Estadística Bayesiana - UBA/IC 2024

Trabajo Práctico Nro 1

1. En un grupo de personas de las cuales sólo dos saben manejar (las personas A y B), en cada salida la persona A arroja una moneda, y el resultado indica quien será el conductor designado (si sale cara, el conductor designado será B). Luego de 12 salidas, en 9 ocasiones el conductor designado por el lanzamiento de la moneda fue el conductor B.

   a) Defina distribuciones a priori que representen:

      a1) una persona que cree sin demasiada convicción que A controla de alguna manera la moneda de manera que el 70% de las veces sea designado el conductor B,

      a2) una persona que tiene una convicción fuerte de que la moneda está equilibrada,

      a3) una persona que tiene una convicción fuerte de que la moneda está sesgada, de manera que el 70% de las veces saldrá seleccionado el conductor B.

   b) Se genera un debate, por lo que una tercer persona, C, arroja la moneda (siempre es la misma moneda) 20 veces, obteniendo 9 caras. Utilizando las *a priori* calculadas previamente, actualizar el conocimiento actual, calculando las respectivas *a posteriori*, y construyendo un intervalo de credibilidad del 95% para el parámetro $p =$ "probabilidad de que la moneda salga cara".

2. Se toma una muestra aleatoria simple $x_1, \ldots, x_n$ de una población con ditribución doble exponencial con densidad $f_X(x;\theta) = \frac{\theta}{2}\exp(-\theta\,|x|)$ donde el parámetro $\theta > 0$.

   a) En un tratamiento Bayesiano se propone que el parámetro $\Theta \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$, es decir que

   $$f_\Theta(\theta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\theta^{\alpha-1}e^{-\left(\frac{\theta}{\beta}\right)}$$

   con hiperparámetros $\alpha > 0$ y $\beta > 0$. Encuentre el estimador Bayesiano $\hat{\theta}^{\text{B}}$ en base a la muestra,

   b) En una aplicación con datos concretos se consulta a un experto y se elucidan los hiperparámetros $\alpha = 3$ y $\beta = 2$. Asimismo, se obtiene una muestra con valores $2.0, -3.0, 1.0, -4.0, 2.5, -1.2, 0.5, 0.2, -0.25, 0.3$. Calcule las estimaciones de $\hat{\theta}^{\text{MV}}$ y de $\hat{\theta}^{\text{B}}$.

   c) ¿piensa usted que el experto tenía razón? Explíquese clara y concisamente.

3. Sea $\{x_1, \ldots, x_n\}$ una muestra aleatoria i.i.d. de una variable aleatoria con distribución $\mathcal{N}(\mu, 4)$.

   a) Si, proponiendo un tratamiento Bayesiano, consideramos una distribución a priori $\mathcal{N}(a, 4)$ para μ, hallar la distribución a posteriori.

b) Si se observa una muestra de tamaño 20 con media $3,25$ y desvío muestral $2,22$, hallar una estimación de μ mediante un estadístico suficiente y el estimador Bayesiano (bajo función de pérdida cuadrática), si modelizamos $\mu \sim \mathcal{N}(2,4)$.

4. Considere un modelo Bayesiano en el que la distribución apriori para Θ es exponencial con tasa de fallos η, de tal manera que $\lambda(\theta) = \eta e^{-\eta\theta}$ con $\theta > 0$. Dado $\Theta = \theta$, los datos $X_1, \ldots, X_n$ son i.i.d. de una distribución de Poisson con media θ.

   (a) Determine un estimador Bayesiano de θ.

   (b) Para el caso particular the $p = 0$, aproxime el estimador Bayesiano para $n \to \infty$.

   (c) Para el caso particular the $p = 0$, aproxime el estimador Bayesiano para $\eta \to 0$.

5. En un tratamiento Bayesiano al problema de la regresión lineal, suponga que la ordenada al origen Θ_1 y la pendiente Θ_2 de la recta de regresión poblacional son apriori independientes con distribuciones $\Theta \sim N(0, \tau_1^2) \perp \Theta_2 \sim N(0, \tau_2^2)$. Dadas $\Theta_1 = \theta_1$ y $\Theta_2 = \theta_2$, los datos $Y_1, \ldots, Y_n$ son independientes con $Y_i \sim N(\theta_1 + \theta_2 x_i, \sigma^2)$, donde la varianza σ^2 es conocida y $x_1, \ldots, x_n$ son constantes conocidas (puntos de diseño) que suman cero, $x_1 + \ldots + x_n = 0$. Encuentre los estimadores Bayesianos de θ_1 y θ_2 (bajo error medio cuadrático).

6. En una compañía de transporte de pasajeros de larga distancia que posee un número grande de vehículos, la cantidad de micros que se descomponen en un intervalo de t días se supone Poisson con media $t\lambda$, donde el parámetro λ representa la tasa diaria de micros que se descomponen. Los valores posibles de Λ, de a cuerdo a la opinión apriori del personal técnico de la empresa son $\lambda = 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3,$ con respectivas probabilidades puntuales $0,1; 0,2; 0,3; 0,2; 0,15; 0,05$. Si en los próximos seis días se observa que se descomponen $y = 12$ micros:

   (a) Encontrar la distribución a posteriori de Λ.

   (b) Calcular la probabilidad de que la semana subsiguiente no presente roturas de ómnibus.