



# Ricerca operativa e pianificazione delle risorse

spitfire

A.A. 2024-2025

# Contents

<b>1</b>	<b>Prerequisiti di Algebra Lineare</b>	<b>3</b>
1.1	Matrici e vettori . . . . .	3
1.2	Equazioni lineari . . . . .	4
1.2.1	Metodo di eliminazione . . . . .	6
1.2.2	Metodo di eliminazione di Gauss . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Prerequisiti di Analisi Matematica</b>	<b>6</b>
2.1	Funzioni di una variabile . . . . .	6
2.2	Funzioni in due o più variabili . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Modelli nella Ricerca Operativa</b>	<b>12</b>
3.1	Programmazione matematica . . . . .	13
3.2	Ottimi globali e ottimi locali . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Programmazione lineare</b>	<b>15</b>
4.1	Assunzione di Proporzionalità . . . . .	16
4.2	Assunzione di additività . . . . .	17
4.3	Assunzione di continuità . . . . .	17
4.4	Assunzione di certezza . . . . .	17
4.5	Soluzione grafica ad un problema di programmazione lineare . . . . .	17
4.5.1	Vincolo di uguaglianza . . . . .	17
4.5.2	Vincoli funzionali di $\leq$ . . . . .	18
4.5.3	Vincoli funzionali di $\geq$ e $=$ . . . . .	19

# 1 Prerequisiti di Algebra Lineare

## 1.1 Matrici e vettori

Una matrice è una tabella contenente numeri. Se la tabella è costituita da  $m$  righe e  $n$  colonne si parla di una matrice  $m \times n$ . Una matrice viene detta **matrice quadrata** se il numero di righe e colonne coincidono.

Una matrice  $1 \times m$  viene detto **vettore riga m-dimensionale**

Una matrice  $m \times 1$  viene detto **vettore colonna m-dimensionale**.

La notazione maggiormente utilizzata per indicare una matrice è

$$A = [a_{ij}]$$

Con  $a_{ij}$  elemento generico della  $i$ -esima riga e  $j$ -esima colonna della matrice  $A$ . Se  $A = [a_{ij}]$  è una matrice  $m \times n$ , la matrice  $n \times m$

$$A^T = [a_{ij}]$$

viene detta **matrice trasposta** della matrice  $A$ .

Se  $A = [a_{ik}]$  è una matrice  $m \times p$  e  $B = [b_{kj}]$  è una matrice  $p \times n$  la loro **matrice prodotto** è  $m \times n$  e definita come:

$$A \cdot B = C = [c_{ij}] \text{ con } c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Date due matrici  $m \times n$ ,  $A = [a_{ij}]$  e  $B = [b_{ij}]$ , la loro **matrice somma** è definita come segue:

$$A + B = C = [c_{ij}] \text{ con } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

La **moltiplicazione** di una **matrice A per una costante**  $\alpha$  fornisce come risultato quanto segue:

$$\alpha \cdot A = [\alpha \cdot a_{ij}]$$

Questa moltiplicazione è **commutativa**.

Siano  $v_1, v_2, \dots, v_n$   $n$  vettori, riga o colonna; essi vengono detti **linearmente indipendenti** tra loro se, prendendo  $n$  coefficienti  $a_1, a_2, \dots, a_n$  la seguente uguaglianza

$$a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + \dots + a_n \cdot v_n = 0$$

risulta verificata solo se  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ .

Al contrario, se esistono coefficienti  $a_1, a_2, \dots, a_n$  non tutti nulli per cui

$$a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + \dots + a_n \cdot v_n = 0$$

i vettori  $v_1, v_2, \dots, v_n$  sono detti **linearmente dipendenti**.

Un insieme di  $n$  vettori ad  $n$  dimensioni linearmente indipendenti costituisce una **base per uno spazio a n dimensioni**. Se un insieme di vettori  $v_1, v_2, \dots, v_n$  costituisce una base per uno spazio ad  $n$  dimensioni, allora ogni vettore  $x$  che appartiene a quello spazio è **combinazione lineare dei vettori della base**.

Una matrice quadrata  $m \times m$  si dice **matrice singolare** se l'insieme degli  $m$  vettori riga

(o colonna), ottenuti considerando ogni riga (o colonna) come un vettore, è **linearmente dipendenti**. Se, viceversa, l'insieme degli  $m$  vettori è linearmente indipendente, la matrice si dice **matrice non singolare**.

Una matrice quadrata  $A = [a_{ij}]$  con  $a_{ij} = 0$  per ogni  $i \neq j$  viene detta **matrice diagonale**.

La matrice diagonale  $A = [a_{ij}]$ , con  $a_{ii} = 1$  per ogni  $i$  viene detta **matrice identità**, solitamente indicata con  $I$ . Se  $A$  NON è una matrice singolare, allora esiste una matrice  $A^{-1}$  detta **matrice inversa** della matrice  $A$ , tale per cui vale la seguente relazione di uguaglianza:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

Il **determinante** di una matrice quadrata  $A$  si indica con  $\det(A)$  ed è un numero (esiste solo per matrici quadrate), nel caso specifico di una matrice  $2 \times 2$  si definisce come segue:

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Il determinante di una matrice quadrata  $A$   $m \times m$  si ottiene utilizzando la seguente regola ricorsiva, detta **formula di Laplace**: Se  $A_{ij}$  è la matrice  $(m-1) \times (m-1)$ , ottenuta togliendo la  $i$ -esima riga e la  $j$ -esima colonna di  $A$ , il determinante di  $A$  risulta:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^m (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij}) \quad (\text{formula per righe})$$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^m (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij}) \quad (\text{formula per colonne})$$

Se la matrice è singolare, allora  $\det(A) = 0$ .

Una matrice quadrata  $A$  ammette inversa se e solo se non è singolare.

## 1.2 Equazioni lineari

Un' **equazione lineare** nelle variabili  $x_1, x_2, \dots, x_n$  è un'equazione nella seguente forma:

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots + a_n \cdot x_n = b$$

dove  $a_1, a_2, \dots, a_n$  e  $b$  sono delle costanti. Si dice **soluzione dell'equazione** un qualsiasi vettore  $|y_1, y_2, \dots, y_n| \in \mathbb{R}^n$  tale che:

$$a_1 \cdot y_1 + a_2 \cdot y_2 + \dots + a_n \cdot y_n = b$$

Un **sistema di m equazioni lineari in n variabili** è definito come segue:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{cases}$$

dove  $a_{ij}$  e  $b_j$ ,  $i = 1, \dots, n$ ;  $j = 1, \dots, m$  sono costanti. Una **soluzione del sistema lineare** è un qualsiasi vettore  $|y_1, y_2, \dots, y_n| \in \mathbb{R}^n$  tale che le  $m$  equazioni del sistema

lineare siano contemporaneamente soddisfatte. Trovare le soluzioni del sistema lineare equivale a individuare il punto di intersezione tra le sue equazioni, ammesso che un tale punto esista.

Un sistema di equazioni lineari può essere:

- **Consistente:** se ammette almeno una soluzione, in caso contrario viene detto **inconsistente**
- **Determinato:** se costituito da un numero di equazioni uguale al numero di incognite  $m = n$ . Un tale sistema ha **una sola soluzione**
- **Sovradeterminato:** se costituito da più equazione che incognite  $m > n$ . Un tale sistema è spesso, ma non sempre, inconsistente
- **Sottodeterminato:** se costituito da meno equazioni che incognite  $m < n$ . Un tale sistema ammette infinite soluzioni

Consideriamo la forma matriciale del sistema costituito da  $m$  equazioni lineari in  $n$  incognite

$$A \cdot x = b$$

dove

- $A$  è una matrice  $m \times n$  (nota)
- $x$  è un vettore colonna in  $n$  dimensioni (incognito)
- $b$  è un vettore colonna in  $m$  dimensioni (noto)

Si definisce **rango della matrice A** come segue:

- **Rango di riga:** numero massimo di righe linearmente indipendenti
- **Rango di colonna:** numero massimo di colonne linearmente indipendenti

Se *rango di riga* = *rango di colonna* allora  $rk(A) \leq \min(m, n)$

Se  $rk(A) = \min(m, n)$ , allora la matrice  $A$  viene detta **a rango pieno**.

Data la matrice dei coefficienti  $A$ , si dice **matrice aumentata** la matrice  $C = A, b$  ottenuta dalla matrice  $A$  aggiungendo come colonna aggiuntiva il vettore dei termini noti  $b$ . Avremo quanto segue:

- $rk(C) > rk(A)$ : Il sistema lineare non ammette soluzione
- $rk(C) = rk(A)$ : il sistema lineare ammette soluzione

Assumiamo  $rk(C) = rk(A)$ , allora:

- Caso  $m \geq n$ 
  - Se  $rk(A) = n$ , allora il sistema ha una soluzione unica
  - Se  $rk(A) < n$ , allora il sistema ha infinite soluzioni
- Caso  $m < n$ 
  - Se  $rk(A) \leq m$ , allora il sistema ha infinite soluzioni

Come si risolve un sistema di equazioni lineari? Abbiamo due metodi:

### 1.2.1 Metodo di eliminazione

Procediamo come segue:

1. Selezionare una variabile, e risolvere una delle equazioni rispetto ad essa e eliminare la variabile in questione dalle altre equazioni
2. Tralasciare l'equazione utilizzata nel passo di eliminazione e tornare al passo 1)
3. Applicare il processo di **Back-walk substitution**: dall'ultima equazione, tornare indietro e risolvere le restanti

### 1.2.2 Metodo di eliminazione di Gauss

Il metodo di eliminazione di Gauss è un metodo di eliminazione che utilizza solo le operazioni elementari su matrici, cioè:

- Moltiplicare una riga per uno scalare non nullo
- Sommare una riga moltiplicata per uno scalare non nullo con un'altra riga
- Permutare le righe

**Teorema 1.2.1** *Applicare operazioni elementari a un sistema di equazioni lineari non cambia l'insieme delle sue soluzioni.*

## 2 Prerequisiti di Analisi Matematica

### 2.1 Funzioni di una variabile

Si dice **funzione** una terna  $(A, B, f)$  con:

- $A, B$  due insiemi non vuoti
- $f$  una legge che ad ogni elemento  $x \in A$  associa uno ed uno solo elemento  $f(x) \in B$

dove:

- $A$  è detto dominio della funzione  $f$ , anche indicato con  $\text{dom}(f)$
- $B$  è detto codominio della funzione  $f$
- Scriviamo  $f : A \rightarrow B$  e  $x \in \text{dom}(f) \rightarrow f(x)$ , per indicare la legge che alla variabile indipendente  $x$  associa la sua immagine  $f(x)$

Data una funzione  $f : A \rightarrow B$ , se esiste, finito o meno, il limite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

esso viene chiamato **derivata della funzione  $f$  nel punto  $x_0$**  e viene indicato con

$$f'(x_0) = \frac{d}{dx} f(x_0)$$

Se  $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ , allora  $f$  si dice derivabile in  $x_0$ .

Riportiamo le derivate elementari:

- Se  $f(x) = c, \forall x \in \mathbb{R}$  allora  $f'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$
- Se  $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$  allora  $f'(x) = n \cdot x^{n-1}, \forall x \in \mathbb{R}$
- Se  $f(x) = \frac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{R}^+$  allora  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}, \forall x \in \mathbb{R}^+$
- Se  $f(x) = \log(x), x \in \mathbb{R}^+$  allora  $f'(x) = \frac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{R}^+$

Data una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e un punto  $x_0 \in \mathbb{R}$ , allora

- $f$  derivabile in  $x_0 \Rightarrow f$  continua in  $x_0$
- $f$  continua in  $x_0 \not\Rightarrow f$  derivabile in  $x_0$

Se  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sono derivabili in  $x_0 \in \mathbb{R}$ , allora

- $\forall c \in \mathbb{R}$ , la funzione  $c \cdot f$  è derivabile in  $x_0$  e  $(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$
- La funzione  $f + g$  è derivabile in  $x_0$  e  $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

Se  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sono derivabili in  $x_0 \in \mathbb{R}$ , allora anche la funzione  $f \cdot g$  è derivabile in  $x_0$  e si ha quanto segue

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

Date due funzioni  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $f$  derivabile in  $x_0 \in \mathbb{R}$  e  $g$  derivabile in  $f(x_0)$ , allora  $g \circ f$  è derivabile in  $x_0$  e si ha quanto segue:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

La derivata della **derivata prima**  $f'$  in  $x_0 \in \mathbb{R}$  viene detta **derivata seconda** e indicata come  $f''(x_0)$ .

La derivata è il **coefficiente angolare** della retta tangente alla funzione nel punto di derivazione  $x_0$ .

Data una funzione  $f(x)$  definita su un intervallo chiuso  $[a, b]$  diremo che la funzione è:

- **Crescente**: nell'intervallo  $[a, b]$  quando per ogni coppia di punti  $x_1, x_2 \in [a, b]$  con  $x_1 < x_2$  risulta che  $f(x_1) < f(x_2)$
- **Decrescente**: nell'intervallo  $[a, b]$  quando per ogni coppia di punti  $x_1, x_2 \in [a, b]$  con  $x_1 < x_2$  risulta che  $f(x_1) > f(x_2)$

Per determinare se la funzione  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sia crescente o decrescente in un punto  $x_0 \in [a, b]$  è possibile ricorrere alla valutazione della sua derivata nel punto  $x_0$ , infatti:

- Se  $f'(x_0) > 0$  allora è crescente nel punto considerato  $x_0$
- Se  $f'(x_0) < 0$  allora la funzione è decrescente nel punto considerato  $x_0$

Una funzione  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  si dice **convessa** se  $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$  con  $x_1 < x_2$  vale la seguente relazione

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) \quad \forall x \in [a, b]$$

**strettamente convessa** se:

$$f(x) < f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) \quad \forall x \in [a, b]$$

Una funzione  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  si dice **concava** se  $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$  con  $x_1 < x_2$  vale la seguente relazione

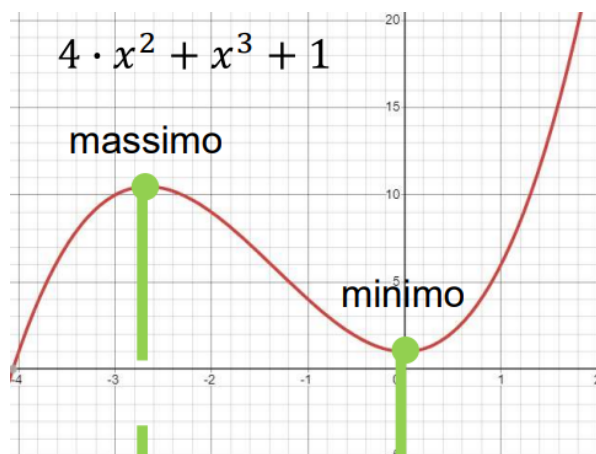
$$f(x) \geq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) \quad \forall x \in [a, b]$$

**strettamente concava** se:

$$f(x) > f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) \quad \forall x \in [a, b]$$

Data una funzione continua  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  possiamo affermare che

- Essa è crescente (decrescente) in un punto  $x \in [a, b]$  se la sua derivata prima è positiva (negativa) in  $x$
- I **punti di stazionarietà** (estremanti) della funzione sono i punti in cui la derivata prima della funzione  $f$  si annulla cambiando di segno, nello specifico si ha un punto di **massimo** in  $x \in [a, b]$  quando  $f'$  passa da un valore **positivo** a un valore **negativo**, mentre si ha un punto di **minimo** in  $x \in [a, b]$  quando  $f'$  passa da un valore *negativo* a un valore *positivo*
- È detta **lineare** se la sua **derivata prima è una funzione costante**



Data una funzione continua  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  e un punto  $x_0 \in [a, b]$ , si dice che  $f$  ha un minimo o massimo locale (o relativo) nel punto  $x_0$  quando esiste un intorno  $I(x_0)$  nel quale risulta



- $f(x) \geq f(x_0) \forall x \in l(x_0)$  allora  $x_0$  è un **minimo locale**
- $f(x) \leq f(x_0) \forall x \in l(x_0)$  allora  $x_0$  è un **massimo locale**
- $x_0$  è un **minimo locale relativo** se la funzione è decrescente immediatamente a sinistra di  $x_0$  e crescente immediatamente a destra
- $x_0$  è un **massimo locale relativo** se la funzione è crescente immediatamente a sinistra di  $x_0$  e decrescente immediatamente a destra

Il punto minimo (massimo) locale in cui la funzione  $f$  assume il valore minimo (massimo) viene detto **minimo (massimo) globale o assoluto**.

## 2.2 Funzioni in due o più variabili

Una funzione continua definita come  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  che associa ad ogni coppia di numeri reali  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$  uno e un solo valore  $y \in \mathbb{R}$  viene detta **funzioni in due variabili**  $(x_1, x_2)$ , che vengono dette **variabili indipendenti**, mentre la variabile  $y$  viene riferita con il termine di **variabile dipendente**. Questo concetto è generalizzabile al caso in cui si considerino  $n$  variabili indipendenti  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . In questo caso si parla di funzione  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  in  $n$  variabili indipendenti, funzione che descrive una "regola" per ottenere dall'insieme delle  $n$  variabili indipendenti  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  un singolo valore reale di  $y$ .

Una funzione in  $n$  variabili  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  viene detta **funzione lineare** nelle variabili  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  se è nella forma:

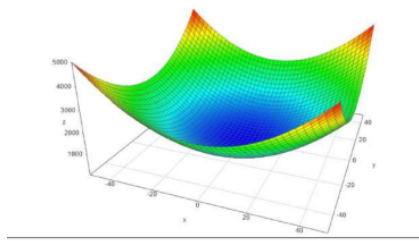
$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_0 + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots + a_n \cdot x_n$$

dove  $a_0, a_1, \dots, a_n$  sono parametri che assumono valore reale.

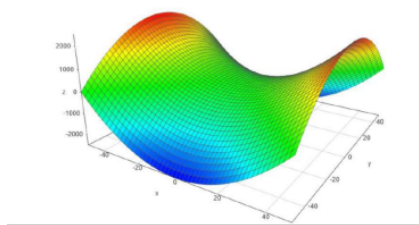
Una funzione in  $n$  variabili  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  viene detta **funzione quadratica** nelle variabili  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  se è nella forma:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_0 + \sum_{k=1}^n b_k \cdot x_k + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i, 1}^n h_{ij} \cdot x_i \cdot x_j + \sum_{k=1}^n h_{kk} \cdot x_k^2$$

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

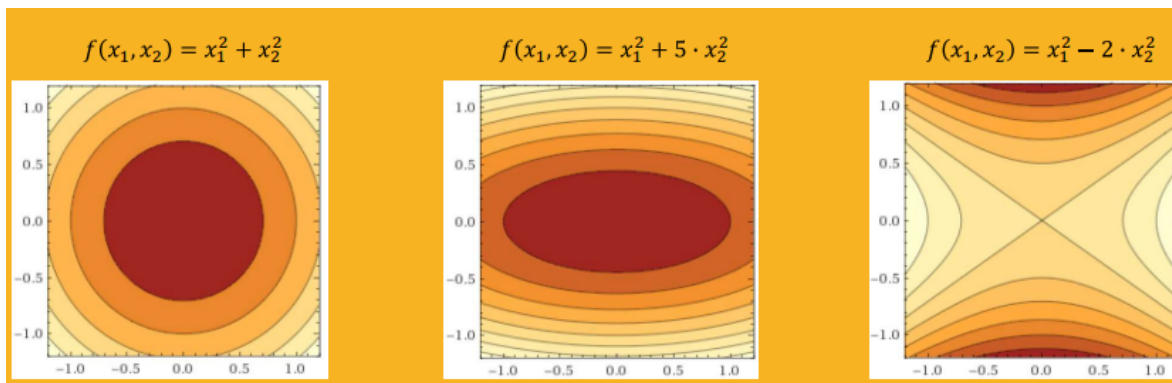


$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$$

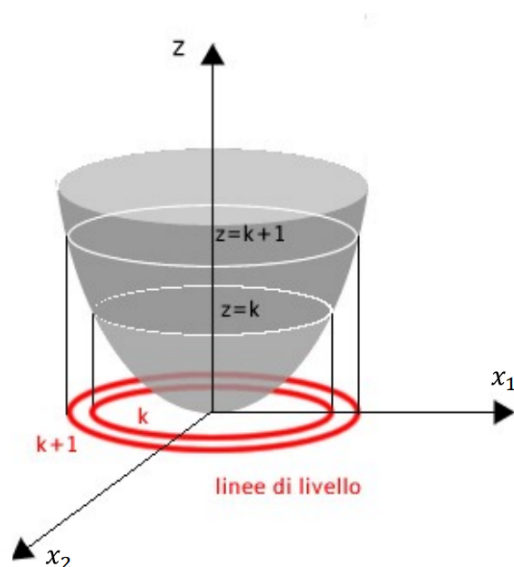


Le **curve di livello** di una funzione  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sono ottenute disegnando i punti  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  in cui la funzione ha valore costante  $k$ , vale a dire tutti i punti  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  per i quali vale la seguente uguaglianza

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = k$$



Dal punto di vista geometrico, le linee di livello sono le **proiezioni ortogonali** sul piano  $Oxy$  delle curve ottenute intersecando il piano  $z = k$  e il grafico della funzione  $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$



Data la funzione in 2 variabili  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ :

- Si dice **derivata parziale rispetto a  $x_1$**  la seguente funzione:

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = f_{x_1} = f'_{x_1}$$

Essa rappresenta il tasso con cui varia la funzione  $f(x_1, x_2)$  al variare della variabile  $x_1$ , quando sia fissato e mantenuto costante il valore della variabile  $x_2$ .

- Si dice **derivata parziale rispetto a  $x_2$**  la seguente funzione:

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = f_{x_2} = f'_{x_2}$$

Essa rappresenta il tasso con cui varia la funzione  $f(x_1, x_2)$  al variare della variabile  $x_2$ , quando sia fissato e mantenuto costante il valore della variabile  $x_1$

- Si dice **gradiente** il vettore i cui coefficienti sono le derivate parziali della funzione  $f(x_1, x_2)$  rispetto alle variabili  $x_1$  e  $x_2$ , esso è denotato nel seguente modo:

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'_{x_1} \\ f'_{x_2} \end{pmatrix}$$

Data la funzione in 2 variabili  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x_1, x_2)$ :

- Si dice **derivata parziale seconda rispetto a  $x_1$  e  $x_1$**  la seguente funzione:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = f_{x_1, x_1} = f'_{x_1, x_1}$$

- Si dice **derivata parziale seconda rispetto a  $x_1$  e  $x_2$**  la seguente funzione:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = f_{x_1, x_2} = f'_{x_1, x_2}$$

- Si dice **derivata parziale seconda rispetto a  $x_2$  e  $x_1$**  la seguente funzione:

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = f_{x_2, x_1} = f'_{x_2, x_1}$$

- Si dice **derivata parziale seconda rispetto a  $x_2$  e  $x_2$**  la seguente funzione:

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = f_{x_2, x_2} = f'_{x_2, x_2}$$

In particolare:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = f_{x_1, x_2} = f'_{x_1, x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = f_{x_2, x_1} = f'_{x_2, x_1}$$

Data la funzione in 2 variabili  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x_1, x_2)$ , si dice **matrice Hessiana** la matrice quadrata delle derivate parziali:

$$H = \begin{pmatrix} f_{x_1, x_1} & f_{x_1, x_2} \\ f_{x_2, x_1} & f_{x_2, x_2} \end{pmatrix}$$

**Condizione necessaria del primo ordine:** Data la funzione in 2 variabili  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x_1, x_2)$ , un punto  $(x_1, x_2)$  può essere un punto critico (minimo, massimo o sella) solo se il suo gradiente nel punto  $(x_1, x_2)$  è nullo:

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Non ne conosciamo però la natura! (Minimo? Massimo? Sella?)

**Condizioni sufficienti del secondo ordine:** Supponiamo che  $(x_1, x_2)$  sia un punto critico di  $f(x_1, x_2)$ . Calcoliamo il determinante della matrice Hessiana:

$$\det(H) = f_{x_1 x_1}(x_1, x_2) \cdot f_{x_2 x_2}(x_1, x_2) - (f_{x_1 x_2}(x_1, x_2))^2$$

Abbiamo i seguenti casi:

- $\det(H) > 0$ :
  - $f_{x_1 x_1} > 0 \Rightarrow (x_1, x_2)$  è un minimo relativo di  $f(x_1, x_2)$
  - $f_{x_1 x_1} < 0 \Rightarrow (x_1, x_2)$  è un massimo relativo di  $f(x_1, x_2)$
- $\det(H) < 0 \Rightarrow (x_1, x_2)$  è un punto di sella di  $f(x_1, x_2)$

Data la funzione in 2 variabili  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x_1, x_2)$ , se la sua matrice Hessiana  $H$  è tale per cui  $f_{x_1 x_1} > 0$  e  $\det(H) > 0$  allora la funzione è **convessa**. Se la funzione è convessa, allora ogni punto di minimo e di massimo sono **globali** poiché ammette solamente un punto dove il gradiente si annulla

### 3 Modelli nella Ricerca Operativa

Data una funzione

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

la chiamiamo **funzione obiettivo**. Un **problema di ottimizzazione** è formulabile come segue:

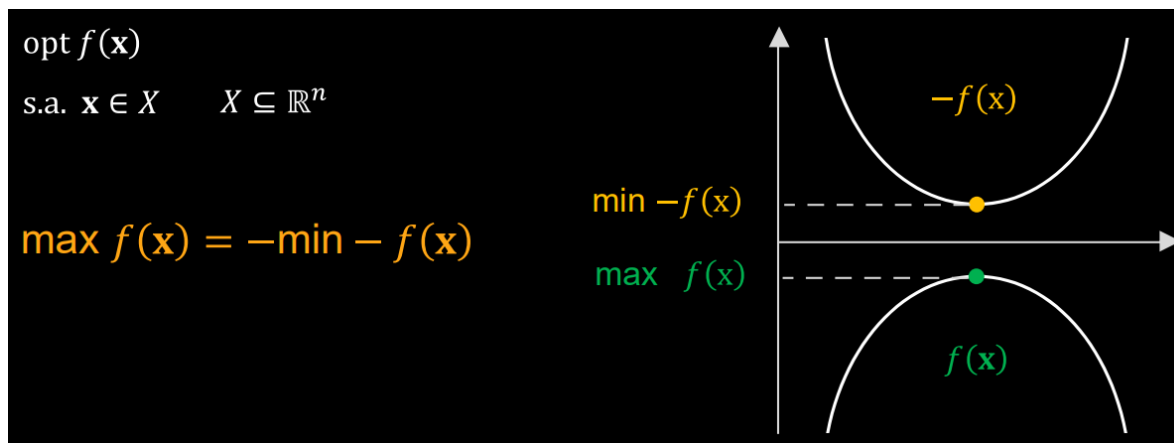
$$\begin{array}{ll} \text{opt} & f(x) \\ \text{s.a.} & x \in X \quad X \subseteq \mathbb{R}^n \end{array}$$

$X$  è detta **regione ammissibile**, cioè l'insieme delle soluzioni  $x$  ammissibili dal problema. Inoltre,  $\text{opt} \in \{\min, \max\}$ .

Se  $\text{opt} = \min$ , allora abbiamo un **problema di minimizzazione**, altrimenti un **problema di massimizzazione**.

Le variabili che indicano i vincoli ai quali è soggetto il problema sono dette **variabili decisionali** e identificano una soluzione del problema.

Quindi, un problema di ottimizzazione consiste nel determinare, se esistono, uno o più punti di minimo/massimo  $\mathbf{x}^*$ , assegnazione di valori alle variabili decisionali  $\mathbf{x}$ , della funzione obiettivo  $f$  tra i punti  $\mathbf{x}$  che appartengono alla regione ammissibile  $X$ .



In particolare, se alcune zone di  $\mathbb{R}^n$  non sono ammissibili, si dice che non sono **eleggibili**. Quando parliamo di ottimizzazione di una funzione obiettivo possiamo avere diversi tipi di ottimizzazione:

**Ottimizzazione NON vincolata:** la ricerca del/i punto/i di ottimo della funzione obiettivo viene condotta su tutto lo spazio di definizione (quindi  $X = \mathbb{R}^n$ ) della/e variabile/i di decisione

**Ottimizzazione vincolata:** la ricerca del/i punto/i di ottimo della funzione obiettivo viene condotta su un sottoinsieme proprio dello spazio di definizione (cioè  $X \subset \mathbb{R}^n$ ) della/e variabile/i di decisione

**Ottimizzazione intera:** le variabili di decisione assumono solo valori interi (quindi  $X = \mathbb{Z}^n$ )

**Ottimizzazione binaria:** Le variabili assumono solo valore 0 e 1 (quindi  $X \in \{0, 1\}^n$ )

**Ottimizzazione mista:** Alcune variabili assumono valori interi mentre altre variabili assumono solo valori binari.

Se non specificato altrimenti, si deve intendere che **le variabili decisionali assumono valori reali**.

### 3.1 Programmazione matematica

Quando l'insieme  $X$  delle soluzioni ammissibili di un problema di ottimizzazione viene espresso attraverso un sistema di equazione e disequazione, esso prende il nome di problema di **programmazione matematica** (PM). In questo caso un **vincolo** è un'espressione del tipo:

$$g_i(x) \begin{cases} \geq \\ = \\ \leq \end{cases} 0$$

Con  $g_i : X \rightarrow \mathbb{R}$  funzione generica che lega tra loro le variabili decisionali. In generale, possiamo avere uno o più vincoli.

La **regione ammissibile** è quindi definita dall'insieme dei vincoli del problema, cioè:

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \text{ con } g_i(x) \begin{cases} \leq \\ = \\ \geq \end{cases}, i = 1, \dots, m \right\}$$

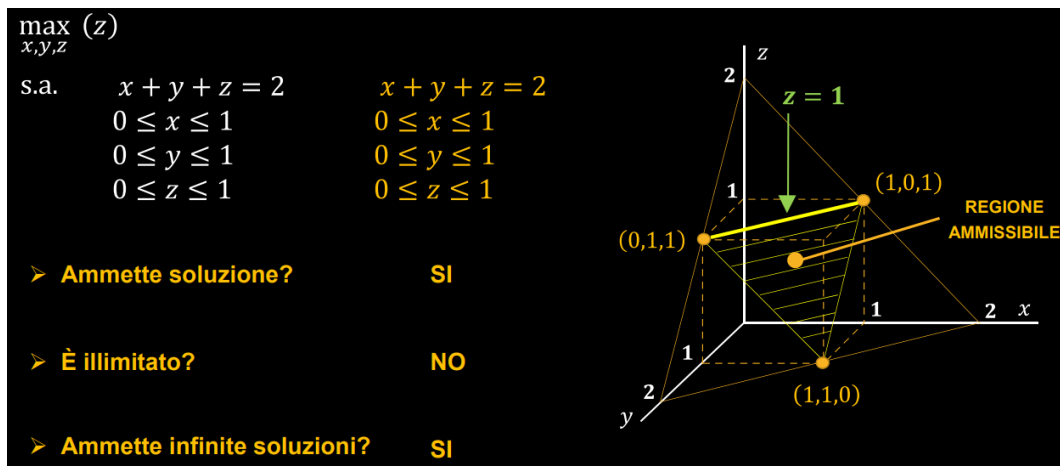
Osserviamo, quindi, che abbiamo  $m$  vincoli ed  $n$  variabili. Inoltre

- Se  $x \in X$  allora  $x$  è soluzione **ammissibile**
- Se  $x \notin X$  allora  $x$  **non è una soluzione ammissibile** (soluzione inammissibile)

In un problema di ottimizzazione, abbiamo le seguenti possibilità riguardo la regione ammissibile:

- **Problema non ammissibile:**  $X = \emptyset$  (regione ammissibile vuota, nessuna soluzione ammissibile, problema mal posto)
- **Problema illimitato**, cioè:
  - $\forall c \in \mathbb{R}, \exists x_c \in X | f(x_c) \leq c$  se  $\text{opt} = \min$  (illimitato inferiormente)
  - $\forall c \in \mathbb{R}, \exists x_c \in X | f(x_c) \geq c$  se  $\text{opt} = \max$  (illimitato superiormente)

- **Problema con soluzione ottima unica**
- **Problema con più di una soluzione ottima** (anche **infinite**): tutte le soluzioni ottime hanno egual valore della funzione obiettivo



### 3.2 Ottimi globali e ottimi locali

La risoluzione di un problema di programmazione matematica consiste nel trovare una soluzione ammissibile che sia un **ottimo globale**, vale a dire un vettore  $\mathbf{x}^* \in X$  tale che:

- $f(\mathbf{x}^*) \leq f(x) \forall x \in X$  se  $\text{opt} = \min$
- $f(\mathbf{x}^*) \geq f(x) \forall x \in X$  se  $\text{opt} = \max$

**Osservazione 3.2.1** Un problema di ottimizzazione può avere:

- Più di un ottimo locale
- Più di un ottimo globale

**Osservazione 3.2.2** Un punto di ottimo globale è anche di ottimo locale

**Osservazione 3.2.3** Nel caso di una funzione obiettivo **convessa**, vi è un unico ottimo globale

Anche qui abbiamo diversi casi possibili:

- **Programmazione lineare**: in questo caso ci troviamo davanti ad un problema con questa formulazione:

$$\text{opt } f(x) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \text{ (lineare)}$$

La regione ammissibile è quindi formulabile in questo modo:

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \left| g_i(x) \begin{cases} \leq \\ = \\ \geq \end{cases}, i = 1, \dots, m \right. \right\}$$

con  $g_i(x) = \mathbf{a}_j^T \mathbf{x} - b_i$  vincoli **lineari**

- **Programmazione Lineare Intera:** in questo caso ci troviamo davanti ad un problema con questa formulazione:

$$\text{opt } f(x) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \text{ (lineare)}$$

La regione ammissibile è quindi formulabile in questo modo:

$$X = \left\{ x \in \mathbb{Z}^n \mid g_i(x) \begin{cases} \leq \\ = \\ \geq \end{cases}, i = 1, \dots, m \right\}$$

con  $g_i(x) = \mathbf{a}_j^T \mathbf{x} - b_i$  vincoli **lineari**

- **Programmazione non lineare:** in questo caso ci troviamo davanti ad un problema con questa formulazione:

$$\text{opt } f(x) \text{ (lineare o non lineare)}$$

La regione ammissibile è quindi formulabile in questo modo:

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \begin{cases} \leq \\ = \\ \geq \end{cases}, i = 1, \dots, m \right\}$$

con  $g_i(\mathbf{x})$  vincoli **lineari** o **non lineari**. È importante notare come, in questo caso, almeno un vincolo o la funzione obbiettivo sono NON lineari

## 4 Programmazione lineare

La programmazione lineare (PL) è quella branca della ricerca operativa che si occupa di studiare algoritmi di risoluzione per problemi di ottimizzazione lineari. Un problema di programmazione lineare è strutturato come segue:

$$\text{opt}_{\mathbf{x} \in X} Z = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j \text{ (Funzione obbiettivo } Z \text{ con } n, \text{ numero di variabili decisionali)}$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \leq b_i, i = 1, \dots, m \text{ (Vincoli : regione ammissibile } X \text{ con } m, \text{ numero di vincoli)}$$

Con:

$$\left. \begin{array}{l} x_j \text{ variabili decisionali} \\ c_j \text{ coefficienti di costo} \\ a_{ij} \text{ termini noti sinistri} \\ b_i \text{ termini noti destri} \end{array} \right\} \text{ Parametri}$$

Un problema di programmazione lineare si poggia sulle seguenti **assunzioni implicite**:

- **Proporzionalità:** il contributo di ogni variabile decisionale, al valore della funzione obbiettivo, è proporzionale rispetto al valore assunto dalla variabile stessa
- **Additività:** ogni funzione è la somma dei contributi delle variabili decisionali
- **Continuità:** qualunque valore delle variabili decisionali in  $\mathbb{R}^n$  è accettabile
- **Certezza:** il valore assegnato ad ogni parametro è assunto essere noto o costante

Vediamole nel dettaglio:

## 4.1 Assunzione di Proporzionalità

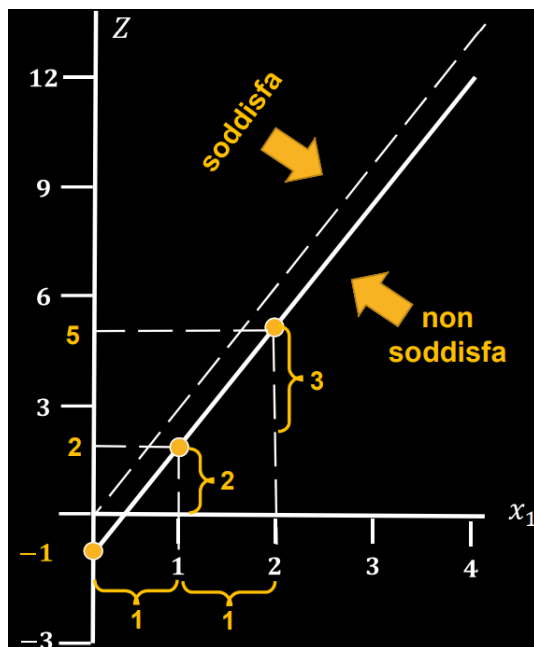
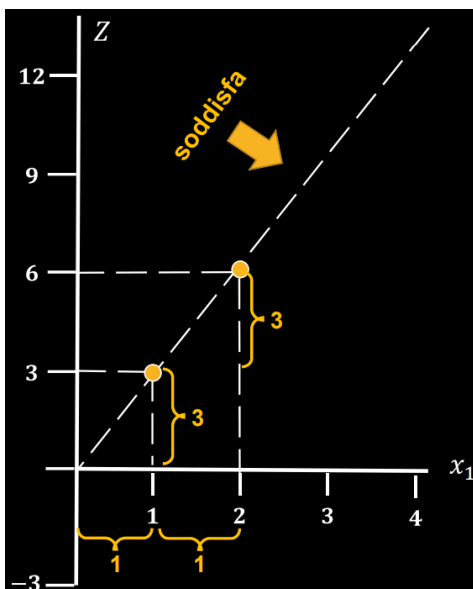
Il contributo di ogni attività al valore della **funzione obiettivo**  $Z$  è proporzionale al **livello dell'attività**  $x_j$  secondo:

$$Z = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j$$

Analogamente, il contributo di ogni attività al **vincolo "i"** è proporzionale al **livello di attività**  $x_j$  secondo

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \leq b_i$$

Vediamo un esempio:





## 4.2 Assunzione di additività

In un problema di programmazione lineare, il valore assunto da ogni funzione, sia essa **funzione obiettivo** o vincolo, è dato dalla somma dei contributi individuali delle rispettive attività. Vediamo un esempio:

$\max Z = 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2$	Valore della funzione obiettivo Z		
$x_1 \leq 4$	(X <sub>1</sub> ,X <sub>2</sub> )	Additività rispettata	Additività violata
$2 \cdot x_2 \leq 12$			Caso 1 Caso 2
$3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 18$	(1, 0)	3	3 3
$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$	(0, 1)	5	5 5
	(1, 1)	8	9 7
	Caso 1: $3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2$		
	Caso 2: $3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 - x_1 \cdot x_2$		

## 4.3 Assunzione di continuità

Le variabili decisionali in un problema di programmazione lineare (PL) sono libere di assumere qualsiasi valore, inclusi valori non interi che soddisfino i vincoli funzionali ed i vincoli di non negatività. In altri termini le variabili decisionali sono continue. In alcune condizioni può accadere che le variabili decisionali non possano che assumere valori interi; in questi casi si parla di problema di programmazione lineare intera o a numeri interi.

## 4.4 Assunzione di certezza

Il valore assegnato ad ogni parametro di un problema di programmazione lineare è assunto essere noto con certezza e costante.

## 4.5 Soluzione grafica ad un problema di programmazione lineare

Per risolvere i problemi di programmazione lineare, possiamo adottare una **procedura grafica**, determinando i valori delle variabili decisionali  $x_1, x_2$  che rispettano i vincoli, ed al tempo stesso rendono massimo il valore  $Z$  della funzione obiettivo. La **soluzione grafica** si compone di:

- Disegno della regione ammissibile
- Determinazione dell'ottimo

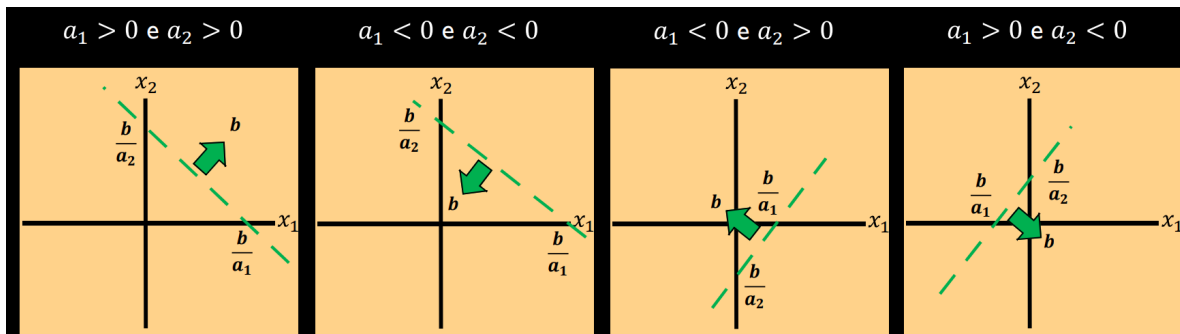
### 4.5.1 Vincolo di uguaglianza

I vincoli  $g_i(\mathbf{x})$  possono essere:

- **Rette:**  $g_i(x) = 0$

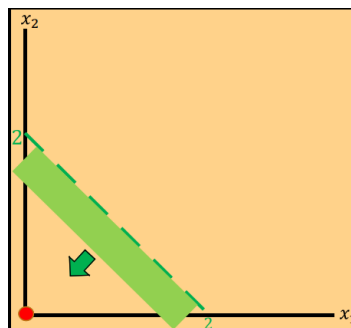
- **Semipiani:**  $g_i(x) \leq 0$

Un vincolo del tipo  $a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 = b$  è una **retta nel piano**. La retta è perpendicolare al vettore  $\nu = (a_1, a_2)$ . Abbiamo quindi i seguenti casi:



Come rappresentiamo però un semipiano?

1. Disegniamo la retta associata ( $a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 \leq b$ )
  2. Scegliamo un punto non appartenente a tale retta (torna comodo 0)
- Se il punto verifica la disuguaglianza allora scegliamo il semipiano che lo contiene
  - Altrimenti scegliamo l'altro semipiano



#### 4.5.2 Vincoli funzionali di $\leq$

In maniera generalizzata, possiamo pensare che un problema di programmazione lineare è formulato in questo modo:

$$\begin{aligned}
 \text{opt} \quad & Z = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \dots + c_n \cdot x_n \\
 \text{s.a.} \quad & a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n \leq b_1 \\
 & a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n \leq b_2 \\
 & \dots + \dots + \dots + \dots \leq \dots \\
 & a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n \leq b_m \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \dots, x_m \geq 0
 \end{aligned}$$

Con

- $Z$  funzione obiettivo

$$\bullet \left. \begin{array}{l} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n \leq b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n \leq b_2 \\ \dots\dots\dots + \dots\dots\dots + \dots + \dots\dots\dots \leq \dots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n \leq b_m \end{array} \right\} \text{Vincoli funzionali}$$

- $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \dots, x_m \geq 0$  vincoli di non negatività

In particolare quindi:

- $Z$  = valore della misura di prestazione
- $x_j$  = livello dell'attività  $j$
- $c_j$  = incremento del valore della misura di prestazione  $Z$  corrispondente all'incremento di un'unità del valore dell'attività  $x_j$
- $b_i$  = quantità di risorsa " $i$ " allocabile alle attività  $x_j, j = 1, \dots, n$
- $a_{ij}$  = quantità di risorsa " $i$ " consumata da ogni unità di attività  $x_j, j = 1, \dots, n$

#### 4.5.3 Vincoli funzionali di $\geq$ e $=$

Generalizzando al caso con  $n$  **variabili decisionali** ed  $m$  **vincoli**, otteniamo la seguente formulazione di un **problema di programmazione lineare**:

**Funzione obbiettivo:**