Úloha A

Máme dané vektory $y, x_1, x_2, \dots, x_k$. Chceme nájsť parametre $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$ také, aby pre vektor $\hat{y} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_k x_k$, boli normy $||y - \hat{y}||_1$ a $||y - \hat{y}||_\infty$ minimálne.

Vyjadrime vektor $\hat{y}$ ako súčin matice a vektora $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k)^T$.

$$\hat{y} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_k x_k = \begin{pmatrix} | & | & | & & | \\ \mathbf{1}_n & x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ | & | & | & & | \end{pmatrix} \beta =: \mathbf{A}\beta$$

Minimalizovanie L^1 normy

Prevedieme problém zo zadania do tvaru:

$$\begin{aligned} \text{min } & c^T x \\ & Ax \geq b \end{aligned}$$

Zaveďme si nový vektor premenných $t \in \mathbb{R}^n$, ktorým ohraničíme normu $||y - \mathbf{A}\beta||_1$.

$$-t \leq y - \mathbf{A}\beta \leq t$$

Pre obe ohraničenia, odseparujme premenné od konštánt a preveďme do maticového tvaru.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{A} \mid \mathbb{I}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \hline t \end{pmatrix} &\geq y \\ \begin{pmatrix} -\mathbf{A} \mid \mathbb{I}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \hline t \end{pmatrix} &\geq -y \end{aligned}$$

Minimalizovanie L^1 normy ako úloha lineárneho programovania vyzerá teda nasledovne.

$$\begin{aligned} \text{min } & \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{k+1}^T \mid \mathbf{1}_n^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \hline t \end{pmatrix} \\ & \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbb{I}_n \\ \hline -\mathbf{A} & \mathbb{I}_n \end{array}\right) \begin{pmatrix} \beta \\ \hline t \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} y \\ \hline -y \end{pmatrix} \\ & \beta \in \mathbb{R}^{k+1}, \ t \geq \mathbf{0}_n \end{aligned} \tag{1}$$

Prípustnosť a optimalita

Dokážme, že (1) je úloha, ktorá nadobúda optimálne riešenie pre ľubovoľné vektory $y, x_1, x_2, \dots, x_k$. Nech $|y| := (|y_1|, |y_2|, \dots, |y_n|)^T$ pre $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$. Ukážme prípustnosť zvolením $\beta = \mathbf{0}_{k+1}$ a $t = |y|$:

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbb{I}_n \\ \hline -\mathbf{A} & \mathbb{I}_n \end{array}\right) \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{k+1} \\ \hline |y| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |y| \\ \hline |y| \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} y \\ \hline -y \end{pmatrix}$$
$$|y| \geq \mathbf{0}_n$$

Vidíme, že obe ohraničenia platia, čiže $\left(\mathbf{0}_{k+1}^T, |y|^T\right)^T$ je prípustné riešenie.

Optimalitu ukážeme zo silnej duality. Sformulujme duálnu úlohu pre duálne premenné $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^n$:

$$
\begin{aligned}
\text{max}\ & \left(\ y^T \mid -y^T\ \right) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \hline \alpha_2 \end{pmatrix} \\
& \left(\ \mathbf{A}^T \mid -\mathbf{A}^T\ \right) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \hline \alpha_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}_{k+1} \\
& \left(\ \mathbb{I}_n \mid \mathbb{I}_n\ \right) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \hline \alpha_2 \end{pmatrix} \leq \mathbf{1}_n \\
& \alpha_1, \alpha_2 \geq \mathbf{0}_n
\end{aligned}
$$

Vidíme, že táto úloha je prípustná pre $\alpha_1 = \alpha_2 = \mathbf{0}_n$. Z prípustnosti primárnej a duálnej úlohy teda vyplýva, že úloha (1) nadobúda optimálne riešenie pre ľubovoľnú voľbu počiatočných vektorov.

Minimalizovanie L^∞ normy

Budeme používať podobné značenie ako pri formulácii L^1 normy. Zaveďme si skalár $\gamma \in \mathbb{R}$, ktorým ohraničíme normu $||y - \mathbf{A}\beta||_\infty$.

$$
-\gamma \mathbf{1}_n \leq y - \mathbf{A}\beta \leq \gamma \mathbf{1}_n
$$

Pre jednotlivé ohraničenia odseparujeme premenné od konštánt a zapíšeme v maticovom tvare.

$$
\begin{aligned}
\left(\ \mathbf{A} \mid \mathbf{1}_n\ \right) \begin{pmatrix} \beta \\ \hline \gamma \end{pmatrix} &\geq y \\
\left(\ -\mathbf{A} \mid \mathbf{1}_n\ \right) \begin{pmatrix} \beta \\ \hline \gamma \end{pmatrix} &\geq -y
\end{aligned}
$$

Minimalizovanie L^∞ normy ako úloha lineárneho programovania vyzerá teda nasledovne.

$$
\begin{aligned}
\text{min}\ & \left(\ \mathbf{0}_{k+1}^T \mid 1\ \right) \begin{pmatrix} \beta \\ \hline \gamma \end{pmatrix} \\
& \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{1}_n \\ \hline -\mathbf{A} & \mathbf{1}_n \end{array}\right) \begin{pmatrix} \beta \\ \hline \gamma \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} y \\ \hline -y \end{pmatrix} \\
& \beta \in \mathbb{R}^{k+1},\ \gamma \geq 0
\end{aligned} \tag{2}
$$

Prípustnosť a optimalita

Podobný spôsobom ako vyššie ukážeme optimalitu (2). Nech $\beta = \mathbf{0}_{k+1}$ a $\gamma = |\tilde{y}|$, kde $|\tilde{y}| := |\max(y_1, y_2, \ldots, y_n)|$ pre $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$:

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{1}_n \\ \hline -\mathbf{A} & \mathbf{1}_n \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \mathbf{0}_{k+1} \\ \hline |\tilde{y}| \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} |\tilde{y}|\mathbf{1}_n \\ \hline |\tilde{y}|\mathbf{1}_n \end{array}\right) \geq \left(\begin{array}{c} y \\ \hline -y \end{array}\right)$$
$$|\tilde{y}| \geq 0$$

Obe ohraničenia platia, čiže $(\mathbf{0}_{k+1}^T, |\tilde{y}|)^T$ je prípustné riešenie. Sformulujme duálnu úlohu s duálnymi premennými $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \text{max} \ & \left(\begin{array}{c|c} y^T & -y^T \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \hline \alpha_2 \end{array}\right) \\ & \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A}^T & -\mathbf{A}^T \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \hline \alpha_2 \end{array}\right) = \mathbf{0}_{k+1} \\ & \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{1}_n^T & \mathbf{1}_n^T \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \hline \alpha_2 \end{array}\right) \leq 1 \\ & \alpha_1, \alpha_2 \geq \mathbf{0}_n \end{aligned}$$

Rovnako vidíme, že táto úloha je prípustná pre $\alpha_1 = \alpha_2 = \mathbf{0}_n$. Teda, zo silnej duality, úloha (2) nadobúda optimálne riešenie pre ľubovoľnú voľbu počiatočných vektorov.