ЛЕКЦИИ ПО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ

МГТУ им. Н.Э. Баумана
Москва

Итерационные методы решения СЛАУ

Пусть дана система линейных уравнений

$$AX = f \tag{1}$$

Последовательность векторов $X^{(1)}$, $X^{(2)}$,..., $X^{(k)}$,... строится по рекуррентным формулам

$$X^{(k)} = X^{(k-1)} + H^{(k)}\left(f - AX^{(k-1)}\right), \tag{2}$$

где $H^{(1)}$, $H^{(2)}$,... – некоторая последовательность матриц,
$X^{(0)}$ – начальное приближение, в общем случае произвольное.
Различный выбор последовательности матриц $H^{(k)}$ приводит к различным итерационным процессам.

Точное решение X^* является неподвижной точкой для итерационных процессов протекающих по схеме (2). Следовательно, если за начальное приближение взять $X^{(0)} = X^*$, то все последующие приближения будут также равны X^*.

Покажем, что всякий итерационный процесс, для которого X^* является неподвижной точкой, протекающий по формуле

$$X^{(k)} = C^{(k)} X^{(k-1)} + Z^{(k)}, \tag{3}$$

где $C^{(k)}$ – последовательность матриц, $Z^{(k)}$ – последовательность векторов, может быть представлена в виде (2).

Пусть

$$X^* = C^{(k)} X^* + Z^{(k)},$$

откуда

$$X^{(k)} = C^{(k)} X^{(k-1)} + X^* - C^{(k)} X^* = X^* + C^{(k)} \left(X^{(k-1)} - X^* \right) =$$

$$= X^* + C^{(k)} \left(X^{(k-1)} - X^* \right) - E \left(X^{(k-1)} - X^* \right) + E \left(X^{(k-1)} - X^* \right) =$$

$$= X^{(k-1)} + \left(C^{(k)} - E \right) \left(X^{(k-1)} - X^* \right) =$$

$$= X^{(k-1)} + \left(E - C^{(k)} \right) A^{-1} A \left(X^* - X^{(k-1)} \right) = X^{(k-1)} + H^{(k)} \left(f - AX^{(k-1)} \right),$$

где $H^{(k)} = \left(E - C^{(k)} \right) A^{-1}$.

Запишем необходимое о достаточное условие того, чтобы итерационный процесс (3) сходился к решению при любом начальном приближении. Рассмотрим погрешность между точным решением и его приближением на к-ой итерации

$$X^* - X^{(k)} = X^* - X^{(k-1)} - H^{(k)}\left(AX^* - AX^{(k-1)}\right) = \\ = \left(E - H^{(k)}A\right)\left(X^* - X^{(k-1)}\right).$$

Тогда

$$X^* - X^{(k)} = \left(E - H^{(k)}A\right)\left(E - H^{(k-1)}A\right)\ldots\left(E - H^{(1)}A\right)\left(X^* - X^{(0)}\right).$$

Для того чтобы $X^* - X^{(k)} \to 0$ необходимо и достаточно, чтобы матрица

$$T^{(k)} = \left(E - H^{(k)}A\right)\left(E - H^{(k-1)}A\right)\ldots\left(E - H^{(1)}A\right)$$

стремилась к нулю. Для этого достаточно, чтобы любая норма матрицы $T^{(k)}$ стремилась к нулю.

Стационарные итерационные процессы - процессы, в которых матрица $H^{(k)}$ не зависит от номера шага k.В частности, если $H^{(k)} = H = E$, то получаем **классический процесс последовательных приближений**. Любой стационарный процесс при $H \neq E$ можно рассматривать как процесс последовательных приближений, применяемый к эквивалентной системе

$$HAX = Hf.$$

Если матрица $H^{(k)}$ повторяется через некоторое число p шагов, то такие итерационные процессы называются **циклическими**.Из каждого циклического процесса можно получить равносильный ему стационарный процесс, принимая за один шаг результат применения полного цикла из p шагов.

Нестационарные итерационные процессы разделяют на два типа:

• Изменение матрицы $H^{(k)}$ осуществляется на каждом шаге.

• Проводят ускорение сходимости стационарного итерационного процесса заменой, время от времени, стационарной матрицы H на подобранную специальным образом матрицу $H^{(k)}$.

Метод последовательных приближений

Перепишем систему уравнений $AX = f$ в эквивалентном виде

$$X = BX + C, \tag{4}$$

где $B = E - A$, $C = f$.Тогда

$$X^{(k)} = BX^{(k-1)} + C. \tag{5}$$

Если процесс последовательных приближений сходится, то он сходится к решению системы, т. е. если $X^{(k)} \to X^*$ то, при предельном переходе в равенстве (5) получаем $X^* = BX^* + C$.

Процесс последовательных приближений является частным случаем общего итерационного процесса (3) при $H = E$.Действительно

$$X^{(k)} = (E - A)X^{(k-1)} + C = X^{(k-1)} + (f - AX^{(k-1)}).$$

Перепишем формулу (5) через начальное приближение $X^{(0)}$

$$X^{(k)} = B^k X^{(0)} + \left(E + B + B^2 + \cdots + B^{k-1}\right) C. \tag{6}$$

Теорема. Для сходимости процесса последовательных приближений при любом начальном условии $X^{(0)}$ необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения матрицы B были по модулю меньше единицы.

◄

$\Longrightarrow$ Пусть $X^{(k)} \to X^*$, где X^* – решение системы. Тогда

$$X^* - X^{(k)} = B\left(X^* - X^{(k-1)}\right) = \ldots = B^k\left(X^* - X^{(0)}\right) \to 0.$$

Это равенство должно выполняться при любом $X^{(0)}$.
Следовательно $B^k \to 0$. Для этого нужно, чтобы все собственные значения матрицы B были по модулю меньше единицы.

$\Longleftarrow$ Для доказательства достаточных условий докажем следующее утверждение:

Утверждение. Для того чтобы ряд

$$E + B + B^2 + \cdots + B^m + \cdots$$

сходился, необходимо и достаточно, чтобы $B^m \to 0$ при $m \to \infty$. В этом случае сумма ряда равна $(E - B)^{-1}$.

◄ Докажем только достаточность этого условия, так как необходимость очевидна.
Так как $B^m \to 0$, то все собственные значения матрицы B по модулю меньше единицы. Следовательно $|E - B| \neq 0$ и существует $(E - B)^{-1}$.
Рассмотри равенство

$$\left(E + B + B^2 + \cdots + B^k\right)(E - B) = E - B^{k+1}.$$

умножим его справа на $(E - B)^{-1}$, получим

$$E + B + B^2 + \cdots + B^k = (E - B)^{-1} - B^{k+1}(E - B)^{-1}.$$

Тогда при $k \to \infty$

$$E + B + B^2 + \cdots + B^k \to (E - B)^{-1}.$$

Следовательно

$$E + B + B^2 + \cdots + B^m + \cdots = (E - B)^{-1}.$$

►

Вернемся к доказательству теоремы.
Выполнение достаточного условия непосредственно вытекает из формулы (6).
Так как все собственные значения матрицы B по модулю меньше единицы, то $B^k \to 0$. Тогда

$$E + B + B^2 + \cdots + B^{k-1} \to (E - B)^{-1} = A^{-1}.$$

Следовательно $X^{(k)} \to X^*$. ►

Нетрудно показать справедливость следующего неравенства

$$||X^* - X^{(k)}|| \leqslant ||B||\,||X^{(*)} - X^{(k-1)}||.$$

Введенные ранее векторные нормы и подчиненные им матричные нормы дают следующие достаточные признаки сходимости метода последовательных приближений.

Пусть $X^* = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\text{T}}$ и $X^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}\right)^{\text{T}}$, тогда

• Если $\sum\limits_{j=1}^{n} |b_{ij}| \leqslant \mu < 1$ при любом $\forall i = 1, 2, \ldots, n$, то процесс последовательных приближений сходится, причем

$$\max_j \left| x_j - x_j^{(k)} \right| \leqslant \mu \max_j \left| x_j - x_J^{(k-1)} \right|.$$

• Если $\sum\limits_{i=1}^{n} |b_{ij}| \leqslant \nu < 1$ при любом $\forall j = 1, 2, \ldots, n$, то процесс последовательных приближений сходится, причем

$$\sum_{j=1}^{n} \left| x_j - x_j^{(k)} \right| \leqslant \nu \sum_{j=1}^{n} \left| x_j - x_j^{(k-1)} \right|.$$

Подготовка системы линейных алгебраических уравнений к виду, удобному для применения метода последовательных приближений. Условия сходимости метода последовательных приближений требуют, чтобы матрица коэффициентов системы $AX = f$ была в том или ином смысле близка к единичной матрице.

Если это условие не выполнени, то нужно предварительно подготовить систему для применения метода последовательных приближений.
Т. е. нужно перейти от системы $AX = f$ к эквивалентной системе $HAX = Hf$, где H – неособенная матрица, которая выбирается так, чтобы она была близка к A^{-1}.

Пример. Пусть матрица A положительно определена, тогда вычислив бесконечную норму μ матрицы A получаем, что все собственные значения матрицы A лежат в интервале $(0, \mu)$.Положим

$$H = \frac{2}{\mu}E.$$

Тогда систему $AX = f$ преобразуем к виду

$$X = \left(E - \frac{2}{\mu}A\right)X + \frac{2}{\mu}f = BX + C.$$

В этом случае собственные значения матрицы $B = E - \dfrac{2}{\mu}A$ будут заключены в интервале $(-1, 1)$. Следовательно метод последовательных приближений будет сходящимся.

Метод Якоби (метод простой итерации)

В прикладных задачах часто встречаются системы, в которых диагональные элементы значительно преобладают над остальными.

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = f_1,\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = f_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mm}x_m = f_m.
\end{aligned} \tag{7}$$

Для применения метода Якоби необходимо привести систему к виду

$$X = BX + c,$$

где B – квадратная матрица с элементами b_{ij}, $i, j = \overline{1, m}$. c – вектор-столбец с элементами c_i, $i = \overline{1, m}$.

Замечание. В общем случае, задача приведение системы к виду удобному для итераций не является простой. Требует знания специфики используемой системы.

Самый простой способ приведения системы к виду удобному для итераций состоит в следующем.

Из первого уравнения системы выражаем неизвестное x_1, из второго x_2 и так далее. В результате получим систему

$$\begin{aligned} x_1 &= \qquad\qquad b_{12}x_2 + \ldots + b_{1m}x_m + c_1, \\ x_2 &= b_{21}x_1 + \ldots\ldots + b_{2m}x_m + c_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m &= b_{m1}x_1 + b_{m2}x_2 + \ldots + b_{m,m-1}x_{m-1} + c_m, \end{aligned} \tag{8}$$

в которой на главной диагонали матрицы B стоят нулевые элементы. Для возможности проведения данного преобразования необходимо, чтобы элементы на главной диагонали матрицы A были ненулевыми.

Выберем начальное приближение $X^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}\right)^T$. Подставляя его в полученную систему, находим первое приближение

$$X^{(1)} = BX^{(0)} + c.$$

Аналогично находим второе приближение

$$X^{(2)} = BX^{(1)} + c.$$

Продолжая этот процесс далее получим последовательность приближений: $X^{(0)}$, $X^{(1)}$, …, $X^{(n)}$, …, вычисляемых по формуле

$$X^{(k+1)} = BX^{(k)} + c, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

В разывернутой форме записи формула выглядит так

$$\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \qquad\qquad b_{12}x_2^{(k)} + \ldots + b_{1m}x_m^{(k)} + c_1, \\
x_2^{(k+1)} &= b_{21}x_1^{(k)} + \ldots\ldots + b_{2m}x_m^{(k)} + c_2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_m^{(k+1)} &= b_{m1}x_1^{(k)} + b_{m2}x_2^{(k)} + \ldots + b_{m,m-1}x_{m-1}^{(k)} + c_m.
\end{aligned}$$

Теорема. Пусть выполнено условие $||B|| < 1$. Тогда

• Решение X^* системы $X = BX + c$ существует и единственно.

• При произвольном начальном приближении $X^{(0)}$ метод простой итерации сходится и справедлива оценка погрешности

$$||X^{(n)} - X^*|| \leqslant ||B||^n ||X^{(0)} - X^*||.$$

◀

• Известно, что СЛАУ имеет единственное решение при любой правой части тогда и только тогда, когда соответствующая однородная система имеет только нулевое решение.Пусть X – решение однородной системы $X = BX$.Тогда

$$||X|| \leqslant ||X||||B||.$$

Так как по условию $||B|| < 1$, то данное неравенство возможно только при $||X|| = 0$. Следовательно $X = 0$ и первое утверждение теоремы доказано.

• Вычтем из равенства $X^{(k+1)} = BX^{(k)} + c$ равенсто $X^* = BX^* + c$.

$$X^{(k+1)} - X^* = B\left(X^{(k)} - X^*\right).$$

По свойства нормы $||X^{(k+1)} - X^*|| \leqslant ||B||||X^{(k)} - X^*||$. Тогда

$$||X^{(n)} - X^*|| \leqslant ||B||||X^{(n-1)} - X^*|| \leqslant ||B||^2||X^{(n-2)} - X^*|| \leqslant \ldots \leqslant$$
$$\leqslant ||B||^{(n-1)}||X^{(1)} - X^*|| \leqslant ||B||^{(n)}||X^{(0)} - X^*||.$$

Так как $||B||^n \to 0$ при $n \to \infty$ получаем $||X^{(n)} - X^*|| \to 0$ при $n \to \infty$.

▶

Апостериорная оценка погрешности. Если выполнено условие $||B|| < 1$, то справедлива апостериорная оценка погрешности

$$||X^{(n)} - X^*|| \leqslant \frac{||B||}{1 - ||B||} ||X^{(n)} - X^{(n-1)}||.$$

◀ Запишем равенство $X^{(k+1)} - X^* = B\left(X^{(k)} - X^*\right)$ в виде

$$X^{(n)} - X^* = B\left(X^{(n-1)} - X^{(n)}\right) + B\left(X^{(n)} - X^*\right).$$

Тогда

$$||X^{(n)} - X^*|| \leqslant ||B\left(X^{(n-1)} - X^{(n)}\right) + B\left(X^{(n)} - X^*\right)|| \leqslant$$
$$\leqslant ||B|| ||X^{(n-1)} - X^{(n)}|| + ||B|| ||X^{(n)} - X^*||.$$

Полученное неравенство эквивалентно неравенству

$$||X^{(n)} - X^*|| \leqslant \frac{||B||}{1 - ||B||} ||X^{(n)} - X^{(n-1)}||.$$

▶

Если требуется найти решение с точностью ε, то следует вести итерации до выполнения неравенства

$$\frac{||B||}{1-||B||}||X^{(n)} - X^{(n-1)}|| < \varepsilon.$$

Тогда $||X^{(n)} - X^{(n-1)}|| < \varepsilon_1$, где $\varepsilon_1 = \dfrac{1-||B||}{||B||}\varepsilon$.

Рассмотренное преобразование системы (7) в систему (8) равносильно умножению системы (7) слева на матрицу

$$H = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{a_{11}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{a_{22}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{a_{33}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dfrac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $H = D^{-1}$, где $D = \mathrm{diag}\,(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$.

Следовательно, необходимым и достаточным условием сходимости метода простой итерации состоит в том, что все собственные значения матрицы $B = E - D^{-1}A$ по модулю были меньше единицы.

$$|B-\lambda E| = |E - D^{-1}A - \lambda E| = |D^{-1}|\,|D - A - \lambda D| = (-1)^n |D^{-1}|\,|A - D + \lambda D|.$$

Таким образом, для сходимости метода простых итераций необходимо и достаточно чтобы уравнение

$$|A - D + \lambda D| = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

имело корни по модулю меньше единицы.

Пусть теперь задана система $Ax = f$, в которой преобладание главной диагонали не имеет место. Тогда, подбор вспомогательной матрицы H может быть осуществлен, например, грубым обращением матрицы A.

Часто, оказывается целесообразным, в качестве матрицы H взять матрицу, обратную к матрице

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Обращение такой матрицы не составляет труда

$$H = \begin{pmatrix} \frac{a_{22}}{\Delta_1} & -\frac{a_{12}}{\Delta_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{a_{21}}{\Delta_1} & \frac{a_{11}}{\Delta_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a_{44}}{\Delta_2} & -\frac{a_{34}}{\Delta_2} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{a_{43}}{\Delta_2} & \frac{a_{33}}{\Delta_2} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

где $\Delta_1 = a_{11}a_{22} - a12a_{21}$ и $\Delta_2 = a_{33}a_{44} - a_{34}a_{43}$.

Метод Зейделя

Пусть система линейных алгебраических уравнений $AX = f$ представима в виде

$$X = BX + C, \tag{9}$$

где $B = E - A$, $C = f$.

Метод Зейделя напоминает метод Якоби с той лишь разницей, что при вычислении k-го приближения для i-ой компоненты учитываются вычисленные уже ранее k-е компоненты $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_{i-1}^{(k)}$, т. е.

$$\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= b_{12}x_2^{(k)} + b_{13}x_3^{(k)} + \ldots + b_{1n}x_n^{(k)} + c_1,\\
x_2^{(k+1)} &= b_{21}x_1^{(k+1)} + b_{23}x_3^{(k)} + \ldots + b_{2n}x_n^{(k)} + c_2,\\
x_3^{(k+1)} &= b_{31}x_1^{(k+1)} + b_{32}x_2^{(k+1)} + b_{34}x_4^{(k)} + \ldots + b_{1n}x_n^{(k)} + c_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_n^{(k+1)} &= b_{n1}x_1^{(k+1)} + b_{n2}x_2^{(k+1)} + b_{n3}x_3^{(k+1)} + \ldots + b_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)} + c_n.
\end{aligned} \tag{10}$$

Введем матрицы

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ b_{31} & b_{32} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & \ldots & b_{1n} \\ 0 & 0 & b_{23} & \ldots & b_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & b_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда в матричном виде расчетные формулы примут вид:

$$X^{(k+1)} = B_1 X^{(k+1)} + B_2 X^{(k)} + C. \tag{11}$$

В этом случае точка X^* является неподвижной точкой отображения (11) и

$$X^* = B_1 X^* + B_2 X^* + C. \tag{12}$$

Запишем достаточные условия сходимости метода Зейделя.

Теорема. Пусть $||B|| < 1$, где под нормой понимается либо $||B||_1$, либо $||B||_\infty$, тогда при любом выборе начального приближения $X^{(0)}$ метод Зейделя сходится со скоростью геометрической прогресси, знаменатель которой $q \leqslant ||B||$.

Теорема. Пусть выполнено условие $||B_1|| + ||B_2|| < 1$. Тогда при любом выборе начального приближения $X^{(0)}$ метод Зейделя сходится и верна оценка погрешности

$$\left|\left|X^{(n)} - X^*\right|\right| \leqslant q^n \left|\left|X^{(0)} - X^*\right|\right|, \qquad (13)$$

где $q = \dfrac{||B_2||}{1 - ||B_1||} < 1.$

◀ Вычитая из равенства (11) равенство (12) получаем

$$X^{(k+1)} - X^* = B_1 \left(X^{(k+1)} - X^*\right) + B_2 \left(X^{(k)} - X^*\right).$$

Вычисляя нормы левой и правой частей полученного равенства и использую свойства нормы, запишем

$$\left|\left|X^{(k+1)} - X^*\right|\right| = \left|\left|B_1 \left(X^{(k+1)} - X^*\right) + B_2 \left(X^{(k)} - X^*\right)\right|\right| \leqslant$$
$$\leqslant ||B_1|| \left|\left|X^{(k+1)} - X^*\right|\right| + ||B_2|| \left|\left|X^{(k)} - X^*\right|\right|.$$

Следовательно,

$$(1-||B_1||)\left|\left|X^{(k+1)}-X^*\right|\right| \leqslant ||B_2||\,\left|\left|X^{(k)}-X^*\right|\right|,$$

и

$$\left|\left|X^{(k+1)}-X^*\right|\right| \leqslant \frac{||B_2||}{1-||B_1||}\left|\left|X^{(k)}-X^*\right|\right|.$$

Сходимость метода Зейделя следует из того, что $q = \dfrac{||B_2||}{1-||B_1||} < 1$ и $X^{(n)} \to X^*$ при $n \to +\infty$. ►

Полученная оценка является трудно проверяемой при вычислениях, поэтому запишем апостериорную оценку погрешности.

Теорема. Если выполнено условие $||B|| < 1$, то для метода Зейделя справедлива апостериорная оценка погрешности

$$\left|\left|X^{(n)}-X^*\right|\right| \leqslant \frac{||B_2||}{1-||B||}\left|\left|X^{(n)}-X^{(n-1)}\right|\right|, \quad n \geqslant 1. \qquad (14)$$

◄ Вычтем из равенства (11) равенство (12). Получим

$$X^{(k+1)} - X^* = B_1\left(X^{(k+1)} - X^*\right) + B_2\left(X^{(k)} - X^*\right) + B_2\left(X^{(k+1)} - X^*\right) - \\ - B_2\left(X^{(k+1)} - X^*\right) = B\left(X^{(k+1)} - X^*\right) + B_2\left(X^{(k)} - X^{(k+1)}\right).$$

Вычисляя нормы левой и правой частей равенства и использую свойства нормы, получаем

$$\left|\left|X^{(k+1)} - X^*\right|\right| \leqslant ||B|| \left|\left|X^{(k+1)} - X^*\right|\right| + ||B_2|| \left|\left|X^{(k+1)} - X^{(k)}\right|\right|.$$

Перенося в левую часть первое слагаемое правой части полученного неравенства получаем

$$(1 - ||B||)\left|\left|X^{(k+1)} - X^*\right|\right| \leqslant ||B_2|| \left|\left|X^{(k+1)} - X^{(k)}\right|\right|.$$

Поделив на $(1 - ||B||)$ и положив $k = n - 1$ получаем требуемое неравенство (14). ►

Полученная апостериорная оценка позволяет сформулировать критерий окончания итерационного процесса.

Если требуется найти решение с точностью $\varepsilon > 0$, то итерационный процесс следует вести до выполнения неравенства

$$\left|\left|X^{(n-1)} - X^{(n)}\right|\right| \frac{||B_2||}{1 - ||B||} < \varepsilon$$

данное неравенство эквивалентно

$$\left|\left|X^{(n-1)} - X^{(n)}\right|\right| < \varepsilon_1,$$

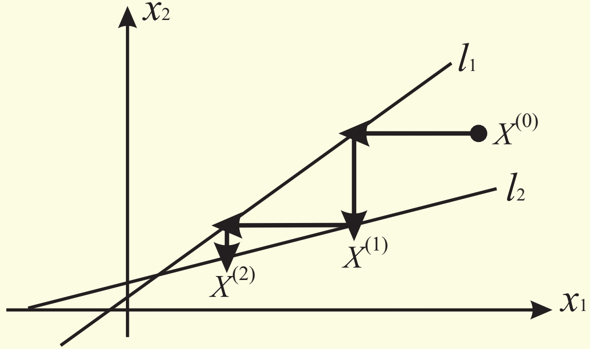
где $\varepsilon_1 = \dfrac{1 - ||B||}{||B_2||}\varepsilon$.

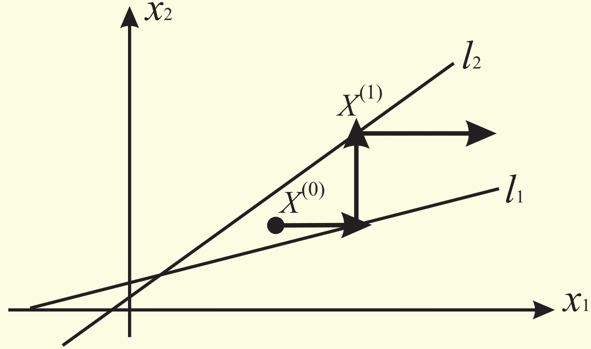
Рассмотрим геометрическую интерпретацию метода Зейделя. Для этого рассмотрим систему из 2-х уравнений с двумя неизвестными.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = f_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = f_2.$$

Оба уравнения системы задают на плоскости Ox_1x_2 прямые. Пусть первое уравнение задает прямую l_1, а второе – l_2. Тогда

$$x_1^{(k+1)} = b_{12}x_2^{(k)} + c_1,$$
$$x_2^{(k+1)} = b_{21}x_1^{(k+1)} + c_2.$$





На рисунках приведены примеры, отвечающие сходящемуся и расходящемуся итерационному процессу Зейделя.