Вариант 18

Вопрос 1. Сформулировать следствие закона больших чисел в форме Чебышёва для схемы Бернулли.

Вопрос 2. Дать определение коэффициента корреляции, сформулировать его основные свойства.

1. Найти методом моментов по выборке $X_1, X_2, \ldots, X_n$ оценку параметра α для плотности $f(x) = \begin{cases} 5\alpha 2^{-5\alpha x}\ln 2, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$

2. Найти ММП-оценку по выборке $X_1, X_2, \ldots, X_n$ параметра α для плотности $f(x) = \begin{cases} 5\alpha 2^{-5\alpha x}\ln 2, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$

3. Вероятность того, что при одном измерении некоторой физической величины допущена ошибка, равна p = 0,2. Оценить вероятность того, что в серии из 400 измерений число ошибок будет находиться в интервале (64, 96). Решить задачу, используя неравенство Чебышёва и интегральную теорему Муавра — Лапласа.

4. Случайная точка (ξ, η) наугад бросается в область, ограниченную линиями $x = 1$, $y = -2$ и $y = 2x - 1$. Найти коэффициент корреляции между ξ и η.

РК №3 по ТВиМС

Вариант 18

Медведев
Александр
ИУ6-32Б

Теория

1) Сформулировать следствие закона больших чисел в форме Чебышёва для схемы Бернулли.

При бесконечно большом числе независимых испытаний с одинаковой вероятностью p наступления события A в каждом испытании относительная частота $\frac{m}{n}$ наступления события A сходится по вероятности к p.

$$\lim_{n \to \infty} P\{|\frac{m}{n} - p| \le \varepsilon\} = 1$$

2) Дать определение коэффициента корреляции, сформулировать его свойства.

Коэф. корреляции случайных величин ξ и η называют число $\rho = \rho(\xi, \eta)$ определяемое равенством:
$$\rho = \frac{cov(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi\, D\eta}}$$

Свойства:

1) $\rho(\xi\,\xi) = 1$

2) Если ξ и η - независимы, то $\rho(\xi, \eta) = 0$

3) $\rho(a_1\xi + a_2\, b_1\eta + b_2) = \pm\rho(\xi, \eta)$

4) $-1 \le \rho(\xi, \eta) \le 1$

5) $|\rho(\xi, \eta)| = 1$ тогда и только тогда, когда ξ и η связаны линейной зависимостью.

Задачи

1) Найти методом моментов по выборке $X_1, X_2 \dots X_n$ оценку α для

$$f(x) = \begin{cases} 5\alpha\, 2^{-5\alpha x} \ln 2 & x>0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

т.к. α — одномерный, то найдем оценку $\mu_1 = \hat\mu_1(\overline{X_n})$, $\mu_1 = MX$

$$\hat\mu_1(\overline{X_n}) = \frac{1}{n}\sum_{i}^{n} X_i$$

$$MX = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x \cdot 5\alpha\, 2^{-5\alpha x}\ln 2\,dx = 5\alpha \ln 2 \int_0^{+\infty} x\, 2^{-5\alpha x}\,dx = \ln 2 \int_0^{+\infty} \frac{-5\alpha x}{-5\alpha} \cdot 2^{-5\alpha x}\, d(-5\alpha x) =$$

$$= \left| \text{замена } u = -5\alpha x \right| = \frac{\ln 2}{-5\alpha} \int_0^{+\infty} u\, 2^u\, du = \frac{\ln 2}{-5\alpha}\int_0^{+\infty} \qquad f = u \quad g' = 2^u, \quad f' = 1 \quad g = \frac{2^u}{\ln 2}$$

$$= \frac{\ln 2}{-5\alpha}\left(\frac{u 2^u}{\ln 2}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{2^u}{\ln 2}\,dx \right) = x 2^{-5\alpha x}\Big|_0^{+\infty} - \frac{2^u}{\ln 2 \cdot (-5\alpha)}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{5\alpha \ln^2 2}$$

$$\overline{X} = \frac{1}{5\alpha \ln^2 2} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{5\ln^2 2\, \overline{X}}$$

2) Найти МНП-оценку по выборке $X_1, X_2 \dots X_n$ параметра α для плотности

$$f(x) = \begin{cases} 5\alpha\, 2^{-5\alpha x} \ln 2, & x>0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

Функция правдоподобия:

$$L(x_1, x_2 \dots x_n, \alpha) = f(x_1, \alpha) \cdot f(x_2, \alpha) \dots f(x_n, \alpha) =$$

$$= 5\alpha 2^{-5\alpha x_1}\ln 2 \cdot 5\alpha\, 2^{-5\alpha x_2} \ln 2 \dots = (5\alpha \ln 2)^n \cdot 2^{-5\alpha(x_1 + x_2 \dots)}$$

Логарифм.

$$\ln L = \ln (5\alpha \ln 2)^n 2^{-5\alpha(x_1+x_2\dots)} = n \ln(5\alpha \ln 2) + (-5\alpha)(x_1 + x_2 \dots)\ln 2$$

Дифференцируем:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = n\alpha + (-5)(\sum x_i)\ln 2 = 0$$

$$\alpha = \frac{5 \sum x_i \ln 2}{n}$$

3) $p = 0{,}2$ а) по нерав. Чебышёва

$n = 400$ $MY = np = 80$

$(64, 96)$ $DY = npq = 80 \cdot 0{,}8 = 16$

$P\{64 < Y < 96\} = P\{|Y - 80| < 16\} > 1 - \frac{DY}{\varepsilon^2}$

$P\{|Y-80| < 16\} > 1 - \frac{16}{16^2} = \frac{15}{16} = 0{,}9375$

б) по т. Муавра-Лапласа

$P\{64 < Y < 96\} \approx \Phi\left(\frac{96-80}{\sqrt{16}}\right) - \Phi\left(\frac{64-80}{\sqrt{16}}\right) = \Phi(4) - \Phi(-4) =$

$= 2\Phi(4) - 1 = 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{4} e^{-\frac{t^2}{2}}dt - 1 = 0{,}9999$

Ответ: а) $P > 0{,}9375$

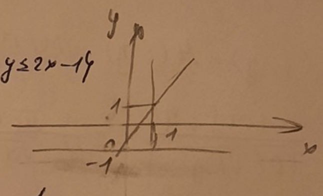
б) $P \approx 0{,}9999$

4) $x = 1$ $D = \{(x,y) \in R^2 : 0 \le x \le 1;\ -1 \le y \le 2x - 1\}$

$y = -2$

$y = 2x - 1.$ $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{m \cdot D} & (x,y) \in D \\ 0 & (x,y) \notin D \end{cases}$

ρ – ?



$m \cdot D = \cancel{\int_0^1 (\ldots)\,dx} = \int_0^1 (2x - 1 - (-1))\,dx = x^2\Big|_0^1 = 1$

Найдём f_ξ и f_η

$x_0 = (0;1)$

$f(x_0 y) = \begin{cases} 1 & y \in (-1; 2x-1) \\ 0 & y \notin (-1; 2x-1) \end{cases}$

$f_\xi(x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_0 y)\,dy = \int_{-\infty}^{-1} f(x_0 y)\,dy + \int_{-1}^{2x-1} f(x_0 y)\,dy + \int_{2x-1}^{+\infty} f(x_0 y)\,dy = y\Big|_{-1}^{2x-1} = 2x$

$f_\xi(x) = \begin{cases} 2x & x \in (0;1) \\ 0 & x \notin (0;1) \end{cases}$

$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)\,dx = \int_0^1 x \cdot 2x\,dx = \frac{2}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$

$M\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\xi(x)\,dx = \int_0^1 2x^3\,dx = \frac{x^4}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$ $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \cancel{\frac{16}{36}}$ $\frac{1}{18}$

$$f_y(y_0) = \int_{\frac{y+1}{2}}^{1} 1\,dx = \frac{y}{2} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{y-1}{2}$$

$$f_y(y) = \begin{cases} \frac{y-1}{2}, & y \in (-1, 1) \\ 0, & y \notin (-1, 1) \end{cases}$$

$$My = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_y(y)\,dy = \int_{-1}^{1} y \cdot \left(\frac{y}{2} - \frac{1}{2}\right) dy = \frac{y^3}{6}\Big|_{-1}^{1} - \frac{y^2}{4}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

$$My^2 = \int_{-1}^{1} y^2 \left(\frac{y}{2} - \frac{1}{2}\right) dy = \frac{y^4}{8}\Big|_{-1}^{1} - \frac{y^3}{6}\Big|_{-1}^{1} = 0 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$Dy = My^2 - (My)^2 = \frac{2}{9}$$

$$M(\xi y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, f(xy)\,dx\,dy = \iint_D xy\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_{2x-1}^{-1} xy\,dy =$$

$$= \int_0^1 dx \left(\frac{x}{2}\left(4x^2 - 4x + 1 - (-1)^2\right)\right) = \int_0^1 2x^3 - 2x^2\,dx = \frac{x^4}{2} - \frac{2}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}$$

$$cov(\xi, y) = M(\xi y) - M\xi My = -\frac{1}{6} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = -\frac{3}{18} - \frac{4}{18} = -\frac{7}{18}$$

$$\rho = \frac{cov(\xi, y)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{Dy}} = -\frac{7}{18}\cdot\frac{\sqrt{18}\sqrt{18}}{\sqrt{4}} = -3{,}5$$

Ответ: $-3{,}5$