



Ricerca operativa e pianificazione delle risorse

spitfire

A.A. 2024-2025

Contents

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Prerequisiti di Algebra Lineare | 3 |
| 1.1 | Matrici e vettori | 3 |
| 1.2 | Equazioni lineari | 4 |
| 1.2.1 | Metodo di eliminazione | 6 |
| 1.2.2 | Metodo di eliminazione di Gauss | 6 |
| 2 | Prerequisiti di Analisi Matematica | 6 |
| 2.1 | Funzioni di una variabile | 6 |
| 2.2 | Funzioni in due o più variabili | 9 |
| 3 | Modelli nella Ricerca Operativa | 12 |
| 3.1 | Programmazione matematica | 13 |
| 3.2 | Ottimi globali e ottimi locali | 14 |
| 4 | Programmazione lineare | 15 |
| 4.1 | Assunzione di Proporzionalità | 16 |
| 4.2 | Assunzione di additività | 17 |
| 4.3 | Assunzione di continuità | 17 |
| 4.4 | Assunzione di certezza | 17 |
| 4.5 | Soluzione grafica ad un problema di programmazione lineare | 17 |
| 4.5.1 | Vincolo di uguaglianza | 17 |
| 4.5.2 | Vincoli funzionali di \leq | 18 |
| 4.5.3 | Vincoli funzionali di \geq e $=$ | 19 |
| 4.5.4 | Regione ammissibile | 19 |
| 4.6 | Minimum cost flow problem | 22 |
| 4.7 | Metodo del simplesso | 23 |
| 4.7.1 | Procedura algebrica | 26 |

1 Prerequisiti di Algebra Lineare

1.1 Matrici e vettori

Una matrice è una tabella contenente numeri. Se la tabella è costituita da m righe e n colonne si parla di una matrice $m \times n$. Una matrice viene detta **matrice quadrata** se il numero di righe e colonne coincidono.

Una matrice $1 \times m$ viene detta **vettore riga m-dimensionale**

Una matrice $m \times 1$ viene detta **vettore colonna m-dimensionale**.

La notazione maggiormente utilizzata per indicare una matrice è

$$A = [a_{ij}]$$

Con a_{ij} elemento generico della i -esima riga e j -esima colonna della matrice A . Se $A = [a_{ij}]$ è una matrice $m \times n$, la matrice $n \times m$

$$A^T = [a_{ij}]$$

viene detta **matrice trasposta** della matrice A .

Se $A = [a_{ik}]$ è una matrice $m \times p$ e $B = [b_{kj}]$ è una matrice $p \times n$ la loro **matrice prodotto** è $m \times n$ e definita come:

$$A \cdot B = C = [c_{ij}] \text{ con } c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Date due matrici $m \times n$, $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$, la loro **matrice somma** è definita come segue:

$$A + B = C = [c_{ij}] \text{ con } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

La **moltiplicazione** di una **matrice A per una costante** α fornisce come risultato quanto segue:

$$\alpha \cdot A = [\alpha \cdot a_{ij}]$$

Questa moltiplicazione è **commutativa**.

Siano v_1, v_2, \dots, v_n n vettori, riga o colonna; essi vengono detti **linearmente indipendenti** tra loro se, prendendo n coefficienti a_1, a_2, \dots, a_n la seguente uguaglianza

$$a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + \dots + a_n \cdot v_n = 0$$

risulta verificata solo se $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$.

Al contrario, se esistono coefficienti a_1, a_2, \dots, a_n non tutti nulli per cui

$$a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + \dots + a_n \cdot v_n = 0$$

i vettori v_1, v_2, \dots, v_n sono detti **linearmente dipendenti**.

Un insieme di n vettori ad n dimensioni linearmente indipendenti costituisce una **base per uno spazio a n dimensioni**. Se un insieme di vettori v_1, v_2, \dots, v_n costituisce una base per uno spazio ad n dimensioni, allora ogni vettore x che appartiene a quello spazio è **combinazione lineare dei vettori della base**.

Una matrice quadrata $m \times m$ si dice **matrice singolare** se l'insieme degli m vettori

riga (o colonna), ottenuti considerando ogni riga (o colonna) come un vettore, è **linearmente dipendenti**. Se, viceversa, l'insieme degli m vettori è linearmente indipendente, la matrice si dice **matrice non singolare**.

Una matrice quadrata $A = [a_{ij}]$ con $a_{ij} = 0$ per ogni $i \neq j$ viene detta **matrice diagonale**.

La matrice diagonale $A = [a_{ij}]$, con $a_{ii} = 1$ per ogni i viene detta **matrice identità**, solitamente indicata con I . Se A NON è una matrice singolare, allora esiste una matrice A^{-1} detta **matrice inversa** della matrice A , tale per cui vale la seguente relazione di uguaglianza:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

Il **determinante** di una matrice quadrata A si indica con $\det(A)$ ed è un numero (esiste solo per matrici quadrate), nel caso specifico di una matrice 2×2 si definisce come segue:

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Il determinante di una matrice quadrata A $m \times m$ si ottiene utilizzando la seguente regola ricorsiva, detta **formula di Laplace**: Se A_{ij} è la matrice $(m-1) \times (m-1)$, ottenuta togliendo la i -esima riga e la j -esima colonna di A , il determinante di A risulta:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^m (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij}) \quad (formula \text{ per righe})$$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^m (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij}) \quad (formula \text{ per colonne})$$

Se la matrice è singolare, allora $\det(A) = 0$.

Una matrice quadrata A ammette inversa se e solo se non è singolare.

1.2 Equazioni lineari

Un' **equazione lineare** nelle variabili x_1, x_2, \dots, x_n è un'equazione nella seguente forma:

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots + a_n \cdot x_n = b$$

dove a_1, a_2, \dots, a_n e b sono delle costanti. Si dice **soluzione dell'equazione** un qualsiasi vettore $|y_1, y_2, \dots, y_n| \in \mathbb{R}^n$ tale che:

$$a_1 \cdot y_1 + a_2 \cdot y_2 + \dots + a_n \cdot y_n = b$$

Un **sistema di m equazioni lineari in n variabili** è definito come segue:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{cases}$$

dove a_{ij} e b_j , $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, m$ sono costanti. Una **soluzione del sistema lineare** è un qualsiasi vettore $|y_1, y_2, \dots, y_n| \in \mathbb{R}^n$ tale che le m equazioni del sistema

lineare siano contemporaneamente soddisfatte. Trovare le soluzioni del sistema lineare equivale a individuare il punto di intersezione tra le sue equazioni, ammesso che un tale punto esista.

Un sistema di equazioni lineari può essere:

- **Consistente:** se ammette almeno una soluzione, in caso contrario viene detto **inconsistente**
- **Determinato:** se costituito da un numero di equazioni uguale al numero di incognite $m = n$. Un tale sistema ha **una sola soluzione**
- **Sovradeterminato:** se costituito da più equazione che incognite $m > n$. Un tale sistema è spesso, ma non sempre, inconsistente
- **Sottodeterminato:** se costituito da meno equazioni che incognite $m < n$. Un tale sistema ammette infinite soluzioni

Consideriamo la forma matriciale del sistema costituito da m equazioni lineari in n incognite

$$A \cdot x = b$$

dove

- A è una matrice $m \times n$ (nota)
- x è un vettore colonna in n dimensioni (incognito)
- b è un vettore colonna in m dimensioni (noto)

Si definisce **rango della matrice A** come segue:

- **Rango di riga:** numero massimo di righe linearmente indipendenti
- **Rango di colonna:** numero massimo di colonne linearmente indipendenti

Se *rango di riga* = *rango di colonna* allora $rk(A) \leq \min(m, n)$

Se $rk(A) = \min(m, n)$, allora la matrice A viene detta **a rango pieno**.

Data la matrice dei coefficienti A , si dice **matrice aumentata** la matrice $C = A, b$ ottenuta dalla matrice A aggiungendo come colonna aggiuntiva il vettore dei termini noti b . Avremo quanto segue:

- $rk(C) > rk(A)$: Il sistema lineare non ammette soluzione
- $rk(C) = rk(A)$: il sistema lineare ammette soluzione

Assumiamo $rk(C) = rk(A)$, allora:

- Caso $m \geq n$
 - Se $rk(A) = n$, allora il sistema ha una soluzione unica
 - Se $rk(A) < n$, allora il sistema ha infinite soluzioni
- Caso $m < n$
 - Se $rk(A) \leq m$, allora il sistema ha infinite soluzioni

Come si risolve un sistema di equazioni lineari? Abbiamo due metodi:

1.2.1 Metodo di eliminazione

Procediamo come segue:

1. Selezionare una variabile, e risolvere una delle equazioni rispetto ad essa e eliminare la variabile in questione dalle altre equazioni
2. Tralasciare l'equazione utilizzata nel passo di eliminazione e tornare al passo 1)
3. Applicare il processo di **Back-walk substitution**: dall'ultima equazione, tornare indietro e risolvere le restanti

1.2.2 Metodo di eliminazione di Gauss

Il metodo di eliminazione di Gauss è un metodo di eliminazione che utilizza solo le operazioni elementari su matrici, cioè:

- Moltiplicare una riga per uno scalare non nullo
- Sommare una riga moltiplicata per uno scalare non nullo con un'altra riga
- Permutare le righe

Teorema 1.2.1 *Applicare operazioni elementari a un sistema di equazioni lineari non cambia l'insieme delle sue soluzioni.*

2 Prerequisiti di Analisi Matematica

2.1 Funzioni di una variabile

Si dice **funzione** una terna (A, B, f) con:

- A, B due insiemi non vuoti
- f una legge che ad ogni elemento $x \in A$ associa uno ed uno solo elemento $f(x) \in B$

dove:

- A è detto dominio della funzione f , anche indicato con $\text{dom}(f)$
- B è detto codominio della funzione f
- Scriviamo $f : A \rightarrow B$ e $x \in \text{dom}(f) \rightarrow f(x)$, per indicare la legge che alla variabile indipendente x associa la sua immagine $f(x)$

Data una funzione $f : A \rightarrow B$, se esiste, finito o meno, il limite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

esso viene chiamato **derivata della funzione f nel punto x_0** e viene indicato con

$$f'(x_0) = \frac{d}{dx} f(x_0)$$

Se $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, allora f si dice derivabile in x_0 .

Riportiamo le derivate elementari:

- Se $f(x) = c, \forall x \in \mathbb{R}$ allora $f'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$
- Se $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ allora $f'(x) = n \cdot x^{n-1}, \forall x \in \mathbb{R}$
- Se $f(x) = \frac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{R}^+$ allora $f'(x) = -\frac{1}{x^2}, \forall x \in \mathbb{R}^+$
- Se $f(x) = \log(x), x \in \mathbb{R}^+$ allora $f'(x) = \frac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{R}^+$

Data una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, allora

- f derivabile in $x_0 \Rightarrow f$ continua in x_0
- f continua in $x_0 \not\Rightarrow f$ derivabile in x_0

Se $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sono derivabili in $x_0 \in \mathbb{R}$, allora

- $\forall c \in \mathbb{R}$, la funzione $c \cdot f$ è derivabile in x_0 e $(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$
- La funzione $f + g$ è derivabile in x_0 e $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

Se $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sono derivabili in $x_0 \in \mathbb{R}$, allora anche la funzione $f \cdot g$ è derivabile in x_0 e si ha quanto segue

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

Date due funzioni $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, con f derivabile in $x_0 \in \mathbb{R}$ e g derivabile in $f(x_0)$, allora $g \circ f$ è derivabile in x_0 e si ha quanto segue:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

La derivata della **derivata prima** f' in $x_0 \in \mathbb{R}$ viene detta **derivata seconda** e indicata come $f''(x_0)$.

La derivata è il **coefficiente angolare** della retta tangente alla funzione nel punto di derivazione x_0 .

Data una funzione $f(x)$ definita su un intervallo chiuso $[a, b]$ diremo che la funzione è:

- **Crescente**: nell'intervallo $[a, b]$ quando per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \in [a, b]$ con $x_1 < x_2$ risulta che $f(x_1) < f(x_2)$
- **Decrescente**: nell'intervallo $[a, b]$ quando per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \in [a, b]$ con $x_1 < x_2$ risulta che $f(x_1) > f(x_2)$

Per determinare se la funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sia crescente o decrescente in un punto $x_0 \in [a, b]$ è possibile ricorrere alla valutazione della sua derivata nel punto x_0 , infatti:

- Se $f'(x_0) > 0$ allora è crescente nel punto considerato x_0
- Se $f'(x_0) < 0$ allora la funzione è decrescente nel punto considerato x_0

Una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **convessa** se $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ con $x_1 < x_2$ vale la seguente relazione

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) \quad \forall x \in [a, b]$$

strettamente convessa se:

$$f(x) < f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) \quad \forall x \in [a, b]$$

Una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **concava** se $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ con $x_1 < x_2$ vale la seguente relazione

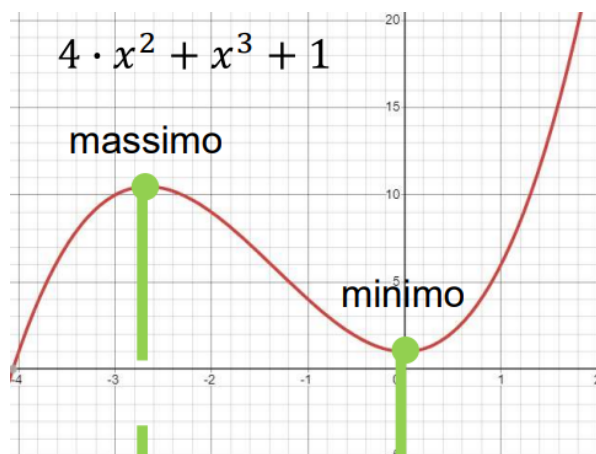
$$f(x) \geq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) \quad \forall x \in [a, b]$$

strettamente concava se:

$$f(x) > f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) \quad \forall x \in [a, b]$$

Data una funzione continua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ possiamo affermare che

- Essa è crescente (decrescente) in un punto $x \in [a, b]$ se la sua derivata prima è positiva (negativa) in x
- I **punti di stazionarietà** (estremanti) della funzione sono i punti in cui la derivata prima della funzione f si annulla cambiando di segno, nello specifico si ha un punto di **massimo** in $x \in [a, b]$ quando f' passa da un valore **positivo** a un valore **negativo**, mentre si ha un punto di **minimo** in $x \in [a, b]$ quando f' passa da un valore *negativo* a un valore *positivo*
- È detta **lineare** se la sua **derivata prima è una funzione costante**



Data una funzione continua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e un punto $x_0 \in [a, b]$, si dice che f ha un minimo o massimo locale (o relativo) nel punto x_0 quando esiste un intorno $I(x_0)$ nel quale risulta

- $f(x) \geq f(x_0) \forall x \in l(x_0)$ allora x_0 è un **minimo locale**
- $f(x) \leq f(x_0) \forall x \in l(x_0)$ allora x_0 è un **massimo locale**
- x_0 è un **minimo locale relativo** se la funzione è decrescente immediatamente a sinistra di x_0 e crescente immediatamente a destra
- x_0 è un **massimo locale relativo** se la funzione è crescente immediatamente a sinistra di x_0 e decrescente immediatamente a destra

Il punto minimo (massimo) locale in cui la funzione f assume il valore minimo (massimo) viene detto **minimo (massimo) globale o assoluto**.

2.2 Funzioni in due o più variabili

Una funzione continua definita come $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che associa ad ogni coppia di numeri reali $(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ uno e un solo valore $y \in \mathbb{R}$ viene detta **funzioni in due variabili** (x_1, x_2) , che vengono dette **variabili indipendenti**, mentre la variabile y viene riferita con il termine di **variabile dipendente**. Questo concetto è generalizzabile al caso in cui si considerino n variabili indipendenti $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. In questo caso si parla di funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ in n variabili indipendenti, funzione che descrive una "regola" per ottenere dall'insieme delle n variabili indipendenti (x_1, x_2, \dots, x_n) un singolo valore reale di y .

Una funzione in n variabili $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ viene detta **funzione lineare** nelle variabili (x_1, x_2, \dots, x_n) se è nella forma:

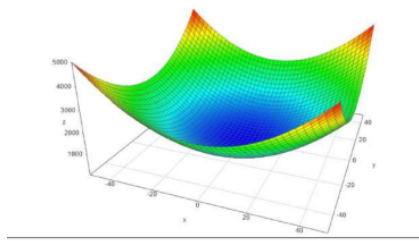
$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_0 + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots + a_n \cdot x_n$$

dove a_0, a_1, \dots, a_n sono parametri che assumono valore reale.

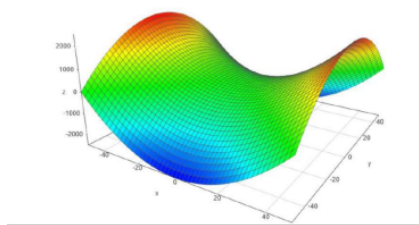
Una funzione in n variabili $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ viene detta **funzione quadratica** nelle variabili (x_1, x_2, \dots, x_n) se è nella forma:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_0 + \sum_{k=1}^n b_k \cdot x_k + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i, 1}^n h_{ij} \cdot x_i \cdot x_j + \sum_{k=1}^n h_{kk} \cdot x_k^2$$

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

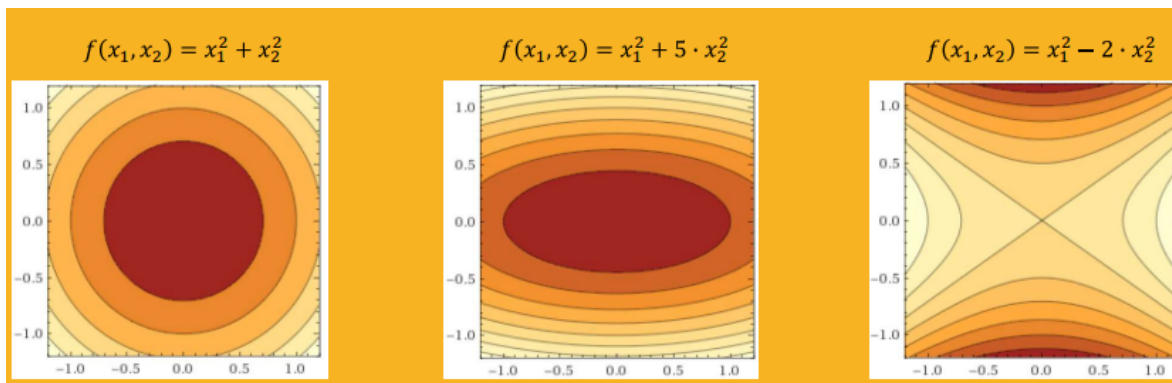


$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$$

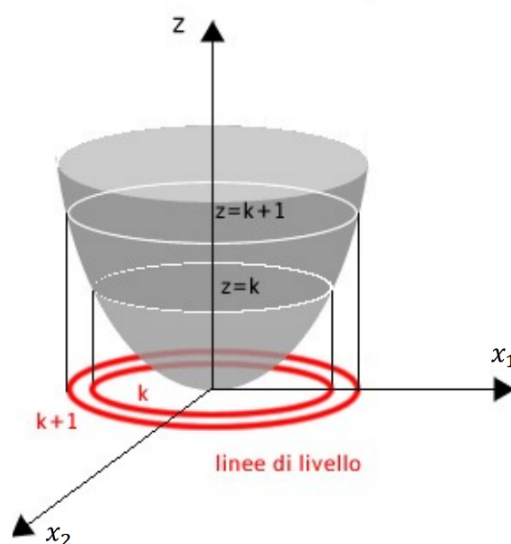


Le **curve di livello** di una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sono ottenute disegnando i punti (x_1, x_2, \dots, x_n) in cui la funzione ha valore costante k , vale a dire tutti i punti $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ per i quali vale la seguente uguaglianza

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = k$$



Dal punto di vista geometrico, le linee di livello sono le **proiezioni ortogonali** sul piano Oxy delle curve ottenute intersecando il piano $z = k$ e il grafico della funzione $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$



Data la funzione in 2 variabili $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$:

- Si dice **derivata parziale rispetto a x_1** la seguente funzione:

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = f_{x_1} = f'_{x_1}$$

Essa rappresenta il tasso con cui varia la funzione $f(x_1, x_2)$ al variare della variabile x_1 , quando sia fissato e mantenuto costante il valore della variabile x_2 .

- Si dice **derivata parziale rispetto a x_2** la seguente funzione:

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = f_{x_2} = f'_{x_2}$$

Essa rappresenta il tasso con cui varia la funzione $f(x_1, x_2)$ al variare della variabile x_2 , quando sia fissato e mantenuto costante il valore della variabile x_1

- Si dice **gradiente** il vettore i cui coefficienti sono le derivate parziali della funzione $f(x_1, x_2)$ rispetto alle variabili x_1 e x_2 , esso è denotato nel seguente modo:

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'_{x_1} \\ f'_{x_2} \end{pmatrix}$$

Data la funzione in 2 variabili $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x_1, x_2)$:

- Si dice **derivata parziale seconda rispetto a x_1 e x_1** la seguente funzione:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = f_{x_1, x_1} = f'_{x_1, x_1}$$

- Si dice **derivata parziale seconda rispetto a x_1 e x_2** la seguente funzione:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = f_{x_1, x_2} = f'_{x_1, x_2}$$

- Si dice **derivata parziale seconda rispetto a x_2 e x_1** la seguente funzione:

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = f_{x_2, x_1} = f'_{x_2, x_1}$$

- Si dice **derivata parziale seconda rispetto a x_2 e x_2** la seguente funzione:

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = f_{x_2, x_2} = f'_{x_2, x_2}$$

In particolare:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = f_{x_1, x_2} = f'_{x_1, x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = f_{x_2, x_1} = f'_{x_2, x_1}$$

Data la funzione in 2 variabili $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x_1, x_2)$, si dice **matrice Hessiana** la matrice quadrata delle derivate parziali:

$$H = \begin{pmatrix} f_{x_1, x_1} & f_{x_1, x_2} \\ f_{x_2, x_1} & f_{x_2, x_2} \end{pmatrix}$$

Condizione necessaria del primo ordine: Data la funzione in 2 variabili $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x_1, x_2)$, un punto (x_1, x_2) può essere un punto critico (minimo, massimo o sella) solo se il suo gradiente nel punto (x_1, x_2) è nullo:

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Non ne conosciamo però la natura! (Minimo? Massimo? Sella?)

Condizioni sufficienti del secondo ordine: Supponiamo che (x_1, x_2) sia un punto critico di $f(x_1, x_2)$. Calcoliamo il determinante della matrice Hessiana:

$$\det(H) = f_{x_1 x_1}(x_1, x_2) \cdot f_{x_2 x_2}(x_1, x_2) - (f_{x_1 x_2}(x_1, x_2))^2$$

Abbiamo i seguenti casi:

- $\det(H) > 0$:
 - $f_{x_1 x_1} > 0 \Rightarrow (x_1, x_2)$ è un minimo relativo di $f(x_1, x_2)$
 - $f_{x_1 x_1} < 0 \Rightarrow (x_1, x_2)$ è un massimo relativo di $f(x_1, x_2)$
- $\det(H) < 0 \Rightarrow (x_1, x_2)$ è un punto di sella di $f(x_1, x_2)$

Data la funzione in 2 variabili $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2)$, se la sua matrice Hessiana H è tale per cui $f_{x_1 x_1} > 0$ e $\det(H) > 0$ allora la funzione è **convessa**. Se la funzione è convessa, allora ogni punto di minimo e di massimo sono **globali** poiché ammette solamente un punto dove il gradiente si annulla

3 Modelli nella Ricerca Operativa

Data una funzione

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

la chiamiamo **funzione obiettivo**. Un **problema di ottimizzazione** è formulabile come segue:

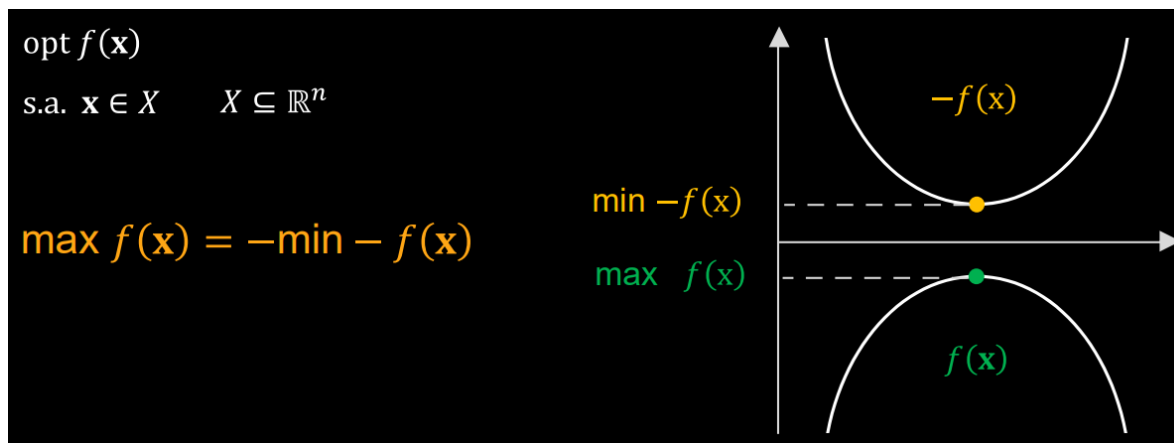
$$\begin{array}{ll} \text{opt} & f(x) \\ \text{s.a.} & x \in X \quad X \subseteq \mathbb{R}^n \end{array}$$

X è detta **regione ammissibile**, cioè l'insieme delle soluzioni x ammissibili dal problema. Inoltre, $\text{opt} \in \{\min, \max\}$.

Se $\text{opt} = \min$, allora abbiamo un **problema di minimizzazione**, altrimenti un **problema di massimizzazione**.

Le variabili che indicano i vincoli ai quali è soggetto il problema sono dette **variabili decisionali** e identificano una soluzione del problema.

Quindi, un problema di ottimizzazione consiste nel determinare, se esistono, uno o più punti di minimo/massimo \mathbf{x}^* , assegnazione di valori alle variabili decisionali \mathbf{x} , della funzione obiettivo f tra i punti \mathbf{x} che appartengono alla regione ammissibile X .



In particolare, se alcune zone di \mathbb{R}^n non sono ammissibili, si dice che non sono **eleggibili**.

Quando parliamo di ottimizzazione di una funzione obiettivo possiamo avere diversi tipi di ottimizzazione:

Ottimizzazione NON vincolata: la ricerca del/i punto/i di ottimo della funzione obiettivo viene condotta su tutto lo spazio di definizione (quindi $X = \mathbb{R}^n$) della/e variabile/i di decisione

Ottimizzazione vincolata: la ricerca del/i punto/i di ottimo della funzione obiettivo viene condotta su un sottoinsieme proprio dello spazio di definizione (cioè $X \subset \mathbb{R}^n$) della/e variabile/i di decisione

Ottimizzazione intera: le variabili di decisione assumono solo valori interi (quindi $X = \mathbb{Z}^n$)

Ottimizzazione binaria: Le variabili assumono solo valore 0 e 1 (quindi $X \in \{0, 1\}^n$)

Ottimizzazione mista: Alcune variabili assumono valori interi mentre altre variabili assumono solo valori binari.

Se non specificato altrimenti, si deve intendere che **le variabili decisionali assumono valori reali**.

3.1 Programmazione matematica

Quando l'insieme X delle soluzioni ammissibili di un problema di ottimizzazione viene espresso attraverso un sistema di equazione e disequazione, esso prende il nome di problema di **programmazione matematica** (PM). In questo caso un **vincolo** è un'espressione del tipo:

$$g_i(x) \begin{cases} \geq \\ = \\ \leq \end{cases} 0$$

Con $g_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ funzione generica che lega tra loro le variabili decisionali. In generale, possiamo avere uno o più vincoli.

La **regione ammissibile** è quindi definita dall'insieme dei vincoli del problema, cioè:

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \text{ con } g_i(x) \begin{cases} \leq \\ = \\ \geq \end{cases}, i = 1, \dots, m \right\}$$

Osserviamo, quindi, che abbiamo m vincoli ed n variabili. Inoltre

- Se $x \in X$ allora x è soluzione **ammissibile**
- Se $x \notin X$ allora x **non è una soluzione ammissibile** (soluzione inammissibile)

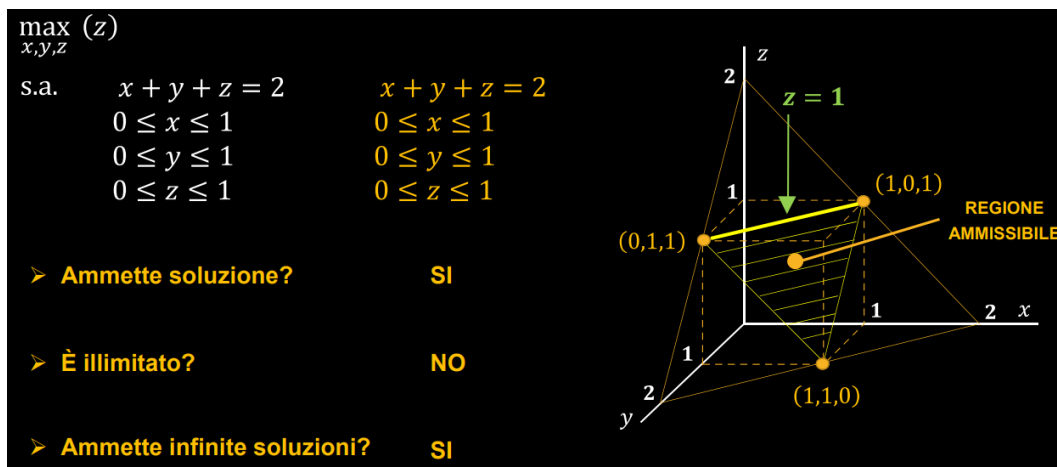
In un problema di ottimizzazione, abbiamo le seguenti possibilità riguardo la regione ammissibile:

- **Problema non ammissibile:** $X = \emptyset$ (regione ammissibile vuota, nessuna soluzione ammissibile, problema mal posto)
- **Problema illimitato**, cioè:

$$- \forall c \in \mathbb{R}, \exists x_c \in X | f(x_c) \leq c \text{ se } \text{opt} = \min \text{ (illimitato inferiormente)}$$

– $\forall c \in \mathbb{R}, \exists x_c \in X | f(x_c) \geq c$ se $\text{opt} = \max$ (illimitato superiormente)

- **Problema con soluzione ottima unica**
- **Problema con più di una soluzione ottima** (anche **infinite**): tutte le soluzioni ottime hanno egual valore della funzione obiettivo



3.2 Ottimi globali e ottimi locali

La risoluzione di un problema di programmazione matematica consiste nel trovare una soluzione ammissibile che sia un **ottimo globale**, vale a dire un vettore $\mathbf{x}^* \in X$ tale che:

- $f(\mathbf{x}^*) \leq f(x) \forall x \in X$ se $\text{opt} = \min$
- $f(\mathbf{x}^*) \geq f(x) \forall x \in X$ se $\text{opt} = \max$

Osservazione 3.2.1 *Un problema di ottimizzazione può avere:*

- Più di un ottimo locale
- Più di un ottimo globale

Osservazione 3.2.2 *Un punto di ottimo globale è anche di ottimo locale*

Osservazione 3.2.3 *Nel caso di una funzione obiettivo **convessa**, vi è un unico ottimo globale*

Anche qui abbiamo diversi casi possibili:

- **Programmazione lineare:** in questo caso ci troviamo davanti ad un problema con questa formulazione:

$$\text{opt } f(x) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \text{ (lineare)}$$

La regione ammissibile è quindi formulabile in questo modo:

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \begin{cases} \leq \\ = \\ \geq \end{cases}, i = 1, \dots, m \right\}$$

con $g_i(x) = \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} - b_i$ vincoli **lineari**

- **Programmazione Lineare Intera:** in questo caso ci troviamo davanti ad un problema con questa formulazione:

$$\text{opt } f(x) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \text{ (lineare)}$$

La regione ammissibile è quindi formulabile in questo modo:

$$X = \left\{ x \in \mathbb{Z}^n \mid g_i(x) \begin{cases} \leq \\ = \\ \geq \end{cases}, i = 1, \dots, m \right\}$$

con $g_i(x) = \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} - b_i$ vincoli **lineari**

- **Programmazione non lineare:** in questo caso ci troviamo davanti ad un problema con questa formulazione:

$$\text{opt } f(x) \text{ (lineare o non lineare)}$$

La regione ammissibile è quindi formulabile in questo modo:

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \begin{cases} \leq \\ = \\ \geq \end{cases}, i = 1, \dots, m \right\}$$

con $g_i(\mathbf{x})$ vincoli **lineari** o **non lineari**. È importante notare come, in questo caso, almeno un vincolo o la funzione obiettivo sono NON lineari

4 Programmazione lineare

La programmazione lineare (PL) è quella branca della ricerca operativa che si occupa di studiare algoritmi di risoluzione per problemi di ottimizzazione lineari. Un problema di programmazione lineare è strutturato come segue:

$$\text{opt}_{\mathbf{x} \in X} Z = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j \text{ (Funzione obiettivo } Z \text{ con } n, \text{ numero di variabili decisionali)}$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \leq b_i, i = 1, \dots, m \text{ (Vincoli : regione ammissibile } X \text{ con } m, \text{ numero di vincoli)}$$

Con:

$$\left. \begin{array}{l} x_j \text{ variabili decisionali} \\ c_j \text{ coefficienti di costo} \\ a_{ij} \text{ termini noti sinistri} \\ b_i \text{ termini noti destri} \end{array} \right\} \text{ Parametri}$$

Un problema di programmazione lineare si poggia sulle seguenti **assunzioni implicite**:

- **Proporzionalità:** il contributo di ogni variabile decisionale, al valore della funzione obiettivo, è proporzionale rispetto al valore assunto dalla variabile stessa
- **Additività:** ogni funzione è la somma dei contributi delle variabili decisionali
- **Continuità:** qualunque valore delle variabili decisionali in \mathbb{R}^n è accettabile
- **Certezza:** il valore assegnato ad ogni parametro è assunto essere noto o costante

Vediamole nel dettaglio:

4.1 Assunzione di Proporzionalità

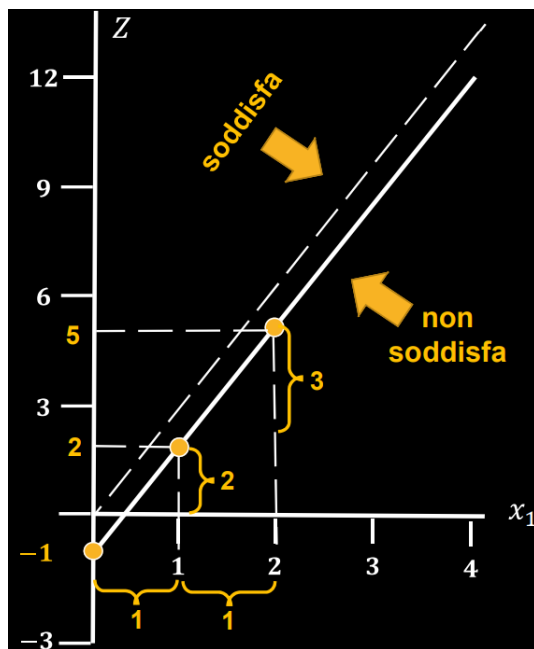
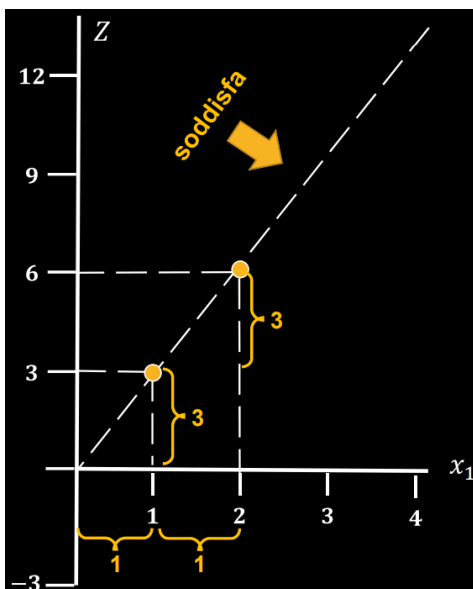
Il contributo di ogni attività al valore della **funzione obiettivo** Z è proporzionale al **livello dell'attività** x_j secondo:

$$Z = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j$$

Analogamente, il contributo di ogni attività al **vincolo "i"** è proporzionale al **livello di attività** x_j secondo

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \leq b_i$$

Vediamo un esempio:



4.2 Assunzione di additività

In un problema di programmazione lineare, il valore assunto da ogni funzione, sia essa **funzione obiettivo** o vincolo, è dato dalla somma dei contributi individuali delle rispettive attività. Vediamo un esempio:

$$\max Z = 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2$$

$$x_1 \leq 4$$

$$2 \cdot x_2 \leq 12$$

$$3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 18$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

| Valore della funzione obiettivo Z | | | |
|-----------------------------------|-----------------------|--------------------|--------|
| (X ₁ ,X ₂) | Additività rispettata | Additività violata | |
| | | Caso 1 | Caso 2 |
| (1, 0) | 3 | 3 | 3 |
| (0, 1) | 5 | 5 | 5 |
| (1, 1) | 8 | 9 | 7 |

Caso 1: $3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2$

Caso 2: $3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 - x_1 \cdot x_2$

4.3 Assunzione di continuità

Le variabili decisionali in un problema di programmazione lineare (PL) sono libere di assumere qualsiasi valore, inclusi valori non interi che soddisfino i vincoli funzionali ed i vincoli di non negatività. In altri termini le variabili decisionali sono continue. In alcune condizioni può accadere che le variabili decisionali non possano che assumere valori interi; in questi casi si parla di problema di programmazione lineare intera o a numeri interi.

4.4 Assunzione di certezza

Il valore assegnato ad ogni parametro di un problema di programmazione lineare è assunto essere noto con certezza e costante.

4.5 Soluzione grafica ad un problema di programmazione lineare

Per risolvere i problemi di programmazione lineare, possiamo adottare una **procedura grafica**, determinando i valori delle variabili decisionali x_1, x_2 che rispettano i vincoli, ed al tempo stesso rendono massimo il valore Z della funzione obiettivo. La **soluzione grafica** si compone di:

- Disegno della regione ammissibile
- Determinazione dell'ottimo

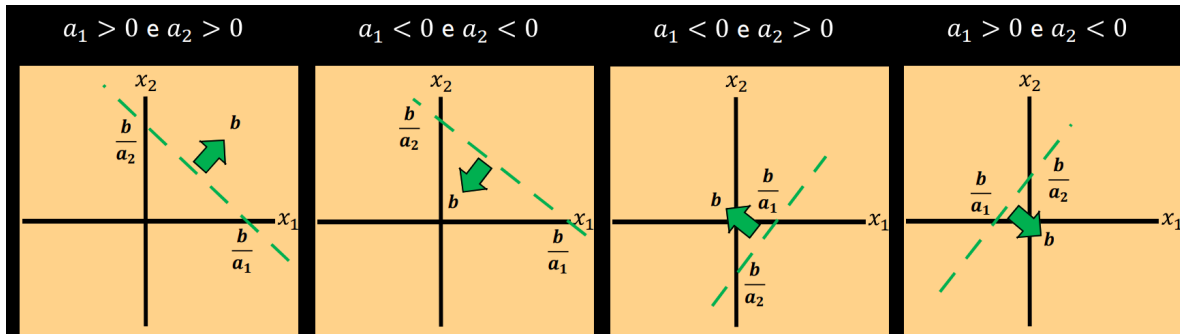
4.5.1 Vincolo di uguaglianza

I vincoli $g_i(\mathbf{x})$ possono essere:

- **Rette:** $g_i(x) = 0$

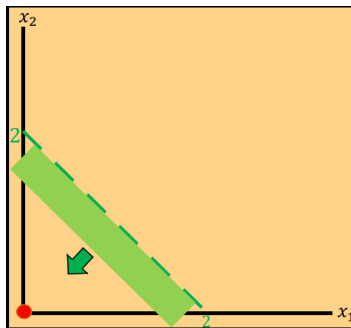
- **Semipiani:** $g_i(x) \leq 0$

Un vincolo del tipo $a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 = b$ è una **retta nel piano**. La retta è perpendicolare al vettore $\nu = (a_1, a_2)$. Abbiamo quindi i seguenti casi:



Come rappresentiamo però un semipiano?

1. Disegniamo la retta associata ($a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 \leq b$)
 2. Scegliamo un punto non appartenente a tale retta (torna comodo 0)
- Se il punto verifica la disuguaglianza allora scegliamo il semipiano che lo contiene
 - Altrimenti scegliamo l'altro semipiano



4.5.2 Vincoli funzionali di \leq

In maniera generalizzata, possiamo pensare che un problema di programmazione lineare è formulato in questo modo:

$$\begin{aligned}
 \text{opt} \quad & Z = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \dots + c_n \cdot x_n \\
 \text{s.a.} \quad & a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n \leq b_1 \\
 & a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n \leq b_2 \\
 & \dots + \dots + \dots + \dots \leq \dots \\
 & a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n \leq b_m \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \dots, x_m \geq 0
 \end{aligned}$$

Con

- Z funzione obbiettivo

- $$\left. \begin{array}{l} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n \leq b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n \leq b_2 \\ \dots\dots\dots + \dots\dots\dots + \dots + \dots\dots\dots \leq \dots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n \leq b_m \end{array} \right\} \text{Vincoli funzionali}$$
- $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \dots, x_m \geq 0$ vincoli di non negatività

In particolare quindi:

- Z = valore della misura di prestazione
- x_j = livello dell'attività j
- c_j = incremento del valore della misura di prestazione Z corrispondente all'incremento di un'unità del valore dell'attività x_j
- b_i = quantità di risorsa " i " allocabile alle attività $x_j, j = 1, \dots, n$
- a_{ij} = quantità di risorsa " i " consumata da ogni unità di attività $x_j, j = 1, \dots, n$

4.5.3 Vincoli funzionali di \geq e $=$

Generalizzando al caso con n **variabili decisionali** ed m **vincoli**, otteniamo la seguente formulazione di un **problema di programmazione lineare**:

Funzione obbiettivo: $\text{opt } Z$

Vincoli:

$$\begin{array}{l} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n \leq b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n \geq b_2 \\ \dots \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \dots + a_{nm} \cdot x_n \leq b_n \end{array}$$

In questo caso quindi, siamo nel caso per il quale x_2 **non è vincolata** da nessun valore. Inoltre, ogni vincolo di \geq e $=$ può essere riscritto nella seguente forma:

- $g_i(x) \geq b_i \rightarrow -g_i(x) \leq b_i$
- $g_i(x) = b_i \rightarrow \begin{cases} g_i(x) \geq b_i \\ g_i(x) \leq b_i \end{cases}$

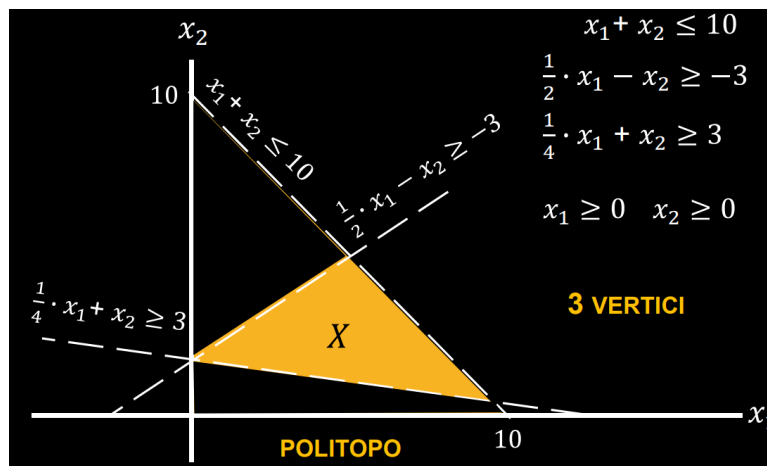
4.5.4 Regione ammissibile

La regione ammissibile X è data dal soddisfacimento dei vari vincoli (Rette e semipiani):

$$X = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \left| g_i(x) = \begin{cases} \geq \\ = \\ \leq \end{cases} 0, i = 1, \dots, m \right. \right\} \text{ con } g_i(x) = \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} - b_i$$

dove $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$

La regione ammissibile, da un punto di vista geometrico, corrisponde ad un **poliedro convesso in \mathbb{R}^n** . La regione ammissibile può essere **limitata (politopo)** o illimitata



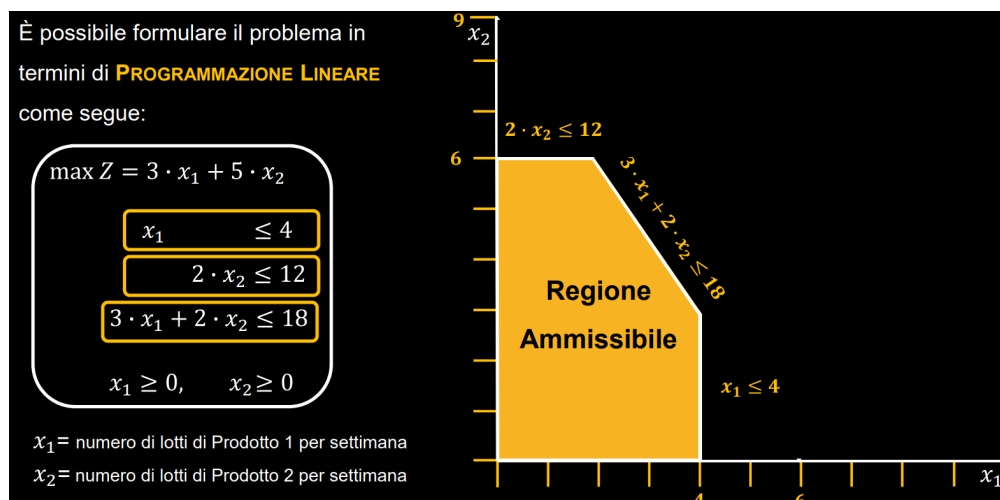
Si possono verificare quattro soluzioni:

- Il problema di programmazione lineare **ammette una sola soluzione ottima** in un **vertice del poligono convesso** che delimita la regione ammissibile.
- Il problema di programmazione lineare **ammette infinite soluzioni ottime** in un **lato del poligono convesso** che delimita la regione ammissibile se la direzione di decrescita è perpendicolare ad un lato del poligono
- Il problema di programmazione lineare **ammette infinite soluzioni** perché la regione ammissibile è illimitata e la funzione obbiettivo è illimitata superiormente (se è di massimizzazione) o inferiormente (se di minimizzazione)
- Il problema di programmazione lineare **non ammette soluzione** perché la regione ammissibile è vuota

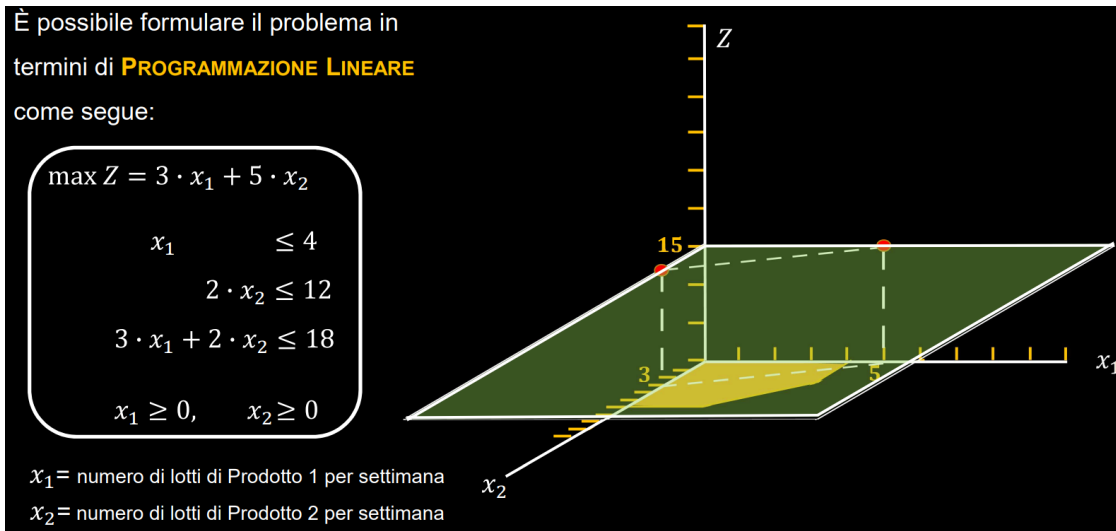
Per risolvere quindi un problema di programmazione lineare graficamente dobbiamo quindi:

1. Disegnare la regione ammissibile
2. Cercare di massimizzare (minimizzare) la soluzione, riportando ciò che troviamo sul grafico

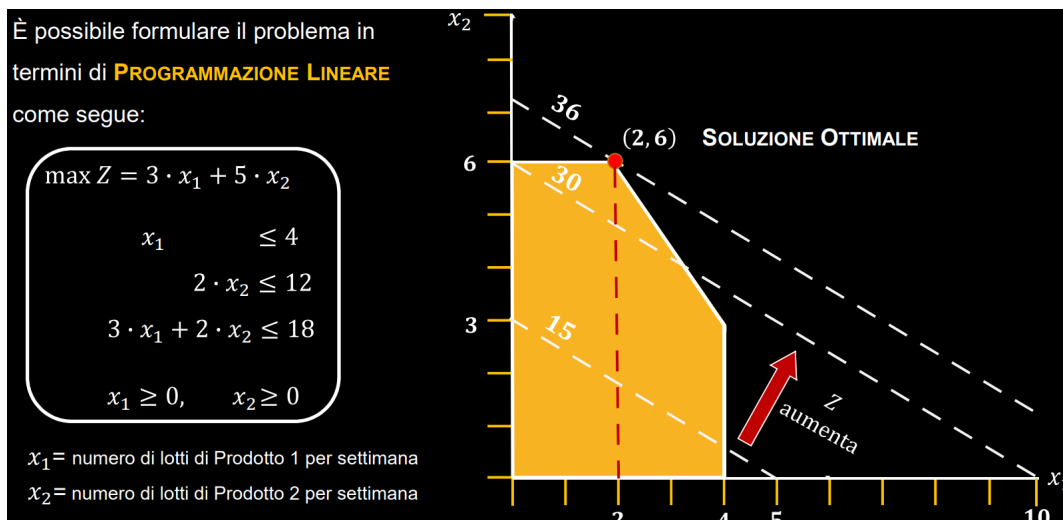
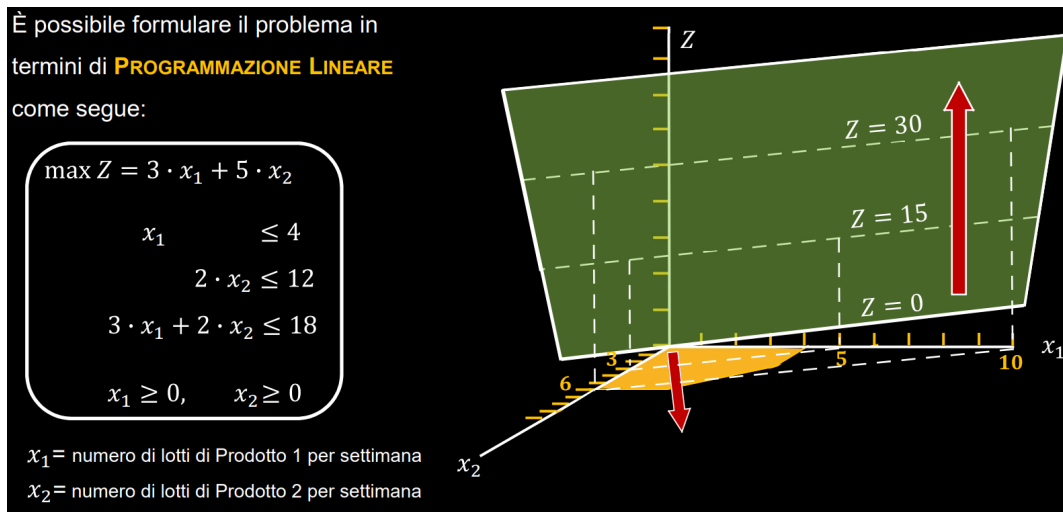
In particolare, per problemi in due variabili x_1 e x_2 , il punto due può essere visto come segue:



Riportiamo la regione ammissibile nel piano 3D e troviamo dei valori per x_1, x_2 che diano lo stesso valore una volta sostituiti nella funzione obiettivo (nell'immagine, abbiamo che i valori $x_1 = 0, x_2 = 5$ e $x_1 = 3, x_2 = 0$)

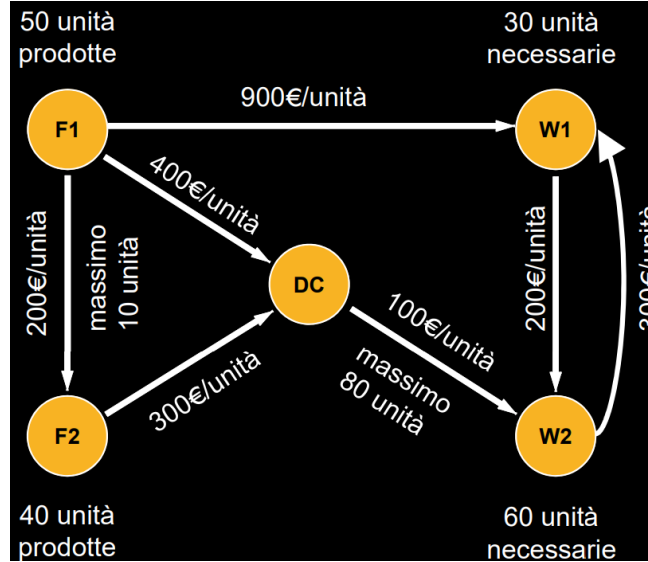


Continuando così, usiamo il piano creato dalla funzione obiettivo nello spazio 3D per capire se stiamo uscendo dalla regione ammissibile o meno:



4.6 Minimum cost flow problem

Supponiamo di trovarci in questa situazione: l'azienda **distribution unlimited** produrrà un nuovo prodotto in **due fabbriche differenti**, successivamente i prodotti verranno inviati a **due magazzini**, ogni fabbrica potrà spedire i propri prodotti ai due magazzini. La rete distributiva è mostrata di seguito:



Il problema consiste nel determinare quante unità di prodotto spedire dalle due fabbriche $F1$ e $F2$ ai due magazzini $W1$ e $W2$, utilizzando anche il centro di distribuzione DC , con l'obiettivo di **minimizzare i costi di spedizione**.

Questo tipo di problema prende il nome di **Minimum cost flow problems**. Risolviamo l'esempio come segue:

Sette corsie di spedizione richiedono sette variabili decisionali:

$$x_{F1 \rightarrow F2}, x_{F1 \rightarrow W1}, x_{F1 \rightarrow DC}$$

$$x_{F2 \rightarrow DC}$$

$$x_{DC \rightarrow W2}$$

$$x_{W1 \rightarrow W2}$$

$$x_{W2 \rightarrow W1}$$

Troviamo i seguenti vincoli:

- **Vincoli di non negatività:**

$$x_{F1 \rightarrow F2}, x_{F1 \rightarrow W1}, x_{F1 \rightarrow DC} \geq 0$$

$$x_{F2 \rightarrow DC} \geq 0$$

$$x_{DC \rightarrow W2} \geq 0$$

$$x_{W1 \rightarrow W2} \geq 0$$

$$x_{W2 \rightarrow W1} \geq 0$$

- **Vincoli di capacità massima**

$$x_{F1 \rightarrow F2} \leq 10$$

$$x_{DC \rightarrow W2} \leq 80$$

- **Vincoli di conservazione del flusso:** $outflow - inflow = unita' necessarie$
Questo vincolo in sostanza impone che **la somma dei flussi entranti in ogni nodo deve essere pari al flusso in uscita dal nodo medesimo**

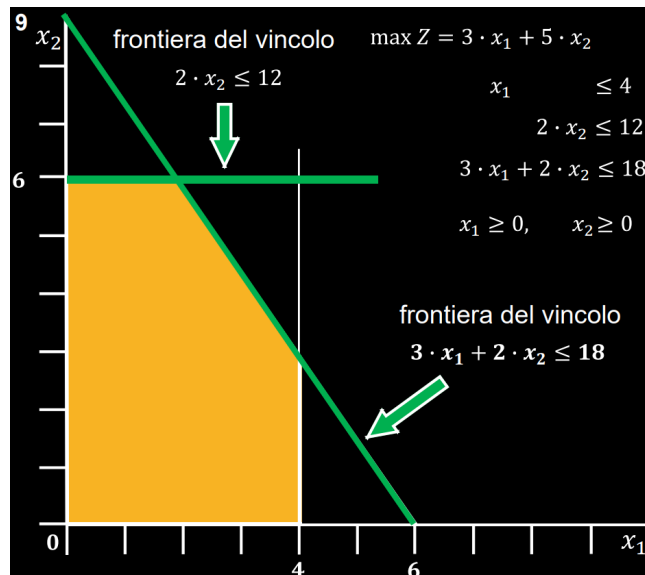
Il problema che desideriamo risolvere consiste nel determinare **quante unità di prodotto** spedire dalle due fabbriche $F1$ e $F2$ ai due magazzini $W1$ e $W2$, utilizzando anche il **centro di distribuzione DC**, con l'obiettivo di minimizzare il costo di spedizione. Il **costo di spedizione per unità di prodotto** è indicato per ogni arco di spedizione. La funzione obiettivo è:

$$\min Z = 2 \cdot x_{F1 \rightarrow F2} + 4 \cdot x_{F1 \rightarrow DC} + 9 \cdot x_{F1 \rightarrow W1} + 3 \cdot x_{F2 \rightarrow DC} + x_{DC \rightarrow W2} + 3 \cdot x_{W1 \rightarrow W2} + 2 \cdot x_{W2 \rightarrow W1}$$

Una volta calcolati i vincoli visti sopra, possiamo risolvere il problema di programmazione lineare.

4.7 Metodo del simplesso

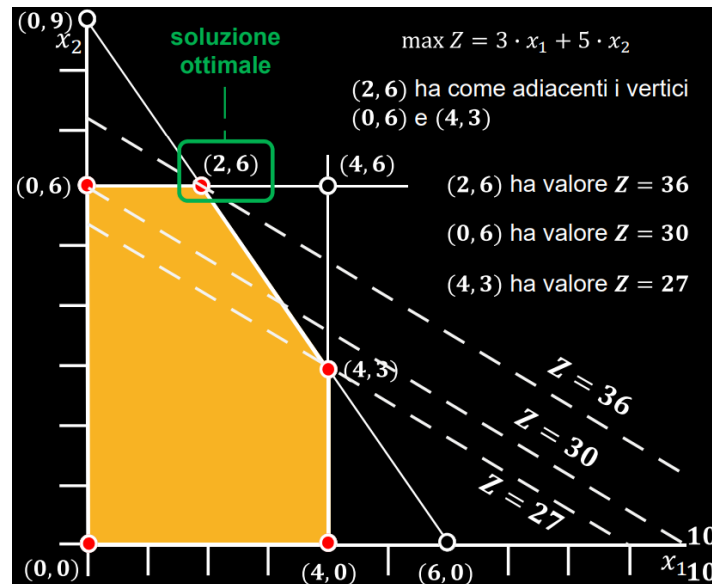
Il metodo del simplesso è un algoritmo per la risoluzione dei problemi di programmazione lineare. Nel caso medio, il tempo computazionale dell'algoritmo è **lineare rispetto al numero di variabili**. Nel caso peggiore, invece, può risultare **esponenziale**. Esso è una procedura algebrica, tuttavia i suoi concetti base hanno radici geometriche. Consideriamo la seguente regione ammissibile:



I **vertici** si trovano all'intersezione di coppie di frontiere di vincoli. Per ogni problema di programmazione lineare con n variabili decisionali, due vertici (soluzioni vertici) si dicono **adiacenti** se condividono $n - 1$ frontiere di vincoli. Due vertici adiacenti sono collegati da un segmento che giace sull'intersezione delle frontiere dei vincoli condivisi. Questo segmento viene detto **spigolo** della regione ammissibile. **Non tutti i vertici tuttavia sono soluzioni del problema di programmazione lineare**; lo sono solamente quelli che giacciono sulla regione ammissibile. L'interesse per i vertici adiacenti sta nella seguente proprietà di cui godono:

Test di ottimalità: Si consideri ogni problema di programmazione lineare tale da

ammettere almeno una soluzione ottimale. Se una soluzione vertice **non ammette** soluzioni vertice a lei adiacenti con valore della funzione obiettivo Z migliore, allora la soluzione in questione è **ottimale**.



Come già detto, il metodo del simplesso è un **algoritmo** e quindi è formato da una serie di passi:

1. **Inizializzazione:** Scegliere una soluzione iniziale da cui partire; possiamo sceglierne una qualunque, quindi cerchiamo in modo che sia vantaggiosa e che non richieda molte computazioni per essere identificata
2. **Test di ottimalità:** valutiamo lo spostamento nei vertici adiacenti alla soluzione iniziale:
 - Se esiste almeno un vertice adiacente con valore della funzione obiettivo Z migliore di quello del vertice iniziale allora ci spostiamo in quel vertice, purché esso appartenga alla regione ammissibile; in caso ci siano più vertici con valore della funzione obiettivo migliore rispetto a quello iniziale, **ci spostiamo in quello che ha il valore migliore**. Ripetiamo questo passo fino a quando non troviamo vertici adiacenti con valore della funzione obiettivo migliore rispetto al vertice in cui ci troviamo
 - Se **non esiste almeno un vertice adiacente con valore della funzione obiettivo Z migliore di quello del vertice iniziale** allora quel vertice è la soluzione ottimale del problema di programmazione lineare

Il metodo del simplesso si basa su **sei concetti chiave**:

- **Concetto chiave 1:** Il metodo del simplesso ispeziona solo soluzioni ammissibili corrispondenti a vertici. **Per ogni problema di PL che ammetta almeno una soluzione ottimale, trovarne una, richiede di trovare solamente il vertice ammissibile cui compete il miglior valore della funzione obiettivo**(La sola restrizione è che il problema possieda vertici ammissibili. Ciò è garantito dal fatto che la regione ammissibile sia limitata). Dato che il numero di soluzioni

ammissibili è generalmente infinito, ridurre il numero di soluzioni da ispezionare ad un numero finito e piccolo è una semplificazione notevole.

- **Concetto chiave 2:** Il metodo del simplesso è un algoritmo iterativo con la seguente struttura:
 1. **Inizializzazione:** scelta di una soluzione
 2. **Test di ottimalità:** la soluzione è ottimale?
 - **NO:** torna ad 1) per trovare una soluzione migliore di quella corrente
 - **SI:** termina l'algoritmo
- **Concetto chiave 3:** Quando sia possibile, l'inizializzazione del metodo del simplesso seleziona l'origine (i valori di tutte le variabili di decisione vengono posti uguali a 0) come soluzione iniziale. **Se vi sono molte variabili decisionali, tali da rendere difficile usare il metodo grafico per scegliere la soluzione iniziale, scegliere l'origine evita di ricorrere a procedure algebriche per determinare la soluzione iniziale del metodo del simplesso**(La soluzione nulla potrebbe però essere una soluzione non ammissibile. Se questo accade, vengono usate procedure specifiche per la scelta della soluzione iniziale)
- **Concetto chiave 4:** Dato un vertice, è più vantaggioso, in termini computazionali, acquisire informazioni sui vertici a lui adiacenti di quanto non sia per i vertici a lui non adiacenti. **Ad ogni iterazione, se l'algoritmo si sposta dal vertice corrente, verso un vertice con valore migliore della funzione obiettivo, lo fa per muoversi in un vertice a lui adiacente. Nessuna altra soluzione viene considerata.** Pertanto, l'intero cammino, che partendo dalla soluzione iniziale raggiunge quella ottimale, attraversa spigoli della regione ammissibile
- **Concetto chiave 5:** A partire dal vertice corrente, il metodo del simplesso valuta i vertici ad esso adiacenti, ma non lo fa calcolando il valore della funzione obiettivo per ognuno di essi. **Il metodo del simplesso valuta e compara i tassi di miglioramento della funzione obiettivo Z lungo la direzione degli spigoli che conducono dal vertice corrente ai vertici adiacenti.** Tra i vertici adiacenti con un tasso di miglioramento positivo per la funzione obiettivo Z , il metodo del simplesso sceglie di muoversi lungo lo spigolo cui compete il massimo valore di incremento. **Il vertice selezionato diviene il nuovo vertice corrente**
- **Concetto chiave 6:** Il precedente concetto chiave descrive come il metodo del simplesso esamina gli spigoli che emanano dal vertice corrente. **L'ispezione di uno spigolo consente di identificare rapidamente il tasso di miglioramento di Z che si otterrebbe muovendosi lungo di esso verso la soluzione adiacente all'altro estremo.** Un tasso di miglioramento positivo per Z significa che il vertice adiacente è una soluzione migliore della soluzione corrente. Un tasso negativo implica che il vertice adiacente è una soluzione peggiore della soluzione corrente. **IL TEST DI OTTIMALITÀ consiste nel verificare se esiste uno spigolo con tasso positivo di miglioramento. Se tale condizione non è soddisfatta allora la soluzione corrente è ottimale**

4.7.1 Procedura algebrica

Fino ad ora abbiamo parlato dell'algoritmo del simplesso in termini geometrici. Comunque, l'algoritmo del simplesso usualmente viene eseguito su un calcolatore, il quale è in grado di interpretare solo istruzioni algebriche. Pertanto, è necessario **tradurre la procedura geometrica in una procedura algebrica**. La procedura algebrica si basa sulla **risoluzione di un sistema di equazioni lineari**. Pertanto il primo passo da compiere per tradurre la procedura geometrica in procedura algebrica richiede di **tradurre i vincoli funzionali di disuguaglianza in vincoli funzionali di uguaglianza**. I **vincoli di non negatività** vengono mantenuti invariati in quanto la loro **trattazione** viene effettuata in maniera **separata**. Per convertire i vincoli di disuguaglianza in vincoli di uguaglianza, bisogna introdurre il concetto di **variabile slack**.

Una **variabile slack** è una variabile che indica la **la quantità che manca al termine sinistro di una disuguaglianza affinché questa sia verificata con il segno di uguaglianza**. Facciamo un esempio:

| | | | |
|--------------------------------------|---|---------------------------------|---------------------------------|
| $\max Z = 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2$ | VARIABILE SLACK | | |
| $x_1 \leq 4$ | $x_1 \leq 4$ | $x_3 = 4 - x_1$ | $x_1 + x_3 = 4$ |
| $2 \cdot x_2 \leq 12$ | Assumendo che $x_1 = 0$, la variabile slack x_3 è la quantità che manca al termine sinistro della disuguaglianza, affinché questa sia verificata con il segno di uguaglianza. | | |
| $3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 18$ | | | |
| $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$ | | | |
| Pertanto, le due equazioni | $x_1 + x_3 = 4$ | $\Rightarrow x_3 \geq 0$ | |
| | $x_1 \leq 4$ | | |
| In definitiva, il vincolo originale | $x_1 \leq 4$ | equivale alla coppia di vincoli | $x_1 + x_3 = 4$ $x_3 \geq 0$ |

Introducendo una variabile slack per ognuno dei vincoli del problema di programmazione lineare in forma originale (**forma standard**) otteniamo una formulazione equivalente detta: **Modello in forma aumentata**:

$\max Z = 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2$ **slack**

| | | |
|-----------------------------|---------|--------|
| x_1 | $+ x_3$ | $= 4$ |
| $2 \cdot x_2$ | $+ x_4$ | $= 12$ |
| $3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2$ | $+ x_5$ | $= 18$ |

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$

MODELLO IN FORMA AUMENTATA

Se la **variabile slack di un vincolo assume valore zero**, allora la soluzione corrispondente giace sulla frontiera del vincolo della forma originale. (Il vincolo corrispondente della forma originale è verificato come uguaglianza).

Se la **variabile slack di un vincolo assume valore positivo**, la soluzione corrispondente appartiene al semipiano ammissibile individuato dalla frontiera del vincolo della forma originale, vale a dire la soluzione appartiene alla regione ammissibile (è interna alla regione ammissibile).

Se la **variabile slack di un vincolo assume valore negativo**, la soluzione corrispondente appartiene al semipiano non ammissibile della frontiera del vincolo della forma originale, vale a dire la soluzione non appartiene alla regione ammissibile.

Si definisce **SOLUZIONE AUMENTATA**, una soluzione del modello in forma originale (valori delle variabili decisionali) che viene "aumentata" tramite i corrispondenti valori delle variabili slack

Si definisce **SOLUZIONE DI BASE** un vertice del modello in forma aumentata. Una soluzione di base può essere **ammissibile** o **non ammissibile**. Si dice **SOLUZIONE DI BASE AMMISSIBILE** una soluzione associata a un **vertice ammissibile**, che venga aumentata.