



Ricerca operativa e pianificazione delle risorse

spitfire

A.A. 2024-2025

Contents

1	Prerequisiti di Algebra Lineare	3
1.1	Matrici e vettori	3
1.2	Equazioni lineari	4
1.2.1	Metodo di eliminazione	6
1.2.2	Metodo di eliminazione di Gauss	6
2	Prerequisiti di Analisi Matematica	6
2.1	Funzioni di una variabile	6

1 Prerequisiti di Algebra Lineare

1.1 Matrici e vettori

Una matrice è una tabella contenente numeri. Se la tabella è costituita da m righe e n colonne si parla di una matrice $m \times n$. Una matrice viene detta **matrice quadrata** se il numero di righe e colonne coincidono.

Una matrice $1 \times m$ viene detto **vettore riga m-dimensionale**

Una matrice $m \times 1$ viene detto **vettore colonna m-dimensionale**.

La notazione maggiormente utilizzata per indicare una matrice è

$$A = [a_{ij}]$$

Con a_{ij} elemento generico della i -esima riga e j -esima colonna della matrice A . Se $A = [a_{ij}]$ è una matrice $m \times n$, la matrice $n \times m$

$$A^T = [a_{ij}]$$

viene detta **matrice trasposta** della matrice A .

Se $A = [a_{ik}]$ è una matrice $m \times p$ e $B = [b_{kj}]$ è una matrice $p \times n$ la loro **matrice prodotto** è $m \times n$ e definita come:

$$A \cdot B = C = [c_{ij}] \text{ con } c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Date due matrici $m \times n$, $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$, la loro **matrice somma** è definita come segue:

$$A + B = C = [c_{ij}] \text{ con } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

La **moltiplicazione** di una **matrice A per una costante** α fornisce come risultato quanto segue:

$$\alpha \cdot A = [\alpha \cdot a_{ij}]$$

Questa moltiplicazione è **commutativa**.

Siano v_1, v_2, \dots, v_n n vettori, riga o colonna; essi vengono detti **linearmente indipendenti** tra loro se, prendendo n coefficienti a_1, a_2, \dots, a_n la seguente uguaglianza

$$a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + \dots + a_n \cdot v_n = 0$$

risulta verificata solo se $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$.

Al contrario, se esistono coefficienti a_1, a_2, \dots, a_n non tutti nulli per cui

$$a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + \dots + a_n \cdot v_n = 0$$

i vettori v_1, v_2, \dots, v_n sono detti **linearmente dipendenti**.

Un insieme di n vettori ad n dimensioni linearmente indipendenti costituisce una **base per uno spazio a n dimensioni**. Se un insieme di vettori v_1, v_2, \dots, v_n costituisce una base per uno spazio ad n dimensioni, allora ogni vettore x che appartiene a quello spazio è **combinazione lineare dei vettori della base**.

Una matrice quadrata $m \times m$ si dice **matrice singolare** se l'insieme degli m vettori riga

(o colonna), ottenuti considerando ogni riga (o colonna) come un vettore, è **linearmente dipendenti**. Se, viceversa, l'insieme degli m vettori è linearmente indipendente, la matrice si dice **matrice non singolare**.

Una matrice quadrata $A = [a_{ij}]$ con $a_{ij} = 0$ per ogni $i \neq j$ viene detta **matrice diagonale**.

La matrice diagonale $A = [a_{ij}]$, con $a_{ii} = 1$ per ogni i viene detta **matrice identità**, solitamente indicata con I . Se A NON è una matrice singolare, allora esiste una matrice A^{-1} detta **matrice inversa** della matrice A , tale per cui vale la seguente relazione di uguaglianza:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

Il **determinante** di una matrice quadrata A si indica con $\det(A)$ ed è un numero (esiste solo per matrici quadrate), nel caso specifico di una matrice 2×2 si definisce come segue:

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Il determinante di una matrice quadrata A $m \times m$ si ottiene utilizzando la seguente regola ricorsiva, detta **formula di Laplace**: Se A_{ij} è la matrice $(m-1) \times (m-1)$, ottenuta togliendo la i -esima riga e la j -esima colonna di A , il determinante di A risulta:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^m (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij}) \quad (\text{formula per righe})$$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^m (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij}) \quad (\text{formula per colonne})$$

Se la matrice è singolare, allora $\det(A) = 0$.

Una matrice quadrata A ammette inversa se e solo se non è singolare.

1.2 Equazioni lineari

Un' **equazione lineare** nelle variabili x_1, x_2, \dots, x_n è un'equazione nella seguente forma:

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots + a_n \cdot x_n = b$$

dove a_1, a_2, \dots, a_n e b sono delle costanti. Si dice **soluzione dell'equazione** un qualsiasi vettore $|y_1, y_2, \dots, y_n| \in \mathbb{R}^n$ tale che:

$$a_1 \cdot y_1 + a_2 \cdot y_2 + \dots + a_n \cdot y_n = b$$

Un **sistema di m equazioni lineari in n variabili** è definito come segue:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{cases}$$

dove a_{ij} e b_j , $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, m$ sono costanti. Una **soluzione del sistema lineare** è un qualsiasi vettore $|y_1, y_2, \dots, y_n| \in \mathbb{R}^n$ tale che le m equazioni del sistema

lineare siano contemporaneamente soddisfatte. Trovare le soluzioni del sistema lineare equivale a individuare il punto di intersezione tra le sue equazioni, ammesso che un tale punto esista.

Un sistema di equazioni lineari può essere:

- **Consistente:** se ammette almeno una soluzione, in caso contrario viene detto **inconsistente**
- **Determinato:** se costituito da un numero di equazioni uguale al numero di incognite $m = n$. Un tale sistema ha **una sola soluzione**
- **Sovradeterminato:** se costituito da più equazione che incognite $m > n$. Un tale sistema è spesso, ma non sempre, inconsistente
- **Sottodeterminato:** se costituito da meno equazioni che incognite $m < n$. Un tale sistema ammette infinite soluzioni

Consideriamo la forma matriciale del sistema costituito da m equazioni lineari in n incognite

$$A \cdot x = b$$

dove

- A è una matrice $m \times n$ (nota)
- x è un vettore colonna in n dimensioni (incognito)
- b è un vettore colonna in m dimensioni (noto)

Si definisce **rango della matrice A** come segue:

- **Rango di riga:** numero massimo di righe linearmente indipendenti
- **Rango di colonna:** numero massimo di colonne linearmente indipendenti

Se *rango di riga* = *rango di colonna* allora $rk(A) \leq \min(m, n)$

Se $rk(A) = \min(m, n)$, allora la matrice A viene detta **a rango pieno**.

Data la matrice dei coefficienti A , si dice **matrice aumentata** la matrice $C = A, b$ ottenuta dalla matrice A aggiungendo come colonna aggiuntiva il vettore dei termini noti b . Avremo quanto segue:

- $rk(C) > rk(A)$: Il sistema lineare non ammette soluzione
- $rk(C) = rk(A)$: il sistema lineare ammette soluzione

Assumiamo $rk(C) = rk(A)$, allora:

- Caso $m \geq n$
 - Se $rk(A) = n$, allora il sistema ha una soluzione unica
 - Se $rk(A) < n$, allora il sistema ha infinite soluzioni
- Caso $m < n$
 - Se $rk(A) \leq m$, allora il sistema ha infinite soluzioni

Come si risolve un sistema di equazioni lineari? Abbiamo due metodi:

1.2.1 Metodo di eliminazione

Procediamo come segue:

1. Selezionare una variabile, e risolvere una delle equazioni rispetto ad essa e eliminare la variabile in questione dalle altre equazioni
2. Tralasciare l'equazione utilizzata nel passo di eliminazione e tornare al passo 1)
3. Applicare il processo di **Back-walk substitution**: dall'ultima equazione, tornare indietro e risolvere le restanti

1.2.2 Metodo di eliminazione di Gauss

Il metodo di eliminazione di Gauss è un metodo di eliminazione che utilizza solo le operazioni elementari su matrici, cioè:

- Moltiplicare una riga per uno scalare non nullo
- Sommare una riga moltiplicata per uno scalare non nullo con un'altra riga
- Permutare le righe

Teorema 1.2.1 *Applicare operazioni elementari a un sistema di equazioni lineari non cambia l'insieme delle sue soluzioni.*

2 Prerequisiti di Analisi Matematica

2.1 Funzioni di una variabile

Si dice **funzione** una terna (A, B, f) con:

- A, B due insiemi non vuoti
- f una legge che ad ogni elemento $x \in A$ associa uno ed uno solo elemento $f(x) \in B$

dove:

- A è detto dominio della funzione f , anche indicato con $\text{dom}(f)$
- B è detto codominio della funzione f
- Scriviamo $f : A \rightarrow B$ e $x \in \text{dom}(f) \rightarrow f(x)$, per indicare la legge che alla variabile indipendente x associa la sua immagine $f(x)$

Data una funzione $f : A \rightarrow B$, se esiste, finito o meno, il limite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

esso viene chiamato **derivata della funzione f nel punto x_0** e viene indicato con

$$f'(x_0) = \frac{d}{dx} f(x_0)$$

Se $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, allora f si dice derivabile in x_0 .

Riportiamo le derivate elementari:

- Se $f(x) = c, \forall x \in \mathbb{R}$ allora $f'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$
- Se $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ allora $f'(x) = n \cdot x^{n-1}, \forall x \in \mathbb{R}$
- Se $f(x) = \frac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{R}^+$ allora $f'(x) = -\frac{1}{x^2}, \forall x \in \mathbb{R}^+$
- Se $f(x) = \log(x), x \in \mathbb{R}^+$ allora $f'(x) = \frac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{R}^+$

Data una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, allora

- f derivabile in $x_0 \Rightarrow f$ continua in x_0
- f continua in $x_0 \not\Rightarrow f$ derivabile in x_0

Se $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sono derivabili in $x_0 \in \mathbb{R}$, allora

- $\forall c \in \mathbb{R}$, la funzione $c \cdot f$ è derivabile in x_0 e $(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$
- La funzione $f + g$ è derivabile in x_0 e $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

Se $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sono derivabili in $x_0 \in \mathbb{R}$, allora anche la funzione $f \cdot g$ è derivabile in x_0 e si ha quanto segue

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

Date due funzioni $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, con f derivabile in $x_0 \in \mathbb{R}$ e g derivabile in $f(x_0)$, allora $g \circ f$ è derivabile in x_0 e si ha quanto segue:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

La derivata della **derivata prima** f' in $x_0 \in \mathbb{R}$ viene detta **derivata seconda** e indicata come $f''(x_0)$