1}$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuídas, con $\mathbb{E}(X_n) = 1$ y $V(X_n) = 2$. Completar indicando el límite en probabilidad de la siguiente sucesión

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \left(\overline{X}_n\right)^2 \xrightarrow{P} \ldots, \quad \text{siendo} \quad \overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$$

9. Sea $U_1, \ldots, U_n$ una muestra aleatoria con distribución $\mathcal{U}[0,1]$ y sea $h(u) = e^u$.

   (a) Se define $I_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n h(U_i)$. Indicar cuál es el límite en probabilidad de I_n.

   (b) Probar computacionalmente el método propuesta y comparar con el verdadero valor de la integral.

   (c) Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Consideremos la integral $I = \int_0^1 h(x)\,dx$. Proponer un método de aproximación *probabilístico* para $I = \int_0^1 h(x)\,dx$.

   (d) Aproximar númericamente la siguiente integral y comparar con el valor obtenido por otro método

   $$\int_0^1 \exp^{-x^2/2}\,dx.$$

   (e) Extender el método hallado para aproximar

   $$I = \int_a^b h(x)\,dx$$

   siendo a y b números reales tales que $a < b$.