Семинар 6

Одномерные случайные величины

6.1 Теоретические сведения

Определение 6.1. ***Случайной величиной*** X, называют любую функцию из Ω в $\mathbb{R}$, для которой множество $\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\}$ — является событием (т.е. принадлежит σ-алгебре событий $\mathcal{A}$ для любого $x \in \mathbb{R}$).

Определение 6.2. ***Функцией распределения*** (***вероятностей***) случайной величины X называют функцию $F(x)$, значение которой в точке x равно вероятности события $\{X < x\}$, т.е. события, состоящего из тех и только тех *элементарных исходов* ω, для которых $X(\omega) < x$:

$$F(x) = \mathsf{P}\{X < x\}.$$

Теорема 6.1. *Функция распределения удовлетворяет следующим свойствам.*

1. $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$.
2. $F(x_1) \leqslant F(x_2)$ *при* $x_1 < x_2$, *т.е.* $F(x)$ *— неубывающая функция.*
3. $F(-\infty) = \lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0; \quad F(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1.$
4. $\mathsf{P}\{x_1 \leqslant X < x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$.
5. $F(x) = F(x-0)$, *где* $F(x-0) = \lim\limits_{y\to x-0} F(y)$, *т.е.* $F(x)$ *— непрерывная слева функция.*

Замечание 6.1. Можно показать, что любая *неубывающая* непрерывная слева функция $F(x)$, удовлетворяющая условиям $F(-\infty) = 0$ и $F(+\infty) = 1$, является функцией распределения некоторой случайной величины X. #

Определение 6.3. Для произвольной случайной величины X отображение, которое ставит в соответствие множествам $B \in \mathbb{R}$ вероятность события $\{X \in B\}$, т.е. число $\mathsf{P}\{X \in B\}$, называют ***законом распределения вероятностей***, или ***распределением*** (***вероятностей***) случайной величины X.

Можно показать, что в определении 6.3 в качестве множеств B из $\mathbb{R}$ достаточно взять всевозможные полуинтервалы $(-\infty, x]$, $x \in \mathbb{R}$. Отсюда следует, закон распределения случайной величины однозначно определяется ее функцией распределения.

Определение 6.4. *Случайную величину* X называют ***дискретной***, если множество ее возможных значений конечно или счетно.

Распределение дискретной случайной величины удобно описывать с помощью ряда распределения.

Определение 6.5. ***Рядом распределения*** (***вероятностей***) ***дискретной случайной величины*** X называют таблицу (табл. 6.1), состоящую из двух строк: в верхней строке перечислены все возможные значения случайной величины, а в нижней — *вероятности* $p_i = \mathsf{P}\{X = x_i\}$ того, что случайная величина примет эти значения.

X	x_1	x_2	$\dots$	x_i	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_i	$\dots$	p_n

Таблица 6.1.

Определение 6.6. ***Непрерывной*** называют ***случайную величину*** X, *функцию распределения* которой $F(x)$ можно представить в виде

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(y)\,dy. \tag{6.1}$$

Функцию $p(x)$ называют ***плотностью распределения*** (***вероятностей***) случайной величины X.

Теорема 6.2. *Плотность распределения обладает следующими свойствами. 1)* $p(x) \geqslant 0$.

2) $\mathsf{P}\{x_1 \leqslant X < x_2\} = \int\limits_{x_1}^{x_2} p(x)\,dx$.

3) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = 1$.

4) $\mathsf{P}\{x \leqslant X < x + \Delta x\} \approx p(x)\Delta x$ *в точках непрерывности плотности распределения.*

5) $\mathsf{P}\{X = x\} = 0$.

Замечание 6.2. Можно показать, что любая неотрицательная функция $p(x)$, удовлетворяющая условию $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = 1$, является плотностью распределения вероятностей некоторой случайной величины X. #

6.2 Решение типовых примеров

Пример 6.1. Игральную кость бросают один раз. Если выпадает четное число очков, игрок выигрывает 8 рублей, если нечетное, но больше одного — проигрывает 1 рубль, если выпадает одно очко — проигрывает 10 рублей. Найдем *распределение случайной величины* X — величины выигрыша в данной игре.

Р е ш е н и е: *Пространство элементарных исходов* в данном случае имеет вид

$$\Omega = \{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\},$$

где ω_i — выпадение i очков. Считая, что игральная кость симметричная, имеем

$$\mathsf{P}(\omega_i) = \frac{1}{6}, \qquad i = \overline{1,6}.$$

Случайная величина X может принять всего три значения $x_1 = 8$, $x_2 = -1$ и $x_3 = -10$ (является *дискретной*), причем каждому из этих значений соответствуют *события*

$$\{X = 8\} = \{\omega : X(\omega) = 8\} = \{\omega_2,\omega_4,\omega_6\},$$
$$\{X = -1\} = \{\omega : X(\omega) = -1\} = \{\omega_3,\omega_5\},$$
$$\{X = -10\} = \{\omega : X(\omega) = -10\} = \{\omega_1\}$$

с *вероятностями*

$$p_1 = \mathsf{P}\{X = 8\} = \mathsf{P}\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\} = \mathsf{P}(\omega_2) + \mathsf{P}(\omega_4) + \mathsf{P}(\omega_6) = \frac{1}{2},$$

$$p_2 = \mathsf{P}\{X = -1\} = \mathsf{P}\{\omega_3, \omega_5\} = \mathsf{P}(\omega_3) + \mathsf{P}(\omega_5) = \frac{1}{3},$$

$$p_3 = \mathsf{P}\{X = -10\} = \mathsf{P}\{\omega_1\} = \frac{1}{6}.$$

Таким образом, *ряд распределения случайной величины* X можно представить в виде табл. 6.2.

X	-10	-1	8
P	1/6	1/3	1/2

Таблица 6.2.

Найдем теперь *функцию распределения* $F(x)$ *случайной величины* X. В соответствии с определением функции распределения

$$F(x) = \mathsf{P}\{X < x\} = \begin{cases} 0, & x \leqslant -10; \\ p_1 = 1/6, & -10 < x \leqslant -1; \\ p_1 + p_2 = 1/2, & -1 < x \leqslant 8; \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1, & x > 8. \end{cases}$$

Пример 6.2. Производят четыре независимых опыта, в каждом из которых некоторое событие A появляется с вероятностью $p = 0{,}8$. Построим ряд распределения и функцию распределения случайной величины X — числа появлений события A в четырех опытах.

Решение: В соответствии с условием задачи мы имеем дело со *схемой Бернулли*, т.е. число появлений события A распределено по *биномиальному закону* с параметрами $n = 4$, $p = 0{,}8$ и $q = 1 - p = 0{,}2$. Значит, случайная величина X может принимать только значения $i,\ i = \overline{0{,}4}$.

Согласно *формуле Бернулли*

$$\mathsf{P}\{X = i\} = C_n^i p^i q^{n-i}, \quad i = \overline{0{,}n},$$

определим вероятности возможных значений случайной величины X:

$$\mathsf{P}\{X = 0\} = C_4^0 p^0 q^4 = 0{,}0016, \quad \mathsf{P}\{X = 1\} = C_4^1 p^1 q^3 = 0{,}0256,$$

$$\mathsf{P}\{X = 2\} = C_4^2 p^2 q^2 = 0{,}1536, \quad \mathsf{P}\{X = 3\} = C_4^3 p^3 q^1 = 0{,}4096,$$

$$\mathsf{P}\{X = 4\} = C_4^4 p^4 q^0 = 0{,}4096.$$

Ряд распределения рассматриваемой случайной величины представлен в табл. 6.3. Функция распределения случайной величины X имеет вид

X	0	1	2	3	4
P	0,0016	0,0256	0,1536	0,4096	0,4096

Таблица 6.3.

$$F(x) = \mathsf{P}\{X < x\} = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ 0{,}0016, & 0 < x \leqslant 1; \\ 0{,}0272, & 1 < x \leqslant 2; \\ 0{,}1808, & 2 < x \leqslant 3; \\ 0{,}5904, & 3 < x \leqslant 4; \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Пример 6.3. Функция распределения *непрерывной случайной величины* X задана выражением
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ x^2, & 0 < x \leqslant 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$
Найдем:

а) *плотность распределения* $p(x)$ случайной величины X;

б) вероятность попадания случайной величины X в интервал от 0,25 до 0,5;

в) вероятность того, что случайная величина X примет значение меньшее 0,3;

г) вероятность того, что случайная величина X примет значение большее 0,7;

Решение: Воспользовавшись определением и свойствами плотности распределения и функции распределения, имеем:

а) $p(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ 2x, & 0 < x < 1; \\ 0, & x > 1; \end{cases}$

б) $\mathsf{P}\{0{,}25 < x < 0{,}5\} = F(0{,}5) - F(0{,}25) = 0{,}5^2 - 0{,}25^2 = 0{,}1875;$

в) $\mathsf{P}\{x < 0{,}3\} = F(0{,}3) = 0{,}3^2 = 0{,}09;$

г) $\mathsf{P}\{x > 0{,}7\} = 1 - \mathsf{P}\{x \leqslant 0{,}7\} = 1 - F(0{,}7) = 1 - 0{,}7^2 = 0{,}51;$

Пример 6.4. Функция распределения непрерывной случайной величины X задается формулой
$$F(x) = c + b \operatorname{arctg} \frac{x}{a}.$$
Найдем:

а) постоянные c и b;

б) плотность распределения случайной величины X;

в) $\mathsf{P}\{x_1 < X < x_2\}$.

Решение: В соответствии с определениями функции и плотности распределения

а) постоянные b и c определяем из условий
$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$
Имеем:
$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(c + b \operatorname{arctg} \tfrac{x}{a}\right) = c - b\tfrac{\pi}{2} = 0,$$
$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(c + b \operatorname{arctg} \tfrac{x}{a}\right) = c + b\tfrac{\pi}{2} = 1,$$
Из системы уравнений
$$\begin{cases} c - b\tfrac{\pi}{2} = 0; \\ c + b\tfrac{\pi}{2} = 1 \end{cases}$$
находим, что $c = 1/2$ и $b = 1/\pi$ и поэтому $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$;

б) плотность распределения равна
$$p(x) = F'(x) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}\right)' = \frac{a}{\pi(x^2 + a^2)};$$

в) вероятность попадания X в интервал (x_1, x_2) равна:

$$\mathsf{P}\{x_1 < X < x_2\} = F(x_2) - F(x_1) =$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x_2}{a} - \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x_1}{a} = \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{x_2}{a} - \operatorname{arctg}\frac{x_1}{a}\right).$$

Пример 6.5. Непрерывная случайная величина X имеет следующую плотность распределения:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 1; \\ a/x^2, & x > 1. \end{cases}$$

Определим:

а) коэффициент a;

б) функцию распределения $F(x)$;

г) вероятность $\mathsf{P}\{2 < X < 3\}$ попадания случайной величины X в интервал $(2,3)$;

д) вероятность того, что при четырех независимых испытаниях случайная величина X ни разу не попадет в интервал $(2,3)$.

Р е ш е н и е: а) Для нахождения коэффициента a воспользуемся свойством 3 плотности распределения. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{x^2}\,dx = -\frac{a}{x}\bigg|_1^{+\infty} = a,$$

откуда получаем $a = 1$.

б) В соответствии с определением плотности распределения

$$F(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0\,dx = 0, & x \leqslant 1; \\ \displaystyle\int_{1}^{x} \frac{dy}{y^2} = \frac{x-1}{x}, & x > 1. \end{cases}$$

г) $\mathsf{P}\{2 < X < 3\} = F(3) - F(2) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6}.$

д) Вероятность того, что X не попадет в интервал $(2,\ 3)$ при одном испытании равна $1 - 1/6 = 5/6$, а при четырех испытаниях — $(5/6)^4 \approx 0{,}48$.

6.3 Задачи для самостоятельного решения

6.1. Из партии в 10 деталей, среди которых две бракованные, наудачу выбирают три детали. Найдите закон распределения числа бракованных деталей среди выбранных. Постройте функцию распределения.

О т в е т:

$$\mathsf{P}\{X = i\} = \frac{C_2^i C_8^{3-i}}{C_{10}^3},\ i = 0{,}1{,}2. \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ 7/15, & x \in (0,\ 1]; \\ 14/15, & x \in (1,\ 2]; \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

6.2. Вероятность приема самолетом радиосигнала при каждой передаче равна 0,7. Найдите ряд распределения и функцию распределения числа X принятых сигналов при шестикратной передаче.

О т в е т: Ряд распределения и функцию распределения случайной величины X легко построить, зная, что $\mathsf{P}\{X = i\} = C_6^i (0{,}7)^i (0{,}3)^{6-i}$, $i = \overline{0{,}6}$.

6.3. Найдите закон распределения случайной величины X — числа таких бросаний трех игральных костей, в каждом из которых ровно на двух костях появится по 2 очка, если общее число бросаний равно 15.

О т в е т: $\mathsf{P}\{X = i\} = C_{15}^i p^i q^{15-i}$, $i = \overline{0{,}15}$, где $p = C_3^2 (1/6)^2 (5/6)^1 = 5/72 \approx 0{,}0694$.

6.4. В течение часа на станцию скорой помощи поступает случайное число X вызовов, распределенное по закону Пуассона с параметром $\lambda = 5$. Найдите вероятность того, что в течение часа поступит:

а) ровно два вызова;

б) не более двух вызовов;

в) не менее двух вызовов.

О т в е т: а) $\mathsf{P}\{X = 2\} = 5^2 e^{-5}/2! \approx 0{,}086$;
б) $\mathsf{P}\{X \leqslant 2\} = (5^0/0! + 5^1/1! + 5^2/2!)e^{-5} \approx 0{,}127$;
в) $\mathsf{P}\{X \geqslant 2\} = 1 - \mathsf{P}\{X < 2\} = 1 - (5^0/0! + 5^1/1!)e^{-5} \approx 0{,}041$.

6.5. Число вызовов, поступающих на АТС (автоматическая телефонная станция) каждую минуту, распределено по закону Пуассона с параметром $\lambda = 1{,}5$. Найдите вероятность того, что за минуту поступит:

а) ровно три вызова;

б) хотя бы один вызов;

в) менее пяти вызовов.

О т в е т: а) 0,12551; б) 0,77687; в) 0,98143.

6.6. В приборный отсек космического корабля за время полета попадает случайное число частиц, распределенное по закону Пуассона с параметром λ, причем вероятность попасть в блок управления, расположенный в отсеке космического корабля, для каждой из этих частиц равна p. Определите вероятность попадания в блок:

а) ровно k частиц;

б) хотя бы одной частицы.

О т в е т: а) $(\lambda p)^k e^{-\lambda p}/k!$; б)$1 - e^{-\lambda p}$.

6.7. По цели производят серию независимых выстрелов до первого попадания. Даны вероятность p попадания в цель при одном выстреле и запас патронов n. Найдите ряд распределения и функцию распределения числа X израсходованных патронов.

О т в е т:

$$\mathsf{P}\{X = i\} = \begin{cases} pq^{i-1}, & i = \overline{0{,}n-1} \quad (q = 1-p); \\ q^{n-1}, & i = n. \end{cases}$$

Семинар 9

Многомерные случайные величины (случайные векторы)

9.1 Теоретические сведения

Определение 9.1. Упорядоченную пару случайных величин (X_1,X_2), заданных на одном и том же *вероятностном пространстве* $(\Omega,\mathcal{A},\mathsf{P})$, назовем ***двумерным случайным вектором***, а случайные величины X_1,X_2 — ***координатами случайного вектора***.

Определение 9.2. ***Функцией распределения (вероятностей)*** $F(x_1,x_2)$ случайного вектора (X_1,X_2) называют функцию, значение которой в точке $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$ равно вероятности совместного осуществления (пересечения) событий $\{X_1 < x_1\},\{X_2 < x_2\}$, т.е.

$$F(x_1,x_2) = \mathsf{P}\{X_1 < x_1,X_2 < x_2\}.$$

Теорема 9.1. *Двумерная функция распределения удовлетворяет следующим свойствам.*

1. $0 \leqslant F(x_1,x_2) \leqslant 1$.

2. $F(x_1,x_2)$ *— неубывающая функция по каждому из аргументов* x_1 *и* x_2.

3. $F(-\infty,x_2) = F(x_1,-\infty) = 0$.

4. $F(+\infty,+\infty) = 1$.

5. $\mathsf{P}\{a_1 \leqslant X_1 < b_1,\ a_2 \leqslant X_2 < b_2\} = F(b_1,b_2) - F(b_1,a_2) - F(a_1,b_2) + F(a_1,a_2)$.

6. $F(x_1,x_2)$ *— непрерывная слева в любой точке* $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$ *по каждому из аргументов* x_1 *и* x_2 *функция.*

7. $F_{X_1,X_2}(x,+\infty) = F_{X_1}(x),\quad F_{X_1,X_2}(+\infty,x) = F_{X_2}(x)$.

Определение 9.3. ***Двумерный случайный вектор*** (X,Y) называют ***дискретным***, если каждая из случайных величин X и Y является *дискретной*.

Распределение дискретного случайного вектора (X,Y) описывается с помощью таблицы 9.1. В ней

$$p_{ij} = \mathsf{P}\{X = x_i,Y = y_j\},$$

$$p_{i\bullet} = \mathsf{P}\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}$$

и

$$p_{\bullet j} = \mathsf{P}\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{m} p_{ij}$$

для всех $i = 1,\ldots,m$, $j = 1,\ldots,n$.

X	Y				
	y_1	y_2	$\ldots$	y_n	P_X
x_1	p_{11}	p_{12}	$\ldots$	p_{1n}	$p_{1\bullet}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\ldots$	p_{2n}	$p_{2\bullet}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
x_m	p_{m1}	p_{m2}	$\ldots$	p_{mn}	$p_{n\bullet}$
P_Y	$p_{\bullet 1}$	$p_{\bullet 2}$	$\ldots$	$p_{\bullet n}$	

Таблица 9.1

Совместная функция распределения $F(x,y)$ дискретного случайного вектора (X,Y) имеет вид

$$F(x,y) = \sum_{\substack{i:\ x_i<x\\ j:\ y_j<y}} p_{ij}.$$

Определение 9.4. ***Непрерывной двумерной случайной величиной*** (X,Y) называют такую двумерную случайную величину (X,Y), *совместную функцию распределения* которой $F(x_1,x_2) = \mathsf{P}\{X < x_1, Y < x_2\}$ можно представить в виде сходящегося несобственного интеграла:

$$F(x_1,x_2) = \int\limits_{-\infty}^{x_1}\int\limits_{-\infty}^{x_2} p(y_1,y_2)\,dy_1\,dy_2 = \int\limits_{-\infty}^{x_1} dy_1 \int\limits_{-\infty}^{x_2} p(y_1,y_2)\,dy_2 = \int\limits_{-\infty}^{x_2} dy_2 \int\limits_{-\infty}^{x_1} p(y_1,y_2)\,dy_1.$$

Функцию $p(x_1,x_2)$ называют ***совместной (двумерной) плотностью распределения*** случайных величин X и Y, или плотностью распределения случайного вектора (X,Y).

Заметим, что

$$p(x_1,x_2) = \frac{\partial^2 F(x_1,x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 F(x_1,x_2)}{\partial x_2 \partial x_1}. \tag{9.1}$$

Теорема 9.2. *Двумерная плотность распределения обладает следующими свойствами.*

1. $p(x_1,x_2) \geqslant 0$.
2. $\mathsf{P}\{a_1 < X < b_1, a_2 < Y < b_2\} = \int\limits_{a_1}^{b_1} dx_1 \int\limits_{a_2}^{b_2} p(x_1,x_2)\,dx_2$.
3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x_1,x_2)\,dx_1 dx_2 = 1$.
4. $\mathsf{P}\{x_1 < X < x_1 + \Delta x_1, x_2 < Y < x_2 + \Delta x_2\} \approx p(x_1,x_2)\Delta x_1 \Delta x_2$.
5. $\mathsf{P}\{X = x_1, Y = x_2\} = 0$.
6. $\mathsf{P}\{(X,Y) \in D\} = \iint\limits_D p(x_1,x_2)\,dx_1 dx_2$.
7. $p_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\,dy$.
8. $p_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\,dx$.

Определение 9.5. ***Случайные величины*** X и Y называют ***независимыми***, если *совместная функция распределения* $F(x,y)$ является произведением *одномерных функций распределения* $F_X(x)$ и $F_Y(y)$:

$$F(x,y) = F_X(x)F_Y(y).$$

В противном случае ***случайные величины*** называют ***зависимыми***.

Из определения 9.5 вытекает, что для независимых случайных величин X и Y события $\{X < x\}$ и $\{Y < y\}$ являются независимыми. Можно показать, что независимыми являются и все события $\{x_1 \leqslant X < x_2\}$ и $\{y_1 \leqslant Y < y_2\}$.

Теорема 9.3. *Для того чтобы непрерывные случайные величины X и Y были независимыми, необходимо и достаточно, чтобы для всех x и y*

$$p(x,y) = p_X(x)p_Y(y).$$

Теорема 9.4. *Если случайные величины X и Y независимыми, а функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ кусочно-непрерывны, то случайные величины $\varphi(X)$ и $\psi(Y)$ также независимы.*

Предложение 9.1. *Если (X_1,X_2) — непрерывный случайный вектор с плотностью распределения $p(x_1,x_2)$, то функцию распределения случайной величины $Y = \varphi(X_1,X_2)$, где — некоторая функция, можно найти по формуле*

$$F_Y(y) = \iint\limits_{\varphi(x_1,x_2)<y} p(x_1,x_2)\,dx_1dx_2. \tag{9.2}$$

9.2 Решение типовых примеров

Пример 9.1. Случайный вектор (X,Y) имеет функцию распределения

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \text{ или } y \leqslant 0; \\ 1 - e^{-x^2} - e^{-2y} + e^{-x^2-2y}, & x > 0 \text{ и } y > 0. \end{cases}$$

Найдем:

а) вероятности событий

$$\{-2 \leqslant X < 2, 1 \leqslant Y < 3\},\ \{X \geqslant 0, Y \geqslant 1\} \text{ и } \{X < 1, Y \geqslant 2\};$$

б) функции распределения случайных величин X и Y.

Р е ш е н и е: а) В соответствии со свойством *двумерной функции распределения* имеем

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\{-2 \leqslant X < 2, 1 \leqslant Y < 3\} &= F(2,3) - F(2,1) - F(-2,3) + F(-2,1) = \\ &= 1 - e^{-4} - e^{-6} + e^{-10} - -(1 - e^{-4} - e^{-2} + +e^{-6}) - 0 + 0 = e^{-2} - 2e^{-6} + e^{-10}.\end{aligned}$$

Событие $\{X \geqslant 0, Y \geqslant 1\}$ представляет собой попадание двумерной случайной величины (X,Y) в квадрант $\{x \geqslant 0, y \geqslant 1\}$. Поэтому

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\{X \geqslant 0, Y \geqslant 1\} &= F(+\infty, +\infty) - F(+\infty,1) - F(0, +\infty) + F(0,1) = \\ &= 1 - (1 - e^{-2}) - 0 + 0 = e^{-2}.\end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\{X < 1, Y \geqslant 2\} &= F(1, +\infty) - F(1,2) - F(-\infty, +\infty) + F(-\infty,2) = \\ &= 1 - e^{-1} - (1 - e^{-1} - e^{-4} + e^{-5}) - 0 + 0 = e^{-4} - e^{-5}.\end{aligned}$$

б) В соответствии со свойством двумерной функции распределения частные распределения случайных величин X и Y задаются формулами

$$F_X(x) = F(x, +\infty) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ 1 - e^{-x^2}, & x > 0; \end{cases}$$

$$F_Y(y) = F(+\infty, y) = \begin{cases} 0, & y \leqslant 0; \\ 1 - e^{-2y}, & y > 0. \end{cases}$$

Пример 9.2. Двумерная случайная величина (X,Y) имеет совместную функцию распределения

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \text{ или } y \leqslant 0; \\ \sin x \sin y, & 0 < x \leqslant \pi/2 \text{ и } 0 < y \leqslant \pi/2; \\ \sin x, & 0 < x \leqslant \pi/2 \text{ и } y > \pi/2; \\ \sin y, & x > \pi/2 \text{ и } 0 < y \leqslant \pi/2; \\ 1, & x > \pi/2 \text{ и } y > \pi/2. \end{cases}$$

Найдем:

а) вероятности событий

$$\Big\{-1 \leqslant X < \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6} \leqslant Y < \frac{\pi}{3}\Big\}, \ \Big\{X \geqslant \frac{\pi}{4}, Y \geqslant \frac{\pi}{4}\Big\} \ \text{ и } \ \Big\{X < \frac{\pi}{3}, Y \geqslant \frac{\pi}{6}\Big\};$$

б) частные функции распределения случайных величин X и Y.

Р е ш е н и е: Действуя таким же образом, как в примере 9.1, имеем:

$$\text{а)} \quad \mathsf{P}\Big\{-1 \leqslant X \leqslant \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6} \leqslant Y < \frac{\pi}{3}\Big\} = F\Big(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\Big) - F\Big(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\Big) -$$

$$- F\Big(-1, \frac{\pi}{3}\Big) + F\Big(-1, \frac{\pi}{6}\Big) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} - 0 + 0 = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4},$$

$$\mathsf{P}\Big\{X \geqslant \frac{\pi}{4}, Y \geqslant \frac{\pi}{4}\Big\} = F(+\infty, +\infty) - F\Big(+\infty, \frac{\pi}{4}\Big) - F\Big(\frac{\pi}{4}, +\infty\Big) + F\Big(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\Big) =$$

$$= 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{2} = \frac{3}{2} - \sqrt{2},$$

$$\mathsf{P}\Big\{X < \frac{\pi}{3}, Y \geqslant \frac{\pi}{6}\Big\} = F\Big(\frac{\pi}{3}, +\infty\Big) - F\Big(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\Big) - F(-\infty, -\infty) + F\Big(-\infty, \frac{\pi}{6}\Big) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} - 0 + 0 = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{б)} \quad F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ \sin x, & 0 < x \leqslant \pi/2; \\ 1, & x > \pi/2; \end{cases} \qquad F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leqslant 0; \\ \sin y, & 0 < y \leqslant \pi/2; \\ 1, & y > \pi/2. \end{cases}$$

Пример 9.3. Распределение вероятностей *дискретной двумерной случайной величины* (X,Y) задано табл. 9.2. Найдем:

а) *ряды распределения* случайных величин X и Y;

б) значения совместной функции распределения $F(x,y)$ в точках $(4{,}5; 8)$ и $(9; 11)$, а также вероятность события $\{4 \leqslant X < 9, 8 \leqslant Y < 11\}$.

X	Y		
	3	8	12
3	0,17	0,13	0,25
5	0,10	0,30	0,05

Таблица 9.2.

Р е ш е н и е: а) Поскольку *событие* $\{X = 3\}$ совпадает с *объединением непересекающихся событий* $\{X = 3, Y = 3\}$, $\{X = 3, Y = 8\}$ и $\{X = 3, Y = 12\}$, то

$$\mathsf{P}\{X{=}3\} = \mathsf{P}\{X{=}3,Y{=}3\} + \mathsf{P}\{X{=}3,Y{=}8\} + \mathsf{P}\{X{=}3,Y{=}12\} = 0{,}55.$$

Аналогично

$$\mathsf{P}\{X{=}5\} = \mathsf{P}\{X{=}5,Y{=}3\} + \mathsf{P}\{X{=}5,Y{=}8\} + \mathsf{P}\{X{=}3,Y{=}12\} = 0{,}45.$$

Ряд распределения случайной величины X приведен в табл. 9.3.

Таблица 9.3

X	3	5
P	0,55	0,45

Таблица 9.4

Y	3	8	12
P	0,27	0,43	0,30

Суммируя вероятности по столбцам (см. табл 9.2), находим:

$$\mathsf{P}\{Y=3\} = \mathsf{P}\{X=3,Y=3\} + \mathsf{P}\{X=5,Y=3\} = 0{,}27,$$

$$\mathsf{P}\{Y=8\} = \mathsf{P}\{X=3,Y=8\} + \mathsf{P}\{X=5,Y=8\} = 0{,}43,$$

$$\mathsf{P}\{Y=12\} = \mathsf{P}\{X=3,Y=12\} + \mathsf{P}\{X=5,Y=12\} = 0{,}30.$$

Ряд распределения случайной величины Y приведен в табл. 9.4.

б) Используя определение совместной функции распределения и то, что событие $\{X < 4{,}5, Y < 8\}$ совпадает с событием $\{X = 3, Y = 3\}$, получаем

$$F(4{,}5,\, 8) = \mathsf{P}\{X < 4{,}5, Y < 8\} = \mathsf{P}\{X=3,Y=3\} = 0{,}17.$$

Аналогично событие $\{X < 9, Y < 11\}$ совпадает с объединением непересекающихся событий $\{X=3,Y=3\}$, $\{X=3,Y=8\}$, $\{X=5,Y=3\}$ и $\{X=5,Y=8\}$, и, значит,

$$F(9,11) = \mathsf{P}\{X<9,Y<11\} = \\ = \mathsf{P}\{X=3,Y=3\} + \mathsf{P}\{X=3,Y=8\} + \mathsf{P}\{X=5,Y=3\} + \mathsf{P}\{X=5,Y=8\} = 0{,}70.$$

Наконец,

$$\mathsf{P}\{4 \leqslant X < 9, 8 \leqslant Y < 11\} = \mathsf{P}\{X=5,Y=8\} = 0{,}30.$$

Пример 9.4. Совместная функция распределения *непрерывной двумерной случайной величины* (X, Y) имеет вид

$$F(x,y) = \frac{1}{\pi^2}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{\pi}{2}\right)\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{b} + \frac{\pi}{2}\right) \quad (a > 0, b > 0).$$

Найдем совместную плотность распределения.

Р е ш е н и е: Воспользовавшись равенством

$$p(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y},$$

получим

$$p(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{1}{\pi^2}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{\pi}{2}\right)\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{b} + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{ab}{\pi^2(a^2+x^2)(b^2+y^2)}.$$

Пример 9.5. *Совместная плотность распределения* непрерывной двумерной случайной величины (X,Y) имеет вид

$$p(x,y) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \text{ или } y \leqslant 0; \\ 3^{-x-y}\ln^2 3, & x > 0 \text{ и } y > 0. \end{cases}$$

Найдем:

а) совместную функцию распределения;

б) частные плотности распределения случайных величин X и Y;

в) вероятность попадания *случайного вектора* (X,Y) в треугольник с вершинами в точках $A(2;1)$, $B(2;2)$ и $C(5;1)$.

Решение:

а) Совместная функция распределения

$$F(x,y) = 0$$

при $x \leqslant 0$ или $y \leqslant 0$, а при $x > 0$ и $y > 0$

$$F(x,y) = \int_0^x \int_0^y 3^{-u-v} \ln^2 3 du dv = \int_0^x du \int_0^y 3^{-u-v} \ln^2 3 dv =$$

$$= \left(\int_0^x 3^{-u} \ln 3 du \right) \left(\int_0^y 3^{-v} \ln 3 dv \right) = (1 - 3^{-x})(1 - 3^{-y}).$$

б) Частная плотность распределения случайной величины X равна 0 при $x \leqslant 0$, а при $x > 0$ имеет вид

$$p_X(x) = \int_0^{+\infty} 3^{-x-y} \ln^2 3 dy = 3^{-x} \ln 3.$$

Аналогично частная функция распределения случайной величины Y равна 0 при $y \leqslant 0$, а при $y > 0$ определяется выражением

$$p_Y(y) = \int_0^{+\infty} 3^{-x-y} \ln^2 3 dx = 3^{-y} \ln 3.$$

в) В соответствии со свойством совместной плотности распределения вероятность попадания случайного вектора (X,Y) в треугольник с вершинами в точках $A(2;1)$, $B(2;2)$ и $C(5;1)$

$$\mathsf{P}\{(X,Y) \in D\} = \iint_D p(x,y) dx dy,$$

где область D представляет собой рассматриваемый треугольник.

Проводя интегрирование, получаем

$$\mathsf{P}\{(X,Y) \in D\} = \int_2^5 3^{-x} \ln 3 dx \int_1^{(8-x)/3} 3^{-y} \ln 3 dy =$$

$$= \int_2^5 3^{-x} \ln 3 \left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt[3]{3}}{27} 3^{x/3} \right) dx = -\frac{1}{3} 3^{-x} \Big|_2^5 + \frac{\sqrt[3]{3}}{18} 3^{-2x/3} \Big|_2^5 = \frac{14}{27^2} \approx 0{,}019.$$

Пример 9.6. Проверим, являются ли *случайные величины* X и Y из примера 9.1 *независимыми*.

Решение: Из результатов примера 9.1 следует, что совместная функция распределения $F(x,y)$ случайного вектора (X,Y) совпадает при всех x и y с произведением частных функций распределения $F_X(x)$ и $F_Y(y)$ случайных величин X и Y. Поэтому случайные величины X и Y являются независимыми согласно определению.

Пример 9.7. Распределение вероятностей двумерной случайной величины (X,Y) задано табл. 9.5. Проверим, являются ли случайные величины X и Y независимыми.

Р е ш е н и е: Ряды распределения случайных величин X и Y представлены в табл. 9.6 и 9.7.

X	Y		
	2	4	6
-1	0,08	0,12	0,20
1	0,12	0,18	0,30

Таблица 9.5.

X	-1	1
P	0,4	0,6

Таблица 9.6

Y	2	4	6
P	0,2	0,3	0,5

Таблица 9.7

Из табл. 9.5–9.7 следует, что вероятность события $\{X = -1, Y = 2\}$ совпадает с произведением вероятностей событий $\{X = -1\}$ и $\{Y = 2\}$. Это же свойство верно и для всех остальных возможных пар значений случайных величин X и Y. Поэтому случайные величины X и Y являются независимыми.

Пример 9.8. Проверим, являются ли случайные величины X и Y из примера 9.3 независимыми.

Р е ш е н и е: Поскольку вероятность события $\{X = 3, Y = 3\}$ не равна произведению вероятностей событий $\{X = 3\}$ и $\{Y = 3\}$, тослучайные величины X и Y являются зависимыми.

9.3 Задачи для самостоятельного решения

9.1. Двумерная случайная величина (X, Y) имеет совместную функцию распределения

$$F(x, y) = \frac{1}{4\pi^2}(4 \operatorname{arctg} x \operatorname{arctg} y + 2\pi \operatorname{arctg} x + 2\pi \operatorname{arctg} y + \pi^2).$$

Найдите:

а) вероятности событий $\{-1 \leqslant X < 1, 1 \leqslant Y < \sqrt{3}\}$ и $\{X \geqslant 1, Y \geqslant \sqrt{3}\}$;

б) частные функции распределения случайных величин X и Y;

в) Проверьте, являются ли случайные величины X и Y независимыми.

О т в е т:

а) $\mathsf{P}\{-1 \leqslant X < 1, 1 \leqslant Y < \sqrt{3}\} = 1/24$, $\mathsf{P}\{X \geqslant 1, Y \geqslant \sqrt{3}\} = 1/24$.

б) $F_X(x) = \dfrac{1}{2\pi}(2 \operatorname{arctg} x + \pi)$, $F_Y(y) = \dfrac{1}{2\pi}(2 \operatorname{arctg} y + \pi)$.

в) да, являются.

9.2. Двумерная случайная величина (X,Y) имеет совместную функцию распределения

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \ \text{ или } \ y \leqslant 0; \\ \dfrac{\sin x + \sin y - \sin(x+y)}{2}, & 0 < x \leqslant \dfrac{\pi}{2} \text{ и } 0 < y \leqslant \dfrac{\pi}{2}; \\ \dfrac{\sin x - \cos x + 1}{2}, & 0 < x \leqslant \dfrac{\pi}{2} \ \text{ и } \ y > \pi/2; \\ \dfrac{\sin y - \cos y + 1}{2}, & x > \dfrac{\pi}{2} \ \text{ и } \ 0 < y \leqslant \dfrac{\pi}{2}; \\ 1, & x > \dfrac{\pi}{2} \ \text{ и } \ y > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найдите:

а) вероятности событий $\{\pi/12 \leqslant X < \pi/4, \pi/12 \leqslant Y < \pi/4\}$, $\{X \geqslant \pi/4, Y \geqslant \pi/4\}$ и $\{X < \pi/3, Y \geqslant \pi/6\}$;

б) частные функции распределения случайных величин X и Y.

в) Проверьте, являются ли случайные величины X и Y независимыми.

Ответ:

а) $\mathsf{P}\{\pi/12 \leqslant X < \pi/4, \pi/12 \leqslant Y < \pi/4\} = (2\sqrt{3} - 3)/4$,
$\mathsf{P}\{X \geqslant \pi/4, Y \geqslant \pi/4\} = (\sqrt{2} - 1)/2$, $\mathsf{P}\{X < \pi/3, Y \geqslant \pi/6\} = 1/2$.

б)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ \dfrac{\sin x - \cos x + 1}{2}, & 0 < x \leqslant \pi/2; \\ 1, & x > \pi/2; \end{cases} \qquad F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leqslant 0; \\ \dfrac{\sin y - \cos y + 1}{2}, & 0 < y \leqslant \pi/2; \\ 1, & y > \pi/2. \end{cases}$$

в) Нет, не являются.

9.3. Распределение вероятностей дискретной двумерной случайной величины (X, Y) задано табл. 9.8. Найдите:

а) ряды распределения случайных величин X и Y;

б) значения совместной функции распределения $F(x, y)$ в точках (2,5; 25) и (9; 11), а также вероятность события $\{2 \leqslant X < 9, 10 \leqslant Y \leqslant 30\}$.

X	Y			
	10	20	30	40
0,5	0,05	0,12	0,08	0,04
2,5	0,09	0,30	0,11	0,21

Таблица 9.8.

в) Проверьте, являются ли случайные величины X и Y независимыми.

Ответ:

а) Ряды распределения случайных величин X и Y приведены в табл. 9.9 и 9.10.

X	0,5	2,5
P	0,29	0,71

Таблица 9.9

Y	10	20	30	40
P	0,14	0,42	0,19	0,25

Таблица 9.10

б) $F(2{,}5, 25) = 0{,}17$, $F(9, 11) = 0{,}14$, $\mathsf{P}\{2 \leqslant X < 9, 10 \leqslant Y < 30\} = 0{,}50$.

в) Нет, не являются.

9.4. Найдите совместную плотность распределения для непрерывной двумерной случайной величины (X, Y) из задачи 9.2.

Ответ:

$$p(x,y) = \begin{cases} 0, & x \notin \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right] \text{ или } y \notin \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]; \\ \dfrac{\sin(x+y)}{2}, & x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right] \text{ и } y \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

9.5. Совместная плотность распределения непрерывной двумерной случайной величины (X, Y) имеет вид

$$p(x, y) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \text{ или } y \leqslant 0; \\ Ce^{-4x-2y}, & x > 0 \text{ и } y > 0. \end{cases}$$

Найдите:

а) постоянную C;

б) совместную функцию распределения;

в) частные плотности распределения случайных величин X и Y;

г) вероятность попадания случайного вектора (X, Y) в область, ограниченную прямыми $y = x$, $x + y = 2$ и $x = 0$.

д) проверьте, являются ли случайные величины X и Y независимыми.

Ответ:

а) $C = 8$.

б) $F(x,y) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \text{ или } y \leqslant 0; \\ (1-e^{-4x})(1-e^{-2y}), & x > 0 \text{ и } y > 0. \end{cases}$

в) $p_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ 4e^{-4x}, & x > 0; \end{cases}$ $p_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leqslant 0; \\ 2e^{-2y}, & y > 0. \end{cases}$

г) $\mathsf{P} = 2(1 - 3e^{-4} + 2e^{-6})/3$.

д) да, являются.

9.6. Непрерывная двумерная случайная величина (X, Y) распределена равномерно в квадрате с вершинами $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ и $(1,1)$. Найдите:

а) совместную плотность распределения;

б) совместную функцию распределения;

в) частные плотности распределения случайных величин X и Y;

г) вероятность попадания случайного вектора (X,Y) в круг $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leqslant 1/2$.

д) проверьте, являются ли случайные величины X и Y независимыми.

Ответ:

а) $p(x,y) = \begin{cases} 0, & x \notin [0,1] \text{ или } y \notin [0,1]; \\ 1, & x \in [0,1] \text{ и } y \in [0,1]. \end{cases}$

б) $F(x,y) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \text{ или } y \leqslant 0; \\ xy, & 0 < x \leqslant 1 \text{ и } 0 < y \leqslant 1; \\ x, & 0 < x \leqslant 1 \text{ и } y > 1; \\ y, & x > 1 \text{ и } 0 < y \leqslant 1; \\ 1, & x > 1 \text{ и } y > 1. \end{cases}$

в) $p_X(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0,1]; \\ 1, & x \in [0,1]; \end{cases}$ $p_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \notin [0,1]; \\ 1, & y \in [0,1]. \end{cases}$

г) $\mathsf{P} = \pi/8$.

д) Да, являются.

9.7. Непрерывная двумерная случайная величина (X,Y) имеет совместную плотность распределения

$$p(x,y) = \frac{C}{1 + x^2 + y^2 + x^2y^2}.$$

Найдите:

а) постоянную C;

б) совместную функцию распределения;

в) частные плотности распределения случайных величин X и Y;

г) вероятность попадания случайного вектора (X,Y) в треугольник с вершинами в точках $(-1;\,1)$, $(1;\,1)$ и $(0;\,0)$.

д) проверьте, являются ли случайные величины X и Y независимыми.

Ответ:

а) $C = 1/\pi$. б) $F(x,y) = \left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} y + \frac{1}{2}\right)$;

в) $p_X(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$, $\quad p_Y(y) = \dfrac{1}{\pi(1+y^2)}$;

г) $\mathsf{P} = \dfrac{1}{16}$; д) Да, являются.

Семинар 10

Числовые характеристики случайных величин и векторов

10.1 Теоретические сведения

Определение 10.1. Пусть X — дискретная случайная величина, принимающая значения $x_1, \dots, x_n, \dots$ с вероятностями $p_n = \mathsf{P}\{X = x_n\}$, $n = 1, 2, \dots$.

Математическим ожиданием (***средним значением***) $\mathsf{M}X$ дискретной случайной величины X называют сумму произведений значений x_i *случайной величины* и *вероятностей* $p_i = \mathsf{P}\{X = x_i\}$, с которыми случайная величина принимает эти значения:

$$\mathsf{M}X = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i. \tag{10.1}$$

При этом предполагается, что $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i < +\infty$, т. е. ряд, определяющий математическое ожидание, сходится абсолютно; в противном случае говорят, что математическое ожидание случайной величины X не существует.

Определение 10.2. Пусть X непрерывная случайная величина с плотностью $p(x)$. ***Математическим ожиданием*** (***средним значением***) $\mathsf{M}X$ непрерывной случайной величины X называют интеграл

$$\mathsf{M}X = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x p(x)\, dx. \tag{10.2}$$

При этом предполагается, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x| p(x)\, dx < +\infty$, т. е. несобственный интеграл, определяющий математическое ожидание, сходится абсолютно. Иначе математическое ожидание случайной величины X не существует.

Определение 10.3. ***Дисперсией*** $\mathsf{D}X$ случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины X от ее среднего значения, т. е.

$$\mathsf{D}X = \mathsf{M}(X - \mathsf{M}X)^2. \tag{10.3}$$

Среднеквадратическим отклонением случайной величины X называют число $\sqrt{\mathsf{D}X}$.

Замечание 10.1. $\mathsf{M}X$ и $\mathsf{D}X$ — неслучайные числа.

Теорема 10.1. *Пусть X — дискретная случайная величина, принимающая значения $x_1,\dots,x_n,\dots$ с вероятностями $p_n = \mathsf{P}\{X = x_n\}$, $n = 1,2,\dots$.*

Тогда математическое ожидание случайной величины $Y = \varphi(X)$ определяется формулой

$$\mathsf{M}Y = \mathsf{M}\varphi(X) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(x_i)p_i, \tag{10.4}$$

при этом требуется выполнение условия

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi(x_i)|p_i < +\infty. \tag{10.5}$$

Следствие 10.1. В условиях теоремы 10.1

$$\mathsf{D}X = \sum_{i=1}^{\infty}(x_i - \mathsf{M}X)^2 p_i \tag{10.6}$$

Теорема 10.2. *Пусть X непрерывная случайная величина с плотностью $p(x)$. Тогда математическое ожидание случайной величины $Y = \varphi(X)$ определяется формулой*

$$\mathsf{M}Y = \mathsf{M}\varphi(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)p(x)\,dx\,, \tag{10.7}$$

причем требуется выполнение условия $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|p(x)\,dx < +\infty$.

Следствие 10.2. В условиях теоремы 10.2

$$\mathsf{D}X = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathsf{M}X)^2 p(x)\,dx. \tag{10.8}$$

Теорема 10.3. *Математическое ожидание $\mathsf{M}Y$ функции $Y = \varphi(X_1,X_2)$ от дискретной двумерной случайной величины (X_1,X_2) равно*

$$\mathsf{M}Y = \mathsf{M}\varphi(X_1,X_2) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \varphi(x_i,y_j)p_{ij}, \tag{10.9}$$

где $p_{ij} = \mathsf{P}\{X_1 = x_i, X_2 = y_j\}$, $i,j = 1,2,\dots,\infty$.

Теорема 10.4. *Математическое ожидание $\mathsf{M}Y$ функции $Y = \varphi(X_1,X_2)$ от двумерной непрерывной случайной величины (X_1, X_2) есть*

$$\mathsf{M}Y = \mathsf{M}\varphi(X_1,X_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x,y)p(x,y)\,dxdy, \tag{10.10}$$

где $p(x,y)$ — совместная плотность распределения случайных величин X_1 и X_2.

Теорема 10.5. *Математическое ожидание удовлетворяет следующим свойствам.*

1. Если случайная величина X принимает всего одно значение C с вероятностью единица (т.е., по сути дела, не является случайной величиной), то $\mathsf{M}C = C$.

2. $\mathsf{M}(aX + b) = a\mathsf{M}X + b$, где a, b — постоянные.

3. $\mathsf{M}(X_1 + X_2) = \mathsf{M}X_1 + \mathsf{M}X_2$.

4. $\mathsf{M}(X_1X_2) = \mathsf{M}X_1 \cdot \mathsf{M}X_2$ для независимых случайных величин X_1 и X_2.

Теорема 10.6. *Дисперсия удовлетворяет следующим свойствам.*

1. Если случайная величина X принимает всего одно значение C с вероятностью единица, то $\mathsf{D}C = 0$.

2. $\mathsf{D}(aX + b) = a^2\mathsf{D}X$, *где a, b — постоянные.*

3. $\mathsf{D}X = \mathsf{M}X^2 - (\mathsf{M}X)^2$.

4. $\mathsf{D}(X + Y) = \mathsf{D}X + \mathsf{D}Y$ *для независимых случайных величин X и Y.*

Теорема 10.7 (формула свертки)**.** *Пусть X_1 и X_2 являются независимыми случайными величинами с плотностью распределения вероятностей соответственно $p_{X_1}(x)$ и $p_{X_2}(x)$.*

Тогда плотность распределения вероятностей случайной величины $Y = X_1 + X_2$ имеет вид

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{X_1}(y - x)p_{X_2}(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{X_2}(y - x)p_{X_1}(x)\,dx. \qquad (10.11)$$

Определение 10.4. Функцию $p_Y(y)$ (10.11) называют ***сверткой*** функций $p_{X_1}(x)$ и $p_{X_2}(x)$.

Определение 10.5. Пусть (X_1,X_2) — двумерный случайный вектор. ***Ковариацией*** $\mathsf{cov}(X_1,X_2)$ *случайных величин* X_1 и X_2 называют число

$$\mathsf{cov}(X_1,X_2) = \mathsf{M}\big((X_1 - \mathsf{M}X_1)(X_2 - \mathsf{M}X_2)\big). \qquad (10.12)$$

Теорема 10.8. *Ковариация дискретной двумерной случайной величины (X_1,X_2) равна*

$$\mathsf{cov}(X_1,X_2) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(x_i - \mathsf{M}X_1)(y_j - \mathsf{M}X_2)p_{ij}, \qquad (10.13)$$

где $p_{ij} = \mathsf{P}\{X_1 = x_i, X_2 = y_j\}$, $i,j = 1,2,\ldots,\infty$.

Теорема 10.9. *Ковариация двумерной непрерывной случайной величины (X_1, X_2) равна*

$$\mathsf{cov}(X_1,X_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x_1 - \mathsf{M}X_1)(x_2 - \mathsf{M}X_2)p(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2. \qquad (10.14)$$

где $p(x,y)$ — совместная плотность распределения случайных величин X_1 и X_2.

Теорема 10.10. *Пусть (X,Y) — двумерный случайный вектор, a_1, b_1, a_2, b_2 — неслучайные действительные числа. Ковариация имеет следующие свойства*

1. $\mathsf{cov}(X,X) = \mathsf{D}X$.

2. $\mathsf{cov}(X,Y) = 0$ *для независимых случайных величин X и Y*

3. $\mathsf{cov}(a_1X + b_1,a_2Y + b_2) = a_1a_2\mathsf{cov}(X,Y)$.

4. $|\mathsf{cov}(X,Y)| \leqslant \sqrt{\mathsf{D}X\mathsf{D}Y}$, *причем* $|\mathsf{cov}(X,Y)| = \sqrt{\mathsf{D}X\mathsf{D}Y}$ *тогда и только тогда, когда случайные величины X и Y связаны линейной зависимостью, т.е. существуют такие числа a и b, при которых $Y = aX + b$.*

5. $\mathsf{cov}(X,Y) = \mathsf{M}(XY) - \mathsf{M}X\mathsf{M}Y$.

6. $\mathsf{D}(a_1X + a_2Y + b_1) = a_1^2\mathsf{D}X + a_2^2\mathsf{D}Y + 2a_1a_2\mathsf{cov}(X,Y)$.

Определение 10.6. Пусть (X,Y) — двумерный случайный вектор. Случайные величины X и Y называют ***некоррелированными***, если их ковариация равна нулю, т.е. $\mathsf{cov}(X,Y) = 0$.

Определение 10.7. ***Матрицей ковариаций*** (***ковариационной матрицей***) случайного вектора (X,Y) называют матрицу $\Sigma = \begin{pmatrix} \mathsf{D}X, & \mathsf{cov}(X,Y) \\ \mathsf{cov}(X,Y), & \mathsf{D}Y \end{pmatrix}$ состоящую из ковариаций случайных величин X и Y.

Определение 10.8. ***Коэффициентом корреляции*** случайных величин X и Y называют число $\rho = \rho_{XY} = \rho(X,Y)$, определяемое равенством (предполагается, что $\mathsf{D}X > 0$ и $\mathsf{D}Y > 0$)

$$\rho = \frac{\mathsf{cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathsf{D}X \cdot \mathsf{D}Y}}. \tag{10.15}$$

Теорема 10.11. *Пусть (X,Y) — двумерный случайный вектор, a_1, b_1, a_2, b_2 — неслучайные действительные числа. Коэффициент корреляции $\rho(X,Y)$ имеет следующие свойства.*

1. $\rho(X,X) = 1$.

2. Если случайные величины X и Y являются независимыми (и существуют $\mathsf{D}X > 0$ и $\mathsf{D}Y > 0$), то $\rho(X,Y) = 0$.

3. $\rho(a_1X + b_1, a_2Y + b_2) = \pm\rho(X,Y)$. При этом знак плюс нужно брать в том случае, когда a_1 и a_2 имеют одинаковые знаки, и минус — в противном случае.

4. $|\rho(X,Y)| \leqslant 1$.

5. $|\rho(X,Y)| = 1$ тогда и только тогда, когда случайные величины X и Y связаны линейной зависимостью.

10.2 Решение типовых примеров

Пример 10.1. Найдем математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение дискретной случайной величины X, ряд распределения которой представлен в табл. 10.1.

X	0	1	2	3
P	0,41	0,43	0,11	0,05

Таблица 10.1.

Решение: В соответствии с определением математического ожидания дискретной случайной величины X

$$\mathsf{M}X = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = 0 \cdot 0{,}41 + 1 \cdot 0{,}43 + 2 \cdot 0{,}11 + 3 \cdot 0{,}05 = 0{,}8.$$

Дисперсию находим по формуле $\mathsf{D}X = \mathsf{M}X^2 - (\mathsf{M}X)^2$.
Математическое ожидание квадрата X равно

$$\mathsf{M}X^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i = 0^2 \cdot 0{,}41 + 1^2 \cdot 0{,}43 + 2^2 \cdot 0{,}11 + 3^2 \cdot 0{,}05 = 1{,}32.$$

Поэтому $\mathsf{D}X = 1{,}32 - 0{,}8^2 = 0{,}68$.

Наконец, среднее квадратичное отклонение

$$\sigma = \sqrt{\mathsf{D}X} = \sqrt{0{,}68} \approx 0{,}82.$$

Пример 10.2. *Вероятность* того, что в течение часа на станцию скорой помощи не поступит ни одного вызова, равна 0,00248. Считая, что число вызовов X, поступающих в течение часа на станцию, имеет распределение Пуассона, найдем математическое ожидание и дисперсию X.

Решение: Поскольку *случайная величина* X имеет *распределение Пуассона*, то

$$\mathsf{P}\{X = 0\} = e^{-\lambda},$$

где λ — параметр распределения Пуассона. В свою очередь, из условия задачи следует, что

$$\mathsf{P}\{X = 0\} = e^{-\lambda} = 0{,}00248,$$

откуда получаем $\lambda = 6$. Так как параметр λ является одновременно математическим ожиданием и дисперсией случайной величины X, то $\mathsf{M}X = 6$ и $\mathsf{D}X = 6$.

Пример 10.3. Найдем математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение *непрерывной случайной величины* X, *плотность распределения* которой имеет вид

$$p(x) = \begin{cases} 0, & |x| > \pi/2; \\ \cos x/2, & |x| \leqslant \pi/2. \end{cases}$$

Р е ш е н и е: В соответствии с определением математического ожидания непрерывной случайной величины X

$$\mathsf{M}X = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\,dx = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} x \cos x\,dx = 0.$$

Вычислим теперь дисперсию X:

$$\mathsf{D}X = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathsf{M}X)^2 p(x)\,dx = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} x^2 \cos x\,dx = \frac{\pi^2}{4} - 2 \approx 0{,}468.$$

Наконец, $\sigma = \sqrt{\mathsf{D}X} = \sqrt{0{,}468} \approx 0{,}684$.

Пример 10.4. Найдем математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение случайной величины X, имеющей *логнормальное распределение* с параметрами α, β, т.е. случайной величины с плотностью распределения

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ \dfrac{e^{-\frac{(\ln x - \alpha)^2}{2\beta^2}}}{x\beta\sqrt{2\pi}}, & x > 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е: Найдем математическое ожидание X:

$$\mathsf{M}X = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1}{\beta\sqrt{2\pi}} \exp\Big\{-\frac{(\ln x - \alpha)^2}{2\beta^2}\Big\}\,dx.$$

Для вычисления интеграла в последней формуле сделаем замену $x = e^y$. Тогда

$$\mathsf{M}X = \frac{1}{\beta\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^y \exp\Big\{-\frac{(y-\alpha)^2}{2\beta^2}\Big\}\,dy = \frac{1}{\beta\sqrt{2\pi}} e^{\alpha+\beta^2/2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\Big\{-\frac{(y-\alpha-\beta^2)^2}{2\beta^2}\Big\}\,dy.$$

Делая теперь замену $t = (y - \alpha - \beta^2)/\beta$, получаем

$$\mathsf{M}X = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\alpha+\beta^2/2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\,dt = e^{\alpha+\beta^2/2}.$$

Аналогично находим математическое ожидание X^2:

$$\mathsf{M}X^2 = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x}{\beta\sqrt{2\pi}} \exp\Big\{-\frac{(\ln x - \alpha)^2}{2\beta^2}\Big\}\,dx = e^{2\alpha+2\beta^2}.$$

Тогда

$$\mathsf{D}X = \mathsf{M}X^2 - (\mathsf{M}X)^2 = e^{2\alpha+2\beta^2} - e^{2\alpha+\beta^2} = e^{2\alpha+\beta^2}(e^{\beta^2} - 1).$$

Наконец,

$$\sigma = \sqrt{\mathsf{D}X} = \sqrt{e^{2\alpha+\beta^2}(e^{\beta^2} - 1)} = e^{\alpha+\beta^2/2}\sqrt{e^{\beta^2} - 1}.$$

Пример 10.5. Случайная величина X распределена по *равномерному закону* на отрезке $[a, b]$, причем a и b не известны, а $\mathsf{M}X = 4$ и $\mathsf{D}X = 3$. Найдем a и b.

Р е ш е н и е: Для равномерно распределенной случайной величины

$$\mathsf{M}X = \frac{a+b}{2}, \qquad \mathsf{D}X = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Поэтому

$$\frac{a+b}{2} = 4, \qquad \frac{(b-a)^2}{12} = 3.$$

Решая полученную систему и учитывая, что $b > a$, находим:

$$a = 1, \qquad b = 7.$$

Пример 10.6. Из хорощо перетасованной колоды карт слева направо последовательно выкладывают карты лицевой стороной наверх. На карты первой колоды таким же образом кладут карты второй колоды. Найдем среднее число совпадений верхней и нижней карт.

Р е ш е н и е: Пусть число карт в каждой колоде равно n. Число совпадений X можно записать в виде

$$X = X_1 + \ldots + X_n,$$

где $X_i = 1$, если i-я пара карт совпала, и $X_i = 0$ в противном случае. Воспользовавшись свойством математического ожидания, получаем

$$\mathsf{M}X = \mathsf{M}X_1 + \ldots + \mathsf{M}X_n.$$

Далее, вероятность совпадения верхней и нижней карт в каждой паре в соответствии с принципом классической вероятности равна $1/n$. Поэтому

$$\mathsf{M}X_i = 1 \cdot \frac{1}{n} + 0 \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}.$$

Окончательно имеем

$$\mathsf{M}X = n \cdot \frac{1}{n} = 1.$$

Интересно отметить, что ответ не зависит от числа n карт в колодах.

Пример 10.7. *Независимые случайные величины* X_1 и X_2 имеют *нормальное распределение* со *средними значениями* m_1 и m_2 и дисперсиями σ_1^2 и σ_2^2 соответственно. Найдем математическое ожидание случайной величины $Y = X_1 X_2$.

Р е ш е н и е: Поскольку случайные величины X_1 и X_2 являются независимыми, то в соответствии со свойством математического ожидания

$$\mathsf{M}Y = \mathsf{M}X_1 \mathsf{M}X_2 = m_1 m_2.$$

Пример 10.8. Дискретная случайная величина X имеет ряд распределения, представленный в табл. 10.2. Найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = \ln X$.

X	1	e	e^2	e^3
P	0,2	0,1	0,5	0,2

Таблица 10.2.

Р е ш е н и е: Поскольку математическое ожидание $\mathsf{M}Y$ и второй момент $\mathsf{M}Y^2$ функции $Y = \varphi(X)$ от дискретной случайной величины X можно вычислить по формулам

$$\mathsf{M}Y = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) p_i, \qquad \mathsf{M}Y^2 = \sum_{i=1}^{n} \varphi^2(x_i) p_i,$$

то, поскольку здесь $\varphi(x) = \ln x$,

$$\mathsf{M}Y = \ln 1 \cdot 0{,}2 + \ln e \cdot 0{,}1 + \ln e^2 \cdot 0{,}5 + \ln e^3 \cdot 0{,}2 = 1{,}7,$$
$$\mathsf{M}Y^2 = \ln^2 1 \cdot 0{,}2 + \ln^2 e \cdot 0{,}1 + \ln^2 e^2 \cdot 0{,}5 + \ln^2 e^3 \cdot 0{,}2 = 3{,}9.$$

Значит,

$$\mathsf{M}Y = 1{,}7 \quad \text{и} \quad \mathsf{D}Y = \mathsf{M}Y^2 - (\mathsf{M}Y)^2 = 3{,}9 - (1{,}7)^2 = 1{,}01.$$

Пример 10.9. Случайная величина X имеет *экспоненциальное распределение* с параметром $\lambda = 3$. Найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = e^X$.

Р е ш е н и е: Поскольку математическое ожидание $\mathsf{M}Y$ и второй момент $\mathsf{M}Y^2$ функции $Y = \varphi(X)$ от непрерывной случайной величины X можно вычислить, используя формулы

$$\mathsf{M}Y = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)p(x)\,dx, \quad \mathsf{M}Y^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x)p(x)\,dx,$$

то, поскольку здесь $\varphi(x) = e^x$,

$$\mathsf{M}Y = \int\limits_{0}^{+\infty} e^x 3e^{-3x} dx = \frac{3}{2}, \quad \mathsf{M}Y^2 = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{2x} 3e^{-3x} dx = 3.$$

Значит,

$$\mathsf{M}Y = \frac{3}{2}, \qquad \mathsf{D}Y = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

Пример 10.10. Закон распределения вероятностей двумерной дискретной случайной величины (X_1, X_2) представлен в табл. 10.3. Найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = \log_2(X_1/X_2)$.

X_2	X_1		
	0,5	1	2
1	0,1	0,4	0,2
2	0,2	0	0,1

Таблица 10.3.

Р е ш е н и е: В соответствии с формулой для вычисления математического ожидания функции от двумерной дискретной случайной величины

$$\mathsf{M}Y = \log_2 \frac{0{,}5}{1} \cdot 0{,}1 + \log_2 \frac{1}{1} \cdot 0{,}4 + \log_2 \frac{2}{1} \cdot 0{,}2 + \log_2 \frac{0{,}5}{2} \cdot 0{,}2 + \log_2 \frac{1}{2} \cdot 0 + \log_2 \frac{2}{2} \cdot 0{,}1 = 0{,}2,$$

$$\mathsf{M}Y^2 = \left(\log_2 \frac{0{,}5}{1}\right)^2 \cdot 0{,}1 + \left(\log_2 \frac{1}{1}\right)^2 \cdot 0{,}4 + \left(\log_2 \frac{2}{1}\right)^2 \cdot 0{,}2 + \\ + \left(\log_2 \frac{0{,}5}{2}\right)^2 \cdot 0{,}2 + \left(\log_2 \frac{1}{2}\right)^2 \cdot 0 + \left(\log_2 \frac{2}{2}\right)^2 \cdot 0{,}1 = 1{,}2$$

и

$$\mathsf{D}Y = 1{,}2 - (-0{,}2)^2 = 1{,}16.$$

Пример 10.11. *Совместная плотность распределения двумерной непрерывной случайной величины* (X_1, X_2) имеет вид

$$p(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & x_1^2 + x_2^2 > 1; \\ \dfrac{3\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{2\pi}, & x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1. \end{cases}$$

Найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = X_1X_2$.

Р е ш е н и е: Используя формулу для вычисления математического ожидания функции от двумерной непрерывной случайной величины, получаем

$$\mathsf{M}Y = \iint\limits_{x_1^2+x_2^2\leqslant 1} \frac{3}{2\pi} x_1x_2\sqrt{x_1^2+x_2^2}\,dx_1\,dx_2 = \frac{3}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1} x_1\,dx_1 \int\limits_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{\sqrt{1-x_1^2}} x_2\sqrt{x_1^2+x_2^2}\,dx_2 = 0,$$

$$\mathsf{D}Y = \mathsf{M}Y^2 - (\mathsf{M}Y)^2 = \iint\limits_{x_1^2+x_2^2\leqslant 1} \frac{3}{2\pi} x_1^2x_2^2\sqrt{x_1^2+x_2^2}\,dx_1\,dx_2 =$$

$$= \frac{3}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \cos^2\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi \int\limits_0^1 \rho^4\rho\rho\,d\rho = \frac{3}{112\pi}\int\limits_0^{2\pi}\big(1-\cos(4\varphi)\big)\,d\varphi = \frac{3}{56} \approx 0{,}05.$$

Пример 10.12. Распределение вероятностей двумерной случайной величины (X_1,X_2) задано табл. 10.4. Найдем математические ожидания, дисперсии, ковариацию, коэффициент корреляции, а также ковариационную матрицу случайных величин X_1 и X_2.

X_1	X_2		
	-1	0	1
0	0,10	0,15	0,20
1	0,15	0,25	0,15

Таблица 10.4.

Р е ш е н и е: Вычислим математические ожидания и дисперсии случайных величин X_1 и X_2:

$$\mathsf{M}X_1 = 0\cdot(0{,}10+0{,}15+0{,}20) + 1\cdot(0{,}15+0{,}25+0{,}15) = 0{,}55,$$

$$\mathsf{M}X_2 = (-1)\cdot(0{,}10+0{,}15) + 0\cdot(0{,}15+0{,}25) + 1\cdot(0{,}20+0{,}15) = 0{,}10,$$

$$\mathsf{D}X_1 = \mathsf{M}X_1^2 - (\mathsf{M}X_1)^2 = 0^2\cdot(0{,}10+0{,}15+0{,}20) + 1^2\cdot(0{,}15+0{,}25+0{,}15) - (0{,}55)^2 = 0{,}2475.$$

$$\mathsf{D}X_2 = \mathsf{M}X_2^2 - (\mathsf{M}X_2)^2 = (-1)^2(0{,}10+0{,}15) + 0^2(0{,}15+0{,}25) + 1^2(0{,}20+0{,}15) - (0{,}10)^2 = 0{,}59,$$

Для определения $\mathsf{cov}(X_1,X_2)$ воспользуемся формулой

$$\mathsf{cov}(X_1,X_2) = \mathsf{M}(X_1X_2) - \mathsf{M}X_1\mathsf{M}X_2.$$

Тогда

$$\mathsf{M}(X_1X_2) = (-1)\cdot 0\cdot 0{,}10 + (-1)\cdot 1\cdot 0{,}15 + 0\cdot 0\cdot 0{,}15 + 0\cdot 1\cdot 0{,}25 + 1\cdot 0\cdot 0{,}20 + 1\cdot 1\cdot 0{,}15) = 0,$$

$$\mathsf{cov}(X_1,X_2) = 0 - 0{,}10\cdot 0{,}55 = -0{,}055$$

и

$$\rho = \frac{\mathsf{cov}(X_1,X_2)}{\sqrt{\mathsf{D}X_1\mathsf{D}X_2}} = -\frac{0{,}055}{\sqrt{0{,}59\cdot 0{,}2475}} \approx -0{,}144.$$

Ковариационная матрица имеет вид

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0{,}59 & -0{,}055 \\ -0{,}055 & 0{,}2475 \end{pmatrix}.$$

Пример 10.13. Совместная плотность распределения двумерной случайной величины (X_1,X_2) имеет вид

$$p(x_1,x_2) = \begin{cases} 0, & x_1 \notin (0,\pi/2) \quad \text{или} \quad x_2 \notin (0,\pi/2); \\ \sin(x_1+x_2)/2, & x_1 \in (0,\pi/2) \quad \text{и} \quad x_2 \in (0,\pi/2). \end{cases}$$

Найдем математические ожидания, дисперсии, ковариацию, коэффициент корреляции, а также ковариационную матрицу случайных величин X_1 и X_2.

Р е ш е н и е: Имеем

$$\mathsf{M}X_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} x_1 dx_1 \int_0^{\pi/2} \sin(x_1+x_2)\,dx_2 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} x_1(\sin x_1 + \cos x_1)dx_1 = \frac{\pi}{4},$$

$$\mathsf{M}X_2 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} x_2 dx_2 \int_0^{\pi/2} \sin(x_1+x_2)\,dx_1 = \frac{\pi}{4},$$

$$\mathsf{D}X_1 = \mathsf{M}X_1^2 - (\mathsf{M}X_1)^2 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} x_1^2 dx_1 \int_0^{\pi/2} \sin(x_1+x_2)\,dx_2 - \frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^2+8\pi-32}{16},$$

$$\mathsf{D}X_2 = \mathsf{M}X_2^2 - (\mathsf{M}X_2)^2 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} x_2^2 dx_2 \int_0^{\pi/2} \sin(x_1+x_2)\,dx_1 - \frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^2+8\pi-32}{16}.$$

Далее,

$$\mathsf{M}(X_1X_2) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} x_1\,dx_1 \int_0^{\pi/2} x_2\sin(x_1+x_2)\,dx_2 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} x_1\left(\frac{\pi}{2}\sin x_1 + \cos x_1 - \sin x_1\right)dx_1 = \frac{\pi}{4},$$

$$\mathsf{cov}(X_1,X_2) = \mathsf{M}(X_1X_2) - \mathsf{M}X_1\mathsf{M}X_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi(4-\pi)}{16}$$

и

$$\rho = \frac{\mathsf{cov}(X_1,X_2)}{\sqrt{\mathsf{D}X_1\mathsf{D}X_2}} = \frac{\pi(4-\pi)}{\pi^2+8\pi-32}.$$

Наконец, ковариационная и корреляционная матрицы имеют вид

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \dfrac{\pi^2+8\pi-32}{16} & \dfrac{\pi(4-\pi)}{16} \\ \dfrac{\pi(4-\pi)}{16} & \dfrac{\pi^2+8\pi-32}{16} \end{pmatrix}.$$

Пример 10.14. Совместная плотность распределения двумерной непрерывной случайной величины (X_1,X_2) имеет вид

$$p(x_1,x_2) = \frac{2}{\pi(x_1^2+x_2^2+1)^3}.$$

Проверим, являются ли случайные величины X_1 иX_2 *некоррелированными*.

Р е ш е н и е: Найдем $\mathsf{M}X_1$:

$$\mathsf{M}X_1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x_1\,dx_1dx_2}{\pi(x_1^2+x_2^2+1)^3} = \int_{-\infty}^{+\infty} 2\,dx_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x_1\,dx_1}{\pi(x_1^2+x_2^2+1)^3}.$$

Здесь внутренний интеграл равен нулю, поскольку подынтегральная функция нечетная, а пределы интегрирования симметричны относительно начала координат. Поэтому $\mathsf{M}X_1 = 0$.

Аналогично получаем, что $\mathsf{M}X_2 = 0$.

Вычислим теперь ковариацию X_1 и X_2:

$$\mathsf{cov}(X_1,X_2) = \mathsf{M}(X_1X_2) - \mathsf{M}X_1\mathsf{M}X_2 =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x_1x_2\,dx_1dx_2}{\pi(x_1^2+x_2^2+1)^3} = \int_{-\infty}^{+\infty} 2x_1\,dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x_2\,dx_2}{\pi(x_1^2+x_2^2+1)^3} = 0.$$

Поскольку $\mathsf{cov}(X_1,X_2) = 0$, случайные величины X_1 и X_2 являются некоррелированными.

Пример 10.15. Случайные величины X_1 и X_2 имеют математические ожидания $\mathsf{M}X_1 = 2$, $\mathsf{M}X_2 = -1$, дисперсии $\mathsf{D}X_1 = 3$, $\mathsf{D}X_2 = 4$ и ковариацию $\mathsf{cov}(X_1,X_2) = -1$. Найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины

$$Y = 2X_1 - 3X_2 - 5.$$

Р е ш е н и е: В соответствии со свойствами 2 и 3 математического ожидания

$$\mathsf{M}Y = 2\mathsf{M}X_1 + (-3)\mathsf{M}X_2 - 5 = 2,$$

а, согласно свойствам 2 и 5 дисперсии,

$$\mathsf{D}Y = 2^2\mathsf{D}X_1 + 2\cdot 2\cdot(-3)\mathsf{cov}(X_1,X_2) + (-3)^2\mathsf{D}X_2 = 60.$$

10.3 Вопросы и задачи

10.1. Найдите математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение дискретной случайной величины X, ряд распределения которой представлен в табл. 10.5.

X	1	2	3
P	0,30	0,21	0,49

Таблица 10.5.

О т в е т: $\mathsf{M}X = 2{,}19$, $\mathsf{D}X = 5{,}55$, $\sigma \approx 2{,}35$.

10.2. Вероятность того, что при трех выстрелах стрелок попадет в цель хотя бы один раз, равна 0,992. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа X попаданий при двадцати выстрелах.

О т в е т: $\mathsf{M}X = 16$, $\mathsf{D}X = 3{,}2$.

10.3. Время X безотказной работы станка имеет экспоненциальное распределение. Известно, что вероятность отказа станка за 5 ч равна 0,39347. Найдите математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение времени безотказной работы станка.

О т в е т: $\mathsf{M}X = 10$ ч, $\mathsf{D}X = 100$ ч^2, $\sigma = 10$ ч.

10.4. Найдите математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратичное отклонение случайной величины X, имеющей плотность распределения $p(x) = e^{-|x-3|/2}$.

О т в е т: $\mathsf{M}X = 3$, $\mathsf{D}X = 2$, $\sigma = \sqrt{2}$,

10.5. Непрерывная случайная величина X имеет плотность распределения

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (a,b); \\ \dfrac{2}{b-a} - \dfrac{4}{(b-a)^2}\left|x - \dfrac{b+a}{2}\right|, & x \in (a,b), \end{cases}$$

причем a и b не известны, но $b > a$, а $\mathsf{M}X = 5$ и $\mathsf{D}X = 6$. Найдите a и b.
Ответ: $a = -1, \quad b = 11$.

10.6. Каждый из 25 студентов группы выучил 80 % экзаменационных билетов. Найдите среднее число студентов, сдавших экзамен.
Ответ: 20.

10.7. Независимые случайные величины X_1 и X_2 имеют экспоненциальное распределение с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно. Найдите математическое ожидание случайной величины $Y = X_1 X_2$.
Ответ: $\mathsf{M}Y = 1/(\lambda_1\lambda_2)$.

10.8. Дискретная случайная величина X имеет ряд распределения, представленный в табл. 10.6. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = X^2 + 1$.
Ответ: $\mathsf{M}Y = 2{,}6$, $\mathsf{D}Y = 0{,}84$.

X	1	2	3	4
P	0,1	0,4	0,3	0,2

Таблица 10.6.

10.9. Площадь круга вычисляют по измеренному диаметру круга X, используя формулу $S = \pi X^2/4$. Считая, что измеренный диаметр круга X распределен равномерно на отрезке $[a, b]$, найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины S.
Ответ: $\mathsf{M}S = \pi(a^2 + ab + b^2)/12, \quad \mathsf{D}S = \pi^2(b-a)^2(4a^2 + 7ab + 4b^2)/720$.

10.10. Закон распределения вероятностей двумерной дискретной случайной величины (X, Y) представлен табл. 10.7. Найдите математические ожидания, дисперсии, ковариацию, коэффициент корреляции, а также ковариационную матрицу случайных величин X и Y.

X	Y		
	−1	0	1
0	0,1	0,2	0
1	0,2	0,3	0,2

Таблица 10.7.

Ответ: $\mathsf{M}X = 0{,}7$, $\mathsf{D}X = 0{,}21$, $\mathsf{M}Y = -0{,}1$, $\mathsf{D}Y = 0{,}49$, $\mathsf{M}XY = 0$, $\mathbf{cov}(X, Y) = 0{,}07$, $\rho(X, Y) = 1/\sqrt{21} \approx 0{,}218$, $\Sigma = \begin{pmatrix} 0{,}21 & 0{,}07 \\ 0{,}07 & 0{,}49 \end{pmatrix}$.

10.11. Двумерная случайная величина $(X_1; X_2)$ распределена равномерно в квадрате $\{0 < x_1 < 1,\ 0 < x_2 < 1\}$. Найдите математическое ожидание и дисперсию площади Y прямоугольника со сторонами X_1 и X_2.
Ответ: $\mathsf{M}Y = 1/4, \quad \mathsf{D}Y = 7/144$.

10.12. Совместная плотность распределения двумерной непрерывной случайной величины (X_1, X_2) имеет вид

$$p(x, y) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \ \text{ или } \ y \leqslant 0; \\ 4xye^{-(x^2+y^2)}, & x > 0 \ \text{ и } \ y > 0. \end{cases}$$

Найдите математические ожидания, дисперсии, ковариацию, коэффициент корреляции, а также ковариационную матрицу случайных величин X_1 и X_2.
Ответ: $\mathsf{M}X_1 = \mathsf{M}X_2 = \sqrt{\pi}/2, \quad \mathsf{D}X_1 = \mathsf{D}X_2 = (4-\pi)/4$, $\mathbf{cov}(X_1, X_2) = 0, \quad \rho = 0$,

$$\Sigma = \begin{pmatrix} (4-\pi)/4 & 0 \\ 0 & (4-\pi)/4 \end{pmatrix}.$$

10.13. Совместная плотность распределения двумерной непрерывной случайной величины (X_1, X_2) имеет вид

$$p(x, y) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \ \text{ или } \ y \leqslant 0; \\ \lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_1 x - \lambda_2 y}, & x > 0 \ \text{ и } \ y > 0, \end{cases}$$

где $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.

Проверьте, являются ли случайные величины X_1 и X_2 некоррелированными.
О т в е т: Да, являются.

10.14. Случайные величины X_1 и X_2 имеют математические ожидания $\mathsf{M}X_1 = -5$, $\mathsf{M}X_2 = 2$, дисперсии $\mathsf{D}X_1 = 0{,}5$, $\mathsf{D}X_2 = 0{,}4$ и ковариацию $\mathsf{cov}(X_1, X_2) = 0{,}2$. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = 4X_1 - 5X_2 + 25$.
О т в е т: $\mathsf{M}Y = -5$, $\mathsf{D}Y = 10$.

10.15. Найдите математические ожидания, дисперсии и ковариацию случайных величин Y_1 и Y_2, где $Y_1 = 3X_1 - 2X_2$, $Y_2 = 5X_2 - X_1$, а случайные величины X_1 и X_2 имеют следующие числовые характеристики: $\mathsf{M}X_1 = -0{,}5$, $\mathsf{M}X_2 = 1$, $\mathsf{D}X_1 = 3$, $\mathsf{D}X_2 = 2{,}9$, $\mathsf{cov}(X_1, X_2) = 2$.
О т в е т: $\mathsf{M}Y_1 = -3{,}5$, $\mathsf{M}Y_2 = 5{,}5$, $\mathsf{D}Y_1 = 14{,}6$, $\mathsf{D}Y_2 = 50{,}5$, $\mathsf{cov}(Y_1, Y_2) = -4$.

Семинар 11

Условные характеристики случайных величин

11.1 Теоретические сведения

11.1.1 Дискретные случайные векторы

Пусть (X,Y) — дискретный случайный вектор, принимающий значения (x_i,y_j) с вероятностями $p_{ij} = \mathsf{P}\{(X,Y) = (x_i,y_j)\} = \mathsf{P}\{X = x_i, Y = y_j\}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

Определение 11.1. ***Условной вероятностью*** π_{ij}, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ того, что случайная величина X примет значение x_i при условии $Y = y_j$, называют условную вероятность события $\{X = x_i\}$ при условии наступления события $\{Y = y_j\}$, т.е.

$$\pi_{ij} = \mathsf{P}\{X = x_i | Y = y_j\} = \frac{\mathsf{P}\{X = x_i, Y = y_j\}}{\mathsf{P}\{Y = y_j\}} = \frac{p_{ij}}{p_{Yj}}, \tag{11.1}$$

где $p_{Yj} = \mathsf{P}\{Y = y_j\} = \sum\limits_{i=1}^{m} p_{ij}$, $j = 1, \ldots, n$.

Условной вероятностью π^*_{ij}, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ того, что случайная величина Y примет значение y_j при условии $X = x_i$, называют условную вероятность события $\{Y = y_j\}$ при условии наступления события события $\{X = x_i\}$, т.е.

$$\pi^*_{ij} = \mathsf{P}\{Y = y_j | X = x_i\} = \frac{\mathsf{P}\{X = x_i, Y = y_j\}}{\mathsf{P}\{X = x_i\}} = \frac{p_{ij}}{p_{Xi}}, \tag{11.2}$$

где $p_{Xi} = \mathsf{P}\{X = x_i\} = \sum\limits_{j=1}^{n} p_{ij}$, $i = 1, \ldots, m$.

Теорема 11.1 (критерий независимости дискретных случайных величин). *Дискретные случайные величины X и Y являются независимыми тогда и только тогда, когда для любых $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$*

$$\pi_{ij} = p_{X_i}, \tag{11.3}$$

или

$$\pi^*_{ij} = p_{Y_j}, \tag{11.4}$$

то есть все условные вероятности совпадают с безусловными вероятностями.

Определение 11.2. Число $\mathsf{M}(X|y_j)$, определяемое формулой

$$\mathsf{M}(X|y_j) = \sum_{i=1}^{m} x_i \pi_{ij}, \tag{11.5}$$

назовем ***условным математическим ожиданием*** дискретной случайной величины X ***при условии*** наступления события $\{Y = y_j\}$.

Число $\mathsf{M}(Y|x_i)$, определяемое формулой

$$\mathsf{M}(Y|x_i) = \sum_{j=1}^{n} y_j \pi^*_{ij}, \tag{11.6}$$

назовем условным математическим ожиданием дискретной случайной величины Y при условии наступления события $\{X = x_j\}$.

Замечание 11.1. $\mathsf{M}(X|y_j)$ и $\mathsf{M}(Y|x_i)$ — неслучайные величины.

Определение 11.3. ***Условным математическим ожиданием*** $\mathsf{M}(X|Y)$ дискретной случайной величины X относительно дискретной случайной величины Y называют функцию $\mathsf{M}(X|Y) = g(Y)$ от случайной величины Y, где область определения функции $g(y)$ совпадает с множеством значений $y_1, \dots, y_n$ случайной величины Y, а каждому значению y_j аргумента y поставлено в соответствие число $g(y_j) = \mathsf{M}(X|y_j)$.

Условным математическим ожиданием $\mathsf{M}(Y|X)$ дискретной случайной величины Y относительно дискретной случайной величины X называют функцию $\mathsf{M}(Y|X) = g(X)$ от случайной величины X, где область определения функции $g(x)$ совпадает с множеством значений $x_1, \dots, x_m$ случайной величины X, а каждому значению x_i аргумента x поставлено в соответствие число $g(x_i) = \mathsf{M}(Y|x_i)$.

Замечание 11.2. Условное математическое ожидание $\mathsf{M}(X|Y)$ является функцией от случайной величины, то есть случайной величиной. Для каждого $\omega \in \Omega$ значение $\mathsf{M}(X|Y)(\omega)$ случайной величины $\mathsf{M}(X|Y)$ в точке ω есть число $\mathsf{M}(X|Y = y)$, где $y = Y(\omega)$.

Определение 11.4. ***Условной дисперсией*** $\mathsf{D}(X|Y)$ случайной величины X относительно (случайной величины) Y называют случайную величину, задаваемую формулой

$$\mathsf{D}(X|Y) = \mathsf{M}\big(\big[X - \mathsf{M}(X|Y)\big]^2|Y\big). \tag{11.7}$$

Замечание 11.3. Приведенное определение условной дисперсии применимо как для дискретного, так и для непрерывного случайного вектора.

Теорема 11.2. *Для дискретного случайного вектора (X,Y)* ***значение*** $\mathsf{D}(X|y_j)$ ***условной дисперсии*** $\mathsf{D}(X|Y)$ *случайной величины X при условии $Y = y_j$ определяется формулой*

$$\mathsf{D}(X|y_j) = \mathsf{M}\big([X - \mathsf{M}(X|y_j)]^2|y_j\big) = \sum_{i=1}^{m} \big[x_i - \mathsf{M}(X|y_j)\big]^2 \pi_{ij}; \tag{11.8}$$

значение $\mathsf{D}(Y|x_i)$ условной дисперсии $\mathsf{D}(Y|X)$ случайной величины Y при условии $X = x_i$ определяется формулой

$$\mathsf{D}(Y|x_i) = \mathsf{M}\big([Y - \mathsf{M}(Y|x_i)]^2|x_i\big) = \sum_{j=1}^{n} \big[y_j - \mathsf{M}(Y|x_i)\big]^2 \pi^*_{ij}. \tag{11.9}$$

11.1.2 Непрерывные случайные векторы

Пусть (X,Y) — *непрерывный случайный вектор с совместной плотностью распределения* $p(x,y)$ *и плотностями распределения координат* X *и* Y $p_X(x)$ *и* $p_Y(y)$ *соответственно:*

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\,dy, \tag{11.10}$$

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\,dx. \tag{11.11}$$

Определение 11.5. Функцию

$$p_X(x|y) = \frac{p(x,y)}{p_Y(y)}, \tag{11.12}$$

рассматриваемую при фиксированном y как функцию от x, называют ***условной плотностью*** распределения случайной величины X при условии $Y = y$.

Функцию

$$p_Y(y|x) = \frac{p(x,y)}{p_X(x)}, \tag{11.13}$$

рассматриваемую при фиксированном x как функцию от y, называют условной плотностью распределения случайной величины Y при условии $X = x$.

Теорема 11.3 (критерий независимости непрерывных случайных величин)**.** *Непрерывные случайные величины* X *и* Y *являются независимыми тогда и только тогда, когда для любых* x *и* y

$$p_X(x|y) = p_X(x), \tag{11.14}$$

или

$$p_Y(y|x) = p_Y(y), \tag{11.15}$$

то есть условные плотности распределения совпадают с безусловными.

Определение 11.6. Число

$$\mathsf{M}(X|y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_X(x|y)\,dx, \tag{11.16}$$

называют ***условным математическим ожиданием*** непрерывной случайной величины X ***при условии*** $Y = y$, а число

$$\mathsf{M}(Y|x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y p_Y(y|x)\,dy, \tag{11.17}$$

называют условным математическим ожиданием непрерывной случайной величины Y при условии $X = x$.

Определение 11.7. Для непрерывного случайного вектора (X,Y) ***условным математическим ожиданием*** $\mathsf{M}(X|Y)$ случайной величины X относительно случайной величины Y называют функцию $g(Y) = \mathsf{M}(X|Y)$ от случайной величины Y, принимающую значение $g(y) = \mathsf{M}(X|y)$ при $Y = y$.

Теорема 11.4. *Для непрерывного случайного вектора* (X,Y) ***значение*** $\mathsf{D}(X|y)$ ***условной дисперсии*** $\mathsf{D}(X|Y)$ *случайной величины* X *при условии* $Y = y$ *определяется формулой*

$$\mathsf{D}(X|y) = \mathsf{M}\big([X - \mathsf{M}(X|y)]^2|y\big) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \big[x - \mathsf{M}(X|y)\big]^2 p_X(x|y)\,dx, \qquad (11.18)$$

а значение $\mathsf{D}(Y|x)$ *условной дисперсии* $\mathsf{D}(Y|X)$ *случайной величины* Y *при условии* $X = x$ *определяется формулой*

$$\mathsf{D}(Y|x) = \mathsf{M}\big([Y - \mathsf{M}(Y|x)]^2|x\big) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \big[y - \mathsf{M}(Y|x)\big]^2 p_Y(y|x)\,dy. \qquad (11.19)$$

Замечание 11.4. Условное распределение (для дискретных случайных величин), и условную плотность распределения (для непрерывных случайных величин) — называют ***условными законами распределения***.

11.2 Решение типовых примеров

Пример 11.1. Распределение двумерного *случайного вектора* (X,Y) задано табл. 11.1. Найдем *условное распределение случайной величины* X при условии, что случайная величина Y приняла значение y_j, $j = 1,2$, и условное распределение случайной величины Y при условии, что случайная величина X приняла значение x_i, $i = 1,2,3$. Используя найденные условные распределения, проверим, являются ли *случайные величины* X и Y *независимыми*.

X	Y		
	0,2	0,5	0,8
0,04	0,15	0,30	0,35
0,08	0,05	0,12	0,03

Таблица 11.1

Решение: Распределения случайных величин Y и X приведены в табл. 11.2 и 11.3.

Y	0,2	0,5	0,8
P	0,20	0,42	0,38

Таблица 11.2

X	0,04	0,08
P	0,8	0,2

Таблица 11.3

Воспользовавшись определением *условных вероятностей*

$$\pi_{ij} = \mathsf{P}\{X = x_i|Y = y_j\} = \frac{p_{ij}}{p_{Yj}},$$

имеем:

$$\begin{aligned}
\pi_{11} &= \mathsf{P}\{X = 0{,}04|Y = 0{,}2\} = 0{,}15/0{,}20 = 0{,}750,\\
\pi_{21} &= \mathsf{P}\{X = 0{,}08|Y = 0{,}2\} = 0{,}05/0{,}20 = 0{,}250,\\
\pi_{12} &= \mathsf{P}\{X = 0{,}04|Y = 0{,}5\} = 0{,}15/0{,}42 \approx 0{,}714,\\
\pi_{22} &= \mathsf{P}\{X = 0{,}08|Y = 0{,}5\} = 0{,}12/0{,}42 \approx 0{,}286,\\
\pi_{13} &= \mathsf{P}\{X = 0{,}04|Y = 0{,}8\} = 0{,}35/0{,}38 \approx 0{,}921,\\
\pi_{23} &= \mathsf{P}\{X = 0{,}08|Y = 0{,}8\} = 0{,}03/0{,}38 \approx 0{,}079.
\end{aligned}$$

X	Y		
	0,2	0,5	0,8
0,04	0,750	0,714	0,921
0,08	0,250	0,286	0,079

Таблица 11.4

Таким образом, для условного закона распределения случайной величины X при условии Y получаем табл. 11.4.

Аналогично находим условные вероятности

$$\pi^*_{ij} = \mathsf{P}\{Y = y_j | X = x_i\} = \frac{p_{ij}}{p_{Xi}},$$

представленные в табл. 11.5.

Y	X	
	0,04	0,08
0,2	0,1875	0,2500
0,5	0,3750	0,6000
0,8	0,4375	0,1500

Таблица 11.5

Поскольку, например, столбцы в табл. 11.5 не совпадают, то случайные величины X и Y являются зависимыми.

Пример 11.2. Будем говорить, что случайный вектор (X,Y) имеет ***равномерное распределение*** в области D (с площадью S), если его плотность распределения

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{S}, & (x;y) \in D; \\ 0, & (x;y) \notin D. \end{cases}$$

Пусть случайный вектор (X,Y) имеет равномерное распределение в треугольнике с вершинами в точках $(0,0)$, $(0,2)$, $(1,0)$. Найдем условную плотность распределения случайной величины X при условии, что случайная величина Y приняла значение y, и условную плотность распределения случайной величины Y при условии, что случайная величина X приняла значение x. Используя найденные условные плотности распределения, проверим, являются ли случайные величины X и Y независимыми.

Решение: Поскольку двумерный случайный вектор (X,Y) распределен равномерно в области D, представляющей собой треугольник с вершинами в точках $(0,0)$, $(0,2)$, $1,0)$, то его плотность распределения имеет вид

$$p(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in D; \\ 0, & (x,y) \notin D. \end{cases}$$

Отсюда нетрудно найти частные плотности распределения случайных величин X и Y:

$$p_X(x) = \begin{cases} 2(1-x), & x \in [0,1]; \\ 0, & x \notin [0,1]; \end{cases}$$

$$p_Y(y) = \begin{cases} 1 - y/2, & y \in [0,2]; \\ 0, & y \notin [0,2]. \end{cases}$$

Воспользовавшись теперь определением условной плотности распределения, получаем

$$p_X(x|y) = \frac{p(x,y)}{p_Y(y)} = \begin{cases} \frac{2}{2-y}, & x \in [0, 1-y/2] \text{ и } y \in [0,2]; \\ 0, & x \notin [0, 1-y/2] \text{ и } y \in [0,2]; \end{cases}$$

$$p_Y(y|x) = \frac{p(x,y)}{p_X(x)} = \begin{cases} \frac{1}{2(1-x)}, & y \in [0, 2(1-x)] \text{ и } x \in [0,1]; \\ 0, & y \notin [0, 2(1-x)] \text{ и } x \in [0,1]. \end{cases}$$

При $y \notin [0,2]$ и $x \notin [0,1]$ условные плотности распределения $p_X(x|y)$ и $p_Y(y|x)$ не определяются, поскольку случайная величина Y не может попасть вне отрезка $[0,2]$, а случайная величина X — вне отрезка $[0,1]$.

Так как, например, условная плотность распределения $p_X(x|y)$ зависит от y, а плотность распределения $p_X(x)$ от y не зависит, случайные величины X и Y являются зависимыми.

Пример 11.3. В условиях примера 11.1 найдем условные математические ожидания $\mathsf{M}(X|Y)$ и $\mathsf{M}(Y|X)$ и условные дисперсии. $\mathsf{D}(X|Y)$ и $\mathsf{D}(Y|X)$

Р е ш е н и е: Используя определение условного математического ожидания для *двумерной дискретной случайной величины* и результаты примера 11.1, находим значения $\mathsf{M}(X|y_j)$ и $\mathsf{M}(Y|x_i)$ условных математических ожиданий $\mathsf{M}(X|Y)$ и $\mathsf{M}(Y|X)$:

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{M}(X|0{,}2) = 0{,}04 \cdot 0{,}75 + 0{,}08 \cdot 0{,}25 = 0{,}05,\\
&\mathsf{M}(X|0{,}5) = 0{,}04 \cdot 0{,}714 + 0{,}08 \cdot 0{,}286 = 0{,}05144,\\
&\mathsf{M}(X|0{,}8) = 0{,}04 \cdot 0{,}921 + 0{,}08 \cdot 0{,}079 = 0{,}04316,\\
&\mathsf{M}(Y|0{,}04) = 0{,}2 \cdot 0{,}1875 + 0{,}5 \cdot 0{,}375 + 0{,}8 \cdot 0{,}4375 = 0{,}575,\\
&\mathsf{M}(Y|0{,}08) = 0{,}2 \cdot 0{,}25 + 0{,}5 \cdot 0{,}6 + 0{,}8 \cdot 0{,}15 = 0{,}47.
\end{aligned}
$$

Таким образом, условное математическое ожидание $\mathsf{M}(X|Y)$ является функцией $g(y)$ от случайной величины Y, причем область определения функции $g(y)$ состоит из трех точек $0{,}2,\ 0{,}5,\ 0{,}8$ и

$$g(0{,}2) = 0{,}05, \qquad g(0{,}5) = 0{,}05144, \qquad g(0{,}8) = 0{,}04316.$$

Аналогично условное математическое ожидание $\mathsf{M}(Y|X)$ является функцией $h(X)$ от случайной величины X, причем область определения функции $h(x)$ состоит из двух точек $0{,}04,\ 0{,}08$ и

$$h(0{,}04) = 0{,}575, \qquad h(0{,}08) = 0{,}47.$$

Вычислим теперь значения $\mathsf{D}(X|y_j)$ и $\mathsf{D}(Y|x_i)$ условных дисперсий $\mathsf{D}(X|Y)$ и $\mathsf{D}(Y|X)$:

$$\mathsf{D}(X|0{,}2) = \mathsf{M}(X^2|0{,}2) - \big(\mathsf{M}(X|0{,}2)\big)^2 = 0{,}04^2 \cdot 0{,}75 + 0{,}08^2 \cdot 0{,}25 - 0{,}05^2 = 0{,}0003,$$

$$\mathsf{D}(X|0{,}5) = \mathsf{M}(X^2|0{,}5) - \big(\mathsf{M}(X|0{,}5)\big)^2 = 0{,}04^2 \cdot 0{,}714 + 0{,}08^2 \cdot 0{,}286 - 0{,}05144^2 = 0{,}00033,$$

$$\mathsf{D}(X|0{,}8) = \mathsf{M}(X^2|0{,}8) - \big(\mathsf{M}(X|0{,}8)\big)^2 = 0{,}04^2 \cdot 0{,}921 + 0{,}08^2 \cdot 0{,}079 - 0{,}04316^2 \approx 0{,}00012,$$

$$\mathsf{D}(Y|0{,}04) = \mathsf{M}(Y^2|0{,}04) - \big(\mathsf{M}(Y|0{,}04)\big)^2 = 0{,}2^2 \cdot 0{,}1875 + 0{,}5^2 \cdot 0{,}375 + 0{,}8^2 \cdot 0{,}4375 - 0{,}575^2 \approx 0{,}051,$$

$$\mathsf{D}(Y|0{,}08) = \mathsf{M}(Y^2|0{,}08) - \big(\mathsf{M}(Y|0{,}08)\big)^2 = 0{,}2^2 \cdot 0{,}25 + 0{,}5^2 \cdot 0{,}6 + 0{,}8^2 \cdot 0{,}15 - 0{,}47^2 \approx 0{,}035.$$

Условная дисперсия $\mathsf{D}(X|Y)$ является функцией от случайной величины Y с областью определения, состоящей из точек $0{,}2,\ 0{,}5,\ 0{,}8$, и

$$\mathsf{D}(X|0{,}2) = 0{,}0003, \quad \mathsf{D}(X|0{,}5) = 0{,}00033, \quad \mathsf{D}(X|0{,}8) = 0{,}00012.$$

Условная дисперсия $\mathsf{D}(Y|X)$ является функцией от случайной величины X с областью определения, состоящей из точек $0{,}04,\ 0{,}8$, и

$$\mathsf{D}(Y|0{,}04) = 0{,}051, \qquad \mathsf{D}(Y|0{,}08) = 0{,}035.$$

Пример 11.4. В условиях примера 11.2 найдем условные математические ожидания $\mathsf{M}(X|Y)$ и $\mathsf{M}(Y|X)$ и условные дисперсии $\mathsf{D}(X|Y)$ и $\mathsf{D}(Y|X)$.

Р е ш е н и е: Поскольку случайная величина Y принимает значения только из отрезка $[0,2]$, а случайная величина X — из отрезка $[0,1]$, то значения $\mathsf{M}(X|y)$ условного математического ожидания $\mathsf{M}(X|Y)$ и значение $\mathsf{D}(X|y)$ условной дисперсии $\mathsf{D}(X|Y)$ заданы только для y из отрезка $[0,2]$, а значения $\mathsf{M}(Y|x)$ дисперсии $\mathsf{D}(Y|X)$ заданы только для x из отрезка $[0,1]$. Поэтому далее будем предполагать, не оговаривая этого особо, что $y \in [0,2]$, а $x \in [0,1]$.

Воспользовавшись определением 11.7 условного математического ожидания и условной дисперсии 11.4 для непрерывной случайной величины и результатами примера 11.2, найдем:

$$\mathsf{M}(X|y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x p_X(x|y)\,dx = \int\limits_{0}^{1-y/2} \frac{2x\,dx}{2-y} = \frac{2-y}{4},$$

$$\mathsf{M}(Y|x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y p_Y(y|x)\,dy = \int\limits_{0}^{2(1-x)} \frac{y\,dy}{2(1-x)} = 1-x,$$

$$\mathsf{D}(X|y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \bigl(x - \mathsf{M}(X|y)\bigr)^2 p_X(x|y)\,dx = \int\limits_{0}^{1-y/2} \left(x - \frac{2-y}{4}\right)^2 \frac{2\,dx}{2-y} = \frac{(2-y)^2}{48},$$

$$\mathsf{D}(Y|x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \bigl(x - \mathsf{M}(Y|x)\bigr)^2 p_Y(y|x)\,dy = \int\limits_{0}^{2(1-x)} \frac{\bigl(y-(1-x)\bigr)^2\,dy}{2(1-x)} = \frac{(1-x)^2}{3}.$$

Таким образом, условное математическое ожидание

$$\mathsf{M}(X|Y) = g(Y) = \frac{2-Y}{4},$$

условное математическое ожидание

$$\mathsf{M}(Y|X) = h(X) = 1-X,$$

условная дисперсия

$$\mathsf{D}(X|Y) = \frac{(2-Y)^2}{48},$$

условная дисперсия

$$\mathsf{D}(Y|X) = \frac{(1-X)^2}{3}.$$

11.3 Задачи

11.1. Распределение двумерного случайного вектора (X,Y) задано табл. 11.6. Найдите условное распределение случайной величины X при условии, что случайная величина Y приняла значение y_j, $j = 1,2$, и условное распределение случайной величины Y при условии, что случайная величина X приняла значение x_i, $i = 1,2,3$.

	Y		
X	0,10	0,15	0,20
0,3	0,25	0,15	0,32
0,6	0,10	0,05	0,13

Таблица 11.6.

Используя найденные условные распределения, проверьте, являются ли случайные величины X и Y независимыми. Найдите условные математические ожидания $\mathsf{M}(X|Y)$ и $\mathsf{M}(Y|X)$ и условные дисперсии $\mathsf{D}(X|Y)$ и $\mathsf{D}(Y|X)$.

	Y		
X	0,10	0,15	0,20
0,3	5/7	3/4	32/45
0,6	2/7	1/4	13/45

Таблица 11.7.

О т в е т: Условные распределения случайной величины X при условии Y и случайной величины Y при условии X представлены в табл. 11.7 и 11.8 соответственно. Случайные величины X и Y являются зависимыми.

$\mathbf{M}(X|0{,}10) \approx 0{,}39$, $\mathbf{M}(X|0{,}15) = 0{,}375$,$\mathbf{M}(X|0{,}20) \approx 0{,}39$,
$\mathbf{M}(Y|0{,}3) \approx 0{,}16$, $\mathbf{M}(Y|0{,}6) \approx 0{,}55$,
$\mathbf{D}(X|0{,}10) \approx 0{,}018$, $\mathbf{D}(X|0{,}15) \approx 0{,}17$, $\mathbf{D}(X|0{,}20) \approx 0{,}17$,
$\mathbf{D}(Y|0{,}3) \approx 0{,}0019$, $\mathbf{D}(Y|0{,}6) \approx 0{,}0020$.

	X	
Y	0,3	0,6
0,10	25/72	5/14
0,15	5/24	5/28
0,20	4/9	13/28

Таблица 11.8

11.2. Двумерный случайный вектор (X,Y) распределен равномерно в прямоугольнике с вершинами в точках $(-3,-10)$, $(-3,10)$, $(3,10)$ и $(3,-10)$. Найдите условную плотность распределения случайной величины X при условии, что случайная величина Y приняла значение y и условную плотность распределения случайной величины Y при условии, что случайная величина X приняла значение x. Используя найденные условные плотности распределения, проверьте, являются ли случайные величины X и Y независимыми. Найдите условные математические ожидания $\mathbf{M}(X|Y)$ и $\mathbf{M}(Y|X)$ и условные дисперсии $\mathbf{D}(X|Y)$ и $\mathbf{D}(Y|X)$.
Ответ:

$$p_X(x|y) = \begin{cases} \dfrac{1}{6}, & |x| \leqslant 3 \text{ и } |y| \leqslant 10; \\ 0, & |x| > 3 \text{ и } |y| \leqslant 10; \end{cases}$$

$$p_Y(y|x) = \begin{cases} \dfrac{1}{20}, & |y| \leqslant 10 \text{ и } |x| \leqslant 3; \\ 0, & |y| > 10 \text{ и } |x| \leqslant 3. \end{cases}$$

Случайные величины X и Y являются независимыми. $\mathbf{M}(X|Y) \equiv \mathbf{M}X = 0$, $\mathbf{M}(Y|X) \equiv \mathbf{M}Y = 0$,
$\mathbf{D}(X|Y) \equiv \mathbf{D}X = 3$, $\mathbf{D}(Y|X) \equiv \mathbf{D}Y = 100/3$, $g(y) \equiv 0$,

11.3. Непрерывный двумерный случайный вектор (X,Y) имеет плотность распределения

$$p(x,y) = \begin{cases} Cy, & (x;y) \in D; \\ 0, & (x;y) \notin D, \end{cases}$$

где D — область, ограниченная линиями $y = x^2$ и $y = 1$. Найдите постоянную C, условную плотность распределения случайной величины X при условии, что случайная величина Y приняла значение y, и условную плотность распределения случайной величины Y при условии, что случайная величина X приняла значение x. Используя найденные условные плотности распределения, проверьте, являются ли случайные величины X и Y независимыми. Найдите условные математические ожидания $\mathbf{M}(X|Y)$ и $\mathbf{M}(Y|X)$ и условные дисперсии $\mathbf{D}(X|Y)$ и $\mathbf{D}(Y|X)$.
Ответ:

$$C = 5/4;$$

$$p_X(x|y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{y}}, & x \in [-\sqrt{y}, \sqrt{y}] \text{ и } y \in [0,1]; \\ 0, & x \notin [-\sqrt{y}, \sqrt{y}] \text{ и } y \in (0,1]; \end{cases}$$

$$p_Y(y|x) = \begin{cases} \dfrac{2y}{1-x^4}, & y \in [x^2,1] \text{ и } x \in (-1,1); \\ 0, & y \notin [x^2,1] \text{ и } x \in (-1,1). \end{cases}$$

Условная плотность $p_X(x|y)$ не определяется при $y \notin (0,1]$, условная плотность $p_Y(y|x)$ — при $x \notin (-1,1)$. Случайные величины X и Y являются зависимыми.

$\mathbf{M}(X|Y) \equiv 0$, $\mathbf{M}(Y|X) = \frac{2(1+X^2+X^4)}{3(1+X^2)}$, $\mathbf{D}(X|Y) = \frac{Y}{3}$, $\mathbf{D}(Y|X) = \frac{(1-X^2)^2(1+4X^2+X^4)}{18(1+X^2)^2}$,

$g(y) \equiv 0$, $h(x) = \frac{2(1+x^2+x^4)}{(3(1+x^2)}$.

Семинар 12

Многомерное нормальное распределение

12.1 Теоретические сведения

Пусть (X_1,X_2) — случайный вектор с вектором математических ожиданий (m_1,m_2) и ковариационной матрицей $\Sigma = \begin{pmatrix} \mathsf{D}X_1, & \mathsf{cov}(X_1,X_2) \\ \mathsf{cov}(X_1,X_2), & \mathsf{D}X_2 \end{pmatrix}$.

Определение 12.1. Случайный вектор (X_1,X_2) называется двумерным ***нормальным (гауссовским) случайным вектором***, если его плотность имеет вид

$$p(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det\Sigma}} e^{-\frac{1}{2}(x-m)\widetilde{\Sigma}(x-m)^T}, \qquad x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2, \tag{12.1}$$

где $m = (m_1,m_2)$, $\widetilde{\Sigma}$ — матрица, обратная к матрице Σ, а T — операция транспонирования.

Определим пять параметров m_1, m_2, σ_1, σ_2, ρ следующим образом: $m_1 = \mathsf{M}X_1$, $m_2 = \mathsf{M}X_2$, $\sigma_1^2 = \mathsf{D}X_1$, $\sigma_2^2 = \mathsf{D}X_2$, ρ — коэффициент корреляции случайных величин X_1 и X_2. Заметим, что

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2, & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2, & \sigma_2^2 \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{\Sigma} = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2} \\ -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2} & \frac{1}{\sigma_2^2} \end{pmatrix}. \tag{12.2}$$

Ниже приводится определение, равносильное определению 12.1.

Определение 12.2. Случайный вектор (X_1,X_2) называется двумерным нормальным случайным вектором, если его плотность имеет вид

$$p_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x_1-m_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x_1-m_1)(x_2-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right)}. \tag{12.3}$$

Двумерное нормальное распределение зависит от пяти параметров: m_1, m_2, σ_1, σ_2, ρ. Ниже приводится еще одно определение, равносильное определениям 12.1 и 12.2.

Определение 12.3. Случайный вектор (X_1,X_2) называется двумерным нормальным случайным вектором, если для любых действительных чисел c_1 и c_2 случайная величина $c_1X_1 + c_2X_2$ является нормальной.

Теорема 12.1. *Определения 12.1–12.3 эквивалентны.*

Далее всюду символ $X \sim \mathcal{N}(\mu,d)$ будет означать, что X — нормальная случайная величина с математическим ожиданием μ и дисперсией d.

Теорема 12.2. *Пусть (X_1,X_2) — двумерный нормальный случайный вектор с параметрами m_1, m_2, σ_1, σ_2, ρ.*

Тогда $X_i \sim \mathcal{N}(m_i,\sigma_i^2)$, $i = 1,2$, то есть плотность случайных величин X_1 и X_2 имеет вид

$$p_{X_1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-(x-m_1)^2/2\sigma_1^2}, \tag{12.4}$$

и

$$p_{X_2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(x-m_2)^2}{2\sigma_2^2}}. \tag{12.5}$$

соответственно.

Замечание 12.1. Теорема 12.2 утверждает, что координаты двумерного нормального вектора являются нормальными случайными величинами. Обратное, вообще говоря, неверно, то есть можно построить случайный вектор, не являющийся нормальным, но координаты которого являются нормальными случайными величинами.

Теорема 12.3. *Пусть (X_1,X_2) — двумерный нормальный случайный вектор с параметрами m_1, m_2, σ_1, σ_2, ρ.*

Тогда условная плотность случайной величины X_1 при условии $X_2 = y$ имеет вид

$$p_{X_1}(x|y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_{Y(y)}} = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}\left[x - \left(m_1 + \frac{\rho\sigma_1(y-m_2)}{\sigma_2}\right)\right]^2\right\}, \tag{12.6}$$

то есть условное распределение X при условии $Y = y$ также является нормальным с математическим ожиданием $m_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y - m_2)$ и дисперсией $\sigma_1^2(1-\rho^2)$. Поэтому условное математическое ожидание $\mathsf{M}(X_1|y)$ случайной величины X_1 при условии $X_2 = y$ имеет вид

$$\mathsf{M}(X_1|y) = m_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y - m_2), \tag{12.7}$$

а условная дисперсия $\mathsf{D}(X_1|y)$ случайной величины X_1 при условии $X_2 = y$ имеет вид

$$\mathsf{D}(X_1|y) = \sigma_1^2(1-\rho^2). \tag{12.8}$$

Аналогично условная плотность случайной величины X_2 при условии $X_1 = x$ имеет вид

$$p_{X_2}(y|x) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_{X(x)}} = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)}\left[y - \left(m_2 + \frac{\rho\sigma_2(x-m_1)}{\sigma_1}\right)\right]^2\right\}, \tag{12.9}$$

то есть условное распределение Y при условии $X = x$ также является нормальным с математическим ожиданием $m_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - m_1)$ и дисперсией $\sigma_2^2(1-\rho^2)$. Поэтому условное математическое ожидание $\mathsf{M}(X_2|x)$ случайной величины X_2 при условии $X_1 = x$ имеет вид

$$\mathsf{M}(X_2|x) = m_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - m_1), \tag{12.10}$$

а условная дисперсия $\mathsf{D}(X_2|x)$ случайной величины X_2 при условии $X_1 = x$ имеет вид

$$\mathsf{D}(X_2|x) = \sigma_2^2(1-\rho^2). \tag{12.11}$$

Замечание 12.2. В отличие от условных математических ожиданий $\mathsf{M}(X_1|y)$ и $\mathsf{M}(X_2|x)$, которые зависят от y и x соответственно, условные дисперсии $\mathsf{D}(X_1|y)$ и $\mathsf{D}(X_2|x)$ координат X и Y нормального случайного вектора X,Y не зависят от y и x.

Замечание 12.3. В условиях теоремы 12.3 случайные величины $\mathsf{M}(X_1|X_2)$, $\mathsf{M}(X_2|X_1)$, $\mathsf{D}(X_1|X_2)$ и $\mathsf{D}(X_2|X_1)$ имеют вид

$$\mathsf{M}(X_1|X_2) = m_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(X_2 - m_2), \tag{12.12}$$

$$\mathsf{M}(X_2|X_1) = m_1 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(X_1 - m_1), \tag{12.13}$$

$$\mathsf{D}(X_1|X_2) = \sigma_1^2(1-\rho^2), \tag{12.14}$$

$$\mathsf{D}(X_2|X_1) = \sigma_2^2(1-\rho^2). \tag{12.15}$$

Дисперсии $\mathsf{D}(X_1|X_2)$ и $\mathsf{D}(X_2|X_1)$ являются вырожденными случайными величинами, то есть неслучайными величинами (константами).

Следствие 12.1. Пусть (X_1, X_2) — двумерный нормальный случайный вектор с параметрами m_1, m_2, σ_1, σ_2, ρ.

Тогда условные вероятности $\mathsf{P}\{a < X_1 < b|X_2 = y\}$ и $\mathsf{P}\{a < X_2 < b|X_1 = x\}$ можно найти по формулам

$$\mathsf{P}\{a < X_1 < b|X_2 = y\} = \Phi\left(\frac{b - \mathsf{M}(X_1|y)}{\sqrt{\mathsf{D}(X_1|y)}}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mathsf{M}(X_1|y)}{\sqrt{\mathsf{D}(X_1|y)}}\right), \tag{12.16}$$

$$\mathsf{P}\{a < X_2 < b|X_1 = x\} = \Phi\left(\frac{b - \mathsf{M}(X_2|x)}{\sqrt{\mathsf{D}(X_2|x)}}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mathsf{M}(X_2|x)}{\sqrt{\mathsf{D}(X_2|x)}}\right), \tag{12.17}$$

где $\mathsf{M}(X_1|y)$, $\mathsf{D}(X_1|y)$, $\mathsf{M}(X_2|x)$ и $\mathsf{D}(X_2|x)$ определяются формулами (12.7)–(12.8) и (12.10)–(12.11) а

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt. \tag{12.18}$$

Замечание 12.4. В формулах (12.16)–(12.17) функцию $\Phi(x)$ можно заменить на функцию Лапласа

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt, \tag{12.19}$$

поскольку $\Phi(x) = \Phi_0(x) + 1/2$. Функции $\Phi(x)$ или $\Phi_0(x)$ (или связанная с ними так называемая функция ошибок $\mathrm{erf}(x)$) вычисляются в большинстве математических и статистических пакетах программ, например в MatLab, Maple, а также в пакете Excel. В частности, значения $\Phi(x)$ можно вычислить с помощью программы «Probability Distributions» из Google Play.

Замечание 12.5. Так как случайные величины X_1 и X_2 непрерывные, то формулы (12.16)–(12.17) остаются справедливыми, если знаки $<$ частично или полностью заменить на $\leqslant$.

Замечание 12.6. Формулы (12.16)–(12.17) остаются справедливыми, если $a = -\infty$ и/или $b = \infty$, при этом нужно считать, что $\Phi(-\infty) = 0$, $\Phi(\infty) = 1$, $\Phi_0(-\infty) = -1/2$, $\Phi_0(\infty) = 1/2$.

Замечание 12.7. Формулы (12.16)–(12.17) справедливы, только если случайные величины X_1 и X_2 **НОРМАЛЬНЫЕ!!!**

12.2 Решение типовых примеров

Пример 12.1. Случайный вектор (ξ,η) распределен по нормальному закону с математическим ожиданием $(0,2)$ и ковариационной матрицей $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.

Найти $\mathsf{P}\{\xi - \eta > -1\}$.

Решение:

$$\mathsf{P}\{\xi - \eta > -1\} = \mathsf{P}\{\eta - \xi < 1\} = \mathsf{P}\{\zeta < 1\}, \tag{12.20}$$

где $\zeta = \eta - \xi$, причем согласно определению 12.3, случайная величина ζ является нормальной. Поэтому для ζ как и для всякой нормальной случайной величины по формуле (7.1) из лекции 7 «Основные законы распределения случайных величин»

$$\mathsf{P}\{a < \zeta < b\} = \Phi\left(\frac{b - \mathsf{M}\zeta}{\sqrt{\mathsf{D}\zeta}}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mathsf{M}\zeta}{\sqrt{\mathsf{D}\zeta}}\right), \tag{12.21}$$

$$\mathsf{P}\{\zeta < b\} = \Phi\left(\frac{b - \mathsf{M}\zeta}{\sqrt{\mathsf{D}\zeta}}\right), \tag{12.22}$$

$$\mathsf{P}\{a < \zeta\} = 1 - \Phi\left(\frac{a - \mathsf{M}\zeta}{\sqrt{\mathsf{D}\zeta}}\right). \tag{12.23}$$

Из формул

$$\mathsf{M}(a\xi + b\eta + c) = a\mathsf{M}\xi + b\mathsf{M}\eta + c, \tag{12.24}$$

$$\mathsf{D}(a\xi + b\eta + c) = a^2\mathsf{D}\xi + b^2\mathsf{D}\eta + 2ab\,\mathsf{cov}\xi\eta, \tag{12.25}$$

где a, b и c — произвольные действительные числа, вытекает, что

$$\mathsf{M}\zeta = \mathsf{M}\eta - \mathsf{M}\xi = 2 - 0 = 2, \qquad \mathsf{D}\zeta = \mathsf{D}\eta + \mathsf{D}\xi - 2\mathsf{cov}(\eta\xi) = 7 + 5 - 2\cdot 3 = 6. \tag{12.26}$$

Поэтому с учетом того, что $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ для любого $z \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{\sqrt{6}} \approx 0.4082$ и $\Phi(0.4082) \approx 0.658$, получим

$$\mathsf{P}\{\xi - \eta > -1\} = \mathsf{P}\{\zeta < 1\} = \Phi\left(\frac{1-2}{\sqrt{6}}\right) = \Phi\left(\frac{-1}{\sqrt{6}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \approx 0.342. \tag{12.27}$$

Пример 12.2. Случайный вектор (ξ,η) распределен по нормальному закону с математическим ожиданием $(4,2)$ и ковариационной матрицей $\begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.
Найти $\mathsf{P}\{6 < \xi < 7 | \eta = 8\}$.

Решение:

Заметим, что

$$\rho = \frac{\mathsf{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{\mathsf{D}\xi}\sqrt{\mathsf{D}\eta}} = \frac{2}{\sqrt{9}\sqrt{4}} = \frac{1}{3}. \tag{12.28}$$

Далее, согласно (12.16)

$$\mathsf{P}\{6 < \xi < 7 | \eta = 8\} = \Phi\left(\frac{7 - \mathsf{M}(\xi|8)}{\sqrt{\mathsf{D}(\xi|8)}}\right) - \Phi\left(\frac{6 - \mathsf{M}(\xi|8)}{\sqrt{\mathsf{D}(\xi|8)}}\right), \tag{12.29}$$

а согласно (12.10) и (12.11)

$$\mathsf{M}(\xi|8) = \mathsf{M}\xi + \rho\frac{\sqrt{\mathsf{D}\xi}}{\sqrt{\mathsf{D}\eta}}(8 - \mathsf{M}\eta) = 4 + \frac{1}{3}\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}}(8-2) = 7, \tag{12.30}$$

$$\mathsf{D}(\xi|y) = \mathsf{D}\xi(1-\rho^2) = 9\left(1 - \frac{1}{9}\right) = 8. \tag{12.31}$$

Поэтому с учетом того, что $\Phi(0) = 1/2$, $\frac{1}{\sqrt{8}} \approx 0.3535$ и $\Phi(0.3535) \approx 0.6382$, получим

$$\mathsf{P}\{6 < \xi < 7|\eta = 8\} = \Phi\left(\frac{7-7}{\sqrt{8}}\right) - \Phi\left(\frac{6-7}{\sqrt{8}}\right) =$$
$$\Phi(0) - \Phi\left(\frac{-1}{\sqrt{8}}\right) = \frac{1}{2} - \left(1 - \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)\right) = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right) - \frac{1}{2} \approx 0.138. \tag{12.32}$$

Пример 12.3. Случайный вектор (ξ,η) распределен по нормальному закону с математическим ожиданием $(-2,6)$ и ковариационной матрицей $\begin{pmatrix} 16 & 4 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$.
Найти $\mathsf{P}\{|\eta| < 3|\xi = -2\}$.

Р е ш е н и е:
Заметим, что

$$\rho = \frac{\mathsf{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{\mathsf{D}\xi}\sqrt{\mathsf{D}\eta}} = \frac{4}{\sqrt{16}\sqrt{9}} = \frac{1}{3}. \tag{12.33}$$

Далее, согласно (12.16)

$$\mathsf{P}\{|\eta| < 3|\xi = -2\} = \mathsf{P}\{-3 < \eta < 3|\xi = -2\} =$$
$$= \Phi\left(\frac{3 - \mathsf{M}(\eta|-2)}{\sqrt{\mathsf{D}(\eta|-2)}}\right) - \Phi\left(\frac{-3 - \mathsf{M}(\eta|-2)}{\sqrt{\mathsf{D}(\eta|-2)}}\right) \tag{12.34}$$

а согласно (12.7) и (12.8)

$$\mathsf{M}(\eta|-2) = \mathsf{M}\eta + \rho\frac{\sqrt{\mathsf{D}\eta}}{\sqrt{\mathsf{D}\xi}}(-2 - \mathsf{M}\xi) = 6 + \frac{1}{3}\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}}(-2(-2)) = 6, \tag{12.35}$$

$$\mathsf{D}(\eta|-2) = \mathsf{D}\eta(1-\rho^2) = 9\left(1 - \frac{1}{9}\right) = 8. \tag{12.36}$$

Поэтому с учетом того, что $\frac{3}{\sqrt{8}} \approx 1{,}06066$, $\Phi(1{,}06066) \approx 0{,}8556$, $\frac{9}{\sqrt{8}} \approx 3{,}182$, $\Phi(3{,}182) \approx 0{,}9993$, получим

$$\mathsf{P}\{-3 < \xi < 3|\eta = -2\} = \Phi\left(\frac{3-6}{\sqrt{8}}\right) - \Phi\left(\frac{-3-6}{\sqrt{8}}\right) = \Phi\left(\frac{-3}{\sqrt{8}}\right) - \Phi\left(\frac{-9}{\sqrt{8}}\right) =$$
$$= \Phi\left(\frac{9}{\sqrt{8}}\right) - \Phi\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right) \approx 0{,}1437. \tag{12.37}$$

12.3 Задачи

12.1. Случайный вектор (ξ,η) распределен по нормальному закону с математическим ожиданием $(3,1)$ и ковариационной матрицей $\begin{pmatrix} 25 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$.

Найти $\mathsf{P}\{2\eta - \xi > 5\}$.

Ответ: $\Phi\left(-\frac{6}{5}\right) \approx 0{,}1151$.

12.2. Случайный вектор (ξ,η) распределен по нормальному закону с математическим ожиданием $(1,2)$ и ковариационной матрицей $\begin{pmatrix} 9 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Найти $\mathsf{P}\{-1 < \xi < 2 | \eta = 3\}$.

Ответ: $\Phi\left(\frac{\sqrt{35}}{14}\right) - \Phi\left(-\frac{\sqrt{35}}{10}\right) \approx 0{,}3866$.

12.3. Случайный вектор (ξ,η) распределен по нормальному закону с математическим ожиданием $m = (-2{,}5)$ и ковариационной матрицей $\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Найти $\mathsf{P}\{-3 < \eta < -1 | \xi = 3\}$.

Ответ: $\Phi\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right) - \Phi\left(-\frac{3\sqrt{2}}{8}\right) \approx 0{,}2722$.

Семинар 13

Предельные теоремы теории вероятностей

13.1 Теоретические сведения

Определение 13.1. Если последовательность X, X_1, X_2, $\ldots$, X_n, $\ldots$ случайных величин удовлетворяет условию
$$\mathsf{P}\left\{\lim_{n\to\infty} X_n = X\right\} = 1, \tag{13.1}$$
то говорят о ***сходимости*** этой последовательности к случайной величине X ***с вероятностью 1 или почти наверное*** и обозначают
$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} X. \tag{13.2}$$

Определение 13.2. Если последовательность $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ случайных величин для любого $\varepsilon > 0$ удовлетворяет условию
$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\{|X_n - X| < \varepsilon\} = 1, \tag{13.3}$$
то говорят о ***сходимости*** этой последовательности к случайной величине X ***по вероятности***. Сходимость к X по вероятности записывается в виде
$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} X. \tag{13.4}$$

Теорема 13.1 (первое неравенство Чебышёва)**.** *Для каждой неотрицательной случайной величины X, имеющей математическое ожидание $\mathsf{M}X$, при любом $\varepsilon > 0$ справедливо соотношение*
$$\mathsf{P}\{X \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{\mathsf{M}X}{\varepsilon}, \tag{13.5}$$
или
$$\mathsf{P}\{X < \varepsilon\} > 1 - \frac{\mathsf{M}X}{\varepsilon}. \tag{13.6}$$

Теорема 13.2 (второе неравенство Чебышёва)**.** *Для каждой случайной величины X, имеющей дисперсию $\mathsf{D}X$, при любом $\varepsilon > 0$ справедливо **второе неравенство Чебышёва***
$$\mathsf{P}\{|X - \mathsf{M}X| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{\mathsf{D}X}{\varepsilon^2}, \tag{13.7}$$
или
$$\mathsf{P}\{|X - \mathsf{M}X| < \varepsilon\} > 1 - \frac{\mathsf{D}X}{\varepsilon^2}. \tag{13.8}$$

Определение 13.3. Последовательность X_1, X_2, …, X_n, … случайных величин удовлетворяет ***закону больших чисел*** (***слабому***), если для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathsf{M}X_i\right| \geqslant \varepsilon\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \tag{13.9}$$

т.е.

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathsf{M}X_i \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} 0. \tag{13.10}$$

Теорема 13.3 (закон больших чисел в форме Чебышёва). *Если последовательность $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ независимых случайных величин такова, что существуют $\mathsf{M}X_i$ и $\mathsf{D}X_i$, причем дисперсии ограничены в совокупности (т.е. $\mathsf{D}X_i \leqslant C$ для некоторой постоянной C), то для последовательности $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ выполнен закон больших чисел.*

При этом говорят также, что к последовательности X_1, X_2, …, X_n, … случайных величин применим ***закон больших чисел в форме Чебышёва****.*

Определение 13.4. Случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ назовем одинаково распределенными, если все они имею одну и ту же функцию распределения.

Замечание 13.1. У одинаково распределенных случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ математические ожидания и дисперсии (если таковые существуют) совпадают: $\mathsf{M}X_i = m$, $\mathsf{D}X_i = d$, $i = 1, 2, \ldots$, где m и d — некоторые действительные числа, причем $d > 0$.

Следствие 13.1. Если в условиях теоремы 13.3 случайные величины X_i, $i = 1, 2, \ldots$, являются также одинаково распределенными с общим математическим ожиданием m, то последовательность $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ случайных величин удовлетворяет закону больших чисел в следующей форме:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} m.$$

Следствие 13.2 (закон больших чисел в форме Бернулли). Пусть проводится n испытаний по *схеме Бернулли* и Y_n — общее число успехов в n испытаниях. Тогда наблюденная частота успехов

$$\widehat{p} = \frac{Y_n}{n} \tag{13.11}$$

сходится по вероятности к вероятности p успеха в одном испытании

$$\widehat{p} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} p. \tag{13.12}$$

Теорема 13.4 (усиленный закон больших чисел в форме Колмогорова). *Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с $\mathsf{M}X_i = m$ и $\mathsf{M}|X_i| < \infty$, $i = 1, 2, \ldots$.*

Тогда

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n\to\infty]{п.н.} m. \tag{13.13}$$

Теорема 13.5 (центральная предельная теорема). *Пусть X_1, X_2, …, $X_n, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $\mathsf{M}X_n = m$, $\mathsf{D}X_n = \sigma^2$, $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Тогда*

$$\mathsf{P}\left\{\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} < x\right\} = \mathsf{P}\left\{\left(\overline{X} - m\right)\frac{\sqrt{n}}{\sigma} < x\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(x), \tag{13.14}$$

где $\Phi(x)$ — функция стандартного нормального распределения.

Следствие 13.3 (интегральная теорема Муавра — Лапласа)**.** Обозначим S_n суммарное число успехов в n испытаниях *по схеме Бернулли* с вероятностью успеха p и вероятностью неудачи $q = 1 - p$. Тогда с ростом n последовательность функций распределения случайных величин $(S_n - np)/\sqrt{npq}$ сходится к функции стандартного нормального распределения, т.е.

$$\mathsf{P}\left\{\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} < x\right\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Phi(x). \qquad (13.15)$$

Замечание 13.2. Из теоремы 13.5 и следствия 13.3 вытекают следующие приближенные формулы:

$$\mathsf{P}\{a < S_n < b\} \approx \Phi\left(\frac{b - mn}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{a - mn}{\sigma\sqrt{n}}\right), \qquad (13.16)$$

$$\mathsf{P}\{a < \overline{X} < b\} \approx \Phi\left(\frac{(b - m)\sqrt{n}}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{(a - m)\sqrt{n}}{\sigma}\right), \qquad (13.17)$$

$$\mathsf{P}\{|\overline{X} - m| < \varepsilon\} \approx \Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) - 1 = 2\Phi_0\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right), \qquad (13.18)$$

$$\mathsf{P}\left\{a < Y_n < b\right\} \approx \Phi\left(\frac{b - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a - np}{\sqrt{npq}}\right), \qquad (13.19)$$

$$\mathsf{P}\left\{|\widehat{p} - p| < \varepsilon\right\} \approx \Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right) - \Phi\left(-\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right) - 1 = 2\Phi_0\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right). \qquad (13.20)$$

Определение 13.5. Обозначим через z_α решение (относительно неизвестного z) уравнения $\Phi(z) = \alpha$, т.е. число, удовлетворяющее равенству $\Phi(z_\alpha) = \alpha$. Число z_α назовем квантилью уровня α стандартного нормального распределения.

Замечание 13.3. Квантили z_α можно найти в специальных таблицах (которые есть практически в любом учебнике и задачнике по теории вероятностей или математической статистике) или вычислить с помощью различных математических пакетов, в частности, с помощью программы «Probability Distributions» из Google Play.

Таблицы квантилей функций $\Phi(x)$ и $\Phi_0(x)$ не следует путать с таблицами значений функций $\Phi(x)$ и $\Phi_0(x)$.

Также не следует путать между собой таблицы функции $\Phi(x)$ и таблицы функции $\Phi_0(x)$ (для контроля помните, что $\Phi(0) = 1/2$, $\Phi_0(0) = 0$). #

13.2 Решение типовых примеров

Пример 13.1. По многолетним наблюдениям, средняя скорость ветра в некотором пункте равна 16 км/ч.

а) Оценить вероятность того, что в случайный момент времени скорость ветра в этом пункте превысит 80 км/ч.

б) Оцените минимальное значение скорости ветра, превышение которого произойдет с вероятностью, не более, чем 0,1.

в) Уточните оценки вероятностей из пунктов а) и б), если известно, что среднеквадратическое отклонение скорости ветра равно 2.

Р е ш е н и е: а) Обозначим через ξ скорость ветра в случайный момент времени. Воспользовавшись первым неравенством Чебышёва, получим

$$\mathsf{P}\{\xi > 80\} \leqslant \frac{16}{80} = \frac{1}{5}. \tag{13.21}$$

б) Минимальная скорость ветра C должна удовлетворять условию

$$\mathsf{P}\{\xi \geqslant C\} \leqslant 0{,}1. \tag{13.22}$$

Так как

$$\mathsf{P}\{\xi \geqslant C\} \leqslant \frac{\mathsf{M}\xi}{C}, \tag{13.23}$$

то C будет наименьшим числом, удовлетворяющим неравенству $C \geqslant \frac{\mathsf{M}\xi}{0{,}1}$, т.е.

$$C = \frac{\mathsf{M}\xi}{0{,}1} = 160.$$

в) Ошибкой будет написать

$$\mathsf{P}\{\xi \geqslant 80\} = 1 - \Phi\left(\frac{80 - \mathsf{M}\xi}{\sqrt{\mathsf{D}\xi}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{80-16}{2}\right) = 1 - \Phi(32), \tag{13.24}$$

поскольку в условии задачи не сказано, что ξ — нормальная случайная величина. Вероятность $\mathsf{P}\{\xi \geqslant 80\}$ в данном случае вычислить невозможно, так как распределение ξ неизвестно. Эту вероятность можно только оценить.

Воспользовавшись вторым неравенством Чебышёва, получим

$$\mathsf{P}\{\xi \geqslant 80\} = \mathsf{P}\{\xi - \mathsf{M}\xi \geqslant 80 - 16\} \leqslant \mathsf{P}\{|\xi - \mathsf{M}\xi| \geqslant 64\} \leqslant \frac{\mathsf{D}\xi}{64^2} = \frac{2^2}{64^2} = \frac{1}{1024}. \tag{13.25}$$

Далее, предполагая, что $C > \mathsf{M}\xi$ (будем считать, что нас интересует сильный ветер, представляющий наибольшую опасность), и используя второе неравенство Чебышёва, найдем, что

$$\mathsf{P}\{\xi \geqslant C\} = \mathsf{P}\{\xi - \mathsf{M}\xi \geqslant C - 16\} \leqslant \mathsf{P}\{|\xi - \mathsf{M}\xi| \geqslant C - 16\} \leqslant \frac{\mathsf{D}\xi}{(C-16)^2}. \tag{13.26}$$

Поэтому наименьшее значение C скорости ветра определим из условия $\frac{\mathsf{D}\xi}{(C-16)^2} \leqslant 0{,}1$, т.е. $C = 16 + 2\sqrt{10} \approx 22{,}33$. Другими словами, ветер, превышающий 22,33 м/с, будет с вероятностью не больше 0,1.

Видно, что знание дисперсии (характеризующей величину отклонений случайной величины от своего математического ожидания) позволяет уточнить (а если дисперсия мала, то существенно уточнить) выводы, полученные с использованием информации только о математическом ожидании.

Пример 13.2. Используя неравенство Чебышёва, оценим вероятность того, что частота появления герба при $n = 10000$ бросаниях симметричной монеты отклонится от вероятности его появления $p = 1/2$ по абсолютной величине не более, чем на $\varepsilon = 0{,}01$. Сравним эту величину с оценкой, полученной с помощью интегральной теоремы Муавра — Лапласа.

Р е ш е н и е: Обозначим через Y_n количество гербов, а через $\widehat{p} = Y_n/n$ долю гербов, выпавших при n подбрасываниях монеты. По условию задачи нужно оценить

$$\mathsf{P}\left\{\left|\widehat{p} - \frac{1}{2}\right| < 0{,}01\right\}.$$

Из лекции 7 известно, что Y_n — биномиальная случайная величина с математическим ожиданием $\mathsf{M}Y_n = np$ и дисперсией $\mathsf{D}Y_n = npq$, где $q = 1 - p$. Поэтому, используя свойства математического ожидания и дисперсии (см. теоремы 9.1 и 9.2 лекции 9), получим $\mathsf{M}(\widehat{p}) = p$ и $\mathsf{D}(\widehat{p}) = \frac{pq}{n}$. Следовательно, применяя второе неравенство Чебышёва (13.8), будем иметь

$$\mathsf{P}\{|\widehat{p} - p| < \varepsilon\} = \mathsf{P}\{|\widehat{p} - \mathsf{M}(\widehat{p})| < \varepsilon\} > 1 - \mathsf{D}(\widehat{p}) = 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}. \tag{13.27}$$

Подставляя в эту формулу $\varepsilon = 0{,}01$, $n = 10000$, $p = q = 1/2$, найдем, что

$$\mathsf{P}\left\{\left|\widehat{p} - \frac{1}{2}\right| < 0{,}01\right\} > 1 - \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{10000\cdot 0{,}01^2} = 0{,}75. \tag{13.28}$$

Согласно закону больших чисел вероятность $\mathsf{P}\{|\widehat{p} - p| < \varepsilon\}$ должна быть близка к 1 при больших n. Нам удалось показать, что эта вероятность не меньше 0,75 (возможно, эта вероятность на самом деле гораздо больше, чем 0,75 — в таком случае полученная оценка будет слишком грубой).

Теперь оценим $\mathsf{P}\{|\widehat{p} - p| < \varepsilon\}$ при помощи теоремы Муавра — Лапласа. Воспользовавшись приближенной формулой (13.20), вытекающей из этой теоремы, получим

$$\mathsf{P}\left\{\left|\widehat{p} - \frac{1}{2}\right| < 0{,}01\right\} \approx 2\Phi\left(\frac{0{,}01\sqrt{10000}}{\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}\right) - 1 = 2\Phi(2) - 1 \approx 2\cdot 0{,}977 - 1 = 0{,}954. \tag{13.29}$$

Видно, что оценка (13.28) достаточно грубая, вероятность $\mathsf{P}\left\{\left|\widehat{p} - \frac{1}{2}\right| < 0{,}01\right\}$ практически равна единице. Теорема Муавра — Лапласа дала более точную оценку, чем неравенство Чебышёва.

Пример 13.3. В условиях примера 13.2 найдем такое число x, что количество выпавших гербов попадет в интервал $(np - x, np + x)$ с вероятностью $\gamma = 0{,}99$.

Р е ш е н и е: Сохраняя обозначения примера 13.2, заметим, что нужно найти такое x, что

$$\mathsf{P}\{np - x < Y_n < np + x\} = \gamma. \tag{13.30}$$

Используя формулу (13.19), получим

$$\mathsf{P}\{np - x < Y_n < np + x\} \approx \Phi\left(\frac{np + x - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{np + x - np}{\sqrt{npq}}\right) =$$
$$= \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{-x}{\sqrt{npq}}\right) = 2\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{npq}}\right) - 1.$$

Из этого выражения и формулы (13.30) видно, что x можно найти приближенно из условия

$$2\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{npq}}\right) - 1 = \gamma. \tag{13.31}$$

Обозначим через z_α квантиль уровня $\alpha = (1 + \gamma)/2$ стандартного нормального распределения (см. определение 13.5). Из (13.31) найдем, что

$$\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{npq}}\right) = \frac{1 + \gamma}{2} = \alpha, \qquad \frac{x}{\sqrt{npq}} = z_\alpha, \tag{13.32}$$

$$x = z_\alpha \sqrt{npq}. \tag{13.33}$$

Если $\gamma = 0{,}99$, то $\alpha = (1+\gamma)/2 = 0{,}995$ и $\Phi(z) = 0{,}995$ при $z = z_{0{,}995} \approx 2{,}5758$. Подставляя в (13.33) $z_\alpha = 2{,}5758$ и $p = q = 1/2$, окончательно получаем, что $x \approx 128{,}8$.

Проанализируем полученный результат. Подставляя в (13.30) $x = 129$, будем иметь, что

$$\mathsf{P}\{np - x < Y_n < np + x\} = \mathsf{P}\{4871 < Y_n < 5129\} \geqslant 0{,}99. \tag{13.34}$$

Интервал (4871,5129) длины 258 занимает только 2,58 % длины интервала (0,10000) всех возможных значений числа выпавших гербов. Тем не менее, количество выпавших гербов попадет в него с почти со стопроцентной вероятностью. Таким образом, случайное число выпавших гербов с ростом числа подбрасываний становится менее случайным, практически не отклоняясь от своего среднего значения $np = n/2$.

Пример 13.4. Пусть дана последовательность $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ независимых дискретных случайных величин, причем ряд распределения случайной величины X_n представлен в табл. 13.1. Проверьте, применим ли к этой последовательности закон больших чисел в форме Чебышёва.

X_n	$-\sqrt{n}$	0	$\sqrt{n}$
P	$\frac{1}{2n}$	$1-\frac{1}{n}$	$\frac{1}{2n}$

Таблица 13.1.

Р е ш е н и е: Проверим выполнимость условий теоремы 13.3, согласно которой последовательность должна состоять из независимых случайных величин, дисперсии которых ограничены в совокупности (все дисперсии ограничены одной и той же константой). Так как

$$\mathsf{M}X_n = -\sqrt{n}\frac{1}{2n} + \sqrt{n}\frac{1}{2n} = 0, \tag{13.35}$$

то дисперсии

$$\mathsf{D}X_n = \mathsf{M}X_n^2 = \left(-\sqrt{n}\right)^2 \frac{1}{2n} + \left(\sqrt{n}\right)^2 \frac{1}{2n} = 1 \tag{13.36}$$

всех случайных величин X_n ограничены одной и той же величиной 1. Таким образом для этой последовательности справедлив закон больших чисел.

Пример 13.5. Случайная величина $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ является средним арифметическим из $n = 6400$ независимых одинаково распределенных случайных величин X_i, причем каждое слагаемое имеет математическое ожидание $m = \mathsf{M}X_i = 3$ и дисперсию $d = \mathsf{D}X_i \leqslant C$, ограниченную постоянной $C = 2$, $i = 1,2,\ldots,n$. Воспользовавшись *вторым неравенством Чебышёва*, оценим вероятность того, что $\overline{X}$ отклонится от m по абсолютной величине не более, чем на $\varepsilon = 0{,}05$.

Р е ш е н и е: Из свойств математического ожидания и дисперсии (см. теоремы 9.1 и 9.2 лекции 9) вытекает, что

$$\mathsf{M}\overline{X} = m = 3, \qquad \mathsf{D}\overline{X} = \frac{d}{n} \leqslant \frac{C}{n} = \frac{1}{3200}. \tag{13.37}$$

Поэтому в силу второго неравенства Чебышёва (теорема (13.2))

$$\mathsf{P}\{|\overline{X} - m| < \varepsilon\} > 1 - \frac{\mathsf{D}\overline{X}}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{d}{n\varepsilon^2} > 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2} = 0{,}875. \tag{13.38}$$

Пример 13.6. В условиях примера 13.5 оценим $\mathsf{P}\{|\overline{X}-m|<\varepsilon\}$ при помощи центральной предельной теоремы.

Р е ш е н и е: Используя формулу (13.18), вытекающей из центральной предельной теоремы (теоремы 13.5), и учитывая (13.37) и то, что функция $\Phi(x)$ монотонно возрастает, получим

$$\mathsf{P}\{|\overline{X}-m|<\varepsilon\} \approx 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{d}}\right)-1 \geqslant 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{C}}\right)-1 = 2\Phi(2\sqrt{2})-1 \approx 0{,}995. \quad (13.39)$$

Пример 13.7. Найдем вероятность того, что при 720 бросаниях игральной кости “шестерка” выпадет от 100 до 130 раз.

Р е ш е н и е: Обозначим через Y_n суммарное число выпавших “шестерок” при $n=720$ бросаниях игральной кости. Поскольку вероятность выпадения “шестерки” при одном бросании $p=1/6$, то в силу *интегральной теоремы Муавра — Лапласа* (следствие 13.3) случайная величина

$$\xi = \frac{Y_n - np}{\sqrt{npq}} = \frac{Y_n - 120}{10}$$

приближенно распределена по стандартному нормальному закону. Поэтому из формулы (13.15) и свойства функции распределения вытекает, что (см. также (13.19))

$$\mathsf{P}\{100<Y_n<130\} = \mathsf{P}\left\{\frac{100-120}{10} < \xi < \frac{130-120}{10}\right\} \approx \Phi_0(1)-\Phi_0(-2) = 0{,}81859.$$

13.3 Задачи для самостоятельного решения

13.1. Средний ежедневный расход воды в некотором населенном пункте составляет 50 000 л. Оцените с помощью первого неравенства Чебышёва вероятность того, что в произвольно выбранный день расход воды в этом пункте превысит 150 000 л.
О т в е т: $\mathsf{P}\{X>150\,000\}<1/3$.

13.2. Среднее потребление электроэнергии в мае в некотором населенном пункте составляет 360 000 кВт·ч.

а) Оцените с помощью первого неравенства Чебышёва вероятность того, что потребление электроэнергии в мае текущего года в этом населенном пункте превысит 1 000 000 кВт·ч.

б) Оцените с помощью второго неравенства Чебышёва ту же вероятность, если известно, что среднеквадратическое отклонение потребления электроэнергии в мае равно 40 000 кВт·ч.
О т в е т: а) $\mathsf{P}\{X>1\,000\,000\}<0{,}36$; б) $\mathsf{P}\{X>1\,000\,000\}<\frac{1}{256}$.

13.3. Среднеквадратическое отклонение погрешности X измерения курса самолета равно 2°. Считая математическое ожидание погрешности измерения равным нулю, оцените с помощью второго неравенства Чебышёва вероятность того, что погрешность одного измерения курса самолета превысит 5°.
О т в е т: $\mathsf{P}\{|X|>5^\circ\}<0{,}16$.

13.4. Вероятность появления некоторого события в каждом из 800 независимых испытаний равна $1/4$. Воспользовавшись вторым неравенством Чебышёва, оцените вероятность того, что число X появлений этого события заключено в пределах от 150 до 250.
О т в е т: $\mathsf{P}\{150\leqslant X\leqslant 250\}\geqslant 0{,}94$.

13.5. Производится выборочное обследование большой партии электрических лампочек для определения среднего времени их горения, среднеквадратическое отклонение времени горения лампочки равно $\sigma = 80$ ч. Из всей партии наудачу выбирается 400 лампочек. Воспользовавшись центральной предельной теоремой, оцените вероятность того, что среднее (математическое ожидание) время горения лампочки будет отличаться от наблюденного среднего времени горения выбранных 400 лампочек не более чем на 10 ч.

О т в е т: 0,9875806693.

13.6. Случайная величина X является средним арифметическим из n независимых одинаково распределенных случайных величин, дисперсия каждой из которых равна 5. Воспользовавшись центральной предельной теоремой, оцените, какое число слагаемых n нужно взять для того, чтобы с вероятностью не менее 0,9973 случайная величина X отклонялась от своего среднего не более чем на 0,01.

О т в е т: $n \geqslant 449994$.

13.7. Решите задачу 13.4, воспользовавшись для приближенной оценки искомой вероятности интегральной теоремой Муавра — Лапласа. Сравните полученные результаты.

О т в е т: $\mathsf{P}\{150 \leqslant X \leqslant 250\} \approx 0{,}9999554429$. Сравнивая полученные результаты, видим, что интегральная теорема Муавра — Лапласа дает гораздо более точный ответ.

Семинар 14

Основные понятия выборочной теории

14.1 Теоретические сведения

Определение 14.1. Совокупность независимых случайных величин $X_1, \ldots, X_n$, каждая из которых имеет то же распределение, что и случайная величина X, будем называть ***выборкой*** и записывать $\vec{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$ (иногда просто $X_1, \ldots, X_n$). Число n называют ***объемом выборки***, а случайные величины X_i — ***элементами выборки***. Любое возможное значение $\vec{x}_n = (x_1, \ldots, x_n) = (X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$ выборки $\vec{X}_n$ будем называть ***реализацией выборки*** $\vec{X}_n$.

Для того чтобы подчеркнуть, что речь идет о наблюдении именно случайной величины X, а не какой-нибудь другой, обычно говорят, что $\vec{X}_n$ — выборка из закона распределения X или из распределения X. Если $F(x)$ (или $p(x)$) — функция распределения (или плотность) случайной величины X, говорят, что $\vec{X}_n$ — случайная выборка из $F(x)$ (или из $p(x)$). #

Определение 14.2. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — случайная выборка из распределения X, а $x_1, \ldots, x_n$ — реализация этой выборки. Обозначим через $x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(i)}, \ldots, x_{(n)}$ величины $x_1, \ldots, x_n$, расположенные в неубывающем порядке:

$$x_{(1)} \leqslant x_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant x_{(i)} \leqslant \ldots \leqslant x_{(n)}. \tag{14.1}$$

В частности, $x_{(1)}$ — наименьшее, $x_{(n)}$ — наибольшее из чисел $x_1, \ldots, x_n$.

Обозначим через $X_{(i)}$ случайную величину, которая при каждой реализации $x_1, \ldots, x_n$ выборки $X_1, \ldots, X_n$ принимает значение, равное $x_{(i)}$, $i = \overline{1,n}$.

Последовательность случайных величин $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(i)}, \ldots, X_{(n)}$ называют ***вариационным рядом выборки***. При этом $X_{(i)}$ называют i-м ***членом вариационного ряда выборки***, $i = \overline{1,n}$.

Последовательность чисел $x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(i)}, \ldots, x_{(n)}$, удовлетворяющих условию (14.1), называют ***реализацией вариационного ряда выборки***, число $x_{(i)} = X_{(i)}(\omega)$ называют реализацией i-го ***члена вариационного ряда***, $i = \overline{1,n}$. #

Определение 14.3. Пусть среди наблюдений $x_1, \ldots, x_n$ есть только r различных ($r < n$). Обозначим через $z_{(1)}, \ldots, z_{(r)}$ эти r различных значений, расположенных в порядке возрастания, а через n_k — число повторений значения $z_{(k)}$ среди $x_1, \ldots, x_n$, $k = \overline{1,r}$, $n_1 + \cdots + n_r = n$. ***Статистическим рядом*** выборки называют таблицу 14.1, где в первой строке расположены элементы $z_{(1)}, \ldots, z_{(r)}$, а во второй — числа их повторений $n_1, \ldots, n_r$. Отношение n_k/n называют частотой значения $z_{(k)}$, $k = \overline{1,r}$. #

$z_{(1)}$	$z_{(2)}$	$\ldots$	$z_{(r)}$
n_1	n_2	$\ldots$	n_r

Таблица 14.1.

Определение 14.4. Пусть $X_1,\dots,X_n$ независимые наблюдения случайной величины X с функцией распределения $F(x)$. Обозначим через $n\big(x;\vec{X}_n\big)$ случайную величину, которая для каждого $x\in\mathbb{R}$ и каждой реализации $\vec{x}_n=(x_1,\dots,x_n)$ выборки $\vec{X}_n=(X_1,\dots,X_n)$ принимает значение $n\big(x;\vec{x}_n\big)$, равное числу элементов среди $x_1,\dots,x_n$, меньших x.

Функцию

$$\widehat{F}\big(x;\vec{X}_n\big)=\frac{n(x,\vec{X}_n)}{n},\quad x\in\mathbb{R}, \tag{14.2}$$

будем называть ***выборочной функцией распределения***. #

Определение 14.5. Пусть $x_1,\dots,x_n$ реализация независимых наблюдений случайной величины X. Разобьем промежуток $J=\big[x_{(1)},x_{(n)}\big]$, содержащий все выборочные значения, на несколько непересекающихся полуинтервалов $J_k=\big[x_{(1)},\,x_{(1)}+k\Delta\big)$, $k=1,\dots,m-1$ и отрезок $J_m=\big[x_{(1)},x_{(1)}+m\Delta\big]=\big[x_{(n)}-\Delta,x_{(n)}\big]$ одинаковой длины $\Delta=\big(x_{(n)}-x_{(1)}\big)/m$. Обозначим через n_i число элементов выборки, попавших в i-й промежуток J_i, $i=\overline{1,m}$, $n=n_1+\dots+n_m$. Таблицу 14.2 назовем ***интервальным статистическим рядом***.

J_1	J_2	$\dots$	J_m
n_1	n_2	$\dots$	n_m

Таблица 14.2.

График функции

$$p_n(x)=\begin{cases}\dfrac{n_i}{n\Delta}, & x\in J_i;\\ 0, & x\notin J,\end{cases} \tag{14.3}$$

представляющий собой кусочно постоянную функцию называют ***гистограммой***. #

Замечание 14.1. Число промежутков m, на которые разбивают промежуток J, содержащий все выборочные значения, выбирают в зависимости от объема выборки n. Для ориентировочной оценки величины m можно пользоваться приближенной формулой $m\approx\log_2 n+1$.

Замечание 14.2. Если X — непрерывная случайная величина с плотностью распределения $p(x)$, то при удачном выборе ширины интервалов Δ гистограмма может напоминать график плотности распределения $p(x)$.

Определение 14.6. Пусть $\vec{X}_n$ —независимые наблюдения случайной величины X. Случайную величину

$$\widehat{\mu}_k(\vec{X}_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k \tag{14.4}$$

называют ***выборочным начальным моментом k-го порядка***. В частности, выборочный начальный момент первого порядка $\widehat{\mu}_1(\vec{X}_n)$ называют ***выборочным средним*** и обозначают $\overline{X}$ (реализацию случайной величины $\overline{X}$ будем обозначать $\overline{x}$):

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\qquad \overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i. \tag{14.5}$$

Определение 14.7. Пусть $\vec{X}_n$ —независимые наблюдения случайной величины X. Случайную величину

$$\widehat{\nu}_k(\vec{X}_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\big(X_i-\overline{X}\big)^k \tag{14.6}$$

называют ***выборочным центральным моментом k-го порядка***. В частности, выборочный центральный момент 2-го порядка $\widehat{\nu}_2(\vec{X}_n)$ называют ***выборочной дисперсией*** и обозначают

$\widehat{\sigma}^2(\vec{X}_n)$, а случайную величину $\widehat{\sigma}(\vec{X}_n) = \sqrt{\widehat{\sigma}^2(\vec{X}_n)}$ называют ***выборочным среднеквадратическим отклонением***:

$$\widehat{\sigma}^2(\vec{X}_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2, \qquad (14.7)$$

$$\widehat{\sigma}(\vec{X}_n) = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}. \qquad (14.8)$$

Определение 14.8. Пусть $(X_1,Y_1),\ldots,(X_n,Y_n)$ — независимые наблюдения случайного вектора (X,Y). Случайную величину

$$\widehat{K}(\vec{X}_n,\vec{Y}_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)\left(Y_i - \overline{Y}\right) \qquad (14.9)$$

называют ***выборочной ковариацией***.

Определение 14.9. Пусть $(X_1,Y_1),\ldots,(X_n,Y_n)$ — независимые наблюдения случайного вектора (X,Y). Случайную величину

$$\widehat{\rho}(\vec{X}_n,\vec{Y}_n) = \frac{\widehat{K}(\vec{X}_n,\vec{Y}_n)}{\widehat{\sigma}(\vec{X}_n)\,\widehat{\sigma}(\vec{Y}_n)}, \qquad (14.10)$$

где

$$\widehat{\sigma}^2(\vec{X}_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2, \qquad \widehat{\sigma}^2(\vec{Y}_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2,$$

называют ***выборочным коэффициентом корреляции***. #

Значения выборочных моментов (неслучайные числа) будем для краткости называть теми же терминами, что и сами моменты (случайные величины).

Замечание 14.3. Опираясь на закон больших чисел, можно доказать, что при увеличении объема выборки n перечисленные выше выборочные характеристики сходятся по вероятности к соответствующим теоретическим моментам. В частности, при $n \to \infty$

$$\overline{X} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} \mathsf{M}X, \quad \widehat{\sigma}^2(\vec{X}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{P}} \mathsf{D}X, \quad \widehat{K}(\vec{X}_n,\vec{Y}_n) \to \mathbf{cov}(X,Y), \quad \widehat{\rho}(\vec{X}_n,\vec{Y}_n) \to \rho(X,Y). \quad (14.11)$$

Поэтому, если n велико, то

$$\mathsf{M}X \approx \overline{x}, \quad \mathsf{D}X \approx \widehat{\sigma}^2(\vec{x}_n), \quad \mathbf{cov}(X,Y) \approx \widehat{K}(\vec{x}_n,\vec{y}_n), \quad \rho(X,Y) \approx \widehat{\rho}(\vec{x}_n,\vec{y}_n). \qquad (14.12)$$

Замечание 14.4. Для удобства вместо $\widehat{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ и $\widehat{\sigma}(\vec{x}_n)$ будем писать $\widehat{\sigma}^2$ и $\widehat{\sigma}$ соответственно.

Таким образом

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2, \qquad (14.13)$$

$$\widehat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}. \qquad (14.14)$$

14.2 Решение типовых примеров

Пример 14.1. В результате эксперимента получены $n = 79$ наблюдений случайной величины X:

2; 4; 2; 4; 3; 3; 3; 2; 0; 6; 1; 2; 3; 2; 2;
4; 3; 3; 5; 1; 0; 2; 4; 3; 2; 2; 3; 3; 1; 3;
3; 3; 1; 1; 2; 3; 1; 4; 3; 1; 7; 4; 3; 4; 2;
3; 2; 3; 3; 1; 4; 3; 1; 4; 5; 3; 4; 2; 4; 5;
3; 6; 4; 1; 3; 2; 4; 1; 3; 1; 0; 0; 4; 6; 4;
7; 4; 1; 3.

Построим *статистический ряд*, выборочную функцию распределения и нарисуем ее график, найдем $\overline{x}$, $\widehat{\sigma}^2$, $\widehat{\sigma}$.

Решение: Наименьший элемент выборки (первый член вариационного ряда) $x_{(1)} = 0$, наибольший — $x_{(79)} = 7$. Составим статистический ряд, расположив все элементы выборки в порядке возрастания (табл. 14.3).

$x_{(k)}$	0	1	2	3	4	5	6	7
n_k	4	13	14	24	16	3	3	2

Таблица 14.3

Статистический ряд содержит восемь элементов: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Вычислим частоты n_k/n каждого из элементов статистического ряда:

$$\frac{n_1}{n} = \frac{4}{79} \approx 0{,}0506; \quad \frac{n_2}{n} = \frac{13}{79} \approx 0{,}1646; \quad \frac{n_3}{n} = \frac{14}{79} \approx 0{,}1772; \quad \frac{n_4}{n} = \frac{24}{79} \approx 0{,}3038;$$
$$\frac{n_5}{n} = \frac{16}{79} \approx 0{,}2025; \quad \frac{n_6}{n} = \frac{3}{79} \approx 0{,}0380; \quad \frac{n_7}{n} = \frac{3}{79} \approx 0{,}0380; \quad \frac{n_8}{n} = \frac{2}{79} \approx 0{,}0253;$$

Чтобы найти выборочную функцию распределения, нужно последовательно суммировать частоты:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0{,}0000, & x \leqslant 0; \\ 0{,}0506, & 0 < x \leqslant 1; \\ 0{,}2152, & 1 < x \leqslant 2; \\ 0{,}3924, & 2 < x \leqslant 3; \\ 0{,}6962, & 3 < x \leqslant 4; \\ 0{,}8987, & 4 < x \leqslant 5; \\ 0{,}9367, & 5 < x \leqslant 6; \\ 0{,}9747, & 6 < x \leqslant 7; \\ 1{,}0000, & x > 7. \end{cases}$$

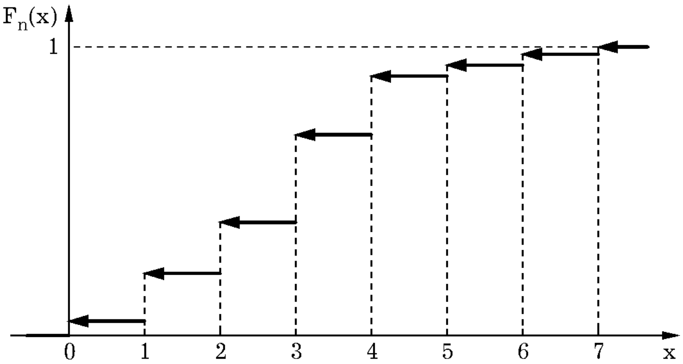

Рис 14.1.

График функции $F_n(x)$ — ступенчатая кривая (14.1).

Учитывая, что элементы выборки повторяются, с помощью формулы (14.5) находим выборочное среднее:

$$\overline{x} = \frac{1}{79}\big(0 \cdot 4 + 1 \cdot 13 + 2 \cdot 14 + 3 \cdot 24 + 4 \cdot 16 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 2\big) \approx 2{,}835. \qquad (14.15)$$

С помощью формулы (14.13) находим выборочную дисперсию

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{79}((0-2{,}84)^2 \cdot 4 + (1-2{,}84)^2 \cdot 13 + (2-2{,}84)^2 \cdot 14 + (3-2{,}84)^2 \cdot 24 +$$
$$+ (4-2{,}84)^2 \cdot 16 + (5-2{,}84)^2 \cdot 3 + (6-2{,}84)^2 \cdot 3 + (7-2{,}84)^2 \cdot 2) \approx 2{,}3668. \qquad (14.16)$$

Поэтому выборочное среднеквадратическое отклонение равно

$$\widehat{\sigma} = \sqrt{\widehat{\sigma}^2} \approx 1{,}54. \qquad (14.17)$$

Пример 14.2. Измерена максимальная емкость 20 подстроечных конденсаторов, результаты измерений (в пикофарадах) приведены в таблице 14.4.

Номер конденсатора	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Емкость, пФ	4,40	4,31	4,40	4,40	4,65	4,56	4,71	4,54	4,36	4,56
Номер конденсатора	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Емкость, пФ	4,31	4,42	4,60	4,35	4,50	4,40	4,43	4,48	4,42	4,45

Таблица 14.4

Составим статистический ряд и построим *гистограмму*.

Р е ш е н и е: Статистический ряд представлен в таблице 14.5. Наименьшее значение выборки $x_{(1)} = 4{,}31$, наибольшее значение $x_{(20)} = 4{,}71$.

$x_{(i)}$	4,31	4,35	4,36	4,40	4,42	4,43	4,45	4,48	4,50	4,54	4,56	4,60	4,65	4,71
n_i	2	1	1	4	2	1	1	1	1	1	2	1	1	1

Таблица 14.5

Для построения гистограммы результаты наблюдений представим в виде *интервального статистического ряда*, разбив отрезок $[4{,}31,\ 4{,}71]$ на пять равных промежутков (см. таблицу 14.6).

J_k	$[4{,}31,\ 4{,}39)$	$[4{,}39,\ 4{,}47)$	$[4{,}47,\ 4{,}55)$	$[4{,}55,\ 4{,}63)$	$[4{,}63,\ 4{,}71]$
n_k	4	8	3	3	2

Таблица 14.6

Длина Δ каждого полученного промежутка равна 0,08. Определим выборочную плотность распределения $p_n(x)$, используя формулу 14.3:

$$p_n(x) = \begin{cases} \frac{4}{20\cdot 0{,}08} = 2{,}500, & x \in [4{,}31, 4{,}39); \\ \frac{8}{20\cdot 0{,}08} = 5{,}000, & x \in [4{,}39, 4{,}47); \\ \frac{3}{20\cdot 0{,}08} = 1{,}875, & x \in [4{,}47, 4{,}55); \\ \frac{3}{20\cdot 0{,}08} = 1{,}875, & x \in [4{,}55, 4{,}63); \\ \frac{2}{20\cdot 0{,}08} = 1{,}250, & x \in [4{,}63, 4{,}71]; \\ 0, & x \notin [4{,}31, 4{,}71]. \end{cases}$$

График функции $p_n(x)$ (гистограмма) представлен на рис. 14.2.

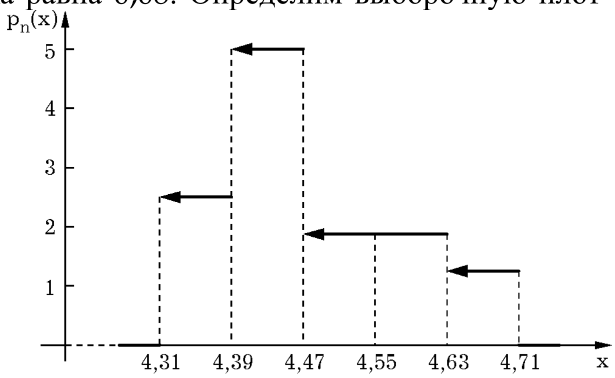

Рис 14.2.

Пример 14.3. В результате эксперимента получены $n = 20$ наблюдений случайного вектора $(X;Y)$:

$$\begin{array}{llll} (1365, 0{,}28); & (1375, 0{,}38); & (1375, 0{,}42); & (1375, 0{,}31); \\ (1405, 0{,}33); & (1410, 0{,}47); & (1410, 0{,}60); & (1420, 0{,}47); \\ (1425, 0{,}50); & (1415, 0{,}66); & (1440, 0{,}65); & (1385, 0{,}37); \\ (1390, 0{,}53); & (1395, 0{,}38); & (1450, 0{,}85); & (1450, 0{,}93); \\ (1455, 0{,}60); & (1475, 1{,}68); & (1480, 1{,}45); & (1485, 1{,}80). \end{array}$$

Найдем значение *выборочной ковариации* (см. 14.9).

$$\widehat{K}(\vec{x}_n,\vec{y}_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) \tag{14.18}$$

Р е ш е н и е: По выборке

$$1365;\ 1375;\ 1375;\ 1375;\ 1405;\ 1410;\ 1410;\ 1420;\ 1425;\ 1415;$$
$$1440;\ 1385;\ 1390;\ 1395;\ 1450;\ 1450;\ 1455;\ 1475;\ 1480;\ 1485$$

находим

$$\overline{x} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} x_i = 1419.$$

По выборке

$$0{,}28;\ 0{,}38;\ 0{,}42;\ 0{,}31;\ 0{,}33;\ 0{,}47;\ 0{,}60;\ 0{,}47;\ 0{,}50;\ 0{,}66;$$
$$0{,}65;\ 0{,}37;\ 0{,}53;\ 0{,}38;\ 0{,}85;\ 0{,}93;\ 0{,}60;\ 0{,}68;\ 1{,}45;\ 1{,}80$$

находим

$$\overline{y} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} y_i = 0{,}683 \approx 0{,}68.$$

В результате получаем

$$\begin{aligned}\widehat{K}(\vec{x}_n,\vec{y}_n) \approx \frac{1}{20}\Big(&(1365-1419)(0{,}28-0{,}68)+(1375-1419)(0{,}38-0{,}68)+\\
&+(1375-1419)(0{,}42-0{,}68)+(1375-1419)(0{,}31-0{,}68)+\\
&+(1405-1419)(0{,}33-0{,}68)+(1410-1419)(0{,}47-0{,}68)+\\
&+(1410-1419)(0{,}60-0{,}68)+(1420-1419)(0{,}47-0{,}65)+\\
&+(1425-1419)(0{,}50-0{,}68)+(1415-1419)(0{,}66-0{,}68)+\\
&+(1440-1419)(0{,}65-0{,}68)+(1385-1419)(0{,}37-0{,}68)+\\
&+(1390-1419)(0{,}53-0{,}68)+(1395-1419)(0{,}38-0{,}68)+\\
&+(1450-1419)(0{,}85-0{,}68)+(1450-1419)(0{,}93-0{,}68)+\\
&+(1455-1419)(0{,}60-0{,}68)+(1475-1419)(1{,}68-0{,}68)+\\
&+(1480-1419)(1{,}45-0{,}68)+(1485-1419)(1{,}80-0{,}68)\Big) \approx 10{,}955.\end{aligned}$$

14.3 Вопросы и задачи

14.1. По результатам измерений имеем наблюдения 2781, 2836, 2807, 2763, 2858 случайной величины X. Составьте вариационный ряд, постройте эмпирическую функцию распределения и ее график. Вычислите $\overline{x}$, $\widehat{\sigma}^2$.
О т в е т: $\overline{x} = 2809$; $\widehat{\sigma}^2 = 1206{,}8$.

14.2. Докажите, что имеет место равенство

$$\widehat{\sigma}^2(\vec{X}_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\overline{X})^2.$$

14.3. По результатам измерений получены наблюдения случайной величины X:

3,7;	6,2;	5,2;	5,7;	6,2;	4,7;	4,2;	6,7;
7,2;	5,2;	6,2;	4,7;	7,2;	5,2;	4,7;	5,7;
5,2;	4,7;	5,2;	5,7;	4,2;	6,7;	5,2;	6,2;
5,7;	6,7;	5,2;	5,7;	5,2;	4,2;	5,2;	4,7;
5,7;	4,2;	5,2;	6,2;	5,7;	6,2;	5,7;	4,2;
5,2;	5,7;	4,2;	5,2;	6,2;	7,2;	5,2;	4,7;
5,7;	6,2;	5,2;	4,7;	5,7;	6,7;	7,2;	6,7;
7,2;	3,7;	7,7;	3,2;	3,7;	7,7;	5,2;	4,7.

Составьте статистический ряд, постройте гистограмму, выборочную функцию распределения и ее график. Вычислите значения числовых характеристик $\overline{x}$, $\widehat{\sigma}^2$, $\widehat{\sigma}$.
Ответ: $\overline{x} = 5{,}73$; $\widehat{\sigma}^2 = 1{,}187$; $\widehat{\sigma} = 1{,}06$.

14.4. В результате эксперимента получены $n = 60$ наблюдений случайного вектора $(X;Y)$ (данные приведены в таблице 14.7). Найдите значение выборочного коэффициента корреляции.

	4100	4300	4500	4700	4900	5100	5300	5500
6,75		1						
6,25	1	2	2	1				
5,75		1	3	4	2	3		
5,25		3	5	7	1	1		
4,75			2	5	5	3	2	
4,25					1	2	2	
3,75								1

Таблица 14.7

Ответ: $\widehat{\rho} = 0{,}63$.

Семинар 15

Точечные оценки

15.1 Теоретические сведения

Определение 15.1. Пусть $\vec{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$ независимые наблюдения случайной величины X, функция распределения которой $F(x;\theta)$ известна с точностью до вектора параметров $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_r)$.

Обозначим $\mu_k(\theta) = \mathsf{M}(X^k)$, $\nu_k(\theta) = \mathsf{M}\left((X - \mathsf{M}X)^k\right)$ соответственно начальный и центральный моменты порядка k, а $\widehat{\mu}_k(\vec{X}_n)$ и $\widehat{\mu}_k(\vec{X}_n)$ соответственно выборочный начальный и центральный моменты порядка k, $k = 1,2,\ldots$.

Оценкой $\widehat{\theta}(\vec{X}_n) = (\widehat{\theta}_1(\vec{X}_n), \ldots, \widehat{\theta}_r(\vec{X}_n))$ ***параметра*** θ ***методом моментов*** назовем решение любой системы из r уравнений вида

$$\begin{cases} \widehat{\mu}_{i_\alpha}(\vec{X}_n) = \mu_{i_\alpha}(\theta), & \alpha = \overline{1,k}, \\ \widehat{\nu}_{j_\beta}(\vec{X}_n) = \nu_{j_\beta}(\theta), & \beta = \overline{1,l}, \end{cases}, \qquad k + l = r, \tag{15.1}$$

относительно неизвестных $\theta_1, \ldots, \theta_r$. Индексы i_α и j_β выбирают таким образом, чтобы эта система уравнений решалась как можно проще (обычно так бывает, если i_α и j_β невелики, например 1, 2 и т.д.). #

Определение 15.2. Пусть $\vec{X}_n$ — независимые наблюдения случайной величины X. Если X непрерывна, что через $P\big(x;\theta\big)$ обозначим ее плотность $p\big(x;\theta\big)$, а если X дискретна, то по определению положим $P\big(x;\theta\big) = \mathsf{P}\{X = x\}$ для любого $x \in \mathbb{R}$:

$$P\big(x;\theta\big) = \begin{cases} p\big(x;\theta\big), & \text{если } X \text{ непрерывная случайная величина;} \\ \mathsf{P}\{X = x\}, & \text{если } X \text{ дискретная случайная величина.} \end{cases} \tag{15.2}$$

Оценкой максимального правдоподобия $\widehat{\theta}(\vec{X}_n)$ параметра θ называют точку максимума функции $L(\vec{X}_n;\theta)$, которая определяется равенством

$$L(\vec{X}_n;\theta) = \prod_{i=1}^{n} P\big(X_i;\theta\big), \tag{15.3}$$

рассматривается как функция от θ при фиксированных $X_1, \ldots, X_n$ и называется ***функцией правдоподобия***. #

Если функция $L(\vec{X}_n;\theta)$ дифференцируема как функция аргумента θ при любом $\vec{X}_n$ и максимум $L(\vec{X}_n;\theta)$ достигается во внутренней точке из Θ, то оценка максимального правдоподобия в случае скалярного параметра $\theta \in \mathbb{R}$ удовлетворяет уравнению (необходимому условию экстремума)

$$\frac{dL(\vec{X}_n;\theta)}{d\theta} = 0, \tag{15.4}$$

а в случае векторного параметра $\theta \in \mathbb{R}^r$ — системе уравнений

$$\frac{\partial L\left(\vec{X}_n;\theta\right)}{\partial \theta_k} = 0, \quad k = \overline{1,r}. \tag{15.5}$$

Замечание 15.1. С целью облегчения нахождения оценок максимального правдоподобия уравнение (15.4) обычно заменяется уравнением

$$\frac{dl(\vec{X}_n;\theta)}{d\theta} = 0, \tag{15.6}$$

а система (15.5) — системой

$$\frac{\partial l\left(\vec{X}_n;\theta\right)}{\partial \theta_k} = 0, \quad k = \overline{1,r}. \tag{15.7}$$

где $l(\vec{X}_n;\theta) = \ln L(\vec{X}_n;\theta) = \sum\limits_{i=1}^{n} \ln p\left(X_i;\theta\right)$ — логарифмическая функция правдоподобия.

Замечание 15.2. Так как $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, то $n\overline{X} = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Поэтому в дальнейшем вместо громоздкого выражения $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ нередко будем писать более компактное выражение $n\overline{X}$.

Определение 15.3. Функция

$$\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt, \qquad p > 0, \tag{15.8}$$

называется ***гамма-функцией***.

Известно, что $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ и $\Gamma(n) = (n-1)!$ для $n \in \mathbb{N}$.

15.2 Решение типовых примеров

Пример 15.1. Пусть случайная величина X имеет *гамма-распределение* с плотностью

$$p(x,\lambda,\alpha) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0; \\ \quad 0, & x < 0, \end{cases} \tag{15.9}$$

где λ и α — два неизвестных параметра.

Найдем с помощью метода моментов оценки неизвестных параметров λ и α по независимым наблюдениям $\vec{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$ случайной величины X.

Решение:

Используя определение *гамма-функции*

$$\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt, \tag{15.10}$$

а также рекуррентное соотношение $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, получим следующие выражения для первых двух начальных моментов и дисперсии:

$$\mu_1 = \mathsf{M}X = \int\limits_0^\infty \frac{\lambda^\alpha x^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x} dx = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\lambda} = \frac{\alpha}{\lambda}, \tag{15.11}$$

$$\mu_2 = \int\limits_0^\infty \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x} dx = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha)\lambda^2} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}, \tag{15.12}$$

$$\nu_2 = \mathsf{D}X = \mathsf{M}(X^2) - (\mathsf{M}X)^2 = \mu_2 - \mu_1^2 = \frac{\alpha}{\lambda^2}. \tag{15.13}$$

Система уравнений

$$\begin{cases} \mu_1 = \widehat{\mu}_1(\vec{X}_n), \\ \nu_2 = \widehat{\nu}_2(\vec{X}_n), \end{cases} \tag{15.14}$$

будет иметь вид

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha}{\lambda} = \overline{X}, \\ \dfrac{\alpha}{\lambda^2} = \widehat{\sigma}^2(\vec{X}_n), \end{cases} \tag{15.15}$$

решая которую, получим

$$\lambda = \frac{\overline{X}}{\widehat{\sigma}^2(\vec{X}_n)}, \qquad \alpha = \left(\frac{\overline{X}}{\widehat{\sigma}(\vec{X}_n)}\right)^2. \tag{15.16}$$

Следовательно, оценками неизвестных параметров будут

$$\widehat{\lambda}(\vec{X}_n) = \frac{\overline{X}}{\widehat{\sigma}^2(\vec{X}_n)}, \qquad \widehat{\alpha}(\vec{X}_n) = \left(\frac{\overline{X}}{\widehat{\sigma}(\vec{X}_n)}\right)^2. \tag{15.17}$$

Пример 15.2. Пусть X — случайная величина, имеющая распределение Бернулли с параметром p, т.е. X принимает значения 1 и 0 с вероятностями p и $1-p$ соответственно.

Решение: Найдем с помощью метода моментов оценку параметра p по n независимым наблюдениям $\vec{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$ случайной величины X.

Выборкой $\vec{X}_n$ в данном случае являются n дискретных случайных величин $X_1, \ldots, X_n$, каждая из которых принимает значение 1 с вероятностью p и 0 с вероятностью $1-p$.

Так как $\mathsf{M}X = p$, то уравнение $\mu_1 = \mu_1(\vec{X}_n)$ имеет вид $p = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

Следовательно, $\widehat{p}(\vec{X}_n) = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Если n наблюдений случайной величины X трактовать как n испытаний Бернулли с вероятностью успеха p, то точечной оценкой параметра p является частота успехов (доля успехов) в этих n испытаниях.

Пример 15.3. Пусть X — экспоненциальная случайная величина с параметром λ. Найдем оценку максимального правдоподобия параметра λ по n независимым наблюдениям $\vec{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$ случайной величины X.

Решение: Плотность случайной величины X имеет вид

$$p(x,\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases} \tag{15.18}$$

Заметим, что так как $p(x,\lambda) = 0$ для всех $x < 0$, то все наблюдения X_i неотрицательны, $i = 1, \ldots, n$. Поэтому $p(X_i,\lambda) = \lambda e^{-\lambda X_i}$ для всех $i = 1, \ldots, n$ и

$$L(\vec{X}_n; \lambda) = \prod_{i=1}^{n} p(X_i,\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda X_i}, \tag{15.19}$$

$$l(\vec{X}_n; \lambda) = \ln L(\vec{X}_n; \lambda) = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\lambda e^{-\lambda X_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} (\ln\lambda - \lambda X_i) = n\ln\lambda - \lambda\sum_{i=1}^{n} X_i. \tag{15.20}$$

Следовательно,

$$\frac{dl(\vec{X}_n; \lambda)}{d\lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} X_i, \tag{15.21}$$

и уравнение правдоподобия (15.6) имеет вид

$$\frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} X_i = 0, \tag{15.22}$$

решая которое получим, что

$$\lambda = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^{-1} = \frac{1}{\overline{X}}. \tag{15.23}$$

Далее, дифференцируя $l(\vec{X}_n; \lambda)$ дважды и учитывая, что $n > 0$, найдем, что

$$\frac{d^2 l(\vec{X}_n; \lambda)}{d\lambda^2} = -\frac{n}{\lambda^2} < 0 \tag{15.24}$$

для всех λ, в частности для $\lambda = 1/\overline{X}$. Поэтому $1/\overline{X}$ является точкой максимума функции (15.28), а не точкой минимума или точкой перегиба.

Таким образом, точечной оценкой неизвестного параметра λ является $\widehat{\lambda}(\vec{X}_n) = 1/\overline{X}$.

Если учесть, что для экспоненциальной случайной величины $\mathsf{M}X = 1/\lambda$, а наилучшей оценкой $\mathsf{M}X$ является *выборочное среднее* $\overline{X}$, то полученный ответ представляется вполне естественным.

Пример 15.4. Пусть X — пуассоновская случайная величина с параметром λ, т.е.

$$\mathsf{P}\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \qquad k = 0,1,2,\ldots. \tag{15.25}$$

Найдем оценку максимального правдоподобия параметра λ по n независимым наблюдениям $\vec{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$ случайной величины X.

Р е ш е н и е: Согласно определению метода максимального правдоподобия для дискретной случайной величины и определению пуассоновской случайной величины

$$P(x,\lambda) = \mathsf{P}\{X = x\} = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}. \tag{15.26}$$

Поэтому

$$L(\vec{X}_n; \lambda) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i,\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{X_i}}{X_i!}e^{-\lambda}, \tag{15.27}$$

$$l(\vec{X}_n;\lambda) = \ln L(\vec{X}_n;\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{\lambda^{X_i}}{X_i!}e^{-\lambda}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(X_i \ln\lambda - \ln(X_i!) - \lambda\right). \tag{15.28}$$

Следовательно,

$$\frac{dl(\vec{X}_n;\lambda)}{d\lambda} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\lambda}X_i - 0 - 1\right) = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} X_i - 0 - n, \tag{15.29}$$

и уравнение правдоподобия (15.6) имеет вид

$$\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} X_i - n = 0, \tag{15.30}$$

решая которое получим, что

$$\lambda = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}. \tag{15.31}$$

Далее, дифференцируя $l(\vec{X}_n;\lambda)$ дважды и учитывая, что $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i > 0$ (наблюдения X_i пуассоновской случайной величины неотрицательны), найдем, что

$$\frac{d^2 l(\vec{X}_n;\lambda)}{d\lambda^2} = -\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{\lambda^2} < 0 \tag{15.32}$$

для всех λ, в частности для $\lambda = \overline{X}$. Поэтому $\overline{X}$ является точкой максимума функции (15.28), а не точкой минимума или точкой перегиба.

Таким образом, точечной оценкой неизвестного параметра λ является $\widehat{\lambda}(\vec{X}_n) = \overline{X}$.

Если учесть, что для пуассоновской случайной величины $\mathsf{M}X = \lambda$, а наилучшей оценкой $\mathsf{M}X$ является *выборочное среднее* $\overline{X}$, то полученный ответ представляется вполне естественным.

Пример 15.5. Пусть X — биномиальная случайная величина с параметрами p и m, т.е. X — число успехов в m испытаниях Бернулли с вероятностью успеха p:

$$\mathsf{P}\{X = k\} = C_m^k p^k (1-p)^{m-k}, \qquad k = 0,1,2,\ldots,m. \tag{15.33}$$

Предполагая параметр m известным, найдем оценку максимального правдоподобия параметра p по n независимым наблюдениям $\vec{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$ случайной величины X.

Решение: Согласно определению метода максимального правдоподобия для дискретной случайной величины и определению биномиальной случайной величины

$$P(x,p) = \mathsf{P}\{X = x\} = C_m^x p^x (1-p)^{m-x}. \tag{15.34}$$

Поэтому

$$L(\vec{X}_n;p) = \prod_{i=1}^{n} C_m^{X_i} p^{X_i} (1-p)^{m-X_i}. \tag{15.35}$$

Заменяя громоздкое выражение $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ более компактным $n\overline{X}$, получим

$$l(\vec{X}_n; p) = \ln L(\vec{X}_n; p) = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(C_m^{X_i} p^{X_i} (1-p)^{m-X_i}\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\ln C_m^{X_i} + X_i \ln p + (m - X_i)\ln(1-p)\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \ln C_m^{X_i} + \ln p \sum_{i=1}^{n} X_i + \ln(1-p)\sum_{i=1}^{n}(m - X_i) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \ln C_m^{X_i} + n\overline{X}\ln p + (nm - n\overline{X})\ln(1-p). \quad (15.36)$$

Следовательно,

$$\frac{dl(\vec{X}_n; p)}{dp} = 0 + n\overline{X}\frac{1}{p} - (nm - n\overline{X})\frac{1}{1-p}. \quad (15.37)$$

Решая относительно p уравнение

$$n\overline{X}\frac{1}{p} - (nm - n\overline{X})\frac{1}{1-p} = 0, \quad (15.38)$$

получим, что $p = \overline{X}/m$.

Заметим, что среднее арифметическое наблюдений $\overline{X}$ не превышает максимально возможного значения случайной величины, т.е. $\overline{X} \leqslant m$. Кроме того, из неравенств $X_i \geqslant 0$ для всех $i = 1,\ldots,n$ вытекает, что $\overline{X} \geqslant 0$. Дифференцируя $l(\vec{X}_n; \lambda)$ дважды и учитывая, что $\overline{X} \leqslant m$, $\overline{X} \geqslant 0$ и $n > 0$, найдем, что

$$\frac{d^2 l(\vec{X}_n; p)}{d\lambda^2} = -\frac{n\overline{X}}{p^2} - \frac{n(m - \overline{X})}{(1-p)^2} < 0 \quad (15.39)$$

для всех p, в частности для $p = \overline{X}/m$. Поэтому $\overline{X}/m$ является точкой максимума функции (15.36), а не точкой минимума или точкой перегиба.

Таким образом, точечной оценкой неизвестного параметра p является $\widehat{p} = \overline{X}/m$.

15.3 Вопросы и задачи

15.1. Пусть X — геометрическая случайная величина, т.е.

$$\mathsf{P}\{X = k\} = p(1-p)^{k-1}, \qquad k = 1,2,\ldots. \quad (15.40)$$

Другими словами, X — число испытаний до появления первого успеха в схеме Бернулли с вероятностью успеха p.

Найдите по независимым наблюдениям $\vec{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$ случайной величины X методом максимального правдоподобия точечную оценку параметра p.

Ответ: $\widehat{p}(\vec{X}_n) = 1/\overline{X}$.

15.2. Пусть X — случайная величина с плотностью

$$p(x) = \frac{1}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)} x^{\alpha} e^{-x/\beta}, \quad \alpha > -1,\ \beta > 0,\ x \geqslant 0. \quad (15.41)$$

Предполагая параметр α известным, найдите методом максимального правдоподобия по независимым наблюдениям $\vec{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$ случайной величины X точечную оценку параметра β.
Ответ: $\widehat{\beta}(\vec{X}_n) = \frac{\overline{X}}{\alpha+1}$.
15.3. Пусть X — случайная величина с плотностью

$$p(x) = \frac{\alpha^k x^{k-1} e^{-\alpha x}}{\Gamma(k)}, \quad x > 0, \tag{15.42}$$

где k — известный параметр, а α — неизвестный. Найдите с помощью метода максимального правдоподобия оценку параметра α.
Ответ: $\widehat{\alpha}(\vec{X}_n) = k/\overline{X}$.

Семинар 16

Интервальное оценивание

16.1 Теоретические сведения

16.1.1 Доверительный интервал для математического ожидания нормальной случайной величины с известной дисперсией

Пусть $\vec{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$ — независимые наблюдения нормальной случайной величины X с неизвестным математическим ожиданием μ и известной дисперсией σ^2,

$$\overline{X} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i,$$

$u_{\frac{1+\gamma}{2}}$ — квантиль уровня $\frac{1+\gamma}{2}$ стандартного нормального распределения.

Доверительный интервал уровня доверия γ для математического ожидания μ нормальной случайной величины с известной дисперсией σ^2 имеет вид

$$\left(\overline{X} - u_{\frac{1+\gamma}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \overline{X} + u_{\frac{1+\gamma}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right). \tag{16.1}$$

Наименьшее количество наблюдений n, позволяющих оценить μ с точностью ε (т.е. $|\overline{X} - \mu| \leqslant \varepsilon$) и надежностью γ определяется неравенством

$$n \geqslant \left(\frac{u_{\frac{1+\gamma}{2}}\sigma}{\varepsilon}\right)^2. \tag{16.2}$$

16.1.2 Доверительный интервал для математического ожидания нормальной случайной величины с неизвестной дисперсией

Пусть $\vec{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$ — независимые наблюдения нормальной случайной величины X с неизвестным математическим ожиданием μ и неизвестной дисперсией σ^2,

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad S^2(\vec{X}_n) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2,$$

$t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)$ — квантиль уровня $\frac{1+\gamma}{2}$ распределения Стьюдента с $n-1$ степенями свободы.

Доверительный интервала уровня доверия γ для математического ожидания μ нормальной случайной величины с неизвестной дисперсией σ^2 имеет вид

$$\left(\overline{X} - t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)\frac{S(\vec{X}_n)}{\sqrt{n}}, \quad \overline{\mu}(\vec{X}_n) = \overline{X} + t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)\frac{S(\vec{X}_n)}{\sqrt{n}}\right). \tag{16.3}$$

16.1.3 Доверительные интервалы для дисперсии и среднеквадратического отклонения нормальной случайной величины с неизвестным математическим ожиданием

Пусть $\vec{X}_n = (X_1,\dots,X_n)$ — независимые наблюдения нормальной случайной величины X с неизвестным математическим ожиданием μ и неизвестной дисперсией σ^2,

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad S^2(\vec{X}_n) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2,$$

$\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)$ и $\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)$ — квантили уровней $\frac{1-\gamma}{2}$ и $\frac{1+\gamma}{2}$ соответственно χ^2-распределения с $n-1$ степенью свободы.

Доверительный интервала уровня доверия γ для дисперсии σ^2 нормальной случайной величины с неизвестным математическим ожиданием μ имеет вид

$$\left(\frac{(n-1)S^2(\vec{X}_n)}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)}, \quad \frac{(n-1)S^2(\vec{X}_n)}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)}\right). \tag{16.4}$$

Доверительный интервала уровня доверия γ для среднеквадратического отклонения σ нормальной случайной величины с неизвестным математическим ожиданием μ имеет вид

$$\left(\sqrt{\frac{(n-1)S^2(\vec{X}_n)}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)}}, \quad \sqrt{\frac{(n-1)S^2(\vec{X}_n)}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)}}\right). \tag{16.5}$$

16.1.4 Доверительный интервал для разности математических ожиданий нормальных случайных величин с известными дисперсиями

Пусть $\vec{X}_m = (X_1,\dots,X_m)$ и $\vec{Y}_n = (Y_1,\dots,Y_n)$ — две независимые выборки соответственно из распределений $\mathcal{N}(\mu_1,\sigma_1^2)$ и $\mathcal{N}(\mu_2,\sigma_2^2)$ с неизвестными математическими ожиданиями μ_1 и μ_2 и известными дисперсиями σ_1^2 и σ_2^2,

$$\overline{X} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i, \quad \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i,$$

$u_{\frac{1+\gamma}{2}}$ — квантиль уровня $\frac{1+\gamma}{2}$ стандартного нормального распределения.

Доверительный интервала уровня доверия γ для разности математических ожиданий μ_1 и μ_2 нормальных случайных величин с известными дисперсиями σ_1^2 и σ_2^2 имеет вид

$$\left(\overline{X} - \overline{Y} - u_{\frac{1+\gamma}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}, \quad \overline{X} - \overline{Y} + u_{\frac{1+\gamma}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}\right). \tag{16.6}$$

16.1.5 Доверительный интервал для разности математических ожиданий нормальных случайных величин с неизвестными, но равными дисперсиями

Пусть $\vec{X}_m = (X_1,\dots,X_m)$ и $\vec{Y}_n = (Y_1,\dots,Y_n)$ — две независимые выборки соответственно из распределений $\mathcal{N}(\mu_1,\sigma^2)$ и $\mathcal{N}(\mu_2,\sigma^2)$ с неизвестными математическими ожиданиями μ_1 и μ_2 и неизвестной дисперсией σ^2. Обозначим

$$\overline{X} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i, \quad S^2(\vec{X}_m) = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_i - \overline{X})^2,$$

$$\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i, \quad S^2(\vec{Y}_n) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2,$$

$$S(\vec{X}_m,\vec{Y}_n) = \sqrt{\frac{(m-1)S^2(\vec{X}_n) + (n-1)S^2(\vec{Y}_n)}{m+n-2}},$$

$t_{\frac{1+\gamma}{2}}(m+n-2)$ — квантиль уровня $\frac{1+\gamma}{2}$ распределения Стьюдента с $m+n-2$ степенями свободы.

Доверительный интервала уровня доверия γ для разности математических ожиданий μ_1 и μ_2 нормальных случайных величин с неизвестными, но равными дисперсиями имеет вид

$$\left(\overline{X} - \overline{Y} - t_{\frac{1+\gamma}{2}}(m+n-2)S(\vec{X}_m,\vec{Y}_n)\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}, \overline{X} - \overline{Y} + t_{\frac{1+\gamma}{2}}(m+n-2)S(\vec{X}_m,\vec{Y}_n)\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}\right). \tag{16.7}$$

16.1.6 Приближенный доверительный интервал для вероятности успеха в схеме Бернулли

Пусть S_n — число успехов в n испытаниях Бернулли с неизвестной вероятностью успеха p и вероятностью неудачи $q = 1 - p$. Обозначим через $\hat{p} = S_n/n$ и $\hat{q} = 1 - \hat{p}$ соответственно доли успехов и неудач в n испытаниях, $u_{\frac{1+\gamma}{2}}$ — квантиль уровня $\frac{1+\gamma}{2}$ стандартного нормального распределения.

Приближенный доверительный интервал уровня доверия γ для вероятности успеха p в схеме Бернулли имеет вид

$$\left(\hat{p} - u_{\frac{1+\gamma}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \quad \hat{p} + u_{\frac{1+\gamma}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right) \tag{16.8}$$

Замечание 16.1. При вычислении значений границ доверительных интервалов в формулы (16.1)–(16.8) вместо случайных величин будем подставлять их значения, вычисленные по конкретным наблюдениям (по заданным реализациям случайных выборок), взятым из условий задач. Такое отождествление случайные величины с их значениями не должно привести к путанице.

16.2 Решение типовых примеров

Пример 16.1. В таблице 16.1 даны результаты 126 измерений глубины озера при помощи прибора, ошибки измерения которого являются нормальными и не содержат систематической составляющей. Нужно построить доверительные интервалы уровней доверия 0,9 и 0,99 для неизвестной глубины.

381	388	384	418	373	364	376	383	432	428	413	412	395	420
440	440	409	406	416	418	398	371	391	421	421	425	400	391
413	385	425	423	421	431	429	411	418	429	418	449	380	347
390	382	430	372	430	437	407	402	400	429	380	456	418	411
385	405	363	404	369	340	421	358	422	373	399	391	373	418
418	383	412	382	383	428	409	397	427	430	395	410	400	405
392	376	433	363	365	395	393	377	392	379	394	410	385	370
388	399	389	362	382	382	384	415	378	375	395	388	361	399
384	375	372	427	385	410	378	392	398	398	389	403	388	429

Таблица 16.1

Р е ш е н и е: Нужно по наблюдениям, приведенным в таблице, построить доверительный интервал (16.3) для математического ожидания нормальной случайной случайной величины с неизвестной дисперсией.

Находим $n = 126$, $\sqrt{n} \approx 11.22497216$, $\overline{x} \approx 399.0952381$, $S^2(\vec{x}_n) \approx 516.678857142856$, $S(\vec{x}_n) \approx 22.7305709814526$.

Далее рассмотрим два случая, соответствующие уровням доверия 0,9 и 0,99.

1) Пусть $\gamma = 0.9$, тогда $(1+\gamma)/2 = 0.95$. Используя таблицу квантилей распределения Стьюдента находим квантиль

$$t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) = t_{0.95}(125) \approx 1.657135178.$$

Следовательно

$$\overline{x} - t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)\frac{S(\vec{x}_n)}{\sqrt{n}} \approx 399.0952381 - \frac{1.657135178 \cdot 22.7305709814526}{11.22497216} \approx 395.740,$$

$$\overline{x} + t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)\frac{S(\vec{x}_n)}{\sqrt{n}} \approx 399.0952381 + \frac{1.657135178 \cdot 22.7305709814526}{11.22497216} \approx 402.451.$$

Доверительный интервал уровня доверия 0.9 имеет вид $(395.740, 402.451)$.

2) Пусть теперь $\gamma = 0.99$. Тогда $(1+\gamma)/2 = 0.995$,

$$t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) = t_{0.995}(125) \approx 2.615733377,$$

$$\overline{x} - t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)\frac{S(\vec{x}_n)}{\sqrt{n}} \approx 399.0952381 - \frac{2.615733377 \cdot 22.7305709814526}{11.22497216} \approx 393.798,$$

$$\overline{x} + t_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)\frac{S(\vec{x}_n)}{\sqrt{n}} \approx 399.0952381 + \frac{2.615733377 \cdot 22.7305709814526}{11.22497216} \approx 404.392.$$

Доверительный интервал уровня доверия 0.99 имеет вид $(393.798, 404.392)$.

Видно, что при прочих равных условиях доверительный интервал уровня доверия 0.99 шире доверительного интервала уровня доверия 0.9. Из этого можно сделать два вывода. Во-первых, этот факт согласуется с интуитивным представлением о том, что чем более расплывчатым является прогноз, тем с большей вероятностью от сбудется. Во-вторых, бессмысленно увеличивать уровень доверия γ практически до единицы, поскольку в этом случае доверительный интервал будет очень широким и, следовательно, неинформативным.

Пример 16.2. В условиях примера 16.1 построить доверительный интервал уровня доверия 0,95 для дисперсии и для среднеквадратического отклонения ошибки измерения.

Решение: Нужно построить доверительный интервал (16.4) для дисперсии нормальной случайной случайной величины с неизвестным математическим ожиданием.

Находим $n = 126$, $\sqrt{n} \approx 11.22497216$, $S^2(\vec{x}_n) \approx 516.678857142856$.

Далее, т.к. $\gamma = 0.95$, то $(1-\gamma)/2 = 0.025$, $(1+\gamma)/2 = 0.975$. Используя таблицу квантилей χ^2-распределения находим квантиль

$$\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1) = \chi^2_{0.025}(125) \approx 95.94572517, \quad \chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1) = \chi^2_{0.975}(125) \approx 157.8385032.$$

Следовательно, левая граница интервала имеет вид

$$\frac{(n-1)S^2(\vec{X}_n)}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)} \approx \frac{125 \cdot 516.678857142856}{157.8385032} \approx 409.183157679976,$$

а правая граница интервала имеет вид

$$\frac{(n-1)S^2(\vec{X}_n)}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)} \approx \frac{125 \cdot 516.678857142856}{95.94572517} \approx 673.139496610436.$$

Таким образом, доверительный интервал уровня доверия 0.95 для дисперсии σ^2 нормальной случайной величины с неизвестным математическим ожиданием μ имеет вид

$$(409.183, \quad 673.139). \tag{16.9}$$

Извлекая согласно (16.5) квадратный корень из границ интервала (16.9) получим, что доверительный интервал уровня доверия 0.95 для среднеквадратического отклонения σ нормальной случайной величины с неизвестным математическим ожиданием μ имеет вид

$$(20.228, \quad 25.945). \tag{16.10}$$

Пример 16.3. Предположим, что в условиях примера 16.1 известна дисперсия ошибки измерения (можно считать, что она взята из технического паспорта прибора), которая равна $\sigma^2 = 516.678857142856$. Построим доверительный интервал уровня доверия 0,9 для неизвестной глубины и сравним его с доверительным интервалом уровня доверия 0,9 из примера 16.1.

Решение: Заметим, что данные этого примера практически идентичны данным примера 16.1. Отличие заключается лишь в том, что в этом примере число 516.678857142856 — это дисперсия, а в примере 16.1 — оценка дисперсии. Выясним как сам факт о наличии дополнительной информации (дисперсия уже известна, ее не нужно оценивать) влияет на точность доверительного оценивания.

Поскольку дисперсия известна, то нужно построить доверительный интервал (16.1) для математического ожидания нормальной случайной случайной величины с известной дисперсией.

Находим $n = 126$, $\sqrt{n} \approx 11.22497216$, $\bar{x} \approx 399.0952381$, $\sigma^2 \approx 516.678857142856$, $\sigma \approx 22.7305709814526$.

Далее, т.к. $\gamma = 0.9$, то $(1+\gamma)/2 = 0.95$. Используя таблицу квантилей стандартного нормального распределения находим квантиль

$$u_{\frac{1+\gamma}{2}} = u_{0.95} \approx 1.644853627,$$

$$\overline{x} - u_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx 399.0952381 - \frac{1.644853627 \cdot 22.7305709814526}{11.22497216} \approx 395.764,$$

$$\overline{x} + u_{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx 399.0952381 + \frac{1.644853627 \cdot 22.7305709814526}{11.22497216} \approx 402.426.$$

Доверительный интервала уровня доверия 0.9 имеет вид $(395.764, 402.426)$.

Видно, что при прочих равных условиях доверительный интервал уровня доверия 0.9 с неизвестной дисперсией больше доверительного интервала уровня доверия 0.9 с известной дисперсией. Это согласуется с интуитивным представлением о том, что чем больше информации, том точнее прогноз.

Пример 16.4. Длина доверительного интервала примера 16.3, построенного с надежностью (с уровнем доверия) $\gamma = 0.9$ равна 10.43210977. Из формулы (16.1) вытекает, что с ростом числа наблюдений n длина доверительного интервала стремится к нулю. Сколько в условиях примера 16.3 наблюдений нужно сделать, чтобы точность оценивания глубины μ выборочным средним $\overline{X}$ по абсолютной величине была не более $\varepsilon = 2$ метра с той же надежностью (с уровнем доверия не менее $\gamma = 0.9$)?

Решение: Согласно неравенству (16.2)

$$n \geqslant \left(\frac{u_{\frac{1+\gamma}{2}} \sigma}{\varepsilon} \right) = \left(\frac{1.644853627 \cdot 22.73057098}{2} \right) = 349.4742750. \qquad (16.11)$$

Пример 16.5. Амплитуда колебаний определялась двумя лаборантами с интервалом в один день. Первый лаборант по 100 наблюдениям получил среднее значение амплитуды 81 мм, а второй по 150 наблюдениям — среднее значение 84 мм. В предположении, что дисперсии измерений известны и равны 32 мм^2 и 48 мм^2 для первого и второго лаборанта соответственно, найти 95 %-ный доверительный интервал для разности амплитуд.

Решение: Обозначим через μ_1 и μ_2 неизвестные значения амплитуд соответственно во время первого и второго измерений. Предположим, что ошибки наблюдений лаборантов являются нормальными и не имеют систематической составляющей. Тогда для построения доверительного интервала для $\Delta = \mu_1 - \mu_2$ можно применить модель (16.6).

Фраза «95 %-ный доверительный интервал» в переводе с инженерного языка означает, что $\gamma = 0.95$. Поэтому $(1+\gamma)/2 = 0.975$. Используя таблицу квантилей стандартного нормального распределения находим квантиль

$$u_{\frac{1+\gamma}{2}} = u_{0.975} \approx 1.959963985.$$

Из условия видно, что $m = 100$, $n = 150$, $\overline{X} = 81$, $\overline{Y} = 84$, $\sigma_1^2 = 32$, $\sigma_2^2 = 48$. Поэтому

$$\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}} = \sqrt{\frac{32}{100} + \frac{48}{150}} = \frac{4}{5} = 0.8.$$

$$\overline{X} - \overline{Y} - u_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}} \approx 81 - 84 - 1.959963985 \cdot 0.8 \approx -4.567971188,$$

$$\overline{X}-\overline{Y}+u_{\frac{1+\gamma}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}\approx 81-84+1.959963985\cdot 0.8\approx -1.432028812.$$

Таким образом, доверительный интервала уровня доверия 0.95 имеет вид $(-4.568, -1.432)$.

Пример 16.6. Ожидается, что добавление специальных веществ уменьшает жесткость воды. Измерения жесткости воды до и после добавления специальных веществ по 40 и 50 пробам соответственно дали следующие значения жесткости (в градусах жесткости).

Значения жесткости до добавления специальных веществ равны
3.73, 3.92, 3.85, 4.05, 3.99, 4.43, 3.59, 4.39, 4.04, 4.25, 4.07, 3.63, 3.99, 4.00, 3.99, 3.95, 4.05, 3.98, 3.98, 3.96, 4.04, 3.83, 3.89, 4.22, 4.12, 4.32, 4.06, 3.99, 3.89, 3.71, 3.70, 3.71, 4.03, 3.85, 4.16, 3.96, 3.79, 4.34, 3.75, 3.76.

Значения жесткости после добавления специальных веществ равны
3.46, 4.21, 4.14, 3.54, 3.86, 4.17, 3.47, 3.71, 3.82, 4.00, 3.77, 3.83, 3.96, 3.79, 3.59, 3.73, 3.62, 4.29, 3.74, 3.78, 4.10, 3.55, 4.28, 3.83, 3.91, 3.67, 3.86, 3.70, 3.81, 4.30, 4.35, 4.02, 4.02, 3.58, 3.57, 3.58, 3.75, 3.72, 3.94, 3.50, 3.57, 3.47, 3.52, 4.12, 3.43, 4.20, 3.63, 4.07, 3.61, 3.66.

Предполагается, что все измерения жесткости проводились одним и тем же прибором, ошибки измерения которого являются нормальными с нулевой систематической составляющей. Найдем 95 %-ный доверительный интервал для разности жесткости воды до и после добавления специальных веществ.

Р е ш е н и е: Обозначим через μ_1 и μ_2 неизвестные значения жесткости воды соответственно до и после добавления специальных веществ. Из условия задачи следует, что для построения доверительного интервала для $\Delta=\mu_1-\mu_2$ можно применить модель (16.7).

Последовательно вычисляем

$$\overline{X}=3.974,\qquad \overline{Y}=3.816000000,$$

$$S^2(\vec{X}_n)\approx 0.0412348717948718,\qquad S^2(\vec{Y}_n)\approx 0.0662448979591837,$$

$$S(\vec{X}_m,\vec{Y}_n)\approx .234863596776744.$$

Используя таблицу квантилей распределения Стьюдента находим для $\gamma=0.95$ квантиль уровня $(1+\gamma)/2=0.975$ с 88 степенями свободы

$$t_{\frac{1+\gamma}{2}}(m+n-2)=t_{0.975}(88)\approx 1.987289865.$$

Следовательно, согласно формуле (16.7) доверительный интервал будет иметь вид (0.0578787565213012, 0.258121243478699).

Пример 16.7. Найдем доверительный интервал для вероятности попадания снаряда в цель с коэффициентом доверия $\gamma=0{,}9$, если после 220 выстрелов в цель попало 75 снарядов.

Р е ш е н и е: Нужно построить доверительный интервал (16.8). Так как $\gamma=0.9$, то $(1+\gamma)/2=0.95$. Используя таблицу квантилей стандартного нормального распределения находим квантиль

$$u_{\frac{1+\gamma}{2}}=u_{0.95}\approx 1.644853627.$$

Далее $n=220$, $\hat{p}=\dfrac{75}{220}=\dfrac{15}{44}\approx 0.3409090909$, $\hat{q}=\dfrac{29}{44}$, $\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}=\dfrac{87}{85184}$,

$$\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}=\sqrt{\frac{87}{85184}}=\frac{\sqrt{957}}{968}\approx 0.03195807499.$$

Поэтому границы доверительного интервала имеют вид

$$\underline{p} = \hat{p} - u_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 0.3409090909 - 1.644853627 \cdot 0.03195807499 \approx 0.288, \tag{16.12}$$

$$\overline{p} = \hat{p} + u_{\frac{1+\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 0.3409090909 + 1.644853627 \cdot 0.03195807499 \approx 0.393. \tag{16.13}$$

Значит, доверительный интервал для вероятности попадания снаряда в цель следующий: $(0.288, 0.393)$.

16.3 Задачи для самостоятельного решения

16.1. Некоторая постоянная величина измерена 25 раз с помощью прибора, систематическая ошибка которого равна нулю, а случайные ошибки измерения распределены по нормальному закону со среднеквадратическим отклонением 10. Выборочное среднее оказалось равно 100. Определите значения границ доверительного интервала для измеряемой величины при коэффициенте доверия 0.99.

Ответ: значение нижней границы 94.9, верхней — 105.1.

16.2. На основании 100 опытов было определено, что выборочное среднее время для производства детали составляет 5.5 секунд, а оценка среднеквадратического отклонения равна 1.7 секундам. Сделав допущение, что время для производства детали распределено по нормальному закону, определите доверительный интервал для математического ожидания времени производства детали с коэффициентом доверия 0.85.

Ответ: $(5.25, 5.75)$.

16.3. Среднеквадратическое отклонение ошибки высотомера известно и равно 15 метрам. Сколько надо иметь таких приборов на самолете, чтобы с достоверностью 0.99 ошибка измерения высоты была меньше 30 метров? При этом случайные ошибки высотомера распределены по нормальному закону, а систематические ошибки отсутствуют.

Ответ: на самолете должно быть не менее двух высотомеров.

Семинар 17

Проверка гипотез

17.1 Теоретические сведения

17.1.1 Основные понятия

Определение 17.1. Пусть X — произвольная одномерная или многомерная случайная величина. ***Статистической гипотезой*** называют любое утверждение о функции распределения случайной величины X, при этом слово “статистическая” для краткости обычно опускают.

Пусть имеется случайная величина X с функцией распределения $F(x)$ и две гипотезы о $F(x)$. Одну из них назовем ***основной***, или ***нулевой***, ***гипотезой*** и обозначим H_0, а вторую — ***альтернативной***, или ***конкурирующей***, ***гипотезой*** и обозначим H_A.

Определение 17.2. ***Критерием***, или ***статистическим критерием***, проверки гипотез называют правило, по которому по данным выборки $\vec{X}_n$ принимается решение о справедливости либо основной, либо альтернативной гипотезы.

Критерий задают с помощью ***критического множества*** $W \in \mathbb{R}^n$. Решение принимают следующим образом:

- если выборка $\vec{X}_n$ принадлежит критическому множеству W, то отвергают основную гипотезу H_0 и принимают альтернативную гипотезу H_A;
- если выборка $\vec{X}_n$ не принадлежит критическому множеству W (т.е. принадлежит дополнению $\overline{W} = \mathbb{R}^n \setminus W$ множества W до $\mathbb{R}^n$), то отвергают альтернативную гипотезу H_A и принимают основную гипотезу H_0. Множество $\overline{W}$ называют ***доверительным множеством***..

При использовании любого критерия возможны ошибки следующих видов:

- принять гипотезу H_A, когда верна H_0 — ***ошибка первого рода***;
- принять гипотезу H_0, когда верна H_A — ***ошибка второго рода***.

Вероятности совершения ошибок первого и второго рода обозначают α и β:

$$\alpha = \mathsf{P}\{\vec{X}_n \in W \mid H_0\}, \qquad \beta = \mathsf{P}\{\vec{X}_n \in \overline{W} \mid H_A\}.$$

Здесь $\mathsf{P}\{A \mid H_0\}$ и $\mathsf{P}\{A \mid H_A\}$ — вероятности события A при условии, что справедливы соответственно гипотезы H_0 и H_A.

Вероятность совершения ошибки первого рода α называют также ***уровнем значимости критерия***.

Величину $1 - \beta$, равную вероятности отвергнуть основную гипотезу H_0, когда она неверна, называют ***мощностью критерия***. #

17.1.2 Проверка гипотез о математическом ожидании нормальной случайной величины с известной дисперсией

Пусть X — нормальная случайная величина с неизвестным математическим ожиданием μ и известной дисперсией σ^2.

Пусть $\vec{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$ — независимые наблюдения случайной величины X. Обозначим

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad \xi = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}.$$

Обозначим через u_α, $u_{1-\alpha}$ и $u_{1-\alpha/2}$ соответственно квантили уровней α, $1-\alpha$ и $1-\alpha/2$ стандартного нормального распределения.

Три критерия уровня значимости α проверки гипотезы

$$H_0:\ \mu = \mu_0$$

против одной из трех альтернатив

$$H_1:\ \mu < \mu_0,$$
$$H_2:\ \mu_1 > \mu_0,$$
$$H_3:\ \mu_1 \neq \mu_0,$$

где μ_0 — некоторое известное число, имеют следующий вид.

Гипотеза H_0 отклоняется:

1) в пользу H_1, если $\xi < u_\alpha/2$;

2) в пользу H_2, если $\xi > u_{1-\alpha}$;

3) в пользу H_3, если $|\xi| > u_{1-\alpha/2}$.

В противном случае гипотеза H_0 принимается на уровне значимости α.

17.1.3 Проверка гипотез о математическом ожидании нормальной случайной величины с неизвестной дисперсией

Пусть X — нормальная случайная величина с неизвестным математическим ожиданием μ и неизвестной дисперсией σ^2.

Пусть $\vec{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$ — независимые наблюдения случайной величины X. Обозначим

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad S^2(\vec{X}_n) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2, \quad \tau = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S(\vec{X}_n)}\sqrt{n}.$$

Обозначим через $t_\alpha(n-1)$, $t_{1-\alpha}(n-1)$ и $t_{1-\alpha/2}(n-1)$ соответственно квантили уровней α, $1-\alpha$ и $1-\alpha/2$ распределения Стьюдента с $n-1$ степенями свободы.

Три критерия уровня значимости α проверки гипотезы

$$H_0:\ \mu = \mu_0$$

против одной из трех альтернатив

$$H_1:\ \mu < \mu_0,$$
$$H_2:\ \mu_1 > \mu_0,$$
$$H_3:\ \mu_1 \neq \mu_0,$$

где μ_0 — некоторое известное число, имеют следующий вид.

Гипотеза H_0 отклоняется на уровне значимости α:

1) в пользу H_1, если $\tau < t_\alpha/2(n-1)$;

2) в пользу H_2, если $\tau > t_{1-\alpha}(n-1)$;

3) в пользу H_3, если $|\tau| > t_{1-\alpha/2}(n-1)$.

В противном случае гипотеза H_0 принимается на уровне значимости α.

17.1.4 Проверка гипотез о дисперсии нормальной случайной величины при неизвестном математическом ожидании

Пусть X — нормальная случайная величина с неизвестным математическим ожиданием μ и неизвестной дисперсией σ^2.

Пусть $\vec{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$ — независимые наблюдения случайной величины X. Обозначим

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad S^2(\vec{X}_n) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2, \quad \eta = \frac{(n-1)S^2(\vec{X}_n)}{\sigma_0^2}.$$

Обозначим через $\chi^2_\alpha(n-1)$, $\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$, $\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$ и $\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$ – квантили уровня α, $1-\alpha$, $\alpha/2$ и $1-\alpha/2$ соответственно χ^2-распределения с $n-1$ степенью свободы.

Три критерия уровня значимости α проверки гипотезы

$$H_0:\ \sigma^2 = \sigma_0^2$$

против одной из трех альтернатив

$$H_1:\ \sigma^2 < \sigma_0^2,$$

$$H_2:\ \sigma^2 > \sigma_0^2,$$

$$H_3:\ \sigma^2 \neq \sigma_0^2,$$

где σ_0^2 — некоторое известное число, имеют следующий вид.

Гипотеза H_0 отклоняется на уровне значимости α:

1) в пользу H_1, если $\eta < \chi^2_\alpha(n-1)$;

2) в пользу H_2, если $\eta > \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$;

3) в пользу H_3, если $\eta < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)$ или $\eta > \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$.

В противном случае гипотеза H_0 принимается на уровне значимости α.

17.1.5 Проверка гипотез о равенстве математических ожиданий нормальных случайных величин с известными дисперсиями

Пусть X и Y — нормальные случайные величины с неизвестными математическими ожиданиями μ_1 и μ_2 и известными дисперсиями σ_1^2 и σ_2^2.

Пусть $\vec{X}_m = (X_1, \ldots, X_m)$ и $\vec{Y}_n = (Y_1, \ldots, Y_n)$ — две независимые выборки соответственно из распределений $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ и $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$,

$$\overline{X} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i, \quad \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i, \qquad \xi = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{m} + \dfrac{\sigma_2^2}{n}}}.$$

Обозначим через u_α, $u_{1-\alpha}$ и $u_{1-\alpha/2}$ соответственно квантили уровней α, $1-\alpha$ и $1-\alpha/2$ стандартного нормального распределения.

Три критерия уровня значимости α проверки гипотезы

$$H_0:\ \mu_1 = \mu_2$$

против одной из трех альтернатив

$$H_1:\ \mu_1 < \mu_2,$$

$$H_2:\ \mu_1 > \mu_2,$$

$$H_3: \ \mu_1 \neq \mu_2$$

имеют следующий вид.

Гипотеза H_0 отклоняется на уровне значимости α:

1) в пользу H_1, если $\xi < u_\alpha$;

2) в пользу H_2, если $\xi > u_{1-\alpha}$;

3) в пользу H_3, если $|\xi| > u_{1-\alpha/2}$.

В противном случае гипотеза H_0 принимается на уровне значимости α.

17.1.6 Проверка гипотез о равенстве математических ожиданий нормальных случайных величин с неизвестными, но равными дисперсиями

Пусть X и Y — нормальные случайные величины с неизвестными математическими ожиданиями μ_1 и μ_2 и неизвестными, но равными дисперсиями σ^2.

Пусть $\vec{X}_m = (X_1, \ldots, X_m)$ и $\vec{Y}_n = (Y_1, \ldots, Y_n)$ — две независимые выборки соответственно из распределений $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma^2)$ и $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma^2)$. Обозначим

$$\overline{X} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i, \quad S^2(\vec{X}_m) = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_i - \overline{X})^2,$$

$$\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i, \quad S^2(\vec{Y}_n) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2,$$

$$S(\vec{X}_m, \vec{Y}_n) = \sqrt{\frac{(m-1)S^2(\vec{X}_m) + (n-1)S^2(\vec{Y}_n)}{m+n-2}},$$

$$\tau = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{S(\vec{X}_m, \vec{Y}_n)\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}}.$$

Обозначим через $t_\alpha(m+n-2)$, $t_{1-\alpha}(m+n-2)$ и $t_{1-\alpha/2}(m+n-2)$ соответственно квантили уровней α, $1-\alpha$ и $1-\alpha/2$ распределения Стьюдента с $m+n-2$ степенями свободы.

Три критерия уровня значимости α проверки гипотезы

$$H_0: \ \mu_1 = \mu_2$$

против одной из трех альтернатив

$$H_1: \ \mu_1 < \mu_2,$$

$$H_2: \ \mu_1 > \mu_2,$$

$$H_3: \ \mu_1 \neq \mu_2$$

имеют следующий вид.

Гипотеза H_0 отклоняется на уровне значимости α:

1) в пользу H_1, если $\tau < t_\alpha(m+n-2)$;

2) в пользу H_2, если $\tau > t_{1-\alpha}(m+n-2)$;

3) в пользу H_3, если $|\tau| > t_{1-\alpha/2}(m+n-2)$.

В противном случае гипотеза H_0 принимается на уровне значимости α.

17.1.7 Проверка гипотез о равенстве дисперсий нормальных случайных величин с неизвестными математическими ожиданиями

Пусть X и Y — нормальные случайные величины с неизвестными математическими ожиданиями μ_1 и μ_2 и неизвестными дисперсиями σ_1^2 и σ_2^2.

Пусть $\vec{X}_m = (X_1, \ldots, X_m)$ и $\vec{Y}_n = (Y_1, \ldots, Y_n)$ — две независимые выборки соответственно из распределений $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ и $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$. Обозначим

$$\overline{X} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i, \quad S^2(\vec{X}_m) = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_i - \overline{X})^2,$$

$$\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i, \quad S^2(\vec{Y}_n) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2,$$

$$F = \frac{S^2(\vec{X}_m)}{S^2(\vec{Y}_n)},$$

Обозначим $f_\alpha(m-1, n-1)$, $f_{1-\alpha}(m-1, n-1)$, $f_{\alpha/2}(m-1, n-1)$ и $f_{1-\alpha/2}(m-1, n-1)$ соответственно квантили уровней α, $1-\alpha$, $\alpha/2$ и $1-\alpha/2$ распределения Фишера с числом степеней свободы $m-1$ и $n-1$.

Три критерия уровня значимости α проверки гипотезы

$$H_0: \ \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

против одной из трех альтернатив

$$H_1: \ \sigma_1^2 < \sigma_2^2,$$

$$H_2: \ \sigma_1^2 > \sigma_2^2,$$

$$H_3: \ \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

имеют следующий вид.

Гипотеза H_0 отклоняется на уровне значимости α:

1) в пользу H_1, если $F < f_\alpha(m-1, n-1)$;

2) в пользу H_2, если $F > f_{1-\alpha}(m-1, n-1)$;

3) в пользу H_3, если $F < f_{\alpha/2}(m-1, n-1)$ или $F > f_{1-\alpha/2}(m-1, n-1)$.

В противном случае гипотеза H_0 принимается на уровне значимости α.

17.2 Решение типовых примеров

Пример 17.1. В цехе завода выпускают валы электродвигателей. Из продукции одного станка произвольно выбирают 50 изделий, измеряют их диаметры и вычисляют значение *выборочного среднего* $\overline{x} = 42.972$. По техническим условиям станок настраивается на номинальный размер 43. Можно ли на основании полученных результатов сделать вывод о том, что станок обеспечивает заданный номинальный размер, или полученные данные свидетельствуют о неудовлетворительной наладке технологического оборудования. Ошибка измерения имеет нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией 0.01 мм^2.

Решение: Для оценки правильности настройки оборудования необходимо проверить гипотезу H_0: $\mu = \mu_0$, где $\mu_0 = 43$ мм о математическом ожидании нормальной случайной величины X с известной дисперсией $\sigma^2 = 0.01$ (см. раздел 17.1.2) при альтернативной гипотезе H_3: $\mu \neq 43$ мм, выбор который объясняется тем, что станок можно настроить на размер как выше, так и ниже номинального.

Выбираем уровень значимости $\alpha = 0.05$. Для рассматриваемой альтернативы H_3 при $\alpha = 0.05$ критическое множество имеет вид

$$\left|\frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right| \geqslant 1.96,$$

где 1.96 — квантиль $u_{1-\alpha/2} = u_{0.975}$ стандартного нормального распределения. Находим значение случайной величины $\xi = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$:

$$\xi = \frac{42.972 - 43}{0.1}\sqrt{50} = -1.98.$$

Поскольку полученное значение принадлежит критическому множеству ($|-1.98| > 1.96$), то гипотезу H_0 отклоняем в пользу альтернативы H_3, т.е. считаем, что станок разладился и его нужно останавливать и настраивать.

Пусть теперь уровень значимости $\alpha = 0.01$, т.е. мы с большей неохотой собираемся отклонять H_0 (будем более осторожными). Тогда $u_{1-\alpha/2} = u_{0.995} \approx 2.58$. Так как $|-1.98| \leqslant 2.58$, то на уровне значимости 0.01 гипотеза H_0 не отклоняется.

Таким образом, в этой задаче ситуация такова, что осторожные исследователи (которые очень боятся совершить ошибку первого рода) считают, что станок все еще настроен хорошо, а отличие 42.972 от 43 объясняют случайными ошибками измерений. Более решительные исследователи (которые не очень боятся совершить ошибку первого рода) считают, что отличие 42.972 от 43 нужно объяснить разладкой станка.

Пример 17.2. В условиях примера 17.1 проверим гипотезу H_0: $\mu = \mu_0 = 43$ при альтернативной гипотезе H_1: $\mu \neq 43$ в предположении, что дисперсия ошибки неизвестна, а исправленная выборочная дисперсия S^2 равна 0.01.

Р е ш е н и е: Выбираем уровень значимости $\alpha = 0.05$. По таблице квантилей распределения Стьюдента находим квантиль $t_{1-\alpha/2} \approx 2.01$ с числом степеней свободы 49. Критическое множество для рассматриваемых гипотез (см. раздел 17.1.3) имеет вид

$$\left|\frac{\overline{x} - \mu_0}{S}\sqrt{n}\right| \geqslant 2.01.$$

Вычисляя выборочное значение статистики

$$\tau = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S}\sqrt{n}(\vec{X}_n),$$

получаем

$$\tau = \frac{42.972 - 43}{0.1}\sqrt{50} = -1.98.$$

Полученное значение не принадлежит критическому множеству, поэтому гипотезу H_0 принимаем.

Пример 17.3. Ведутся наблюдения за состоянием технологического процесса. Разладка оборудования приводит к изменению номинального значения контролируемого признака X, имеющего нормальное распределение с дисперсией $\sigma^2 = 0.069$ мм^2. Для проверки стабильности технологического процесса через каждые три смены изучают выборку объема $n = 50$. По результатам двух выборок рассчитывают $\overline{x}_1 = 3.038$ и $\overline{x}_2 = 2.981$. Проверим стабильность технологического процесса.

Р е ш е н и е: Для проверки стабильности технологического процесса необходимо проверить гипотезу о равенстве математических ожиданий H_0: $\mu_1 = \mu_2$ нормальных случайных величин с известными дисперсиями (см. раздел 17.1.5). Здесь $m = n = 50$, дисперсии известны (и даже совпадают, хотя это и не обязательно) и равны 0.069. В качестве конкурирующей гипотезы выбираем H_2: $\mu_1 > \mu_2$, так как оценка номинального значения контролируемого признака уменьшилась с течением времени.

Выбираем уровень значимости, например $\alpha = 0.05$. По таблице квантилей нормального распределения находим квантиль уровня $1 - \alpha = 0.95$: $u_{1-\alpha} = u_{0.95} \approx 1.645$. Критическое множество имеет вид

$$\frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}} \geqslant 1.645.$$

Поскольку значение

$$\xi = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}} = \frac{3.038 - 2.981}{\sqrt{0.069\left(\frac{1}{50} + \frac{1}{50}\right)}} = 1.085$$

не принадлежит критическому множеству, гипотезу H_0 принимаем, т.е. делаем вывод, что технологический процесс на момент проверки можно считать стабильным.

Пример 17.4. Давление в камере измерялось дважды двумя манометрами. По результатам 10 замеров получены следующие данные (в единицах шкалы приборов): $\overline{x} = 1593$, $\overline{y} = 1601$, $S_1^2 = 1.72$, $S_2^2 = 1.75$. Выясним, есть ли основание считать, что давление в камере не изменилось, если ошибки измерения распределены по нормальному закону.

Р е ш е н и е: Проверяем гипотезу H_0: $\mu_1 = \mu_2$ против альтернативы H_3: $\mu_1 \neq \mu_2$, предполагая, что дисперсии не известны, но одинаковы (см. раздел 17.1.6). Задаем уровень значимости $\alpha = 0{,}01$. Для построения критического множества вычисляем

$$S(\vec{X}_m, \vec{Y}_n) = \sqrt{\frac{(m-1)S^2(\vec{X}_m) + (n-1)S^2(\vec{Y}_n)}{m+n-2}} = \sqrt{\frac{(10-1)\cdot 1.72 + (10-1)\cdot 1.75}{10+10-2}} \approx 1.3171934,$$

$$\tau = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{S(\vec{X}_m, \vec{Y}_n)\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} = \frac{1593 - 1601}{1.3171934\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{10}}} \approx -13.58.$$

По таблице квантилей распределения Стьюдента находим квантиль уровня $1 - \alpha/2 = 0{,}995$ с числом степеней свободы $n + m - 2 = 18$: $t_{1-\alpha/2} = t_{0{,}995} = 2{,}88$. Гипотезу H_0 отклоняем, так как значение -13.58 принадлежит критическому множеству: $|-13.58| > 2{,}88$.

Пример 17.5. Цех выпускает болты. Из партии болтов взята выборка объема $n = 20$ и измерена длина каждого болта, по которым рассчитаны выборочное среднее $\overline{X} = 18$ и выборочная дисперсия $S^2 = 784\,\text{мм}^2$. Выясним, можно ли считать, что станок обеспечивает допустимый для данной партии разброс, или же расчетное значение S^2 указывает на несоответствие точности изготовления деталей предъявляемым требованиям, согласно которым $\sigma_0^2 = 400\,\text{мм}^2$. Контролируемый признак распределен по нормальному закону.

Р е ш е н и е: Для ответа на поставленный вопрос проверим гипотезу о величине дисперсии H_0: $\sigma_0^2 = 400$, выбрав в качестве альтернативной гипотезу H_2: $\sigma^2 > \sigma_0^2$ (см. раздел 17.1.4). Назначаем уровень значимости $\alpha = 0{,}05$. Для того чтобы построить критическое множество, вычислим

$$\eta = \frac{(n-1)S^2(\vec{X}_n)}{\sigma_0^2} = \frac{(20-1)\cdot 784}{400} = 37{,}24.$$

По таблице квантилей χ^2-распределения с числом степеней свободы $n-1$ найдем $\chi^2_{1-\alpha}(19) = 30{,}1$. Критическое множество имеет вид $\frac{(n-1)S^2(\vec{X}_n)}{\sigma_0^2} > 30{,}1$.

Гипотезу H_0 отклоняем, так как $37{,}24 > 30{,}1$. Станок нужно останавливать и настраивать.

Пример 17.6. До наладки станка была проверена точность изготовления 10 изделий и найдена оценка дисперсии контролируемого признака $S_1^2 = 9.6$. После наладки измерено еще 15 изделий и получена оценка дисперсии $S_2^2 = 5.7$. Можно ли считать, что точность изготовления изделий после наладки повысилась? Контролируемый признак имеет нормальное распределение.

Р е ш е н и е: Для ответа на поставленный вопрос проверим гипотезу о равенстве дисперсий H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ при альтернативной гипотезе H_2: $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ (см. раздел 17.1.7). Назначаем уровень значимости $\alpha = 0.05$.

Для построения критического множества вычисляем

$$F = S_1^2(\vec{X}_n)/S_2^2(\vec{X}_n) = 9.6/5.7 = 1.68.$$

По таблице квантилей распределения Фишера с числом степеней свободы $m-1=9$ и $n-1=14$ находим $f_{1-\alpha}(9{,}14) = f_{0.95}(9{,}14) = 2.65$. Критическое множество имеет вид $S_1^2(\vec{x}_n)/S_2^2(\vec{x}_n) > 2.65$.

Гипотезу H_0 принимаем, так как $1.68 < 2.65$, т.е. мы состорожничаем и скажем, что пока нет оснований считать, что точность повысилась. Если кто-то уверен в обратном (для него числа 9.6 и 5.7 явно не равны), то ему нужно брать больше наблюдений и если он прав, то получит желаемый результат и при помощи данного критерия.

17.3 Задачи для самостоятельного решения

17.1. В соответствии с техническими условиями среднее время безотказной работы приборов из большой партии должно составлять не менее 1000 ч со средним квадратичным отклонением 100 ч. Значение выборочного среднего времени безотказной работы для случайно отобранных 25 приборов оказалось равным 970 ч. Предположим, что среднее квадратичное времени безотказной работы для приборов в выборке совпадает со средним квадратичным во всей партии, а контролируемая характеристика имеет нормальное распределение. Выясните, можно ли считать, что вся партия приборов не удовлетворяет техническим условиям, если: а) $\alpha = 0{,}1$; б) $\alpha = 0{,}01$.
О т в е т: а) да; б) нет.

17.2. Решите предыдущую задачу при условии, что среднее квадратичное отклонение времени безотказной работы, вычисленное по выборке, равно 115 ч.
О т в е т: а) нет; б) да.

17.3. Ожидается, что при добавлении специальных веществ жесткость воды уменьшается. По оценкам жесткости воды до и после добавления специальных веществ по 40 и 50 пробам соответственно получили средние значения жесткости (в стандартных единицах), равные 4,0 и 3,8. Дисперсия измерений в обоих случаях предполагается равной 0,25. Подтверждают ли эти результаты ожидаемый эффект? Принять $\alpha = 0{,}05$. Контролируемый признак имеет нормальное распределение.
О т в е т: да.

17.4. При обработке втулок на станке-автомате ведутся наблюдения за режимом его работы. Для проверки стабильности работы станка через определенные промежутки времени изучают выборки объема $n = 10$. По результатам двух выборок (см. табл. 17.1) проверьте стабильность работы станка. Распределение контролируемого признака предполагается нормальным. Также предполагается, что дисперсии случайных величин, из которых получены выборки, равны. Уровень значимости $\alpha = 0{,}05$.

Номер изделия	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	2,060	2,063	2,068	2,060	2,067	2,063	2,059	2,062	2,062	2,060
y_i	2,063	2,060	2,057	2,056	2,059	2,058	2,062	2,059	2,059	2,057

Таблица 17.1

Ответ: гипотезу о стабильности работы станка следует отклонить.

17.5. При изменении определенной процедуры проверки коэффициента трения установлено, что дисперсия результатов измерений этого коэффициента составляет 0,1. Значение выборочной дисперсии, вычисленное по результатам 26 измерений коэффициента трения, оказалось равным 0,2. При уровне значимости $\alpha = 0{,}1$ проверьте гипотезу о том, что дисперсия результатов измерений коэффициента трения равна 0,1. Предполагается, что контролируемый признак имеет нормальное распределение.

Ответ: гипотеза отклоняется.

17.6. На двух токарных автоматах изготавливают детали по одному чертежу. Из продукции первого станка было отобрано $n_1 = 9$ деталей, а из продукции второго $n_2 = 11$ деталей. Оценки выборочных дисперсий контрольного размера, определенные по этим выборкам, равны $\widehat{\sigma}_1^2 = 5{,}9\,\text{мкм}^2$ и $\widehat{\sigma}_2^2 = 23{,}3\,\text{мкм}^2$ соответственно. Проверьте гипотезу о равенстве дисперсий при $\alpha = 0{,}05$, если альтернативная гипотеза утверждает следующее: а) дисперсии не равны; б) дисперсия размера для второго станка больше, чем для первого.

Ответ: а) гипотеза принимается; б) гипотеза отклоняется.