0x00 前言

0x01 参考资料

重庆大学 周尚波老师 2022春 PPT

0x10 误差分析

0x11 算法性能

算法性能评价：简单以实现，收敛与稳定，计算效率高，行之有效

0x12 误差来源

误差来源：模型误差（设计模型时的近似化），观测误差（测量），截断误差（方法产生的误差），舍入误差（保留小数）

0x13 绝对误差，相对误差和有效数字

绝对误差：$e = x^* - x$，其中x^*为真值

绝对误差限：$|e| \leq \epsilon$，则ϵ为绝对误差限

相对误差：$e_r = \frac{x^*-x}{x^*} = \frac{x^*-x}{x}$

相对误差限：$|e_r| \leq \epsilon_r$

精确值经过四舍五入后得到的近似值，绝对误差限为近似值末位的**半个单位**

有效数字：根据**绝对**误差限定义，绝对误差限若是某数位的半个单位，则到该数位为止，第一个非零数开始，非零数的个数

- 例：已知下列近似值的绝对误差限都是0.005,问它们具有几位有效数字?
  a=12.175,b=-0.10,c=0.1,d=0.0032

  由于0.005是小数点后第2数位的半个单位,所以a有4位有效数字1、2、1、7,b有2位有效数字1、0,c有1位有效数字1,d 没有有效数字。

$$
x = \pm 0.a_1 a_2 \ldots a_k \times 10^m \\
|x^* - x| \leq \frac{1}{2} \times 10^{m-n}
$$

要求x有n位(n≤k)有效数字，精确值的有效数字认为是无限多位

0x14 数值计算中的若干原则

- 避免相近的数相减（相对误差放大）

$$\text{当}x_1 \approx x_2\text{时，有}\log x_1 - \log x_2 = \log \frac{x_1}{x_2}$$

$$\text{当}x \approx 0\text{时，有}1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$$

$$\text{当}x >> 1\text{时，有}\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

- 大数吃小数：加减运算避免相对差值大的数加减运算，应采取从小到大的运算过程
- 绝对值太小的数不宜做除数：溢出，绝对误差放大
- 减少计算次数：一是计算量防止太大；二是误差积累
- 选用数值稳定性好的算法：数值稳定性好，指计算舍入误差可控制的

0x20 线性代数方程组的解法

	定义	存储量	工作量	程序复杂度	适用矩阵阶数	例
直接法	有限次四则运算，无舍入误差则得到精确解	小	小	高	低	高斯消元，LU分解
迭代法	极限过程，迭代	高	大	低	高	雅可比迭代，高斯赛德尔迭代，最速下降法，共轭梯度法

0x21 高斯消元法

严格对角占优：对角线上的绝对值大于对应行其他元素绝对值之和，严格对角占优的矩阵在消元过程中，主元不会等于0

列主元消去法：第k步选择k行以下的绝对值最大值为主元，经矩阵初等行变换

全主元消去法：第k步选择k行以下k列以右的绝对值最大值为主元，经矩阵初等变换

目的：防止大数吃小数和舍入误差传播

追赶法：

[例2] 如果方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵 A 是 n 阶三对角阵，即当 $|i\text{-}j|>1$ 时，$a_{ij}=0$，或写成

$$\begin{bmatrix} d_1 & c_1 & & & \\ a_1 & d_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-2} & d_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_{n-1} & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}$$

- $input\ (a_i),(b_i),(c_i),(d_i)$
- $for\ i=2,3,\ldots,n\ do$

$$a_{i-1} / d_{i-1} \Rightarrow l$$
$$d_i - lc_{i-1} \Rightarrow d_i$$
$$b_i - lb_{i-1} \Rightarrow b_i$$

- end
- $b_n / d_n \Rightarrow x_n$
- $for\ i=n-1,n-2,\ldots,1\ \ do$

$$(b_i - c_i x_{i+1}) / d_i \Rightarrow x_i$$

- end
- $output\ (x_i)$

0x22 LU分解

- **LU分解**：L为下三角矩阵，对角线上元素为1，U为上三角矩阵
- **定理**：非奇异方阵的LU分解唯一
- 迭代公式见书上及ppt

0x23 雅可比迭代

$$\begin{gathered}Ax=b\\(L+D+U)x=b\\Dx=-(L+U)x+b\\\downarrow\\x=Bx+g\\\downarrow\\x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+g\end{gathered}$$

- **雅可比迭代**：要求系数矩阵非奇异
- 构造方法：原线性方程组移项到右边，解出x
- **迭代格式**：

$$x^{(k+1)}=-D^{-1}(L+U)x^{(k)}+D^{-1}b$$

0x24 高斯-塞德尔迭代（Gauss-Seidel）

- 雅可比迭代基础上，利用现求的结果
- 优点：节省存储，简化计算
- 缺点：收敛性差
- 迭代格式：$x^{(k+1)}=D^{-1}[b-(Lx^{(k+1)}+Ux^{(k)})]$

0x25 逐次超松弛迭代法

- 来源：由高斯-塞德尔迭代格式变化而来
-

将高斯-塞德尔迭代格式

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}) \quad i = 1,2,\dots,n$$

改写为:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}) \quad i = 1,2,\dots,n$$

并记

$$r_i^{(k+1)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} \quad i = 1,2,\dots,n$$

- 残量为r_i^{k+1}
- **迭代格式**:

将残量乘以一个修正量加到 $x_i^{(k)}$ 上，作为新的结果

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}) \quad i = 1,2,\dots n$$

这就是**逐次超松驰迭代法（SOR方法)**，ω 称为**松驰因子。**

SOR方法的计算公式也常写为:

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)})$$

- 注意后面那个公式是从i+1开始的

0x26 收敛性定理

向量的范数

- **定义**:

  设定义在 n 维向量空间 R^n 上的非负实值函数$||\cdot||$满足： 正定性（大于等于0，且等于的位置在向量为零向量时取得），齐次性（数乘），三角不等式，则称实值函数为向量空间R^n向量范数

- 范数是一种函数
- 常见范数:

对任意向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in R^n$，定义：

$$(1)\qquad \|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|=|x_1|+|x_2|+\cdots|x_n|$$

$$(2)\qquad \|x\|_2=\sqrt{x^Tx}==\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i^2|}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$$

$$(3)\qquad \|x\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|x_i|$$

矩阵的范数

- **定义**：设定义在n阶实矩阵空间$R^{n\times n}$上的非负实值函数$||\cdot||$满足： 正定性，齐次性，三角不等式，自相容性$||AB||\le||A||\ ||B||$，则为矩阵范数
- 常见范数:

  （1） $\|A\|_1=\max\limits_{1\le j\le n}\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ij}|$ 列范数

  （2） $\|A\|_\infty=\max\limits_{1\le i\le n}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|$ 行范数

- （3） $\|A\|_2=\sqrt{\lambda_{\max}(A^TA)}$ 谱范数

  （4） $\|A\|_F=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}^2}$ F范数
- **谱半径**：方阵的特征值的模（绝对值）取max（注意是复数范围）

收敛性判别

- **定理3**：简单迭代法对任意初始向量收敛的**充要条件**是迭代矩阵B的谱半径小于1
  - 注意：若谱半径大于1，可能存在初始向量使得简单迭代法收敛
- **定理4**：若迭代矩阵B的1范数（列范数）或无穷范数（行范数）**小于**1，则对任意初始向量收敛
  - 证明：核心是证残差在极限意义下为0，然后利用公式迭代
- **雅可比方法的收敛性**
  - 迭代矩阵谱半径小于1（充要条件）
  - 迭代矩阵范数小于1，则关于任意初始向量收敛
  - 系数矩阵若严格行对角占优或严格列对角占优，则关于任意初始向量收敛
- **高斯-塞德尔收敛性**
  - $B_{GS}=-(D+L)^{-1}U,g_{GS}=(D+L)^{-1}b$
- **SOR方法的收敛性**
  - 低松弛方法：$\omega<1$;超松弛方法：$w>1$
  - SOR方法收敛，则$0<\omega<2$
  - 若系数矩阵A正定且w对，则方法收敛
  - 若系数矩阵严格对角占优且$0<\omega\le1$，则SOR方法收敛
  - **最佳松弛因子**：使SOR收敛最快的w取值，$\omega_{opt}=\frac{2}{1+\sqrt{1-(\rho(J))^2}}$，J为雅可比迭代法迭代矩阵的谱半径

0x27 最速下降法

- **推导看书**
- **矩阵A对称正定**
- **迭代格式**

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = x^{(k)} + \tau_k r^{(k)} \\ \tau_k = \dfrac{r^{(k)^T} r^{(k)}}{r^{(k)^T} A r^{(k)}} \\ r^{(k)} = b - Ax^{(k)} \end{cases} \qquad (k = 0,1,2\cdots)$$

(1) 任取 $x^{(0)} \in R^n$，计算 $r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$

(2) 对 $k = 0, 1, 2, \ldots$，计算

$$\alpha_k = \left(r^{(k)}, r^{(k)}\right) / \left(Ar^{(k)}, r^{(k)}\right)$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k r^{(k)}$$

$$r^{(k+1)} = b - Ax^{(k+1)} = r^{(k)} - \alpha_k A r^{(k)}$$

停机准则

若 $\boxed{\dfrac{\left\|r^{(k+1)}\right\|}{\left\|r^{(0)}\right\|} < \varepsilon}$，则输出 $x^* = x^{(k+1)}$，停止计算

- **收敛格式**

定理：设 A 对称正定，其特征值为 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n > 0$
则由最速下降法产生的序列满足

$$\lim_{k \to \infty} x^{(k)} = x^* = A^{-1} b$$

且有

$$\left\|x^{(k)} - x^*\right\|_A \leq \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_n}{\lambda_1 + \lambda_n}\right)^k \left\|x^{(0)} - x^*\right\|_A$$

- 当 $\lambda_1 >> \lambda_n$ 时，收敛会很慢，并可能出现不稳定现象 (舍入误差引起)

0x28 共轭梯度法

- **推导看书**
- **A-正交（A-共轭）**：设 A 对称正定，若 $(x, Ay) = 0$，则称 x, y 关于 A 正交 (A-正交) 或 A-共轭
- **A-正交向量组（A-共轭向量组）**：若$z1, z2, \ldots, zn$ 两两A-共轭

定理：设 A 对称正定，则由 CG 算法产生的序列满足

(1) 当 $i \neq j$ 时，$(r^{(i)}, r^{(j)}) = 0$，即 $r^{(0)}, r^{(1)}, r^{(2)}, \ldots$ 相互正交

(2) 当 $i \neq j$ 时，$(p^{(i)}, Ap^{(j)}) = 0$，即 $p^{(0)}, p^{(1)}, p^{(2)}, \ldots$
相互 A-共轭

(1) 任取 $x^{(0)}\in R^n$ ，计算 $r^{(0)}=b-Ax^{(0)}$ ，令 $p^{(0)}=r^{(0)}$

(2) 对 $k=0,1,2,\ldots$ ，计算

$$\alpha_k=\left(r^{(k)},r^{(k)}\right)/\left(Ap^{(k)},p^{(k)}\right)$$

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}+\alpha_k p^{(k)}$$

$$r^{(k+1)}=b-Ax^{(k+1)}=r^{(k)}-\alpha_k Ap^{(k)}$$

若 $\left\|r^{(k+1)}\right\|/\left\|r^{(0)}\right\|<\varepsilon$，则输出 $x^*=x^{(k+1)}$ ，停止计算

$$\beta_k=\left(r^{(k+1)},r^{(k+1)}\right)/\left(r^{(k)},r^{(k)}\right)$$

$$p^{(k+1)}=r^{(k+1)}+\beta_k p^{(k)}$$

定理：设 A 对称正定，则共轭梯度法至多 n 步就能找到精确解。

- $r^{(0)}, r^{(1)}, \ldots, r^{(n)}$ 相互正交，则至少有一个为 0

定理：设 A 对称正定，x^* 为精确解， $x^{(k)}$ 为共轭梯度法的数值解，则有

$$\left\|x^{(k)}-x^*\right\|_A\le 2\left(\frac{\sqrt{K}-1}{\sqrt{K}+1}\right)^k\left\|x^{(0)}-x^*\right\|_A$$

其中 $K=\mathrm{cond}(A)_2=\|A\|_2\left\|A^{-1}\right\|_2$

0x29 条件数与病态方程组

- **条件数** $Cond(A)=||A||\ ||A^{-1}||$，条件数交大则称为病态方程组（$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}$）
- 若A对称非奇异，则条件数为 $\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$
- 判断是否病态，一般凭经验得出
    - 行列式很大或很小
    - 元素间数量级相差大
    - 主元消去过程中有小主元
    - 特征值相差大数量级

0x30 非线性方程求根

0x31 增值寻根法与二分法

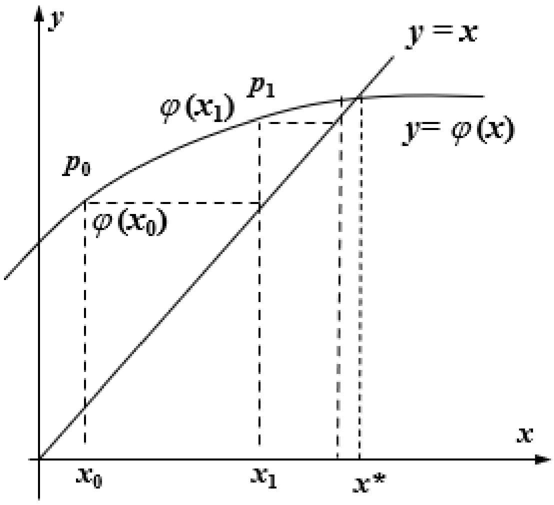
- **增值寻根法**：按照某一步长线性扫描，由零点定理推知
- **二分法停机准则**：

$$|x_n-x^*|\le\frac{b-a}{2^n}<\epsilon$$
$$n>\frac{ln(b-a)-ln\epsilon}{ln2}$$

-

0x32 迭代法

- **基本原理**：由函数零点的等式$F(x)=0$构造不动点等式$x=\phi(x)$，构造迭代公式$x^{(n+1)}=\phi(x^{(n)})$
- **收敛性判断**：若由迭代公式产生的点序列收敛，则收敛处为原方程的根
- **几何意义**：



- **收敛条件**：**压缩映像原理**（不要只判断李普希茨条件！）

设迭代函数 $\varphi(x)$ 在闭区间 $[a,b]$上满足

（1） $x\in[a,b]\Rightarrow\phi(x)\in[a,b]$，即$a\le\phi(x)\le b$

（2）$\varphi(x)$ 满足 *Lipschitz* (李普希兹常数)条件

即：$\forall x_1,x_2\in[a,b]$ 有 $|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)|\le L|x_1-x_2|$

且 $0<L<1$ 。

则 $x=\varphi(x)$在 $[a,b]$上存在 唯一解 x^*（亦称为 $\varphi(x)$的不动点）。

且对 $\forall x_0\in[a,b]$，由 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 产生的序列 $\{x_k\}$ 收敛于x^*。

证明：1.根的存在性 2.根的唯一性 3.收敛

若迭代函数的导函数绝对值小于1，则满足李普希茨条件

- **误差估计**

$$|x_n-x^*|\le\frac{1}{1-L}|x_{n+1}-x_n|$$
$$|x_n-x^*|\le\frac{L^n}{1-L}|x_1-x_0|$$

注意使用范围，前者是终止条件，后者用于预先估计迭代次数

- **发散判别**

设方程 $x=\varphi(x)$ 在区间 $[a,b]$内有根 x^*，且存在 $L\ge1$ 有$|\varphi'(x)|\ge L$，则对任意初值 $\forall x_0\in[a,b]$，且 $x_0\ne x*$，迭代过程 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 发散。

注意大于L是对于任意x

- **比较迭代函数**

看初始点，如果这里的导数大于1则发散，否则**局部**收敛

- **收敛速度**

- 设序列收敛，令$\epsilon_n = x^* - x_n$，若有$p \geq 1$和**正**常数C，使$\lim_{n\to\infty}\frac{|\epsilon_{n+1}|}{|\epsilon_n|^p} = C$，则称该序列**p阶收敛**，若序列由某迭代过程参生，则称该迭代过程p阶收敛，C称为渐近误差常数
- 线性收敛，超线性收敛，平方收敛（二次收敛）

- **收敛阶判别**
  - 当$\phi'(x^*) = \cdots = \phi^{(p-1)}(x^*) = 0$，且$\phi^{(p)}(x^*) \neq 0$时，称该迭代过程$p$收敛

    证明思路：泰勒展开到p-1阶，拉格朗日余项在p阶，然后根据定义算

0x33 迭代收敛的加速

- **松弛法**

$$\omega_n = \frac{1}{1-\phi'(x_n)}$$
$$x_{n+1} = (1-\omega_n)x_n + \omega_n\phi(x_n)$$

其中w为松弛因子，公式推导用微分中值定理

- **埃特金方法**

$$x_{n+1}^{(1)} = \varphi(x_n)$$
$$x_{n+1}^{(2)} = \varphi(x_{n+1}^{(1)}) \qquad n = 0,1,2\ldots$$
$$x_{n+1} = x_{n+1}^{(2)} - \frac{\left(x_{n+1}^{(2)} - x_{n+1}^{(1)}\right)^2}{x_{n+1}^{(2)} - 2x_{n+1}^{(1)} + x_n}$$

- **应试题型**：构造迭代过程证明极限：首先对迭代过程求根，然后证明迭代过程收敛

0x34 牛顿迭代法

一阶导数Newton法

- **迭代格式**

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

- **收敛性**

$Newton$法的迭代函数是 $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

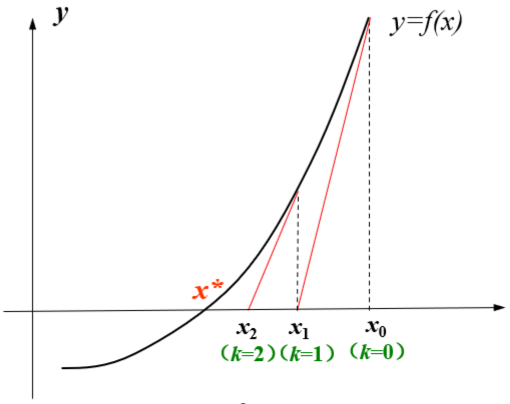
从而 $\varphi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$

由此知：若 x^* 是 $f(x)=0$ 的一个单根，则 $\varphi'(x^*)=0$，说明$Newton$法是局部收敛的，并且收敛速度至少是平方收敛的。

但如果 x^* 是 $f(x)=0$ 的 $m(>1)$重根，则 $\varphi'(x^*) = 1-\frac{1}{m}$，从而 $0 < \varphi'(x^*) < 1$

此时$Newton$法仅有线性收敛速度。

- **几何意义**



$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \Rightarrow (x_k-x_{k+1})f'(x_k)=f(x_k)$$

- **判根**

定理 设 $f(x)\in C^2[a,b]$ 满足

(1) $f(a)f(b)<0$; （$f(x)$ 在 $[a,b]$ 内有根）

(2) $f'(x)f''(x)\neq 0$，$\forall x\in[a,b]$ （$f(x)$ 的根唯一，凹向不变）

(3) $f(x_0)f''(x_0)>0$，$\exists x_0\in[a,b]$ （$\varphi(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}\in[a,b]$）

则 $f(x)=0$ 在 $[a,b]$ 上有且仅有一个实根；

迭代公式 $x_{n+1}=\varphi(x_n)$ 收敛于 $f(x)=0$ 的根 x^*。

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-x^*}{\left[x_n-x^*\right]^2}=\dfrac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$.

理解：一阶导数法，单根二阶收敛

证明思路：保号性，单调有界数列有极限

二阶导数Newton法

- **迭代格式**

$$x_{n+1}=x_n-\frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2[f'(x_n)]^2-f''(x_n)f(x_n)}$$

0x35 割线法

单点割线法

- 又名**定端点弦截法**
- 思路：固定一个点，每次参照这个点作弦
- **迭代公式**

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n-x_0}{f(x_n)-f(x_0)}f(x_n)$$

-
- **收敛速度**：线性收敛

双点割线法

- 又名**变端点弦截法**，**快速弦截法**
- **迭代公式**

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n-x_{n-1}}{f(x_n)-f(x_{n-1})}f(x_n)$$

- **收敛速度**：超线性收敛，p=1.618

0x36 抛物线法

- **迭代格式**

设 x_k，x_{k-1}，x_{k-2} 是 $f(x)=0$ 三个近似根，利用 $f(x_k)$, $f(x_{k-1})$, $f(x_{k-2})$ 构造二次插值多项式 $P_2(x)$，并适当选取 $P_2(x)$ 的一个零点 x_k 作为新的近似根，这样确定的迭代过程称为抛物线法，也称 Müller 法，即

$$x_{k+1}=x_k-\frac{2f(x_k)}{\omega+sign(\omega)\sqrt{\omega^2-4f(x_k)f[x_k,x_{k-1},x_{k-2}]}}$$

其中，$\omega=f[x_k,x_{k-1}]+f[x_k,x_{k-1},x_{k-2}](x_k-x_{k-1})$

根号前的符号取与 ω 相同的符号。

抛物线法也是超线性收敛，其收敛阶 p =1.840

注：$f[x_k,x_{k-1},x_{k-2}]$为差商

0x40 函数插值与函数逼近

- 记住n+1个点对应n次插值**多项式**

0x41 拉格朗日插值公式

二次插值或抛物插值 通过三点的插值

插值基函数$l_k(x)$

拉格朗日插值公式

$$P(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1 \text{ 两点插值}$$

Misplaced &

0x42 牛顿插值公式

- 思想：迭代，方便新增点时在原有基础上调整，无需重新计算

差商定义

差商具有对称性（点排序无关） 归纳法证明

$$p_0(x) = y_0$$
$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + a_n \prod_{i=0}^{n-1}(x - x_i)$$
其中$a_n = f(x_0, x_1, \ldots, x_n)$，为差商公式，可归纳法证明

差商表绘画

差商表

x	$f(x)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商
x_0	$f(x_0)$			
x_1	$f(x_1)$	$f(x_0,x_1)$		
x_2	$f(x_2)$	$f(x_1,x_2)$	$f(x_0,x_1,x_2)$	
x_3	$f(x_3)$	$f(x_2,x_3)$	$f(x_1,x_2,x_3)$	$f(x_0,x_1,x_2,x_3)$

$$f(x_0,x_1,\cdots,x_k) = \frac{f(x_0,x_1,\cdots,x_{k-1}) - f(x_1,x_2,\cdots,x_k)}{x_0 - x_k}$$

$$\begin{aligned} p_n(x) = &f(x_0) + f(x_0,x_1)(x-x_0) + \cdots \\ &+ f(x_0,x_1,\cdots,x_n)(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) \end{aligned}$$

0x43 埃特金插值公式

- 思想：线性函数视为形式点

Aitken插值表

Aitken 插值表

x	$f(x)$			
x_0	$f(x_0)$			
x_1	$f(x_1)$	$p_{0,1}(x)$		
x_2	$f(x_2)$	$p_{0,2}(x)$	$p_{0,1,2}(x)$	
x_3	$f(x_3)$	$p_{0,3}(x)$	$p_{0,1,3}(x)$	$p_{0,1,2,3}(x)$

$$p_{0,1,2,\ldots,n-1,n}(x) = p_{0,1,2,\ldots,n-2,n}(x)\frac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} + p_{0,1,2,\ldots,n-2,n-1}(x)\frac{x - x_n}{x_{n-1} - x_n}$$

$p_{0,1,2,\ldots,n}$的性质：
带入下标有的点的横坐标可以得到对应纵坐标，否则为0

对于整块表，所用的插值点为$x_0, x_1, \ldots x_n, x_i, x_j$，其中$x_0, \ldots, x_n$已经构造成为形式点，对i和j插值

0x44 存在唯一性定理

定理1 对于n+1个点用n次多项式插值，有且仅有一个这样的多项式

（注意证明用到定理**次数不超过 *n* 的多项式最多有*n*个根**，证明思路是反证作差）

0x45 插值余项

定理2 多项式在区间[a,b]可微分n+1次（说明多项式次数**至少**为n）有误差估计（有n+2个样本点）：

$$E(f;x)=f(x)-p_n(x)=\frac{\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)$$

证明：分两种情况：一种情况是采样点位置，直接算；另外一种首先构造辅助函数 $g(z)=f(z)-h(z)-\frac{w(z)}{w(x)}(f(x)-h(x))$，注意产生了新的零点$z=x$，之后利用罗尔定理（微分中值定理取两个零点）判零点个数，按辅助函数导数阶数递推到只有一个零点，利用该零点证明

计算$f^{(n+1)}(\xi)$

下面讨论定理2误差估计中 $f^{(n+1)}(\xi)$ 项的计算。

设 $x\in[a,b]$ $(x\neq x_i, i=0,1,\cdots,n)$，由差商定义，有

$$f(x)=f(x_0)+f(x,x_0)(x-x_0)$$

$$f(x,x_0)=f(x_0,x_1)+f(x,x_0,x_1)(x-x_1)$$

$$f(x,x_0,x_1)=f(x_0,x_1,x_2)+f(x,x_0,x_1,x_2)(x-x_2)$$

$$\vdots$$

$$f(x,x_0,x_1,\cdots,x_{n-1})=f(x_0,x_1,\cdots,x_n)+f(x,x_0,\cdots,x_n)(x-x_n)$$

于是

$$\begin{aligned}f(x)&=f(x_0)+f(x,x_0)(x-x_0)\\&=f(x_0)+[f(x_0,x_1)+f(x,x_0,x_1)(x-x_1)](x-x_0)\\&=f(x_0)+f(x_0,x_1)(x-x_0)+f(x,x_0,x_1)(x-x_0)(x-x_1)\\&=\cdots\\&=f(x_0)+f(x_0,x_1)(x-x_0)+f(x_0,x_1,x_2)(x-x_0)(x-x_1)+\cdots\\&\quad+f(x_0,x_1,\cdots,x_n)(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})\\&\quad+f(x,x_0,x_1,\cdots,x_n)(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)\end{aligned}$$

另一方面，由Newton公式

$$\begin{aligned}p_n(x)&=f(x_0)+f(x_0,x_1)(x-x_0)+f(x_0,x_1,x_2)(x-x_0)(x-x_1)+\cdots\\&\quad+f(x_0,x_1,\cdots,x_n)(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})\end{aligned}$$

故 $$\begin{aligned}R_n(x)&=f(x)-p_n(x)\\&=f(x,x_0,x_1,\cdots,x_n)(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)\end{aligned}$$

而由定理2知 $$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

比较两式，得 $$f(x,x_0,x_1,\cdots,x_n)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

龙格现象：插值次数越高，在端点附件的逼近效果越差

0x46 分段三次埃尔米特插值

- 思想：要求更严，在一阶导也符合
- 两个样本点——一阶导符合——2*2个点——三次
  - 如何构造插值基函数？实际上是两个两重根，所以对于原函数样本点的插值基函数形式为$h(x)=(x-x_i)^2(a+bx)$；一阶导则为$h(x)=(x-x_i)^2(x-x_{i+1})k$，思考原因，因为对于一阶导样本点的插值基函数的三个根都已知，但原函数未知（插值基的导函数才为0），实际上，后者是前者的特殊形式。再深入思考，为何选取一个点，另外一个点是$(x-x_i)^2$而不是$(x-x_i)(a_i+b_ix_i)$？因为求导后有两种情况：该项求导然后乘以一个函数；或不求导然后乘以一个求过导的函数，无论如何，都是为0

- 也可以从插值基函数角度思考：见书上

- $$H(x)=f(x_i)h_1(x)+f(x_{i+1})h_2(x)+f'(x_i)h_3(x)+f'(x_{i+1})h_4(x)$$
  $$h_1(x)=(1+2\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i})(\frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i})^2$$
  $$h_3(x)=(x-x_i)(\frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i})^2$$

- 分段三次埃尔米特插值误差估计：若$f(x)\in C^4[x_i,x_{i+1}]$,$H(x)$是分段三次埃尔米特插值函数，则插值余项为
$$f(x)-H(x)=\frac{(x-x_i)^2(x-x_{i+1})^2}{4}f^{(4)}(\xi_i)$$
- **证明思路**：首先构造辅助函数$g(z)=f(z)-h(z)-\frac{w(z)}{w(x)}(f(x)-h(x))$，注意产生了新的零点$z=x$，之后利用罗尔定理（微分中值定理取两个零点）判零点个数，按辅助函数导数阶数递推到只有一个零点，利用该零点证明

0x47 三次样条插值

- 思路：样本点的切线和斜率连续

定义 给定［a,b］的分划：$a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$，如果函数$s(x)$ 在区间［a, b］上满足以下条件：
（1）在每一个子区间（x_i, x_{i+1}）(i=0,1,…,n-1）上，$s(x)$是三次多项式
（2）$s(x)$ 在区间［a,b］上具有二阶连续导数；
（3）$s(x_i)=y_i$ (i=0,1,…,n), $s'(x_0)=y'_0$, $s'(x_n)=y'_n$。我们就称 $s(x)$为三次样条函数。

- 与三次埃尔米特插值的区别：三次样条函数导数未知
- 条件：
  - 子区间上是三次多项式
  - 整个闭区间二阶导连续
  - 原函数，一阶导为样本点
- 三转角算法
  - 推导方法：二阶导连续，边界条件（自然条件），利用三次埃尔米特插值可以将四个待定参数降低为一个待定参数
  - **计算过程**

利用分段三次埃尔米特插值的结果（三转角算法）

$$H(x)=f(x_i)h_1(x)+f(x_{i+1})h_2(x)+f'(x_i)h_3(x)+f'(x_{i+1})h_4(x)$$

设

$$s(x)=f(x_i)s_1(x)+f(x_{i+1})s_2(x)+m_i s_3(x)+m_{i+1}s_4(x)$$

其中，m_i,m_{i+1} 为待定参数。

$$s_1(x)=h_1(x)=\left(1+2\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)\left(\frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}\right)^2$$

$$s_2(x)=h_2(x)=\left(1+2\frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}\right)\left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)^2$$

$$s_3(x)=(x-x_i)\left(\frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}\right)^2 \qquad s_4(x)=(x-x_{i+1})\left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)^2$$

$$h_i=x_{i+1}-x_i$$

$$\begin{pmatrix} 2 & \alpha_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1-\alpha_2 & 2 & \alpha_2 & 0 & \cdots & 0 \\ & 1-\alpha_3 & 2 & \alpha_3 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & & \\ & & & 1-\alpha_{n-2} & 2 & \alpha_{n-2} \\ & & & & 1-\alpha_{n-1} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ \vdots \\ m_{n-2} \\ m_{n-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \beta_1-(1-\alpha_1)y_0' \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_{n-2} \\ \beta_{n-1}-\alpha_{n-1}y_n' \end{pmatrix}$$

其中： $$\alpha_i=\frac{h_{i-1}}{h_{i-1}+h_i}$$

$$\beta_i=3\left[(1-\alpha_i)\frac{y_i-y_{i-1}}{h_{i-1}}+\alpha_i\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}\right]$$

一般情况下，y_0', y_n' 未知，此时可设

$$\lim_{x\to x_0^+} s''(x) = \lim_{x\to x_n^-} s''(x) = 0$$

可得到：$2m_0 + m_1 = \frac{3}{h_0}(y_1 - y_0),\ m_{n-1} + 2m_n = \frac{3}{h_{n-1}}(y_n - y_{n-1})$

于是有

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1-\alpha_1 & 2 & \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 1-\alpha_2 & 2 & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & & \\ & & & 1-\alpha_{n-1} & 2 & \alpha_{n-1} \\ & & & & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{h_0}(y_1 - y_0) \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \frac{3}{h_{n-1}}(y_n - y_{n-1}) \end{pmatrix}$$

- 注意结果是n个分段函数！

0x50 B样条曲线与最小二乘拟合

0x51 贝齐尔（Bezier）曲线

- 定义：由一组多边折线各顶点唯一确定，折线只有第一点和最后一点在曲线上
- $f(t)$的**Bernstein多项式**

  $$\sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n})C_n^k t^k (1-t)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n})B_{k,n}(t), 0 \le t \le 1$$

  其中B为n次Bernstein多项式的**基函数**
- **Bezier曲线**

  $$B_n(P_0, P_1, \ldots, P_n, t) = \sum_{k=0}^{n} P_k B_{k,n}(t)$$

  其中P_i为形式点，规定$0! = 0^0 = 1$
- Bernstein的求导PPT6
- Bezier曲线在两端点处的切矢方向与Bezier控制多边形的第一条边和最后一条边一致。（对Bezier曲线求导可证）

0x52 B样条函数

- **n次截幂函数**：通俗说只取幂函数**大于**0的部分，表示为x_+^n
- **n阶B样条函数**：$M_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k (x + \frac{n}{2} - k)_+^{n-1}$
- **重要性质**：
  - 是分段n-1次多项式，节点为$x_k = -\frac{n}{2} + k$。n为偶数时节点为整数，奇数时节点为整数偏移0.5（半整数）
  - R上（不是值为大于0的部分）有n-2次连续导数（引起连续性变化的地方在x=+-n/2节点处）
  - 偶函数
  - 值域为$[0, 1]$，当x绝对值超过n/2时为0，否则大于0

- 在大于0的地方，节点数量为n+1个，其中包含两个临界值端点（注意跳跃点，即原函数某点左右极限不等时取加权平均，类似于傅里叶级数的做法）
- 大胆猜测：R上积分为1

0x53 B样条曲线

$$S_m(t)=\sum_{k=0}^{n}P_kM_{m+1}(nt-k)\quad(0\le t\le 1)$$

其中有n个型值点

0x54 自由曲线设计

0x55 最小二乘拟合

0xa0 应试题型归纳