由式(3-2-15)或式(3-2-16)，可以得到外方位的答解。

3.2.3 角锥体法

很明显，方程(3-2-5)中的线元素与角元素之间存在着相关性，影响答解的精度，特别是在航天遥感的情况下，更为突出。而角锥体法是一种独立求解线元素的有效方法，它是根据摄影像方与物方空间所对应的光线束之夹角相等的原理，独立求解线元素，然后求解角元素。该方法有利于克服线元素与角元素之间的相关性。

如图 3-2-2 所示，像方光线束向量$\overrightarrow{Sp_1}$与$\overrightarrow{Sp_2}$之间的夹角和相应的物方向量$\overrightarrow{SP_1}$与$\overrightarrow{SP_2}$之间的夹角相等，于是有

$$\frac{\overrightarrow{Sp_1}\cdot\overrightarrow{Sp_2}}{|\overrightarrow{Sp_1}||\overrightarrow{Sp_2}|}=\frac{\overrightarrow{SP_1}\cdot\overrightarrow{SP_2}}{|\overrightarrow{SP_1}||\overrightarrow{SP_2}|}=\cos\theta_{12}=C_1$$

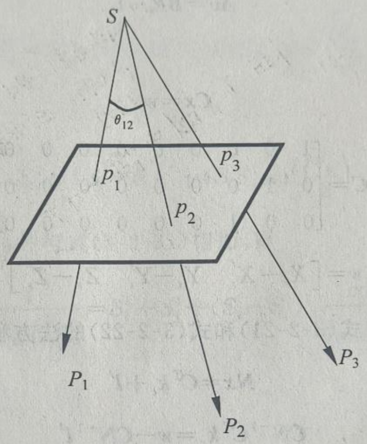

图 3-2-2

显然，这是一个已知值，它可以由控制点的像点坐标求得，对于任意一对点 i 和 $i+1$，有

$$C_i=\frac{(x_i-x_0)(x_{i+1}-x_0)+(y_i-y_0)(y_{i+1}-y_0)+f^2}{\sqrt{(x_i-x_0)^2+(y_i-y_0)^2+f^2}\sqrt{(x_{i+1}-x_0)^2+(y_{i+1}-y_0)^2+f^2}} \tag{3-2-17}$$

由此可得观测方程：

$$C_i=\frac{(X_i-X_s)(X_{i+1}-X_s)+(Y_i-Y_s)(Y_{i+1}-Y_s)+(Z_i-Z_s)(Z_{i+1}-Z_s)}{S_1S_2} \tag{3-2-18}$$

$$\left.\begin{aligned}S_i&=\sqrt{(X_i-X_s)^2+(Y_i-Y_s)^2+(Z_i-Z_s)^2}\\S_{i+1}&=\sqrt{(X_{i+1}-X_s)^2+(Y_{i+1}-Y_s)^2+(Z_{i+1}-Z_s)^2}\end{aligned}\right\} \tag{3-2-19}$$

将式(3-2-18)线性化，得误差方程：

$$
\begin{aligned}
v_i = & \left(\frac{2X_s - X_i - X_{i+1}}{S_i S_{i+1}} + \left(\frac{X_i - X_s}{S_i^2} + \frac{X_{i+1} - X_s}{S_{i+1}^2}\right) C_i\right) \Delta X_s \\
& + \left(\frac{2Y_s - Y_i - Y_{i+1}}{S_i S_{i+1}} + \left(\frac{Y_i - Y_s}{S_i^2} + \frac{Y_{i+1} - Y_s}{S_{i+1}^2}\right) C_i\right) \Delta Y_s \\
& + \left(\frac{2Z_s - Z_i - Z_{i+1}}{S_i S_{i+1}} + \left(\frac{Z_i - Z_s}{S_i^2} + \frac{Z_{i+1} - Z_s}{S_{i+1}^2}\right) C_i\right) \Delta Z_s - (C_i - C_0)
\end{aligned}
\tag{3-2-20}
$$

若有 n 个控制点，则可构成 $n(n-1)/2$ 个方程，但只有 $(2n-3)$ 个独立方程，按最小二乘求解，即可得传感器位置 (X_s, Y_s, Z_s)。

在求得外方位线元素后，进一步求解角元素可以有两种选择，其一是，将 X_s, Y_s, Z_s 当作已知值，按式(3-2-4)—式(3-2-16)的方式进行答解；另一种是以 X_s, Y_s, Z_s 作为约束条件，进行答解，误差方程式如同式(3-2-5)一样：

$$
\boldsymbol{A v} = \boldsymbol{B X} - \boldsymbol{l} \tag{3-2-21}
$$

约束条件为

$$
\boldsymbol{C x} = \boldsymbol{w} \tag{3-2-22}
$$

$$
\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3-2-23}
$$

$$
\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} X_s - X_s' & Y_s - Y_s' & Z_s - Z_s' \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{3-2-24}
$$

式中，X_s'、Y_s' 和 Z_s' 为计算值，式(3-2-21)和式(3-2-22)的法方程形式为

$$
\boldsymbol{N x} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{k}_c + \boldsymbol{l}' \tag{3-2-25}
$$

$$
\boldsymbol{C N}^{-1} \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{k}_c = \boldsymbol{w} - \boldsymbol{C N}^{-1} \boldsymbol{l}' \tag{3-2-26}
$$

$$
\boldsymbol{N} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{A p}^{-1} \boldsymbol{A})^{-1} \boldsymbol{B} \tag{3-2-27}
$$

$$
\boldsymbol{l}' = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{A p}^{-1} \boldsymbol{A})^{-1} \boldsymbol{l} \tag{3-2-28}
$$

在实际运算中，可按式(3-2-26)首先求解 k_c，再按式(3-2-25)解算外方位元素的改正数即可。

3.2.4 外方位元素的直接解法

上述各节中，均是利用地面若干已知控制点及相应的像点坐标，通过最小二乘法求解传感器的外方位元素，由于原始的共线方程是非线性的，解算是一迭代过程，因此，需要知道外方位元素的初始值，但是，在许多情况下，像方对于物方坐标系的关系是未知的，无法给定外方位元素的初值，而采用地面控制点直接求解外方位元素是一个有效的途径。

直接求解的基本思想是，首先求出传感器中心到地面点的距离，然后求得传感器中心的位置和影像的方位。

(1) 距离方程的解算

由图 3-2-2 中的三个控制点 P_1, P_2, P_3，根据三角形余弦公式，可得方程组：

$$\left.\begin{array}{l} S_1^2+S_2^2-2S_1S_2\cos\theta_{12}-S_{12}^2=0 \\ S_2^2+S_3^2-2S_2S_3\cos\theta_{23}-S_{23}^2=0 \\ S_3^2+S_1^2-2S_3S_1\cos\theta_{31}-S_{31}^2=0 \end{array}\right\} \tag{3-2-29}$$

式中，控制点之间的距离 S_{ij} 可按下式求得：

$$S_{ij}^2=(X_i-X_j)^2+(Y_i-Y_j)^2+(Z_i-Z_j)^2 \tag{3-2-30}$$

光线的夹角 θ_{ij} 可按式(3-2-17)求得，因此，S_{ij} 和 θ_{ij} 都是已知值，现在的问题是求解方程(3-2-29)，得到距离 S_1，S_2，S_3。由于

$$\cos\theta_{ij}=1-2\sin^2\left(\frac{\theta_{ij}}{2}\right)$$

则式(3-2-30)可写为

$$S_{ij}^2=S_i^2+S_j^2-2S_iS_j+4S_iS_j\sin^2\left(\frac{\theta_{ij}}{2}\right) \tag{3-2-31}$$

即

$$S_{ij}^2=(S_i-S_j)^2+4S_iS_j\sin^2\left(\frac{\theta_{ij}}{2}\right) \tag{3-2-32}$$

上式乘以 $\cos\theta_{ij}/2\sin^2(\theta_{ij}/2)$，并与式(3-2-31)相加，得

$$S_{ij}^2\frac{1}{2\sin^2\left(\frac{\theta_{ij}}{2}\right)}=S_i^2+S_j^2+(S_i-S_j)^2\frac{\cos\theta_{ij}}{2\sin^2\left(\frac{\theta_{ij}}{2}\right)} \tag{3-2-33}$$

令

$$2F_{ij}=\frac{1}{2\sin^2\left(\frac{\theta_{ij}}{2}\right)}$$

$$2G_{ij}=\frac{\cos\theta_{ij}}{2\sin^2\left(\frac{\theta_{ij}}{2}\right)}=2F_{ij}\cos\theta_{ij}$$

于是，方程(3-2-29)可以被写成

$$\left.\begin{array}{l} S_1^2+S_2^2=2F_{12}S_{12}^2-2G_{12}(S_1-S_2)^2 \\ S_2^2+S_3^2=2F_{23}S_{23}^2-2G_{23}(S_2-S_3)^2 \\ S_3^2+S_1^2=2F_{31}S_{31}^2-2G_{31}(S_3-S_1)^2 \end{array}\right\} \tag{3-2-34}$$

用矩阵表达为

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}S_1^2\\ S_2^2\\ S_3^2\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}F_{12}S_{12}^2-G_{12}(S_1-S_2)^2\\ F_{23}S_{23}^2-G_{23}(S_2-S_3)^2\\ F_{31}S_{31}^2-G_{31}(S_3-S_1)^2\end{bmatrix}$$

由于

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\1 & 1 & -1\\-1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

则有

$$\begin{bmatrix}S_1^2\\S_2^2\\S_3^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\1 & 1 & -1\\-1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_{12}S_{12}^2-G_{12}(S_1-S_2)^2\\F_{23}S_{23}^2-G_{23}(S_2-S_3)^2\\F_{31}F_{31}^2-G_{31}(S_3-S_1)^2\end{bmatrix} \tag{3-2-35}$$

令

$$x^{(k)}=\begin{bmatrix}S_1^{2(k)} & S_2^{2(k)} & S_3^{2(k)}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{3-2-36}$$

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\1 & 1 & -1\\-1 & 1 & 1\end{bmatrix} \tag{3-2-37}$$

$$a^{(k)}=\left[F_{12}(S_{12}^{(k)})^2 \quad F_{23}(S_{23}^{(k)})^2 \quad F_{31}(S_{31}^{(k)})^2\right]^{\mathrm{T}} \tag{3-2-38}$$

$$b^{(k)}=\left[-G_{12}(S_1^{(k)}-S_2^{(k)})^2-G_{23}(S_2^{(k)}-S_3^{(k)})^2-G_{31}(S_3^{(k)}-S_1^{(k)})^2\right]^{\mathrm{T}} \tag{3-2-39}$$

则得式(3-2-35)的迭代表达式为

$$x^{(k+1)}=Aa^{(k)}+Ab^{(k)} \tag{3-2-40}$$

式中，k 为迭代次数，$k=0,1,2,\cdots,n$，迭代初值按下式确定：

$$a^{(0)}=\left[F_{12}(S_{12}^{(0)})^2 \quad F_{23}(S_{23}^{(0)})^2 \quad F_{31}(S_{31}^{(0)})^2\right]^{\mathrm{T}} \tag{3-2-41}$$

$$b^{(0)}=\begin{bmatrix}-G_{12}(S_1^{(0)}-S_2^{(0)})^2\\-G_{23}(S_2^{(0)}-S_3^{(0)})^2\\-G_{31}(S_3^{(0)}-S_1^{(0)})^2\end{bmatrix} \tag{3-2-42}$$

(2) 外方位元素解算

由图 3-2-3 可知，地面点 P_i 的观测方向 α 和 β 可根据其像空间坐标$(x_i, y_i, -f, x_0, y_0)$求得：

$$\left.\begin{aligned}\tan\alpha_i&=\frac{x_i-x_0}{f}\\\tan\beta_i&=\frac{y_i-y_0}{\sqrt{f^2+(x_i-x_0)^2}}\end{aligned}\right\} \tag{3-2-43}$$

同时可得

$$S_i\begin{bmatrix}\cos\beta_i\sin\alpha_i\\\sin\beta_i\\\cos\beta_i\cos\alpha_i\end{bmatrix}=R\begin{bmatrix}X_i-X_s\\Y_i-Y_s\\Z_i-Z_s\end{bmatrix} \tag{3-2-44}$$

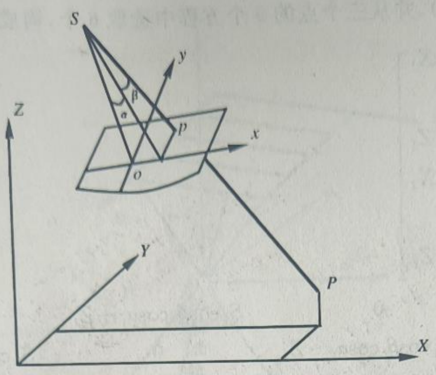

图 3-2-3

由于 R 是一个正交旋转矩阵，可以由反对称矩阵组成：

$$\boldsymbol{R}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{Q})^{-1}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{Q}) \tag{3-2-45}$$

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix} \tag{3-2-46}$$

则式(3-2-44)可以写成

$$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{Q})S_i\begin{bmatrix} \cos\beta_i \sin\alpha_i \\ \sin\beta_i \\ \cos\beta_i \cos\alpha_i \end{bmatrix}=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{Q})\begin{bmatrix} X_i-X_s \\ Y_i-Y_s \\ Z_i-Z_s \end{bmatrix} \tag{3-2-47}$$

即

$$S_i\begin{bmatrix} \cos\beta_i \sin\alpha_i \\ \sin\beta_i \\ \cos\beta_i \cos\alpha_i \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix}=\boldsymbol{Q}\begin{bmatrix} S_i\cos\beta_i\sin\alpha_i+X_i \\ S_i\sin\beta_i+Y_i \\ S_i\cos\beta_i\cos\alpha_i+Z_i \end{bmatrix}-(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{Q})\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_s \\ Z_s \end{bmatrix} \tag{3-2-48}$$

将 Q 代入上式，并整理得

$$S_i\begin{bmatrix} \cos\beta_i \sin\alpha_i \\ \sin\beta_i \\ \cos\beta_i \cos\alpha_i \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} 1 & -c & b \\ c & 1 & -a \\ -b & a & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_s \\ Y_s \\ Z_s \end{bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix} 0 & S_i\cos\beta_i\cos\alpha_i+Z_i & -S_i\sin\beta_i-Y_i \\ -S_i\cos\beta_i\cos\alpha_i-Z_i & 0 & S_i\cos\beta_i\sin\alpha_i+X_i \\ S_i\sin\beta_i+Y_i & -S_i\cos\beta_i\sin\alpha_i-X_i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \tag{3-2-49}$$

现引入

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} 1 & -c & b \\ c & 1 & -a \\ -b & a & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_s \\ Y_s \\ Z_s \end{bmatrix} \tag{3-2-50}$$

将上式代入式(3-2-49),并从三个点的 9 个方程中选取 6 个,构成下列方程组:

$$S_i\begin{bmatrix} S_1\cos\beta_1\sin\alpha_1-X_1 \\ S_1\sin\beta_1-Y_1 \\ S_1\cos\beta_1\cos\alpha_1-Z_1 \\ S_2\cos\beta_2\sin\alpha_2-X_2 \\ S_2\sin\beta_2-Y_2 \\ S_3\cos\beta_3\cos\alpha_3-Z_3 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & S_1\cos\beta_1\cos\alpha_1+Z_1 & -S_1\sin\beta_1-Y_1 \\ 0 & 1 & 0 & -S_1\cos\beta_1\cos\alpha_1-Z_1 & 0 & S_1\cos\beta_1\sin\alpha_1+X_1 \\ 0 & 0 & 1 & S_1\sin\beta_1+Y_1 & -S_1\cos\beta_1\sin\alpha_1-X_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & S_2\cos\beta_2\cos\alpha_2+Z_2 & -S_2\sin\beta_2-Y_2 \\ 0 & 1 & 0 & -S_2\cos\beta_2\cos\alpha_2-Z_2 & 0 & S_2\cos\beta_2\sin\alpha_2+X_2 \\ 0 & 0 & 1 & S_3\sin\beta_3+Y_3 & -S_3\cos\beta_3\sin\alpha_3-X_3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \\ a \\ b \\ c \end{bmatrix} \tag{3-2-51}$$

解方程组(3-2-51),可得外方位的 3 个角元素 a,b 和 c 以及辅助参数 U,V 和 W,并由 U,V 和 W 求得传感器的摄站坐标,因为

$$\begin{bmatrix} 1 & -c & b \\ c & 1 & -a \\ -b & a & 1 \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{1+a^2+b^2+c^2}\begin{bmatrix} 1+a^2 & ab+c & ac-b \\ ab-c & 1+b^2 & bc+a \\ ac+b & bc-a & 1+c^2 \end{bmatrix}$$

所以

$$\begin{bmatrix} X_s \\ Y_s \\ Z_s \end{bmatrix}=\frac{-1}{1+a^2+b^2+c^2}\begin{bmatrix} 1+a^2 & ab+c & ac-b \\ ab-c & 1+b^2 & bc+a \\ ac+b & bc-a & 1+c^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} \tag{3-2-52}$$