# A04 – Predikcia kvality vína, lineárna regresia pomocou $L^1$, $L^\infty$

Piati proti optimalizácii

Tomáš Antal, Erik Božík, Róbert Kendereš,

Teo Pazera, Andrej Špitalský

2DAV

Január 2024

# Predstavenie projektu – lineárna regresia

- lineárna regresia – predikcia závislej premennej $y \in \mathbb{R}^n$ pomocou nezávislých $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$

$$\min ||y - \hat{y}||$$

$$\hat{y} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_k x_k$$

| atribúty | $x_1$ | $x_2$ | $\ldots$ | $x_k$ | $y$ |
|---|---|---|---|---|---|
| pozorovanie 1 | 1 | 0.84 | $\ldots$ | 121 | 4.25 |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| pozorovanie $n$ | 4 | 0.12 | $\ldots$ | 117 | 5.68 |

- vyjadriteľné ako úloha lineárneho programovania – $L^1$, $L^\infty$

# Predstavenie projektu – obsah

- formulácia LP úloh a dokázanie optimality
- implementácia v `Python`-e a predikcia kvality vína
- počítanie a interpretácia $R^2$ koeficientu
- implementácia všeobecnej triedy na počítanie $L^1$ a $L^\infty$ lineárnej regresie
- minimalizácia váženej sumy noriem

# Formulácia úloh lineárneho programovania

## Úloha

Nájsť koeficienty $\beta_0$, $\beta_1$, ..., $\beta_k$ tak, aby predikovaný vektor

$$\hat{y} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_k x_k \tag{1}$$

bol čo najbližšie k výstupu $y$, kde $y$ označuje závislú premennú a $x_1$, $x_2$, ..., $x_k \in \mathbb{R}^n$ označujú nezávislé premenné. Túto vzdialenosť $|y - \hat{y}|$ sme minimalizovali $l_1$ a $l_\infty$ normami

# Minimalizovanie $l_1$ normy

Chceme minimalizovať normu $||y - \hat{y}||_1$

označíme:

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &:= (1_n, x_1, \ldots, x_k) \\ \beta &:= (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k)^T \end{aligned} \tag{2}$$

Problém prevedieme do tvaru:

$$\min c^T x$$

$$Ax \geq b$$

Zavedieme nový vektor $t \in \mathbb{R}^n$, ktorým ohraničíme $y - \mathrm{A}\beta$

Minimalizovanie $l_1$ normy ako úloha lineárneho programovania:

$$\min \left(0_{k+1}^T \middle| 1_n^T\right) \left(\frac{\beta}{t}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathbb{I}_n \\ \hline -\mathrm{A} & \mathbb{I}_n \end{array}\right) \left(\frac{\beta}{t}\right) \geq \left(\frac{y}{-y}\right)$$

$$\beta \in \mathbb{R}^{k+1}, \; t \geq 0_n$$

# Minimalizovanie $l_\infty$ normy

Chceme minimalizovať normu $||y - \hat{y}||_\infty$

Zavedieme skalárnu premennú $\gamma \in \mathbb{R}$, prevedieme na úlohu LP

$$-\gamma 1_n \leq y - \mathrm{A}\beta \leq \gamma 1_n$$

Pomocou značenia z (2), výsledná úloha:

$$\min \left(0_{k+1}^T \middle| 1\right) \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)$$

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & 1_n \\ \hline -\mathrm{A} & 1_n \end{array}\right) \left(\frac{\beta}{\gamma}\right) \geq \left(\frac{y}{-y}\right)$$

$$\beta \in \mathbb{R}^{k+1},\ \gamma \geq 0$$

# B

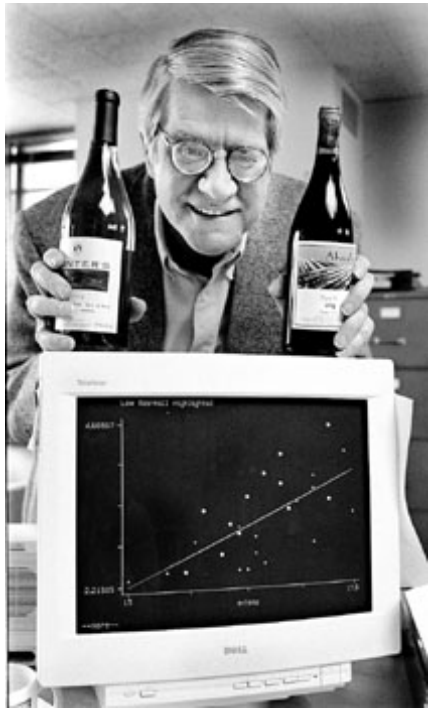
...

# Predikcia kvality vína

dáta o víne

- množstvo dážďa v zime
- priemerna teplota počas zretia vína
- množstvo dažďa počas zberu
- vek vína
- populácia Francúzska
- cena

Orley Ashenfelter



# Výsledky predikcie

$L^1$

- \+ vplyv teplota počas zretia
- \+ vplyv veku vína
- \- vplyv dážď počas zberu
- \+ vplyv dážd počas zimy
- \- vplyv populácie Francúzska

$L^\infty$

- rovnaké poradie ako $L^1$
- ale - vplyv veku vína

# D

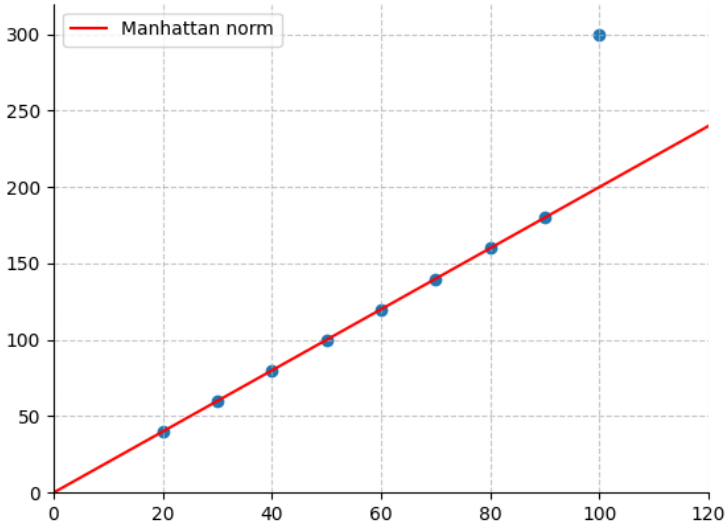
...

# E-model

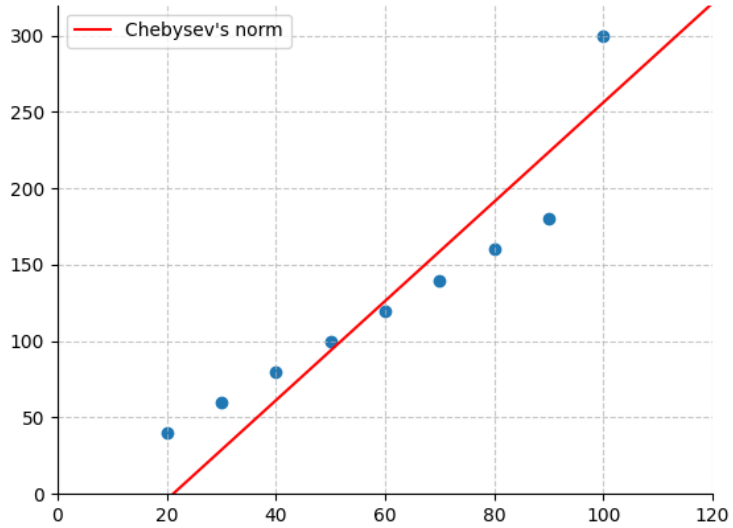
...

# Porovnanie $L^1$ a $L^\infty$ lineárnej regresie

- $L^1$ – veľmi dobre zachytáva lineárny vzťah, môže viesť k *overfittingu*
- $L^\infty$ – príliš ovplyňovaná outliermi




regresia $L^1$ normou




regresia $L^\infty$ normou

# Minimalizácia váženého súčtu noriem

- redukcia *overfittingu* $L^1$ regresie váženým súčtom s $L^\infty$ normou

$$\min \ \omega||y - \hat{y}||_1 + (1-\omega)||y - \hat{y}||_\infty, \ \omega \in [0;1]$$

- stále implementovateľné ako úloha lineárneho programovania

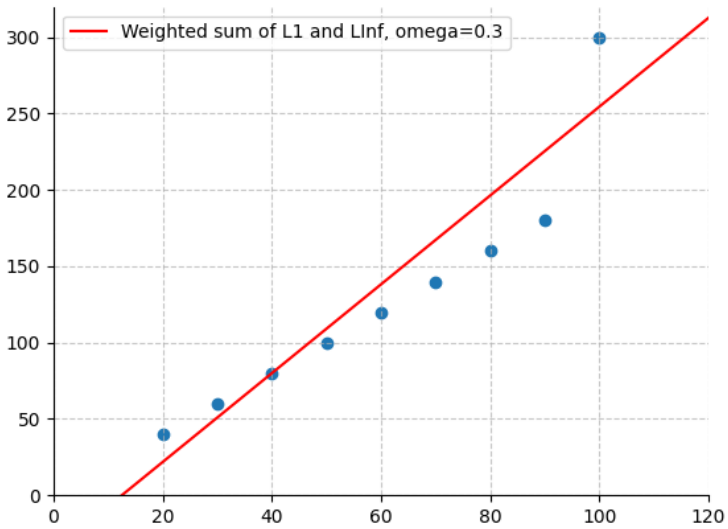
$$\min \ \left(0_{k+1}^T \ \middle| \ \omega 1_n^T \ \middle| \ (1-\omega)\right) \left(\begin{array}{c} \beta \\ \hline t \\ \hline \gamma \end{array}\right), \ \omega \in [0;1]$$

$$\left(\begin{array}{c|c|c} A & \mathbb{I}_n & 0_n \\ \hline -A & \mathbb{I}_n & 0_n \\ \hline A & 0_{n\times n} & 1_n \\ \hline -A & 0_{n\times n} & 1_n \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \beta \\ \hline t \\ \hline \gamma \end{array}\right) \geq \left(\begin{array}{c} y \\ \hline -y \\ \hline y \\ \hline -y \end{array}\right)$$

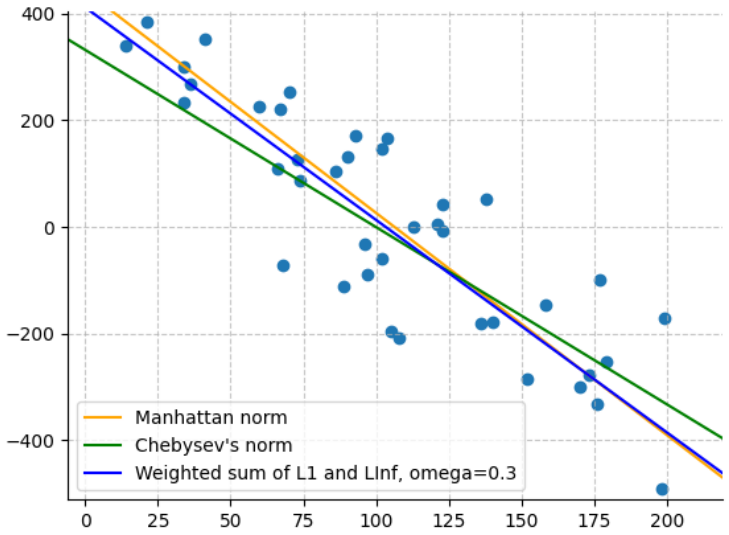
$$\beta \in \mathbb{R}^{k+1}, \ t \geq 0_n, \ \gamma \geq 0$$

# Minimalizácia váženého súčtu noriem

- implementované ako `WeightedL1LInfModel`




regresia váženým súčtom noriem




porovnanie troch regresií

# Zhrnutie

- formulácia lineárnej regresie ako úlohy LP
- predikcia ceny vín
- jednoduchý framework na počítanie lineárnej regresie pomocou $L^1$ a $L^\infty$ noriem, resp. ich váženej sumy

Ďalšie kroky

- analýza časovej zložitosti, napr. voči najmenším štvorcom
- porovnanie vhodnosti jednotlivých prístupov podľa vstupných dát