ГЛАВА 2 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

2.1. Общие сведения о дифференциальных уравнениях

При изучении физических явлений часто не удается непосредственно найти закон, связывающий независимые переменные и искомую функцию, но можно установить связь между этой функцией и ее производными, выражаемую дифференциальным уравнением.

Как известно, *дифференциальным уравнением* называется уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y = y(x)$ и ее производные $y'(x),...y^{(n)}(x)$, т. е. уравнение вида

$$F(x, y(x), y'(x),..., y^{(n)}(x)) = 0\,. \tag{1.1}$$

Здесь F - известная функция, x - независимое переменное, $y(x)$ - неизвестная функция.

Если искомая функция $y = y(x)$ есть функция одной переменной, то дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*.

Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок входящих в него производных.

Решением дифференциального уравнения n-го порядка на интервале (a,b) называется функция $y = y(x)$, определенная на (a,b) вместе со своими производными до *n*-го порядка включительно, и такая, что подстановка функции $y = y(x)$ в дифференциальное уравнение превращает последнее в тождество по x на (a,b).

График решения дифференциального уравнения называется *интегральной кривой* этого уравнения.

Дифференциальное уравнение (1.1) имеет бесконечно много решений. Множество всех решений уравнения (1.1) называется *общим решением уравнения* (1.1). Всякое отдельно взятое решение называется его *частным решением*.

Задача нахождения решения $y = y(x)$ уравнения (1), удовлетворяющего начальным условиям $y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y_0',..., y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}$, называется *задачей Коши* для уравнения (1.1).

Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Если в уравнении (1.1) функция $f(x, y, y', y'',..., y^{(n-1)})$

А) непрерывна по всем своим аргументам $x, y, y', y'',..., y^{(n-1)}$ в некоторой области D их изменения;

Б) имеет ограниченные в области D частные производные $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial y'}$, $\frac{\partial f}{\partial y''}$, …, $\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ по аргументам $x, y, y', y'',..., y^{(n-1)}$, то найдется интервал $x_0 - h < x < x_0 + h$, на котором существует единственное решение $y = y(x)$, удовлетворяющее условиям $y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y_0', ..., y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}$, где значения $x = x_0, y = y_0$, $y' = y'_0, ..., y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$ содержатся в области D.

Решение дифференциального уравнения, в каждой точке которого его касается другое решение, отличное от рассматриваемого решения в сколь угодно малой окрестности этой точки, называется *особым решением* дифференциального уравнения. В каждой точке особого решения нарушается единственность.

Существует несколько классов дифференциальных уравнений и для каждого из них существуют различные методы решения.

Различают следующие обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка:

- *Уравнения с разделяющимися переменными и приводящиеся к ним.*

Уравнение вида $g_1(y)f_1(x)dx = g_2(y)f_2(x)dy$, в котором коэффициенты при дифференциалах распадаются на множители, зависящие только от *x* и только от *y*, называется уравнением с разделяющимися переменными. Уравнение вида $g(y)dy = f(x)dx$ называется уравнением с разделенными переменными.

- *Однородные уравнения и приводящиеся к ним.*

Дифференциальное уравнение вида $y' = f(x,y)$, если $f(x,y)$ есть однородная функция своих аргументов нулевого измерения, называется однородным дифференциальным уравнением. Его можно представить в виде $y' = f(y/x)$. С помощью замены $u = \frac{y}{x}$ его можно привести к уравнению с разделяющимися переменными.

- *Уравнения в полных дифференциалах.*

Дифференциальное уравнение вида $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ называется уравнением в полных дифференциалах, если его левая часть есть полный дифференциал от некоторой функции $F(x,y)$, т.е. $Mdx + Ndy \equiv dF \equiv \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy$.

- *Линейные уравнения первого порядка.*

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, в которое y и y' входят линейно, то есть в первой степени. Оно имеет вид $y' + p(x)y = q(x)$, где $p(x)$ и $q(x)$ - заданные функции от x, непрерывные в той области, в которой требуется проинтегрировать уравнение.

Уравнение Бернулли – уравнение, которое можно записать в виде $y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}$, $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$. С помощью замены переменной $z = \frac{1}{y^{n-1}}$ уравнение Бернулли приводится к линейному уравнению.

- *Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной.*

Эти уравнения имеют вид $F(x,y,y')=0$, где F - заданная функция трех аргументов, F нелинейна по y'. Это уравнение при определенных условиях эквивалентно нескольким (и даже бесконечному множеству) уравнений вида $y'=f_i(x,y)$, $(i=1,2,...)$ по числу корней уравнения относительно y'. К такому классу уравнений относится уравнение Лагранжа $y=xf(y')+g(y')$ и Клеро $y=xy'+g(y')$.

- *Уравнение Риккати.*

Дифференциальное уравнение первого порядка вида $y'+a(x)y^2+b(x)y+c(x)=0$, где $a(x),b(x),c(x)$ - известные функции, называется уравнением Риккати.

Различают следующие обыкновенные дифференциальные уравнения высших порядков:

- *Уравнения, допускающие понижение порядка.*

К ним относятся уравнения вида $y^{(n)}=f(x),F(y,y',y'',...,y^{(n)})=0$ и др.

- *Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами.*

Дифференциальное уравнение вида $a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+...+a_ny=0,$ где $a_0,a_1,...,a_n$ - вещественные постоянные, $a_0\neq 0$, называется линейным однородным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами.

- *Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами.*

Дифференциальное уравнение вида $a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+...+a_ny=f(x),$ где $a_0,a_1,...,a_n$ - вещественные постоянные, $a_0\neq 0$, называется линейным неоднородным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами.

- *Уравнения Эйлера.*

Линейные уравнения вида $a_0x^ny^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+...+a_{n-1}xy'+a_ny=0,$, где все a_i - постоянные, называются уравнениями Эйлера. С помощью замены $x=e^t$ его можно свести к линейному однородному уравнению с постоянными коэффициентами.

- *Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами.*

Линейным дифференциальным уравнением *n*-го порядка с переменными коэффициентами называется уравнение вида $a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+...+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x),$ где f,a_i - известные функции.

Дифференциальные уравнения в частных производных — это уравнения, содержащие неизвестные функции от нескольких переменных и их частные производные. Уравнения в частных производных имеют следующий вид:

$$F = \left(x_1, x_2, \ldots, x_m, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_m}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}, \ldots, \frac{\partial^n z}{\partial x_m^n}\right),$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_m$ — независимые переменные, а z — функция этих переменных.

Дифференциальные уравнения в частных производных классифицируют по разным признакам, причем для каждого класса, также как и для обыкновенных дифференциальных уравнений, существуют общие методы решения уравнений. Приведем основные методы классификации уравнений [4,с.10-12].

1. Порядок уравнения.
2. Число независимых переменных.
3. Линейность.
4. Однородность.
5. Виды коэффициентов (постоянные и переменные).

Все линейные уравнения с частными производными второго порядка вида

$$A u_{xx} + B u_{xy} + C u_{yy} + D u_x + E u_y + F u = G$$

относятся к одному из трех типов:

1. *Параболический тип*. Уравнения параболического типа описывают процессы теплопроводности и диффузии и определяются условием: $B^2 - 4AC = 0$.
2. *Гиперболический тип.* Уравнения гиперболического типа описывают колебательные системы и волновые движения и определяются условием $B^2 - 4AC > 0$
3. *Эллиптический тип.* Уравнения эллиптического типа описывают установившееся процессы и определяются условием $B^2 - 4AC < 0$.

В случае переменных коэффициентов тип уравнения может меняться от точки к точке.

Зада́ча Коши́ — одна из основных задач теории дифференциальных уравнений (обыкновенных и с частными производными); состоит в отыскании решения (интеграла) дифференциального уравнения, удовлетворяющего так называемым начальным условиям (начальным данным).

Задача Коши обычно возникает при анализе процессов, определяемых дифференциальным законом и начальным состоянием, математическим выражением которых и являются уравнение и начальное условие (откуда терминология и выбор обозначений: начальные данные задаются при t=0, а решение отыскивается при t>0).

От краевых задач задача Коши отличается тем, что область, в которой должно быть определено искомое решение, здесь заранее не указывается. Тем не менее, задачу Коши можно рассматривать как одну из краевых задач.

Основные вопросы, которые связаны с задачей Коши, таковы:

Существует ли (хотя бы локально) решение задачи Коши?

Если решение существует, то какова область его существования?

Является ли решение единственным?

Если решение единственно, то будет ли оно корректным, то есть непрерывным (в каком-либо смысле) относительно начальных данных?

Говорят, что задача Коши имеет единственное решение, если она имеет решение $y=f(x)$ и никакое другое решение не отвечает интегральной кривой, которая в сколь угодно малой выколотой окрестности точки $(x_{0,} y_0)$ имеет поле направлений, совпадающее с полем направлений $y=f(x)$. Точка $(x_{0,} y_0)$ задаёт начальные условия.

В теории дифференциальных уравнений, начальные и граничные условия — дополнение к основному дифференциальному уравнению (обыкновенному или в частных производных), задающее его поведение в начальный момент времени или на границе рассматриваемой области соответственно.

Дифференциальные уравнения широко используются в практике математических вычислений. Они являются основой при решении задач моделирования — особенно в математической физике.

Решение дифференциальных уравнений может быть получено в символьном (аналитическом) или численном виде. *Под аналитическим решением* понимают такие решения, в которых неизвестная функция выражена через независимые переменные и параметры в виде формул, бесконечных рядов, интегралов. *Под численным решением* понимают решения, полученные численно после приближенной замены исходного уравнения другим, более простым уравнением [4, с.301-302].

Главное преимущество численных решений состоит в том, что их можно получить даже в том случае, когда аналитические решения получить невозможно.

2.2. Численные методы решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

Рассмотрим постановку задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) вида

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y), \qquad (2.1)$$

где: y-искомая вектор-функция; x — независимая переменная; $y(x)=(y_1(x),\dots,y_m(x))$; $f(x)=(f_1,\dots,f_m)$, m — порядок системы; $y_1(x),\dots,y_m(x)$ - координаты; $x\geq 0$; $y(0)=y^0$.

Систему (1) можно переписать в развернутом виде

$$\frac{d\,y_i}{d\,x}=f_i(x,y_1,\ldots,y_m)\,, \tag{2.2}$$

где: i=1,...,m; $y_i(0)=y_i^0$.

Если $i=1$, то мы получаем обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\frac{d\,y}{d\,x}=f(x,y)\,, \tag{2.3}$$

При этом решение задачи Коши для уравнения (2.3) заключается в нахождении интегральной кривой, проходящей через заданную точку и удовлетворяющую заданному начальному условию $y(a)=y_a$. Задача состоит в том, чтобы найти искомую функцию y , удовлетворяющую (2.3) и заданным начальным условиям.

Построение численных алгоритмов решения уравнения (2.1) опирается на дискретизацию задачи. Введем в области расчета $x\in[a,b]$ дискретный набор точек $x_i=a+hi\,,i=0,1,\ldots,N\,,h=(b-a)/N$, в которых будем вычислять приближенное решение. Точки x_i называются узлами интегрирования или узлами сетки, расстояние h - шагом интегрирования или шагом сетки. Сеточной областью (сеткой) называется совокупность всех узлов.

Для характеристики точности численного метода определяется погрешность приближенного решения по формуле:

$$\delta=\max_i\left|y_i-y(x_i)\right|\,, \tag{2.4}$$

где $y(x_i)$ - значение точного решения в узле сетки.

Существует два класса методов для решения задачи (2.1):

1) семейство одношаговых методов (Рунге-Кутта);

2) семейство многошаговых (m-шаговых) методов.

Численный метод называется *явным*, если вычисление решения в следующей точке y_{i+1} осуществляется по явной формуле. Метод называется *одношаговым*, если вычисление решения в следующей точке y_{i+1} производится с использованием только одного предыдущего значения y_i.

В дальнейшем будем рассматривать численные методы решения задачи Коши на примере уравнения первого порядка:

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=a(x,y),\, a\leqslant x\leqslant b\\ y(a)=y_a\end{cases} \tag{2.5}$$

2.2.1. Метод Эйлера

Простейшим численным методом решения задачи Коши (2.5) для обыкновенного дифференциального уравнения является метод Эйлера, который еще называют методом ломаных Эйлера.

По оси x введем равномерную сетку с шагом $h>0$, т.е. рассмотрим систему точек $x_i=\{x_i=i\cdot x, i=0,1,2,\ldots\}$. Обозначим через $y(x)$ точное решение задачи (2.5), а через $y_i=y(x_i)$ - приближенные значения функций y в заданной системе точек.

Заменяя в уравнении (2.5) производную в окрестности каждого i -го узла сетки разностным отношением, приходим к уравнению:

$$\frac{y_{i+1}-y_i}{h}=f(x_i, y_i), \quad i=0,1,2,\ldots,N-1, \quad y_0=y_a. \qquad (2.6)$$

Алгебраические соотношения между компонентами сеточной функции, которыми заменяются исходные дифференциальные уравнения в окрестности каждого узла сетки, называются *разностными уравнениями*. Поэтому уравнение (2.6) — разностное уравнение.

В окончательной форме значения y_{i+1} можно определить по явной формуле

$$y_{i+1}=y_i+h\cdot f(x_i, y_i). \qquad (2.7)$$

Геометрическая интерпретация метода Эйлера: интегральная кривая $y(x)$ на отрезке $[a;b]$ приближается к ломаной, наклон которой определяется наклоном интегральной кривой уравнения в точке $[x_i; y_i]$ (рис.1).

Метод Эйлера относится к *явным одношаговым* методам. Вследствие систематического накопления ошибок метод используется редко или используется только для оценки вида интегральной кривой. Метод Эйлера называют методом Рунге-Кутта первого порядка точности.

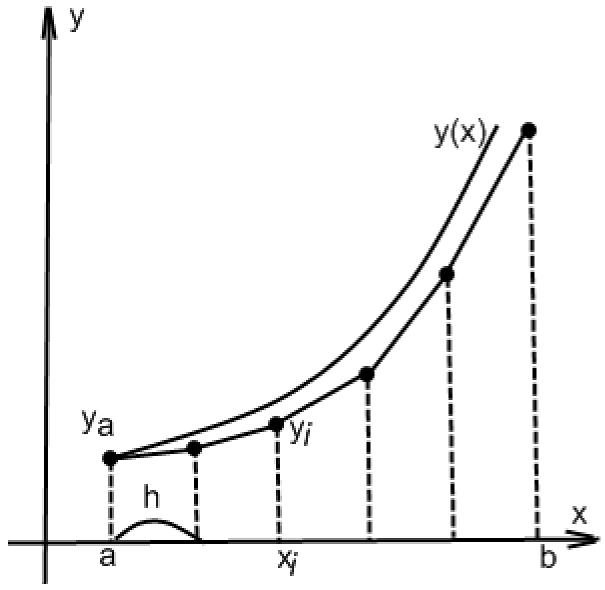


Рис.1. Геометрическая интерпретация метода Эйлера

ПРИМЕР 1. Решение задачи Коши методом Эйлера. Применяя метод Эйлера, найти решение задачи Коши: $\begin{cases} y'=y-x \\ y(0)=1.5 \end{cases}$ в трех последовательных точках $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$. Найти точное решение задачи и найти величину абсолютной погрешности в указанных точках.

Решение:

Возьмем шаг $h = 0.2$. Используя расчетную формулу Эйлера, найдем приближенное решение задачи Коши:

$y_1 = y_0 + 0.2(y_0 - x_0) = 1.5 + 0.2\,1.5 = 1.8$
$y_2 = y_1 + 0.2(y_1 - x_1) = 1.8 + 0.2(1.8 - 0.2) = 2.12$
$y_3 = y_2 + 0.2(y_2 - x_2) = 2.12 + 0.2(2.12 - 0.4) = 2.464$

Таким образом, получили численное решение задачи:

x_i	0	0.2	0.4	0.6
y_i	1.5	1.8	2.12	2.464

Графиком приближенного решения является ломаная, последовательно соединяющая точки (x_i, y_i) .

В этой задаче легко находится точное решение, например, методом вариации постоянной: $y(t) = 0.5e^t + t + 1$. Вычислим значения точного решения в указанных точках.

t_i	0	0.2	0.4	0.6
$y(t_i)$	1.5	1.811	2.146	2.511

Абсолютную погрешность вычислим так: $r_i = |y(t_i) - y_i|$. Тогда $r_1 = 0.011$, $r_2 = 0.026$, $r_3 = 0.047$. Таким образом, максимальная величина погрешности равна $R \approx 0.05$.

2.2.2. Метод Эйлера-Коши

Отличительная особенность метода Эйлера-Коши от метода Эйлера заключается в том, что значение правой части уравнения вычисляется не только в точках сетки (шаг h), но и также в середине отрезков (шаг $\frac{h}{2}$) (промежуточных точках).

Предположим, что приближенное значение y_i решения задачи в точке $x = x_i$ уже известно, y_{i+1} вычисляются по следующим формулам:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \Delta y_i = \Delta y_{i1} + \Delta y_{i2},$$

$$\Delta y_{i1} = \frac{h}{2} f(x_i, y_i), \Delta y_{i2} = \frac{h}{2} f(x_i + h, y_i + h f(x_i, y_i))$$

Отсюда вычисляют

$$y_{i+1} = y_i + h \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_i + hf(x_i, y_i))}{2}. \qquad (2.8)$$

Геометрическая интерпретация метода Эйлера-Коши: определяется направление интегральной кривой в исходной точке (x_i, y_i) и во вспомогательной точке (x_{i+1}, y^o_{i+1}) , $y^o_{i+1} = y_1 + hf(x_i, y_i)$, а в качестве окончательного выбирается среднее из этих направлений.

Метод Эйлера-Коши называют методом Рунге-Кутта второго порядка точности.

ПРИМЕР 2. Решение задачи Коши методом Эйлера-Коши. Применяя метод Эйлера-Коши, найти решение задачи Коши: $\begin{cases} y' = y - x \\ y(0) = 1.5 \end{cases}$ в трех последовательных точках $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$.

Решение:

Возьмем шаг $h = 0.2$. Используя расчетную формулу Эйлера-Коши (2.8), найдем приближенное решение задачи Коши:

$$y_1^o = y_0 + hf(x_{0,}\, y_0) = 1.5 + 0.2(1.5 - 0) = 1.8$$

$$y_1 = y_0 + h\frac{y_0 - x_0 + f(x_{1,}\, y_1^o)}{2} = 1.5 + 0.2\frac{1.5 - 0 + 1.8 - 0.2}{2}$$

$$y_1 = 1.5 + 0.2\frac{1.5 + 1.6}{2} = 1.5 + 0.31 = 1.81$$

$$y_2^o = y_1 + h(y_1 - x_1) = 1.81 + 0.2(1.81 - 0.2) = 2.132$$

$$y_2 = y_1 + h\frac{y_1 - x_1 + f(x_2, y_2^o)}{2}$$

$$y_2 = 1.81 + 0.2\frac{(1.81 - 0.2 + 2.132 - 0.4)}{2} = 1.81 + 0.3342 = 2.1442$$

$$y_3^o = y_2 + h(y_2 - x_2) = 2.1442 + 0.2(2.1442 - 0.4) = 2.49304$$

$$y_3 = y_2 + h\frac{y_2 - x_2 + f(x_3, y_3^o)}{2}$$

$$y_2 = 2.1442 + 0.2\frac{2.1442 - 0.4 + 2.49304 - 0.6}{2} = 2.1442 + 0.363724 = 2.507924$$

Таким образом, получили численное решение задачи Коши:

x_i	0	0.2	0.4	0.6
y_i	1.5	1.81	2.1442	2.507924

Графиком приближенного решения является ломаная, последовательно соединяющая точки (x_i, y_i) .

Как видим, решения задачи Коши, полученные методом Эйлера и методом Эйлера-Коши очень близки.

2.2.3. Метод Рунге-Кутта

В вычислительной практике наиболее часто используется метод Рунге-Кутта четвертого порядка (классический метод Рунге-Кутта), поскольку позволяет наиболее точно находить решения обыкновенного дифференциального уравнения.

В этом методе значения y_{i+1} находятся по следующим формулам:

$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i;\ \Delta y_i = h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6$, где $i = 0, 1, \ldots$

$$k_1 = f(x_i; y_i); \quad k_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} \cdot k_1); \qquad (2.9)$$

$k_3 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} \cdot k_2);$ $k_4 = f(x_i + h, y_i + h \cdot k_3).$

ПРИМЕР 3. Решение задачи Коши методом Рунге-Кутта 4 порядка. Применяя метод Рунге-Кутта, найти решение задачи Коши: $\begin{cases} y' = y - x \\ y(0) = 1.5 \end{cases}$ в трех последовательных точках $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$.

Решение:

Возьмем шаг $h = 0.2$. Используя расчетные формулы Рунге-Кутта (2.9), найдем приближенное решение задачи Коши:

$k_1 = f(x_{0,} y_0) = y_0 - x_0 = 1.5 - 0 = 1.5$

$k_2 = f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} k_1) = f(0 + 0.2/2, 1.5 + 0.2/2 \cdot 1.5) = f(0.1, 1.65) = 1.65 - 0.1 = 1.55$

$k_3 = f(0.1, 1.5 + 0.1 \cdot 1.55) = f(0.1, 1.655) = 1.655 - 0.1 = 1.555$

$k_4 = f(0.2, 1.5 + 0.2 \cdot 1.555) = f(0.2, 1.811) = 1.811 - 0.2 = 1.611$

$y_1 = y_0 + h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6 = 1.5 + 0.2(1.5 + 2 \cdot 1.55 + 2 \cdot 1.555 + 1.611)/6 = 1.8107$

$k_1 = f(x_{1,} y_1) = y_1 - x_1 = 1.8107 - 0.2 = 1.6107$

$k_2 = f(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2} k_1) = f(0.2 + 0.1, 1.8107 + 0.1 \cdot 1.6107) = f(0.3, 1.97177) = 1.67177$

$k_3 = f(0.3, 1.8107 + 0.1 \cdot 1.67177) = f(0.3, 1.977877) = 1.977877 - 0.3 = 1.677877$

$k_4 = f(0.4, 1.8107 + 0.2 \cdot 1.677877) = f(0.4, 2.1462754) = 1.7462754$

$y_2 = y_1 + h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6$

$y_2 = 1.8107 + 0.2(1.6107 + 2 \cdot 1.67177 + 2 \cdot 1.677877 + 1.7462754)/6 = 2.14590898$

Аналогично находим $y_3 = 2.511053228172$

Таким образом, получили численное решение задачи Коши:

x_i	0	0.2	0.4	0.6
y_i	1.5	1.8107	2.14590898	2.511053228172

Графиком приближенного решения является ломаная, последовательно соединяющая точки (x_i, y_i) .

2.3. Решение краевых задач для линейных дифференциальных уравнений второго порядка методом конечных разностей

Линейное дифференциальное уравнение второго порядка имеет вид:

$$y'' + p(x) y' + q(x) y = f(x) \quad , \tag{3.1}$$

где $p(x), q(x)$ и $f(x)$ — некоторые непрерывные на $[a, b]$ функции. Краевая задача для линейного дифференциального уравнения состоит в нахождении его решения $y = y(x)$, удовлетворяющего двухточечным линейным краевым условиям

$$\begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = A, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = B, \end{cases} \tag{3.2}$$

где $\alpha_{1,} \alpha_{2,} \beta_{1,} \beta_{2,} A, B$ — постоянные и $|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0$, $|\beta_1| + |\beta_2| \neq 0$.

При решении этой задачи методом конечных разностей отрезок $[a,b]$ разбивают на равные части с шагом h, где $h=\frac{b-a}{n}$. Точки разбиения имеют абсциссы

$$x_k=x_1+(k-1)\cdot h,\quad k=1,2,\dots,n+1,\quad x_1=a,\quad x_{n+1}=b.$$

Значения в точках деления x_k искомой функции и её производных $y'=y'(x)$, $y''=y''(x)$ обозначим соответственно через $y_k=y(x_k)$, $y'_k=y'(x_k)$, $y''_k=y''(x_k)$. Заменяя производные правыми односторонними конечно-разностными отношениями для внутренних точек x_k отрезка $[a,b]$, приближенно будем иметь

$$y'_k=\frac{y_{k+1}-y_k}{h},$$
$$y''_k=\frac{y_{k+2}-2y_{k+1}+y_k}{h^2}. \tag{3.3}$$

Для концевых точек $x_1=a$ и $x_{n+1}=b$ полагаем

$$y'_1=\frac{y_2-y_1}{h}\ \text{ и }\ y'_{n+1}=\frac{y_{n+1}-y_n}{h}. \tag{3.4}$$

Используя формулы (3.3), дифференциальное уравнение (3.1) при $x=x_k$ ($k=2,3,\dots,n$) приближенно можно заменить системой линейных уравнений

$$\frac{y_{k+2}-2y_{k+1}+y_k}{h^2}+p(x_k)\frac{y_{k+1}-y_k}{h}+q(x_k)y_k=f(x_k),\quad k=1,2,\dots,n-1.$$

В силу формул (3.4) краевые условия (3.2) дополнительно дают ещё два уравнения

$$\alpha_1 y_1+\alpha_2\frac{y_2-y_1}{h}=A,$$
$$\beta_1 y_{n+1}+\beta_2\frac{y_{n+1}-y_n}{h}=B.$$

Таким образом получаем систему $n+1$ линейных уравнений с $n+1$ неизвестными $y_1,y_2,\dots,y_n,y_{n+1}$, представляющими собой значения искомой функции $y=y(x)$,

$$\begin{cases}\dfrac{y_{k+2}-2y_{k+1}+y_k}{h^2}+p(x_k)\dfrac{y_{k+1}-y_k}{h}+q(x_k)y_k=f(x_k),\\ \alpha_1 y_1+\alpha_2\dfrac{y_2-y_1}{h}=A,\\ \beta_1 y_{n+1}+\beta_2\dfrac{y_{n+1}-y_n}{h}=B.\end{cases}$$

Обозначим $p(x_k)=p_k$, $q(x_k)=q_k$, $f(x_k)=f_k$. Выполнив алгебраические преобразования над уравнениями, можно привести систему к следующему виду:

$$\begin{cases} (h^2 q_k - h\,p_k + 1)\,y_k + (h\,p_k - 2)\,y_{k+1} + y_{k+2} = h^2 f_k, \\ (\alpha_1 h - \alpha_2)\,y_1 + \alpha_2 y_2 = h\,A, \\ -\beta_2 y_n + (\beta_1 h + \beta_2)\,y_{n+1} = h\,B. \end{cases} \tag{3.5}$$

Решив систему, получим таблицу значений искомой функции $y(x)$.

ПРИМЕР 4. Найти решение уравнения $y'' + 2y' + \dfrac{y}{x} = 5$ на $[0{,}4;0{,}7]$ ($n=3$) с начальными условиями

$$y(0{,}4)=7\ ,\quad y(0{,}7)-2\,y'(0{,}7)=3\ .$$

Решение:

Из условия задачи и (1)-(2) следует:

$$p(x)=2, q(x)=\frac{1}{x}, f(x)=5, \alpha_1=1, \alpha_2=0, \beta_1=1, \beta_2=-2, A=7, B=3, a=0.4, b=0.7\ .$$

Разобьём отрезок $[a,b]$ на равные части с шагом $h=0.1$, $n=3$. Точки разбиения имеют абсциссы $x_1=0.4, x_2=0.5, x_3=0.6, x_4=0.7$.

Построим систему (3.5) линейных алгебраических уравнений, где неизвестными являются $y_1, \dots, y_4$.

$$\begin{cases} (h^2 q_k - h\,p_k + 1)\,y_k + (h\,p_k - 2)\,y_{k+1} + y_{k+2} = h^2 f_k, \\ (\alpha_1 h - \alpha_2)\,y_1 + \alpha_2 y_2 = h\,A, \\ -\beta_2 y_n + (\beta_1 h + \beta_2)\,y_{n+1} = h\,B. \end{cases}$$

Для коэффициентов основной матрицы системы для $n-1$ уравнений введем обозначения: $a_{k,k}=h^2 q_k - h\,p_k + 1,\ a_{k,k+1}=h\,p_k - 2,\ a_{k,k+2}=1,\ k=1{,}2$. Для коэффициентов последних двух уравнений (n -го и $(n+1)$ -го) введем обозначения: $a_{n,1}=\alpha_1 h - \alpha_2,\ a_{n,2}=\alpha_2,\ a_{n+1,n}=-\beta_2,\ a_{n+1,n+1}=\beta_1 h + \beta_2$

Для матрицы свободных членов введем обозначения:

$b_k = h^2 f_k,\ b_n = h\,A,\ b_{n+1}=h\,B,\ k=1{,}2,\ n=3,\ h=0.1$

Остальные коэффициенты системы равны нулю.

Составим развернутую систему (3.5) для нашей задачи:

$$(h^2 q(0.4) - h\,p(0.4)+1)\,y_1 + (h\,p(0.4)-2)\,y_2 + y_3 = h^2 f(0.4)$$
$$(h^2 q(0.5) - h\,p(0.5)+1)\,y_2 + (h\,p(0.5)-2)\,y_3 + y_4 = h^2 f(0.5)$$
$$(\alpha_1 h - \alpha_2)\,y_1 + \alpha_2 y_2 = h\,A$$
$$-\beta_2 y_3 + (\beta_1 h + \beta_2)\,y_4 = h\,B$$

Представим систему в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} (h^2 q(0.4) - h\,p(0.4)+1) & (h\,p(0.4)-2) & 1 & 0 \\ 0 & (h^2 q(0.5) - h\,p(0.5)+1) & (h\,p(0.5)-2) & 1 \\ (\alpha_1 h - \alpha_2) & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_2 & (\beta_1 h + \beta_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^2 f(0.4) \\ h^2 f(0.5) \\ h\,A \\ h\,B \end{pmatrix}$$

Подставим значения переменных в систему:

$$\begin{pmatrix} (0.01\frac{1}{0.4}-0.1\cdot 2+1) & (0.1\cdot 2-2) & 1 & 0 \\ 0 & (0.01\frac{1}{0.5}-0.1\cdot 2+1) & (0.1\cdot 2-2) & 1 \\ (0.1-0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & (0.1-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.01\cdot 5 \\ 0.01\cdot 5 \\ 0.1\cdot 7 \\ 0.1\cdot 3 \end{pmatrix}$$

После упрощения получим:

$$\begin{pmatrix} 0.825 & -1.8 & 1 & 0 \\ 0 & 0.82 & -1.8 & 1 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1.9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.05 \\ 0.05 \\ 0.7 \\ 0.3 \end{pmatrix}$$

Решая полученную систему, найдем приближенное решение дифференциального уравнения: $(0.4, 7)$, $(0.5, 7.75)$, $(0.6, 8.22)$, $(0.7, 8.5)$.

2.4. Метод сеток для решения дифференциальных уравнений в частных производных

Для решения дифференциального уравнения методом конечных разностей (сеток) сначала область, на которой ищется решение, заменяется дискретным множеством точек (разностной сеткой). В этом методе, как правило, используются регулярные сетки, шаг которых либо постоянен, либо меняется по несложному закону.

Пусть в качестве области изменения функции задан прямоугольник. Оси x и y разбиваются на отрезки, которые являются шагами сетки по соответствующим направлениям. Через точки деления проводятся прямые, параллельные осям координат. Совокупность точек пересечения (узлов) этих прямых и образует сетку в заданной двумерной области. Узлы, расстояние между которыми равно шагу сетки по одной из осей, называются *соседними*.

Способ построения сетки не меняется и в том случае, если задана область произвольной формы. Узлы сетки, попавшие внутрь области, называются *внутренними узлами*. Точки пересечения прямых, образующих сетку, с границей области называются *граничными узлами*. Для двумерной области произвольной формы сетка в общем случае всегда является нерегулярной, причем особенности геометрии учитываются только в околограничных точках (рис.1).

На рис.1 внутренние точки области обозначены кружками, граничные — крестиками. Решение уравнения в частных производных ищется во внутренних точках области, в граничных точках области оно задается граничными условиями.

Прежде чем приступать к решению дифференциального уравнения, оно само и граничные условия заменяются разностными аналогами. Вспомним ряд Тейлора для функции $f(x)$:

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(x)}{2!}h^2+...$$

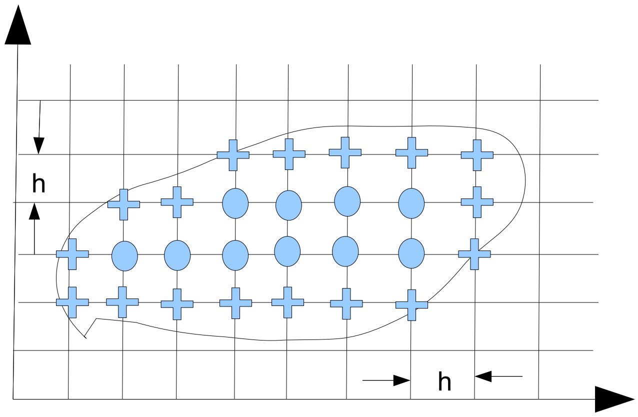


Рис.1. Сетка для произвольной области

Если оборвать этот ряд на втором члене, то получим

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h \text{ , или } f'(x)\approx\frac{f(x+h)-f(x)}{h} .$$

Выражение, стоящее в правой части, называется правой разностной производной. Она аппроксимирует первую производную $f'(x)$ в точке x .

В разложении Тейлора функции $f(x)$ можно заменить h на $-h$ и получить левую разностную производную

$$f'(x)\approx\frac{f(x)-f(x-h)}{h} .$$

Вычитая $f(x-h)\approx f(x)-f'(x)h$ из $f(x+h)\approx f(x)+f'(x)h$, получаем центральную разностную производную

$$f'(x)\approx\frac{1}{2h}[f(x+h)-f(x-h)] .$$

Если в ряде Тейлора оставить третий член ряда, то можно получить центральную разностную производную для аппроксимации $f''(x)$:

$$f''(x)\approx\frac{1}{h^2}[f(x+h)-2f(x)+f(x-h)] .$$

Если исходить из разложения Тейлора функции двух переменных

$$u(x+h,y)=u(x,y)+u_x(x,y)h+u_{xx}(x,y)\frac{h^2}{2!}+...,$$

$$u(x-h,y)=u(x,y)-u_x(x,y)h+u_{xx}(x,y)\frac{h^2}{2!}-\ldots,$$

то можно получить следующие аппроксимации частных производных:

$$u_x(x,y)\approx\frac{u(x+h,y)-u(x,y)}{h},$$

$$u_{xx}(x,y)\approx\frac{1}{h^2}[u(x+h,y)-2u(x,y)+u(x-h,y)],$$

$$u_y(x,y)\approx\frac{u(x,y+k)-u(x,y)}{k},$$

$$u_{yy}(x,y)\approx\frac{1}{k^2}[u(x,y+k)-2u(x,y)+u(x,y-k)].$$

Разностные операторы, соответствующие дифференциальному уравнению, записываются во внутренних узлах сетки. Разностные операторы, соответствующие граничным условиям, записываются в граничных узлах сетки. В результате получаем систему алгебраических уравнений, число которых пропорционально числу внутренних узлов сеточной области. Для получения численного решения требуется решить эту систему уравнений.

Удобно, если предполагается использование ЭВМ для реализации вычислений, перейти к следующим обозначениям:

$$u(x,y)=u_{ij}\ ,\quad u(x,y+k)=u_{i+1,j}\ ,\quad u(x,y-k)=u_{i-1,j}\ ,$$

$$u(x-h,y)=u_{i,j-1}\ ,\quad u(x+h,y)=u_{i,j+1}\ ,$$

$$u_x(x,y)=\frac{1}{2h}[u_{i,j+1}-u_{i,j-1}]\ ,\quad u_y(x,y)=\frac{1}{2k}[u_{i+1,j}-u_{i-1,j}]\ ,$$

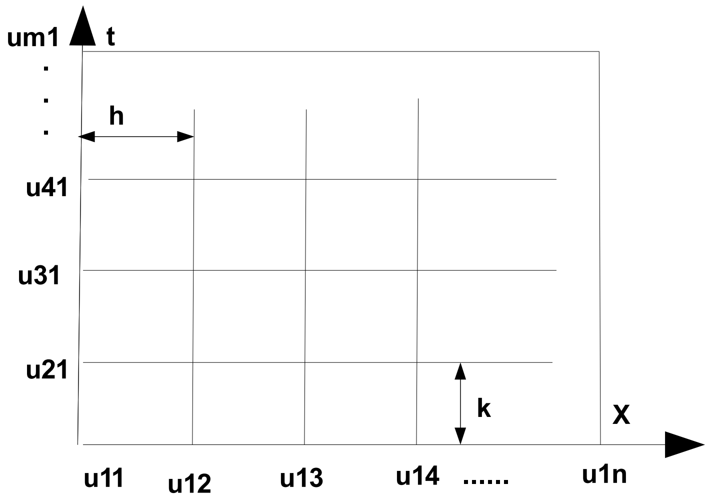
$$u_{xx}(x,y)=\frac{1}{h^2}[u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}]\ ,\quad u_{yy}(x,y)=\frac{1}{k^2}[u_{i+1,j}-2\mathrm{u}_{i,j}+u_{i-1,j}]$$

ПРИМЕР 1. Рассмотрим задачу теплопроводности в стержне, начальная температура которого равна нулю. Пусть температура левого конца фиксирована, а на правом конце происходит теплообмен с окружающей средой, так что тепловой поток пропорционален разности температур конца стержня и среды. Пусть температура среды определяется функцией $g(t)$ **. Другими словами, решим задачу:**

$$\begin{cases} u_t=u_{xx}, & 0<x<1, 0<t<\infty, \\ u(0,t)=1, & \\ u_x(1,t)=-[u(1,t)-g(t)], & 0<t<\infty, \\ u(x,0)=0, & 0\leqslant x\leqslant 1. \end{cases}$$

Решение:

Построим в плоскости прямоугольную сетку (рис.2), узлы которой определяются формулами: $x_j = jh, \quad j=0,1,2,\ldots,n, \quad t_i = ik, \quad i=0,1,2,\ldots,m.$



Значения u_{ij} на левой и нижней сторонах сетки известны из граничных и начальных условий. Наша задача состоит в отыскании остальных значений u_{ij} .

Для решения задачи заменим частные производные в уравнении теплопроводности их конечно-разностными аппроксимациями

$$u_t(x,y) \approx \frac{u(x,t+k)-u(x,t)}{k} = \frac{1}{k}[u_{i+1,j} - u_{i,j}],$$

$$u_{xx}(x,t) \approx \frac{1}{h^2}[u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)] = \frac{1}{h^2}[u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}].$$

Подставим эти выражения в наше уравнение $u_t = u_{xx}$ и разрешим получившееся уравнение относительно значений функции на верхнем временном слое. Имеем:

$$\frac{1}{k}[u_{i+1,j} - u_{i,j}] = \frac{1}{h^2}[u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}] \quad .$$

Отсюда

$$u_{i+1,j} = \frac{k}{h^2}[u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}] + u_{i,j} \quad . \tag{1}$$

Полученная формула выражает решение в данный момент времени через решение в предыдущий момент времени (индекс i относится к временной переменной).

Аппроксимируем производную в граничном условии $u_x(1,t) = -[u(1,t) - g(t)]$ на правом конце, заменив $u_x(1,t)$ левой разностной производной, поскольку правая разностная производная требует значений функции за пределами сетки:

$$\frac{1}{h}[u_{i,n} - u_{i,n-1}] = -[u_{i,n} - g_i] \quad , \quad g_i = g(ik) \quad .$$

Отсюда находим:

$$u_{i,n} = \frac{u_{i,n-1} - h g_i}{1+h} \quad . \qquad (2)$$

Таким образом, для решения поставленной задачи мы будем использовать *явную схему бегущего счета*: заменяя частные производные по времени и пространственной переменной конечно-разностными производными, мы получаем явные выражения для $u_{i,j}$ через значения функции u в предыдущие моменты времени.

Шаг 1. Находим решение на сеточном слое $t=\Delta t$, используя явную формулу (1).

Шаг 2. Величину $u_{2,n}$ находим по формуле (2).

Выполнив шаги 1-2, получаем решение для $t=\Delta t$. Повторив шаги 1-2, получаем решение при $t=2\Delta t$ и т. д.

Недостаток явной схемы: если шаг по времени оказывается достаточно большим по сравнению с шагом по x , погрешности округления могут стать настолько большими, что полученное решение теряет смысл. Отношение шагов по t и x зависит от уравнения и граничных условий. Для применимости явной схемы должно выполняться условие $k/h^2 \leq 0{,}5$. В противном случае метод будет численно не устойчив.

ПРИМЕР 2. Решим задачу:

$$\begin{cases} u_{xx} = \dfrac{1}{a^2} u_{tt}, \quad 0 \leqslant x \leqslant m, \quad 0 \leqslant t \leqslant n \\ u(x,0) = \sin\dfrac{\pi x}{50}, \quad u_t(x,0) = 0 \\ u(0,t) = u(m,t) = 0 \end{cases} .$$

Решение:

Положим $m=10$, $n=20$, $h=1$ — шаг изменения пространственной переменной. Заменим частные производные в волновом уравнении их конечно-разностными аппроксимациями

$$u_{xx}(x,y) = \frac{1}{h^2}[u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}] \quad , \quad u_{yy}(x,y) = \frac{1}{k^2}[u_{i+1,j} - 2\mathrm{u}_{i,j} + u_{i-1,j}] \quad .$$

Получим: $\frac{1}{h^2}[u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}] = \frac{1}{a^2}\frac{1}{k^2}[u_{i+1,j} - 2\mathrm{u}_{i,j} + u_{i-1,j}]$. Отсюда

$$u_{i+1,j} = \frac{a^2 k^2}{h^2}[u_{i,j+1} - 2\mathrm{u}_{i,j} + u_{i,j-1}] + 2u_{i,j} - u_{i-1,j} \quad .$$

Получили явную разностную схему, которая будет устойчивой, если $\frac{a^2 k^2}{h^2} \le 0{,}5$. Отсюда $k \le \sqrt{0{,}5}\frac{h}{a}$. Выберем $a=1,\ k=0{,}1$.

Построим алгоритм решения задачи:

1 шаг. Вводим сетку: $m=100$, $n=200$, $h=1$. Создаем нулевой массив значений $U(i, j)$ размера $m \times n$.

2 шаг. Задаем значения $a=1,\ k=0{,}1$.

3 шаг. Заполняем первую и вторую строки массива U начальными условиями $u(x,0)=\sin\frac{\pi x}{50}$, $u_t(x,0)=0$ (нулевой начальной скорости соответствует совпадение значений (смещений) в первом и втором столбцах).

4 шаг. Заполняем первый и последний столбец массива U граничными условиями $u(0,t)=u(m,t)=0$ (на концах струны смещение равно нулю в любой момент времени).

5 шаг. Находим решение, используя разностную схему

$$u_{i+1,j}=\frac{a^2 k^2}{h^2}[u_{i,j+1}-2\mathrm{u}_{i,j}+u_{i,j-1}]+2u_{i,j}-u_{i-1,j} \quad .$$

Также можно использовать и неявные разностные схемы. В этом случае частные производные заменяются конечно-разностными аппроксимациями, но $u_{i+1,j}$ не выражаются в явном виде через значения на предыдущих слоях. Для определения $u_{i+1,j}$ на каждом временном шаге необходимо решать систему уравнений. При использовании неявных схем можно вести вычисления с достаточно большим шагом.

Преимущество неявных схем перед явными в том, что в неявных схемах шаг сетки можно сделать достаточно большим, не опасаясь, что ошибки округления «разрушат» решение.