Úloha A

Máme dané vektory $y, x_1, x_2, \dots, x_k$. Chceme nájsť parametre $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$ také, aby pre vektor $\hat{y} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_k x_k$, boli normy $||y - \hat{y}||_1$ a $||y - \hat{y}||_\infty$ minimálne.

Vyjadrime vektor $\hat{y}$ ako súčin matice a vektora $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k)$.

$$\hat{y} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_k x_k = \begin{pmatrix} | & | & | & & | \\ \mathbf{1}_n & x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ | & | & | & & | \end{pmatrix} \beta =: \mathbf{A}\beta$$

Minimalizovanie L^1 normy

Prevedieme problém zo zadania do tvaru:

$$\min c^T x$$
$$Ax \leq b$$

Tento tvar vyžaduje metóda `linprog` z knižnice `scipy.optimize` pre Python.

Zaveďme si nový vektor premenných $t \in \mathbb{R}^n$, ktorým ohraničíme normu $||y - \mathbf{A}\beta||_1$.

$$-t \leq y - \mathbf{A}\beta \leq t$$

Pre prvé ohraničenie, odseparujme premenné od konštánt a preveďme do maticového tvaru.

$$-\mathbf{A}\beta - t \leq -y$$
$$\left(\begin{array}{c|c} -\mathbf{A} & -\mathbb{I}_n \end{array} \right) \left(\frac{\boldsymbol{\beta}}{t} \right) \leq -y$$

Podobne pre druhé ohraničenie.

$$\mathbf{A}\beta - t \leq y$$
$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & -\mathbb{I}_n \end{array} \right) \left(\frac{\beta}{t} \right) \leq y$$

Minimalizovanie L^1 normy ako úloha lineárneho programovania vyzerá teda nasledovne.

$$\min \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0}_{k+1} & \mathbf{1}_n \end{array} \right) \left(\frac{\beta}{t} \right)$$
$$\left(\begin{array}{c|c} -\mathbf{A} & -\mathbb{I}_n \\ \hline \mathbf{A} & -\mathbb{I}_n \end{array} \right) \left(\frac{\beta}{t} \right) \leq \left(\frac{-y}{y} \right)$$

Minimalizovanie L^∞ normy

Budeme používať podobné značenie ako pri formulácii L^1 normy. Zaveďme si skalár $\gamma \in \mathbb{R}$, ktorým ohraničíme normu $||y - \mathbf{A}\beta||_\infty$.

$$-\gamma \mathbf{1}_n \leq y - \mathbf{A}\beta \leq \gamma \mathbf{1}_n$$

Pre jednotlivé ohraničenia odseparujeme premenné od konštánt a zapíšeme v maticovom tvare.

$$\begin{pmatrix} -\mathbf{A} \mid -\mathbf{1}_n \end{pmatrix} \left(\frac{\beta}{\gamma} \right) \leq -y$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} \mid -\mathbf{1}_n \end{pmatrix} \left(\frac{\beta}{\gamma} \right) \leq y$$

Minimalizovanie L^∞ normy ako úloha lineárneho programovania vyzerá teda nasledovne.

$$\text{min } \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{k+1} \mid 1 \end{pmatrix} \left(\frac{\beta}{\gamma} \right)$$

$$\left(\begin{array}{c|c} -\mathbf{A} & -\mathbf{1}_n \\ \hline \mathbf{A} & -\mathbf{1}_n \end{array} \right) \left(\frac{\beta}{\gamma} \right) \leq \left(\frac{-y}{y} \right)$$