TP Inferencia Estadística

Jesica Charaf e Ignacio Spiousas

25 de junio de 2023

El problema

Una fuente radiactiva emite partículas alfa de acuerdo con un proceso de Poisson de intensidad λ por segundo. Se tiene una fuerte sospecha de que el parámetro desconocido supera 0.5, y con el objetivo de confirmar dicha sospecha se medirán los tiempos entre emisiones consecutivas, obteniendo de esa manera una muestra de variables aleatorias independientes con distribución $\mathcal{E}(\lambda)$.

Se proponen dos alternativas, con respecto a la construcción del test de hipótesis:

1. Armar un test de nivel exacto α a partir del estadístico $T_1 = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
2. Armar un test de nivel asintótico α a partir del estadístico $T_2 = \sqrt{n}\frac{\bar{X}-2}{2}$

El objetivo es comparar ambos métodos mediante una simulación en **R**, para luego elegir uno de ellos y realizar el experimento. Para cada valor de $n \in \{10, 30, 100, 1000\}$ se quiere estudiar el nivel empírico, y compararlo para las dos alternativas propuestas. También se desea aproximar y graficar la función potencia, y comparar.

Consideramos el siguiente procedimiento para la simulación:

- Generar una muestra de tamaño n de una distribución $\mathcal{E}(\frac{1}{2})$
- Calcular el valor del estadístico T para los dos test propuestos. Rechazar H_0 si el p-valor es menor al nivel 0.05.
- Repetir los ítems anteriores $N_{rep} = 10000$ veces, contando el total de veces en que se rechazó H_0. Se puede estimar el nivel de este test como la proporción empírica de rechazos, es decir, dividiendo la cantidad total de rechazos por N_{rep}, para cada valor de n, y armar una tabla con los resultados obtenidos.

Se pide:

a. Plantear claramente las hipótesis.

b. Justificar la elección de los dos estadísticos que propone el enunciado, y determinar sus distribuciones (exacta o asintótica) bajo H_0.

c. Realizar la simulación pedida para los diferentes valores de n, calcular el nivel empírico y expresarlo en una tabla.

d. Para cada uno de los valores propuestos de n y eligiendo una grilla de valores para λ, aproximar y graficar la función potencia.

e. Concluir en base a los resultados observados.

La resolución

a. Plantear claramente las hipótesis.

Consideramos que lo razonable es que la hipótesis nula sea que el parámetro **NO** supera el valor de 0.5 y la hipótesis alternativa que **SÍ** lo supera. Como dice el enunciado, se tiene la "sospecha" de que es mayor, por ende, el *status quo* es que el parámetro es menor. Simbólicamente:

$$H_0 : \lambda \leq 0.5 \qquad y \qquad H_1 : \lambda > 0.5$$

b. Justificar la elección de los dos estadísticos que propone el enunciado, y determinar sus distribuciones (exacta o asintótica) bajo H_0.

Primero vamos a desarrollar el **test de nivel exacto** α.

Partimos de que las mediciones son i.i.d y tienen la siguiente distribución:

$$X_1, ..., X_n \overset{i.i.d}{\sim} \mathcal{E}(\lambda)$$

O sea que la función de densidad de cada X es:

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathcal{I}_{x \geq 0}$$

$I\{x \geq 0\}$

Justamente por ser independientes, la densidad condicional se puede escribir como la productoria de las densidades individuales

$$f(\underset{\sim}{x}) = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x} \mathcal{I}_{x_i \geq 0}$$

ÍDEM

Y por ser idénticamente distribuidas podemos operar y llegar a:

$$f(\underset{\sim}{x}) = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i} \prod_{i=1}^{n} \mathcal{I}_{x_i \geq 0}$$

De este resultado podemos ver que se trata de una distribución de familia exponencial donde:

$$A(\lambda) = \lambda^n$$
$$C(\lambda) = -\lambda$$
$$r(\underset{\sim}{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i$$
$$h(\underset{\sim}{x}) = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{I}_{x_i \geq 0}$$

Entonces el estadístico (T_1 desde ahora) es igual $r(\underset{\sim}{X})$, de manera que el mismo queda definido como:

$$T_1 = r(\underset{\sim}{X})$$

$$T_1 = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Recuperando el estadístico propuesto en el enunciado del problema y teniendo en cuenta que $C(\lambda)$ es una función decreciente con λ, estamos en condiciones de escribir el test uniformemente más potente (UMP) de la siguiente forma:

$$\delta(\underset{\sim}{X}) = \begin{cases} 1 & si \quad -\sum_{i=1}^{n} X_i > K_\alpha \\ 0 & si \quad no \end{cases} .$$

con K_α tal que:

$$P_{\lambda=0.5}[\delta(\underset{\sim}{X}) = 1] = \alpha$$

y

Entonces, lo siguiente que tenemos que hacer es calcular K_α, y para esto vemos a "pararnos" en un mundo en el que H_0 es verdadera. Bajo el mundo H_0, vamos a considerar al parámetro como $\lambda = 0.5$, por lo tanto, la distribución de cada una de las variables aleatorias será $X_i \overset{i.i.d}{\sim} \mathcal{E}(\frac{1}{2})$. Con esto en mente, podemos determinar la distribución de la suma de variables aleatorias (que es el estadístico T_1):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} X_i &\sim \Gamma\left(n, \frac{1}{2}\right) \\ &\sim \chi^2_{2n} \end{aligned}$$

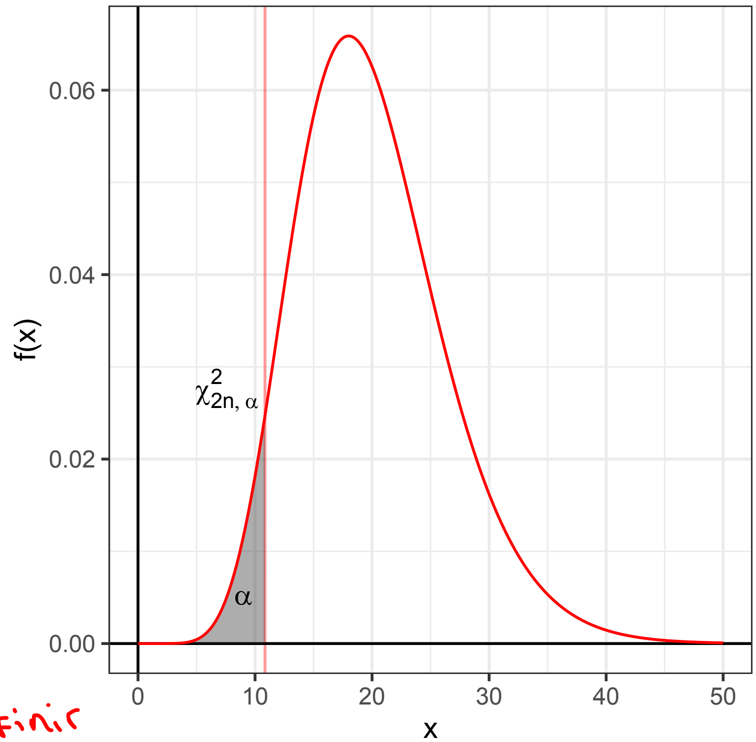
Es decir, la suma de variables aleatorias $X_i \overset{i.i.d}{\sim} \mathcal{E}(\frac{1}{2})$ tiene distribución χ^2_{2n}. Entonces ahora vayamos a despejar K_α de la condición $P_{\lambda=0.5}[\delta(\underset{\sim}{X}) = 1] = \alpha$

$$\begin{aligned} \alpha &= P_{\lambda=0.5}[\delta(\underset{\sim}{X}) = 1] \\ &= P_{\lambda=0.5}(-\sum_{i=1}^{n} X_i > K_\alpha) \\ &= P_{\lambda=0.5}(\sum_{i=1}^{n} X_i < -K_\alpha) \\ &= P_{\lambda=0.5}(\sum_{i=1}^{n} X_i < \chi^2_{2n,\alpha}) \end{aligned}$$

Es decir, $-K_\alpha$ es igual al cuantil α de la distribución Chi cuadrado de grados de libertad $2n$ ($\chi^2_{2n,\alpha}$).

Por ejemplo, en la figura a continuación podemos ver, para $n = 10$ y $\alpha = 0.05$, el cuantil de la distribución (línea roja vertical, $\chi^2_{2n,\alpha}$) junto con el área gris que representa a la probabilidad acumulada de $\alpha = 0.05$.

que se muestra



Definir

Finalmente, podemos al test de nivel exacto como:

<

$$\delta(\underset{\sim}{x}) = \begin{cases} 1 & si \quad \sum_{i=1}^{n} x_i > \chi^2_{2n,\alpha} \\ 0 & si \quad no \end{cases} \qquad .$$

X_i

Ahora sigamos con el **test de nivel asintótico** α.

Partimos de nuevo de que las mediciones son i.i.d y tienen la siguiente distribución:

$$X_1, ..., X_n \overset{i.i.d}{\sim} \mathcal{E}(\lambda)$$

Sabemos que $E(X_i) = \frac{1}{\lambda}$ y que $V(X_i) = \frac{1}{\lambda^2}$, por lo tanto $E(\bar{X}) = \frac{1}{\lambda}$ y que $V(\bar{X}) = \frac{1}{n}\frac{1}{\lambda^2}$. Entonces, usando el teorema central del límite podemos decir que:

$$\frac{\bar{X} - \frac{1}{\lambda}}{\sqrt{\frac{1}{n\lambda^2}}} \overset{\mathcal{D}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$$
$$\sqrt{n}\frac{\bar{X} - \frac{1}{\lambda}}{1/\lambda} \overset{\mathcal{D}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$$

Ahora volvemos a "pararnos" en H_0 y a considerar a $\lambda = 0.5$ (el supremo de Θ_1) y nos queda:

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X} - \frac{1}{0.5}}{1/0.5} \overset{\mathcal{D}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$$
$$\sqrt{n}\frac{\bar{X} - 2}{2} \overset{\mathcal{D}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$$

q

~~Q~~ue corresponde con el estadístico T_2 planteado en el enunciado. Luego, hallamos un K'_α tal que:

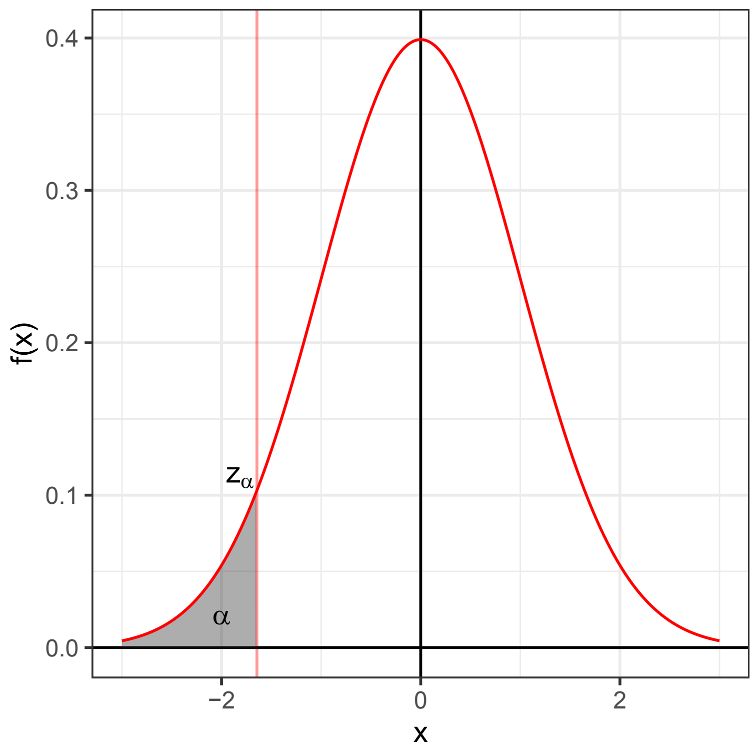
$$P_{\lambda=0.5}\left(\sqrt{n}\frac{\bar{X}-2}{2} < K'_\alpha\right) \overset{n\to\infty}{\rightarrow} \alpha$$

De forma que el test asintótico de nivel α queda definido como:

$$\delta(\underset{\sim}{x}) = \begin{cases} 1 & si \quad \sqrt{n}\frac{\bar{X}-2}{2} < Z_\alpha \\ 0 & si \quad no \end{cases}$$

0.05

En este caso el cuantil que tenemos que buscar es el de una distribución $\mathcal{N}(0,1)$. Por ejemplo, para $\alpha = .05$:



c. Realizar la simulación pedida para los diferentes valores de n, calcular el nivel empírico y expresarlo en una tabla.

generando muestras de tamaño n con distrib. $\mathcal{E}(\frac{1}{2})$

Ahora lo que vamos a hacer es simular el "experimento" y medir la cantidad de veces que se rechazó H_0 para ver cómo se relaciona eso con el n para cada uno de los tests propuestos (el UMP y el asintótico). Vamos a realizar `Nrep=10000` simulaciones de cada test con valores de `n = c(10,30,100,1000)`.

```
# La función simulación simula el experimento y se fija el resultado del test
simulacion_UMP <- function(Nrep, n, lambda){
  rechazos <- rep(NA,Nrep)
  for (i in 1:Nrep) {
    set.seed(2*i) # Para tener la misma muestra para cada simulación
    muestra <- rexp(n, lambda)
    estadistico <- sum(muestra) # El estadístico del test UMP
    rechazos[i] <- pchisq(estadistico, 2*n)<0.05 # El test compara con Chisq
  }
```

```r
  alpha_emp <- mean(rechazos)
  return(alpha_emp)
}

simulacion_asin <- function(Nrep, n, lambda){
  rechazos <- rep(NA,Nrep)
  for (i in 1:Nrep) {
    set.seed(2*i) # Para tener la misma muestra para cada simulación
    muestra <- rexp(n, lambda)
    estadistico <- sqrt(n)*(mean(muestra)-2)/2 # El estadístico del test asintótico
    rechazos[i] <- pnorm(estadistico, 0, 1)<0.05 # El test compara con Norm
  }

  alpha_emp <- mean(rechazos)
  return(alpha_emp)
}

set.seed(123)
ns <- c(10,30,100,1000)

tabla <- tibble(n = ns) %>%
  rowwise() %>%
  mutate(alpha_emp_UMP = simulacion_UMP(Nrep = 10000, n = n, lambda = 0.5),
         alpha_emp_asin = simulacion_asin(Nrep = 10000, n = n, lambda = 0.5))

tabla %>%
  knitr::kable(col.names = c("n", "alfa empírico UMP", "alfa empírico asintótico"))
```

n	alfa empírico UMP	alfa empírico asintótico
10	0.0470	0.0224
30	0.0483	0.0353
100	0.0477	0.0394
1000	0.0469	0.0451

d. Para cada uno de los valores propuestos de n y eligiendo una grilla de valores para λ, aproximar y graficar la función potencia.

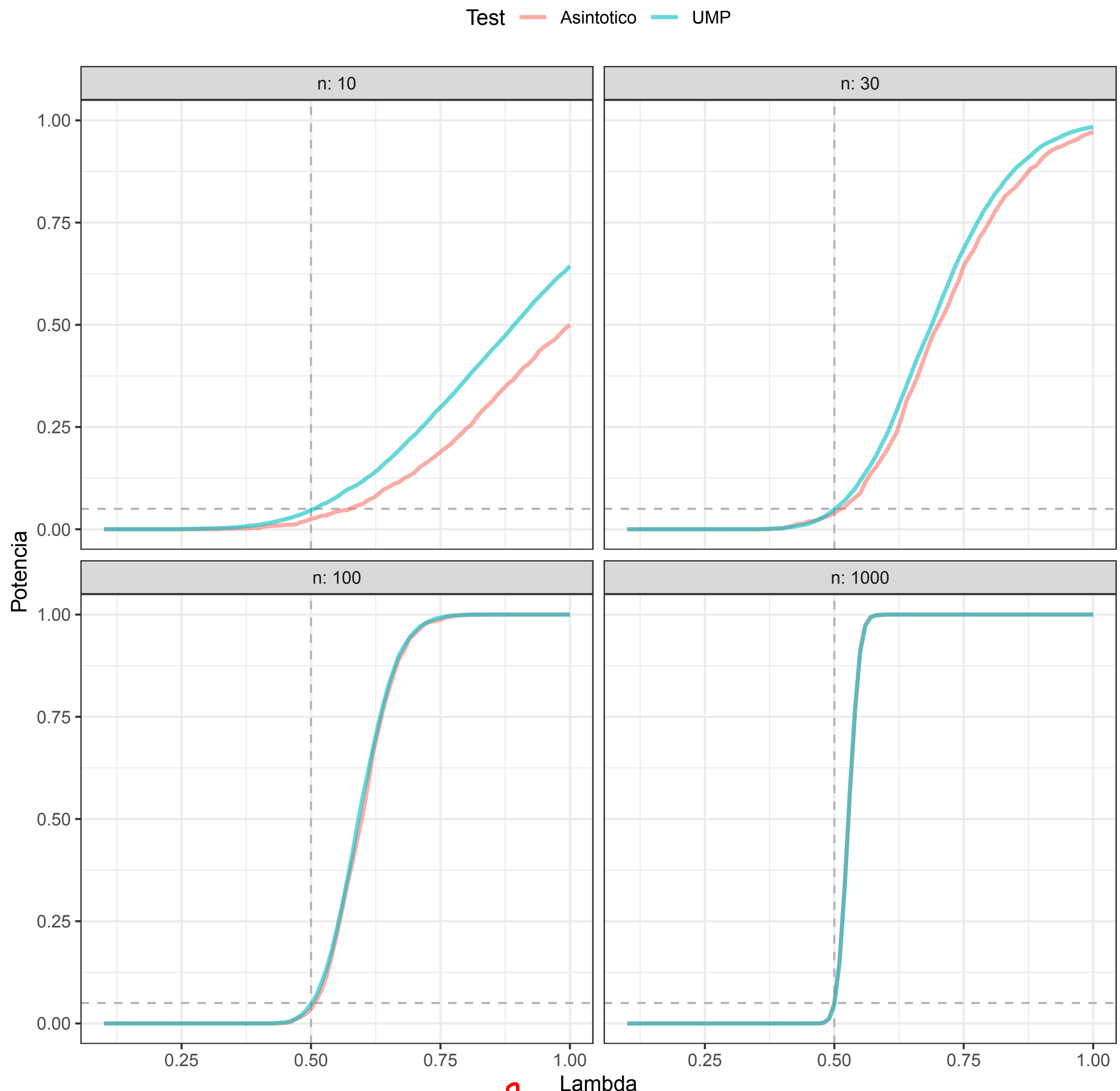
Para estas simulaciones vamos a utilizar el mismo `Nrep` y los mismos valores de `n` del inciso anterior pero nos vamos a mover del $\lambda = 0.5$ y vamos a barrer valores de lambda desde 0.1 a 1, con un paso de 0.01.

```r
# La función simulación simula el experimento y se fija el resultado del test
set.seed(123)
ns <- c(10,30,100,1000) # Posibles ns
lambdas <- seq(0.1,1,.01) # Rango de lambdas

potencias <- expand_grid(n = ns, Lambda = lambdas) %>%
  rowwise() %>%
  mutate(UMP = simulacion_UMP(Nrep = 10000, n = n, lambda = Lambda),
         Asintotico = simulacion_asin(Nrep = 1000, n = n, lambda = Lambda)) %>%
  pivot_longer(cols = !c(n, Lambda), names_to = "Test", values_to = "Potencia")
```

De esta manera, para distintos valores de lambda generaremos muestras con distrib. $\mathcal{E}(\lambda)$ y estimaremos la prob. de rechazar H_0 (es decir, la potencia) a partir de la proporción empírica de rechazos

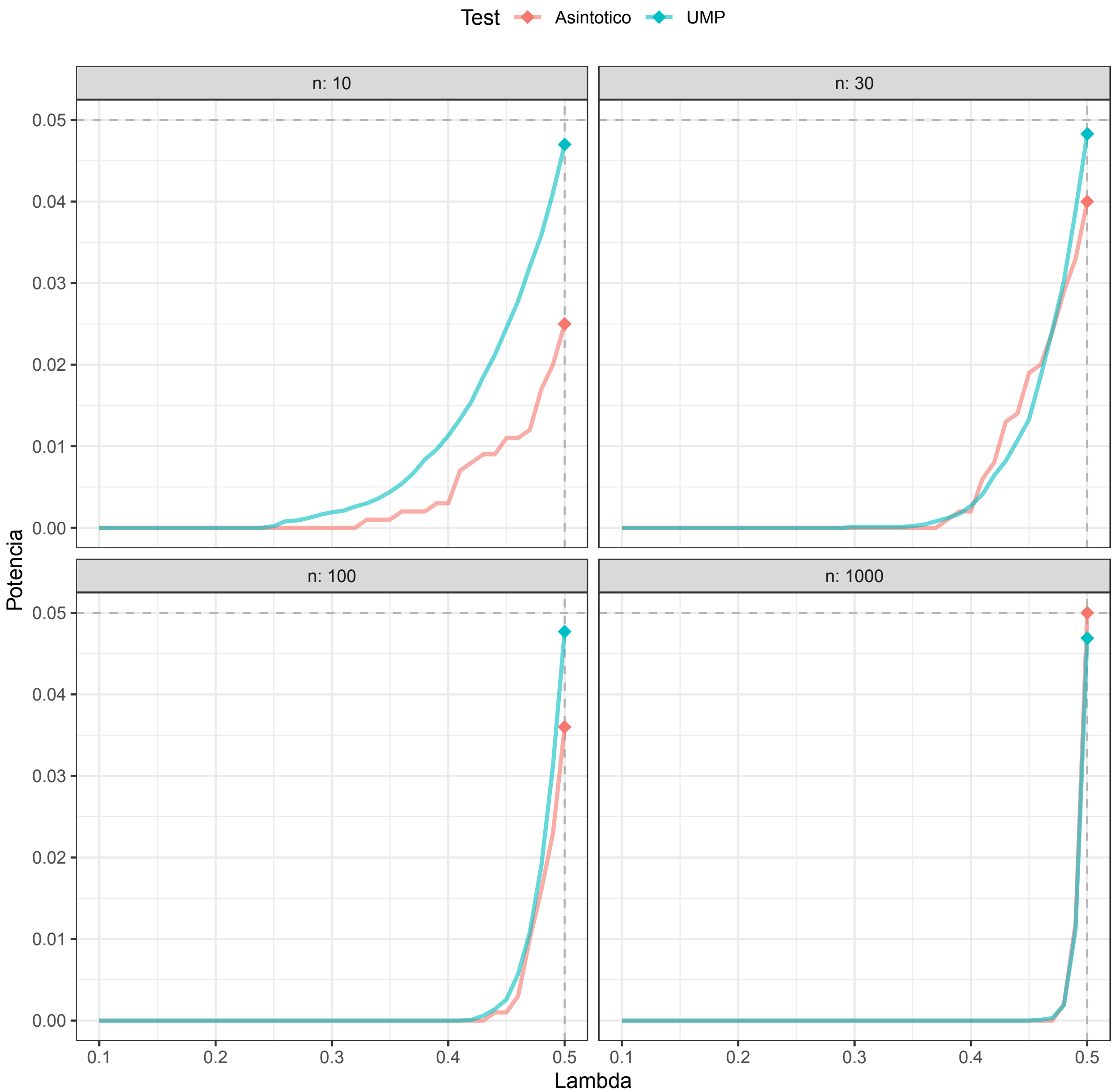
Hasta acá pasado



?

En la figura podemos ver la función potencia $adsf$ para el test UMP (celeste) y asintótico (rosa) en función del λ y separado para distintos valores de n. Se observa que para n pequeño (<100) hay una diferencia en la potencia empírica a favor del test UMP, que en esta figura puede verse principalmente para la zona de $\lambda > 0.5$. Si quisiéramos ver más en detalle que pasa en la región de Θ_1, podemos hacer un zoom.

Se observa que para valores de n más chicos (n<100) y $\lambda > 0.5$ la potencia empírica del test UMP es mayor que la del asintótico, mientras que para valores de n más grandes resultan muy parecidas.



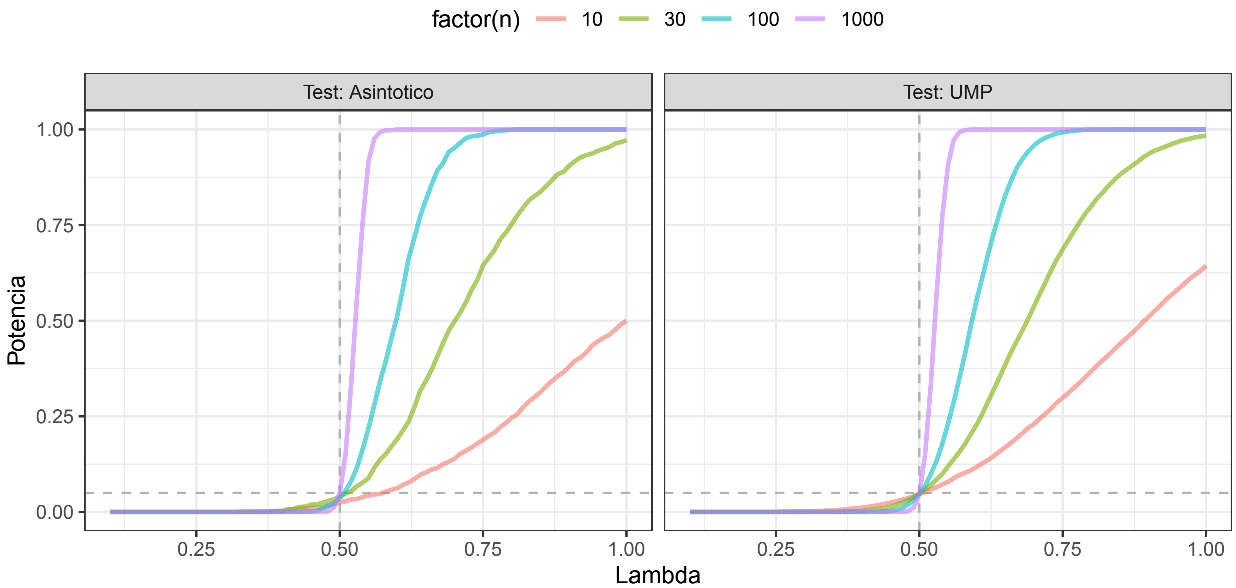
Ver creo que lo sacaría

Acá podemos ver claramente que para $n < 100$ también resulta conveniente (desde el punto de vista de la potencia) utilizar el test UMP. También se ve claramente como la potencia para $\lambda = 0.5$ está muy cercana al 0.05 para el test UMP (con alguna variabilidad porque son simulaciones) pero da bastante inferior para el test asintótico.

Otra cosa que podemos ver es como varía la potencia para cada test con el n.

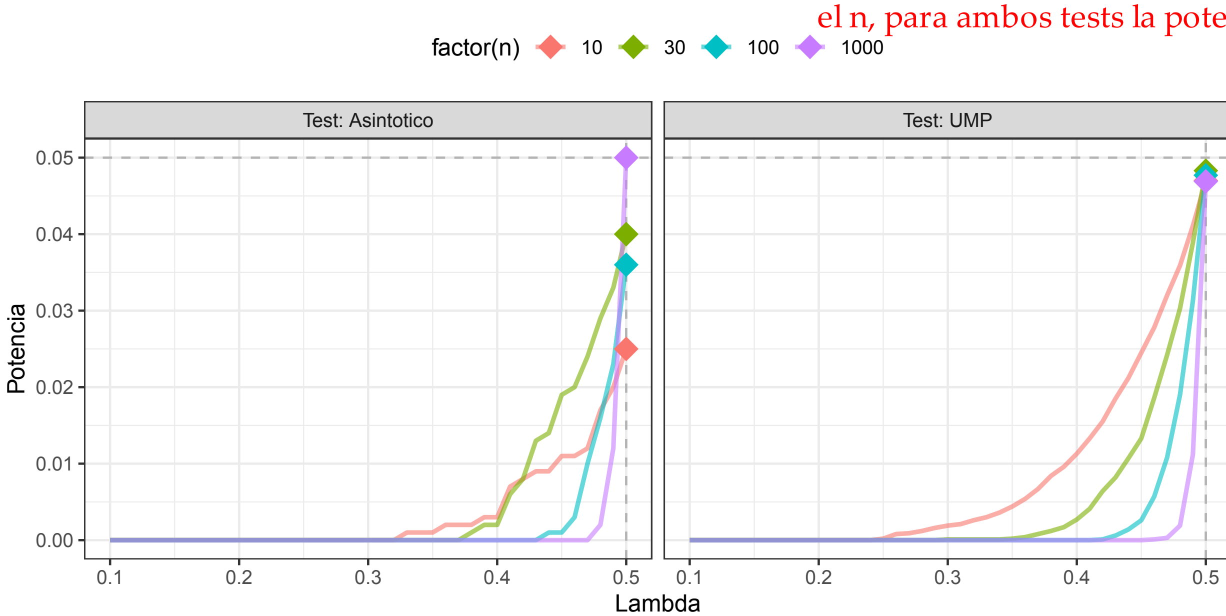
o Poner:

Para valores de lambda menores a 0.5, se puede observar que en varios casos la potencia del test asintótico resulta menor que la del test exacto UMP. Esto indicaría que la probabilidad de rechazo cuando nos encontramos en H_0 es más baja en el test asintótico, lo cual representaría una ventaja (si bien en ambos tests se respeta el nivel deseado).



En este caso la conclusión principal, y algo trivial, es que al aumentar el n la potencia "mejora" (la pendiente es más empinada). Y lo mismo lo podemos ver para los $\lambda < 0.5$

De esta manera, vemos que al aumentar el n, para ambos tests la potencia "mejora"



e. Concluir en base a los resultados observados.

A partir de los resultados obtenidos podemos concluir que ambos tests garantizan el nivel empírico deseado para los distintos valores de n estudiados. Para valores de n <100 el nivel del test asintótico resulta más bajo que el del test exacto, pero vemos que la potencia para lambdas mayores que 0.5 es mejor en el caso del test exacto y, en este sentido, podría resultar más conveniente utilizar este último. Para valores mayores de n, el desempeño de ambos tests resulta muy similar.