



# Ricerca operativa e pianificazione delle risorse

spitfire

A.A. 2024-2025

# Contents

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Prerequisiti di Algebra Lineare</b>                               | <b>3</b>  |
| 1.1      | Matrici e vettori . . . . .  | 3         |
| 1.2      | Equazioni lineari . . . . .  | 4         |
| 1.2.1    | Metodo di eliminazione . . . . .                                     | 6         |
| 1.2.2    | Metodo di eliminazione di Gauss . . . . .                            | 6         |
| <b>2</b> | <b>Prerequisiti di Analisi Matematica</b>                            | <b>6</b>  |
| 2.1      | Funzioni di una variabile . . . . .                                  | 6         |
| 2.2      | Funzioni in due o più variabili . . . . .                            | 9         |
| <b>3</b> | <b>Modelli nella Ricerca Operativa</b>                               | <b>12</b> |
| 3.1      | Programmazione matematica . . . . .                                  | 13        |
| 3.2      | Ottimi globali e ottimi locali . . . . .                             | 14        |
| <b>4</b> | <b>Programmazione lineare</b>  | <b>15</b> |
| 4.1      | Assunzione di Proporzionalità . . . . .                              | 16        |
| 4.2      | Assunzione di additività . . . . .                                   | 17        |
| 4.3      | Assunzione di continuità . . . . .                                   | 17        |
| 4.4      | Assunzione di certezza . . . . .                                     | 17        |
| 4.5      | Soluzione grafica ad un problema di programmazione lineare . . . . . | 17        |
| 4.5.1    | Vincolo di uguaglianza . . . . .                                     | 17        |
| 4.5.2    | Vincoli funzionali di $\leq$ . . . . .                               | 18        |
| 4.5.3    | Vincoli funzionali di $\geq$ e $=$ . . . . .                         | 19        |
| 4.5.4    | Regione ammissibile . . . . .  | 19        |
| 4.6      | Minimum cost flow problem . . . . .                                  | 22        |
| 4.7      | Metodo del simplesso . . . . .                                       | 23        |
| 4.8      | Procedura algebrica per il metodo del simplesso . . . . .            | 26        |
| 4.8.1    | Variabili di base e non . . . . .                                    | 27        |
| 4.8.2    | Algoritmo del metodo del simplesso in forma algebrica . . . . .      | 28        |

# 1 Prerequisiti di Algebra Lineare

## 1.1 Matrici e vettori

Una matrice è una tabella contenente numeri. Se la tabella è costituita da  $m$  righe e  $n$  colonne si parla di una matrice  $m \times n$ . Una matrice viene detta **matrice quadrata** se il numero di righe e colonne coincidono.

Una matrice  $1 \times m$  viene detta **vettore riga m-dimensionale**

Una matrice  $m \times 1$  viene detta **vettore colonna m-dimensionale**.

La notazione maggiormente utilizzata per indicare una matrice è

$$A = [a_{ij}]$$

Con  $a_{ij}$  elemento generico della  $i$ -esima riga e  $j$ -esima colonna della matrice  $A$ . Se  $A = [a_{ij}]$  è una matrice  $m \times n$ , la matrice  $n \times m$

$$A^T = [a_{ij}]$$

viene detta **matrice trasposta** della matrice  $A$ .

Se  $A = [a_{ik}]$  è una matrice  $m \times p$  e  $B = [b_{kj}]$  è una matrice  $p \times n$  la loro **matrice prodotto** è  $m \times n$  e definita come:

$$A \cdot B = C = [c_{ij}] \text{ con } c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Date due matrici  $m \times n$ ,  $A = [a_{ij}]$  e  $B = [b_{ij}]$ , la loro **matrice somma** è definita come segue:

$$A + B = C = [c_{ij}] \text{ con } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

La **moltiplicazione** di una **matrice A per una costante**  $\alpha$  fornisce come risultato quanto segue:

$$\alpha \cdot A = [\alpha \cdot a_{ij}]$$

Questa moltiplicazione è **commutativa**.

Siano  $v_1, v_2, \dots, v_n$   $n$  vettori, riga o colonna; essi vengono detti **linearmente indipendenti** tra loro se, prendendo  $n$  coefficienti  $a_1, a_2, \dots, a_n$  la seguente uguaglianza

$$a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + \dots + a_n \cdot v_n = 0$$

risulta verificata solo se  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ .

Al contrario, se esistono coefficienti  $a_1, a_2, \dots, a_n$  non tutti nulli per cui

$$a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + \dots + a_n \cdot v_n = 0$$

i vettori  $v_1, v_2, \dots, v_n$  sono detti **linearmente dipendenti**.

Un insieme di  $n$  vettori ad  $n$  dimensioni linearmente indipendenti costituisce una **base per uno spazio a n dimensioni**. Se un insieme di vettori  $v_1, v_2, \dots, v_n$  costituisce una base per uno spazio ad  $n$  dimensioni, allora ogni vettore  $x$  che appartiene a quello spazio è **combinazione lineare dei vettori della base**.

Una matrice quadrata  $m \times m$  si dice **matrice singolare** se l'insieme degli  $m$  vettori riga

(o colonna), ottenuti considerando ogni riga (o colonna) come un vettore, è **linearmente dipendenti**. Se, viceversa, l'insieme degli  $m$  vettori è linearmente indipendente, la matrice si dice **matrice non singolare**.

Una matrice quadrata  $A = [a_{ij}]$  con  $a_{ij} = 0$  per ogni  $i \neq j$  viene detta **matrice diagonale**.

La matrice diagonale  $A = [a_{ij}]$ , con  $a_{ii} = 1$  per ogni  $i$  viene detta **matrice identità**, solitamente indicata con  $I$ . Se  $A$  NON è una matrice singolare, allora esiste una matrice  $A^{-1}$  detta **matrice inversa** della matrice  $A$ , tale per cui vale la seguente relazione di uguaglianza:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

Il **determinante** di una matrice quadrata  $A$  si indica con  $\det(A)$  ed è un numero (esiste solo per matrici quadrate), nel caso specifico di una matrice  $2 \times 2$  si definisce come segue:

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Il determinante di una matrice quadrata  $A$   $m \times m$  si ottiene utilizzando la seguente regola ricorsiva, detta **formula di Laplace**: Se  $A_{ij}$  è la matrice  $(m-1) \times (m-1)$ , ottenuta togliendo la  $i$ -esima riga e la  $j$ -esima colonna di  $A$ , il determinante di  $A$  risulta:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^m (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij}) \quad (formula \text{ per righe})$$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^m (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij}) \quad (formula \text{ per colonne})$$

Se la matrice è singolare, allora  $\det(A) = 0$ .

Una matrice quadrata  $A$  ammette inversa se e solo se non è singolare.

## 1.2 Equazioni lineari

Un' **equazione lineare** nelle variabili  $x_1, x_2, \dots, x_n$  è un'equazione nella seguente forma:

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots + a_n \cdot x_n = b$$

dove  $a_1, a_2, \dots, a_n$  e  $b$  sono delle costanti. Si dice **soluzione dell'equazione** un qualsiasi vettore  $|y_1, y_2, \dots, y_n| \in \mathbb{R}^n$  tale che:

$$a_1 \cdot y_1 + a_2 \cdot y_2 + \dots + a_n \cdot y_n = b$$

Un **sistema di m equazioni lineari in n variabili** è definito come segue:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{cases}$$

dove  $a_{ij}$  e  $b_j$ ,  $i = 1, \dots, n$ ;  $j = 1, \dots, m$  sono costanti. Una **soluzione del sistema lineare** è un qualsiasi vettore  $|y_1, y_2, \dots, y_n| \in \mathbb{R}^n$  tale che le  $m$  equazioni del sistema

lineare siano contemporaneamente soddisfatte. Trovare le soluzioni del sistema lineare equivale a individuare il punto di intersezione tra le sue equazioni, ammesso che un tale punto esista.

Un sistema di equazioni lineari può essere:

- **Consistente:** se ammette almeno una soluzione, in caso contrario viene detto **inconsistente**
- **Determinato:** se costituito da un numero di equazioni uguale al numero di incognite  $m = n$ . Un tale sistema ha **una sola soluzione**
- **Sovradeterminato:** se costituito da più equazione che incognite  $m > n$ . Un tale sistema è spesso, ma non sempre, inconsistente
- **Sottodeterminato:** se costituito da meno equazioni che incognite  $m < n$ . Un tale sistema ammette infinite soluzioni

Consideriamo la forma matriciale del sistema costituito da  $m$  equazioni lineari in  $n$  incognite

$$A \cdot x = b$$

dove

- $A$  è una matrice  $m \times n$  (nota)
- $x$  è un vettore colonna in  $n$  dimensioni (incognito)
- $b$  è un vettore colonna in  $m$  dimensioni (noto)

Si definisce **rango della matrice  $A$**  come segue:

- **Rango di riga:** numero massimo di righe linearmente indipendenti
- **Rango di colonna:** numero massimo di colonne linearmente indipendenti

Se *rango di riga* = *rango di colonna* allora  $rk(A) \leq \min(m, n)$

Se  $rk(A) = \min(m, n)$ , allora la matrice  $A$  viene detta **a rango pieno**.

Data la matrice dei coefficienti  $A$ , si dice **matrice aumentata** la matrice  $C = A, b$  ottenuta dalla matrice  $A$  aggiungendo come colonna aggiuntiva il vettore dei termini noti  $b$ . Avremo quanto segue:

- $rk(C) > rk(A)$ : Il sistema lineare non ammette soluzione
- $rk(C) = rk(A)$ : il sistema lineare ammette soluzione

Assumiamo  $rk(C) = rk(A)$ , allora:

- Caso  $m \geq n$ 
  - Se  $rk(A) = n$ , allora il sistema ha una soluzione unica
  - Se  $rk(A) < n$ , allora il sistema ha infinite soluzioni
- Caso  $m < n$ 
  - Se  $rk(A) \leq m$ , allora il sistema ha infinite soluzioni

Come si risolve un sistema di equazioni lineari? Abbiamo due metodi:

### 1.2.1 Metodo di eliminazione

Procediamo come segue:

1. Selezionare una variabile, e risolvere una delle equazioni rispetto ad essa e eliminare la variabile in questione dalle altre equazioni
2. Tralasciare l'equazione utilizzata nel passo di eliminazione e tornare al passo 1)
3. Applicare il processo di **Back-walk substitution**: dall'ultima equazione, tornare indietro e risolvere le restanti

### 1.2.2 Metodo di eliminazione di Gauss

Il metodo di eliminazione di Gauss è un metodo di eliminazione che utilizza solo le operazioni elementari su matrici, cioè:

- Moltiplicare una riga per uno scalare non nullo
- Sommare una riga moltiplicata per uno scalare non nullo con un'altra riga
- Permutare le righe

**Teorema 1.2.1** *Applicare operazioni elementari a un sistema di equazioni lineari non cambia l'insieme delle sue soluzioni.*

## 2 Prerequisiti di Analisi Matematica

### 2.1 Funzioni di una variabile

Si dice **funzione** una terna  $(A, B, f)$  con:

- $A, B$  due insiemi non vuoti
- $f$  una legge che ad ogni elemento  $x \in A$  associa uno ed uno solo elemento  $f(x) \in B$

dove:

- $A$  è detto dominio della funzione  $f$ , anche indicato con  $\text{dom}(f)$
- $B$  è detto codominio della funzione  $f$
- Scriviamo  $f : A \rightarrow B$  e  $x \in \text{dom}(f) \rightarrow f(x)$ , per indicare la legge che alla variabile indipendente  $x$  associa la sua immagine  $f(x)$

Data una funzione  $f : A \rightarrow B$ , se esiste, finito o meno, il limite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

esso viene chiamato **derivata della funzione  $f$  nel punto  $x_0$**  e viene indicato con

$$f'(x_0) = \frac{d}{dx} f(x_0)$$

Se  $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ , allora  $f$  si dice derivabile in  $x_0$ .

Riportiamo le derivate elementari:

- Se  $f(x) = c, \forall x \in \mathbb{R}$  allora  $f'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$
- Se  $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$  allora  $f'(x) = n \cdot x^{n-1}, \forall x \in \mathbb{R}$
- Se  $f(x) = \frac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{R}^+$  allora  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}, \forall x \in \mathbb{R}^+$
- Se  $f(x) = \log(x), x \in \mathbb{R}^+$  allora  $f'(x) = \frac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{R}^+$

Data una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e un punto  $x_0 \in \mathbb{R}$ , allora

- $f$  derivabile in  $x_0 \Rightarrow f$  continua in  $x_0$
- $f$  continua in  $x_0 \not\Rightarrow f$  derivabile in  $x_0$

Se  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sono derivabili in  $x_0 \in \mathbb{R}$ , allora

- $\forall c \in \mathbb{R}$ , la funzione  $c \cdot f$  è derivabile in  $x_0$  e  $(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$
- La funzione  $f + g$  è derivabile in  $x_0$  e  $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

Se  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sono derivabili in  $x_0 \in \mathbb{R}$ , allora anche la funzione  $f \cdot g$  è derivabile in  $x_0$  e si ha quanto segue

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

Date due funzioni  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $f$  derivabile in  $x_0 \in \mathbb{R}$  e  $g$  derivabile in  $f(x_0)$ , allora  $g \circ f$  è derivabile in  $x_0$  e si ha quanto segue:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

La derivata della **derivata prima**  $f'$  in  $x_0 \in \mathbb{R}$  viene detta **derivata seconda** e indicata come  $f''(x_0)$ .

La derivata è il **coefficiente angolare** della retta tangente alla funzione nel punto di derivazione  $x_0$ .

Data una funzione  $f(x)$  definita su un intervallo chiuso  $[a, b]$  diremo che la funzione è:

- **Crescente**: nell'intervallo  $[a, b]$  quando per ogni coppia di punti  $x_1, x_2 \in [a, b]$  con  $x_1 < x_2$  risulta che  $f(x_1) < f(x_2)$
- **Decrescente**: nell'intervallo  $[a, b]$  quando per ogni coppia di punti  $x_1, x_2 \in [a, b]$  con  $x_1 < x_2$  risulta che  $f(x_1) > f(x_2)$

Per determinare se la funzione  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sia crescente o decrescente in un punto  $x_0 \in [a, b]$  è possibile ricorrere alla valutazione della sua derivata nel punto  $x_0$ , infatti:

- Se  $f'(x_0) > 0$  allora è crescente nel punto considerato  $x_0$
- Se  $f'(x_0) < 0$  allora la funzione è decrescente nel punto considerato  $x_0$

Una funzione  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  si dice **convessa** se  $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$  con  $x_1 < x_2$  vale la seguente relazione

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) \quad \forall x \in [a, b]$$

**strettamente convessa** se:

$$f(x) < f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) \quad \forall x \in [a, b]$$

Una funzione  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  si dice **concava** se  $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$  con  $x_1 < x_2$  vale la seguente relazione

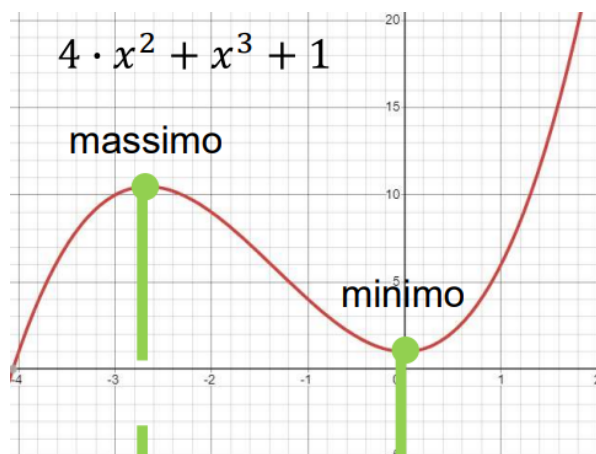
$$f(x) \geq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) \quad \forall x \in [a, b]$$

**strettamente concava** se:

$$f(x) > f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) \quad \forall x \in [a, b]$$

Data una funzione continua  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  possiamo affermare che

- Essa è crescente (decrescente) in un punto  $x \in [a, b]$  se la sua derivata prima è positiva (negativa) in  $x$
- I **punti di stazionarietà** (estremanti) della funzione sono i punti in cui la derivata prima della funzione  $f$  si annulla cambiando di segno, nello specifico si ha un punto di **massimo** in  $x \in [a, b]$  quando  $f'$  passa da un valore **positivo** a un valore **negativo**, mentre si ha un punto di **minimo** in  $x \in [a, b]$  quando  $f'$  passa da un valore *negativo* a un valore *positivo*
- È detta **lineare** se la sua **derivata prima è una funzione costante**



Data una funzione continua  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  e un punto  $x_0 \in [a, b]$ , si dice che  $f$  ha un minimo o massimo locale (o relativo) nel punto  $x_0$  quando esiste un intorno  $I(x_0)$  nel quale risulta



- $f(x) \geq f(x_0) \forall x \in l(x_0)$  allora  $x_0$  è un **minimo locale**
- $f(x) \leq f(x_0) \forall x \in l(x_0)$  allora  $x_0$  è un **massimo locale**
- $x_0$  è un **minimo locale relativo** se la funzione è decrescente immediatamente a sinistra di  $x_0$  e crescente immediatamente a destra
- $x_0$  è un **massimo locale relativo** se la funzione è crescente immediatamente a sinistra di  $x_0$  e decrescente immediatamente a destra

Il punto minimo (massimo) locale in cui la funzione  $f$  assume il valore minimo (massimo) viene detto **minimo (massimo) globale o assoluto**.

## 2.2 Funzioni in due o più variabili

Una funzione continua definita come  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  che associa ad ogni coppia di numeri reali  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$  uno e un solo valore  $y \in \mathbb{R}$  viene detta **funzioni in due variabili**  $(x_1, x_2)$ , che vengono dette **variabili indipendenti**, mentre la variabile  $y$  viene riferita con il termine di **variabile dipendente**. Questo concetto è generalizzabile al caso in cui si considerino  $n$  variabili indipendenti  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . In questo caso si parla di funzione  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  in  $n$  variabili indipendenti, funzione che descrive una "regola" per ottenere dall'insieme delle  $n$  variabili indipendenti  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  un singolo valore reale di  $y$ .

Una funzione in  $n$  variabili  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  viene detta **funzione lineare** nelle variabili  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  se è nella forma:

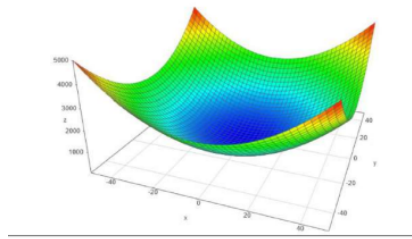
$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_0 + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots + a_n \cdot x_n$$

dove  $a_0, a_1, \dots, a_n$  sono parametri che assumono valore reale.

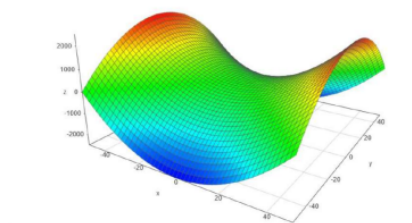
Una funzione in  $n$  variabili  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  viene detta **funzione quadratica** nelle variabili  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  se è nella forma:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_0 + \sum_{k=1}^n b_k \cdot x_k + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i, 1}^n h_{ij} \cdot x_i \cdot x_j + \sum_{k=1}^n h_{kk} \cdot x_k^2$$

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

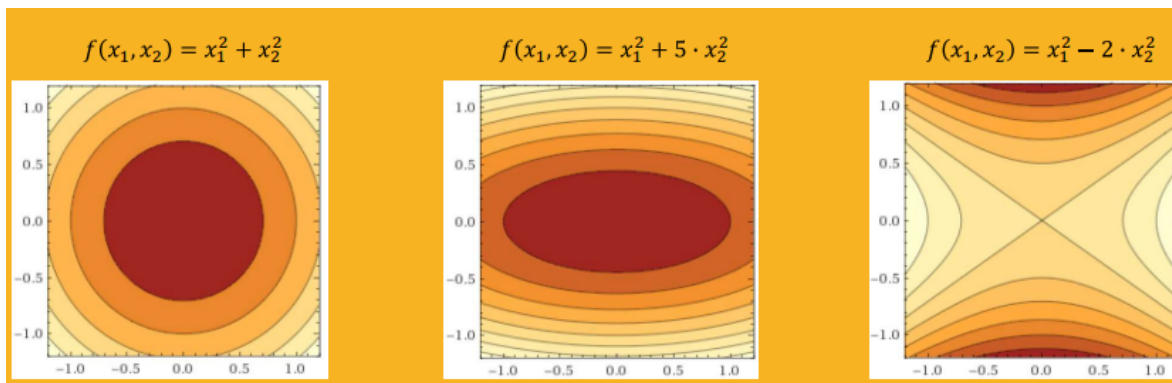


$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$$

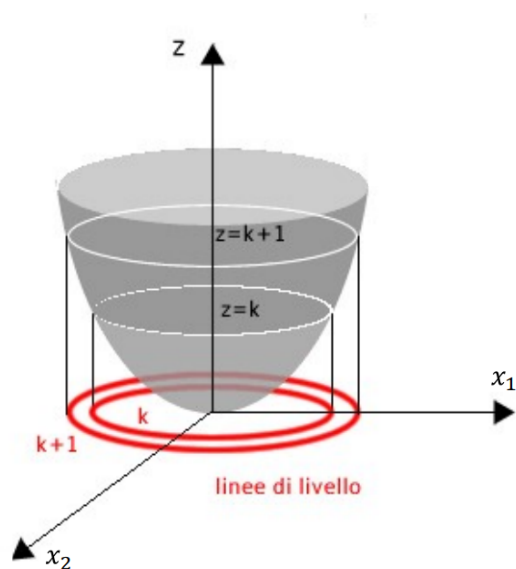


Le **curve di livello** di una funzione  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sono ottenute disegnando i punti  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  in cui la funzione ha valore costante  $k$ , vale a dire tutti i punti  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  per i quali vale la seguente uguaglianza

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = k$$



Dal punto di vista geometrico, le linee di livello sono le **proiezioni ortogonali** sul piano  $Oxy$  delle curve ottenute intersecando il piano  $z = k$  e il grafico della funzione  $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$



Data la funzione in 2 variabili  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ :

- Si dice **derivata parziale rispetto a  $x_1$**  la seguente funzione:

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = f_{x_1} = f'_{x_1}$$

Essa rappresenta il tasso con cui varia la funzione  $f(x_1, x_2)$  al variare della variabile  $x_1$ , quando sia fissato e mantenuto costante il valore della variabile  $x_2$ .

- Si dice **derivata parziale rispetto a  $x_2$**  la seguente funzione:

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = f_{x_2} = f'_{x_2}$$

Essa rappresenta il tasso con cui varia la funzione  $f(x_1, x_2)$  al variare della variabile  $x_2$ , quando sia fissato e mantenuto costante il valore della variabile  $x_1$

- Si dice **gradiente** il vettore i cui coefficienti sono le derivate parziali della funzione  $f(x_1, x_2)$  rispetto alle variabili  $x_1$  e  $x_2$ , esso è denotato nel seguente modo:

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'_{x_1} \\ f'_{x_2} \end{pmatrix}$$

Data la funzione in 2 variabili  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x_1, x_2)$ :

- Si dice **derivata parziale seconda rispetto a  $x_1$  e  $x_1$**  la seguente funzione:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = f_{x_1, x_1} = f'_{x_1, x_1}$$

- Si dice **derivata parziale seconda rispetto a  $x_1$  e  $x_2$**  la seguente funzione:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = f_{x_1, x_2} = f'_{x_1, x_2}$$

- Si dice **derivata parziale seconda rispetto a  $x_2$  e  $x_1$**  la seguente funzione:

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = f_{x_2, x_1} = f'_{x_2, x_1}$$

- Si dice **derivata parziale seconda rispetto a  $x_2$  e  $x_2$**  la seguente funzione:

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = f_{x_2, x_2} = f'_{x_2, x_2}$$

In particolare:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = f_{x_1, x_2} = f'_{x_1, x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = f_{x_2, x_1} = f'_{x_2, x_1}$$

Data la funzione in 2 variabili  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x_1, x_2)$ , si dice **matrice Hessiana** la matrice quadrata delle derivate parziali:

$$H = \begin{pmatrix} f_{x_1, x_1} & f_{x_1, x_2} \\ f_{x_2, x_1} & f_{x_2, x_2} \end{pmatrix}$$

**Condizione necessaria del primo ordine:** Data la funzione in 2 variabili  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x_1, x_2)$ , un punto  $(x_1, x_2)$  può essere un punto critico (minimo, massimo o sella) solo se il suo gradiente nel punto  $(x_1, x_2)$  è nullo:

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Non ne conosciamo però la natura! (Minimo? Massimo? Sella?)

**Condizioni sufficienti del secondo ordine:** Supponiamo che  $(x_1, x_2)$  sia un punto critico di  $f(x_1, x_2)$ . Calcoliamo il determinante della matrice Hessiana:

$$\det(H) = f_{x_1 x_1}(x_1, x_2) \cdot f_{x_2 x_2}(x_1, x_2) - (f_{x_1 x_2}(x_1, x_2))^2$$

Abbiamo i seguenti casi:

- $\det(H) > 0$ :
  - $f_{x_1 x_1} > 0 \Rightarrow (x_1, x_2)$  è un minimo relativo di  $f(x_1, x_2)$
  - $f_{x_1 x_1} < 0 \Rightarrow (x_1, x_2)$  è un massimo relativo di  $f(x_1, x_2)$
- $\det(H) < 0 \Rightarrow (x_1, x_2)$  è un punto di sella di  $f(x_1, x_2)$

Data la funzione in 2 variabili  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x_1, x_2)$ , se la sua matrice Hessiana  $H$  è tale per cui  $f_{x_1 x_1} > 0$  e  $\det(H) > 0$  allora la funzione è **convessa**. Se la funzione è convessa, allora ogni punto di minimo e di massimo sono **globali** poiché ammette solamente un punto dove il gradiente si annulla

### 3 Modelli nella Ricerca Operativa

Data una funzione

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

la chiamiamo **funzione obiettivo**. Un **problema di ottimizzazione** è formulabile come segue:

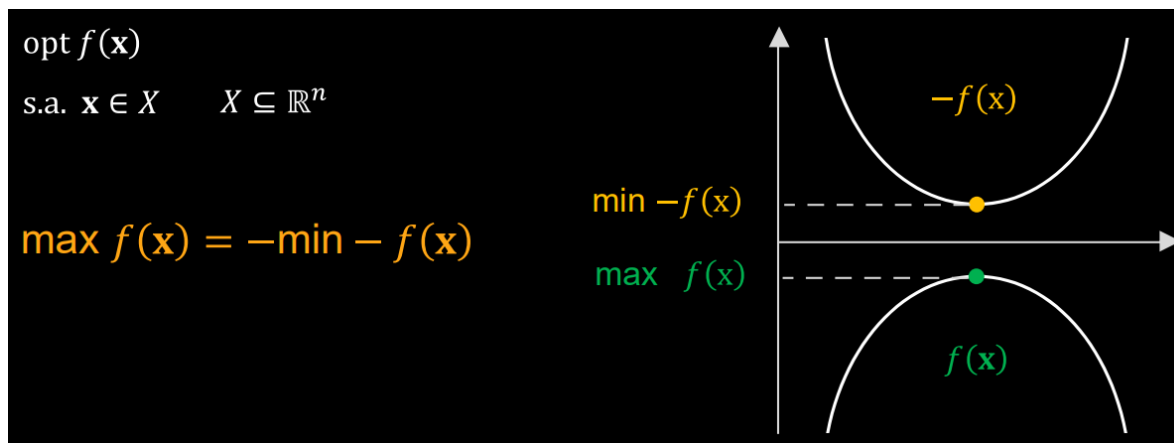
$$\begin{array}{ll} \text{opt} & f(x) \\ \text{s.a.} & x \in X \quad X \subseteq \mathbb{R}^n \end{array}$$

$X$  è detta **regione ammissibile**, cioè l'insieme delle soluzioni  $x$  ammissibili dal problema. Inoltre,  $\text{opt} \in \{\min, \max\}$ .

Se  $\text{opt} = \min$ , allora abbiamo un **problema di minimizzazione**, altrimenti un **problema di massimizzazione**.

Le variabili che indicano i vincoli ai quali è soggetto il problema sono dette **variabili decisionali** e identificano una soluzione del problema.

Quindi, un problema di ottimizzazione consiste nel determinare, se esistono, uno o più punti di minimo/massimo  $\mathbf{x}^*$ , assegnazione di valori alle variabili decisionali  $\mathbf{x}$ , della funzione obiettivo  $f$  tra i punti  $\mathbf{x}$  che appartengono alla regione ammissibile  $X$ .



In particolare, se alcune zone di  $\mathbb{R}^n$  non sono ammissibili, si dice che non sono **eleggibili**. Quando parliamo di ottimizzazione di una funzione obiettivo possiamo avere diversi tipi di ottimizzazione:

**Ottimizzazione NON vincolata:** la ricerca del/i punto/i di ottimo della funzione obiettivo viene condotta su tutto lo spazio di definizione (quindi  $X = \mathbb{R}^n$ ) della/e variabile/i di decisione

**Ottimizzazione vincolata:** la ricerca del/i punto/i di ottimo della funzione obiettivo viene condotta su un sottoinsieme proprio dello spazio di definizione (cioè  $X \subset \mathbb{R}^n$ ) della/e variabile/i di decisione

**Ottimizzazione intera:** le variabili di decisione assumono solo valori interi (quindi  $X = \mathbb{Z}^n$ )

**Ottimizzazione binaria:** Le variabili assumono solo valore 0 e 1 (quindi  $X \in \{0, 1\}^n$ )

**Ottimizzazione mista:** Alcune variabili assumono valori interi mentre altre variabili assumono solo valori binari.

Se non specificato altrimenti, si deve intendere che **le variabili decisionali assumono valori reali**.

### 3.1 Programmazione matematica

Quando l'insieme  $X$  delle soluzioni ammissibili di un problema di ottimizzazione viene espresso attraverso un sistema di equazione e disequazione, esso prende il nome di problema di **programmazione matematica** (PM). In questo caso un **vincolo** è un'espressione del tipo:

$$g_i(x) \left\{ \begin{array}{l} \geq \\ = \\ \leq \end{array} \right\} 0$$

Con  $g_i : X \rightarrow \mathbb{R}$  funzione generica che lega tra loro le variabili decisionali. In generale, possiamo avere uno o più vincoli.

La **regione ammissibile** è quindi definita dall'insieme dei vincoli del problema, cioè:

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \text{ con } g_i(x) \left\{ \begin{array}{l} \leq \\ = \\ \geq \end{array} \right\}, i = 1, \dots, m \right\}$$

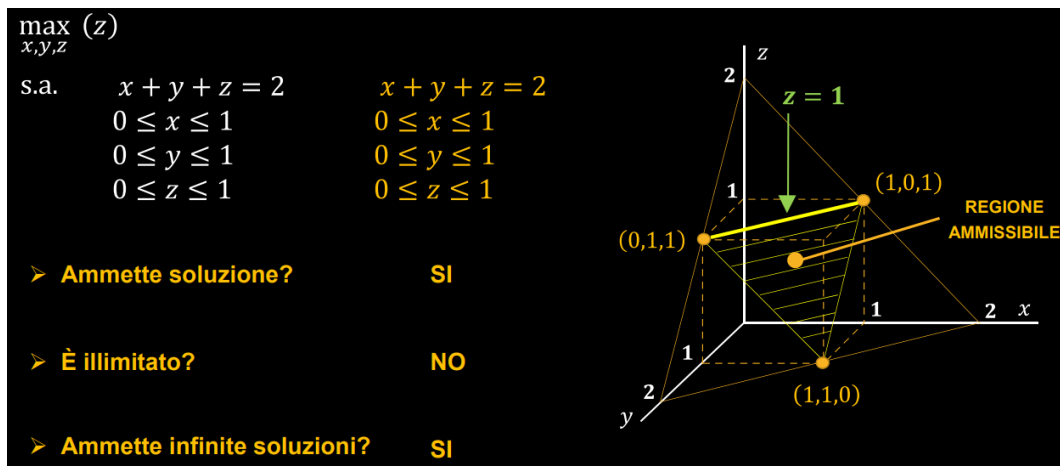
Osserviamo, quindi, che abbiamo  $m$  vincoli ed  $n$  variabili. Inoltre

- Se  $x \in X$  allora  $x$  è soluzione **ammissibile**
- Se  $x \notin X$  allora  $x$  **non è una soluzione ammissibile** (soluzione inammissibile)

In un problema di ottimizzazione, abbiamo le seguenti possibilità riguardo la regione ammissibile:

- **Problema non ammissibile:**  $X = \emptyset$  (regione ammissibile vuota, nessuna soluzione ammissibile, problema mal posto)
- **Problema illimitato**, cioè:
  - $\forall c \in \mathbb{R}, \exists x_c \in X | f(x_c) \leq c$  se  $\text{opt} = \min$  (illimitato inferiormente)
  - $\forall c \in \mathbb{R}, \exists x_c \in X | f(x_c) \geq c$  se  $\text{opt} = \max$  (illimitato superiormente)

- **Problema con soluzione ottima unica**
- **Problema con più di una soluzione ottima** (anche **infinite**): tutte le soluzioni ottime hanno egual valore della funzione obiettivo



### 3.2 Ottimi globali e ottimi locali

La risoluzione di un problema di programmazione matematica consiste nel trovare una soluzione ammissibile che sia un **ottimo globale**, vale a dire un vettore  $\mathbf{x}^* \in X$  tale che:

- $f(\mathbf{x}^*) \leq f(x) \forall x \in X$  se  $\text{opt} = \min$
- $f(\mathbf{x}^*) \geq f(x) \forall x \in X$  se  $\text{opt} = \max$

**Osservazione 3.2.1** *Un problema di ottimizzazione può avere:*

- *Più di un ottimo locale*
- *Più di un ottimo globale*

**Osservazione 3.2.2** *Un punto di ottimo globale è anche di ottimo locale*

**Osservazione 3.2.3** *Nel caso di una funzione obiettivo **convessa**, vi è un unico ottimo globale*

Anche qui abbiamo diversi casi possibili:

- **Programmazione lineare:** in questo caso ci troviamo davanti ad un problema con questa formulazione:

$$\text{opt } f(x) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \text{ (lineare)}$$

La regione ammissibile è quindi formulabile in questo modo:

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \begin{cases} \leq \\ = \\ \geq \end{cases}, i = 1, \dots, m \right\}$$

con  $g_i(x) = \mathbf{a}_j^T \mathbf{x} - b_i$  vincoli **lineari**

- **Programmazione Lineare Intera:** in questo caso ci troviamo davanti ad un problema con questa formulazione:

$$\text{opt } f(x) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \text{ (lineare)}$$

La regione ammissibile è quindi formulabile in questo modo:

$$X = \left\{ x \in \mathbb{Z}^n \mid g_i(x) \begin{cases} \leq \\ = \\ \geq \end{cases}, i = 1, \dots, m \right\}$$

con  $g_i(x) = \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} - b_i$  vincoli **lineari**

- **Programmazione non lineare:** in questo caso ci troviamo davanti ad un problema con questa formulazione:

$$\text{opt } f(x) \text{ (lineare o non lineare)}$$

La regione ammissibile è quindi formulabile in questo modo:

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \begin{cases} \leq \\ = \\ \geq \end{cases}, i = 1, \dots, m \right\}$$

con  $g_i(\mathbf{x})$  vincoli **lineari** o **non lineari**. È importante notare come, in questo caso, almeno un vincolo o la funzione obbiettivo sono NON lineari

## 4 Programmazione lineare

La programmazione lineare (PL) è quella branca della ricerca operativa che si occupa di studiare algoritmi di risoluzione per problemi di ottimizzazione lineari. Un problema di programmazione lineare è strutturato come segue:

$$\text{opt}_{\mathbf{x} \in X} Z = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j \text{ (Funzione obbiettivo } Z \text{ con } n, \text{ numero di variabili decisionali)}$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \leq b_i, i = 1, \dots, m \text{ (Vincoli : regione ammissibile } X \text{ con } m, \text{ numero di vincoli)}$$

Con:

$$\left. \begin{array}{l} x_j \text{ variabili decisionali} \\ c_j \text{ coefficienti di costo} \\ a_{ij} \text{ termini noti sinistri} \\ b_i \text{ termini noti destri} \end{array} \right\} \text{ Parametri}$$

Un problema di programmazione lineare si poggia sulle seguenti **assunzioni implicite**:

- **Proporzionalità:** il contributo di ogni variabile decisionale, al valore della funzione obbiettivo, è proporzionale rispetto al valore assunto dalla variabile stessa
- **Additività:** ogni funzione è la somma dei contributi delle variabili decisionali
- **Continuità:** qualunque valore delle variabili decisionali in  $\mathbb{R}^n$  è accettabile
- **Certezza:** il valore assegnato ad ogni parametro è assunto essere noto o costante

Vediamole nel dettaglio:

## 4.1 Assunzione di Proporzionalità

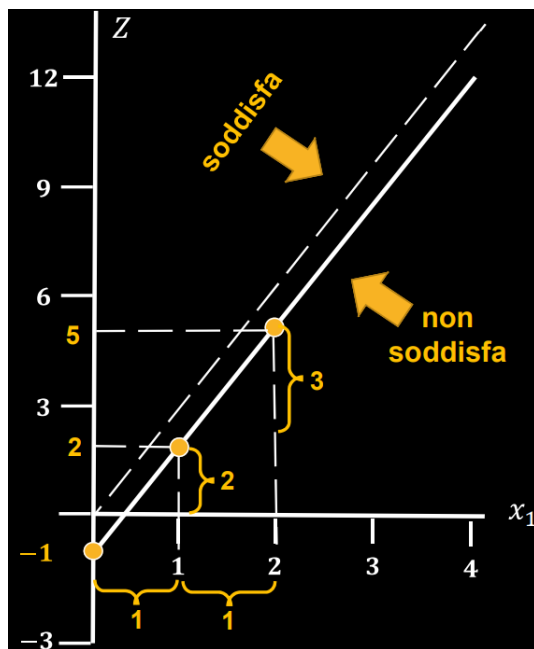
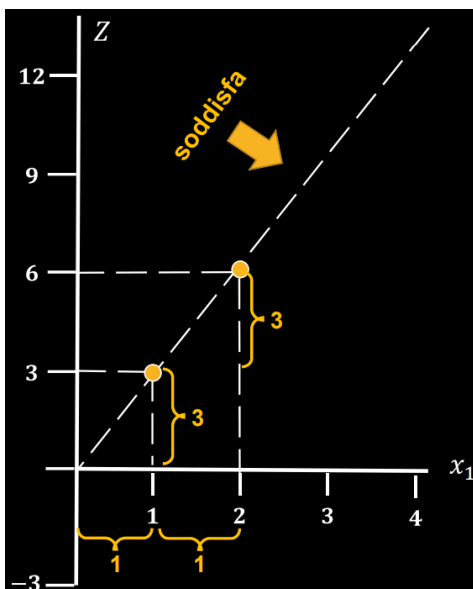
Il contributo di ogni attività al valore della **funzione obiettivo**  $Z$  è proporzionale al **livello dell'attività**  $x_j$  secondo:

$$Z = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j$$

Analogamente, il contributo di ogni attività al **vincolo "i"** è proporzionale al **livello di attività**  $x_j$  secondo

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \leq b_i$$

Vediamo un esempio:





## 4.2 Assunzione di additività

In un problema di programmazione lineare, il valore assunto da ogni funzione, sia essa **funzione obiettivo** o vincolo, è dato dalla somma dei contributi individuali delle rispettive attività. Vediamo un esempio:

|                                      |   |                       |                    |
|--------------------------------------|---|-----------------------|--------------------|
| $\max Z = 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2$ | Valore della funzione obiettivo Z                   |                       |                    |
| $x_1 \leq 4$                         | (X <sub>1</sub> ,X <sub>2</sub> )                   | Additività rispettata | Additività violata |
| $2 \cdot x_2 \leq 12$                |   |                       | Caso 1 Caso 2      |
| $3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 18$  | (1, 0)  | 3                     | 3 3                |
| $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$       | (0, 1)  | 5                     | 5 5                |
|                                      | (1, 1)  | 8                     | 9 7                |
|                                      | Caso 1: $3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2$ |                       |                    |
|                                      | Caso 2: $3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 - x_1 \cdot x_2$ |                       |                    |

## 4.3 Assunzione di continuità

Le variabili decisionali in un problema di programmazione lineare (PL) sono libere di assumere qualsiasi valore, inclusi valori non interi che soddisfino i vincoli funzionali ed i vincoli di non negatività. In altri termini le variabili decisionali sono continue. In alcune condizioni può accadere che le variabili decisionali non possano che assumere valori interi; in questi casi si parla di problema di programmazione lineare intera o a numeri interi.

## 4.4 Assunzione di certezza

Il valore assegnato ad ogni parametro di un problema di programmazione lineare è assunto essere noto con certezza e costante.

## 4.5 Soluzione grafica ad un problema di programmazione lineare

Per risolvere i problemi di programmazione lineare, possiamo adottare una **procedura grafica**, determinando i valori delle variabili decisionali  $x_1, x_2$  che rispettano i vincoli, ed al tempo stesso rendono massimo il valore  $Z$  della funzione obiettivo. La **soluzione grafica** si compone di:

- Disegno della regione ammissibile
- Determinazione dell'ottimo

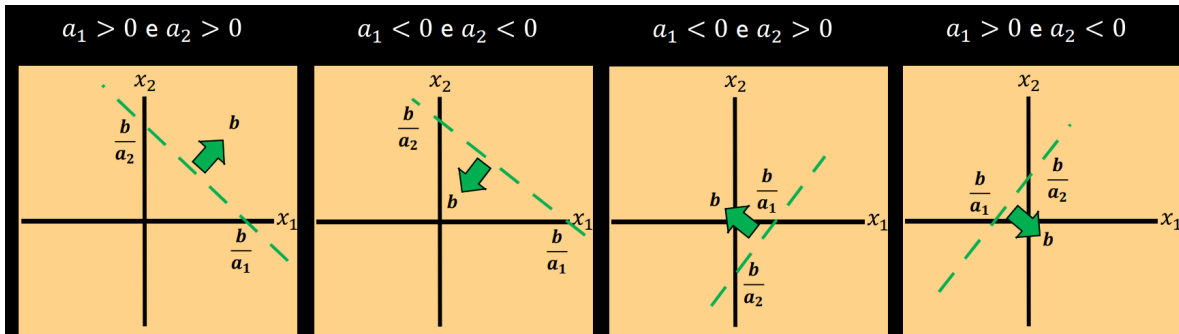
### 4.5.1 Vincolo di uguaglianza

I vincoli  $g_i(\mathbf{x})$  possono essere:

- **Rette:**  $g_i(x) = 0$

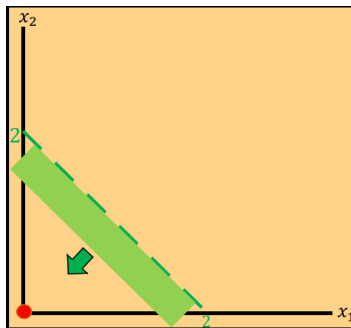
- **Semipiani:**  $g_i(x) \leq 0$

Un vincolo del tipo  $a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 = b$  è una **retta nel piano**. La retta è perpendicolare al vettore  $\nu = (a_1, a_2)$ . Abbiamo quindi i seguenti casi:



Come rappresentiamo però un semipiano?

1. Disegniamo la retta associata ( $a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 \leq b$ )
  2. Scegliamo un punto non appartenente a tale retta (torna comodo 0)
- Se il punto verifica la disuguaglianza allora scegliamo il semipiano che lo contiene
  - Altrimenti scegliamo l'altro semipiano



#### 4.5.2 Vincoli funzionali di $\leq$

In maniera generalizzata, possiamo pensare che un problema di programmazione lineare è formulato in questo modo:

$$\begin{aligned}
 \text{opt} \quad & Z = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \dots + c_n \cdot x_n \\
 \text{s.a.} \quad & a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n \leq b_1 \\
 & a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n \leq b_2 \\
 & \dots + \dots + \dots + \dots \leq \dots \\
 & a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n \leq b_m \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \dots, x_m \geq 0
 \end{aligned}$$

Con

- $Z$  funzione obbiettivo

- $$\left. \begin{array}{l} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n \leq b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n \leq b_2 \\ \dots\dots\dots + \dots\dots\dots + \dots + \dots\dots\dots \leq \dots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n \leq b_m \end{array} \right\} \text{Vincoli funzionali}$$
- $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \dots, x_m \geq 0$  vincoli di non negatività

In particolare quindi:

- $Z$  = valore della misura di prestazione
- $x_j$  = livello dell'attività  $j$
- $c_j$  = incremento del valore della misura di prestazione  $Z$  corrispondente all'incremento di un'unità del valore dell'attività  $x_j$
- $b_i$  = quantità di risorsa " $i$ " allocabile alle attività  $x_j, j = 1, \dots, n$
- $a_{ij}$  = quantità di risorsa " $i$ " consumata da ogni unità di attività  $x_j, j = 1, \dots, n$

#### 4.5.3 Vincoli funzionali di $\geq$ e $=$

Generalizzando al caso con  $n$  **variabili decisionali** ed  $m$  **vincoli**, otteniamo la seguente formulazione di un **problema di programmazione lineare**:

**Funzione obbiettivo:**  $\text{opt } Z$

**Vincoli:**

$$\begin{array}{l} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n \leq b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n \geq b_2 \\ \dots \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \dots + a_{nm} \cdot x_n \leq b_n \end{array}$$

In questo caso quindi, siamo nel caso per il quale  $x_2$  **non è vincolata** da nessun valore. Inoltre, ogni vincolo di  $\geq$  e  $=$  può essere riscritto nella seguente forma:

- $g_i(x) \geq b_i \rightarrow -g_i(x) \leq b_i$
- $g_i(x) = b_i \rightarrow \begin{cases} g_i(x) \geq b_i \\ g_i(x) \leq b_i \end{cases}$

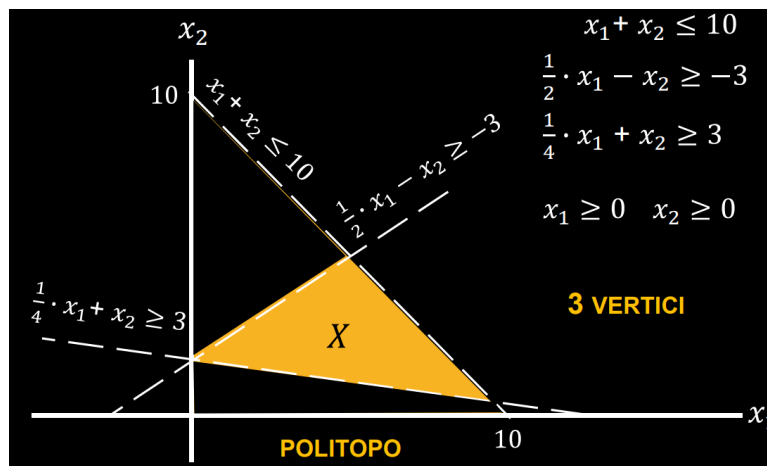
#### 4.5.4 Regione ammissibile

La regione ammissibile  $X$  è data dal soddisfacimento dei vari vincoli (Rette e semipiani):

$$X = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \left| g_i(x) = \begin{cases} \geq \\ = \\ \leq \end{cases} 0, i = 1, \dots, m \right. \right\} \text{ con } g_i(x) = \mathbf{a}_i^T \mathbf{x} - b_i$$

dove  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$

La regione ammissibile, da un punto di vista geometrico, corrisponde ad un **poliedro convesso in  $\mathbb{R}^n$** . La regione ammissibile può essere **limitata (politopo)** o illimitata



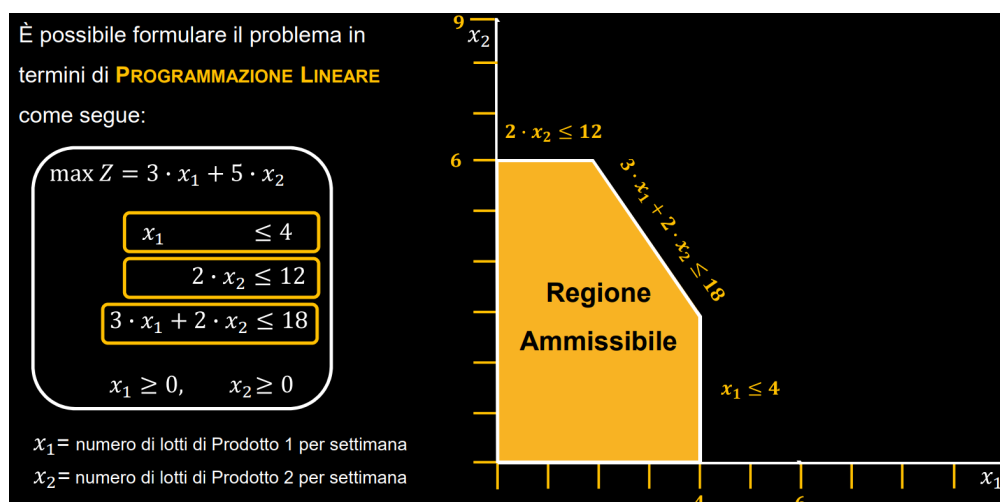
Si possono verificare quattro soluzioni:

- Il problema di programmazione lineare **ammette una sola soluzione ottima** in un **vertice del poligono convesso** che delimita la regione ammissibile.
- Il problema di programmazione lineare **ammette infinite soluzioni ottime** in un **lato del poligono convesso** che delimita la regione ammissibile se la direzione di decrescita è perpendicolare ad un lato del poligono
- Il problema di programmazione lineare **ammette infinite soluzioni** perché la regione ammissibile è illimitata e la funzione obiettivo è illimitata superiormente (se è di massimizzazione) o inferiormente (se di minimizzazione)
- Il problema di programmazione lineare **non ammette soluzione** perché la regione ammissibile è vuota

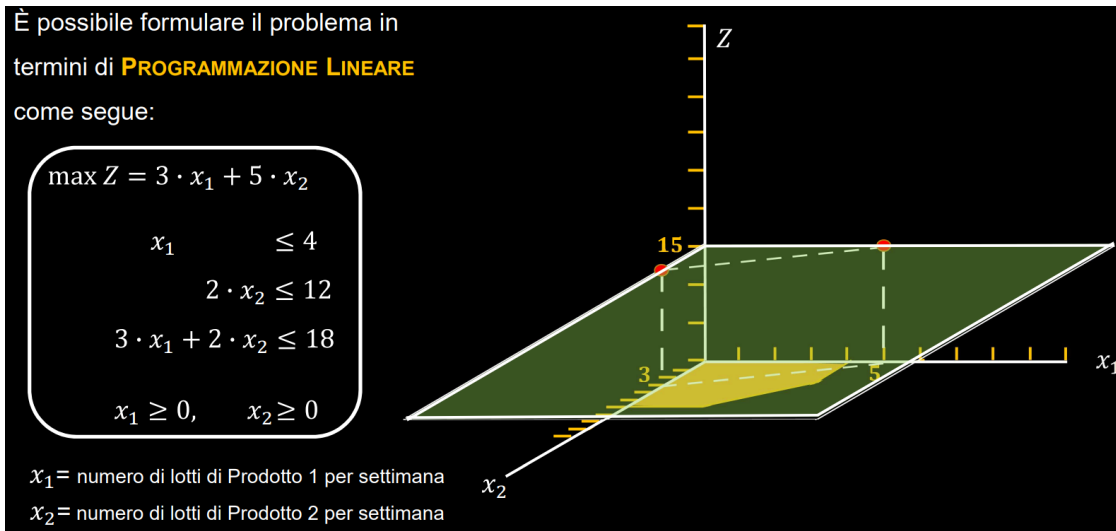
Per risolvere quindi un problema di programmazione lineare graficamente dobbiamo quindi:

1. Disegnare la regione ammissibile
2. Cercare di massimizzare (minimizzare) la soluzione, riportando ciò che troviamo sul grafico

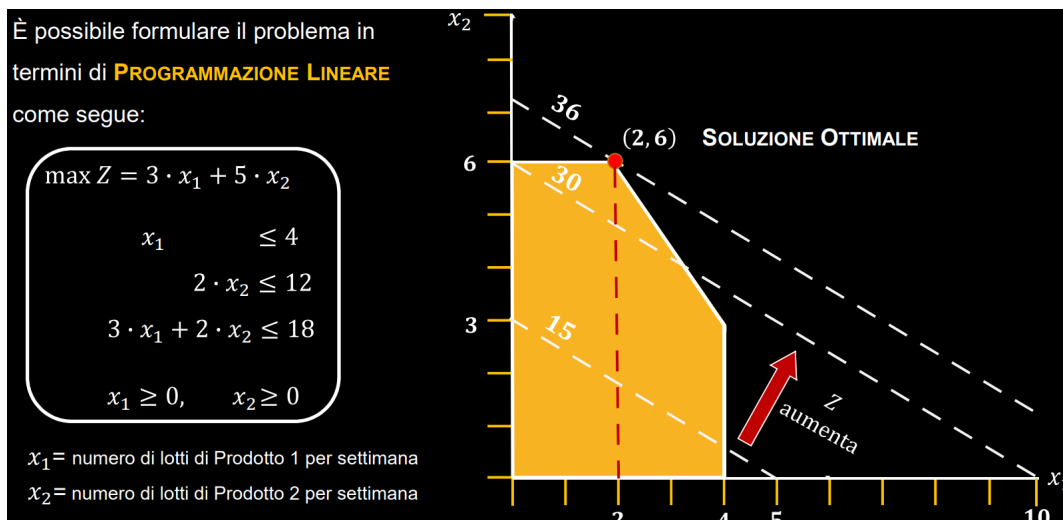
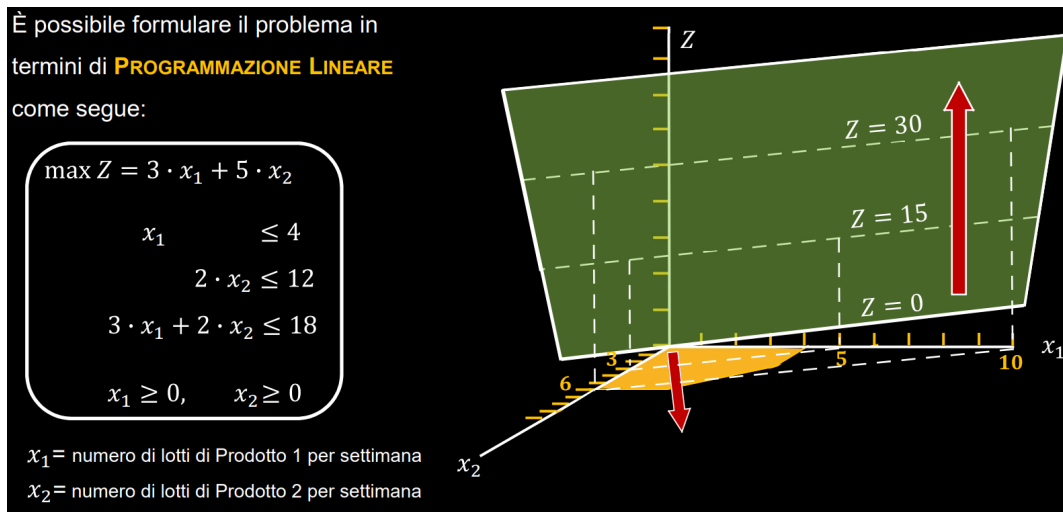
In particolare, per problemi in due variabili  $x_1$  e  $x_2$ , il punto due può essere visto come segue:



Riportiamo la regione ammissibile nel piano 3D e troviamo dei valori per  $x_1, x_2$  che diano lo stesso valore una volta sostituiti nella funzione obiettivo (nell'immagine, abbiamo che i valori  $x_1 = 0, x_2 = 5$  e  $x_1 = 3, x_2 = 0$ )

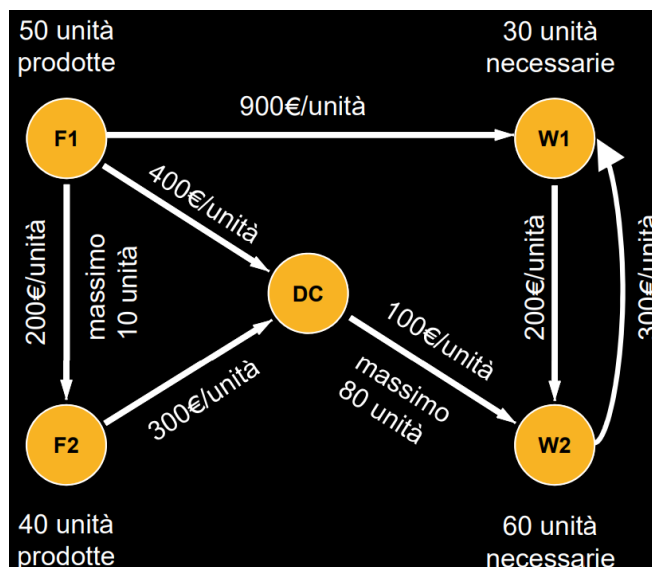


Continuando così, usiamo il piano creato dalla funzione obiettivo nello spazio 3D per capire se stiamo uscendo dalla regione ammissibile o meno:



## 4.6 Minimum cost flow problem

Supponiamo di trovarci in questa situazione: l'azienda **distribution unlimited** produrrà un nuovo prodotto in **due fabbriche differenti**, successivamente i prodotti verranno inviati a **due magazzini**, ogni fabbrica potrà spedire i propri prodotti ai due magazzini. La rete distributiva è mostrata di seguito:



Il problema consiste nel determinare quante unità di prodotto spedire dalle due fabbriche  $F1$  e  $F2$  ai due magazzini  $W1$  e  $W2$ , utilizzando anche il centro di distribuzione  $DC$ , con l'obiettivo di **minimizzare i costi di spedizione**.

Questo tipo di problema prendono il nome di **Minimum cost flow problems**. Risolviamo l'esempio come segue:

Sette corsie di spedizione richiedono sette variabili decisionali:

$$x_{F1 \rightarrow F2}, x_{F1 \rightarrow W1}, x_{F1 \rightarrow DC}$$

$$x_{F2 \rightarrow DC}$$

$$x_{DC \rightarrow W2}$$

$$x_{W1 \rightarrow W2}$$

$$x_{W2 \rightarrow W1}$$

Troviamo i seguenti vincoli:

- **Vincoli di non negatività:**

$$x_{F1 \rightarrow F2}, x_{F1 \rightarrow W1}, x_{F1 \rightarrow DC} \geq 0$$

$$x_{F2 \rightarrow DC} \geq 0$$

$$x_{DC \rightarrow W2} \geq 0$$

$$x_{W1 \rightarrow W2} \geq 0$$

$$x_{W2 \rightarrow W1} \geq 0$$

- **Vincoli di capacità massima**

$$x_{F1 \rightarrow F2} \leq 10$$

$$x_{DC \rightarrow W2} \leq 80$$

- **Vincoli di conservazione del flusso:**  $outflow - inflow = unita' necessarie$   
Questo vincolo in sostanza impone che **la somma dei flussi entranti in ogni nodo deve essere pari al flusso in uscita dal nodo medesimo**

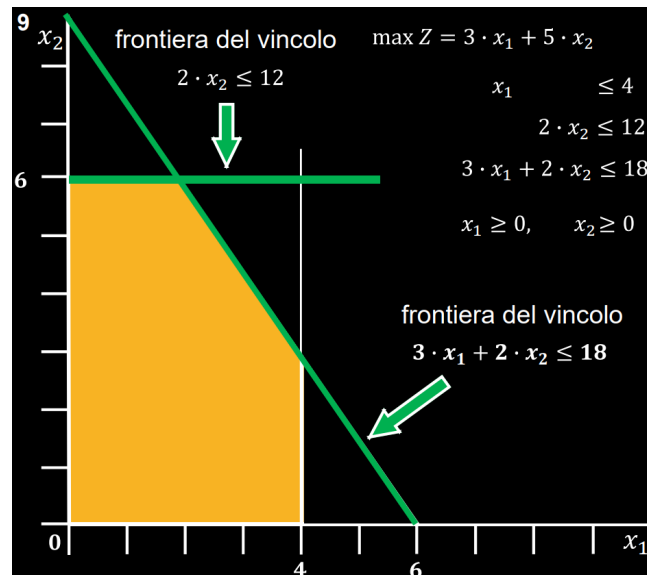
Il problema che desideriamo risolvere consiste nel determinare **quante unità di prodotto** spedire dalle due fabbriche  $F1$  e  $F2$  ai due magazzini  $W1$  e  $W2$ , utilizzando anche il **centro di distribuzione DC**, con l'obiettivo di minimizzare il costo di spedizione. Il **costo di spedizione per unità di prodotto** è indicato per ogni arco di spedizione. La funzione obiettivo è:

$$\min Z = 2 \cdot x_{F1 \rightarrow F2} + 4 \cdot x_{F1 \rightarrow DC} + 9 \cdot x_{F1 \rightarrow W1} + 3 \cdot x_{F2 \rightarrow DC} + x_{DC \rightarrow W2} + 3 \cdot x_{W1 \rightarrow W2} + 2 \cdot x_{W2 \rightarrow W1}$$

Una volta calcolati i vincoli visti sopra, possiamo risolvere il problema di programmazione lineare.

## 4.7 Metodo del simplesso

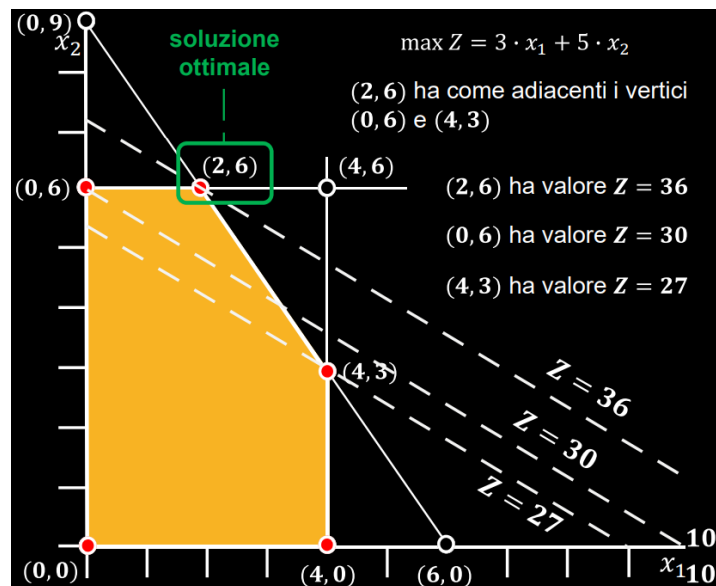
Il metodo del simplesso è un algoritmo per la risoluzione dei problemi di programmazione lineare. Nel caso medio, il tempo computazionale dell'algoritmo è **lineare rispetto al numero di variabili**. Nel caso peggiore, invece, può risultare **esponenziale**. Esso è una procedura algebrica, tuttavia i suoi concetti base hanno radici geometriche. Consideriamo la seguente regione ammissibile:



I **vertici** si trovano all'intersezione di coppie di frontiere di vincoli. Per ogni problema di programmazione lineare con  $n$  variabili decisionali, due vertici (soluzioni vertici) si dicono **adiacenti** se condividono  $n - 1$  frontiere di vincoli. Due vertici adiacenti sono collegati da un segmento che giace sull'intersezione delle frontiere dei vincoli condivisi. Questo segmento viene detto **spigolo** della regione ammissibile. **Non tutti i vertici tuttavia sono soluzioni del problema di programmazione lineare**; lo sono solamente quelli che giacciono sulla regione ammissibile. L'interesse per i vertici adiacenti sta nella seguente proprietà di cui godono:

**Test di ottimalità:** Si consideri ogni problema di programmazione lineare tale da

ammettere almeno una soluzione ottimale. Se una soluzione vertice **non ammette** soluzioni vertice a lei adiacenti con valore della funzione obiettivo  $Z$  migliore, allora la soluzione in questione è **ottimale**.



Come già detto, il metodo del simplesso è un **algoritmo** e quindi è formato da una serie di passi:

1. **Inizializzazione:** Scegliere una soluzione iniziale da cui partire; possiamo sceglierne una qualunque, quindi cerchiamo in modo che sia vantaggiosa e che non richieda molte computazioni per essere identificata
2. **Test di ottimalità:** valutiamo lo spostamento nei vertici adiacenti alla soluzione iniziale:
  - Se esiste almeno un vertice adiacente con valore della funzione obiettivo  $Z$  migliore di quello del vertice iniziale allora ci spostiamo in quel vertice, purché esso appartenga alla regione ammissibile; in caso ci siano più vertici con valore della funzione obiettivo migliore rispetto a quello iniziale, **ci spostiamo in quello che ha il valore migliore**. Ripetiamo questo passo fino a quando non troviamo vertici adiacenti con valore della funzione obiettivo migliore rispetto al vertice in cui ci troviamo
  - Se non esiste almeno un vertice adiacente con valore della funzione obiettivo  $Z$  migliore di quello del vertice iniziale allora quel vertice è la soluzione ottimale del problema di programmazione lineare

Il metodo del simplesso si basa su **sei concetti chiave**:

- **Concetto chiave 1:** Il metodo del simplesso ispeziona solo soluzioni ammissibili corrispondenti a vertici. **Per ogni problema di PL che ammetta almeno una soluzione ottimale, trovarne una, richiede di trovare solamente il vertice ammissibile cui compete il miglior valore della funzione obiettivo** (La sola restrizione è che il problema possieda vertici ammissibili. Ciò è garantito dal fatto che la regione ammissibile sia limitata). Dato che il numero di soluzioni



ammissibili è generalmente infinito, ridurre il numero di soluzioni da ispezionare ad un numero finito e piccolo è una semplificazione notevole.

- **Concetto chiave 2:** Il metodo del simplesso è un algoritmo iterativo con la seguente struttura:
  1. **Inizializzazione:** scelta di una soluzione
  2. **Test di ottimalità:** la soluzione è ottimale?
    - **NO:** torna ad 1) per trovare una soluzione migliore di quella corrente
    - **SI:** termina l'algoritmo
- **Concetto chiave 3:** Quando sia possibile, l'inizializzazione del metodo del simplesso seleziona l'origine (i valori di tutte le variabili di decisione vengono posti uguali a 0) come soluzione iniziale. **Se vi sono molte variabili decisionali, tali da rendere difficile usare il metodo grafico per scegliere la soluzione iniziale, scegliere l'origine evita di ricorrere a procedure algebriche per determinare la soluzione iniziale del metodo del simplesso**(La soluzione nulla potrebbe però essere una soluzione non ammissibile. Se questo accade, vengono usate procedure specifiche per la scelta della soluzione iniziale)
- **Concetto chiave 4:** Dato un vertice, è più vantaggioso, in termini computazionali, acquisire informazioni sui vertici a lui adiacenti di quanto non sia per i vertici a lui non adiacenti. **Ad ogni iterazione, se l'algoritmo si sposta dal vertice corrente, verso un vertice con valore migliore della funzione obiettivo, lo fa per muoversi in un vertice a lui adiacente. Nessuna altra soluzione viene considerata.** Pertanto, l'intero cammino, che partendo dalla soluzione iniziale raggiunge quella ottimale, attraversa spigoli della regione ammissibile
- **Concetto chiave 5:** A partire dal vertice corrente, il metodo del simplesso valuta i vertici ad esso adiacenti, ma non lo fa calcolando il valore della funzione obiettivo per ognuno di essi. **Il metodo del simplesso valuta e compara i tassi di miglioramento della funzione obiettivo  $Z$  lungo la direzione degli spigoli che conducono dal vertice corrente ai vertici adiacenti.** Tra i vertici adiacenti con un tasso di miglioramento positivo per la funzione obiettivo  $Z$ , il metodo del simplesso sceglie di muoversi lungo lo spigolo cui compete il massimo valore di incremento. **Il vertice selezionato diviene il nuovo vertice corrente**
- **Concetto chiave 6:** Il precedente concetto chiave descrive come il metodo del simplesso esamina gli spigoli che emanano dal vertice corrente. **L'ispezione di uno spigolo consente di identificare rapidamente il tasso di miglioramento di  $Z$  che si otterrebbe muovendosi lungo di esso verso la soluzione adiacente all'altro estremo.** Un tasso di miglioramento positivo per  $Z$  significa che il vertice adiacente è una soluzione migliore della soluzione corrente. Un tasso negativo implica che il vertice adiacente è una soluzione peggiore della soluzione corrente. **IL TEST DI OTTIMALITÀ consiste nel verificare se esiste uno spigolo con tasso positivo di miglioramento. Se tale condizione non è soddisfatta allora la soluzione corrente è ottimale**

## 4.8 Procedura algebrica per il metodo del simplesso

Fino ad ora abbiamo parlato dell'algoritmo del simplesso in termini geometrici. Comunque, l'algoritmo del simplesso usualmente viene eseguito su un calcolatore, il quale è in grado di interpretare solo istruzioni algebriche. Pertanto, è necessario **tradurre la procedura geometrica in una procedura algebrica**. La procedura algebrica si basa sulla **risoluzione di un sistema di equazioni lineari**. Pertanto il primo passo da compiere per tradurre la procedura geometrica in procedura algebrica richiede di **tradurre i vincoli funzionali di disuguaglianza in vincoli funzionali di uguaglianza**. I **vincoli di non negatività** vengono mantenuti invariati in quanto la loro **trattazione** viene effettuata in maniera **separata**. Per convertire i vincoli di disuguaglianza in vincoli di uguaglianza, bisogna introdurre il concetto di **variabile slack**.

Una **variabile slack** è una variabile che indica la **la quantità che manca al termine sinistro di una disuguaglianza affinché questa sia verificata con il segno di uguaglianza**. Facciamo un esempio:

|                                      |   |                                 |                                 |
|--------------------------------------|---|---------------------------------|---------------------------------|
| $\max Z = 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2$ | <b>VARIABILE<br/>SLACK</b>  |                                 |                                 |
| $x_1 \leq 4$                         | $x_1 \leq 4$  | $x_3 = 4 - x_1$                 | $x_1 + x_3 = 4$                 |
| $2 \cdot x_2 \leq 12$                |   |                                 |                                 |
| $3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 18$  | Assumendo che $x_1 = 0$ , la variabile <b>slack</b> $x_3$ è la quantità che manca al termine sinistro della disuguaglianza, affinché questa sia verificata con il segno di uguaglianza. |                                 |                                 |
| $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$       |   |                                 |                                 |
| Pertanto, le due equazioni           | $x_1 + x_3 = 4$<br>$x_1 \leq 4 \Rightarrow x_3 \geq 0$  |                                 |                                 |
| In definitiva, il vincolo originale  | $x_1 \leq 4$  | equivale alla coppia di vincoli | $x_1 + x_3 = 4$<br>$x_3 \geq 0$ |

Introducendo una variabile slack per ognuno dei vincoli del problema di programmazione lineare in forma originale (**forma standard**) otteniamo una formulazione equivalente detta: **Modello in forma aumentata**:

$\max Z = 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2$       **slack**

|                             |         |        |
|-----------------------------|---------|--------|
| $x_1$                       | $+ x_3$ | $= 4$  |
| $2 \cdot x_2$               | $+ x_4$ | $= 12$ |
| $3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2$ | $+ x_5$ | $= 18$ |

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$

**MODELLO IN FORMA AUMENTATA**

Se la **variabile slack di un vincolo assume valore zero**, allora la soluzione corrispondente giace sulla frontiera del vincolo della forma originale. (Il vincolo corrispondente della

forma originale è verificato come uguaglianza).

Se la **variabile slack di un vincolo assume valore positivo**, la soluzione corrispondente appartiene al semipiano ammissibile individuato dalla frontiera del vincolo della forma originale, vale a dire la soluzione appartiene alla regione ammissibile (è interna alla regione ammissibile).

Se la **variabile slack di un vincolo assume valore negativo**, la soluzione corrispondente appartiene al semipiano non ammissibile della frontiera del vincolo della forma originale, vale a dire la soluzione non appartiene alla regione ammissibile.

Si definisce **SOLUZIONE AUMENTATA**, una soluzione del modello in forma originale (valori delle variabili decisionali) che viene "aumentata" tramite i corrispondenti valori delle variabili slack

Si definisce **SOLUZIONE DI BASE** un vertice del modello in forma aumentata. Una soluzione di base può essere **ammissibile** o **non ammissibile**. Si dice **SOLUZIONE DI BASE AMMISSIBILE** una soluzione associata a un **vertice ammissibile**, che venga aumentata.

#### 4.8.1 Variabili di base e non

I termini **soluzione di base** e **soluzione di base ammissibile** sono molto importanti ed è quindi necessario chiarirne le **proprietà algebriche**: per esempio, due variabili poste a 0  $x_1 = 0$  e  $x_4 = 0$  vengono dette **variabili non di base**. Prendiamo il modello in forma aumentata sopra come esempio. La **soluzione del sistema lineare** per le 3 variabili restanti, dette **variabili di base**  $x_2 = 6, x_3 = 4, x_5 = 6$  porta alla seguente **soluzione di base**:

$$x_1 = 0, x_2 = 6, x_3 = 4, x_4 = 0, x_5 = 6$$

Il modello in forma aumentata consiste di 5 variabili (2 decisionali e 3 slack) e di 3 equazioni. Abbiamo a disposizione quindi  $2 = (5 - 3)$  **gradi di libertà** per risolvere il sistema lineare (il metodo del simplesso pone a zero il valore di due variabili, scelte arbitrariamente, per risolvere il sistema lineare).

Le **proprietà algebriche** delle **SOLUZIONI DI BASE** e delle **SOLUZIONI DI BASE AMMISSIBILI** sono descritte tramite le seguenti definizioni:

Una **SOLUZIONE DI BASE** gode delle seguenti proprietà:

1. Una variabile può essere una **VARIABILE DI BASE** o una **VARIABILE NON DI BASE**
2. IL numero delle variabili di base eguaglia il numero dei vincoli funzionali (equazioni). Pertanto, il numero delle variabili non di base eguaglia il numero totale delle variabili meno il numero dei vincoli funzionali
3. Le variabili non di base vengono poste a zero
4. I valori delle variabili di base sono ottenuti come una risoluzione simultanea del sistema di equazioni lineari (vincoli funzionali in forma aumentata). L'insieme delle variabili di base viene spesso riferito con il termine di **BASE**
5. Se le variabili di base soddisfano i vincoli di non negatività, la **SOLUZIONE DI BASE** è una **SOLUZIONE AMMISSIBILE DI BASE**

Così come certe coppie di vertici ammissibili sono tra loro adiacenti, le corrispondenti coppie di **soluzioni di base ammissibili** sono tra loro adiacenti:

Due **SOLUZIONI DI BASE AMMISSIBILI** sono adiacenti se sono caratterizzate dal condividere le stesse **VARIABILI NON DI BASE** eccetto una. Questo implica che tutte le loro **VARIABILI DI BASE** sono uguali eccetto una, anche se esse possono assumere valori differenti. Conseguentemente, muoversi dalla **SOLUZIONE DI BASE AMMISSIBILE** corrente ad una soluzione ad essa adiacente implica che una **VARIABLE NON DI BASE** divenga una **VARIABLE DI BASE** e che una **VARIABLE DI BASE** divenga una **VARIABLE NON DI BASE** (il che richiede di aggiustare i valori delle variabili di base per garantire che il sistema lineare di equazioni sia ancora soddisfatto). Sempre considerando la regione ammissibile sopra, possiamo quindi notare che:

| VERTICE AMMISSIBILE | SOLUZIONE AUMENTATA |
|---------------------|---------------------|
| (0, 0)              | (0, 0, 4, 12, 18)   |
|                     |                     |
| ADIACENTI           | ADIACENTI           |
|                     |                     |
| (0, 6)              | (0, 6, 4, 0, 6)     |

Quando si considera il problema in forma aumentata, è vantaggioso **considerare e manipolare la funzione obiettivo** insieme ai vincoli. Pertanto, prima di passare ad impiegare il metodo del simplesso, il problema deve essere riscritto in una forma equivalente che risulti adeguata. Tenendo sempre come esempio il modello in forma aumentata presente sopra, esso quindi diventa:

|   |   |
|---|---|
| $\max Z = 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2$ $x_1 + x_3 = 4$ $2 \cdot x_2 + x_4 = 12$ $3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + x_5 = 18$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$ <p>MODELLO IN FORMA AUMENTATA</p> | $\max Z$ $(0) \quad Z - 3 \cdot x_1 - 5 \cdot x_2 = 0$ $(1) \quad x_1 + x_3 = 4$ $(2) \quad 2 \cdot x_2 + x_4 = 12$ $(3) \quad 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + x_5 = 18$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$ <p>MODELLO IN FORMA AUMENTATA</p> |
|---|---|

#### 4.8.2 Algoritmo del metodo del simplesso in forma algebrica

Collegiamo l'aspetto algebrico a quello geometrico per il metodo del simplesso. L'**interpretazione geometrica** fa riferimento al **MODELLO IN FORMA STANDARD**.

L'**interpretazione algebrica** fa riferimento al **MODELLO IN FORMA AUMENTATA**.

Presentiamo quindi l'algoritmo del metodo del simplesso in forma algebrica tenendo come esempio il modello presentato sopra:

1. **INIZIALIZZAZIONE**: scegliere  $x_1$  e  $x_2$  come variabili non di base (perciò poste a valore nullo) per ottenere la soluzione iniziale di base ammissibile. Questo procedimento è giustificato dal **CONCETTO CHIAVE 3**

2. **TEST DI OTTIMALITÀ:**  $x_3, x_4$  e  $x_5$  non compaiono nelle funzione obbiettivo  $Z$ , per cui sono i coefficienti delle variabili non di base,  $x_1$  e  $x_2$ , a determinare il **TASSO DI CRESCITA** di  $Z$ . I **TASSI DI CRESCITA** sono rispettivamente 3 e 5, entrambi positivi, quindi la soluzione trovata sarà sicuramente **NON OTTIMALE**.

Trattiamo inoltre come determinare la direzione di spostamento, assumendo di aver già trovato la soluzione di base iniziale:

1. **DETERMINAZIONE DELLA DIREZIONE DI SPOSTAMENTO:**  
aumentare il valore di una variabile non di base a partire da zero (modificano i valori delle variabili di base correnti per soddisfare le equazioni) equivale a spostarsi lungo uno degli spigoli che emanano dal corrente vertice ammissibile. La scelta di quale variabile non di base incrementare è effettuata in base al **CONCETTO CHIAVE 4** e al **CONCETTO CHIAVE 5**. Nel nostro esempio, aumenteremo  $x_2$  poiché il suo tasso di miglioramento in  $Z$  è 5, il quale è migliore del tasso di miglioramento in  $Z$  dell'altra variabile non di base  $x_1$ . L'incremento del valore di questa variabile non di base, la fa divenire una variabile di base nella nuova soluzione di base; essa prende quindi il nome di **VARIABILE ENTRANTE**
2. **DETERMINAZIONE DELL'INCREMENTO:** determina di quanto aumentare il valore della variabile entrante in base (nel nostro caso,  $x_2$ ). Incrementare il valore di  $x_2$  fa incrementare il valore della funzione obbiettivo  $Z$ , pertanto desideriamo aumentare il più possibile il valore di  $x_2$  evitando però di abbandonare la regione ammissibile. Il soddisfacimento dei **vincoli** implica che se  $x_2$  aumenta, mentre si mantiene il valore della variabile non di base  $x_1$  uguale a zero, allora il valore di qualche altra variabile di base **deve variare**. L'ammissibilità richiede inoltre che **tutte le variabili siano non negative**. Le variabili non di base (inclusa quella entrante  $x_2$ ) sono non negative, ma dobbiamo verificare quanto  $x_2$  possa aumentare senza violare il vincolo di non negatività sulle variabili di base  $x_3, x_4, x_5$ . Per farlo, applichiamo il **TEST DEL RAPPORTO MINIMO**: prendiamo in considerazione tutti i vincoli a cui è soggetta la funzione obbiettivo e **ricaviamo da essi il massimo valore che possiamo assegnare a  $x_2$  che non porti a violare i vincoli di non negatività sulle altre variabili**. Questo valore sarà quindi il più piccolo trovato:

|   |   |
|---|---|
| $x_1 = 0$   | <b>TEST DEL RAPPORTO MINIMO</b>                       |
| $x_3 = 4 \geq 0$  | nessuna limitazione superiore per $x_2$               |
| $x_4 = 12 - 2 \cdot x_2 \geq 0$   | $\Rightarrow x_2 \leq \frac{12}{2} = 6$ <b>minimo</b> |
| $x_5 = 18 - 2 \cdot x_2 \geq 0$   | $\Rightarrow x_2 \leq \frac{18}{2} = 9$               |
| $x_2 = 0 \rightarrow 6 \Rightarrow x_4 = 12 \rightarrow 0$ <b>VARIABILE USCENTE</b> |   |

Questo passo dell'algoritmo va quindi a determinare quale variabile di base diminuisce a zero per prima quando si incrementa il valore della **VARIABILE ENTRANTE**

in base. Diminuire il valore della variabile di base fino a raggiungere il valore zero trasforma questa variabile da variabile di base in variabile non di base nella nuova soluzione di base ammissibile. Pertanto, questa variabile è chiamata **VARIABILE USCENTE** dalla base all'iterazione corrente.

3. **DETERMINAZIONE DELLA NUOVA SOLUZIONE DI BASE:** Obiettivo di questo passo è convertire il sistema lineare in una forma maggiormente vantaggiosa (forma adatta all'applicazione dell'**eliminazione Gaussiana**), al fine di applicare il test di ottimalità e (se necessario) di ottenere una nuova soluzione di base ammissibile. Nel nostro esempio, i valori di  $x_3$  e  $x_5$  nella nuova soluzione di base ammissibile vengono ottenuti come risultato di questo processo. Consideriamo di nuovo l'esempio. Tenendo sempre come esempio il modello in forma aumentata presente sopra, esso quindi diventa:

$$\begin{array}{lcl} \max Z & & \\ (0) & Z - 3 \cdot x_1 - 5 \cdot x_2 & \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] = 0 \\ (1) & x_1 + x_3 & \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] = 4 \\ (2) & 2 \cdot x_2 + x_4 & = 12 \\ (3) & 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 & \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] + x_5 = 18 \end{array}$$

$x_2$  ha rimpiazzato  $x_4$  come variabile di base nell'equazione (2). Risolvere il sistema lineare rispetto a  $Z, x_2, x_3, x_5$  richiede di applicare operazioni algebriche per **riprodurre il pattern**  $(0, 0, 1, 0)$  di  $x_4$  per  $x_2$  (cioè fare in modo che il vettore colonna di  $x_2$  diventi uguale al vettore colonna di  $x_4$ ). Possiamo usare due tipi di operazioni algebriche:

- Moltiplicare (dividere) un'equazione per una costante non nulla
- Sommare (sottrarre) un multiplo di un'equazione per ottenere un'altra equazione

▪  $x_2$  ha coefficienti  $(-5, 0, 2, 2)$ , che desideriamo trasformare in  $(0, 0, 1, 0)$ .

▪ Per trasformare il coefficiente 2 dell'equazione (2) in un 1:  $2 \cdot x_2 + x_4 = 12 \quad x_2 + \frac{1}{2} \cdot x_4 = 6$

▪ Per trasformare il coefficiente -5 dell'equazione (0) in uno 0:

$$\begin{array}{lcl} 5 \cdot \left( x_2 + \frac{1}{2} \cdot x_4 \right) & = 5 \cdot 6 & 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + x_5 = 18 \\ + & & - \\ Z - 3 \cdot x_1 - 5 \cdot x_2 & = 0 & 2 \cdot \left( x_2 + \frac{1}{2} \cdot x_4 \right) = 2 \cdot 6 \\ = & & = \\ Z - 3 \cdot x_1 + \frac{5}{2} \cdot x_4 & = 30 & 3 \cdot x_1 - x_4 + x_5 = 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \max Z & & \\ (0) & Z - 3 \cdot x_1 - 5 \cdot x_2 & \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] = 0 \\ (1) & x_1 + x_3 & \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] = 4 \\ (2) & x_2 + \frac{1}{2} \cdot x_4 & = 6 \\ (3) & 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 & \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] + x_5 = 18 \end{array}$$

Siccome  $x_1 = 0$  e  $x_4 = 0$ , le equazioni in questa nuova forma portano ad ottenere in modo diretto:

$$x_2 = 6$$

$$x_3 = 4$$

$$x_5 = 6$$

**SOLUZIONE DI BASE  
AMMISSIBILE INIZIALE** (0, 0, 4, 12, 18)

**SOLUZIONE DI BASE  
AMMISSIBILE NUOVA** (0, 6, 4, 0, 6)

max Z

|     |                   |                               |        |
|-----|-------------------|-------------------------------|--------|
| (0) | $Z - 3 \cdot x_1$ | $+ \frac{5}{2} \cdot x_4$     | $= 30$ |
| (1) | $x_1$             | $+ x_3$                       | $= 4$  |
| (2) |                   | $x_2 + \frac{1}{2} \cdot x_4$ | $= 6$  |
| (3) | $3 \cdot x_1$     | $- x_4 + x_5$                 | $= 6$  |

Questo processo è detto **eliminazione di Gauss-Jordan**: ogni variabile di base viene eliminata da tutte le equazioni tranne una dove ha coefficiente 1