Методы поиска корней нелинейных уравнений

Корень уравнения

Определение. Число x^* называется ***корнем уравнения***

$$f(x) = 0,$$

если $f(x^*) = 0$.

Определение. Корень x^* уравнения $f(x) = 0$ называется ***простым***, если $f'(x^*) \neq 0$. В противном случае, корень x^* называется ***кратным***. Натуральное число k называется кратностью корня x^*, если для $i = 0, \ldots, k-1$, $f^{(i)}(x^*) = 0$, но $f^{(k)}(x^*) \neq 0$.

Пример. Пусть $f(x) = 1 - \cos x$. Тогда $x^* = 0$ — корень уравнения $f(x) = 0$ кратности $k = 2$, поскольку $f(0) = 0$, $f'(0) = \sin(0) = 0$, $f''(0) = \cos(0) = 1 \neq 0$.

Замечание. В окрестности корня $\boldsymbol{x^*}$ кратности $\boldsymbol{k}$ функция $\boldsymbol{f}$ может быть представлена по формуле Тейлора

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{f^{(k)}(x^*)}{k!}(x - x^*)^k + o((x - x^*)^k).}$$

Из этого представления ясно, что в случае нечётного $\boldsymbol{k}$ функция $\boldsymbol{f}$ меняет знак в окрестности точки $\boldsymbol{x^*}$, а при чётном $\boldsymbol{k}$ функция $\boldsymbol{f}$ сохраняет знак в окрестности точки $\boldsymbol{x^*}$.

Этапы решения задачи поиска корней нелинейного уравнения

1. локализация корней;
2. итерационное уточнение.

Локализация корней — этап, на котором находят отрезки содержащие единственный корень.

Итерационное уточнение — этап построения последовательности приближений $\{x^{(n)}\}$ к корню x^*.

Итерационное уточнение

Как правило процедура итерационного уточнения сводится к построению последовательности приближений $\{x^{(n)}\}$ по правилу

$$x^{(n)} = F(x^{(n-1)}, x^{(n-2)} \ldots, x^{(n-k)}).$$

При $k = 1$ итерационный метод называют ***одношаговым***, при $k = 2$ — ***двухшаговым*** и т.д.

Порядок и скорость сходимости

Постоянная $p \geqslant 1$ называется ***порядком сходимости*** итерационного метода, если существует константа $q > 0$ и δ-окрестность $U_\delta(x^*)$ корня x^* такая, что для любого $x^{(n)} \in U_\delta(x^*)$ и $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$|x^{(n+1)} - x^*| \leqslant q|x^{(n)} - x^*|^p.$$

Если $p = 1$ и $q < 1$, то говорят, что метод обладает ***линейной скоростью сходимости***. При $p > 1$ скорость сходимости называют ***сверхлинейной***. При $p = 2$ скорость сходимости называют ***квадратичной***, а при $p = 3$ — ***кубической***.

Теорема. Пусть для итерационного метода в $\boldsymbol{\delta}$-окрестности $\boldsymbol{U_\delta(x^*)}$ корня $\boldsymbol{x^*}$ выполнены неравенства

$$|x^{(n+1)} - x^*| \leqslant q|x^{(n)} - x^*|^p, \qquad q\delta^{p-1} < 1,$$

где $\boldsymbol{p \geqslant 1}$. Тогда последовательность $\boldsymbol{\{x^{(n)}\}}$ сходится к корню уравнения $\boldsymbol{x^*}$

$$|x^{(n)} - x^*| \leqslant q^{\gamma_n}|x^{(0)} - x^*|^{p^n}.$$

где

$$\gamma_n = \begin{cases} \dfrac{1 - p^{n+1}}{1 - p}, & p > 1, \\ n, & p = 1. \end{cases}$$

Критерий останова

Теорема. Пусть для итерационного метода в $\boldsymbol{\delta}$-окрестности $\boldsymbol{U_\delta(x^*)}$ корня $\boldsymbol{x^*}$ выполнено неравенство

$$|\boldsymbol{x}^{(n+1)} - \boldsymbol{x}^*| \leqslant \boldsymbol{q}|\boldsymbol{x}^{(n)} - \boldsymbol{x}^*|.$$

Тогда справедлива следующая оценка погрешности

$$|\boldsymbol{x}^{(n)} - \boldsymbol{x}^*| \leqslant \frac{\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{1-q}}|\boldsymbol{x}^{(n)} - \boldsymbol{x}^{(n-1)}|.$$

Метод бисекции (деления пополам)

Метод бисекции основан на следующей теореме

Теорема. Пусть функция $\boldsymbol{f}$ непрерывна на $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ и принимает на его концах значения разных знаков, т.е. $\boldsymbol{f(a)f(b) < 0}$. Тогда существует $\boldsymbol{x^* \in (a, b)}$ такой, что $\boldsymbol{f(x^*) = 0}$.

Особенности метода бисекции

- линейная скорость сходимости,
- не требует вычисления производной.

Алгоритм метода бисекции

```
while b-a>2*eps           % продолжаем цикл, если отрезок
                          % имеет длину большую чем 2*eps
    x=(a+b)/2;            % вычисляем середину [a,b]
    if f(x)==0            % если x - корень,
        break;            % то завершаем цикл
    end;
    if f(x)*f(a)<0        % если на отрезке [a,x] функция f меняет зн
        b=x;              % то x - правый конец нового отрезка,
    else                  % иначе функция f меняет знак на отрезке [x
        a=x;              % и x - левый конец нового отрезка
    end;
end;
```

Метод простой итерации

Метод простой итерации применяется к уравнениям вида

$$x = \varphi(x).$$

Теорема. Пусть существует δ-окрестность $U_\delta(x^*)$ корня x^* такая, что $|\varphi'(x)| \leqslant q < 1$ для всех $x \in U_\delta(x^*)$. Тогда для любого $x^{(0)} \in U_\delta(x^*)$ последовательность $x^{(n+1)} = \varphi(x^{(n)})$ имеет предел

$$\lim_{n \to +\infty} x^{(n)} = x^*.$$

Метод релаксации

Рассмотрим уравнение

$$f(x) = 0. \tag{1}$$

Пусть $0 < m \leqslant f'(x) \leqslant M$. Перепишем уравнение (1) в эквивалентной форме

$$x = x - af(x),$$

где коэффициент a подлежит определению. Полученное уравнение имеет вид $x = \varphi(x)$, где

$$\varphi(x) = x - af(x),$$

может быть решено методом простой итерации, если $|\varphi'(x)| \leqslant q < 1$.

В нашем случае

$$\varphi'(x) = 1 - af'(x),$$

поэтому

$$1 - aM \leqslant \varphi'(x) \leqslant 1 - am.$$

Выбирая любое $a \in (0, \frac{2}{M})$, имеем

$$-1 < 1 - aM \leqslant \varphi'(x) \leqslant 1 - am < 1,$$

т.е. условие сходимости $|\varphi'(x)| \leqslant q = \max\{|1 - aM|, |1 - am|\} < 1$ выполнено. Оптимальным является выбор величины

$$a = \frac{2}{M + m}.$$

Особенности метода релаксации

- одношаговый метод,
- линейная скорость сходимости в окрестности простого корня,
- не требует вычисления производной (на каждом шаге).

Алгоритм метода релаксации

```
xp=0;           % начальное приближение
x=phi(xp);      % 1-ая итерация
c=abs(x-xp);    % постоянная, необходимая при оценке точности
for n=2:inf     % "бесконечный" цикл
    xp=x;       % последнее значение x делаем предпоследним
    x=phi(xp); % очередная итерация
    if abs(x-xp)<eps*(1-q)/q
                % если достигнута требуемая точность,
        break; % то прерываем цикл
    end;
end;
```

Метод Ньютона (метод касательных)

Пусть $\boldsymbol{x}^{(n)}$ заданное приближение к корню $\boldsymbol{x}^*$. Найдём следующее приближение найдём из простых геометрических соображений. Проведём касательную к графику функции $\boldsymbol{y = f(x)}$ в точке $\boldsymbol{x}^{(n)}$ и возьмём в качестве следующего приближения $\boldsymbol{x}^{(n+1)}$ абсциссу точки пересечения этой касательной с осью $\boldsymbol{Ox}$. Уравнение касательной имеет вид

$$\boldsymbol{y = f(x^{(n)}) + f'(x^{(n)})(x - x^{(n)}),}$$

поэтому абсцисса $\boldsymbol{x}^{(n+1)}$ точки пересечения касательной с осью $\boldsymbol{Ox}$ может быть найдена из соотношения $\boldsymbol{0 = f(x^{(n)}) + f'(x^{(n)})(x^{(n+1)} - x^{(n)})}$, следовательно,

$$\boldsymbol{x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(n)})}.}$$

Особенности метода Ньютона

- одношаговый метод,
- квадратичная скорость сходимости в окрестности простого корня,
- требует вычисления производной.

Замечание

Метод Ньютона является частным случаем метода простой итерации, в котором

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Поскольку

$$\varphi'(x) = \frac{f''(x)f(x)}{(f'(x))^2},$$

то сходимость метода Ньютона обеспечивается выполнением в окрестности корня следующего неравенства

$$|f''(x)f(x)| < (f'(x))^2.$$

Алгоритм метода Ньютона

```
x=2;              % начальное приближение
for n=1:inf       % "бесконечный" цикл
    xp=x;         % последнее значение x делаем предпоследним
    x=xp-f(xp)/df(xp);
    if abs(x-xp)<=eps
                  % если достигнута требуемая точность,
        break;    % то прерываем цикл
    end;
end;
```

Метод Ньютона для кратных корней

В случае кратного корня должна использоваться следующая схема

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - k\frac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(n)})},$$

где k — кратность корня.

Квазиньютоновские методы

Метод ложного положения

Если заменить в методе Ньютона величину $f'(x^{(n)})$ её приближённым значением

$$\frac{f(c) - f(x^{(n)})}{c - x^{(n)}} \approx f'(x^{(n)}),$$

получится метод ложного положения

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{c - x^{(n)}}{f(c) - f(x^{(n)})} f(x^{(n)}).$$

Особенности метода ложного положения

- одношаговый метод,
- линейная скорость сходимости в окрестности простого корня,
- не требует вычисления производной.

Метод секущих

Если заменить в методе Ньютона величину $\boldsymbol{f'(x^{(n)})}$ её приближённым значением

$$\frac{f(x^{(n-1)}) - f(x^{(n)})}{x^{(n-1)} - x^{(n)}} \approx f'(x^{(n)}),$$

получится метод секущих

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{x^{(n-1)} - x^{(n)}}{f(x^{(n-1)}) - f(x^{(n)})} f(x^{(n)}).$$

Особенности метода секущих

- двухшаговый метод,
- порядок сходимости $\boldsymbol{p = \frac{\sqrt{5}+1}{2}}$ в окрестности простого корня,
- не требует вычисления производной,
- наиболее экономичный.

Алгоритм метода секущих

```
xpp=2; xp=1.5;           % начальные приближения
for n=1:inf              % "бесконечный" цикл
    x=xp-(xpp-xp)/(f(xpp)-f(xp))*f(xp); % очередная итерация
    if abs(x-xp)<eps   % если достигнута требуемая точность,
        break;           % то прерываем цикл
    end;
    xpp=xp;     % предпоследнее значение делаем предпредпоследним
    xp=x;       % последнее значение делаем предпоследним
end;
```

Метод Стеффенсона

Если заменить в методе Ньютона величину $f'(x^{(n)})$ её приближённым значением

$$\frac{f(x^{(n)} + f(x^{(n)})) - f(x^{(n)})}{f(x^{(n)})} \approx f'(x^{(n)}),$$

получится метод Стеффенсона

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f^2(x^{(n)})}{f(x^{(n)} + f(x^{(n)})) - f(x^{(n)})}.$$

Особенности метода Стеффенсона

- одношаговый метод,
- квадратичная скорость сходимости,
- не требует вычисления производной,
- экономичность такая же как у метода Ньютона.

Алгоритм метода Стеффенсона

```
x=2;            % начальное приближение
for n=1:inf     % "бесконечный" цикл
    xp=x;       % последнее значение x делаем предпоследним
    x=xp-(f(xp))^2/(f(xp+f(xp))-f(xp));
    if abs(x-xp)<=eps % если достигнута требуемая точность,
        break;        % то прерываем цикл
    end;
end;
```