Лабораторная работа «***Интерполирование и приближение функций***» , **Задача 1- 3**

> В. В. Корзунина, К. П. Лазарев, З. А. Шабунина. Лабораторные занятия по численным методам: интерполирование и приближение функций. Часть I. Теория
>
> А. Н. Гудович, Н. Н. Гудович. Краткий курс численных методов. Выпуск 1. Приближение функций алгебраическими многочленами

срок исполнения – 27.03.2022г.

Задача 1. Интерполирование функций алгебраическими многочленами

1. Входные данные

- $f(x)$ - интерполируемая функция;
- $[a,b]$ - отрезок интерполирования;
- n – количество подотрезков разбиения.

2. На основании входных данных подготовить табличные значения функции

- отрезок $[a,b]$ разбивается на n подотрезков точками x_0, x_1, x_2,..., x_n - узлы интерполяции; (возможные варианты :

$$x_i = a + \frac{b-a}{n} \cdot i, \quad i = \overline{0,n}$$ - равномерное разбиение,

$$x_i = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} \cdot \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right), \quad i = \overline{0,n}$$ - разбиение Чебышева);

- в каждом из узлов интерполяции восстанавливается значение функции $f(x)$:

$$y_i = f(x_i), \quad i = \overline{0,n}.$$

Таким образом формируется таблица значений функции $f(x)$, на основании которой в дальнейшем будет построен интерполяционный полином.

x_0	x_1	$\cdots$	x_{n-1}	x_n
$f(x_0)$	$f(x_1)$	$\cdots$	$f(x_{n-1})$	$f(x_n)$

(1)

3. Реализовать процедуру построения интерполяционного полинома $P_n(x)$ степени n на основании таблицы (1).

4. Реализовать процедуру вычисления максимального по модулю значения погрешности интерполяции на отрезке $[a,b]$.

5. Исследовать зависимость погрешности интерполяции от степени интерполяционного полинома.

- Для нескольких заданных функций сформировать таблицу погрешностей:
  - в первом столбце – степень интерполяционного полинома;
  - во втором столбце – погрешность интерполяции при равномерном разбиении отрезка $[a,b]$;
  - в третьем столбце – погрешность интерполяции при разбиении Чебышева отрезка $[a,b]$.

- Для нескольких заданных функций построить графики:
  - график исходной функции $f(x)$ и интерполяционного полинома $P_n(x)$, с выделением значений функции в узлах интерполяции;
  - график погрешности интерполяции $e(x) = \left| f(x) - P_n(x) \right|$.

Замечание: 1) степень интерполяционного полинома задаётся из формы;
2) при построении графиков, как и при вычислении погрешности интерполяции, необходимо использовать значения функции и интерполяционного полинома в промежуточных между узлами интерполяции точках.

6. Тестирование

- Зафиксировать n и подобрать несколько тестовых примеров, демонстрирующих, что строится действительно интерполяционный полином степени n.
- Исследовать сходимость интерполяционного полинома $P_n(x)$ к интерполируемой функции $f(x)$ при увеличении n:
  - привести пример функции $f(x)$, для которой $P_n(x)$ сходится к $f(x)$ при увеличении n;
  - привести пример функции $f(x)$, для которой $P_n(x)$ не сходится к $f(x)$ при увеличении n.

7. Оформить ***отчёт*** по следующему плану:

- постановка задачи;
- теоретические сведения (о построении интерполяционного полинома согласно полученному варианту[1]);
- вычислительный эксперимент:
  - таблица погрешностей;
  - графики;
- выводы:
  1) подтверждает ли вычислительный эксперимент то, что построен действительно интерполяционный полином степени n;
  2) демонстрирует ли вычислительный эксперимент пример сходимости интерполяционного полинома к интерполируемой функции при увеличении степени полинома;
  3) демонстрирует ли вычислительный эксперимент пример расходимости интерполяционного полинома при увеличении степени полинома;
  4) демонстрирует ли вычислительный эксперимент влияние выбора узлов интерполяции на точность полученного результата;
  5) демонстрирует ли вычислительный эксперимент влияние ошибок округления на точность полученного результата.

8. ***Защитить задачу 1 и отчет на одном из лабораторных занятий, НО не позднее указанного срока.***

[1]Варианты:
1. Интерполяционный полином в форме Лагранжа.
2. Интерполяционный полином, построение по вычислительной схеме Эйткена.
3. Интерполяционный полином в форме Ньютона, построение по таблице разделённых разностей.
4. Интерполяционный полином в форме Ньютона, построение по формулам для коэффициентов b_i.

Задача 2. Аппроксимация табличной функции (*метод наименьших квадратов*)

1. Входные данные – таблично заданная функция.
Для ее формирования воспользуемся следующим алгоритмом:

- $f(x)$ - экспериментальная функция, где $x \in [a, b]$;
- на равномерной сетке узлов $a = x_0$, x_1, $x_2, \ldots,$ $x_n = b$, такой что $x_{i+1} = x_i + h$, вычислить значение функции $f_i = f(x_i)$;
- найти максимальную величину среди f_i: $f_{max} = \max\limits_{i=1,\ldots,n} \{f_0, f_1, \ldots, f_n\}$ и рассчитать

$$d = 0,2 \cdot f_{\max};$$

- с помощью генератора случайных чисел получить случайные числа $\delta_i \in [-d/2,\ d/2]$ и добавить их к значениям функции $y_i = f_i + \delta_i$

Таким образом формируется таблично заданная функция $\tilde{f}(x)$.

x_0	x_1	$\cdots$	x_{n-1}	x_n
y_0	y_1	$\cdots$	y_{n-1}	y_n

(2)

2. Для сглаживания табличной функции $\tilde{f}(x)$ рассмотреть аппроксимирующую функцию $\varphi(x)$ [2] по $n+1$ узлам.

3. Реализовать процедуру вычисления коэффициентов аппроксимирующей функции $\varphi(x)$.

4. Реализовать процедуру вычисления среднеквадратичной погрешности аппроксимации.

5. Построить графики экспериментальной функции $f(x)$, таблично заданной функции $\tilde{f}(x)$ и аппроксимирующей функции $\varphi(x)$.

6. Тестирование.

- Допустим, что вычисляются параметры a и b аппроксимирующей функции вида $\varphi(x) = a + bx$. Тогда если входная таблица является таблицей значений функции $f(x) = \tilde{a} + \tilde{b}x$, то программно полученные значения a, b должны совпадать со значениями $\tilde{a}$, $\tilde{b}$.

7. Оформить ***отчёт*** по следующему плану:

- постановка задачи;
- теоретические сведения (о виде системы служащей для нахождения параметров аппроксимирующей функции в зависимости от полученного варианта);
- вычислительный эксперимент:
  - параметры аппроксимирующей функции;
  - погрешность аппроксимации; графики;
- вывод: демонстрирует ли вычислительный эксперимент зависимость между погрешностью аппроксимации и видом аппроксимирующей функции.

8. *Защитить задачу 2 и отчет на одном из лабораторных занятий, НО не позднее указанного срока.*

---

[2]Варианты:

1. Функция $\varphi(x)$ есть полином 3 степени.
2. Функция $\varphi(x) = a + b\ln x$.
3. Функция $\varphi(x) = a + \dfrac{b}{x}$.
4. Функция $\varphi(x) = a + b\,e^{x}$.

Задача 3. Интерполирование функций кубическими сплайнами

1. Входные данные
- $f(x)$ - интерполируемая функция;
- $[a, b]$ - отрезок интерполирования;
- n – количество подотрезков разбиения.

2. На основании входных данных подготовить табличные значения функции
- отрезок $[a, b]$ разбивается на n подотрезков точками x_0, x_1, x_2,..., x_n - узлы интерполяции;
  (возможные варианты :
  $$x_i = a + \frac{b-a}{n} \cdot i, \quad i = \overline{0,n}$$ - равномерное разбиение,
  $$x_i = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} \cdot \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right), \quad i = \overline{0,n}$$ - разбиение Чебышева);
- в каждом из узлов интерполяции восстанавливается значение функции $f(x)$:
  $$y_i = f(x_i), \quad i = \overline{0,n}.$$

Таким образом формируется таблица значений функции $f(x)$. Данная таблица значений используется при построении таблиц разделённых разностей.

x_0	x_1	$\cdots$	x_{n-1}	x_n
$f(x_0)$	$f(x_1)$	$\cdots$	$f(x_{n-1})$	$f(x_n)$

(3)

3. Реализовать процедуру построения интерполяционного кубического сплайна $S(x)$ для таблично заданной функции (см.табл.3), построенной по $n+1$ узлу интерполяции x_i, $i = \overline{0,n}$, а также для заданных краевых условий. Для построения кубического сплайна необходимо выразить $S(x)$ через советующие коэффициенты (в зависимости от варианта); получить систему для вычисления соответствующих коэффициентов и решить её методом прогонки.

4. Реализовать процедуру вычисления максимального по модулю значения погрешности интерполяции на отрезке $[a, b]$.

5. Исследовать зависимость погрешности интерполяции от количества подотрезков разбиения.
- Для нескольких заданных функций сформировать таблицу погрешностей:
  - в первом столбце – количество подотрезков разбиения;
  - во втором столбце – погрешность интерполяции при равномерном разбиении отрезка $[a, b]$;
  - в третьем столбце – погрешность интерполяции при разбиении Чебышева отрезка $[a, b]$.

- Для нескольких заданных функций построить графики:
  - график исходной функции $f(x)$ и интерполяционного кубического сплайна $S(x)$, с выделением значений функции в узлах интерполяции;
  - график погрешности интерполяции $e(x) = |f(x) - S(x)|$.

Замечание: 1) количество подотрезков разбиения задаётся из формы;
2) при построении графиков, как и при вычислении погрешности интерполяции кубическим сплайном, необходимо использовать значения функции и интерполяционного кубического сплайна в промежуточных между узлами интерполяции точках.

6.Тестирование.
Выполнить те же тестовые примеры, что и для интерполяционных многочленов (см. задачу 1). Для каждого примера провести исследование сходимости кубического сплайна $S(x)$ к функции $f(x)$ при увеличении n.

7. Оформить ***отчёт*** по следующему плану:

- постановка задачи;
- теоретические сведения (о построении кубического сплайна согласно полученному варианту[3]);
- вычислительный эксперимент:
  таблица погрешностей;
  графики;
- выводы:
  1) подтверждает ли вычислительный эксперимент то, что построен действительно интерполяционный кубический сплайн;
  2) демонстрирует ли вычислительный эксперимент пример сходимости интерполяционного кубического сплайна к интерполируемой функции при увеличении количества подотрезков разбиения;
  3) демонстрирует ли вычислительный эксперимент пример расходимости интерполяционного кубического сплайна при увеличении количества подотрезков разбиения;
  4) демонстрирует ли вычислительный эксперимент пример сходимости интерполяционного кубического сплайна при увеличении количества подотрезков разбиения в том случае, когда интерполяционных полином демонстрирует расходимость;
  5) демонстрирует ли вычислительный эксперимент влияние выбора узлов интерполяции на точность полученного результата;
  6) демонстрирует ли вычислительный эксперимент влияние ошибок округления на точность полученного результата.

8. *Защитить задачу 3 и отчет на одном из лабораторных занятий, НО не позднее указанного срока.*

[3]Варианты:

b – сплайн выражается через коэффициенты b[1], b[2], ... , b[N].
c – сплайн выражается через коэффициенты c[1], c[2], ... , c[N].

Тип краевых условий:
1. S''(x_0)=A; S''(x_n)=B.
2. S'(x_0)=A; S'(x_n)=B.
3. S''(x_0)=A; S'(x_n)=B.
4. S'(x_0)=A; S''(x_n)=B.
5. S'''(x_0)=A; S'(x_n)=B.
6. S'''(x_0)=A; S''(x_n)=B.