ЛЕКЦИИ ПО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ

МГТУ им. Н.Э. Баумана
Москва

Метод Хаусхолдера (метод отражений)

Определение. Ортогональная 2×2-матрица Q называется **матрицей отражения**, если

$$Q = \begin{bmatrix} \cos(\vartheta) & \sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & -\cos(\vartheta) \end{bmatrix}$$

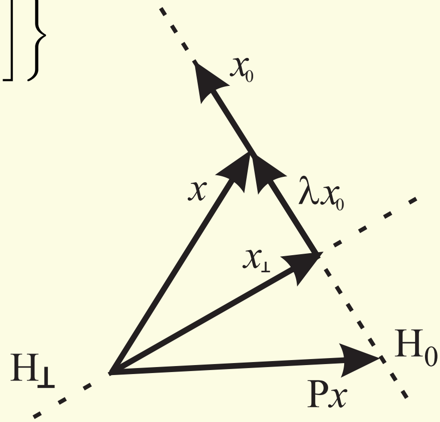
Если $y = Q^T x = Qx$, то y получается отражением x относительно оси, определяемой как

$$S = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} \cos(\vartheta/2) \\ \sin(\vartheta/2) \end{bmatrix} \right\}$$

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^n$ - произвольный ненулевой вектор.

Пусть $\mathcal{H}^\perp$ – ортогональное дополнение одномерного линенйного пространства $\mathcal{H}_0 = \operatorname{span}\{x_0\}$.

Тогда, $x = \lambda x_0 + x_\perp$ для $\forall x \in \mathbb{R}^n$, где λx_0 – ортогональная проекция вектора x на $\mathcal{H}_0$ а $x_\perp$ – его ортогональная составляющая.



Рассмотрим преобразование

$$Px = P(\lambda x_0 + x_\perp) = x_\perp - \lambda x_0 = x - 2\lambda x_0. \qquad (1)$$

Выберем в качестве вектора x_0 вектор ω такой, что $||\omega|| = 1$. Тогда $\lambda = (x, \omega)$ и преобразование (1) можно переписать в виде

$$Px = x - 2(x,\omega)\omega = \left(E - 2\omega\omega^T\right) x.$$

Оператор P, указанного вида, называется **оператором отражений** или **оператором Хаусхолдера**. Матрицу $P = \left(E - 2\omega\omega^T\right)$, соответствующую данному оператору называют **матрицей отражений** или **матрицей Хаусхолдера**.

Свойства оператора Хаусхолдера

- Преобразование Хаусхолдера является линейным.
- Оператор Хаусхлдера - симметричный оператор.
- Оператор Хаусхолдера - ортогональный оператор.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что

$$PP^T = \left(E - 2\omega\omega^T\right)\left(E - 2\omega\omega^T\right)^T = E - 2\omega\omega^T - 2\omega\omega^T + 4\omega\omega^T\omega\omega^T = E.$$

Следовательно, все собственные значения матрицы P равны или $+1$, или -1.

Собственному значению -1 отвечает собственный вектор $-\omega$.

$$P\omega = E\omega - 2\omega\omega^T\omega = \omega - 2\omega = -\omega. \tag{2}$$

По свойствам симметричных матриц, все векторы ортогональные ω являются также собственными векторами матрицы P,

$$P\nu = E\nu - 2\omega\omega^T\nu = \nu - 2\omega(\omega,\nu) = \nu. \tag{3}$$

Данным векторам соответствуют собственные числа $+1$.

Покажем, что действие оператора Хаусхолдера дает зеркальное отражение вектора x относительно гиперплоскости, ортогональной вектору ω.

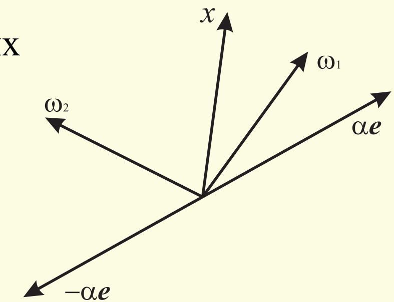
Произвольный вектор x можно представить в виде $x = y + \nu$, где $(\nu,\omega) = 0$ и $y = \mu\omega$.

Тогда, $y = (x,\omega)\omega$ и $\nu = x - (x,\omega)\omega$. Используюя равенства (2) и (3) имеем

$$Px = P(y+\nu) = Py + \nu = (x,\omega)P\omega + \nu = -(x,\omega)\omega + \nu = -y + \nu.$$

Основная задача : подобрать вектор ω в операторе Хаусхолдера таким образом, чтобы в результате преобразования полученный вектор имел направление заданного единичного вектора e, т. е. $Px = \alpha e$ или $Px = -\alpha e$, где $\alpha > 0$.

Так как при ортогональных преобразованиях длины векторов сохраняются, то



$$||Px|| = ||x|| = ||\alpha e|| = \alpha ||e|| = \alpha$$

Из определения отражения следует, что

$$Px - x = -2(x, \omega)\omega.$$

Следовательно, направление, перпендикулярное плоскости отражения, будет определяться либо вектором $x - \alpha e$, либо вектором $x + \alpha e$

Тогда

$$Px = x - 2(x,\omega)\omega = x - 2\frac{(x, x - \alpha e)}{||x - \alpha e||^2}(x - \alpha e) =$$

$$= x - \frac{2||x||^2 - 2\alpha(x, e)}{2||x||^2 - 2\alpha(x, e)}(x - \alpha e) = x - x + \alpha e = \alpha e.$$

В общем случае не обязательно, чтобы вектор ω имел единичную норму. Пусть $v \in \mathbb{R}^n$ – ненулевой вектор.
Тогда матрицу Хаусхолдера можно записать в виде

$$P = E - \frac{2vv^T}{v^Tv}, \tag{4}$$

где вектор v называют **вектором Хаусхолдера**.

На практике отражения Хаусхолдера будем использовать для обнуления выбранных компонент вектора.
В частности, пусть задан ненулевой вектор $x \in \mathbb{R}^n$ и мы хотим, чтобы вектор Px был коллинеарен вектору e_1 – первому столбцу матрицы E_n. Тогда

$$Px = \left(E - \frac{2vv^T}{v^Tv}\right)x = x - 2\frac{v^Tx}{v^Tv}v.$$

Из того, что $Px \in \operatorname{span}\{e_1\}$ и $v \in \operatorname{span}\{x, e_1\}$.
Положим $v = x + \alpha_1 e_1$. Тогда

$$v^Tx = x^Tx + \alpha_1 x_1,$$
$$v^Tv = x^Tx + 2\alpha_1 x_1 + \alpha_1^2,$$

и

$$Px = \left(1 - 2\frac{x^T x + \alpha_1 x_1}{x^T x + 2\alpha_1 x_1 + \alpha_1^2}\right) x - 2\alpha_1 \frac{v^T x}{v^T v} e_1.$$

Для коллинеарности Px и e_1 нужно, чтобы коэффициент при $x \in \mathbb{R}^n$ был нулевым.

Решая данное уравнение получаем, что $\alpha_1 = \pm\sqrt{x^T x}$ (данный результат уже был получен ранее). Тогда

$$v = x \pm \sqrt{x^T x}\, e_1 \qquad (5)$$

и

$$Px = \left(E - \frac{2vv^T}{v^T v}\right) x = \mp\sqrt{x^T x}\, e_1.$$

Вычисление вектора Хаусхолдера

Рассмотрим некоторые нюансы. А именно, выбор знака в равенстве (5). Если x почти коллинеарен вектору e_1, то вектор

$$v = x - \mathrm{sign} x_1 \sqrt{x^T x}\, e_1$$

имеет малую норму. Поэтому возможно появление большой относительной ошибки при вычислении множителя $\dfrac{2}{v^T v}$.

Эту трудность можно обойти, если взять α_1 с тем же знаком, что и знак первой компоненты вектора x, т. е.

$$v = x + \mathrm{sign} x_1 \sqrt{x^T x}\, e_1.$$

заметим, что при таком выборе $||v||_\infty = |v_1|$.

Полезно также придерживаться такой нормировки вектора v, что $v_1 = 1$. Данное условие можно выполнить, если первую компоненту взять равной единице, т. е. $v_1 = 1$, а все остальные компоненты получить как

$$v_i = \frac{v_i}{x_1 + \mathrm{sign}\, x_1 \sqrt{x^T x}}.$$

Данное представление иногда упрощает алгоритмы, в которых нужно хранить вектор Хаусхолдера.

Пример. Дан вектор $x = (3,\ 1,\ 5,\ 1)^T$. Найдем матрицу оператора Хаусхолдера, который отражает вектор x относительно гиперплоскости перпендикулярной вектору v таким образом, что $Px = \alpha_1 e_1$, где $e_1 = (1,\ 0,\ 0,\ 0)^T$.

С учетом нормировки вектор Хаусхолдера $v = (1,\ 1/9,\ 5/9,\ 1/9)^T$. Тогда матрица Хаусхолдера

$$P = \frac{1}{54}\begin{pmatrix} -27 & -9 & -45 & -9 \\ -9 & 53 & -5 & -1 \\ -45 & -5 & 29 & -5 \\ -9 & -1 & -5 & 53 \end{pmatrix}$$

Замечание. Преобразование Хаусхолдера не требует явного формирования матрицы Хаусхолдера, так как

$$PA = \left(E - \frac{2vv^T}{v^Tv}\right)A = A + v\varphi^T,$$

где $\varphi = \beta A^T v$ и $\beta = -\dfrac{2}{v^Tv}$.

Схема алгоритма. Пусть матрицы $A \in \mathbf{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ и $n = 5$. Пусть матрица Хаусхолдера P_1 и P_2 таковы, что

$$P_2P_1A = \begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \otimes & \times & \times \\ 0 & 0 & \otimes & \times & \times \\ 0 & 0 & \otimes & \times & \times \end{pmatrix}$$

Найдем матрицу Хаусхолдера $\tilde{P}_3 \in \mathbf{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ такую, что

$$\tilde{P}_3 \begin{pmatrix} \otimes \\ \otimes \\ \otimes \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \times \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Если $P_3 = \mathbf{diag}(E_2, \tilde{P}_3)$, то

$$P_3P_2P_1A = \begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times \end{pmatrix}$$

QR разложение матрицы.

Выполнив n таких шагов, мы получаем верхнюю треугольную матрицу $P_n P_{n-1} \dots P_2 P_1 A = R$.

Таким образом, положив $Q = P_1 P_2 \dots P_{n-1} P_n$ имеем $A = QR$, где Q - **ортогональная матрица**, а R - **верхняя треугольная матрица**.

Метод Гивенса (метод вращений)

Определение. Ортогональная 2×2-матрица Q называется **матрицей вращения**, если

$$Q = \begin{bmatrix} \cos(\vartheta) & \sin(\vartheta) \\ -\sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{bmatrix}$$

Если $y = Q^T x$, то y получается поворотом x на угол ϑ против часовой стрелки.

Отражения Хаусхолдера полезны при крупномасштабных обнулениях. Однако, когда необходимо избирательное зануление элементов предпочтительнее использовать **вращения Гивенса**.

Матрица Гивенса имеет следующий вид

$$G = \begin{array}{cc}
\begin{pmatrix}
1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0\\
\vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
0 & \dots & c & \dots & s & \dots & 0\\
\vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots\\
0 & \dots & -s & \dots & c & \dots & 0\\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1
\end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ k \\ \\ \\ \end{matrix} \\
\begin{matrix} \quad & \quad & i & \quad & k & \quad & \quad \end{matrix} &
\end{array}$$

где $c = \cos(\vartheta)$, а $s = \sin(\vartheta)$.

Если $y = G^T x$, то $y_j = \begin{cases} cx_i - sx_k, & j = i, \\ sx_i + cx_k, & j = k, \\ x_j, & j \neq k, i. \end{cases}$

Тогда y_k можно обратить в ноль, положив $c = \dfrac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + x_k^2}}, \quad s = \dfrac{-x_k}{\sqrt{x_i^2 + x_k^2}}$.

Данное преобразование равносильно повороту вектора x на угол ϑ против часовой стрелки в координатной плоскости (i, k).

Преобразования Гивенса, так же как и Хаусхолдера можно использовать для QR - **разложения** матрицы, т. е. $A = QR$, где Q – ортогональная матрица, а R – верхняя треугольная матрица, а также для численного решения СЛАУ.

Рассмотрим **прямой ход метода**. Запишем систему линейных алгебраических уравнений.

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = f_1,\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = f_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mm}x_m = f_m.
\end{aligned}$$

На 1-м шаге неизвестное x_1 исключается из всех уравнений, кроме первого. Для исключения x_1 из 2-го уравнения вычислим числа

$$c_{12} = \frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}}, \quad s_{12} = \frac{-a_{21}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}},$$

которые обладают следующими свойствами:

$$c_{12}^2 + s_{12}^2 = 1, \quad s_{12}a_{11} + c_{12}a_{21} = 0.$$

Затем 1-е уравнение системы заменяют линейной комбинацией 1-го и 2-го уравнений с коэффициентами c_{12} и $-s_{12}$, т. е.

$$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m)\, c_{12} + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m)\, (-s_{12}) = \\ = f_1 c_{12} + f_2(-s_{12}).$$

А 2-е уравнение – линейной комбинацией 1-го и 2-го уравнений с коэффициентами s_{12} и c_{12}, т. е.

$$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m)\, s_{12} + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m)\, c_{12} = \\ = f_1 s_{12} + f_2 c_{12}.$$

В результате получаем систему

$$\begin{aligned} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{1m}^{(1)}x_m &= f_1^{(1)}, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2m}^{(1)}x_m &= f_2^{(1)}, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3m}x_m &= f_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mm}x_m &= f_m, \end{aligned}$$

в которой

$$a_{1j}^{(1)} = c_{12}a_{1j} - s_{12}a_{2j}, \quad a_{2j}^{(1)} = s_{12}a_{1j} + c_{12}a_{2j}, \quad j = \overline{1, m}$$

$$f_1^{(1)} = c_{12}f_1 - s_{12}f_2, \quad f_2^{(1)} = s_{12}f_1 + c_{12}f_2.$$

Заметим, что $a_{21}^{(1)} = 0$ в силу специального выбора коэффициентов c_{12} и s_{12}.

Если в исходной системе коэффициент $a_{21} = 0$, т. е. система уже приведена к нужному виду, то полагают $c_{12} = 1$, а $s_{12} = 0$.

Преобразование исходной системы равносильно умножению слева матрицы A и столбца f на матрицу T_{12}, которая имеет вид

$$T_{12} = \begin{pmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ s_{12} & c_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Для исключения неизвестного x_1 из 3-го уравнения вычислим числа

$$c_{13} = \frac{a_{11}^{(1)}}{\sqrt{\left(a_{11}^{(1)}\right)^2 + a_{31}^2}}, \quad s_{13} = \frac{-a_{31}}{\sqrt{\left(a_{11}^{(1)}\right)^2 + a_{31}^2}},$$

которые обладают следующими свойствами:

$$c_{13}^2 + s_{13}^2 = 1, \quad s_{13}a_{11}^{(1)} + c_{13}a_{31} = 0.$$

Затем 1-е уравнение системы заменяют линейной комбинацией 1-го и 3-го уравнений с коэффициентами c_{13} и $-s_{13}$, т. е.

$$\left(a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{1m}^{(1)}x_m\right)c_{13} + (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3m}x_m)(-s_{13}) =$$
$$= f_1^{(1)}c_{13} + f_3(-s_{13}).$$

А 3-е уравнение – линейной комбинацией 1-го и 3-го уравнений с коэффициентами s_{13} и c_{13}, т. е.

$$\left(a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{1m}^{(1)}x_m\right)s_{13} + (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3m}x_m)\,c_{13} =$$
$$= f_1^{(1)}(-s_{13}) + f_3c_{13}.$$

В результате получаем систему

$$
\begin{aligned}
a_{11}^{(2)}x_1 + a_{12}^{(2)}x_2 + \ldots + a_{1m}^{(2)}x_m &= f_1^{(2)},\\
a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2m}^{(1)}x_m &= f_2^{(1)},\\
a_{32}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{3m}^{(1)}x_m &= f_3^{(1)},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mm}x_m &= f_m,
\end{aligned}
$$

Это преобразование системы равносильно умножению слева на матрицу T_{13}, которая имеет вид

$$
T_{13} = \begin{pmatrix}
c_{13} & 0 & -s_{13} & 0 & \ldots & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0\\
s_{13} & 0 & c_{13} & 0 & \ldots & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1
\end{pmatrix}.
$$

Аналогично можно исключить x_1 из уравнений с номерами $i = \overline{4, m}$.

В результате проделанных действий система приводится к виду

$$
\begin{aligned}
a_{11}^{(m-1)}x_1 + a_{12}^{(m-1)}x_2 + \ldots + a_{1m}^{(m-1)}x_m &= f_1^{(m-1)},\\
a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2m}^{(1)}x_m &= f_2^{(1)},\\
a_{32}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{3m}^{(1)}x_m &= f_3^{(1)},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{m2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{mm}^{(1)}x_m &= f_m^{(1)}.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

В матричном виде получаем $A^{(1)}x = f^{(1)}$, где

$$
A^{(1)} = T_{1m}T_{1(m-1)}\ldots T_{13}T_{12}A, \qquad f^{(1)} = T_{1m}T_{1(m-1)}\ldots T_{13}T_{12}f.
$$

T_{kl} – матрица элементарных преобразований, отличающаяся от единичной матрицы только 4-мя элементами. В ней элементы с индексами (k, k) и (l, l) равны c_{kl}, элементы с индексами (k, l) – s_{kl}, а элементы с индексами (l, k) – $(-s_{kl})$, причем выполнено равенство

$$
c_{kl}^2 + s_{kl}^2 = 1.
$$

Действие матрицы T_{kl} на вектор x эквивалентно его повороту вокруг оси, перпендикулярной плоскости Ox_kx_l на угол φ_{lk} такой, что $c_{kl} = \cos\varphi_{kl}$ и $s_{kl} = \sin\varphi_{kl}$. Заметим, что

$$T_{kl}^T = T_{kl}^{-1}.$$

Следовательно матрица T_{kl} – ортогональная матрица.

На 2-м шаге метода вращений, из уравнений системы (6) с номерами $i = \overline{3, m}$ исключают неизвестное x_2. Для этого каждое i-е уравнение комбинируют со вторым уравнением. В результате приходи к системе

$$\begin{aligned}
a_{11}^{(m-1)}x_1 + a_{12}^{(m-1)}x_2 + a_{12}^{(m-1)}x_3 + \ldots + a_{1m}^{(m-1)}x_m &= f_1^{(m-1)},\\
a_{22}^{(m-1)}x_2 + a_{23}^{(m-1)}x_3 + \ldots + a_{2m}^{(m-1)}x_m &= f_2^{(m-1)},\\
a_{33}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{3m}^{(2)}x_m &= f_3^{(2)},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{3m}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{mm}^{(2)}x_m &= f_m^{(2)}.
\end{aligned}$$

В матричном виде получаем

$$A^{(2)}x = f^{(2)},$$

где $A^{(2)} = T_{2m}T_{2(m-1)}\ldots T_{24}T_{23}A^{(1)}, \qquad f^{(2)} = T_{2m}T_{2(m-1)}\ldots T_{24}T_{23}f^{(1)}.$

После завершения $(m-1)$-го шага система принимает вид

$$
\begin{aligned}
a_{11}^{(m-1)}x_1 + a_{12}^{(m-1)}x_2 + a_{12}^{(m-1)}x_3 + \ldots + a_{1m}^{(m-1)}x_m &= f_1^{(m-1)}, \\
a_{22}^{(m-1)}x_2 + a_{23}^{(m-1)}x_3 + \ldots + a_{2m}^{(m-1)}x_m &= f_2^{(m-1)}, \\
a_{33}^{(m-1)}x_3 + \ldots + a_{3m}^{(m-1)}x_m &= f_3^{(m-1)}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{mm}^{(m-1)}x_m &= f_m^{(m-1)}
\end{aligned}
$$

или $A^{(m-1)}x = f^{(m-1)}$, где

$$A^{(m-1)} = T_{m-1,m}A^{(m-2)}, \qquad f^{(m-1)} = T_{m-1,m}f^{(m-2)}$$

Введем обозначение R для полученной верхней треугольной матрицы $A^{(m-1)}$. Она связана с исходной матрицей равенством

$$R = TA$$

где $T = T_{m-1,m}\ldots T_{2m}T_{2(m-1)}\ldots T_{24}T_{23}\ldots T_{1m}T_{1(m-1)}\ldots T_{13}T_{12}$ – матрица результирующего вращения. Матрица T является ортогональной, так как является произведением ортогональных матриц.

Введем обозначение $Q = T^{-1} = T^T$. Таким образом получаем QR разложение матрицы A.

Обратный ход метода вращения проводится точно также как и для метода Гаусса.

Метод вращения обладает хорошей числовой устойчивостью, однако он более трудоемок по сравнению с методом Гаусса.

Иллюстрация метода вращений

$$\begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & \times & \times \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times \end{pmatrix}$$