第 8 卷 第 3 期 运 筹 与 管 理 Vol. 8, No. 3
1999 年 9 月 OPERATIONS RESEARCH AND MANAGEMENT SCIENCE Sept., 1999

含交易费用的证券组合投资的多目标规划模型

陈华友,许义生

(安徽大学 数学系,安徽 合肥 230039)

摘 要: 以 Markowitz 证券组合投资理论为基础,采用相对偏好参数,建立了含交易费用的证券组合的多目标规划模型,并给出了它的解法及有效边界的确定方法。

关键词: 证券组合投资;相对偏好参数;多目标规划;二次规划有效边界

中图分类号: F830.9:O221 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-3221(1999)03-0057-04

Multiple Objectives Programming Model for Portfolio Investement Subject to Transaction Costs

CHEN Hua-you, XU Yi-sheng

(*Anhui University, Dept. of Mathematics, Hefei 230039, China*)

Abstract: In this paper, we present a multiple objectives programming model with a liquidity preferential parameter for portfolio investement subject to transaction costs, based on Markowitz's theory, and we give its solution and its efficient frontier.

Key words: portfolio investement; liquidity preferential parameter; multiple objectives programming; quadratic programming efficent frontier

0 引言

由 Markowitz 提出的证券组合投资模型采用了收益率均值和收益率方差作为评价风险证券的两个指标,建立了证券组合均值——方差模型。它告诉了一个理性投资者在拥有一定数量资本的条件下,如何在若干种风险证券上进行合理的资金分配,以达到尽量地分散风险,获得最大收益的目的。证券组合投资问题一直是研究的热点问题,并且取得了大量的成果,目前很多文献研究了证券组合投资的线性规划模型。

实际上理性的投资者具有"非满足性"及"风险回避性"两个特征。他们希望投资收益尽量地高,又希望投资风险尽量地小。只有对这两个指标综合衡量后,才能作出合理的决策。因此证券组合投资决策属于多目标决策,本文正是从这个角度考虑建立了证券组合投资的多目标

收稿日期: 1999-04-24

作者简介: 陈华友(1969-),男,安徽大学数学系讲师,硕士,从事经济统计与发展分析方向的研究。

规划模型,并给出其解法及其有效边界。

1 证券组合投资多目标规划模型的建立

设证券市场上有 n 种有价证券,第 i 种证券收益率为:

$$R_i = [(P_1^i - P_0^i) + d_i]/P_0^i,\ i = 1, 2, \cdots, n$$

其中 P_0^i 为第 i 种证券投资期初的价格,P_1^i 为期末出售该证券的价格,d_i 为证券持有期间所收到的任何红利、股息等。显然 R_i 为一随机变量。第 i 种证券期望收益率和风险为:

$$R_i = E(R_i),\ \sigma_i = E(R_i - R_i)^2$$

假设投资者持有 M_0 的货币,设 x_i 表示投资者购买第 i 种有价证券的金额,令 C_i 表示第 i 种证券单位交易额的交易费用,则扣除交易费用后第 i 种证券投资收益额为:

$$R_i(x_i) = R_i x_i - C_i x_i$$

从而 n 种证券投资组合的期望收益额为:

$$R_p(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}(R_i - C_i)x_i$$

n 种证券组合投资的风险为:

$$\sigma_p^2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij}$$

其中 $\sigma_{ij} = E(R_i - R_i)(R_j - R_j)$,它表示第 i 种证券与第 j 种证券的协方差。

在证券组合投资决策时,假定投资者不允许被卖空,即不允许卖出他人的证券以后再将其买回来归还他人的投机行为,所以要求投资者对 n 种证券的投资额满足:

$$x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \cdots, n$$

考虑到预算约束条件,要求投资者在 n 种证券上投资额和支付的交割费不应超过其自身的货币持有量 M_0,即:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} C_i x_i \leqslant M_0$$

于是我们得到了考虑交易费用的证券组合投资的多目标规模模型,记为模型(Ⅰ):

$$\min\ \sigma_p^2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij}$$

$$\max\ R_p(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}(R_i - C_i)x_i$$

$$s \cdot t \cdot \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} C_i x_i \leqslant M_0 \\ x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

若记 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$,$X$ 表示证券组合投资向量,$C = (c_1, c_2, \cdots, c_n)^T$,$C$ 表示证券单位交易额的交易费用向量,$R = (R_1, R_2, \cdots, R_n)^T$ 表示证券期望收益率向量,$I = (1, 1, \cdots, 1)^T$ 表示由元素 1 组成的 n 维列向量,$V = (\sigma_{ij})_{n \times n}$,$V$ 表示证券组合收益的协方差矩阵,V 为正定阵。则模型(Ⅰ)可表为矩阵形式,记为模型(Ⅱ):

$$\min\ \sigma_p^2(X) = X^T V X$$

$$\max R_p(X) = R^T X - C^T X$$
$$s.t.\begin{cases} I^T X + C^T X \leqslant M_0 \\ X \geqslant 0 \end{cases}$$

2　多目标规划模型的求解

一般而言，各种证券具有偿还性、流动性、风险性、收益性四方面的特征，其中证券的收益性与风险性大体上呈同方向增长，即收益越大，风险也越大。因此我们要想使收益和风险两个目标同时实现最优化是不可能的。对于上述证券组合投资双目标优化问题，我们采用了线性加权和法，即对两个目标 $\sigma_p^2(X)$ 和 $R_p(X)$ 分别给以权系数作新的目标函数：

$$\min U(X) = \lambda\sigma_p^2(X) - (1-\lambda)R_p(X)$$

其中 λ 反映了证券投资中投资者对风险和收益的相对偏好系数，$\lambda \in [0,1]$，λ 越小表示投资者轻视风险而重视收益，属于冒险投资者；反之，λ 越大表示投资者重视风险而轻视收益，属于风险厌恶者。则多目标规模模型(Ⅱ)转化为单目标模型，记为模型(Ⅲ)：

$$\min U(X) = \lambda X^T V X - (1-\lambda)(R^T X - C^T X)$$
$$s.t.\begin{cases} I^T X + C^T X \leqslant M_0 \\ X \geqslant 0 \end{cases}$$

显然这是一个二次规划问题，目标函数为严格凸函数，二次规划可行域为凸集，此规划属于凸规划。由非线性规划理论知，凸规划局部极值即为全局极值，*Kuhn-Tucker* 条件既是最优点存在必要条件，同时也是充分条件。模型(Ⅲ)的 *Kuhn-Tucker* 条件可表为：

$$\begin{cases} -2\lambda VX + (1-\lambda)(R-C) - y_{n+1}(I+C) + Y = 0 \\ M_0 - (I^T X + C^T X) - x_{n+1} = 0 \\ x_j y_j = 0,\ j = 1,2,\cdots,n \\ Y \geqslant 0,\ X \geqslant 0,\ x_{n+1} \geqslant 0,\ y_{n+1} \geqslant 0 \end{cases}$$

其中 y_{n+1} 是与第一个约束条件相对应的 K-T 乘子，$Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$ 是与非负证券组合投资向量 X 相对应的 K-T 乘子，x_{n+1} 为第 1 个约束条件所引入的松弛变量。

求解模型(Ⅲ)等价于求解 K-T 条件，为求解 K-T 条件，可考虑如下线性规划问题，记为模型(Ⅳ)：

$$\min \varphi(Z) = I^T Z$$
$$s.t.\begin{cases} 2\lambda VX - Y + y_{n+1}(I+C) + Z = (1-\lambda)(R-C) \\ M_0 - (I^T X + C^T X) - x_{n+1} = 0 \\ x_j y_j = 0,\ j = 1,2,\cdots,n \\ Y \geqslant 0,\ X \geqslant 0,\ x_{n+1} \geqslant 0,\ y_{n+1} \geqslant 0 \\ Z \geqslant 0 \end{cases}$$

其中 $Z = (z_1, z_2, \cdots, z_n)^T$ 是引入的人工向量，解此线性规划模型(Ⅳ)，若能得到该线性规划问题最优解为$(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_{n+1}^*, y_1^*, \cdots, y_{n+1}^*, z_1^* = 0, \cdots, z_n^* = 0)$，则$(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$就为二次规划模型(Ⅲ)的最优解。

3 证券组合投资有效边界的确定方法

从前面的模型可知,只要给定投资者对风险和收益的相对偏好参数 λ 就能确定最优的证券组合投资向量 $X^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)^T$,从而最优组合证券收益额 $R_p = (R^T - C^T)X^*$,其对应的风险为 $\sigma_p^2 = X^{*T}VX^*$。若相对偏好参数 λ 在 $[0,1]$ 内发生变动,则 R_p 及 σ_p^2 均发生变动。一般地随着 λ 的增加,投资者成为风险厌恶者,σ_p^2 在减小,从而 R_p 也在减小。因此最优证券组合投资收益 R_p 与其风险存在着某种函数关系,记为 $R_p = f(\sigma_p^2)$,称此种曲线为证券组合投资模型(Ⅲ)的有效边界。在文献[1]里已证明了含交易费用的证券组合投资模型的有效边界具有如下性质:在平面(R_p, σ_p^2)上有效边界是向下凸的,或在(σ_p^2, R_p)平面上是向上凸的。

有效边界的确定方法可采用曲线拟合法。即对 m 个不同投资者偏好参数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$,可求出与其相对应的最优证券组合投资的收益和风险,$(R_{p_1}, \sigma_{p_1}^2)$,$(R_{p_2}, \sigma_{p_2}^2)$,$\cdots$,$(R_{p_m}, \sigma_{p_m}^2)$,在 R_p-σ_p^2 平面上作出上述 m 个点的散点图,然后用合适的曲线去拟合它们,从而可求出 σ_p^2 与 R_p 的函数关系,确定出证券组合投资的有效边界。

4 结束语

综上所述,含交易费用的证券组合投资决策模型的步骤为:

(1) 选择 n 种证券作为投资对象。

(2) 给出投资者收益和风险的相对偏好参数 λ 把多目标规划模型转化为单目标的二次规划模型。

(3) 引进人工变量及松弛变量把二次规划模型的 K-T 条件转化为线性规划模型,再利用现成的线性规划软件求解,即可确定最优的证券组合投资策略。

(4) 由于证券市场上各证券收益率会出现迅速变化,并且还会引起主观的偏好参数的变动,因而对市场变化趋势的预测成为投资策略能否实现真正最优的重要条件。

参考文献

[1] 胡国政,李楚霖. 考虑交易费用的证券组合投资的研究[J]. 预测,1998,(5).

[2] 马永开,唐小我. 非负约束条件下组合证券投资决策方法的进一步研究[J]. 预测,1996,(4).

[3] MARKOWITZ H M. Foundations of Portfolio Theory, J. Finance,1992,2.

[4] 运筹学编写组. 运筹学[M]. 北京:清华大学出版社,1990,第2版.