作业一: 给出黎曼可积和勒贝格可积的定义, 并分析二者的区别

蔡聪聪
信息与计算科学 3180102279

2022 年 6 月 27 日

为了对数学分析中某些结果加深理解, 这里就一维情形考虑有限区间 [a,b] 上 f(x) 的积分, 对 f 上的黎曼积分 (简称 R 积分) 与勒贝格积分（简称 L 积分）进行若干比较

1 R 可积和 L 可积的定义

1.1 R 可积的定义

设 f 是定义在 [a,b] 上的有界函数, 区间 [a,b] 的任一分划

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

将 [a,b] 分成 n 个部分, 在每个小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上任取一点 $\xi_i, i = 0, 1, \cdots, n-1$, 作和

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i). \tag{1}$$

令 $\lambda = max(x_{i+1} - x_i)$. 如果对区间任意的划分与 ξ_i 的任意取法, 当 $\lambda \to 0$ 时,σ 趋于有极限的 I, 则称它为 f 在 [a,b] 上的 R 积分, 记为

$$I = (R)\int_a^b f(x)dx. \tag{2}$$

1.2 L 可积的定义

设 f 是定义在可测集 D 上的可测函数, 对每一 $x \in D$, 令

$$f_+(x) = max\left\{0, f(x)\right\}, f_-(x) = max\left\{0, -f(x)\right\} \tag{3}$$

则 f_+ 和 f_- 分别称为函数 f 的正部和负部，它们都是非负可测函数并且

$$f(x) = f_+ - f_-, |f(x)| = f_+ + f_-. \tag{4}$$

今若 $\int_D f_+ dx$ 和 $\int_D f_- dx$ 不同时为 ∞, 则 f 在 D 上的勒贝格积分定义为

$$\int_D f dx = \int_D f_+ dx - \int_D f_- dx. \tag{5}$$

此外当 $\int_D f dx$ 有限时, 称 f 在 D 上 L 可积, 并记为 $f \in L(D)$.

2 R 积分与 L 积分比较

从某些极限过程来看,L 积分较 R 积分优越些.
举傅里叶级数的逐项积分问提来做进一步说明. 在数学分析中, 这个问题是不易讲的透彻的. 现在用 L 积分观点来讨论. 假定 f(x) 是以 2π 为周期的 L 可积函数, 那么它有傅里叶展式

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cosnx + b_n sinnx) \tag{6}$$

其中

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cosnxdx, n = 0, 1, 2, \cdots,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sinnxdx, n = 1, 2, \cdots,$$

所写展开式 (6) 并不表示级数收敛, 但是, 可积函数 f(x) 的傅里叶展开式却可以逐项积分. 就是说, 有等式

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{a_0}{2}dt + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\alpha}^{\beta}(a_n cosnt + b_n sinnt)dt \tag{7}$$

成立，其中 $[\alpha, \beta]$ 是 $[-\pi, \pi]$ 的任意子区间, 所有积分均指勒贝格积分.
其实，引进区间特征函数 $\varphi = \chi_{[\alpha,\beta]}(x)$ 来讨论，它限制在 $[-\pi, \pi]$ 上定义，我们将它延拓到 $(-\infty, \infty)$ 使其有周期 2π，并约定保持函数记号不变. 那么 $\varphi(x)$ 有傅里叶展开式

$$\varphi(x) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n cosnx + B_n sinnx) \tag{8}$$

令级数 (8) 的部分和为 $\varphi_n(x)$, 则几乎处处有 $\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$
不难验明, 要证的等式 (7) 化为等式

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\varphi(x)dm = \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\varphi_n(x)dm \tag{9}$$

现知函数列 $\{f(x)\varphi_n(x)\}_{n\in N}$ 的极限几乎处处为 $f(x)\varphi(x)$, 而且可以用初等方法证明 $\varphi_n(x)$ 是一致有界的,$\varphi_n(x) \leq C(n \in N)$.

这样, 函数序列 $\{f(x)\varphi_n(x)\}_{n\in N}$ 有可积的控制函数 $C|f(x)|$. 根据勒贝格控制收敛定理, 有 (9) 成立. 由此可见，用勒贝格积分解决傅里叶级数逐项积分问题是相当有效的.