文章编号: 1000-6788(2003)01-0022-04

带交易费用的泛证券组合投资策略

刘善存[1], 邱菀华[1], 汪寿阳[2]
(1.北京航空航天大学经济管理学院,北京 100083; 2.中国科学院数学与系统科学研究院系统科学研究所,北京 100080)

摘要: 研究带交易费用的泛证券组合投资策略,得到一些有趣的结论,为实际应用泛证券组合投资策略提供了一个初步的理论框架.

关键词: 投资组合; 泛证券组合投资策略; 定常再调整策略; 交易费用
中图分类号: F069 文献标识码: A

Universal Portfolio Selection with Transaction Costs

LIU Shan-cun[1], QIU Wan-hua[1], WANG Shou-yang[2]
(1. School of Economics and Management, Beijing University of Aeronautics & Astronautics, Beijing 100083, China; 2. Institute of Systems Science, Academy of Mathematics and Systems Sciences, Chinese Academy of Science, Beijing 100080, China)

Abstract: In this paper, we extended this on-line strategy to the case with transaction costs, and got some interesting results, and presented an elementary theoretical framework for applying in practice.

Key words: portfolio selection; universal portfolio; constant re-balanced portfolio; transaction costs

1 引论

证券组合投资是现代投资理论的一个重要研究领域. H. Markowitz关于证券组合的选择理论被认为是现代金融投资分析奠基性的工作. 以均值-方差(Mean-Variance, MV)模型为框架的期望-方差(E-V)有效前沿理论在过去 40多年得到了广泛的应用. 这种模型的建立基于两个基本假设: 一是认为各种证券收益率服从某个特定的分布,二是认为投资者已经充分了解市场的信息并可以精确地估计证券收益率的数字特征. 这两个假设具有一定的争议性. 20世纪 90年代初, T. M. Cover[1]提出了一种泛证券组合投资策略. 这种投资策略对随机收益率的分布不作任何假设,即随机收益率可以随意且其变化无任何规律可循. 在市场价格无规律地变化的情况下,理论上还存在着一个最优的定常再调整策略(Best constant rebalanced portfolio, BCRP),这种策略在多期组合投资中,重复调整对各种证券投资的数量以保持投资比例不变. 但遗憾的是, BCRP只能事后确定. 泛证券投资策略是为了克服这一缺陷而提出的一种在线的序贯投资策略来追踪 BCRP. T. M. Cover和 E. Ordentlich[2]将 T. M. Cover模型[1]推广到了带有边侧信息的情形,而 D. Helmbold[3]给出了另外一种算法,这种算法具有较易于计算等优点. 最近, A. Blum and A. Kalai[4]讨论了带有交易费用的一种简单模型. 在模型中他们只考虑了买入证券时的交易费用,但没有考虑卖出证券时的交易费用. 而实际情形则是要同时考虑买入和卖出两个方面的交易费用[5-9]. 本文讨论带有交易费用的一般模型,给出带有交易费用的泛组合投资策略并证明这种策略的一些性质.

2 模型和概念

设某证券市场有 m 种证券, $x^n=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是从第一个交易日到第 n个交易日的市场相对价格向量序列, $x_k=(x_{k1}, x_{k2}, \cdots, x_{km})$是第 k 个交易日的价格向量, x_{ij}是第 j 个证券第 i个交易日的相对价格,

收稿日期: 2001-07-02
资助项目: 国家自然科学基金(79930900)

即 $x_{ij}=\dfrac{\text{第 } j \text{ 个证券第 } i \text{ 个交易日的收盘价}}{\text{第 } j \text{ 个证券第 } i \text{ 个交易日的开盘价}}$. 又设 $b\in \mathscr{R}^m$ 是一个证券组合投资向量,满足 $b_j\geq 0, j=1,\cdots,m$, $\mathrm{E}_j b_j=1$. 所有的投资向量构成了单纯形 $\mathrm{U}=\left\{b=(b_1, b_2,\cdots, b_m): \sum_j b_j=1, b_j\geq 0, j=1,\cdots,m\right\}$. 一个固定的定常再调整投资策略 b,记为 CRP_b,指在每期末都要调整投资者的财富使他的各种证券在下期初的投资比例不变 (保持为 b),这样以 CRP_b 为策略的投资在 n 期末最终可获得的财富为 $S_n(b, x^n)=\prod_{i=1}^{n} bx_i$.

设购买 (卖出)任何证券所付出的交易费用是交易量的一个固定的百分比,其比例系数为 $0\leq t\leq 1$ $(0\leq \_ \leq 1)$, 即每购买 (卖出)一单位资金的证券需付出 $t(_)$单位资金的交易费用. 设财富从组合向量 $b\in \mathrm{U}$ 一次性地调整到 $b'\in \mathrm{U}$所需的交易费用为 $T(b,b')$. 这样每单位财富从起初的投资比例 b可以有 $1-T(b,b')$个单位调整到组合向量 b', 其中 $w_j=b_j(1-T(b,b'))$是单位初始财富分配到第 j个证券的量,因此 $w=b(1-T(b,b'))$为实际证券组合向量调整后的结果. 所以他的购买总量和买出总量分别为 $\sum_{j: w_j>b_j}(w_j-b_j)$ 和 $\sum_{j: b_j>w_j}(b_j-w_j)$. 投资者的财富的减少量恰为付出的交易费用,即

$$T(b,b')=t\sum_{j: w_j>b_j}(w_j-b_j)+\_\sum_{j: b_j>w_j}(b_j-w_j)$$

同时他的卖出总量应该等于交易费用与购买量,即

$$\sum_{j: b_j>w_j}(b_j-w_j)=T(b,b')+\sum_{j: w_j>b_j}(w_j-b_j)$$

现在我们给出交易费用 $T(b,b')$的一些性质.

性质 1　$T(b,b'')\leq T(b,b')+(1-T(b,b'))T(b',b'')$, $\forall\ b,b',b''\in \mathrm{U}$.

证券从组合 b变到 b''所付出交易费用不会大于从 b变到 b'再从 b'变到 b''所付出的费用之和,因为后者有可能对同一证券既买又卖,会出现重复交费的情况.

性质 2　$T(b, \mathrm{T}b+(1-\mathrm{T})b')\leq(1-\mathrm{T})\max(t,\_)$, $(0\leq \mathrm{T}\leq 1)$, $\forall\ b, b'\in \mathrm{U}$.

投资者的证券组合从 b调整到 $\mathrm{T}b+(1-\mathrm{T})b'$的购买和卖出总量 (即交易量)不会超过 $1-\mathrm{T}$,因此其费用满足 $T(b,\mathrm{T}b+(1-\mathrm{T})b')\leq(1-\mathrm{T})\max(t,\_)$.

性质 3　$T(\mathrm{T}b+(1-\mathrm{T})b', \mathrm{T}b_1+(1-\mathrm{T})b_1')\leq \mathrm{T}T(b,b')+(1-\mathrm{T})T(b',b_1')$.

若投资者的投资策略I 是由策略I $_1$和I $_2$合成的一个混合策略,其中I $_1$是将证券组合 b调整到 b_1,而I $_2$是将证券组合 b'调整到 b_1',I 是将证券组合 $c(=\mathrm{T}b+(1-\mathrm{T})b)$调整到 $c_1(=\mathrm{T}b_1+(1-\mathrm{T})b_1')$,混合策略所花费的交易费用不会大于各个纯策略所花费的交易费的组合,因为后者很可能会对同一个证券既买又卖重复花费. 这意味着由混合策略创造的财富不小于纯策略的代数和.

带有交易费用的投资策略 CRP_b 所获得的财富可由以下公式表示:

$$S_n^t(b,x^n)=\prod_{i=1}^{n} bx_i(1-T(b'(x_{i-1}),b))$$

其中 $b'(x_{i-1})$的每个分量为 $b'(x_{i-1})_j=b_j(x_{i-1})_j/bx_{i-1}$, $j=1,2,\cdots,m$,而 $b'(x_0)$是开始时各个证券的资金比例.

3　带交易费用的泛证券组合投资策略

为了对比方便,我们先叙述文献 [1]中的一个定义和两个定理. 在假定无交易费的情况下, Cover给出了如下的定义以及相应的两个定理.

定义 1[1]　泛证券组合投资策略为 $\hat{b}_1=\left(\dfrac{1}{m},\dfrac{1}{m},\cdots,\dfrac{1}{m}\right)$, $\hat{b}_i=\int_{\mathrm{U}} bS_{i-1}(b, x^{i-1})\mathrm{d}b\Big/\int_{\mathrm{U}} S_{i-1}(b, x^{i-1})\mathrm{d}b$, $i=1,2,\cdots$,即 $\hat{b}_i$是 b在 U上的加权平均,其中 b的权重 $S_{i-1}(b, x^{i-1})\Big/\int_{\mathrm{U}} S_{i-1}(b, x^{i-1})\mathrm{d}\_(b)$,即以过去 $i-1$ 阶段的业绩作为权重.

定理 1[1] $\prod_{i=1}^{n}\hat{b}_i x^i = \int_U S_n(b, x^n)\,\mathrm{d}\mu(b) = E_b(S_n(b,x^n))$,其中的 $\mu(b)$是均匀分布随机变量对应的分布函数,E_b 是数学期望.

上述定理表示,由泛证券组合投资策略所得到的财富是 CRP_b 所得财富的均值.

定理 2[1] $\dfrac{\underline{泛组合投资所得财富}}{\mathrm{BCRP}所得财富} = \dfrac{\hat{S}(x^n)}{S_n^*(x^n)} \geq \binom{n+m-1}{m-1}^{-1} \geq \dfrac{1}{(n+1)^{m-1}}$.

定义 2 带交易费用的泛证券组合投资策略定义为 $\hat{b}_1^t = \left(\dfrac{1}{m},\dfrac{1}{m},\cdots,\dfrac{1}{m}\right)$, $\hat{b}_{k+1}^t = \int_U b S_k^t(b, x^k)\,\mathrm{d}\mu(b) \Big/ \int_U S_k^t(b, x^k)\,\mathrm{d}\mu(b)$, $k = 1,2,\cdots$,其中 $\mu(b)$是均匀分布随机变量对应的分布函数.

定理 3 泛证券组合投资所获得的财富为

$$\hat{S}_n^t(x^n) = \prod_{i=1}^{n}\hat{b}_i^t x_i(1 - T(\hat{b}_{i-1}(x_{i-1}),\hat{b}_i^t)) \geq E_{b\in U}[S_n^t(b)]$$

其中 $\hat{b}_{i-1}(x_{i-1})_j = (\hat{b}_{i-1}(x_{i-1}))_j / \hat{b}_{i-1}^{\circ} x_{i-1}$, $j = 1,2,\cdots$.

证明 $\hat{b}_i^t x_i(1 - T(\hat{b}_{i-1}(x_{i-1}),\hat{b}_i))$是泛证券组合投资的财富增长因子,因为 $\hat{b}_i^t = \int_U b \dfrac{S_{i-1}^t(b, x^i)}{\int_U S_{i-1}^t(b,x^i)\,\mathrm{d}\mu(b)}\,\mathrm{d}\mu(b)$,即 $\hat{b}_i^t$ 是所有策略 CRP_b, $b\in U$的混合策略,故由性质 3得

$$\hat{b}_i^t x_i(1 - T(\hat{b}_{i-1}(x_{i-1}),\hat{b}_i^t)) \geq \int_U b x_i(1 - T(b'(x_{i-1}),b)) \frac{S_{i-1}^t(b, x^i)}{\int_U S_i^t(b, x^{i-1})\,\mathrm{d}\mu(b)}\,\mathrm{d}\mu(b)$$

$$= \int_U b S_i^t(b, x^i)\,\mathrm{d}\mu(b) \Big/ \int_U S_{i-1}^t(b, x^{i-1})\,\mathrm{d}\mu(b)$$

于是,

$$\hat{S}_n^t(x^n) = \prod_{i=1}^{n}\hat{b}_i^t x_i(1 - T(\hat{b}_{i-1}^t(x_{i-1}), \hat{b}_{i-1}^t)) \geq \prod_{i=1}^{n}\int_U S_i^t(x^i)\,\mathrm{d}\mu(b) \Big/ \int_U S_{i-1}^t(x)\,\mathrm{d}\mu(b)$$

$$= \int_U S_n^t(b)\,\mathrm{d}\mu(b) = E_{b\in U}[S_n^t(b)]$$

定理得证.

定理 4 设 $0\leq t<1$和 $0\leq \_ <1$. 记 $\max(t, \_) = l$,则

$$\frac{\underline{泛组合投资所得财富}}{\mathrm{BCRP}所得财富} = \frac{\hat{S}_n^t(x^n)}{S_n^*(x^n)} \geq \binom{(1+l)n+m-1}{m-1}^{-1} \geq \frac{1}{((1+c)n+1)^{m-1}}$$

证明 由定理 3,我们有$\dfrac{\underline{泛组合投资所得财富}}{\mathrm{BCRP}所得财富} = \dfrac{\hat{S}_n^t(x^n)}{S_n^*(x^n)} \geq E_{b\in U}\left[\dfrac{\hat{S}_n^t(b,x^n)}{S_n^*(b^*,x^n)}\right]$,其中 b^* 是 BCRP,即 $S_n(b^*,x^n) = S_n^*(x^n)$. 令 $b\in U$, $r(b) = \max(y: b_j \geq y b_j^*, \forall j)$,则

$$\frac{S_n^t(b,x^n)}{S_n^t(b^*, x^n)} = \frac{\prod_{i=1}^{n} b\cdot x_i(1 - T(b'(x_{i-1}),b))}{\prod_{i=1}^{n} b^*\cdot x_i(1 - T(b'^*(x_{i-1}),b^*))} = \prod_{i=1}^{n}\frac{b\cdot x_i(1 - T(b'(x_{i-1}),b))}{b^*\cdot x_i(1 - T(b'^*(x_{i-1}),b^*))}$$

因为 $b\geq r(b)b^*$,故对固定的 $b_1\in U$有 $b = r(b)b^* + (1 - r(b))b_1$,即 b是由策略 b^* 和 b_1构成的混合策略,因此由性质 3和性质 1得

$$\begin{aligned} b\cdot x_i(1 - T(b'(x_{i-1}), b)) &\geq r(b)b^*\cdot x_i(1 - T(b^*(x_{i-1}), b)) \\ &\geq r(b)b^*\cdot x_i(1 - T(b'^*(x_{i-1}, b^*)(1 - T(b^*,b))) \end{aligned}$$

根据性质 2,

$$\begin{aligned} T(b^*,b) &= T(r(b)b^* + (1 - r(b))b^*, r(b)b^*, r(b)b^* + (1 - r(b))b_1) \\ &\leq (1 - r(b))\,T(b^*,b) \leq (1 - r(b))\,l \end{aligned}$$

从而,

$$S^t_n(b,\ x^n)\ /S^t_n(b^*,\ x^n)=\frac{\prod_{i=1}^{n} b\cdot x_i(1-T(b'(x_{i-1}),b))}{\prod_{i=1}^{n} b^*\cdot x_i(1-T(b'^*(x_{i-1}),b^*))}\geq\prod_{i=1}^{n} r(b)(1-l(1-r(b)))$$

因为对数函数是凸函数,所以

$$\log[1-l(1-r(b))]=\log[(1-l)1+lr(b)]\geq(1-l)\log1+l\log r(b)=\log r(b)^l$$

得 $1-l(1-r(b))\geq r(b)^l$. 所以

$$S^t_n(b,x^n)\ /S^t_n(b^*,x^n)\geq r(b)^{(1+l)n}$$

因此,

$$\frac{\hat{S}^t_n(x^n)}{S^t_*(x^n)}\geq E_{b\in U}[r(b)^{(1+l)n}]=\int_0^1 \mathrm{Pr}O_{b\in U}[r(b)^{(1+l)n}\geq x]\mathrm{d}x=\int_0^1 \mathrm{Pr}O_{b\in U}[b_j\geq x^{\frac{1}{n(1+l)}}b_j^*,\ \forall j]\mathrm{d}x$$

其中 $\mathrm{Pr}O$ 是概率符号. 令 $y=x^{\frac{1}{n(1+l)}}$, 得

$$\mathrm{Pr}O_{b\in U}[b_j\geq yb_j^*,\ \forall j]=\frac{Vol_{m-1}(b\in U):b_j\geq yb_j^*,\forall j)}{Vol_{m-1}(U)}$$

$$=\frac{Vol_{m-1}(yb^*+(1-y)b:b\in U)}{Vol_{m-1}(U)}=\frac{Vol_{m-1}((1-y)U)}{Vol_{m-1}(U)}=(1-y)^{m-1}$$

其中 Vol 表示体积. 令 $z=1-y$, 得

$$\frac{\hat{S}^t_n(x^n)}{S^t_*(x^n)}\geq\int_0^1(1-x^{\frac{1}{n(1+l)}})^{m-1}\mathrm{d}x=n(1+l)\int_0^1(1-y)^{m-1}y^{n(1+l)-1}\mathrm{d}y$$

$$=n(1+l)\int_0^1 z^{m-1}(1-z)^{n(1+l)-1}\mathrm{d}z$$

经重复应用分部积分,最终可得

$$\frac{\hat{S}^t_n(x^n)}{S^t_*(x^n)}\geq\binom{(1+l)n+m-1}{m-1}^{-1}\geq\frac{1}{((1+c)n+1)^{m-1}}$$

推论 1　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(\frac{\text{泛组合策略所得财富}}{\text{BCRP所得财富}}\right)\geq0.$

证明　因为 $\frac{1}{n}\log\left(\frac{\text{泛组合策略所得财富}}{\text{BCRP所得财富}}\right)=\frac{1}{n}\log\left(\frac{\hat{S}^t_n(x^n)}{S^t_*(x^n)}\right)\frac{1}{n}\log\frac{1}{((1+c)n+1)^{m-1}}\to0$,推论得证.

推论 1说明,$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(\hat{S}^t_n(x^n))\geq\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(S^t_*(x^n))$. 前者是泛组合投资策略所得财富的平均增长指数,后者是 BCRP所得财富的平均增长指数,即在最坏的情况下由泛证券组合策略所得财富的平均增长指数可以追踪 BCRP.

4　结论

泛证券组合投资策略不同于标准的 Markowitz均值方差组合投资模型,对证券市场证券随机收益率的分布不作任何假设,即证券价格可以随意无任何规律地变化,甚至于随机性可以与投资者的策略完全对抗,与市场的证券价格的随机波动性、复杂性和不可预测性相对抗. 假定存在一种最优的定常再调整策略,这种策略所产生的财富随时间成指数速度增长. 泛证券组合投资策略是一种在线的调整策略,这种策略可以追踪最优的定常再调整策略(BCRP),即使在最坏的情况下,其财富的平均增长指数逐渐趋近于 BCRP. 本文从实际证券投资情形出发,考虑了带交易费用的泛证券组合投资策略并得到了一些有趣的结果,为实际应用泛证券组合投资策略建立了初步的理论框架.

参考文献:

[1]　Cover T M. Universal portfolios[J]. Mathematical Finance, 1991, 1: 1-29.

[2]　Cover T M, Ordentlich E. Universal portfolios with side information[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1996, 42: 348-363.

(下转第 87页)

明了本文算法的正确性和可行性.

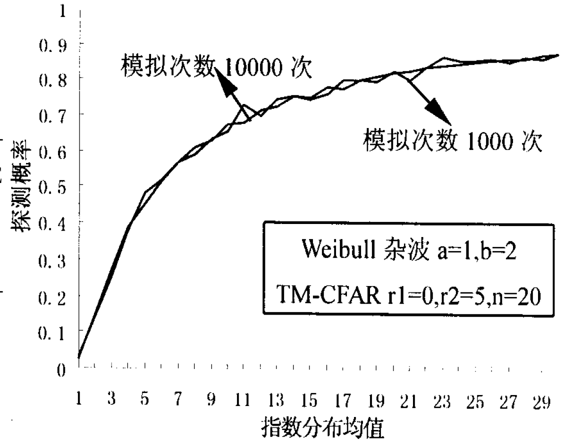

图 6 指数目标— Weibull背景杂波情况下的探测概率模拟结果

参考文献:

[1] Himonas S D, Barkat M. Automatic censored CFAR detection for non-homogeneous environments [J]. IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems, 1992, 28(1): 286- 304.

[2] Kim C J. Generalized OS CFAR detector with non-coherent integration[J]. Signal Processing, 1993, 31: 43- 56.

[3] Mitchell R L. Importance sampling applied to simulation of false alarm statistics [J]. IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems, 1981, AES-17: 15- 24.

[4] Srinivasan R. Some results in importance sampling and an application to detection [J]. Signal Processing, 1998, 65 (1): 73- 88.

[5] Srinivasan R. Simulation of CFAR detection algorithms for arbitrary clutter distributions [J]. IEE proceedings, 2000, 147(1): 31- 40.

[6] Gandhi P, Kassam S A. Analysis of CFAR processors in non-homogeneous background [J]. IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems, 1988, 24(4): 428- 445.

(上接第 25页)

[3] Helmbold D, Schapire R, Singer Y, Warmuth M. On-line portfolio selection using multiplicative updates[J]. Mathematical Finance, 1998, 8: 325- 347.

[4] Blum A, Kalai A. Universal portfolios with and without transaction costs [A]. Proceedings of the Tenth Annual Conference on Computational Learning Theory[C]. ACM Press, 1997, 309- 313.

[5] Dantzig G, Infanger G. Multi-stage stochastic linear programs for portfolio optimization [J]. Annals of Operations Research, 1993, 45: 59- 76.

[6] Patel N R, Subrahmanyam Marti G. A simple algorithm for optimal portfolio selection with fixed transaction costs [J]. Management Science, 1982, 28: 303- 314.

[7] Gennotde G, Jung A. Investment strategies under transaction costs: the finite horizon case[J]. Management Science, 1994, 40: 385- 404.

[8] Yoshimoto A. The mean-variance approach to portfolio optimization subject to transaction costs[J]. Journal of Operations Research Society of Japan, 1996, 39: 99- 117.

[9] Wang S Y, Xia Y S. Portfolio Optimization and Asset Pricing[M]. Hong Kong: Global-Link Publishers, 2000.