Formulácia úloh lineárneho programovania

Úloha

Nájsť koeficienty $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k$ tak, aby predikovaný vektor

$$\hat{y} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_k x_k \tag{1}$$

bol čo najbližšie k výstupu y, kde y označuje závislú premennú a $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$ označujú nezávislé premenné. Túto vzdialenosť $||y - \hat{y}||$ sme minimalizovali L^1 a L^∞ normami

Minimalizovanie L^1 normy

Chceme minimalizovať normu $||y - \hat{y}||_1$

označíme:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &:= (\mathbf{1_n}, x_1, \ldots, x_k) \\ \beta &:= (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k)^T \end{aligned} \tag{2}$$

Problém prevedieme do tvaru:

$$\text{min } c^T x$$

$$\mathbf{A}x \geq b$$

Minimalizovanie L^∞ normy

Zavedieme nový vektor $t \in \mathbb{R}^n$, ktorým ohraničíme $y - \mathbf{A}\beta$

Minimalizovanie L^1 normy ako úloha lineárneho programovania:

$$\min \ \left(\mathbf{0}_{k+1}^T \;\middle|\; \mathbf{1}_n^T\right) \begin{pmatrix} \beta \\ \hline t \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbb{I}_n \\ \hline -\mathbf{A} & \mathbb{I}_n \end{array}\right) \begin{pmatrix} \beta \\ \hline t \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} y \\ \hline -y \end{pmatrix}$$

$$\beta \in \mathbb{R}^{k+1}, \ t \geq \mathbf{0}_n$$

Minimalizovanie L^∞ normy

Chceme minimalizovať normu $||y - \hat{y}||_\infty$

Zavedieme skalárnu premennú $\gamma \in \mathbb{R}$, prevedieme na úlohu LP

$$-\gamma \mathbf{1}_n \leq y - \mathbf{A}\beta \leq \gamma \mathbf{1}_n$$

Pomocou značenia z (2), výsledná úloha:

$$\min \ \left(\mathbf{0}_{k+1}^T \,\middle|\, 1 \right) \left(\begin{array}{c} \beta \\ \hline \gamma \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{1}_n \\ \hline -\mathbf{A} & \mathbf{1}_n \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \beta \\ \hline \gamma \end{array} \right) \geq \left(\begin{array}{c} y \\ \hline -y \end{array} \right)$$

$$\beta \in \mathbb{R}^{k+1}, \ \gamma \geq 0$$