ЛЕКЦИИ ПО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ

МГТУ им. Н.Э. Баумана
Москва

ВВЕДЕНИЕ

Содержание курса

▷ *Модуль 1*. Методы численного решения задач линейной алгебры.

▷ *Модуль 2*. Методы отыскания решений нелинейных уравнений. Интерполяция и приближение функций.

▷ *Модуль 3*. Численное интегрирование и дифференцирование

Контрольные мероприятия

▷ Домашние задания.

▷ Рубежный контроль.

Структура курса

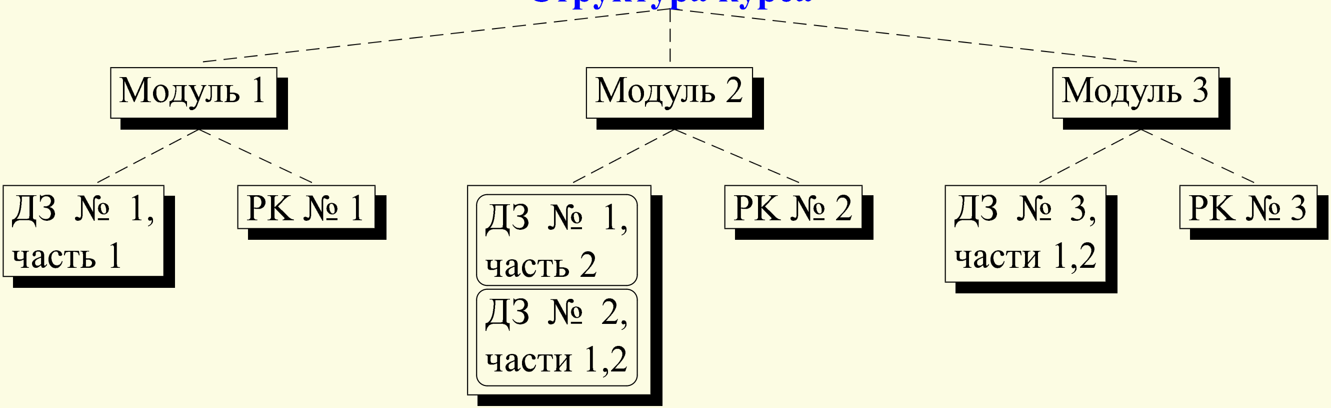
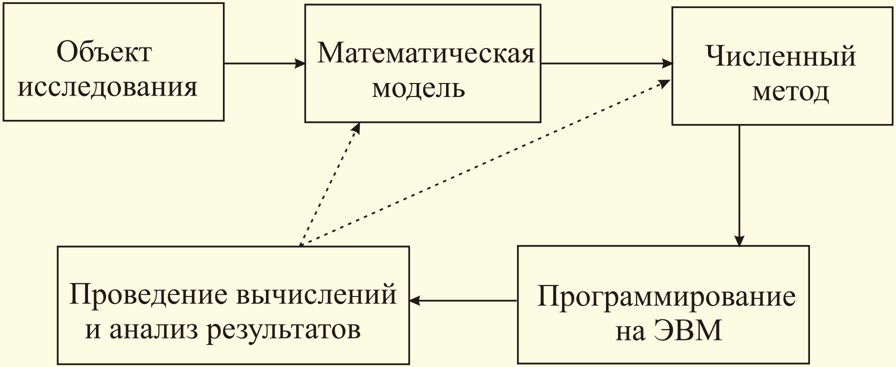


График выполнения контрольные мероприятий

№ недели	1	2	3	4	5	6 (1М)	7	8	9	10	11(2М)	12	13	14	15	16(3М)	17
Лекции		√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√	√
Семнары			√		√		√		√		√		√		√		√
ДЗ (ЛАБ.)						лаб. 1, часть 1		лаб. 1, часть 2, лаб. 2, часть 1		лаб. 2, часть 2				лаб. 3, часть 1		лаб. 3, часть 2	
РК					45 мин, задачи						90 мнут				90 мнут		
КСР		√		√		√		√		√		√		√		√	

ЛЕКЦИЯ 1

Схема анализа изучаемого процесса методами математического моделирования



Математическое моделирование представляет собой метод исследования объектов и процессов, проходящих в различных сферах человеческой деятельности при помощи их приближенного описания на математическом языке. Для этого формулируются основные законы, которым подчиняется объект исследования и строится **математическая модель**.

Математическая модель представляет собой запись этих законов в виде систем уравнений (алгебраических, дифференциальных, интегральных и т. д.).

Основные типы решаемых задач

Типы данных входящие в математическую модель.

- Входные данные.
- Параметры модели.
- Выходные данные

Прямая задача. По известным значениям входных данных и фиксированных значениях параметров математической модели требуется найти решение (выходные данные).

Обратная задача. По известным значениям выходных данных, т. е. известно решение, и фиксированных значениях параметров математической модели нужно определить значения входных данных, т. е. причины, которые вызвали уже известное следствие.

Задача идентификации. Задача выбора из параметрического семейства математических моделей (выбора параметра модели) той, которая оптимально, в смысле некоторого критерия, согласует выходные данные с результатами наблюдений.

Погрешности результата численного решения задачи

Неустранимые погрешности. Так как математическая модель изучаемого процесса носит лишь приближенный характер, что связано с упрощением исходного явления (не учитываются факторы, оказывающие незначительное влияние на изучаемый процесс), то по отношению к численному методу, данные погрешности являются неустранимыми.

Погрешности метода. Эти погрешности возникают при переходе от математической модели к численному методу, так как данные методы являются приближенными.

Вычислительные погрешности. Возникают в связи с точностью представления вещественных чисел на ЭВМ при вводе данных или при проведении арифметических операций.

ЛЕКЦИЯ 2

Абсолютная и относительная погрешности

x - точное значение некоторой величины

x^* - приближенное значение величины x

Определение. Ошибкой или **погрешностью** приближенного числа x^* называют разность $x - x^*$ между точным и приближенным значениями.

Определение. Абсолютной погрешностью называется величина:

$$\Delta(x^*) = |x - x^*|.$$

Определение. Относительной погрешностью величины x^* при апроксимации ненулевой величины x называется величина

$$\delta(x^*) = \frac{|x - x^*|}{|x|} = \frac{\Delta(x^*)}{|x|}.$$

На практике

$$|x-x^*| \leqslant \overline{\Delta}\,(x^*)\,, \qquad \frac{|x-x^*|}{|x|} \leqslant \overline{\delta}\,(x^*)\,,$$

$$\overline{\delta}\,(x^*) \approx \frac{\overline{\Delta}\,(x^*)}{|x^*|}; \quad \overline{\Delta}\,(x^*) \approx |x^*|\,\overline{\delta}\,(x^*)\,.$$

$\overline{\Delta}\,(x^*)$ и $\overline{\delta}\,(x^*)$ – **верхними границами** абсолютной и относительной погрешностей.

Правила записи приближенных чисел

Определение. Значащими цифрами числа называют все цифры в его записи, начиная с первой ненулевой слева.

Определение. Значащую цифру числа x^* называют **верной**, если абсолютная погрешность числа не превосходит единицы разряда, соответствующего этой цифре.

Погрешности округления

Округление усечением.

Отбрасывание всех цифр, расположенных справа от n-ой значащей цифры.

Абсолютная величина погрешности при таком округлении не превышает единицы разряда, соответствующего последней оставляемой цифре.

Округление по дополнению.

Если первая слева из отбрасываемых цифр меньше 5, то сохраняемые цифры остаются без изменения. Если же она больше или равна 5, то в младший сохраняемый разряд добавляется единица.

Абсолютная величина погрешности при таком округлении не превышает половины единицы разряда, соответствующего последней оставляемой цифре.

Некоторые особенности машинной арифметики

• На ЭВМ можно хранить лишь конечное число значащих цифр числа (из-за конечности разрядной сетки). Следовательно, на ЭВМ представим конечный набор действительных чисел.

Указанное представление действительных чисел в ЭВМ называется представлением с **плавающей запятой** - $x^* = fl(x)$.

• Диапазон изменения чисел в ЭВМ ограничен. Таким образом, для представимых на ЭВМ чисел x имеем $0 < X_0 \leqslant |x| < X_{inf}$. Число X_0 - наименьшее положительное число, представимое на ЭВМ, а X_{inf} - наибольшее.

Последствия представления чисел с плавающей запятой

• Полученное решение верно лишь с машинной точностью.

• В зависимости от машины результат каждой промежуточной арифметической операции либо округляется, либо усекается до машинной точности.

• Определенные элементы алгоритма, например, критерии останова будут зависеть от машинной точности.

Введем характеристику **машинной точности**. Для этого используют понятие **машинного эпсилон** ε_m. Для конкретной вычислительной машины оно определяется как наименьшее положительное число ε_m такое, что $\varepsilon_m + 1 > 1$.

Погрешности арифметических операций над приближенными числами

Теорема. **(Об абсолютной погрешности алгебраической суммы)** Абсолютная погрешность алгебраической суммы (разности) на превосходит суммы абсолютных погрешностей слагаемых:

$$\Delta\left(x^{*} \pm y^{*}\right) \leqslant \Delta\left(x^{*}\right)+\Delta\left(y^{*}\right).$$

Теорема. **(Об относительной погрешности алгебраической суммы)** Пусть x и y – ненулевые числа одного знака. Тогда справедливы неравенства

$$\delta\left(x^{*}+y^{*}\right) \leqslant \delta_{\max}; \quad \delta\left(x^{*}-y^{*}\right) \leqslant \nu\delta_{\max},$$

где $\delta_{\max}=\max\left\{\delta\left(x^{*}\right), \delta\left(y^{*}\right)\right\}$, $\nu=\dfrac{|x+y|}{|x-y|}$

Следствие.

$$\bar{\delta}(x^*+y^*)=\bar{\delta}_{\max};\quad \bar{\delta}(x^*-y^*)=\nu\bar{\delta}_{\max},$$

где $\bar{\delta}_{\max}=\max\left\{\bar{\delta}(x^*),\bar{\delta}(y^*)\right\}$, $\nu=\dfrac{|x+y|}{|x-y|}$.

Теорема. (Об относительной погрешности произведения и частного) Для относительных погрешностей произведения и частного приближенных чисел верны оценки

$$\delta(x^*y^*)\leqslant\delta(x^*)+\delta(y^*)+\delta(x^*)\delta(y^*),$$

$$\delta\left(\frac{x^*}{y^*}\right)\leqslant\frac{\delta(x^*)+\delta(y^*)}{1-\delta(y^*)},\quad \text{где}\quad \delta(y^*)<1.$$

Следствие. Если $\bar{\delta}(x^*)\ll 1$ и $\bar{\delta}(y^*)\ll 1$, то для оценки границ относительных погрешностей можно использовать следующие приближенные равенства:

$$\bar{\delta}(x^*y^*)\approx\bar{\delta}(x^*)+\bar{\delta}(y^*);\quad \bar{\delta}\left(\frac{x^*}{y^*}\right)\approx\bar{\delta}(x^*)+\bar{\delta}(y^*).$$

Погрешность функции.

$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ дифференцируемая в области D функция.

Вместо $y = f(x)$, в действительности, вычисляется $y^* = f(x^*)$.

Теорема. Для абсолютной погрешности значения $y^* = f(x^*)$ справедлива следующая оценка:

$$\Delta(y^*) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \max_{[x,x^*]} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta(x_i^*).$$

Следствие: Если $x^* \approx x$, то

$$\overline{\Delta}(y^*) \approx \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i} \right| \overline{\Delta}(x_i^*), \quad \overline{\Delta}(y^*) \approx \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \right| \overline{\Delta}(x_i^*).$$

$$\bar{\delta}(y^*) \approx \sum_{i=1}^{n} \nu_i^* \bar{\delta}(x_i^*), \quad \bar{\delta}(y^*) \approx \sum_{i=1}^{n} \nu_i \bar{\delta}(x_i^*),$$

где $\nu_i^* = \dfrac{|x_i^*| \left| \dfrac{\partial f(x^*)}{\partial x_i} \right|}{|f(x^*)|}, \quad \nu_i = \dfrac{|x_i| \left| \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i} \right|}{|f(x)|}.$