ЛЕКЦИИ ПО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ

МГТУ им. Н.Э. Баумана
Москва

Обращение матрицы.

Нахождение матрицы, обратной к матрице A, эквивалентно решению матричного уравнения

$$AX = E, \tag{1}$$

где E - единичная матрица и X - искомая квадратная матрица.

Уравнение (1) можно записать в виде системы m^2 уравнений

$$\sum_{k=1}^{m} a_{ik}x_{kj} = \delta_{ij}, \quad i,j = 1,2,\ldots,m, \tag{2}$$

где $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Система (2) распадается на m независимых систем уравнений с одной и той же матрицей A, но с различными правыми частями:

$$Ax^{(j)} = \delta^{(j)}, \quad j = 1,2,\ldots,m, \tag{3}$$

где $x^{(j)} = (x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{mj})^T$, а у вектора $\delta^{(j)}$ единице равна j-я компонента, а остальные равны нулю.

Пример. Для матрицы второго порядка система (2) распадается на две независимые системы:

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} = 1, \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} = 0, \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} = 1. \end{cases}$$

Системы (3) имеют одну и туже матрицу $A \Longrightarrow$ достаточно один раз совершить прямой ход методом Гаусса и запомнить матрицы L и U.

Для вычисления коэффициентов матрицы C, необходимо

$$\frac{m(m-1)}{2} + \frac{(m-1)m(2m-1)}{6} = \frac{m(m^2-1)}{3} \quad \text{действий.}$$

Обратный ход будет осуществляться путем решения систем уравнений.

$$Ly^{(j)} = \delta^{(j)}, \quad y^{(j)} = (y_{1j}, y_{2j}, \ldots, y_{mj})^T, \tag{4}$$

$$Ux^{(j)} = y^{(j)}, \quad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{5}$$

Для решения системы (5) при каждом j требуется $0.5m(m-1)$ действий. Для решение системы (4) требуется

$$\frac{m(m-1)}{2} + m = \frac{m(m+1)}{2} \quad \text{действий.}$$

Всего, при каждом j на обратный ход затрачивается

$$\frac{m(m-1)}{2} + \frac{m(m+1)}{2} = m^2,$$

а для всех j требуется m^3 действий.

Итого

$$\frac{m(m^2-1)}{3} + m^3 = \frac{m\left(4m^2-1\right)}{3}.$$

Сокращение числа действий, используя специфический вид правых частей системы (4).

Запишем первые $(j-1)$ уравнение системы (4):

$$\begin{aligned}
&l_{11}y_{1j} = 0,\\
&l_{21}y_{1j} + l_{22}y_{2j} = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&l_{j-1,1}y_{1j} + l_{j-1,2}y_{2j} + \ldots + l_{j-1,j-1}y_{j-1,j} = 0.
\end{aligned}$$

Так как матрица L - невырожденная, то получаем

$$y_{1j} = y_{2j} = \ldots = y_{j-1,j} = 0.$$

При этом оставшиеся уравнения системы имеют вид:

$$l_{jj}y_{jj} = 1,$$
$$l_{ij}y_{jj} + l_{i,j+1}y_{j+1,j} + \ldots + l_{ii}y_{ij} = 0, \quad i = j+1, j+2, \ldots, m.$$

Отсюда последовательно находим неизвестные y_{ij}:

$$y_{ij} = -\frac{\sum\limits_{k=j}^{i-1} l_{ik}y_{kj}}{l_{ii}}, \quad i = j+1, j+2, \ldots, m, \tag{6}$$

$$y_{jj} = \frac{1}{l_{jj}}. \tag{7}$$

Подсчитаем необходимое число действий. При фиксированном i для вычисления по формуле (6) требуется одно деление и $i-j$ умножений. Вычисления по формулам (6) и (7) при фиксированном j потребуют действий.

$$1 + \sum_{i=j+1}^{m}(i-j+1) = \frac{(m-j+2)(m-j+1)}{2}.$$

Решение системы (4) при всех $j = 1, 2, \ldots, m$ потребует действий

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{(m-j+2)(m-j+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}k(k+1) = \frac{m(m+1)(m+2)}{6}.$$

Итого, общее число действий необходимой для обращения матрицы:

$$\frac{m(m+1)(m+2)}{6}+\frac{m(m^2-1)}{3}+\frac{m^2(m-1)}{2}=m^3.$$

Матрицы преобразований Гаусса. Построим матричное описание процесса обнуления Гаусса. Пусть $n=3$, тогда

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\tau_1 & 1 & 0 \\ -\tau_2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $\tau_1=\alpha_2/\alpha_1$ и $\tau_2=\alpha_3/\alpha_1$, $\alpha_1\neq 0$.

Пример. Рассмотрим систему $Ax=f$ из 3-х уравнений:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3&=f_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3&=f_2,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3&=f_3, \end{aligned}$$

где $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\quad f=\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$

После 1-го шага по методу Гаусса преобразованная система примет вид $A_1 x = f_1$:

$$
\begin{aligned}
&x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3 = \frac{f_1}{a_{11}}, \\
&\left(a_{22} - \frac{a_{21} a_{12}}{a_{11}}\right) x_2 + \left(a_{23} - \frac{a_{21} a_{13}}{a_{11}}\right) x_3 = f_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} f_1, \\
&\left(a_{32} - \frac{a_{31} a_{12}}{a_{11}}\right) x_2 + \left(a_{33} - \frac{a_{31} a_{13}}{a_{11}}\right) x_3 = f_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} f_2,
\end{aligned}
\tag{8}
$$

где матрица полученной системы $A_1 = L_1 A$ и вектор-столбец $f_1 = L_1 f$ и

$$
L_1 = \begin{pmatrix} 1/a_{11} & 0 & 0 \\ -a_{21}/a_{11} & 1 & 0 \\ -a_{31}/a_{11} & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Таким образом, после осуществления первого шага приходим к системе:

$$
L_1 A x = L_1 f.
$$

Перепишем полученную систему (8) в следующем виде:

$$\begin{aligned} x_1+c_{12}x_2+c_{13}x_3 &= y_1, \\ a_{22}^{(1)}x_2+a_{23}^{(1)}x_3 &= f_2^{(1)}, \\ a_{32}^{(1)}x_2+a_{33}^{(1)}x_3 &= f_3^{(1)}, \end{aligned} \tag{9}$$

и осуществим второй шаг метода Гаусса.После этого приходим к системе виде:

$$\begin{aligned} x_1+c_{12}x_2+c_{13}x_3 &= y_1, \\ x_2+c_{23}x_3 &= y_2, \\ a_{33}^{(2)}x_3 &= f_3^{(2)}, \end{aligned} \tag{10}$$

Переход от системы (9) к системе (10) осуществляется путем умножения матрицы системы (9) слева на матрицу L_2

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/a_{22}^{(1)} & 0 \\ 0 & -a_{32}^{(1)}/a_{22}^{(1)} & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, после осуществления второго шага методом Гаусса приходим к системе:

$$L_2L_1Ax = L_2L_1f.$$

Далее, умножая матрицу системы (10) слева на матрицу L_3 получаем систему:

$$L_3L_2L_1Ax = L_3L_2L_1f,$$

где

$$L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/a_{33}^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Построенные в примере матрица L_k, $k = 1, 2, 3$ называется **матрицей пробразования Гаусса**.

После применения прямого хода методом Гаусса получили эквивалентную систему, у которой матрица $U = L_3L_2L_1A$ является верхней треугольной с единичной диагональю. Выразим матрицу A:

$$A = LU,$$

где матрица $L = L_1^{-1} L_2^{-1} L_3^{-1}$ является нижней треугольной матрицей.

$$L_1^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 \\ a_{31} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & 0 \\ 0 & a_{32}^{(1)} & 1 \end{pmatrix}, \quad L_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Таким образом получили LU-разложение матрицы.

Определение. Матрица L_j называется **элементарное нижней треугольной матрицей** если она имеет вид

$$L_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & l_{jj} & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & l_{j+1,j} & 1 & \dots & 0 \\ . & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & l_{mj} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Обратной к L_j является также элементарная нижняя треугольная матрица:

$$L_j^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & l_{jj}^{-1} & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -l_{j+1,j}^{-1} l_{jj}^{-1} & 1 & \dots & 0 \\ . & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & -l_{mj}^{-1} l_{jj}^{-1} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

В общем случае предположим, что $x \in \mathbb{R}^n$ и $x_k \neq 0.$ Если

$$\tau = (0, \dots, 0, \tau_{k+1}, \dots, \tau_n)^{\mathrm{T}}, \quad \tau_i = \frac{x_i}{x_k}, \quad i = (k+1) : n,$$

то

$$L_k = E - \tau e_k^{\mathrm{T}},$$

и

$$
L_k x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -\tau_{k+1} & 1 & \dots & 0 \\ . & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & -\tau_n & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Матрица L_k - это **матрица преобразований Гаусса**, вектор τ - вектор Гаусса.

Метод прогонки.

Метод прогонки используется для решения СЛАУ $Ax = f$, где матрица A порядка N является трехдиагональной, т. е. матрица все элементы которой, кроме элементов лежащих на главной диагонали и 2-х побочных, равны нулю ($a_{ij} = 0$ при $j > i + 1$ и $j < i - 1$).

В том случае СЛАУ с трехдиагональной матрицей имеет вид:

$$
\begin{aligned}
&c_1 x_1 + b_1 x_2 = f_1, \\
&a_i x_{i-1} + c_i x_i + b_i x_{i+1} = f_i, \quad i = 2, \dots, (N-1), \\
&a_N x_{N-1} + c_N x_N = f_N.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Преобразуем первое уравнение системы (11) к виду

$$x_1 = \alpha_1 x_2 + \beta_1,$$

где $\alpha_1 = -b_1/c_1$, $\beta_1 = f_1/c_1$.

Подставим полученное для x_1 выражение во второе уравнение системы:

$$a_2(\alpha_1 x_2 + \beta_1) + c_2 x_2 + b_2 x_3 = f_2.$$

Данное уравнение можно преобразовать к виду

$$x_2 = \alpha_2 x_3 + \beta_2,$$

где

$$\alpha_2 = -\frac{b_2}{a_2\alpha_1 + c_2}, \quad \beta_2 = \frac{f_2 - a_2\beta_1}{a_2\alpha_1 + c_2}.$$

На i-м шаге i-е уравнение системы преобразуется к виду

$$x_i = \alpha_i x_{i+1} + \beta_i, \quad i = 1, \ldots, (N-1), \qquad (12)$$

где α_i и β_i - неизвестные коэффициенты.

Получим выражения для данных коэффициентов. Найдем x_{i-1}:

$$x_{i-1} = \alpha_{i-1}x_i + \beta_{i-1} = \alpha_{i-1}(\alpha_i x_{i+1} + \beta_i) + \beta_{i-1} = \alpha_{i-1}\alpha_i x_{i+1} + (\alpha_{i-1}\beta_i + \beta_{i-1}).$$

Подставим выражения x_i и x_{i-1} в (11) и придем к уравнению

$$x_{i+1}\left[\alpha_i(a_i\alpha_{i-1} + c_i) + b_i\right] + \left[\beta_i(a_i\alpha_{i-1} + c_i) + a_i\beta_{i-1} - f_i\right] = 0.$$

Данное уравнение равно нулю, если положить

$$\begin{aligned} &\alpha_i(a_i\alpha_{i-1} + c_i) + b_i = 0, \\ &\beta_i(a_i\alpha_{i-1} + c_i) + a_i\beta_{i-1} - f_i = 0. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \alpha_i &= -\frac{b_i}{a_i\alpha_{i-1} + c_i}, \quad i = 2, \ldots, (N-1), \\ \beta_i &= \frac{f_i - a_i\beta_{i-1}}{a_i\alpha_{i-1} + c_i}, \quad i = 2, \ldots, (N-1). \end{aligned} \tag{13}$$

Для вычислений, с использование выражений (13), необходимо задать начальные значения α_1 и β_1, которые вычисляются из 1-го уравнения системы.

Нахождение таким образом коэффициентов α_i и β_i называется **прямой прогонкой**.

После нахождения прогоночных коэффициентов, решения системы находятся по рекуррентной формуле (12) начиная с $i = N - 1$.

Для начала счета по данной формуле требуется знать значение x_N, которое определяется из уравнений

$$x_N = -\frac{a_N}{c_N} x_{N-1} + \frac{f_N}{c_N}, \quad x_{N-1} = \alpha_{N-1} x_N + \beta_{N-1}.$$

Подставляя выражение для x_{N-1} в выражение для x_N получаем

$$x_N = \frac{f_N - a_N \beta_{N-1}}{c_N + a_N \alpha_{N-1}}.$$

Окончательно

$$x_i = \alpha_i x_{i+1} + \beta_i, \quad i = (N-1), (N-2), \ldots, 1,$$
$$x_N = \frac{f_N - a_N \beta_{N-1}}{c_N + a_N \alpha_{N-1}}.$$

Приведем условия на коэффициенты системы, при выполнении которых вычисления по формулам прямой прогонки можно довести до конца, т. е. ни один из знаменателей $\gamma_i = a_i\alpha_{i-1} + c_i$ не обращается в ноль. Эти условия будут гарантировать существование решения системы и его единственность.

Теорема. Пусть коэффициенты системы удовлетворяют следующим условиям диагонального преобладания:

$$|c_k| \geqslant |a_k| + |b_k|, \quad |c_k| > |a_k|, \quad k = \overline{1, N}.$$

Тогда $\gamma_i = a_i\alpha_{i-1} + c_i \neq 0$ и $|\alpha_i| \leqslant 1$ для всех $i = \overline{1, N}$.

◀ Воспользуемся принципом математической индукции.

По условию теоремы имеем $\gamma_1 = c_1$ и $|\alpha_1| = \dfrac{|b_1|}{|c_1|} \leqslant 1$.

Пусть $\gamma_{k-1} \neq 0$ и $|\alpha_{k-1}| \leqslant 1$ для некоторого $k > 1$. Тогда

$$|\gamma_k| = |a_k\alpha_{k-1} + c_k| \geqslant |c_k| - |a_k||\alpha_{k-1}| \geqslant |c_k| - |a_k|.$$

Из полученной оценки вытекает, что $|\gamma_k| > 0$ и одновременно $|\gamma_k| \geqslant |b_k|$. Следовательно $|\gamma_k| \neq 0$ и $|\alpha_k| = |b_k|/|\gamma_k| \leqslant 1$. ▶