ЛЕКЦИИ ПО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ

МГТУ им. Н.Э. Баумана
Москва

Методы аппроксимации функции.
Постановка задачи приближения функции.

Задачи, приводящие к задаче приближения функций.

• Функция $y = f(x)$ задана таблицей своих значений:

x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_k	$\cdots$
y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_k	$\cdots$

а вычисления производятся в точках, не совпадающих с табличными.

• Вычисление значения функции $y = f(x)$ связано со значительными трудностями и приводит к большим затратам машинного времени.

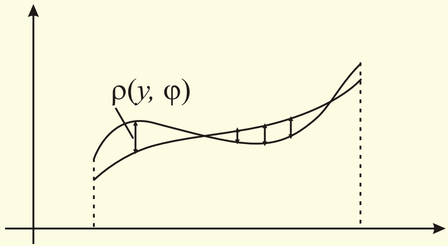
В этом случае, рассматривается задача о наилучшем приближении в нормированном пространстве H, когда заданную функцию $y \in H$ требуется заменить линейной комбинацией $\varphi \in H$ так, чтобы отклонение $||y - \varphi||$ было минимальным.

В зависимости от метрики ρ различают несколько различных постановок задачи аппроксимации. Приведем некоторые из них.

Непрерывная аппроксимация

(1) Если $H = C_{[a,b]}$, то используется **равномерная метрика**

$$\rho(y,\varphi) = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |y(x) - \varphi(x)| \longrightarrow \min .$$



Если $\varphi(x)$ – решение задачи аппроксимации с такой метрикой, то говорят, что $\varphi(x)$ – наилучшее равномерное приближение функции $y(x)$.

Точечная аппроксимация

Условия близости функций $\varphi(x)$ и $y(x)$ формулируются на конечном множестве точек: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. При этом функции $y(x)$ и $\varphi(x)$ заменяют векторами их значений на данном множестве точек, т.е.

$$y(x) \longrightarrow (y(x_0), y(x_1), y(x_2), \ldots y(x_n))^T \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

(1) При таком подходе можно использовать стандартную метрику на $\mathbb{R}^n$:

$$\rho(\overline{y}, \overline{\varphi}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y(x_i) - \varphi(x_i))^2} \longrightarrow \min .$$

В этом случае говорят, что $\varphi(x)$ – наилучшее приближение $y(x)$ в средне-квадратичном при точечной аппроксимации.

(2) В некоторых случаях описанная выше задача вырождается в задачу простой **интерполяции**, т.е. требуется подобрать такую функцию $\varphi(x)$, чтобы

$$\varphi(x_i) = y(x_i).$$

Линейная интерполяция

Близость функции $y(x)$ и $\varphi(x)$ достигается введением в $\varphi(x)$ свободных параметров $a = \{a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$.

Основная задача – подбор удачного вида функциональной зависимости $\varphi(x, a)$.

Пусть функция $y(x)$ известна только в узлах некоторой сетки x_i, т. е. задана таблицей. Потребуем, чтобы $\varphi(x, a)$ совпадала с табличными значениями $y(x)$ в выбранных узлах сетки:

$$\varphi(x_i, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n) = y(x_i) \equiv y_i, \qquad 1 \leqslant 0 \leqslant n. \tag{1}$$

Получаем систему из n уравнений, из которой можно определить неизвестные коэффициенты a_i.

Полученный способ подбора параметров называется **интерполяцией** или **лагранжевой** интерполяцией.

Если $\varphi(x, a)$ нелинейно зависит от параметров, то интерполяцию называют **нелинейной**. В этом случае нахождение параметров $a = \{a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ является очень трудоемкой задачей.

В нашем курсе будем рассматривать **линейную** интерполяцию, т.е.

$$\varphi(x, a_0, a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(x),$$

где $\varphi_k(x)$ - линейно-независимая система функций, $k = \overline{0, n}$.

Используя (1), получаем СЛАУ для определения параметров a_k:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(x_i) = y_i, \qquad 1 \leqslant 0 \leqslant n. \tag{2}$$

Для того, чтобы поставленная задача интерполяции всегда имела единственное решение необходимо, чтобы определитель системы (2) был отличен от нуля, т.е.

$$\Delta = \det\{\varphi_k(x_i)\} = \begin{vmatrix} \varphi_1(x_0) & \varphi_2(x_0) & \dots & \varphi_n(x_0) \\ \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \dots & \varphi_n(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(x_n) & \varphi_2(x_n) & \dots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{3}$$

Замечание. Для линейной интерполяции в качестве системы функций наиболее удобны алгебраические многочлены.

Интерполяционная формула Лагранжа

Теорема. Пусть $y(x)$ непрерывна на $[a,b]$, тогда $\forall\varepsilon>0$, $\exists P_n(x)$: $||y(x)-P_n(x)||<\varepsilon$.

Пусть на отрезке $[a,b]$ заданы точки x_k - **узлы интерполирования**, $k=0,1,2,\ldots,n$, в которых известны значения функции $y(x)$. Запишем задачу интерполирования алгебраическими многочленами:

$$L_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n.$$

Т.е. нужно построить многочлен степени n такой, чтобы

$$a_0+a_1x_i+a_2x_i^2+\cdots+a_nx_i^n=y(x_i),\qquad i=\overline{0,n}.$$

Данная задача имеет единственное решение, так как определитель полученной системы отличен от нуля (определитель Вандермонда), при условии, что нет совпадающих узлов.

Действительно

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{j>i}(x_j - x_i) \neq 0.$$

Решение полученной системы можно записать различным образом, например в форме Лагранжа.

Интерполяционная формула Лагранжа позволяет представить многочлен $L_n(x)$ в виде линейной комбинации

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k(x) y(x_k). \tag{4}$$

Найдем выражения для коэффициентов $c_k(x)$. Из условия

$$L_n(x_i) = y(x_i), \qquad i = \overline{0, n}$$

получаем

$$\sum_{k=0}^{n} c_k(x_i) y(x_k) = y(x_i), \qquad i = \overline{0, n}.$$

Эти соотношения будут выполнены, если на функцию $c_k(x)$ наложить условия:

$$c_k(x_i) = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ 1, & i = k. \end{cases}$$

Данные условия означают, что каждая функция $c_k(x)$, $k = \overline{0,n}$ имеет не менее n нулей на $[a,b]$.

Так как $L_n(x)$ – многочлен степени n, то $c_k(x)$, $k = \overline{0,n}$ будем искать также в виде многочлена степени n, т. е. в виде:

$$c_k(x) = \lambda_k\,(x - x_0)\,(x - x_1)\,(x - x_2)\ldots(x - x_{k-1})\,(x - x_{k+1})\ldots(x - x_n)\,.$$

Из условия $c_k(x_k) = 1$ найдем коэффициент λ_k:

$$\lambda_k = \frac{1}{(x_k - x_0)\,(x_k - x_1)\,(x_k - x_2)\ldots(x_k - x_{k-1})\,(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)}.$$

Таким образом, коэффициенты $c_k(x)$ интерполяционного многочлена (4) находятся по формулам

$$c_k(x) = \frac{\prod\limits_{i\neq k}(x - x_i)}{\prod\limits_{i\neq k}(x_k - x_i)}. \tag{5}$$

Часто, данные коэффициенты представляют в несколько другом виде. Введем в рассмотрение многочлен $\omega(x)$ степени $n+1$:

$$\omega(x) = (x - x_0)\,(x - x_1)\,(x - x_2)\ldots(x - x_{k-1})\,(x - x_k)\,(x - x_{k+1})\ldots(x - x_n)\,.$$

Вычислим производную данного многочлена в точке x_k:

$$\omega'(x_k) = (x_k - x_0)\,(x_k - x_1)\,(x_k - x_2)\ldots(x_k - x_{k-1})\,(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)\,.$$

Тогда получим, что

$$c_k(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\,\omega'(x_k)}.$$

Итак, **интерполяционный многочлен Лагранжа** имеет вид:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\,\omega'(x_k)} y(x_k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\prod\limits_{i \neq k} (x - x_i)}{\prod\limits_{i \neq k} (x_k - x_i)} y(x_k).$$

О единственности решения задачи интерполяции

Теорема. Построенный полином является единственным решением задачи интерполяции.

◀ Допустим противное. Пусть $\varphi_n(x)$ и $\psi_n(x)$ – многочлены степени n, являющиеся решением поставленной задачи интерполяции и

$$\varphi_n(x_i) = \psi_n(x_i) = y_i.$$

Рассмотрим многочлен $Q(x) = \varphi_n(x) - \psi_n(x)$.

Очевидно, что степень данного многочлена не выше n и $Q(x_i) = 0$ при $i = \overline{1, n}$.

Но $Q(x)$ обращается в ноль в $n + 1$ точке, тогда его степень равна $n + 1$.

Следовательно пришли к противоречию и $Q(x) \equiv 0$ и $\varphi_n(x) = \psi_n(x)$. ▶

Погрешность интерполирования. При замене функции $y(x)$ интерполяционным многочленом $L_n(x)$ допускается погрешность (погрешность интерполяционной формулы Лагранжа):

$$r_n(x) = y(x) - L_n(x).$$

Теорема. Пусть $y(x) \in C^{n+1}_{[a,b]}$ – $n+1$ раз непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $[a,b]$ и $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Тогда $\forall x \in [a,b]$, $\exists \xi \in [a,b]$ такая, что

$$y(x) - L_n(x) = \frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x).$$

В частности, если $M_{n+1} = \max\limits_{x\in[a,b]} \left|y^{(n+1)}(x)\right|$, то $\forall x \in [a,b]$

$$|y(x) - L_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left|\omega(x)\right|.$$

◄ Рассмотрим функцию

$$U(x) = y(x) - L_n(x) - k\omega(x),$$

где величина k будет определена позднее. Так как $y(x_i) = L_n(x_i)$, то $U(x)$ имеет корни x_0, x_1, x_2, …, x_n.

Зафиксируем некоторое $x^* \in [a, b]$ и подберем k таким образом, чтобы функция $U(x)$ имела корень в x^*, т.е.

$$U(x^*) = y(x^*) - L_n(x^*) - k\omega(x^*) = 0, \quad \Longrightarrow \quad k = \frac{y(x^*) - L_n(x^*)}{\omega(x^*)}.$$

При таком выборе k функция $U(x)$ имеет $n+2$ корня на отрезке $[a, b]$.

$$x_0,\ x_1, x_2, \ldots, x_i,\ x^*,\ x_{i+1}, \ldots, x_n.$$

Следовательно, $U'(x)$ имеет $n+1$ корень на $[a, b]$, $U''(x)$ имеет n корней на $[a, b]$ и т.д. Приходим к выводу, что $U^{(n+1)}(x)$ имеет на $[a, b]$ один корень, который обозначим ξ.

Тогда $U^{(n+1)}(\xi) = 0$, но

$$U^{(n+1)}(x) = y^{(n+1)}(x) - L_n^{(n+1)}(x) - k\omega^{(n+1)}(x).$$

Так как степень многочлена $L_n(x)$ равна n, то $L_n^{(n+1)}(x) = 0$, а степень многочлена $\omega(x)$ равна $n+1$, следовательно $\omega^{(n+1)}(x) = (n+1)!$. Тогда

$$0 = U^{(n+1)}(\xi) = y^{(n+1)}(\xi) - k(n+1)! \quad \Longrightarrow \quad k = \frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Приравнивая ранее найденное выражение для k получаем

$$\frac{y(x^*) - L_n(x^*)}{\omega(x^*)} = \frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

откуда следует, что

$$y(x^*) - L_n(x^*) = \frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x^*). \qquad \blacktriangleright$$

О наилучшем выборе узлов интерполирования. Многочлены Чебышева.

Многочлены Чебышева на $[-1,1]$.

Во многих вопросах численного анализа, связанных с минимизацией погрешности вычислительного алгоритма, нашли применение многочлены наименее уклоняющиеся от нуля.

Основная задача. Среди всех многочленов степени n со старшим коэффициентом равным 1 найти такой многочлен $T_n(x)$, для которого

$$\max_{x\in[-1,1]} |T_n(x)| \to \min\,.$$

Многочлен обладающий таким свойством называют **многочленом Чебышева** или **многочленом наименее уклоняющимся от нуля на [-1,1]**.

Такой многочлен был построен и

$$T_n(x) = 2^{1-n} \cos(n \arccos x) \tag{6}$$

Рассмотрим сначала многочлен $P_n(x)$, отличающийся от $T_n(x)$ в (6) только постоянным множителем 2^{1-n}

$$P_n(x) = \cos(n \arccos x) \tag{7}$$

Проведя преобразования

$$\cos((n+1)\arccos x) + \cos((n-1)\arccos x) =$$
$$= 2\cos(n \arccos x)\cos(\arccos x) = 2xP_n(x)$$

можно убедиться в справедливости рекуррентного соотношения

$$P_{n+1}(x) - 2xP_n(x) + P_{n-1}(x) = 0.$$

Пользуясь формулой (7) имеем $P_0(x) = 1$ и $P_1(x) = x$.Пользуясь полученной рекуррентной формулой можно показать, что

$$P_2(x) = 2x^2 - 1,$$
$$P_3(x) = 2^2x^3 + \omega_3(x),$$
$$P_4(x) = 2^3x^4 + \omega_4(x),$$

По индукции можно показать, что $P_n(x)$ – многочлен с коэффициентом при x^n равным 2^{n-1} при $n \geqslant 1$. Тогда многочлен $T_n(x)$ имеет коэффициент при x^n равный 1.

Корни многочлена $T_n(x)$ расположены в точках $x_k = \cos\left[\frac{\pi}{2n}(1+2k)\right]$ при $k = \overline{0,(n-1)}$.

Экстремумы будут расположены в точках $x'_k = \cos\left(\frac{\pi k}{n}\right)$, при $k = \overline{1,(n-1)}$. К этим точкам добавим точки, в которых функция достигает своих наибольшего и наименьшего значений, т. е. концы отрезка $[-1,1]$.

Тогда $x'_k = \cos\left(\frac{\pi k}{n}\right)$, при $k = \overline{0,n}$. Значения многочлена Чебышева в этих точках

$$T_n(x'_k) = (-1)^k 2^{1-n}.$$

Тогда

$$\max_{x\in[-1,1]} |T_n(x)| = 2^{1-n}.$$

Докажем, что среди всех многочленов степени n, построенный многочлен $T_n(x)$ – многочлен наименее уклоняющийся от нуля на $[-1,1]$.

Пусть $Q_n(x)$ – любой многочлен степени n с единицей при старшем коэффициенте. Обозначим

$$||Q_n|| = \max_{x\in[-1,1]} |Q_n(x)|\,.$$

Теорема. Пусть существует система точек

$$-1 \leqslant x'_n < x'_{n-1} < \ldots < x'_1 < x'_0 \leqslant 1$$

такая, что

$$|Q_n(x'_k)| = ||Q_n||, \quad k = \overline{0,n},$$

причем $Q_n(x'_k)$ имеют чередующиеся знаки. Тогда среди всех многочленов степени n со старшим коэффициентом 1, многочлен $Q_n(x)$ наименее уклоняется от нуля.

◄ Допустим противное. Пусть существует многочлен $Q^*_n(x)$ степени n с коэффициентом при x^n равным 1 такой, что $||Q^*_n|| < ||Q_n||$ и, следовательно $|Q^*_n(x)| < ||Q_n||$ для всех $x \in [-1,1]$.

Рассмотрим функцию $R(x) = Q_n(x) - Q_n^*(x)$, которая является многочленом степени не выше, чем $(n-1)$ и отлична от тождественного нуля.

Согласно условию теоремы, числа $Q_n(x'_k)$ имеют чередующиеся знаки.

Пусть для определенности

$$Q_n(x'_k) = (-1)^k ||Q_n||, \quad k = \overline{0, n}.$$

Тогда

$$R(x'_k) = (-1)^k ||Q_n|| - Q_n^*(x'_k), \quad k = \overline{0, n}.$$

Следовательно, многочлен $R(x)$ на отрезке $[-1, 1]$ n раз меняет знак, т.е. имеет n корней. А это не возможно, так как $R(x)$ – многочлен степени $(n-1)$. Пришли к противоречию и следовательно многочлен $Q_n(x)$ – многочлен наименее уклоняющийся от нуля. ►

Согласно доказанной теореме многочлен Чебышева $T_n(x)$ является многочленом наименее уклоняющимся от нуля.

Рассмотрим случай произвольного отрезка $[a, b]$. Данная задача сводится к предыдущей с помощью замены

$$t = \frac{2}{b-a}x - \frac{b+a}{b-a},$$

приводящий отрезок $a \leqslant x \leqslant b$ в отрезок $-1 \leqslant t \leqslant 1$.При такой замене многочлен Чебышева

$$T_n(t) = 2^{1-n}\cos(n \arccos t)$$

преобразуется к виду

$$F_n(x) = 2^{1-n}\cos\left(n \arccos\frac{2x-(b+a)}{b-a}\right).$$

В этом случае, коэффициент при x^n равен $\dfrac{2^n}{(b-a)^n}$.

Следовательно, среди всех многочленов со старшим коэффициентом равным 1, наименее уклоняющимся от нуля на $[a, b]$ является многочлен

$$T_n(x) = \frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}}\cos\left(n \arccos\frac{2x-(b+a)}{b-a}\right).$$

Корни этого многочлена расположены в точках

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}, \quad k = \overline{0,(n-1)},$$

а его максимальное отклонение от нуля равно

$$\max_{x\in[a,b]} |T_n(x)| = \frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}}.$$

Интерполирование с кратными узлами.

Интерполяционный многочлен Эрмита. Рассмотрим более общую постановку задачи интерполяции.

В узлах $x_k \in [a,b]$, $k = \overline{0,m}$, среди которых нет совпадающих узлов, заданы значения функции $f(x_k)$ и ее производные $f^{(i)}(x_k)$ до порядка $N_k - 1$ включительно.

Таким образом, в каждой точке x_k известны

$$f(x_k), f'(x_k), f''(x_k), \dots f^{(N_k-1)}(x_k),$$

известно $N_0 + N_1 + \dots + N_m$ величин.

Основная задача: требуется построить алгебраический многочлен $H_n(x)$ степени $n = N_0 + N_1 + \dots + N_m - 1$, для которого

$$H_n^i(x_k) = f^i(x_k), \quad k = \overline{0, m}, \quad i = \overline{0, (N_k - 1)}. \tag{8}$$

Многочлен $H_n(x)$, удовлетворяющий условиям (8), называется **интерполяционным многочленом Эрмита** для функции $f(x)$. Число N_k **называется кратностью узла** x_k.

Докажем, что интерполяционный многочлен Эрмита существует и единственен.

Представим многочлен в виде

$$H_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots a_n x^n.$$

Условия интерполяции (8) дают СЛАУ относительно коэффициентов $a_0, a_1, \dots, a_n$.

Число уравнений полученной системы равно числу неизвестных и равно $N_0 + N_1 + \dots + N_m$.

Достаточно показать, то однородная СЛАУ

$$H_n^i(x_k) = 0, \quad k = \overline{0, m}, \quad i = \overline{0, (N_k - 1)} \tag{9}$$

имеет только тривиальное решение

$$a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0.$$

Из системы (9) при фиксированном k и $i = \overline{0, (N_k - 1)}$ следует, что число x_k является корнем кратности N_k многочлена $H_n(x)$.

Таким образом, с учетом кратности многочлен $H_k(x)$ имеет не менее $N_0 + N_1 + \dots + N_m = n + 1$ корня на $[a, b]$.

Но степень многочлена $H_n(x)$ равна n и, следовательно, $H_n(x) \equiv 0$. Тогда

$$a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0.$$

Следовательно, система (8) однозначно разрешима при любых правых частях.

Так как коэффициенты a_j многочлена $H_n(x)$ выражаются линейно через $f^{(i)}(x_k)$, то данный многочлен можно представить в виде линейной комбинации

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{i=0}^{N_k-1} c_{ki}(x) f^{(i)}(x_k), \qquad (10)$$

где $c_{ki}(x)$ - многочлены степени n.

Пример. Пусть $x_0 < x_1 < x_2$ - точки, в которых заданы значения

$$\begin{aligned} &f(x_0) = f_0, \\ &f(x_1) = f_1, \quad f'(x_1) = f'_1, \\ &f(x_2) = f_2. \end{aligned}$$

Требуется построить многочлен третьей степини $H_3(x)$ такой, что

$$\begin{aligned} &H_3(x_0) = f_0, \\ &H_3(x_1) = f_1, \quad H'_3(x_1) = f'_1, \\ &H_3(x_2) = f_2. \end{aligned} \qquad (11)$$

Будем искать его в виде

$$H_3(x) = c_{00}(x) f_0 + c_{10}(x) f_1 + c_{11}(x) f_1' + c_{20}(x) f_2,$$

где $c_{00}(x), c_{10}(x), c_{11}(x), c_{20}(x)$ - многочлены третьей степени.

Потребуем, чтобы

$$\begin{array}{llll}
c_{00}(x_0) = 1, & c_{10}(x_0) = 0, & c_{20}(x_0) = 0, & c_{11}(x_0) = 0, \\
c_{00}(x_1) = 0, & c_{10}(x_1) = 1, & c_{20}(x_1) = 0, & c_{11}(x_1) = 0, \\
c_{00}(x_2) = 0, & c_{10}(x_2) = 0, & c_{20}(x_2) = 1, & c_{11}(x_2) = 0, \\
c_{00}'(x_1) = 0, & c_{10}'(x_1) = 0, & c_{20}'(x_1) = 0, & c_{11}'(x_1) = 1.
\end{array}$$

Так как $c_{00}(x)$ имеет кратный корень в точке x_1 и простой корень x_2, то его будем искать в виде:

$$c_{00}(x) = K(x - x_1)^2 (x - x_2).$$

Из условия $c_{00}(x_0) = 1$ находим

$$K = \frac{1}{(x_0 - x_1)^2 (x_0 - x_2)}.$$

Таким образом,

$$c_{00}(x) = \frac{(x - x_1)^2 (x - x_2)}{(x_0 - x_1)^2 (x_0 - x_2)}. \qquad (12)$$

Аналогично получаем

$$c_{20}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)^2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)^2}. \tag{13}$$

$$c_{11}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_1-x_2)(x_1-x_0)}. \tag{14}$$

Многочлен $c_{10}(x)$ будем искать в виде

$$c_{10}(x) = (x-x_0)(x-x_2)(\alpha x+\beta),$$

где α и β - постоянные, подлежащие определению.

Из условия $c_{10}(x_1) = 1$ находим

$$\alpha x_1 + \beta = \frac{1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}.$$

Условие $c'_{10}(x_1) = 0$ приводит к уравнению

$$(x_1-x_0)(x_1-x_2)\alpha + (\alpha x_1+\beta)(2x_1-x_0-x_2) = 0.$$

Из последних двух равенств находим

$$\alpha = -\frac{2x_1-x_0-x_2}{(x_1-x_0)^2(x_1-x_2)^2},$$

$$\beta = \frac{1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \left(1 + \frac{x_1(2x_1 - x_0 - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \right),$$

Таким образом,

$$c_{10}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \left(1 - \frac{(x - x_1)(2x_1 - x_0 - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \right).$$

Следовательно, искомый интерполяционный многочлен $H_3(x)$ имеет вид

$$\begin{aligned} H_3(x) =& \frac{(x - x_1)^2 (x - x_2)}{(x_0 - x_1)^2 (x_0 - x_2)} f(x_0) + \\ &+ \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \left(1 - \frac{(x - x_1)(2x_1 - x_0 - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \right) f(x_1) + \\ &+ \frac{(x - x_0)(x - x_2)^2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)^2} f(x_2) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_0)} f'(x_1). \end{aligned}$$