Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»

(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Компьютерные системы и сети»

НАПРАВЛЕНИЕ ПОДГОТОВКИ «09.03.01 Информатика и вычислительная техника»

ОТЧЕТ

по Домашняя работе № 1

Дисциплина: «Вычислительная математика»

Вариант № 19

Студент ИУ6-62Б (Группа) _______________ (Подпись, дата) А.Е.Медведев (И. О. Фамилия)

Преподаватель _______________ (Подпись, дата) _______________ (И. О. Фамилия)

2022 г.

Цель работы:

Изучение метода Гаусса численного решения квадратной СЛАУ с невырожденной матрицей, оценка числа обусловленности матрицы и исследование его влияния на погрешность приближенного решения. Изучение метода прогонки решения СЛАУ с трехдиагональной матрицей.

Задание 1

— реализовать метод Гаусса решения СЛАУ;

— провести решение двух заданных СЛАУ методом Гаусса, вычислить нормы невязок полученных приближенных решений, их абсолютные и относительные погрешности (использовать 1-норму и бесконечную норму);

— сравнить полученные результаты с результатами, полученными при использовании встроенной процедуры метода Гаусса;

— с использованием реализованного метода Гаусса найти A_1^{-1} и A_2^{-1}. Проверить выполнение равентв $A_i * A_i^{-1} = E$;

— для каждой системы оценить порядок числа обусловленности матрицы системы и сделать вывод о его влиянии на точность полученного приближенного решения и отвечающую ему невязку.

Ход работы

Метод Гаусса — классический метод решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Это метод последовательного исключения переменных, когда с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе треугольного вида (прямой ход), из которой последовательно, начиная с последних (по номеру), находятся все переменные системы (обратный ход). Код программы в Octave Online представлен в листинге 1:

Листинг 1 – Код программы 1

```
% === Зададим матрицы и решения для оценки метода Гауса ===
A1 = [
    -62.8000        -6.9700         7.7300         0.0000;
      0.0000        49.4000        -3.5600        -4.5700;
     -7.1100        -5.9700        97.6000        -7.5800;
      6.8100        -1.2900        -7.9500        42.2000
];
F1 = [-221.3100; -523.8800; 1121.6300; 294.6700];
D1 = [6; -9; 12; 8];

A2 = [
   -363.9420       -21.3080      4463.8320       738.5280;
    -78.2070        -4.5710       959.2470       158.6970;
     -0.0720         0.0000         0.8860         0.1440;
   -181.5380       -10.6540      2226.5880       368.3980
];
F2 = [175.2200; 37.9700; 0.1880; 86.4800];
D2 = [10; 32; 2; -6];

% === Напишем функцию по методу Гауса ===
function Gs = Gauss(A,F)
    [imax, jmax] = size(A);
    AF = [A F];
% Приведение матрицы к треугольной методом Гаусса
% AF = rref([AF])
    for j = 1:jmax
% Нормализация
        AF(j, :) = AF(j, :) / AF(j, j);
        for i = [1:j-1 j+1:imax]
            AF(i, :) = AF(i, :)- (AF(j, :) *
            AF(i, j));
        end
    end

    disp('Решение СЛАУ методом Гаусса:')
    X = AF(:, 5:1:end);
    disp(X);
```

```
    Gs = X;
end

function [Gs] = Gauss2(A)
    N = size(A, 1);
    E = eye(N);
    Gs = Gauss(A, E);
end

% === Вычисление значений ===
disp('Решение СЛАУ 1 реализованным методом:');
X1 = Gauss(A1,F1);

disp('Решение СЛАУ 2 реализованным методом:');
X2 = Gauss(A2,F2);

disp(' ');
disp('Решение СЛАУ 1 встроенным методом:');
X11 = A1 \ F1 ;
disp(X11);

disp('Решение СЛАУ 2 встроенным методом:');
X22 = A2 \ F2 ;
disp(X22);
disp(' ');

R1 = F1 - A1*X1;
disp('Невязка первой матрицы: ');
disp(R1);

R2 = F2 - A2*X2;
disp('Невязка второй матрицы: ');
disp(R2);
disp(' ')

disp('Нормы невязки СЛАУ 1:');
norm1_1 = norm(R1, 1)
norm1_inf = norm(R1', inf)
disp(' ');
```

```
disp('Нормы невязки СЛАУ 2:');
norm2_1 = norm(R2, 1)
norm2_inf = norm(R2, inf)

disp(' ')
disp('Абсолютные и относительные погрешности решений СЛАУ1')

%Абсолютная погрешность по единочной норме
abs_norm1_1 = norm(D1-X1,1)

%Абсолютная погрешность по бесконечной норме
abs_norm1_inf = norm(D1-X1,inf)

%Относительная погрешность по единочной норме
delta_norm1_1 = norm(D1-X1,1)/norm(D1,1)

%Относительная погрешность по бесконечной норме
delta_norm1_inf = norm(D1-X1,inf)/norm(D1,inf)
disp(' ')
disp('Абсолютные и относительные погрешности решений СЛАУ2')

%Абсолютная погрешность по единочной норме
abs_norm2_1 = norm(D2-X2,1)

%Абсолютная погрешность по бесконечной норме
abs_norm2_inf = norm(D2-X2,inf)

%Относительная погрешность по единочной норме
delta_norm2_1 = norm(D2-X2,1)/norm(D2,1)

%Относительная погрешность по бесконечной норме
delta_norm2_inf = norm(D2-X2,inf)/norm(D2,inf)
format bank
disp(' ')
disp('A1^-1: ');

A1_1 = Gauss2(A1);
disp('A1^-1 * A1:');
```

```
disp(A1*A1_1);
disp(' ')
disp('A2^-1: ');

A2_1 = Gauss2(A2);
disp('A2^-1 * A2:');
disp(A2*A2_1);
format short

disp(' ')
disp('Числа обусловленности СЛАУ 1:');

cond1_1 = cond(A1,1);
fprintf('Число обусловленности, с помощью единичной нормы: %6.3f
   \n',cond1_1);

cond1_inf = cond(A1,inf);
fprintf('Число обусловленности, с помощью бесконечной нормы: %6.3f
   \n',cond1_inf);

disp(' ')
fprintf('Числа обусловленности СЛАУ 2: \n');

cond2_1 = cond(A2, 1) ;
fprintf('Число обусловленности, с помощью единичной нормы: %6.3f
   \n',cond2_1);

cond2_inf = cond(A2, inf);
fprintf('Число обусловленности, с помощью бесконечной нормы: %6.3f
   \n',cond2_inf);
```

Вывод программы 1 представлен в листинге 2

Листинг 2 – Вывод программы 1

```

==========================================
   Решение для самописного метода Гауса
==========================================


Решение СЛАУ 1 реализованным методом:
```

```
Решение СЛАУ методом Гаусса:
    6.0000
   -9.0000
   12.0000
    8.0000
Решение СЛАУ 2 реализованным методом:
Решение СЛАУ методом Гаусса:
   10.0000
   32.0000
    2.0000
   -6.0000

Нормы невязки СЛАУ 1:
norm1_1 = 1.4211e-13
norm1_inf = 8.5265e-14

Нормы невязки СЛАУ 2:
norm2_1 = 9.8060e-13
norm2_inf = 4.6896e-13

Абсолютные и относительные погрешности решений СЛАУ1
abs_norm1_1 = 5.3291e-15
abs_norm1_inf = 3.5527e-15
delta_norm1_1 = 1.5226e-16
delta_norm1_inf = 2.9606e-16

Абсолютные и относительные погрешности решений СЛАУ2
abs_norm2_1 = 1.1537e-07
abs_norm2_inf = 6.9732e-08
delta_norm2_1 = 2.3074e-09
delta_norm2_inf = 2.1791e-09

==========================================
      Решение для встроеного метода
==========================================


Решение СЛАУ 1 встроенным методом:
    6.0000
   -9.0000
```

```
   12.0000
    8.0000
Решение СЛАУ 2 встроенным методом:
   10.0000
   32.0000
    2.0000
   -6.0000

Нормы невязки СЛАУ 1:
norm1_1 = 2.8422e-14
norm1_inf = 2.8422e-14

Нормы невязки СЛАУ 2:
norm2_1 = 1.1511e-12
norm2_inf = 6.5370e-13

Абсолютные и относительные погрешности решений СЛАУ1
abs_norm1_1 = 5.3291e-15
abs_norm1_inf = 3.5527e-15
delta_norm1_1 = 1.5226e-16
delta_norm1_inf = 2.9606e-16

Абсолютные и относительные погрешности решений СЛАУ2
abs_norm2_1 = 3.8225e-07
abs_norm2_inf = 2.3078e-07
delta_norm2_1 = 7.6449e-09
delta_norm2_inf = 7.2120e-09

==========================================
                 Вывод
==========================================

A1^-1:
Решение СЛАУ методом Гаусса:
  -0.02  -0.00   0.00  -0.00
   0.00   0.02   0.00   0.00
  -0.00   0.00   0.01   0.00
   0.00   0.00   0.00   0.02
A1^-1 * A1:
```

```
   1.00   0.00  -0.00  -0.00
  -0.00   1.00  -0.00  -0.00
  -0.00   0.00   1.00  -0.00
   0.00  -0.00  -0.00   1.00

A2^-1:
Решение СЛАУ методом Гаусса:
   -155675.08      -5637.04   1897449.48    313768.69
    -32725.83      -1407.94    400109.31     66055.63
     -1636.36          0.00     19681.82      3272.73
    -67769.36      -2818.52    827633.83    136747.98
A2^-1 * A2:
   1.00  -0.00   0.00  -0.00
  -0.00   1.00   0.00  -0.00
  -0.00  -0.00   1.00   0.00
  -0.00  -0.00  -0.00   1.00

Числа обусловленности СЛАУ 1:
Число обусловленности, с помощью единичной нормы:  3.338
Число обусловленности, с помощью бесконечной нормы:  3.498

Числа обусловленности СЛАУ 2:
Число обусловленности, с помощью единичной нормы: 24060028810.786
Число обусловленности, с помощью бесконечной нормы: 13256774093.263
```

Задание 2

- реализовать метод прогонки;
- проверить выполнение достаточных условий применимости для системы из своего варианта;
- провести численное решение системы из своего варианта методом прогонки найти норму его невязки;
- экспериментально проверить устойчивость найденного решения к малым возмущениям исходных данных, для чего изменить несколько коэффициентов в правой части на +0,01, найти решение возмущенной системы и сравнить его с исходным.

Ход работы

Метод прогонки используется для решения систем линейных уравнений вида Ax=F, где A — трёхдиагональная матрица. Представляет собой вариант метода последовательного исключения неизвестных. Система уравнений Ax=F равносильна соотношению:

$$A_i x_{i-1} + B_i x_i + C_i x_{i+1} = F_i$$

Метод прогонки основывается на предположении, что искомые неизвестные связаны рекуррентным соотношением:

$$x_i = \alpha_{i+1} x_{i+1} + \beta_{i+1}, i = n-1, n-2, ..., 1.$$

Коэффициенты определяются следующими выражениями:

$$\begin{cases} \alpha_{i+1} = \frac{-C_i}{A_i \alpha_i + B_i} \\ \beta_{i+1} = \frac{F_i - A_i \alpha_i}{A_i \alpha_i + B_i} \end{cases}$$

Код программы представлен в листинге 3.

Листинг 3 – Код программы 2

```
% === Исходные данные ===
a = [2;-1;1;1;0;1];
b = [104;98;88;-141;81;73;67];
c = [1;0;-1;1;1;1];
d = [22;20;19;-26;16;15;13];
A = diag(a, -1) + diag(b, 0) + diag(c, 1);

% === Проверка условий применимости метода ===
function Check(a, b, c)
    res = 'TRUE';
    for i=1 : 6
        if abs(c(i)) < abs(a(i)) + abs(b(i))
            res = 'FALSE';
        end
    end
    disp(res);
end

disp(A);
N = size(A, 1);

% === Вычисления ===
a = [0; a]; % Добавляем элемент в начало вектора a
c = [c; 0]; % Добавляем элемент в конец вектора c

% Прямая прогонка
alpha = zeros(N, 1); % Инициализация нулями
beta = zeros(N, 1);
y = zeros(N, 1);
y(1) = b(1);
alpha(1) = -c(1) / y(1);
beta(1) = d(1) / y(1);

for i = 2:N
    y(i) = b(i) + a(i) * alpha(i - 1);
    alpha(i) = -c(i) / y(i);
    beta(i) = (d(i) - a(i) * beta(i - 1)) / y(i);
```

```
end

disp('Выполнение достаточных условий');
Check(alpha,beta,y);

% Обратная прогонка
x = zeros(N, 1);
x(N) = beta(N);

for i = 1:N-1
    x(N-i) = alpha(N-i) * x(N-i + 1) + beta(N-i);
end

% Вывод значений
disp('Альфа');
fprintf(' %f ',alpha);
fprintf('\n');

disp('Бета');
fprintf(' %f ',beta);
fprintf('\n');

disp('X');
disp(x);
r=d-A*x;

disp('Невязка');
disp(r);

norm_1 = norm(r, 1) ;
disp('Единичная норма невязки:');
disp(norm_1)

norm_inf = norm(r, inf);
disp('Бесконечная норма невязки:');
disp(norm_inf)

% === Проверка устойчивости решения ===
disp('================================')
```

```
d1=d+0.01;

% Прямая прогонка
alpha = zeros(N, 1); % Инициализация нулями
beta = zeros(N, 1);
y = zeros(N, 1);
y(1) = b(1);
alpha(1) = -c(1) / y(1);
beta(1) = d1(1) / y(1);

for i = 2:N
    y(i) = b(i) + a(i) * alpha(i - 1);
    alpha(i) = -c(i) / y(i);
    beta(i) = (d(i) - a(i) * beta(i - 1)) / y(i);
end

x = zeros(N, 1);
x(N) = beta(N);

for i = 1:N-1
    x(N-i) = alpha(N-i) * x(N-i + 1) + beta(N-i);
end

%Вывод значений
disp('Устойчивость к малым возмущениям');
disp('Альфа');
fprintf(' %f ',alpha);
fprintf('\n');
disp('Бета');
fprintf(' %f ',beta);
fprintf('\n');
disp('X');
disp(x);
```

Вывод программы 2 представлен в листинге 2

Листинг 4 – Вывод программы 2

```
Выполнение достаточных условий
TRUE
Альфа
```

```
 -0.009615  -0.000000  0.011364  0.007093  -0.012345  -0.013699
    -0.000000
Бета
 0.211538  0.199804  0.218180  0.185960  0.195218  0.205479
    0.191002
X
   0.2096
   0.1998
   0.2203
   0.1873
   0.1927
   0.2029
   0.1910
Невязка
            0
            0
            0
   3.5527e-15
   1.7764e-15
   1.7764e-15
            0
Единичная норма невязки:
7.1054e-15
Бесконечная норма невязки:
3.5527e-15
================================
Устойчивость к малым возмущениям
X
   0.2097
   0.1998
   0.2203
   0.1873
   0.1927
   0.2029
   0.1910
```

Вывод:

В ходе решения домашнего задания была разработана программа в среде Octave Online. В программе сравнили два метода Гаусса – самописный и встроенный. Был сделан вывод, что чем больше у метрицы число обусловленностей, тем больше его погрешность. Метод прогонки позволил сделать вывод, что матрица устойчива к малым возмущениям.