Práctica 3

Probabilidades

2023

1. ¿Con qué vamos a trabajar?

- Convergencia en distribución
- Teorema Central del límite

2. Manos a la obra

1. Recordemos que el modelo para mediciones con error aditivo postula que la i-ésima medición X_i satisface
$$X_i = \mu + \varepsilon_i,$$
donde μ es la magnitud desconocida de interés mientras que ε_i denota el *error* correspondiente a la i-ésima medición. Decimos que el equipo esta bien calibrado, es decir produce mediciones exactas, cuando $\mathbb{E}(\varepsilon_i) = 0$. Asumiendo que el equipo este bien calibrado y que $V(\varepsilon_i) = 0{,}25$, calcular de forma aproximada la probabilidad $P\left(|\overline{X}_n - \mu| < 0{,}1\right)$, para $n = 100$ y determinar cuán grande debe ser n para que $P\left(|\overline{X}_n - \mu| < 0{,}1\right) \geq 0{,}99$. Comparar con los resultados obtenidos en los ejercicios 1 y 2 de la Práctica 2. ¿Qué se observa?

2. Un negocio de mascotas ofrece el siguiente servicio para sus clientes que toman vacaciones. El servicio consiste en alquilarle al dueño de la mascota un dispenser automático de raciones diarias de alimento balanceado. Cuando el animal termina de comer una ración, automáticamente, el dispenser pone a su disposición la ración siguiente. El tiempo (en días) que el gato de Felipe demora en comer una ración de alimento es una variable aleatoria Exponencial con parámetro $\lambda = 2$. Se puede suponer que los tiempos que tarda en comer cada ración son independientes entre sí.

   a) Felipe se va 30 días de vacaciones y contrata este servicio con 62 raciones. Si el gato no tiene comida disponible se escapa de la casa. ¿Cuál es, aproximadamente, la probabilidad de que Felipe encuentre al gato en su hogar al volver de las vacaciones?

   b) ¿Cuántas raciones tiene que comprar si quiere encontrar al gato en su casa al volver de las vacaciones con una probabilidad aproximada mayor o igual que 0,99?

3. Para rellenar una zona del río se utilizan 2 camiones (A y B). La distribución de la carga diaria (en toneladas métricas) transportada por el camión A tiene función de densidad
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{52} & \text{si } 11 < x < 15, \\ \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$
El camión B lleva una carga diaria en toneladas con esperanza 18 Tm y desvío estándar 1,3 Tm.

a) Calcular esperanza y varianza de la carga diaria transportada por A.

b) Calcular esperanza y desvío estándar de la carga total llevada por los dos camiones en un día, asumiendo que las cargas transportadas por ambos camiones son independientes.

c) Calcular **aproximadamente** la probabilidad de que la carga total transportada en 256 días esté entre 7950 y 8000 Tm. Asuma que las cargas transportadas en días distintos son independientes.

d) ¿Puede calcular la probabilidad pedida en c) **exactamente**?

4. Una empresa láctea produce una cierta variedad de queso en unidades (hormas) cuyo peso, en kg., es una v.a. con media $\mu = 4{,}6$ y varianza $\sigma^2 = 0{,}49$.

   a) Calcular en forma aproximada la probabilidad de que 64 quesos pesen más de 290 kilos.

   b) Una pizzería necesita al menos 3375 Kg para sus ventas de una noche. ¿Cuántas unidades serán necesarias para satisfacer un pedido de la pizzería con probabilidad (aproximada) mayor o igual que 0,99?

5. Sean $(X_i)_{i\geq i}$ iid, $X_i \sim \mathcal{U}(0,\theta)$. Sea

$$M_n = \text{máx}\{X_1, \ldots, X_n\}.$$

   Demostrar que $W_n = n\{\theta - M_n\} \xrightarrow{D} \mathcal{E}(1/\theta)$.

6. Sean $(X_i)_{i\geq i}$ iid, $X_i \sim \mathcal{U}(0,\theta)$. Sea

$$W_n = \frac{\sqrt{n}\{2\overline{X}_n - \theta\}}{\sqrt{\overline{X}_n^2}}$$

   Demostrar que W_n converge en distribución a una ley normal y especificar sus parámetros.

7. Sean $(X_n)_{n\geq 1}$ variables aleatorias iid con $\mathbb{E}(X_i) = 0$ y $\mathbb{E}(X_i^2) = 2$. Hallar el límite en distribucuión de cada una de las siguientes variables aleatorias.

   a) $Y_n = (\sqrt{n}\sum_{i=1}^n X_i) \,/\, \sum_{i=1}^n X_i^2$

   b) $U_n = (\sum_{i=1}^n X_i) \,/\, \sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}$

8. Sean $(X_i)_{i\geq i}$ iid, $X_i \sim \mathcal{U}(0,\theta)$. Probar que

$$W_n = \sqrt{n}\{\ln(2\overline{X}_n) - \ln(\theta)\}$$

   converge en distribución a una ley normal y especificar sus parámetros.

9. Volvamos al modelo de mediciones con errores aditivos, presentado en el ejecicio 1. Se desea ahora determinar si el equipo con el que se realizan las mediciones se encuentra bien calibrado; es decir, saber si el error de las mediciones que produce tienen media 0: $\mathbb{E}(\varepsilon_i) = 0$. Para ello se utiliza una **muestra patrón** provista por el INTI, cuyo valor es 70 (mg).

   a) Caso 1: ε_i tiene una distribución normal con desvío $\sigma = 10$. Se realizan $n = 4$ mediciones, obteniéndose un promedio igual a 72,3. Asumiendo que el equipo esta calibrado, calcular la probabilidad de que $\overline{X}_n$ diste del valor patrón tanto como el promedio observado o más. ¿Resulta razonable suponer que el equipo esta calibrado?

b) Caso 2: ε_i tiene una distribución **desconocida** con desvío $\sigma = 10$. Se realizan $n = 40$ mediciones, obteniéndose un promedio igual a 72,3 y un desvío estimado de Asumiendo que el equipo esta calibrado, calcular la probabilidad aproximada de que $\overline{X}_n$ diste del valor patrón tanto como el promedio observado o más. ¿Resulta razonable suponer que el equipo esta calibrado?

10. $^{(*)}$ Sean $X_1, X_2, \ldots,$ iid, con densidad f, de forma tal que $P(X_i > 0) = 1$. Sea $\lambda = \text{lím}_{x \downarrow 0} f(x)$. Definimos

$$W_n = n \ \text{mín}\{X_1, \ldots, X_n\}.$$

Demostrar que X_n converge en distribución a una ley exponencial de parámetro λ.