

## Úloha A

Máme dané vektory  $y, x_1, x_2, \dots, x_k$ . Chceme nájsť parametre  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$  také, aby pre vektor  $\hat{y} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_k x_k$ , boli normy  $\|y - \hat{y}\|_1$  a  $\|y - \hat{y}\|_\infty$  minimálne.

Vyjadríme vektor  $\hat{y}$  ako súčin matice a vektora  $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k)$ .

$$\hat{y} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_k x_k = \begin{pmatrix} | & | & | & & | \\ \mathbf{1}_n & x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ | & | & | & & | \end{pmatrix} \beta =: \mathbf{A}\beta$$

### Minimalizovanie $L^1$ normy

Prevedieme problém zo zadania do tvaru:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b \end{aligned}$$

Tento tvar vyžaduje metóda `linprog` z knižnice `scipy.optimize` pre Python.

Zaved'me si nový vektor premenných  $t \in \mathbb{R}^n$ , ktorým ohraničíme normu  $\|y - \mathbf{A}\beta\|_1$ .

$$-t \leq y - \mathbf{A}\beta \leq t$$

Pre prvé ohraničenie, odseparujme premenné od konštánt a preved'me do maticového tvaru.

$$\begin{aligned} -\mathbf{A}\beta - t &\leq -y \\ \left( -\mathbf{A} \mid -\mathbb{I}_n \right) \begin{pmatrix} \beta \\ t \end{pmatrix} &\leq -y \end{aligned}$$

Podobne pre druhé ohraničenie.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\beta - t &\leq y \\ \left( \mathbf{A} \mid -\mathbb{I}_n \right) \begin{pmatrix} \beta \\ t \end{pmatrix} &\leq y \end{aligned}$$

Minimalizovanie  $L^1$  normy ako úloha lineárneho programovania vyzerá teda nasledovne.

$$\begin{aligned} \min \quad & \left( \mathbf{0}_{k+1} \mid \mathbf{1}_n \right) \begin{pmatrix} \beta \\ t \end{pmatrix} \\ \text{s.t.} \quad & \begin{pmatrix} -\mathbf{A} & | & -\mathbb{I}_n \\ \mathbf{A} & | & -\mathbb{I}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ t \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## Minimalizovanie $L^\infty$ normy

Budeme používať podobné značenie ako pri formulácii  $L^1$  normy. Zavedme si skalár  $s \in \mathbb{R}$ , ktorým ohraničíme normu  $\|y - \mathbf{A}\beta\|_\infty$ .

$$-s \leq y - \mathbf{A}\beta \leq s$$

Pre jednotlivé ohraničenia odseparujeme premenné od konštánt a zapíšeme v maticovom tvare.

$$\begin{aligned} \left( -\mathbf{A} \mid -\mathbf{1}_n \right) \begin{pmatrix} \beta \\ s \end{pmatrix} &\leq -y \\ \left( \mathbf{A} \mid -\mathbf{1}_n \right) \begin{pmatrix} \beta \\ s \end{pmatrix} &\leq y \end{aligned}$$

Minimalizovanie  $L^\infty$  normy ako úloha lineárneho programovania vyzerá teda nasledovne.

$$\begin{aligned} \min \quad & \left( \mathbf{0}_{k+1} \mid 1 \right) \begin{pmatrix} \beta \\ s \end{pmatrix} \\ & \left( \begin{array}{c|c} -\mathbf{A} & -\mathbf{1}_n \\ \hline \mathbf{A} & -\mathbf{1}_n \end{array} \right) \begin{pmatrix} \beta \\ s \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$