



单位权中误差为

$$\hat{\sigma}_0 = \pm \sqrt{V^T V / (n - 3)}.$$

外方位线元素的中误差为

$$Q_{\hat{X}\hat{X}} = (B^T B)^{-1},$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{X}_i} = \pm \hat{\sigma}_0 \sqrt{Q_{\hat{X}_i}}.$$

由于泰勒级数展开略去了二次以上的高次项,因此解算过程应是迭代的,直至相邻两次解算结果小于某一限差为止.

从以上公式可知,为了解算外方位线元素,必须知道线元素的初始值、摄影中心  $S$  至地面控制点的距离  $S_i$ .

1.2 线元素初始值的获取

首先,要知道影像的近似比例尺,如果不知道,可根据所有  $n$  个影像点之间的距离  $d_i$  和相应地面控制点之间的距离  $D_i$ ,计算影像的近似比例尺  $m$ .

$$m = \left( \sum_{i=1}^n (D_i / d_i) \right) / n.$$

外方位线元素的近似值可以利用地面控制点的坐标来计算.

$$\left. \begin{aligned} X_S^0 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \\ Y_S^0 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i, \\ Z_S^0 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i + mf. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

1.3 摄影中心  $S$  至各地面控制点的距离  $S_i$  的求解

由图 1 可知,任意两地面控制点与摄影中心  $S$  构成一个三角形,以  $A$ 、 $B$  两控制点为例,根据余弦公式可列出如下的方程

$$\begin{aligned} D_{AB}^2 &= S_A^2 + S_B^2 - 2S_A \cdot S_B \cdot \cos \angle ASB, \\ \cos \angle ASB &= \cos \angle aSb = \frac{D_{Sa}^2 + D_{Sb}^2 - D_{ab}^2}{2D_{Sa} \cdot D_{Sb}}. \end{aligned}$$

将其线性化得

$$\begin{aligned} D_{AB}^2 &= (D_{AB}^0)^2 + 2S_A dS_A + 2S_B dS_B - \\ &\quad 2S_A \cos \angle ASB dS_B - 2S_B \cos \angle ASB dS_A. \end{aligned}$$

误差方程式为

$$\begin{aligned} v_{AB} &= (2S_A - 2S_B \cos \angle ASB) dS_A + \\ &\quad (2S_B - 2S_A \cos \angle ASB) dS_B - (D_{AB}^2 - (D_{AB}^0)^2). \end{aligned} \quad (6)$$

其中,

$$(D_{AB}^0)^2 = (S_A^0)^2 + (S_B^0)^2 - 2S_A^0 \cdot S_B^0 \cdot \cos \angle ASB.$$

摄影中心  $S$  距各控制点的初始距离可以由摄影中心至其相应的像点距离乘以摄影比例尺得出,如

$$S_A^0 = m \cdot D_{Sa}.$$

对于  $n$  个控制点可列出  $C_n^2$  个误差方程式,写成矩阵形式为

$$\underset{\frac{n \times (n-1)}{2} \times 1}{V} = \underset{\frac{n \times (n-1)}{2} \times n}{A} \underset{n \times 1}{Y} - \underset{\frac{n \times (n-1)}{2} \times 1}{M}. \quad (7)$$

其中,  $Y = (dS_A, dS_B, \dots)^T$ .

因此利用间接平差可以解得摄影中心至各控制点的距离  $S_i$ .

$$Y = (A^T A)^{-1} (A^T M).$$

外方位线元素的计算流程如图 2.

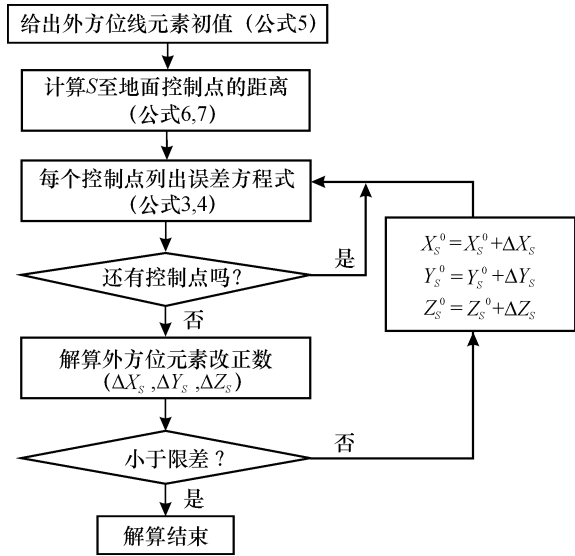


图 2 外方位线元素解算流程图  
Fig. 2 Flowing chart of exterior linear elements

1.4 角元素解算公式

由文献[3]可知,共线方程的另一种表达为

$$\lambda \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ -f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X - X_S \\ Y - Y_S \\ Z - Z_S \end{bmatrix}.$$

对于每 1 个控制点,可列出 3 个方程,因此选取 3 个不在同一直线上的控制点,共列出 9 个方程,解算出 9 个方向余弦

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{X_A - X_S}{\lambda_1} & \frac{X_B - X_S}{\lambda_2} & \frac{X_C - X_S}{\lambda_3} \\ \frac{Y_A - Y_S}{\lambda_1} & \frac{Y_B - Y_S}{\lambda_2} & \frac{Y_C - Y_S}{\lambda_3} \\ \frac{Z_A - Z_S}{\lambda_1} & \frac{Z_B - Z_S}{\lambda_2} & \frac{Z_C - Z_S}{\lambda_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_a & x_b & x_c \\ y_a & y_b & y_c \\ -f & -f & -f \end{bmatrix}^{-1}. \quad (8)$$

$\lambda_i (i = 1, 2, 3)$  为比例因子,为物点至摄影中心的距离与相应像点至投影中心距离之比值. 利用方向余弦与角元素的关系,就能解算出 3 个角元素.

$$\tan \varphi = -a_3 / c_3; \sin \omega = -b_3; \tan k = b_1 / b_2.$$

2 算 例

为了说明本方法的正确性，现采用文献 [1] 中的数据进行外方位线元素的解算，起算数据如表 1 所示.

像片的内方位元素为

$$x_0 = y_0 = 0, \quad f = 153.24 \text{ mm}$$

根据本文方法，采用 Matlab 计算出的摄影中心  $S$  至各控制点的距离见表 2. 外方位线元素的计算值见表 3. 表 4 列出了文献 [3] 中的外方位线元素的解算结果. 与共线条件方程计算出的结果 (表 3、4) 非常接近，相差分别为 0.4, 0.91, 0.34. 两套数据间还存在着少许差异，是由于两种方法在计算过程中存在误差，如线性化误差等因素造成的.

表 1 起算数据  
Table 1 Initial data

| 点号 | 像平面坐标         |               | 物方空间坐标       |              |              |
|----|---------------|---------------|--------------|--------------|--------------|
|    | $x/\text{mm}$ | $y/\text{mm}$ | $X/\text{m}$ | $Y/\text{m}$ | $Z/\text{m}$ |
| 1  | -85.15        | -68.99        | 36 589.41    | 25 273.32    | 2 195.17     |
| 2  | -53.40        | 82.21         | 37 631.08    | 31 324.51    | 728.69       |
| 3  | 10.46         | 64.43         | 40 426.54    | 30 319.81    | 757.31       |
| 4  | -14.78        | -76.63        | 39 100.97    | 24 934.98    | 2 386.50     |

表 2 摄影中心  $S$  至各控制点的距离  
Table 2 Computed distances between projective center  $S$  and each control point

| 迭代次数     | $SA$     | $SB$      | $SC$     | $SD$     |
|----------|----------|-----------|----------|----------|
| 第 1 次改正数 | -764.179 | 9 951.192 | 798.986  | -780.581 |
| 第 2 次改正数 | -231.484 | -174.748  | -135.462 | -325.92  |
| 第 3 次改正数 | -13.704  | 1.332     | 3.1716   | -38.078  |
| 第 4 次改正数 | -0.414   | 0.132     | 0.198    | -1.294   |
| 第 5 次改正数 | 1.56E-4  | -1.22E-4  | -1.88E-4 | -2.19E-4 |
| 距离值      | 6 637.39 | 8 144.24  | 7 411.61 | 5 817.74 |

表 3 外方位线元素计算值  
Table 3 Computed value linear elements of EOPs

| 迭代次数     | $X_s$     | $Y_s$     | $Z_s$     |
|----------|-----------|-----------|-----------|
| 第 1 次改正数 | 1 363.100 | -441.188  | 43.870    |
| 第 2 次改正数 | -4.977    | -43.940   | -167.007  |
| 第 3 次改正数 | -0.077    | -0.657    | 2.498     |
| 第 4 次改正数 | -0.162E-4 | -1.476E-4 | -5.597E-4 |
| 线元素值     | 39 795.05 | 27 477.37 | 7 573.03  |

表 4 文献 [3] 中的解算结果  
Table 4 Computed value in literature [3]

|     | $X_s$     | $Y_s$     | $Z_s$    |
|-----|-----------|-----------|----------|
| 计算值 | 39 795.45 | 27 476.46 | 7 572.69 |

有了线元素值，按 1.4 所述的常用方法即能求出外方位角元素值.

3 结束语

空间后方交会是摄影测量与遥感中求解影像外方位元素的重要的方法，包括共线条件方程法、角锥体法、直接线性变换法. 针对以往方法的一些缺点，对角锥体法进行改进，利用多余的控制点进行最小二乘平差解算，取得外方位线元素的值，并通过算例证明该方法的可行性与正确性.

如果解算时将像点坐标的系统误差考虑进去，那么结果会更加准确.

参考文献：

[1] 陈鹰. 遥感影像的数字摄影测量 [M]. 上海：同济大学出版社，2003.  
[2] 武汉大学测绘学院. 误差理论与测量平差基础 [M]. 武汉：武汉大学出版社，2005.  
[3] 李德仁，郑肇保. 解析摄影测量学 [M]. 北京：测绘出版社，1992.