

Úloha A

Máme dané vektory y, x_1, x_2, \dots, x_k . Chceme nájsť parametre $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$ také, aby pre vektor $\hat{y} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_k x_k$, boli normy $\|y - \hat{y}\|_1$ a $\|y - \hat{y}\|_\infty$ minimálne.

Vyjadríme vektor \hat{y} ako súčin matice a vektora $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k)$.

$$\hat{y} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_k x_k = \begin{pmatrix} | & | & | & & | \\ \mathbf{1}_n & x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ | & | & | & & | \end{pmatrix} \beta =: \mathbf{A}\beta$$

Minimalizovanie L^1 normy

Prevedieme problém zo zadania do tvaru:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b \end{aligned}$$

Tento tvar vyžaduje metóda `linprog` z knižnice `scipy.optimize` pre Python.

Zaved'me si nový vektor premenných $t \in \mathbb{R}^n$, ktorým ohraničíme normu $\|y - \mathbf{A}\beta\|_1$.

$$-t \leq y - \mathbf{A}\beta \leq t$$

Pre prvé ohraničenie, odseparujme premenné od konštánt a preved'me do maticového tvaru.

$$\begin{aligned} -\mathbf{A}\beta - t &\leq -y \\ \left(-\mathbf{A} \mid -\mathbb{I}_n \right) \begin{pmatrix} \beta \\ t \end{pmatrix} &\leq -y \end{aligned}$$

Podobne pre druhé ohraničenie.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\beta - t &\leq y \\ \left(\mathbf{A} \mid -\mathbb{I}_n \right) \begin{pmatrix} \beta \\ t \end{pmatrix} &\leq y \end{aligned}$$

Minimalizovanie L^1 normy ako úloha lineárneho programovania vyzerá teda nasledovne.

$$\begin{aligned} \min \quad & \left(\mathbf{0}_{k+1} \mid \mathbf{1}_n \right) \begin{pmatrix} \beta \\ t \end{pmatrix} \\ \text{s.t.} \quad & \begin{pmatrix} -\mathbf{A} & -\mathbb{I}_n \\ \mathbf{A} & -\mathbb{I}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ t \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Minimalizovanie L^∞ normy

Budeme používať podobné značenie ako pri formulácii L^1 normy. Zavedme si skalár $\gamma \in \mathbb{R}$, ktorým ohraničíme normu $\|y - \mathbf{A}\beta\|_\infty$.

$$-\gamma \mathbf{1}_n \leq y - \mathbf{A}\beta \leq \gamma \mathbf{1}_n$$

Pre jednotlivé ohraničenia odseparujeme premenné od konštánt a zapíšeme v maticovom tvare.

$$\begin{aligned} \left(-\mathbf{A} \mid -\mathbf{1}_n \right) \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix} &\leq -y \\ \left(\mathbf{A} \mid -\mathbf{1}_n \right) \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix} &\leq y \end{aligned}$$

Minimalizovanie L^∞ normy ako úloha lineárneho programovania vyzerá teda nasledovne.

$$\begin{aligned} \min \quad & \left(\mathbf{0}_{k+1} \mid 1 \right) \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \\ \text{s.t.} \quad & \left(\begin{array}{c|c} -\mathbf{A} & -\mathbf{1}_n \\ \hline \mathbf{A} & -\mathbf{1}_n \end{array} \right) \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$