Ленточные матрицы и метод прогонки

Решение СЛАУ с ленточной матрицей. Метод прогонки

Пусть стоит задача решения СЛАУ

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{f},$$

где

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{c_1} & & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{b_2} & \boldsymbol{a_2} & \ddots & \\ & \ddots & & \boldsymbol{c_{n-1}} \\ \boldsymbol{0} & & \boldsymbol{b_n} & \boldsymbol{a_n} \end{pmatrix}.$$

Выполним $\boldsymbol{LU}$-разложение матрицы $\boldsymbol{A}$ и сведём задачу к последовательному решению следующих СЛАУ с треугольными матрицами

$$\boldsymbol{Ly} = \boldsymbol{b}, \qquad \boldsymbol{Ux} = \boldsymbol{y}.$$

LU-разложение ленточных матриц

Пусть

$$\boldsymbol{A = LU,}$$

где

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & & & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\beta_2} & \mathbf{1} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \boldsymbol{\beta_n} & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha_1} & \boldsymbol{c_1} & & \mathbf{0} \\ & \boldsymbol{\alpha_2} & \ddots & \\ & & \ddots & \boldsymbol{c_{n-1}} \\ \mathbf{0} & & & \boldsymbol{\alpha_n} \end{pmatrix}.$$

Тогда используя метод Гаусса находим

$$\boldsymbol{\alpha_1 = a_1, \quad \beta_i = \frac{b_i}{\alpha_{i-1}}, \quad \alpha_i = a_i - \beta_i c_{i-1}, \quad i = 2, \ldots, n.}$$

Решение СЛАУ $\boldsymbol{Ly = f}$

Поскольку

$$\boldsymbol{L = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ \beta_2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \beta_n & 1 \end{pmatrix},}$$

то для решения СЛАУ $\boldsymbol{Ly = f}$ имеем

$$\boldsymbol{y_1 = f_1, \quad y_i = f_i - \beta_i y_{i-1}, \quad i = 2, \ldots, n.}$$

Решение СЛАУ $\boldsymbol{Ux = y}$

Поскольку

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha_1} & \boldsymbol{c_1} & & \mathbf{0} \\ & \boldsymbol{\alpha_2} & \ddots & \\ & & \ddots & \boldsymbol{c_{n-1}} \\ \mathbf{0} & & & \boldsymbol{\alpha_n} \end{pmatrix},$$

то решение СЛАУ $\boldsymbol{Ux = y}$ имеем находится по формулам

$$\boldsymbol{x_n = \frac{y_n}{\alpha_n}, \quad x_i = \frac{y_i - c_i x_{i+1}}{\alpha_i}, \quad i = n-1, \ldots, 1.}$$

Метод прогонки (алгоритм Томаса)

Объединяя рассмотренные методы получим метод прогонки решения системы с ленточной матрицей (алгоритм Томаса)

$$\boldsymbol{\alpha_1 = a_1, \quad \beta_i = \frac{b_i}{\alpha_{i-1}}, \quad \alpha_i = a_i - \beta_i c_i, \quad i = 2, \ldots, n,}$$

$$\boldsymbol{y_1 = f_1, \quad y_i = f_i - \beta_i y_{i-1}, \quad i = 2, \ldots, n,}$$

$$\boldsymbol{x_n = \frac{y_n}{\alpha_n}, \quad x_i = \frac{y_i - c_i x_{i+1}}{\alpha_i}, \quad i = n-1, \ldots, 1.}$$