LA DISTRIBUCIÓN ELEGIDA PARA TRABAJAR ES LA BINOMIAL NEGATIVA

Consideramos la siguiente parametrización:

$X \sim BN(r, \mu)$ con función de proba puntual:

$$P_X(x) = \frac{\Gamma(x+r)}{x!\,\Gamma(r)} \left(\frac{r}{r+\mu}\right)^r \left(\frac{\mu}{r+\mu}\right)^x \quad \text{con } x = 0, 1, 2, \dots$$

Además, se tiene que: $E(X) = \mu$ y $V(X) = \mu + \frac{\mu^2}{r}$

Estimador(es) de momentos para μ y r

Consideramos $\theta = (r, \mu)$ y $X_1, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} BN(r, \mu)$. Planteando el primer y 2do momento:

- $\bar{X} = E_\theta(X) \Rightarrow \boxed{\bar{X} = \hat{\mu}}$
- $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = E_\theta(X^2)$

Calculemos $E(X^2)$: $E(X^2) = V(X) + (E(X))^2 = \mu + \frac{\mu^2}{r} + \mu^2$

Luego:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \hat{\mu} + \frac{\hat{\mu}^2}{\hat{r}} + \hat{\mu}^2 \quad \text{y} \quad \bar{X} = \hat{\mu}$$

Despejamos $\hat{r}$:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X} - \bar{X}^2 = \frac{\bar{X}^2}{\hat{r}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{r} = \frac{\bar{X}^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X} - \bar{X}^2}}$$

Obteniendo:

$$\hat{\mu}_{MO} = \bar{X}$$

$$\hat{r}_{MO} = \frac{\bar{X}^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X} - \bar{X}^2}$$

* Ahora veamos la <u>consistencia</u>:

- Por LGN, $\bar{X} \xrightarrow{c.s} E(X) = \mu \Rightarrow \hat{\mu}$ es un est. consistente para μ.

- Por otra parte:

Por LGN, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \xrightarrow{c.s} E(X^2) = \mu + \frac{\mu^2}{r} + \mu^2$

Además, como $\bar{X} \xrightarrow{c.s} \mu$ y $g(t) = t^2$ es continua

$\bar{X}^2 \xrightarrow{c.s} \mu^2$. Luego:

$$\frac{\bar{X}^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X} - \bar{X}^2} \xrightarrow{c.s} \frac{\mu^2}{\cancel{\mu} + \frac{\mu^2}{r} + \cancel{\mu^2} - \cancel{\mu} - \cancel{\mu^2}} = r$$

$\downarrow$ props de convergencia

$\Rightarrow \hat{r}$ es consistente para r.

* Distribución asintótica: la vemos mediante simulaciones.

EMV para μ y r → usamos fitdistr para estimar
→ Consistencia y distribución asintótica con simulaciones.