Ricerca operativa e pianificazione delle risorse

spitfire

A.A. 2024-2025

Contents

1 Prerequisiti di Algebra Lineare

1.1 Matrici e vettori

Una matrice è una tabella contenente numeri. Se la tabella è costituita da m righe e n colonne si parla di una matrice $m \times n$. Una matrice viene detta **matrice quadrata** se il numero di righe e colonne coincidono.
Una matrice $1 \times m$ viene detto **vettore riga m-dimensionale**
Una matrice $m \times 1$ viene detto **vettore colonna m-dimensionale**.
La notazione maggiormente utilizzata per indicare una matrice è

$$A = [a_{ij}]$$

Con a_{ij} elemento generico della i-esima riga e j-esima colonna della matrice A. Se $A = [a_{ij}]$ è una matrice $m \times n$, la matrice $n \times m$

$$A^T = [a_{ij}]$$

viene detta **matrice trasposta** della matrice A.

Se $A = [a_{ik}]$ è una matrice $m \times p$ e $B = [b_{kj}]$ è una matrice $p \times n$ la loro **matrice prodotto** è $m \times n$ e definita come:

$$A \cdot B = C = [c_{ij}] \; con \; c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Date due matrici $m \times n, A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$, la loro **matrice somma** è definita come segue:

$$A + B = C = [c_{ij}] \; con \; c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

La **moltiplicazione** di una **matrice A per una costante** α fornisce come risultato quanto segue:

$$\alpha \cdot A = [\alpha \cdot a_{ij}]$$

Questa moltiplicazione è **commutativa**.
Siano $v_1, v_2, ..., v_n$ n vettori, riga o colonna; essi vengono detti **linearmente indipendenti** tra loro se, prendendo n coefficienti $a_1, a_2, ..., a_n$ la seguente uguaglianza

$$a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + ... + a_n \cdot v_n = 0$$

risulta verificata solo se $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$.
Al contrario, se esistono coefficienti $a_1, a_2, ..., a_n$ non tutti nulli per cui

$$a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + ... + a_n \cdot v_n = 0$$

i vettori $v_1, v_2, ..., v_n$ sono detti **linearmente dipendenti**.
Un insieme di n vettori ad n dimensioni linearmente indipendenti costituisce una **base per uno spazio a n dimensioni**. Se un insieme di vettori $v_1, v_2, ..., v_n$ costituisce una base per uno spazio ad n dimensioni, allora ogni vettore x che appartiene a quello spazio è **combinazione lineare dei vettori della base**.
Una matrice quadrata $m \times m$ si dice **matrice singolare** se l'insieme degli m vettori

riga (o colonna), ottenuti considerando ogni riga (o colonna) come un vettore, è **linearmente dipendenti**. Se, viceversa, l'insieme degli m vettori è linearmente indipendente, la matrice si dice **matrice non singolare**.
Una matrice quadrata $A = [a_{ij}]$ con $a_{ij} = 0$ per ogni $i \neq j$ viene detta **matrice diagonale**.
La matrice diagonale $A = [a_{ij}]$, con $a_{ii} = 1$ per ogni i viene detta **matrice identità**, solitamente indicata con I. Se A NON è una matrice singolare, allora esiste una matrice A^{-1} detta **matrice inversa** della matrice A, tale per cui vale la seguente relazione di uguaglianza:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

Il **determinante** di una matrice quadrata A si indica con $det(A)$ ed è un numero (esiste solo per matrici quadrate), nel caso specifico di una matrice 2×2 si definisce come segue:

$$det(A) = det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Il determinante di una matrice quadrata A $m \times m$ si ottiene utilizzando la seguente regola ricorsiva, detta **formula di Laplace**: Se A_{ij} è la matrice $(m-1) \times (m-1)$, ottenuta togliendo la i-esima riga e la j-esima colonna di A, il determinante di A risulta:

$$det(A) = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot det(A_{ij}) \ (formula\ per\ righe)$$

$$det(A) = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot det(A_{ij}) \ (formula\ per\ colonne)$$

Se la matrice è singolare, allora $det(A) = 0$.
Una matrice quadrata A ammette inversa se e solo se non è singolare.

1.2 Equazioni lineari

Un' **equazione lineare** nelle variabili $x_1, x_2, ..., x_n$ è un'equazione nella seguente forma:

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + ... + a_n \cdot x_n = b$$

dove $a_1, a_2, ..., a_n$ e b sono delle costanti. Si dice **soluzione dell'equazione** un qualsiasi vettore $|y_1, y_2, ..., y_n| \in \mathbb{R}^n$ tale che:

$$a_1 \cdot y_1 + a_2 \cdot y_2 + ... + a_n \cdot y_n = b$$

Un **sistema di m equazioni lineari in n variabili** è definito come segue:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + ... + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + ... + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ ... \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + ... + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{cases}$$

dove a_{ij} e b_j, $i = 1, ..., n$; $j = 1, ..., m$ sono costanti. Una **soluzione del sistema lineare** è un qualsiasi vettore $|y_1, y_2, ..., y_n| \in \mathbb{R}^n$ tale che le m equazioni del sistema

lineare siano contemporaneamente soddisfatte. Trovare le soluzioni del sistema lineare equivale a individuare il punto di intersezione tra le sue equazioni, ammesso che un tale punto esista.
Un sistema di equazioni lineari può essere:

- **Consistente**: se ammette almeno una soluzione, in caso contrario viene detto **inconsistente**
- **Determinato**: se costituito da un numero di equazioni uguale al numero di incognite $m = n$. Un tale sistema ha **una sola soluzione**
- **Sovradeterminato**: se costituito da più equazione che incognite $m > n$. Un tale sistema è spesso, ma non sempre, inconsistente
- **Sottodeterminato**: se costituito da meno equazioni che incognite $m < n$. Un tale sistema ammette infinite soluzioni

Consideriamo la forma matriciale del sistema costituito da m equazioni lineari in n incognite

$$A \cdot x = b$$

dove

- A è una matrice $m \times n$ (nota)
- x è un vettore colonna in n dimensioni (incognito)
- b è un vettore colonna in m dimensioni (noto)

Si definisce **rango della matrice A** come segue:

- **Rango di riga**: numero massimo di righe linearmente indipendenti
- **Rango di colonna**: numero massimo di colonne linearmente indipendenti

Se *rango di riga* = *rango di colonna* allora $rk(A) \leq min(m, n)$
Se $rk(A) = min(m, n)$, allora la matrice A viene detta **a rango pieno**.
Data la matrice dei coefficienti A, si dice **matrice aumentata** la matrice $C = A, b$ ottenuta dalla matrice A aggiungendo come colonna aggiuntiva il vettore dei termini noti b. Avremo quanto segue:

- $rk(C) > rk(A)$: Il sistema lineare non ammette soluzione
- $rk(C) = rk(A)$: il sistema lineare ammette soluzione

Assumiamo $rk(C) = rk(A)$, allora:

- Caso $m \geq n$
  - Se $rk(A) = n$, allora il sistema ha una soluzione unica
  - Se $rk(A) < n$, allora il sistema ha infinite soluzioni
- Caso $m < n$
  - Se $rk(A) \leq m$, allora il sistema ha infinite soluzioni

Come si risolve un sistema di equazioni lineari? Abbiamo due metodi:

1.2.1 Metodo di eliminazione

Procediamo come segue:

1. Selezionare una variabile, e risolvere una delle equazioni rispetto ad essa e eliminare la variabile in questione dalle altre equazioni
2. Tralasciare l'equazione utilizzata nel passo di eliminazione e tornare al passo 1)
3. Applicare il processo di **Back-walk substitution**: dall'ultima equazione, tornare indietro e risolvere le restanti

1.2.2 Metodo di eliminazione di Gauss

Il metodo di eliminazione di Gauss è un metodo di eliminazione che utilizza solo le operazioni elementari su matrici, cioé:

- Moltiplicare una riga per uno scalare non nullo
- Sommare una riga moltiplicata per uno scalare non nullo con un'altra riga
- Permutare le righe

Teorema 1.2.1 *Applicare operazioni elementari a un sistema di equazioni lineari non cambia l'insieme delle sue soluzioni.*

2 Prerequisiti di Analisi Matematica

2.1 Funzioni di una variabile

Si dice **funzione** una terna (A, B, f) con:

- A, B due insiemi non vuoti
- f una legge che ad ogni elemento $x \in A$ associa uno ed uno solo elemento $f(x) \in B$

dove:

- A è detto dominio della funzione f, anche indicato con $dom(f)$
- B è detto codominio della funzione f
- Scriviamo $f : A \to B$ e $x \in dom(f) \to f(x)$, per indicare la legge che alla variabile indipendente x associa la sua immagine $f(x)$

Data una funzione $f : A \to B$, se esiste, finito o meno, il limite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

esso viene chiamato **derivata della funzione f nel punto** x_0 e viene indicato con

$$f'(x_0) = \frac{d}{dx} f(x_0)$$

Se $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, allora f si dice derivabile in x_0.

Riportiamo le derivate elementari:

- Se $f(x) = c, \forall x \in \mathbb{R}$ allora $f'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$
- Se $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ allora $f'(x) = n \cdot x^{n-1}, \forall x \in \mathbb{R}$
- Se $f(x) = \frac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{R}^+$ allora $f'(x) = -\frac{1}{x^2}, \forall x \in \mathbb{R}^+$
- Se $f(x) = log(x), x \in \mathbb{R}^+$ allora $f'(x) = \frac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{R}^+$

Data una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, allora

- f derivabile in $x_0 \Rightarrow f$ continua in x_0
- f continua in $x_0 \not\Rightarrow f$ derivabile in x_0

Se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono derivabili in $x_0 \in \mathbb{R}$, allora

- $\forall c \in \mathbb{R}$, la funzione $c \cdot f$ è derivabile in x_0 e $(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$
- La funzione $f + g$ è derivabile in x_0 e $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

Se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono derivabili in $x_0 \in \mathbb{R}$, allora anche la funzione $f \cdot g$ è derivabile in x_0 e si ha quanto segue

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

Date due funzioni $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con f derivabile in $x_0 \in \mathbb{R}$ e g derivabile in $f(x_0)$, allora $g \circ f$ è derivabile in x_0 e si ha quanto segue:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

La derivata della **derivata prima** f' in $x_0 \in \mathbb{R}$ viene detta **derivata seconda** e indicata come $f''(x_0)$.
La derivata è il **coefficiente angolare** della retta tangente alla funzione nel punto di derivazione x_0.
Data una funzione $f(x)$ definita su un intervallo chiuso $[a, b]$ diremo che la funzione è:

- **Crescente**: nell'intervallo $[a, b]$ quando per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \in [a, b]$ con $x_1 < x_2$ risulta che $f(x_1) < f(x_2)$
- **Decrescente**: nell'intervallo $[a, b]$ quando per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \in [a, b]$ con $x_1 < x_2$ risulta che $f(x_1) > f(x_2)$

Per determinare se la funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sia crescente o decrescente in un punto $x_0 \in [a, b]$ è possibile ricorrere alla valutazione della sua derivata nel punto x_0, infatti:

- Se $f'(x_0) > 0$ allora è crescente nel punto considerato x_0
- Se $f'(x_0) < 0$ allora la funzione è decrescente nel punto considerato x_0

Una funzione $f : [a, b] -> \mathbb{R}$ si dice **convessa** se $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ con $x_1 < x_2$ vale la seguente relazione

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) \; \forall x \in [a, b]$$

strettamente convessa se:

$$f(x) < f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) \; \forall x \in [a, b]$$

Una funzione $f : [a, b] -> \mathbb{R}$ si dice **concava** se $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ con $x_1 < x_2$ vale la seguente relazione

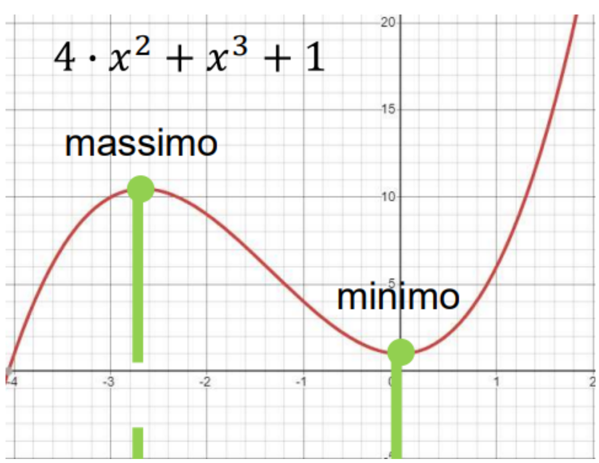
$$f(x) \geq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) \; \forall x \in [a, b]$$

strettamente concava se:

$$f(x) > f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) \; \forall x \in [a, b]$$

Data una funzione continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ possiamo affermare che

- Essa è crescente (decrescente) in un punto $x \in [a, b]$ se la sua derivata prima è positiva (negativa) in x
- I **punti di stazionarietà** (estremanti) della funzione sono i punti in cui la derivata prima della funzione f si annulla cambiando di segno, nello specifico si ha un punto di **massimo** in $x \in [a, b]$ quando f' passa da un valore **positivo** a un valore **negativo**, mentre si ha un punto di **minimo** in $x \in [a, b]$ quando f' passa da un valore *negativo* a un valore *positivo*
- È detta **lineare** se la sua **derivata prima è una funzione costante**



Data una funzione continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e un punto $x_0 \in [a, b]$, si dice che f ha un minimo o massimo locale (o relativo) nel punto x_0 quando esiste un intorno $l(x_0)$ nel quale risulta

- $f(x) \geq f(x_0) \forall x \in l(x_0)$ allora x_0 è un **minimo locale**
- $f(x) \leq f(x_0) \forall x \in l(x_0)$ allora x_0 è un **massimo locale**
- x_0 è un **minimo locale relativo** se la funzione è decrescente immediatamente a sinistra di x_0 e crescente immediatamente a destra
- x_0 è un **massimo locale relativo** se la funzione è crescente immediatamente a sinistra di x_0 e decrescente immediatamente a destra

Il punto minimo (massimo) locale in cui la funzione f assume il valore minimo (massimo) viene detto **minimo** (**massimo**) **globale** o **assoluto**.

2.2 Funzioni in due o più variabili

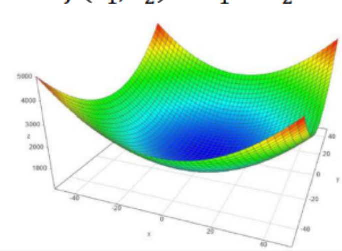
Una funzione continua definita come $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che associa ad ogni coppia di numeri reali $(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} = R^2$ uno e un solo valore $y \in \mathbb{R}$ viene detta **funzioni in due variabili** (x_1, x_2), che vengono dette **variabili indipendenti**, mentre la variabile y viene riferita con il termine di **variabile dipendente**. Questo concetto è generalizzabile al caso in cui si considerino n variabili indipendenti $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. In questo caso si parla di funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in n variabili indipendenti, funzione che descrive una "regola" per ottenere dall'insieme delle n variabili indipendenti $(x_1, x_2, ..., x_n)$ un singolo valore reale di y.
Una funzione in n variabili $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ viene detta **funzione lineare** nelle variabili $(x_1, x_2, ..., x_n)$ se è nella forma:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = a_0 + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + ... + a_n \cdot x_n$$

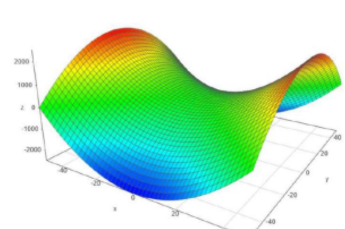
dove $a_0, a_1, ..., a_n$ sono parametri che assumono valore reale.
Una funzione in n variabili $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ viene detta **funzione quadratica** nelle variabili $(x_1, x_2, ..., x_n)$ se è nella forma:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} b_k \cdot x_k + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \neq i,1}^{n} h_{ij} \cdot x_i \cdot x_j + \sum_{k=1}^{n} h_{kk} \cdot x_k^2$$

$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

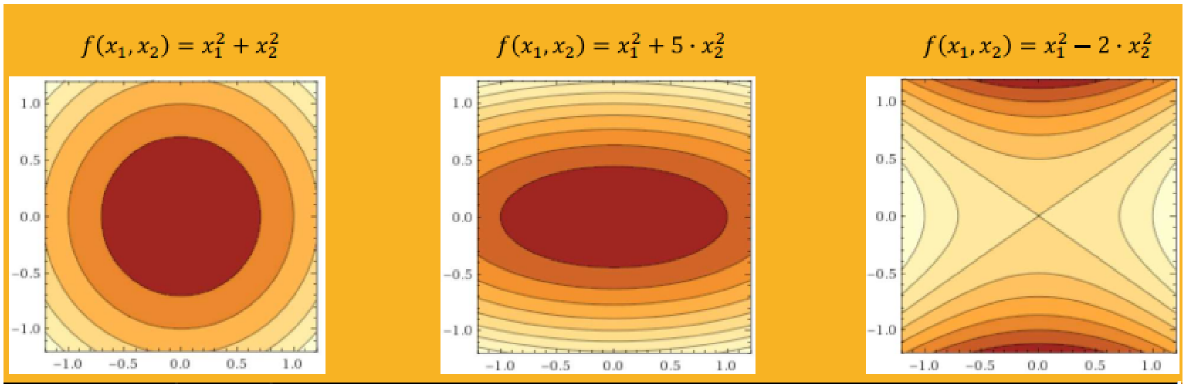


$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$

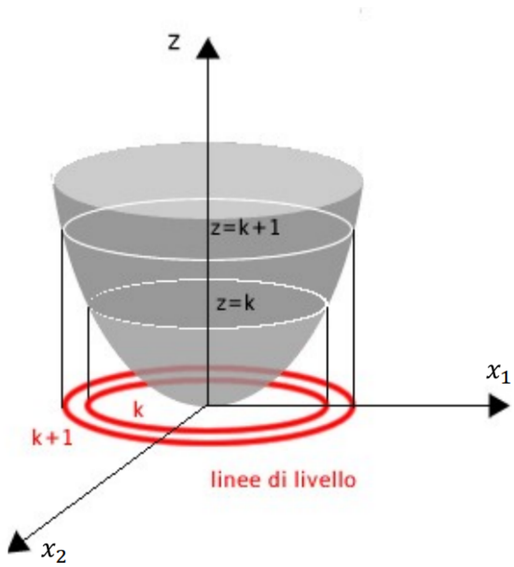


Le **curve di livello** di una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sono ottenute disegnando i punti $(x_1, x_2, ..., x_n)$ in cui la funzione ha valore constante k, vale a dire tutti i punti $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ per i quali vale la seguente uguaglianza

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = k$$



Dal punto di vista geometrico, le linee di livello sono le **proiezioni ortogonali** sul piano Oxy delle curve ottenute intersecando il piano $z = k$ e il grafico della funzione $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$



Data la funzione in 2 variabili $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

- Si dice **derivata parziale rispetto a** x_1 la seguente funzione:

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = f_{x_1} = f'_{x_1}$$

  Essa rappresenta il tasso con cui varia la funzione $f(x_1, x_2)$ al variare della variabile x_1, quando sia fissato e mantenuto costante il valore della variabile x_2.

- Si dice **derivata parziale rispetto a** x_2 la seguente funzione:

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = f_{x_2} = f'_{x_2}$$

Essa rappresenta il tasso con cui varia la funzione $f(x_1, x_2)$ al variare della variabile x_2, quando sia fissato e mantenuto costante il valore della variabile x_1

- Si dice **gradiente** il vettore i cui coefficienti sono le derivate parziali della funzione $f(x_1, x_2)$ rispetto alle variabili x_1 e x_2, esso è denotato nel seguente modo:

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'_{x_1} \\ f'_{x_2} \end{pmatrix}$$

Data la funzione in 2 variabili $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x_1, x_2)$:

- Si dice **derivata parziale seconda rispetto a** x_1 e x_1 la seguente funzione:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = f_{x_1,x_1} = f'_{x_1,x_1}$$

- Si dice **derivata parziale seconda rispetto a** x_1 e x_2 la seguente funzione:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = f_{x_1,x_2} = f'_{x_1,x_2}$$

- Si dice **derivata parziale seconda rispetto a** x_2 e x_1 la seguente funzione:

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = f_{x_2,x_1} = f'_{x_2,x_1}$$

- Si dice **derivata parziale seconda rispetto a** x_2 e x_2 la seguente funzione:

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = f_{x_2,x_2} = f'_{x_2,x_2}$$

In particolare:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = f_{x_1,x_2} = f'_{x_1,x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = f_{x_2,x_1} = f'_{x_2,x_1}$$

Data la funzione in 2 variabili $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x_1, x_2)$, si dice **matrice Hessiana** la matrice quadrata delle derivate parziali:

$$H = \begin{pmatrix} f_{x_1,x_1} & f(x_1, x_2) \\ f_{x_2,x_1} & f(x_2, x_2) \end{pmatrix}$$

Condizione necessaria del primo ordine: Data la funzione in 2 variabili $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x_1, x_2)$, un punto (x_1, x_2) può essere un punto critico (minimo, massimo o sella) solo se il suo gradiente nel punto (x_1, x_2) è nullo:

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Non ne conosciamo però la natura! (Minimo? Massimo? Sella?)

Condizioni sufficienti del secondo ordine: Supponiamo che (x_1, x_2) sia un punto critico di $f(x_1, x_2)$. Calcoliamo il determinante della matrice Hessiana:

$$det(H) = f_{x_1,x_1}(x_1, x_2) \cdot f_{x_2 x_2}(x_1, x_2) - (f_{x_1,x_2}(x_1, x_2))^2$$

Abbiamo i seguenti casi:

- $det(H) > 0$:
  - $f_{x_1,x_1} > 0 \Rightarrow (x_1, x_2)$ è un minimo relativo di $f(x_1, x_2)$
  - $f_{x_1,x_1} < 0 \Rightarrow (x_1, x_2)$ è un massimo relativo di $f(x_1, x_2)$
- $det(H) < 0 \Rightarrow (x_1, x_2)$ è un punto di sella di $f(x_1, x_2)$

Data la funzione in 2 variabili $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2)$, se la sua matrice Hessiana H è tale per cui $f_{x_1,x_1} > 0$ e $det(H) > 0$ allora la funzione è **convessa**. Se la funzione è convessa, allora ogni punto di minimo e di massimo sono **globali** poiché ammette solamente un punto dove il gradiente si annulla

3 Modelli nella Ricerca Operativa

Data una funzione

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

la chiamiamo **funzione obbiettivo**. Un **problema di ottimizzazione** è formulabile come segue:

$$\begin{array}{ll} \text{opt} & f(x) \\ \text{s.a.} & x \in X \quad X \subseteq \mathbb{R}^n \end{array} \tag{1}$$