Formulácia úloh lineárneho programovania

Úloha

Nájsť koeficienty β_0, β_1, ..., β_k tak, aby predikovaný vektor

$$\hat{y} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_k x_k \tag{1}$$

bol čo najbližšie k výstupu y, kde y označuje závislú premennú a $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$ označujú nezávislé premenné. Túto vzdialenosť |y - $\hat{y}$| sme minimalizovali l_1 a l_∞ normami

Minimalizovanie l_1 normy

Chceme minimalizovať normu $||y - \hat{y}||_1$

označíme:

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &:= (1_n, x_1, \ldots, x_k) \\ \beta &:= (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k)^T \end{aligned} \tag{2}$$

Problém prevedieme do tvaru:

$$\min\ c^T x$$

$$Ax \geq b$$

Zavedieme nový vektor $t \in \mathbb{R}^n$, ktorým ohraničíme $y - \mathsf{A}\beta$

Minimalizovanie l_1 normy ako úloha lineárneho programovania:

$$\min \; \left(0_{k+1}^T \middle| 1_n^T\right) \left(\begin{array}{c} \beta \\ \hline t \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathsf{A} & \mathbb{I}_n \\ \hline -\mathsf{A} & \mathbb{I}_n \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \beta \\ \hline t \end{array}\right) \geq \left(\begin{array}{c} y \\ \hline -y \end{array}\right)$$

$$\beta \in \mathbb{R}^{k+1}, \; t \geq 0_n$$

Minimalizovanie l_∞ normy

Chceme minimalizovať normu $||y - \hat{y}||_\infty$

Zavedieme skalárnu premennú $\gamma \in \mathbb{R}$, prevedieme na úlohu LP

$$-\gamma 1_n \leq y - A\beta \leq \gamma 1_n$$

Pomocou značenia z (2), výsledná úloha:

$$\min \ \left(0_{k+1}^T \middle| 1\right) \begin{pmatrix} \beta \\ \hline \gamma \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} A & 1_n \\ \hline -A & 1_n \end{array}\right) \begin{pmatrix} \beta \\ \hline \gamma \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} y \\ \hline -y \end{pmatrix}$$

$$\beta \in \mathbb{R}^{k+1}, \ \gamma \geq 0$$