ЛЕКЦИИ ПО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ

МГТУ им. Н.Э. Баумана
Москва

Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

Постановка задачи.

$$\begin{aligned} &\frac{d\,u(t)}{dt} = f(t,u), \\ &u(t_0) = u_0. \end{aligned} \qquad (1)$$

Устойчивость решения задачи Коши на конечном отрезке.

u_0^* - возмущенное начальное значение.

ε_0 - погрешность начального значения.

$u^*(t)$ - решение соответствующей задачи Коши

$$\begin{aligned} &\frac{d\,u^*(t)}{dt} = f(t,u^*(t)), \\ &u^*(t_0) = u_0^*. \end{aligned} \qquad (2)$$

Вычтем из уравнения (1) уравнение (2), тогда

$$f(t,u(t)) - f(t,u^*(t)) = \lambda(t)(u(t)-u^*(t)) = f'_u(t,\tilde{u}(t))(u(t)-u^*(t)),$$

где $\tilde{u}(t)$ - некоторое промежуточное значение между $u(t)$ и $u^*(t)$.
Пусть $\varepsilon(t) = u(t) - u^*(t)$ - погрешность решение задачи Коши, тогда

$$\begin{aligned} &\frac{d\,\varepsilon(t)}{dt} = \lambda(t)\varepsilon(t), \\ &\varepsilon(t_0) = \varepsilon_0, \end{aligned} \qquad (3)$$

и погрешность (3) можно выразить формулой

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \exp\left\{\int\limits_{t_0}^{t} \lambda(\tau)\,d\tau\right\}.$$

Рассмотрим величину

$$C(t) = \exp\left\{\int\limits_{t_0}^{t} \lambda(\tau)\,d\tau\right\} = \exp\left\{\int\limits_{t_0}^{t} f'_u(\tau, \tilde{u}(\tau))\,d\tau\right\}.$$

$C(t)$ называется **коэффициентом роста ошибки в задаче Коши**.

• Если $f'_u < 0$, то $|\varepsilon(t)|$ с ростом t монотонно убывает, а соответствующие интегральные кривые сближаются. Таким образом, ошибка, внесенная в начальные значения затухает.

• Если $f'_u > 0$, то $|\varepsilon(t)|$ с ростом t монотонно возрастает и соответстующие интегральные кривые расходятся.

Из теоремы Коши следует, что коэффициент $C(t)$ роста ошибки будет ограниченным, если задача решается на конечном отрезке $[t_0, T]$. Тогда

$$\int\limits_{t_0}^{t} f'_u(\tau, \tilde{u}(\tau))\, d\tau \leqslant \int\limits_{t_0}^{t} \sigma\, d\tau = \sigma(t - t_0).$$

Следовательно, $C(t) \leqslant K(T)$, где

$$K(T) = \begin{cases} \exp\left[\sigma(T - t_0)\right], & \sigma > 0, \\ 1, & \sigma \leqslant 0. \end{cases}$$

Таким образом, при выполнении условия $f'_u \leqslant \sigma$ справедлива оценка

$$\max_{t_0 \leqslant t \leqslant T} |u(t) - u^*(t)| \leqslant K(T)\, |u_0 - u_0^*|\,.$$

Данная оценка выражает **устойчивость на конечном отрезке** $[t_0, T]$ **решения задачи Коши по начальным значениям.**

Теорема. (Устойчивость решения задачи Коши по правой части.) Пусть выполнены следующие условия:

1. $f(t,u)$ определена и непрерывна в области G плоскости переменных t и u.
2. $f(t,u)$ удовлетворят условию Липшица

$$|f(t,u_1) - f(t,u_2)| \leqslant L\,|u_1 - u_2|, \quad \forall y_1, y_2, \quad t \in [t_0, T],$$

где L - некоторая постоянная (постоянная Липшица).

3. $u(t)$ - решение задачи Коши (1).
4. $u^*(t)$ - решение задачи

$$\frac{d\,u^*(t)}{dt} = f(t, u^*(t)) + \varphi(t),$$
$$u^*(t_0) = u_0^*.$$

Тогда справедлива оценка

$$\max_{t_0 \leqslant t \leqslant T} |u(t) - u^*(t)| \leqslant K(T)\,|u_0 - u_0^*| + \int\limits_{t_0}^{T} |\varphi(t)|\,dt,$$

выражающая устойчивость на конечном отрезке $[t_0, T]$ решения задачи Коши по начальным значениям и правой части. Здесь $K(T) = \exp\left[L(T - t_0)\right]$

Дискретная задача Коши.

Введем разбиение отрезка $[t_0, T]$, которое назовем **сеткой**:

$$t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$$

Заменим задачу Коши ее дискретным аналогом - системой уравнений, решая которую можно последовательно найти $y_0, y_1 \ldots, y_n$, которые играют роль приближений к значениям решения задачи Коши в узлах сетки.

Будем обозначать через $u(t)$ точное решение задачи Коши, а через $y_n = y(t_n)$ - приближенное решение (данное решение является сеточной функцией, т. е. определяется только в узлах сетки). Тогда

$$\frac{1}{h}(\alpha_0 y_{n+1} + \alpha_1 y_n + \cdots + \alpha_k y_{n+1-k}) = \Phi(t_n, y_{n+1-k}, \ldots, y_n, y_{n+1}, h). \qquad (4)$$

• Стоящую в левой части равенства сумму можно рассматривать как разностную аппроксимацию производной $u'(t)$.

• Правую часть равенства можно рассматривать как специальным образом построенную аппроксимацию функции f.

• Значение y_{n+1} приближенного решения в очередной точке находится из уравнения (4).

Определение. Если для нахождения приближенного решения y_{n+1} используются ранее найденные значения сеточной функции в k предыдущих точках $t_{n+1-k}, \ldots, t_n$, то такой метод называется **k-шаговым**.

Если $k = 1$, то уравнение (4) примет вид:

$$\frac{1}{h}(\alpha_0 y_{n+1} + \alpha_1 y_n) = \Phi(t_n, y_n, y_{n+1}, h). \tag{5}$$

В этом случае метод называется **одношаговым**.

Определение. Если входящая в правую часть уравнения (4) функция Φ не зависит от y_{n+1}, то соответствующий метод называется **явным**.
В противном случае метод называется **неявным** и для нахождения y_{n+1} приходится решать нелинейное уравнение.

Вывод расчетных формул.

Рассмотрим задачу Коши (1). Так как

$$\int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} u'(t)\,dt = u(t_{n+1}) - u(t_n),$$

то дискретный аналог (5) задачи Коши можно записать в виде:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y)\, dy. \qquad (6)$$

Метод Эйлера.

Если интеграл в равенстве (6) заменить формулой левых прямоугольников, то

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(t_n, y_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad y_0 = u_0. \qquad (7)$$

Определение. Говорят, что метод Эйлера (7) сходится в точке $t = t_n$, если $|y_n - u(t_n)| \to 0$ при $h \to 0$.

Определение. Говорят, что метод имеет p-ый порядок точности, если существует число $p > 0$ такое, что $|y_n - u(t_n)| = \mathrm{O}(h^p)$ при $h \to 0$.

Рассмотрим величину $z_n = y_n - u(t_n)$, которую будем называть **погрешностью метода**. Тогда

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{h} = f(t_n, u_n + z_n) - \frac{u_{n+1} - u_n}{h}. \tag{8}$$

Правую часть равенства (8) можно переписать в виде суммы $\varphi_1 + \varphi_2$, где

$$\varphi_1 = f(t_n, u_n) - \frac{u_{n+1} - u_n}{h},$$
$$\varphi_2 = f(t_n, u_n + z_n) - f(t_n, u_n).$$

Определение. φ_1 называется **невязкой** или **погрешностью аппроксимации** уравнения (7) на решении исходного уравнения (1).

Определение. Говорят, что **разностный метод аппроксимирует исходное дифференциальное уравнение**, если $\varphi_1 \to 0$ при $h \to 0$.

Определение. Говорят, что **разностный метод имеет p-ый порядок аппроксимации**, если $\varphi_1 = \mathrm{O}(h^p)$ при $h \to 0$.

В общем случае φ_2 пропорциональна погрешности z_n

$$\varphi_2 = \frac{\partial f}{\partial u}(t_n, u_n + \vartheta z_n) z_n, \quad |\vartheta| < 1.$$

Найдем порядок аппроксимации метода Эйлера. Для этого используем разложение по формуле Тейлора

$$u_{n+1} = u_n + h\,u_n' + \mathrm{O}(h^2).$$

Тогда

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{h} = u_n' + \mathrm{O}(h).$$

И

$$\varphi_1 = -u_n' + f(t_n, u_n) + \mathrm{O}(h) = \mathrm{O}(h).$$

Т. е., метод Эйлера имеет первый порядок аппроксимации.

Симметричная схема.

Задача Коши (1) заменяется

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = \frac{1}{2}\left[f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})\right], \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad y_0 = u_0.$$

Данное выражение можно получить, если интеграл в равенстве (6) заменить по формуле трапеций.

Рассмотрим невязку:

$$\varphi_1 = -\frac{u_{n+1}-u_n}{h} + \frac{1}{2}\left[f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})\right] =$$
$$= -u'_n - \frac{h}{2}u''_n + \mathrm{O}_1(h^2) + \frac{1}{2}(u'_n + u'_{n+1}) = -u'_n - \frac{h}{2}u''_n + \mathrm{O}_1(h^2) +$$
$$+ \frac{1}{2}(u'_n + u'_n + h\,u''_n + \mathrm{O}_2(h^2)) = \mathrm{O}(h^2).$$

Таким образом, данный метод имеет 2-ой порядок аппроксимации.

Методы Рунге-Кутты.

Рассмотрим равенство

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y)\, dy. \tag{9}$$

Так как точное вычисление интеграла, входящего в данное равенство не всегда возможно, то попробуем получить квадратурную формулу для вычисления данного интеграла.

Рассмотрим отрезок $[t_n, t_{n+1}]$. Введем на нем m вспомогательных узлов:

$$
\begin{aligned}
t_n^1 &= t_n + \alpha_1 h, \\
t_n^2 &= t_n + \alpha_2 h, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
t_n^m &= t_n + \alpha_m h,
\end{aligned}
$$

где $0 = \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_m \leqslant 1$.

Заменим интеграл в равенстве (9) квадратурной формулой. Тогда

$$
y(t_{n+1}) \simeq y(t_n) + h \sum_{i=1}^{m} c_i f\left(t_n^i, y\left(t_n^i\right)\right).
$$

Так как значения $y\left(t_n^i\right)$ неизвестны, то для их нахождения воспользуемся равенствами

$$
y(t_n^i) = y(t_n) + \int\limits_{t_n}^{t_n^i} f(t, y)\, dt, \quad i = \overline{2, m}.
$$

Заменим интеграл в последнем равенстве квадратурной формулой и запишем его для каждого i.

$$
\begin{aligned}
&y\left(t_n^2\right) \simeq y(t_n) + h b_{21} f\left(t_n^1, y\left(t_n^1\right)\right), \\
&y\left(t_n^3\right) \simeq y(t_n) + h\left[b_{31} f\left(t_n^1, y\left(t_n^1\right)\right) + b_{32} f\left(t_n^2, y\left(t_n^2\right)\right)\right], \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&y\left(t_n^i\right) \simeq y(t_n) + h\sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} f\left(t_n^j, y\left(t_n^j\right)\right), \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&y\left(t_n^m\right) \simeq y(t_n) + h\sum_{j=1}^{m-1} b_{mj} f\left(t_n^j, y\left(t_n^j\right)\right).
\end{aligned}
$$

Переобозначим

- y_n^i - величина, являющаяся приближением к $y\left(t_n^j\right)$.
- $k_n^i = f\left(t_n^i, y_n^i\right)$ - приближение к значению углового коэффициента в точке t_n^i.

Тогда расчетные формулы можно переписать в виде:

$$
\begin{aligned}
& y_{n+1} = y_n + hk_n, \quad k_n = \sum_{i=1}^{m} c_i k_n^i, \\
& k_n^1 = f\left(t_n^1, y_n^1\right), \quad y_n^1 = y_n, \\
& k_n^2 = f\left(t_n^2, y_n^2\right), \quad y_n^2 = y_n + hb_{21}k_n^1, \\
& k_n^3 = f\left(t_n^3, y_n^3\right), \quad y_n^3 = y_n + hb_{31}k_n^1 + hb_{32}k_n^2, \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
& k_n^m = f\left(t_n^m, y_n^m\right), \quad y_n^m = y_n + \sum_{j=1}^{m-1} b_{mj}k_n^j.
\end{aligned}
$$

или

$$
\begin{aligned}
& y_{n+1} = y_n + hk_n, \quad k_n = \sum_{i=1}^{m} c_i k_n^i, \quad \sum_{i=1}^{m} c_i = 1, \\
& k_n^1 = f\left(t_n, y_n\right), \\
& k_n^2 = f\left(t_n^2, y_n + hb_{21}k_n^1\right) = f\left(t_n + \alpha_2 h, y_n + hb_{21}k_n^1\right), \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
& k_n^m = f\left(t_n^m, y_n + \sum_{j=1}^{m-1} b_{mj}k_n^j\right) = f\left(t_n + \alpha_m h, y_n + \sum_{j=1}^{m-1} b_{mj}k_n^j\right).
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Выражения (10) определяют **явный m-этапный метод Рунге-Кутта**.

Замечание. При $m = 1$ получаем одноэтапный метод Рунге-Кутта, который совпадает с методом Эйлера.

Семейство методов Рунге-Кутта 2-го порядка.

При $m = 2$ получаем семейство методов:

$$\begin{aligned}
&y_{n+1} = y_n + hk_n, \quad k_n = c_1 k_n^1 + c_2 k_n^2, \\
&k_n^1 = f\left(t_n, y_n\right), \\
&k_n^2 = f\left(t_n + \alpha_2 h, y_n + hb_{21} k_n^1\right).
\end{aligned}$$

Определим погрешность метода (невязку):

$$\varphi_1 = -\frac{u_{n+1} - u_n}{h} + c_1 k_n^1 + c_2 k_n^2. \tag{11}$$

Для этого воспользуемся следующими представлениями с использованием формулы Тейлора:

$$\begin{aligned}
k_n^2 = f\left(t_n + \alpha_2 h, u_n + hb_{21} k_n^1\right) &= f\left(t_n + \alpha_2 h, u_n + hb_{21} f(t_n, u_n)\right) = \\
&= f(t_n, u_n) + f_t' \alpha_2 h + f_u' h b_{21} f(t_n, u_n) + \mathrm{O}(h^2).
\end{aligned}$$

и

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{h} = u'_n + \frac{h}{2} u''_n + \mathrm{O}(h^2).$$

Обозначим $f_n = f(t_n, u_n)$, тогда

$$c_1 k_n^1 + c_2 k_n^2 = (c_1 + c_2) f_n + c_2 \alpha_2 h f'_t + c_2 h b_{21} f f'_u + \mathrm{O}(h^2).$$

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{h} = f_n + \frac{h}{2} (f'_t + f_n f'_u) + \mathrm{O}(h^2).$$

Тогда погрешность метода имеет вид:

$$\varphi_1 = (c_1 + c_2 - 1) f_n + \frac{h}{2} [(2c_2\alpha_2 - 1) f'_t + (2c_2 b_{21} - 1) f_n f'_u] + \mathrm{O}(h^2).$$

Для равенства нулю погрешности необходимо

$$c_1 + c_2 - 1 = 0,$$
$$2c_2\alpha_2 = 2c_2 b_{21} = 1$$

Тогда $c_1 = 1 - c_2$ и $\alpha_2 = b_{21} = \dfrac{1}{2c_2}$.

Таким образом получили однопараметрическое семейство двуэтапных методов Рунге-Кутта второго порядка аппроксимации.

Данное семейство методов можно переписать в виде:

$$y_{n+1} = y_n + h\left[(1-c_2) f(t_n, y_n) + c_2 f\left(t_n + \frac{h}{2c_2},\ y_n + \frac{h}{2c_2} f(t_n, y_n)\right)\right]. \quad (12)$$

Обычно полагают

$c_2 = 1$

Тогда

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2},\ y_n + \frac{h}{2} f(t_n, y_n)\right).$$

Данную расчетную схему можно также получить, если в равенстве (9) определенный интеграл вычислить с помощью квадратурной формулы центральных прямоугольников

$$\int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} f(t,y)\,dy \simeq hf\left(t_{n+1/2},\ y_{n+1/2}\right),$$

где $t_{n+1/2} = t_n + \dfrac{h}{2}$, $y_{n+1/2} = y\left(t_{n+1/2}\right)$.Если для вычисления $y_{n+1/2}$ применить метод Эйлера, т. е.

$$y_{n+1/2} = y_n + \frac{h}{2} f(t_n, y_n),$$

то получим выражение (12), которое также носит название - **усовершенствованный метод Эйлера**.

или
$c_2 = \frac{1}{2}$
Тогда

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f\left(t_n, y_n\right) + f\left(t_n + h, y_n + hf\left(t_n, y_n\right)\right)\right]. \qquad (13)$$

Данное выражение можно также получить из симметричной схемы, если для вычисления y_{n+1} использовать метод Эйлера. После этого получим выражение (13).

Данную расчетную схему также называют **методом Эйлера-Коши**.

Замечание. Если метод Рунге-Кутта аппроксимирует исходное уравнение, то он сходится при $h \to 0$, причем порядок точности совпадает с порядком аппроксимации.