СЕМИНАРЫ ПО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Е. С. Тверская

МГТУ им. Н.Э. Баумана
Москва

Интерполяция функции одного переменного с помощью кубических сплайнов.

Задачи, приводящие к задаче приближения функций.

• Функция $y = f(x)$ задана таблицей своих значений:

x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_k	$\cdots$
y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_k	$\cdots$

а вычисления производятся в точках, не совпадающих с табличными.

• Вычисление значения функции $y = f(x)$ связано со значительными трудностями и приводит к большим затратам машинного времени.

Решение проблемы: Функцию $f(x)$ приближенно заменяют функцией $g(x)$, значение которой в точках x_k принимают за приближенное значение функции $f(x)$.

Постановка задачи интерполяции. Пусть в точках $x_k \in [a, b]$, $k = \overline{1, n}$ попарно различных задана таблица значений функции $f(x)$.

Задача интегрполяции - задача построения функции $g(x)$, удовлетворяющей условию

$$g(x_k) = y_k, \quad k = \overline{1, n},$$

где x_k - **узлы интерполяции**.

Интерполирование сплайнами.

Для избежания больших погрешностей, весь отрезок $[a, b]$ разбивают на частичные отрезки, на каждом из которых приближенно заменяют функцию $f(x)$ многочленом невысокой степени - **кусочно-полиномиальная интерполяция**.

Определение. **Сплайном** или **сплайн-функцией** называют кусочно-полиномиальную функцию, определенную на отрезке $[a, b]$ и имеющую на этом отрезке некоторое число непрерывных производных.

Рассмотрим частный случай, когда сплайн определяется с помощью многочлена третьей степени - **кубический сплайн.**

Построение кубического сплайна. (I способ.) Введем разбиение отрезка $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Сплайном, соответствующим функции $f(x)$ и узлам x_k, $k = \overline{0, n}$ называется функция $g(x)$, удовлетворяющая условиям:

а. На каждом сегменте $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{0, n}$ функция $g(x)$ является многочленом третьей степени, т. е. на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ будем искать $g(x) = g_i(x)$ в виде

$$g_i(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3, \qquad x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i, \quad i = \overline{1, n}. \tag{1}$$

б. Функция $g(x)$, а также ее первая и вторая производные ($g'(x)$ и $g''(x)$) непрерывны на отрезке $[a, b]$.

в. $g(x_i) = f(x_i)$, $i = \overline{1, n}$.

Из условия интерполирования $g_i(x_i) = f(x_i)$ получаем, что

$$g_i(x_{i-1}) = a_i = f(x_{i-1}), \quad i = \overline{1, n}. \tag{2}$$

Из требования непрерывности функции $g(x)$ и условия интерполяции приходим к условиям

$$g_i(x_i) = g_{i+1}(x_i), \quad i = \overline{1, n-1} \quad \text{и} \quad g_n(x_n) = f(x_n).$$

Отсюда, с учетом (2) получаем

$$f_{i-1} + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = f_i, \quad i = \overline{1, n}, \tag{3}$$

где $f_i = f(x_i)$ и $h_i = x_i - x_{i-1}$.

Из равенства (1) получаем

$$g_i'(x) = b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1})^2.$$
$$g_{i+1}'(x) = b_{i+1} + 2c_{i+1}(x - x_i) + 3d_{i+1}(x - x_i)^2.$$

Тогда, опираясь на условие непрерывности первой производной

$$g_i'(x_i) = g_{i+1}'(x_i), \quad i = \overline{1, n-1},$$

приходим к уравнениям

$$b_i + 2c_ih_i + 3d_ih_i^2 = b_{i+1}, \quad i = \overline{1, n-1}. \tag{4}$$

Из условия непрерывности второй производной

$$g_i''(x_i) = g_{i+1}''(x_i), \quad i = \overline{1, n-1},$$

где

$$g_i''(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_{i-1}).$$
$$g_{i+1}''(x) = 2c_{i+1} + 6d_{i+1}(x - x_i).$$

получаем уравнения

$$c_i + 3d_ih_i = c_{i+1}, \quad i = \overline{1, n-1}. \tag{5}$$

Объединяя (3)-(5) получаем систему из $3n-2$ уравнений с $3n$ неизвестными b_i, c_i и d_i, $i=\overline{1,n}$.

Два недостающих уравнения получаем задавая граничные условия для $g(x)$.

Полагая $f''(a)=f''(b)=0$ (независимо от того, выполнены ли эти условия для интерполируемой функции) получаем

$$g_1''(x_0)=g_n''(x_n)=0,$$

Т. е.

$$c_1=0, \quad \text{и} \quad c_n+3d_nh_n=0. \tag{6}$$

Заметим, что условие $c_n+3d_nh_n=0$ совпадает с условием (5) при $i=n$, положив $c_{n+1}=0$.

Решим систему (3)-(5).

Выразим d_i из уравнения (5)

$$d_i=\frac{c_{i+1}-c_i}{3h_i}$$

и подставим в уравнения (3) и (4). Получим

1.

$$b_i h_i + c_i h_i^2 + \frac{(c_{i+1} - c_i) h_i^2}{3} = f_i - f_{i-1}, \quad i = \overline{1, n-1},$$

Откуда

$$b_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{3}\left(2c_i + c_{i+1}\right), \quad i = \overline{1, n-1}. \qquad (7)$$

2.

$$b_i + c_i h_i + c_{i+1} h_i = b_{i+1}, \quad i = \overline{1, n-1}. \qquad (8)$$

С учетом условий (7) и (8) получаем равенство

$$\frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{3}\left(2c_i + c_{i+1}\right) + c_i h_i + c_{i+1} h_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{h_{i+1}}{3}\left(2c_{i+1} + c_{i+2}\right).$$

Группируя подобные слагаемые приходим к системе линейных алгебраических уравнений

$$h_{i-1} c_{i-1} + 2c_i (h_{i-1} + h_i) + h_i c_{i+1} =$$

$$= 3\left(\frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{f_{i-1} - f_{i-2}}{h_{i-1}}\right), \quad i = \overline{2, n}; \qquad (9)$$

$$c_1 = c_{n+1} = 0.$$

Полученная система имеет единственное решение. Следовательно, существует единственный кубический сплайн, определяемый уравнением (1), условиями (а)-(в) и граничными условиями $g_1''(a) = g_n''(b) = 0$.

Матрица полученной системы является трехдиагональной со строгим диагональным преобладанием, поэтому решить данную систему можно, например, методом прогонки.

Если положить, что разбиение отрезка $[a, b]$ является равномерным, т. е. $h_i = h = \text{const}$, $i = \overline{1, n}$ то система (9) принимае вид:

$$\begin{aligned} &c_{i-1} + 4c_i + c_{i+1} = \frac{3}{h^2}\left(f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}\right), \quad i = \overline{2, n}; \\ &c_1 = c_{n+1} = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Построение кубического сплайна. (II способ.)

Задачу кусочно-кубической интерполяции поставим следующим образом: на отрезке $[a, b]$ необходимо найти функцию $g(x)$, удовлетворяющую следующим требованиям.

а. Функция $g(x)$, а также ее первая и вторая производные ($g'(x)$ и $g''(x)$) непрерывны на отрезке $[a, b]$.

б. На каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ $g(x)$ является кубическим многочленом вида

$$g_i(x) = \sum_{k=0}^{3} a_k^i (x_i - x)^k, \quad k = \overline{1, n}.$$

в. В узлах разбиения x_i, $i = \overline{1, n}$ выполняются равенства

$$g(x_i) = f(x_i) = f_i, \quad k = \overline{1, n}.$$

г. $g''(x)$ удовлетворяет граничным условиям $g''(a) = g''(b) = 0$.

Так как вторая производная функции $f(x)$ непрерывна и линейна на каждом частичном отрезке разбиения $[x_{i-1}, x_i]$, можно записать

$$g''(x) = m_{i-1} \frac{x_i - x}{h_i} + m_i \frac{x - x_{i-1}}{h_i}, \quad x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i, \tag{11}$$

где $h_i = x_i - x_{i-1}$ и $m_i = g''(x_i)$

Проинтегрировав обе части равенства (11) дважды получим

$$g(x) = m_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + m_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + A_i\frac{x_i - x}{h_i} + B_i\frac{x - x_{i-1}}{h_i}, \quad x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i, \tag{12}$$

где A_i и B_i константы интегрирования.

Подставляя $x = x_i$ и $x = x_{i-1}$ в (12), получим

$$m_i\frac{h_i^2}{6} + B_i = f_i,$$

$$m_{i-1}\frac{h_i^2}{6} + A_i = f_{i-1},$$

Окончательно имеем

$$\begin{aligned} g(x) = m_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + m_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + \\ + \left(f_{i-1} - m_{i-1}\frac{h_i^2}{6}\right)\frac{x_i - x}{h_i} + \left(f_i - m_i\frac{h_i^2}{6}\right)\frac{x - x_{i-1}}{h_i}, \end{aligned} \tag{13}$$

$$g'(x) = -m_{i-1}\frac{(x_i - x)^2}{2h_i} + m_i\frac{(x - x_{i-1})^2}{2h_i} + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} + \frac{m_{i-1} - m_i}{6}h_i. \tag{14}$$

Из (14) находим односторонние пределы производной в точках x_i, $i = \overline{1, n-1}$:

$$g'(x_i - 0) = m_{i-1}\frac{h_i}{6} + m_i\frac{h_i}{3} + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i},$$
$$g'(x_i + 0) = -m_i\frac{h_{i+1}}{3} - m_{i+1}\frac{h_{i+1}}{6} + \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}}.$$

Так как функции $g'(x)$ и $g''(x)$ непрерывны на $[a, b]$, то получим систему

$$\begin{aligned} m_{i-1}\frac{h_i}{6} + m_i\frac{h_{i+1} + h_i}{3} + m_{i+1}\frac{h_{i+1}}{6} &= \\ = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}, &\quad i = \overline{1, n-1}. \end{aligned} \tag{15}$$

Дополняя эти уравнения равенствами $m_0 = m_n = 0$ получаем линейную алгебраическую систему для нахождения неизвестных m_i, $i = \overline{1, n-1}$, матрица которой выглядит следующим образом:

$$
\begin{pmatrix}
\dfrac{h_1+h_2}{3} & \dfrac{h_2}{6} & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\dfrac{h_2}{6} & \dfrac{h_2+h_3}{3} & \dfrac{h_3}{6} & \dots & 0 & 0 \\
0 & \dfrac{h_3}{6} & \dfrac{h_3+h_4}{3} & \dots & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots & \dfrac{h_{n-1}}{6} & \dfrac{h_n+h_{n-1}}{3}
\end{pmatrix}
$$

Матрица полученной системы является трехдиагональной симметричной со строгим диагональным преобладанием, поэтому решить данную систему можно, например, методом прогонки.

Следовательно, коэффициенты m_i, $i=\overline{1,n-1}$ определяются из системы (15) однозначно и задачи о нахождении кусочно-кубической функции $g(x)$ имеет единственное решение.

Кубические сплайн-функции обладают очень важным свойством, которое обуславливает высокую эффективность сплайн-интерполяции.

Рассмотрим на $[a,b]$ класс функций, имеющих интегрируемые с квадратом вторые производные $W_2^2[a,b]$.

Постановка задачи: отыскать интеполяционную функцию

$$u \in W_2^2[a,b], \quad u(x_k) = f_k, \quad k = \overline{0,n}, \tag{16}$$

которая минимизирует функционал

$$\Phi(u) = \int_a^b [u''(x)]^2 dx \tag{17}$$

на классе $W_2^2[a,b]$.

Покажем, что минимум такого функционала достигается на кусочно-кубической сплайн функции $g(x)$, которая была построена.

$$\Phi(u-g) = \int_a^b [u''(x) - g''(x)]^2 dx. \tag{18}$$

Интегрируя по частям, используя свойства функций $g(x)$ и $u(x)$, получим

$$\Phi(u-g) = \int\limits_a^b [u''(x) - g''(x)]^2 dx =$$

$$= \int\limits_a^b \left[[u''(x)]^2 - [g''(x)]^2 + 2[g''(x)]^2 - 2u''(x)g''(x) \right] dx =$$

$$= \Phi(u) - \Phi(g) + 2\int\limits_a^b \left[g''(x) - u''(x) \right] g''(x) dx =$$

$$= \Phi(u) - \Phi(g) + 2\left(g'(x) - u'(x) \right) g''(x) \Big|_{x=a}^{x=b} - 2\int\limits_a^b \left[g'(x) - u'(x) \right] g'''(x) dx =$$

$$= \Phi(u) - \Phi(g) - 2\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \left[g'(x) - u'(x) \right] g'''(x) dx$$

Но $g'''(x) = c_k = \mathrm{const}$ на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$, поэтому

$$\Phi(u-g) = \Phi(u) - \Phi(g) - 2\sum_{k=1}^{n} c_k \left(g(x) - u(x)\right)\Big|_{x=x_{k-1}}^{x=x_k} =$$
$$= \Phi(u) - \Phi(g).$$

отсюда и из (18) вытекает, что

$$\Phi(g) = \Phi(u) - \Phi(u-g) \leqslant \Phi(u), \tag{19}$$

для любой функции

$$u \in W_2^2[a,b], \quad u(x_k) = f_k, \quad k = \overline{0,n}.$$

Таким образом на кусочно-кубической функции реализуется минимум функционала (17) и других точек минимума у функционала нет.

Второе определение кусочно-кубической сплайн-функции.

Определение. **Сплайном** или **сплайн-функцией** называют такую фукнцию из класса $W_2^2[a,b]$, которая принимает в узлах сетки заданные значения и минимизирует функционал (17).