Математическое и компьютерное моделирование

**Лабораторная работа № 2**

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОГО КАЧАНИЯ МАЯТНИКА**.

**Цель работы:** Изучить гармонические колебания на примере движения математического маятника. Смоделировать движение периодического маятника.

**Теоретическое введение**

Колебания – движения или процессы, обладающие той или иной степенью повторяемости во времени. Колебания представляют собой один из наиболее распространенных видов движений в природе и технике.

**Виды колебаний**

Колебания могут быть разной природы: механические, электромагнитные, электромеханические и другие.

В зависимости от характера воздействия на колеблющуюся систему различают:

* свободные (или собственные),
* затухающие колебания,
* вынужденные колебания,
* автоколебания колебания,
* параметрические колебания.

Свободными или собственными называются такие колебания, которые происходят в системе, предоставленной самой себе после того, как она была выведена из положения равновесия.

Вынужденными называются такие колебания, в процессе которых колеблющаяся система подвергается воздействию внешней периодически изменяющейся силы.

Автоколебания, как и вынужденные колебания, сопровождаются воздействием на колеблющуюся систему внешней силы; однако моменты времени, когда осуществляются эти воздействия, задаются самой колеблющейся системой – система сама управляет внешним воздействием.

При параметрических колебаниях за счет внешнего воздействия происходит периодическое изменение какого-либо параметра системы. Простейшим видом таких колебаний являются гармонические колебания. Это такие колебания, при которых колеблющаяся величина изменяется по закону синуса (или косинуса). Этот вид колебаний особенно важен, так как многие колебания часто имеют характер, очень близкий к гармоническим колебаниям. Периодические процессы иной формы (с другой зависимостью от времени) могут быть представлены как наложение нескольких гармонических колебаний.

**Гармонические колебания**

Гармонические колебания представляют собой периодический процесс, в котором изменение величины ξ происходит по закону косинуса (или синуса):

ξ = A cos(ω0 t + α) или ξ = A sin(ω0 t + α).

На рис. 1 представлены графики зависимости смещения ξ и потенциальной энергии U (U ~ ξ2) от времени для материальной точки, колеблющейся по гармоническому закону:

ξ(t)= A cos ω0 t

(при условии, когда начальная фаза колебаний α = 0). Колебания совершаются около положения равновесия, отвечающего значению ξ =0.



**Рис.1.** Зависимости смещения *ξ* и потенциальной энергии *U* от времени при

гармонических колебаниях.

Поскольку косинус изменяется в пределах от -1 до +1, значения ξ лежат в пределах от - А до +А. Наибольшая величина отклонения от положения равновесия А называется амплитудой колебаний. Амплитуда А – постоянная положительная величина A=|ξmax |.

Аргумент косинуса - величина φ = ω0t+α, называется фазой колебаний. Постоянная величина α представляет собой значение фазы в момент времени t = 0 и называется начальной фазой колебаний. С изменением начала отсчета времени изменяется и α. Следовательно, значение начальной фазы определяется выбором начала отсчета времени. Так как значение ξ не изменяется при добавлении или вычитании из фазы целого числа 2π , всегда можно добиться того, чтобы начальная фаза была по модулю меньше π . Поэтому обычно рассматриваются только значения α , лежащие в пределах от π− до + π .

Поскольку косинус (синус) – периодическая функция с периодом 2π, различные состояния системы, совершающей гармонические колебания, повторяются через такой промежуток времени, за который фаза колебаний получает приращение, равное 2π (см. рис.1).

∆φ = ω0(t2-t1)= ω0 ∆t, если ∆φ=2π, то ∆t = T.

Период гармонического колебания T это такой промежуток времени, за который фаза колебаний получает приращение, равное 2π, т.е. совершается одно полное колебание. По истечении времени Т, соответствующего периоду колебания, движущаяся точка занимает своё прежнее положение (рис.1). Следовательно, период колебания Т определяется из условия:

[ω0 (t+T) + α] - (ω0 t + α) = 2 π ,

откуда:

T=.

Величина

.

- называется собственной циклической частотой гармонических колебаний; значение ω0 равно числу колебаний за 2π секунд.

Величина ν0, обратная периоду колебаний - называется частотой колебаний

ν0 - число колебаний в единицу времени.

За единицу частоты принимают частоту такого колебания, период которого равен 1 с; эту единицу называют Герцем (Гц)

1 Герц = .

В качестве примера колебательного движения, поясняющего физические условия, при которых совершаются гармонические колебания, может служить движение математического маятника.

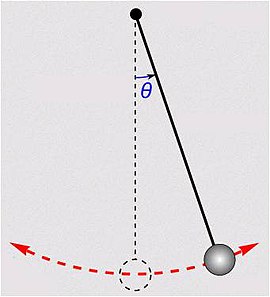
**Математический маятник**

Математический маятник служит простейшей моделью физического тела, совершающего колебания: она не учитывает распределение массы. Однако реальный физический маятник при малых амплитудах колеблется так же, как математический с приведённой длиной.

**Математический маятник —** осциллятор, представляющий собой механическую систему, состоящую из материальной точки на конце невесомой нерастяжимой нити или лёгкого стержня и находящуюся в однородном поле сил тяготения. Другой конец нити (стержня) обычно неподвижен. Период малых собственных колебаний маятника длины L, подвешенного в поле тяжести, равен

T0 = 2π

и не зависит, в первом приближении, от амплитуды колебаний и массы маятника. Здесь g — ускорение свободного падения.



**Рис. 2.** Математический маятник. Чёрный пунктир — положение равновесия, θ — угол отклонения от вертикали в некоторый момент

**Ускорение свободного падения** (ускорение силы тяжести) — ускорение, придаваемое телу силой тяжести, при исключении из рассмотрения других сил. В соответствии с уравнением движения тел в неинерциальных системах отсчёта ускорение свободного падения численно равно силе тяжести, воздействующей на объект единичной массы.

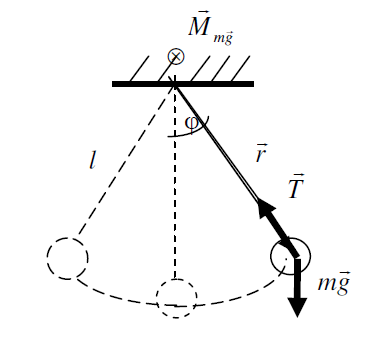
Ускорение свободного падения на поверхности Земли g варьируется от 9,780 м/с² на экваторе до 9,82 м/с² на полюсах.

Математический маятник со стержнем способен колебаться только в какой-то одной плоскости (вдоль какого-то выделенного горизонтального направления) и, следовательно, является системой с одной степенью свободы. Если же стержень заменить на нерастяжимую нить, получится система с двумя степенями свободы (так как становятся возможными колебания по двум горизонтальным координатам).

При колебаниях в одной плоскости маятник движется по дуге окружности радиуса L, а при наличии двух степеней свободы может описывать кривые на сфере того же радиуса. Нередко, в том числе в случае нити, ограничиваются анализом плоского движения; оно и рассматривается далее.

Хорошим приближением математического маятника является небольшой тяжелый шарик, подвешенный на тонкой длинной нити, при условии, что радиус шарика много меньше длины нити *l*

Если маятник отклонить от положения равновесия на небольшой угол *φ* (*φ* – угол, образованный нитью с вертикалью) и отпустить его, то маятник начнет совершать колебательное движение (рис. 3).



**Рис.3.** Движение математического маятника.

На маятник действуют две силы: m– сила тяжести и – сила натяжения нити, (сила сопротивления воздуха не учитывается). Радиус-вектор проводится из точки *O*, относительно которой определяется момент действующих сил, к точке приложения этих сил (векторов mи ).

В соответствии с уравнением основного закона динамики вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси можем написать:

где *I* - момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку подвеса (точку *О*); = - угловое ускорение;

– суммарный вращательный момент.

Вектор момента силы тяжести относительно точки подвеса равен

,

поэтому момент силы тяжести относительно точки подвеса приложен в точке *О* и направлен перпендикулярно плоскости рисунка за чертеж, в соответствии с правилом построения векторного произведения. Момент силы натяжения нити , т.к. угол между векторами и равен *π .*

С учетом сказанного, уравнение принимает вид:

(1)

Запишем полученное уравнение (1) основного закона динамики вращательного движения для математического маятника в проекции на ось, проходящую через точку подвеса перпендикулярно рисунку и направленную от чертежа к нам.

Обозначая угловое ускорение через и учитывая, что момент инерции материальной точки равен *ml2*, а также то, что ,перепишем уравнение (1) в виде:

. (2)

Суммарный вращательный момент имеет такое направление, при котором маятник стремится вернуться в положение равновесия, поэтому моменту и угловому смещению нужно приписывать противоположные знаки. Противоположность знаков момента и углового смещения можно объяснить тем, что они направлены в противоположные стороны.

Уравнение (2) можно привести к виду:

(3)

При малых углах отклонения sin *φ* можно заменить углом *φ* (в рад.), тогда, обозначив через , уравнение (3) можно записать следующим образом:

(4)

Решением этого уравнения является функция:

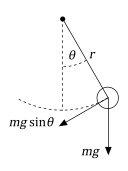
где – собственная циклическая частота колебаний математического маятника. Из выражения вытекает, что собственная циклическая частота колебаний математического маятника зависит только от длины маятника и ускорения свободного падения. Учитывая связь между собственной циклической частотой математического маятника и периодом колебаний, получим выражение для периода:

.

**Моделирование движение периодического качания маятника в MATLAB**

Изучим вопрос о том, как моделировать движение простого маятника с помощью Symbolic Math Toolbox.

Рассмотрим маятник, изображенный на Рис. 4



**Рис.4.** Моделирование движения математического маятника.

Первоначально маятник неподвижен в вертикальном положении. Когда маятник смещается на угол θ и отпускается, сила тяжести тянет его обратно в исходное положение. Его импульс заставляет его перескакивать и приходить к углу -θ (если нет сил трения) и так далее. Возвращающая сила при движении маятника под действием силы тяжести равна

.

Таким образом, согласно второму закону Ньютона, масса, умноженная на ускорение, должна равняться . Запишем это символьно в MATLAB

syms m a g theta(t)

eqn = m\*a == -m\*g\*sin(theta)

Получим

eqn(t) = a m=−g m sin(*θ*(t))

Для маятника длиной r ускорение массы на конце маятника равно угловому ускорению, умноженному на r:

.

С помощью subs запишем выражение для *a:*

syms r

eqn = subs(eqn,a,r\*diff(theta,2))

Это нам дает

eqn(t) = .

Выделим угловое ускорение в уравнении с помощью isolate([eqn](https://www.mathworks.com/help/symbolic/sym.isolate.html" \l "bvisfpr-eqn),[expr](https://www.mathworks.com/help/symbolic/sym.isolate.html#bvisfpr-expr)). Функция isolate([eqn](https://www.mathworks.com/help/symbolic/sym.isolate.html" \l "bvisfpr-eqn),[expr](https://www.mathworks.com/help/symbolic/sym.isolate.html#bvisfpr-expr)) переписывает уравнение eqn так, чтобы выражение expr появилось слева. Результат аналогичен решению уравнения для expr. Если isolate не может найти expr, то все термины, содержащие expr перемещаются в левую часть. Вывод команды isolate позволяет исключить expr из выражения с помощью subs. В нашем случае запишем

eqn = isolate(eqn,diff(theta,2))

Что дает

eqn = .

Объединим константы g и r в один параметр, который также известен как собственная частота:

.

syms omega\_0

eqn = subs(eqn,g/r,omega\_0^2)

Это дает

eqn = .

Уравнение движения нелинейно, поэтому его сложно решить аналитически. Предположим, что углы малы, и линеаризуем уравнение с помощью разложения по формуле Тейлора sinθ

syms x

approx = taylor(sin(x),x,'Order',2);

approx = subs(approx,x,theta(t))

approx = *θ*(t)

Уравнение движения становится линейным уравнением:

eqnLinear = subs(eqn,sin(theta(t)),approx)

eqnLinear = .

Решим уравнение eqnLinear с помощью dsolve. В качестве второго аргумента укажем начальные условия. Упростим решение, предположив, что ω0 является действительным числом:

syms theta\_0 theta\_t0

theta\_t = diff(theta);

cond = [theta(0) == theta\_0, theta\_t(0) == theta\_t0];

assume(omega\_0,'real')

thetaSol(t) = dsolve(eqnLinear,cond)

Получим

thetaSol(t) = .

Произведение ω0t называется фазой. Косинус и синус имеют период 2π. Время, необходимое для изменения ω0t на 2π, называется периодом времени

.

Период времени T пропорционален квадратному корню из длины маятника и не зависит от массы. Для линейного уравнения движения период времени не зависит от начальных условий.

Построим движение маятника для малоугловой аппроксимации. Определим физические параметры:

* Ускорение свободного падения g = 9,81 м / с2
* Длина маятника r = 1 м

gValue = 9.81;

rValue = 1;

omega\_0Value = sqrt(gValue/rValue);

T = 2\*pi/omega\_0Value;

Зададим начальные условия:

theta\_0Value = 0.1\*pi; % Решение действительно только для малых углов.

theta\_t0Value = 0; % Первоначально маятник находится в состоянии покоя.

Подставляем физические параметры и начальные условия в общее решение.

vars = [omega\_0 theta\_0 theta\_t0];

values = [omega\_0Value theta\_0Value theta\_t0Value];

thetaSolPlot = subs(thetaSol,vars,values);

Построим гармоническое движение маятника.

fplot(thetaSolPlot(t\*T)/pi, [0 5]);

grid on;

title(‘Гармоническое движение маятника’);

xlabel('t/T');

ylabel('\theta/\pi');



Найдя решение для θ (t), мы можем визуализировать движение маятника:

figure

x\_pos = sin(thetaSolPlot);

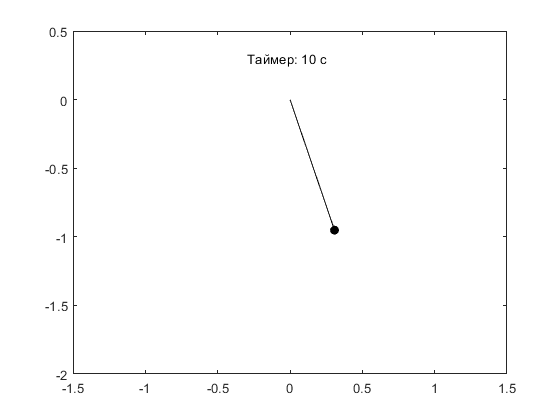
y\_pos = -cos(thetaSolPlot);

fanimator(@fplot,x\_pos,y\_pos,'ko','MarkerFaceColor','k','AnimationRange',[0 5\*T]);

hold on;

fanimator(@(t) plot([0 x\_pos(t)],[0 y\_pos(t)],'k-'),'AnimationRange',[0 5\*T]);

fanimator(@(t) text(-0.3,0.3,"Таймер: "+num2str(t,2)+" с"),'AnimationRange',[0 5\*T]);



Введём команду playAnimation, чтобы воспроизвести анимацию движения маятника.

**Задание 1.**

В MATLAB смоделируйте гармоническое движение маятника и воспроизведите анимацию движения маятника для данных из своего варианта.

**Вариант 1.** Длина маятника r = 2,1 м, первоначально маятник отклоняется на π/2, угловой шаг 0,05 π.

**Вариант 2.** Длина маятника r = 1,5 м, первоначально маятник отклоняется на π/3, угловой шаг 0,03 π.

**Вариант 3.** Длина маятника r = 4 м, первоначально маятник отклоняется на π/6, угловой шаг 0,15 π.

**Вариант 4.** Длина маятника r = 0,5 м, первоначально маятник отклоняется на -π/2, угловой шаг 0,25 π.

**Вариант 5.** Длина маятника r = 3,5 м, первоначально маятник отклоняется на π/4, угловой шаг 0,1 π.

**Вариант 6.** Длина маятника r = 1,7 м, первоначально маятник отклоняется на 0, угловой шаг 0,07 π.

**Вариант 7.** Длина маятника r = 3 м, первоначально маятник отклоняется на -π/4, угловой шаг 0,03 π.

**Вариант 8.** Длина маятника r = 0,6 м, первоначально маятник отклоняется на π/5, угловой шаг 0,7 π.

**Вариант 9.** Длина маятника r = 1,2 м, первоначально маятник отклоняется на 0, угловой шаг 0,06 π.

**Вариант 10.** Длина маятника r = 6 м, первоначально маятник отклоняется на π/2, угловой шаг 0,01 π.

**Задание 2.**

Аналогично Заданию 1,MATLAB смоделируйте гармоническое движение маятника с учетом вязкого трения и воспроизведите анимацию движения маятника для данных из своего варианта.

Уравнение движения физического маятника с учётом вязкого трения имеет вид:

где 𝐼=mr – момент инерции, 𝑏 – коэффициент момента сил вязкого трения, 𝑚 –масса маятника, 𝑔- ускорение свободного падения, r – расстоянии от точки подвеса до центра масс. Рассмотреть как изменяется поведение модели в зависимости от разных значений b. Взять по четыре разных значения b для каждого варианта.