1 Formulácia úloh lineárneho programovania

Máme dané vektory $y, x_1, x_2, \dots, x_k$. Chceme nájsť parametre $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$ také, ktoré pre vektor $\hat{y} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_k x_k$ minimalizujú normu $||y - \hat{y}||_1$, resp. normu $||y - \hat{y}||_\infty$.

Vyjadrime vektor $\hat{y}$ ako súčin matice a vektora $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k)^T$.

$$\hat{y} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_k x_k = \begin{pmatrix} | & | & | & & | \\ \mathbf{1}_n & x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ | & | & | & & | \end{pmatrix} \beta =: \mathbf{A}\beta$$

1.1 Minimalizovanie L^1 normy

Prevedieme problém zo zadania do tvaru:

$$\begin{aligned} \text{min } & c^T x \\ & Ax \geq b \end{aligned}$$

Zaveďme si nový vektor premenných $t \in \mathbb{R}^n$, ktorým ohraničíme vektor $y - \mathbf{A}\beta$. Úloha sa teda z minimalizovania normy $||y - \mathbf{A}\beta||_1$ prevedie na minimalizáciu $\mathbf{1}_n^T t$.

$$-t \leq y - \mathbf{A}\beta \leq t$$

Pre obe ohraničenia, odseparujme premenné od konštánt a prevedieme do maticového tvaru.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbb{I}_n \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \beta \\ \hline t \end{array} \right) &\geq y \\ \left(\begin{array}{c|c} -\mathbf{A} & \mathbb{I}_n \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \beta \\ \hline t \end{array} \right) &\geq -y \end{aligned}$$

Minimalizovanie L^1 normy ako úloha lineárneho programovania vyzerá teda nasledovne.

$$\begin{aligned} \text{min } & \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0}_{k+1}^T & \mathbf{1}_n^T \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \beta \\ \hline t \end{array} \right) \\ & \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbb{I}_n \\ \hline -\mathbf{A} & \mathbb{I}_n \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \beta \\ \hline t \end{array} \right) \geq \left(\begin{array}{c} y \\ \hline -y \end{array} \right) \\ & \beta \in \mathbb{R}^{k+1},\ t \geq \mathbf{0}_n \end{aligned} \tag{1}$$

1.1.1 Prípustnosť a optimalita

Dokážme, že (1) je úloha, ktorá nadobúda optimálne riešenie pre ľubovoľné vektory $y, x_1, x_2, \dots, x_k$. Nech $|y| := (|y_1|, |y_2|, \dots, |y_n|)^T$ pre $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$. Ukážme prípustnosť zvolením $\beta = \mathbf{0}_{k+1}$ a $t = |y|$:

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbb{I}_n \\ \hline -\mathbf{A} & \mathbb{I}_n \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \mathbf{0}_{k+1} \\ \hline |y| \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} |y| \\ \hline |y| \end{array} \right) \geq \left(\begin{array}{c} y \\ \hline -y \end{array} \right)$$

$$\mathbf{0}_{k+1} \in \mathbb{R}^{k+1},\ |y| \geq \mathbf{0}_n$$

Vidíme, že ohraničenia úlohy (1) sú splnené, čiže $\left(\mathbf{0}_{k+1}^T, |y|^T\right)^T$ je prípustné riešenie.

Optimalitu ukážeme zo slabej duality. Sformulujme duálnu úlohu pre duálne premenné $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^n$:

$$
\begin{aligned}
\text{max} \; & \left(\; y^T \; \middle| \; -y^T \; \right) \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right) \\
& \left(\; \mathbf{A}^T \; \middle| \; -\mathbf{A}^T \; \right) \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right) = \mathbf{0}_{k+1} \\
& \left(\; \mathbb{I}_n \; \middle| \; \mathbb{I}_n \; \right) \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right) \leq \mathbf{1}_n \\
& \alpha_1, \alpha_2 \geq \mathbf{0}_n
\end{aligned}
$$

Vidíme, že táto úloha je prípustná pre $\alpha_1 = \alpha_2 = \mathbf{0}_n$. Z prípustnosti primárnej a duálnej úlohy teda vyplýva, že úloha (1) nadobúda optimálne riešenie pre ľubovoľnú voľbu počiatočných vektorov.

1.2 Minimalizovanie L^∞ normy

Budeme používať rovnaké značenie pre predikovaný vektor hodnôt $\hat{y} = \mathbf{A}\beta$, ako pri formulácii L^1 normy. Zaveďme si skalárnu premennú $\gamma \in \mathbb{R}$, vektorom $\gamma\mathbf{1}_n$ ohraničíme vektor $y - \mathbf{A}\beta$. Úloha sa z minimalizácie $||y - \mathbf{A}\beta||_\infty$ prevedie na minimalizáciu γ.

$$
-\gamma\mathbf{1}_n \leq y - \mathbf{A}\beta \leq \gamma\mathbf{1}_n
$$

Pre jednotlivé ohraničenia odseparujeme premenné od konštánt a zapíšeme v maticovom tvare.

$$
\begin{aligned}
\left(\; \mathbf{A} \; \middle| \; \mathbf{1}_n \; \right) \left(\frac{\beta}{\gamma} \right) &\geq y \\
\left(\; -\mathbf{A} \; \middle| \; \mathbf{1}_n \; \right) \left(\frac{\beta}{\gamma} \right) &\geq -y
\end{aligned}
$$

Minimalizovanie L^∞ normy ako úloha lineárneho programovania vyzerá teda nasledovne.

$$
\begin{aligned}
\text{min} \; & \left(\; \mathbf{0}_{k+1}^T \; \middle| \; 1 \; \right) \left(\frac{\beta}{\gamma} \right) \\
& \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{1}_n \\ \hline -\mathbf{A} & \mathbf{1}_n \end{array} \right) \left(\frac{\beta}{\gamma} \right) \geq \left(\frac{y}{-y} \right) \\
& \beta \in \mathbb{R}^{k+1}, \; \gamma \geq 0
\end{aligned}
\tag{2}
$$

1.2.1 Prípustnosť a optimalita

Podobný spôsobom ako vyššie ukážeme optimalitu (2). Nech $\beta = \mathbf{0}_{k+1}$ a $\gamma = |\tilde{y}|$, kde $|\tilde{y}| := \max(|y_1|, |y_2|, \ldots, |y_n|)$ pre $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$:

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{1}_n \\ \hline -\mathbf{A} & \mathbf{1}_n \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \mathbf{0}_{k+1} \\ \hline |\tilde{y}| \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} |\tilde{y}|\mathbf{1}_n \\ \hline |\tilde{y}|\mathbf{1}_n \end{array}\right) \geq \left(\begin{array}{c} y \\ \hline -y \end{array}\right)$$
$$\mathbf{0}_{k+1} \in \mathbb{R}^{k+1},\ |\tilde{y}| \geq 0$$

Obe ohraničenia platia, čiže $(\mathbf{0}_{k+1}^T, |\tilde{y}|)^T$ je prípustné riešenie. Sformulujme duálnu úlohu s duálnymi premennými $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
\max\ & \left(\begin{array}{c|c} y^T & -y^T \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \hline \alpha_2 \end{array}\right) \\
& \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A}^T & -\mathbf{A}^T \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \hline \alpha_2 \end{array}\right) = \mathbf{0}_{k+1} \\
& \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{1}_n^T & \mathbf{1}_n^T \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \hline \alpha_2 \end{array}\right) \leq 1 \\
& \alpha_1, \alpha_2 \geq \mathbf{0}_n
\end{aligned}$$

Rovnako vidíme, že táto úloha je prípustná pre $\alpha_1 = \alpha_2 = \mathbf{0}_n$. Teda, zo slabej duality, úloha (2) nadobúda optimálne riešenie pre ľubovoľnú voľbu počiatočných vektorov.