Математическое и компьютерное моделирование

**Лабораторная работа № 1**

**ТОЧНОЕ И ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, ОПИСЫВАЮЩИХ МОДЕЛИ БИОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Несмотря на простоту экспоненциального закона, многие популяции фактически увеличивается со скоростью экспоненты в некоторый промежуток времени их существования. Процессом управляют два параметра: начальная численность популяции и темп роста на единицу популяции. Оба они могут быть легко определены с помощью экспериментальных данных методом наименьших квадратов.

Если параметр темпа роста отрицателен, то процесс является вымиранием и происходит с экспоненциальной скоростью.

Под популяцией имеется в виду некоторое число скрещивающихся особей одной разновидности. Часто подразумевается географическая локализация, например, население Острова Пасхи или бактериальная колония в чашке Петри.

**Модель Мальтуса.**

Первая изданная модель, предсказывающая темп роста популяции, была дана Томасом Мальтусом в 1798, который предположил, что темп роста популяции пропорционален ее объему *y*, то есть,

(1)

где r - константа, характеризующая пропорциональность. Это уравнение легко решается методом разделения переменных:

Если задано начальное условие

(2)

то есть, задана задача Коши (1)-(2), то

Из формулы следует, что со временем численность популяции растет неограниченно по экспоненциальному закону. В соответствии с этим законом изолированная популяция развивалась бы в условиях неограниченных ресурсов. В природе такие условия встречаются крайне редко. Примером может служить размножение видов, завезенных в места, где есть много пищи и отсутствуют конкурирующие виды и хищники (кролики в Австралии). Уравнение (1) достаточно точно описывает динамику искусственно созданной и поддерживаемой в условиях избытка пищи и места популяции простейших организмов, например популяция пенициллиновых грибков, выращиваемых в культиваторе, до истощения культуральной среды.

**Модель Ферхюльста.**

Уравнение (1) справедливо лишь для ограниченного периода времени, в конечном счете, растущая популяция исчерпает наличные ресурсы. Численность популяции может стабилизироваться на некотором устойчивом уровне; она может испытывать регулярные или нерегулярные флуктуации или может сокращаться. Поведение популяции, численность которой стабилизируется на некотором устойчивом уровне, часто описывают с помощью логистического уравнения, предложенного Ферхюльстом в 1838 г.:

, (3)

где

*r* – удельная скорость роста популяции,

*y* – численность популяции,

– число встреч членов популяции, при которой они могут конкурировать за какой-либо ресурс,

*t* – время.

Уравнение Ферхюльста отличается от уравнения экспоненциального роста (уравнения Мальтуса) выражением , которое отражает ограниченность ресурсов.

Слагаемое , пропорциональное количеству встреч между особями, учитывает сокращение популяции, объяснимое многими причинами (конкуренция внутри популяции, недостаток места, и пищи, передача инфекции из-за тесноты и т.д.). Коэффициентназывается коэффициентом внутривидовой конкуренции.

Величина называется емкостью экологической ниши популяции и соответствует такой численности популяции, при которой фактическая скорость воспроизводства в результате конкуренции настолько снижена, что популяция в целом может только восстанавливать в каждом поколении свою численность. В этот момент количество родившихся особей уравновешивается количеством погибших.

Логистическое уравнение является простейшим дифференциальным уравнением, обладающим двумя требуемыми свойствами:

1. при малых значениях *у* уравнение (3) сводится к уравнению (1) и рост носит экспоненциальный характер;
2. с возрастанием *t* величина *у* монотонно приближается к постоянному значению.

Пусть известна численность популяции в момент времени , т.е. задано начальное условие

(4)

Найдем точное решение задачи Коши (3)-(4):

Имеем

.

Разделим переменные

,

,

.

Проинтегрируем полученное выражение

,

. (5)

Найдем *С*:

отсюда

(6)

Если начальная численность популяции меньше величины экологической емкости популяции y0<K=, то с течением времени ее размер будет расти, приближаясь к своему предельному значению K. При этом, если начальная численность составляет менее половины емкости экологической ниши, на начальном этапе скорость роста популяции будет возрастать, пока численность не достигнет значения K/2, а затем начнет снижаться, стремясь к нулю.

Если начальная численность популяции составляет более половины емкости экологической ниши, то размер популяции будет увеличиваться, стремясь к значению K/2, а скорость ее роста будет неуклонно снижаться.

Изменение характера развития популяции (переход от возрастания скорости роста к снижению в точке K/2 произошло до того, как исследователь начал за ней наблюдать (т. е. до момента времени t0).

Если же размер популяции y0 в начальный момент времени больше предельно возможного значения, то численность популяции будет снижаться.

**Пример.** В 1937 г. на остров Протекшен у побережья штата Вашингтон завезли двух самцов и шесть самок обыкновенного фазана (*Phasianus colchicus*). Предполагая, что рост этой популяции происходит по логистической кривой, r=1.13 год-1, K=2500 особей, . Пользуясь уравнением Ферхюльста рассчитать рост численности фазанов с 1937 года по 1957 год.

***Нахождение точного решения Ферхюльста в MATLAB.***

Зададим временной промежуток, начальную численность, r и K:

t0=0;

t1=20;

y0=8;

r=1.13;

K=2500,

delta=r/K;

Для точного решения создадим массив из нулей и создадим массив для времени

YTOCHN=zeros(1,n+1);

T=t0:h:t1;

По формулам (5) и (6) найдем точное решение

C=(r-delta\*y0)\*exp(r\*t0)/(y0\*r);

for i=1:n+1

YTOCHN(i)=r/(delta+C\*r\*exp(-r\*T(i)));

end

Построим график решения:

plot(T, YTOCHN, 'bo-');

xlabel('Years');

ylabel('Phasianus colchicus');

axis([0 20 0 2550]);

set(gca,'XTickLabel',{1937:2:1957});

Получим



Видим, что исходя из уравнения Ферхюльста численность популяции фазанов начитает стабилизироваться с 1946 года.

***Нахождение приближенного решения уравнения Ферхюльста в MATLAB.***

Простейшим численным методом решения рассматриваемой нами задачи Коши является метод Эйлера, называемый иногда методом ломаных Эйлера.

Дана задача Коши

Пусть Разобьем отрезок на n частей точками

Рассмотрим уравнение (7) в точках и заменим производную разностной формулой

Тогда получим рекуррентную формулу метода Эйлера для вычисления приближенных значений

Здесь через обозначены приближенные значения т.е.

В MATLAB зададим число шагов n, шаг h, матрицу из нулей для приближенного решения Y и начальное число особей y0

n=40;

h=(t1-t0)/n;

Y=zeros(1,n+1);

Y(1)= y0;

Найдем приближенное решение, абсолютную и относительную погрешности, построим графики точного и приближенного решений, сведем результаты в Excel:

for i=1:n

Y(i+1)=Y(i)+h\*Y(i)\*(r-delta\*Y(i));

end

abs1=abs(YTOCHN-Y);

otn1=abs1./YTOCHN;

points=1:(n+1);

Names={'Time t','Exact solution','Numerical solution','Abs','Otn'};

xlswrite('LR02.xls',points','a2:a32');

xlswrite('LR02.xls',Names,'b1:f1');

xlswrite('LR02',T','b2:b32');

xlswrite('LR02.xls',Y','c2:c32');

xlswrite('LR02.xls',YTOCHN','d2:d32');

xlswrite('LR02.xls',abs1','e2:e32');

xlswrite('LR02.xls',otn1','f2:f32');

plot(T, Y, 'm\*-');

hold on;

grid on;

plot(T, YTOCHN, 'bo-');

xlabel('Years');

ylabel('Phasianus colchicus');

axis([0 20 0 2550]);

set(gca,'XTickLabel',{1937:2:1957});

Получим



|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Time t | Exact solution | Numerical solution | Abs | Otn |
| 1 | 0 | 8 | 8 | 0 | 0 |
| 2 | 0,5 | 12,505536 | 14,04145825 | 1,535922248 | 0,10938481 |
| 3 | 1 | 19,53582005 | 24,60028004 | 5,064459989 | 0,205870014 |
| 4 | 1,5 | 30,48730588 | 42,96185205 | 12,47454618 | 0,290363324 |
| 5 | 2 | 47,50257216 | 74,61533704 | 27,11276488 | 0,363367184 |
| 6 | 2,5 | 73,83155771 | 128,3720342 | 54,54047651 | 0,424862602 |
| 7 | 3 | 114,3144395 | 217,3865246 | 103,0720851 | 0,474142017 |
| 8 | 3,5 | 175,948777 | 358,7868568 | 182,8380798 | 0,509600829 |
| 9 | 4 | 268,3633343 | 569,225717 | 300,8623827 | 0,528546715 |
| 10 | 4,5 | 403,7123514 | 853,8722837 | 450,1599323 | 0,527198201 |
| 11 | 5 | 594,9755222 | 1192,915148 | 597,9396257 | 0,501242378 |
| 12 | 5,5 | 851,1336252 | 1540,589075 | 689,4554496 | 0,447527158 |
| 13 | 6 | 1168,303294 | 1846,449781 | 678,1464873 | 0,367270474 |
| 14 | 6,5 | 1519,919891 | 2081,302565 | 561,3826739 | 0,269726605 |
| 15 | 7 | 1856,579266 | 2243,485475 | 386,9062095 | 0,17245764 |
| 16 | 7,5 | 2126,550186 | 2347,451169 | 220,9009829 | 0,094102483 |
| 17 | 8 | 2306,030294 | 2410,951935 | 104,9216406 | 0,043518761 |
| 18 | 8,5 | 2407,120098 | 2448,598345 | 41,4782465 | 0,016939588 |
| 19 | 9 | 2457,647614 | 2470,523752 | 12,87613792 | 0,005211906 |
| 20 | 9,5 | 2481,17133 | 2483,161178 | 1,989848016 | 0,000801337 |
| 21 | 10 | 2491,729407 | 2490,401579 | 1,327828299 | 0,000533178 |
| 22 | 10,5 | 2496,386833 | 2494,535584 | 1,851248877 | 0,000742122 |
| 23 | 11 | 2498,425322 | 2496,891311 | 1,534011047 | 0,000614368 |
| 24 | 11,5 | 2499,314455 | 2498,232196 | 1,082258477 | 0,00043321 |
| 25 | 12 | 2499,701682 | 2498,994944 | 0,706737561 | 0,000282809 |
| 26 | 12,5 | 2499,870211 | 2499,428667 | 0,441544283 | 0,000176658 |
| 27 | 13 | 2499,943538 | 2499,675245 | 0,268293032 | 0,000107331 |
| 28 | 13,5 | 2499,975438 | 2499,815412 | 0,160026458 | 6,40153E-05 |
| 29 | 14 | 2499,989316 | 2499,895084 | 0,094231411 | 3,76941E-05 |
| 30 | 14,5 | 2499,995352 | 2499,940369 | 0,054983312 | 2,19938E-05 |
| 31 | 15 | 2499,997978 | 2499,966108 | 0,031870493 | 1,27484E-05 |

**Задание 1.**

В MATLAB найти приближенное решение задачи Коши для уравнения Ферхюльста и сделать выводы.

**Вариант 1.**

В Кузнецком Алатау на одном из охотучастков велась добыча соболя. Через некоторое время охотоведы заметили резкое снижение численности популяции. Когда численность соболя на участке упала ниже известной критической величины 1120 особей, был сделан вывод о неконтролируемом браконьерском промысле. Контролируемый промысел был остановлен, и был организован ежегодный учет численности популяции соболя. Предполагая, что рост этой популяции происходит по логистической кривой, r=1.39 год-1, K=3459 особей, . Пользуясь уравнением Ферхюльста рассчитать рост численности соболей с 1950 года по 1970 год.

**Вариант 2.**

Популяция бактерий растет в условиях ограниченного питания. В начальный момент времени популяция составляла 1 бактерию, r=5, K=10000. Предполагая, что рост этой популяции происходит по логистической кривой рассчитать рост численности бактерий в течении 30 минут.

**Вариант 3.**

Рассмотрим популяцию жука Thizoretha dominica в 10-граммовой порции пшеничных зерен, пополняемых каждую неделю. Изначальная численность взрослых жуков 2, r=2,3, K=400. Предполагая, что рост этой популяции происходит по логистической кривой рассчитать рост численности жуков в течении 3 месяцев.

**Вариант 4.**

Модель Ферхюльста может быть использована для описания экспериментальных данных о росте бактерии Paramecium Aurelia для которой r = 0,79 и K = 543. Предполагая, что изначальный объем популяции 1 бактерия на см3  рассчитать рост популяции в течение 25 дней.

**Вариант 5.**

В 1985 году Krug и Taubert получили эксперементальные данные для EAT (клеток брюшной водянки Ehrilch ascites tumour) мыши: K= 150×107 и r= 0.6. Предполагая, что изначальное количество опухолевых клеток 4×107  рассчитать рост опухоли в течение 17 дней.

**Вариант 6.**

Рост популяции описывается уравнением Ферхюльста. Емкость экологической ниши для нее равна 1000. Постройте точный и приближенный графики динамики численности популяции и сведите результаты в таблицу, если известно, что начальная численность равна: 10, скорость роста r равна 0.5, в течение 100 дней.

**Вариант 7.**

Модель Ферхюльста может быть использована для описания экспериментальных данных о росте бактерии Paramecium caudatum для которой r = 0,66 и K = 202. Предполагая, что изначальный объем популяции 1 бактерия на см3  рассчитать рост популяции в течение 10 дней.

**Вариант 8.**

Рост популяции описывается уравнением Ферхюльста. Емкость экологической ниши для нее равна 2000. Постройте точный и приближенный графики динамики численности популяции и сведите результаты в таблицу, если известно, что начальная численность равна: 700, скорость роста r равна 0,12 в течение 30 дней.

**Вариант 9.**

Пусть в пруду 100 карасей. Предположим, что коэффициент рождаемости 0,5, а пропускная способность пруда 200. Постройте точный и приближенный графики динамики численности популяции и сведите результаты в таблицу для 21 месяца.

**Вариант 10.**

Постройте точный и приближенный графики динамики численности популяции белощекой казарки с 1945 по 1970 годы и сведите результаты в таблицу. Если начальная популяция 10, r=1,1; K=4500.

**Задание 2.**

Если в основе размножения лежит скрещивание, предполагающее встречи между особями разных полов одного и того же вида, то прирост будет тем выше, чем больше количество встреч между особями, а последнее пропорционально второй степени*х.* Таким образом, для разнополой популяции в условиях неограниченных ресурсов можно записать

, (9)

. (10)

Уравнение (9) хорошо описывает тот факт, что при низких плотностях популяций скорость размножения резко падает, так как вероятность встречи двух особей разных полов уменьшается при понижении плотности популяции пропорционально квадрату плотности.

В MATLAB найти приближенное решение задачи Коши (9)-(10). Построить графики точного и приближенного решения задачи Коши (9)-(10). Найти абсолютную и относительную погрешности.

**Задание 3.**

Однако при больших плотностях популяций скорость размножения лимитирует уже не число встреч особей противоположного пола, а число самок в популяции, формула, учитывающая эти оба эффекта, имеет вид

D:\Книги\Биоинформатика\Ризниченко Г.Ю. - Лекции по математическим моделям в биологии - 2002\html\Lect03_files\image072.gif, (11)

. (12)

В действительности плотность популяции не должна опускаться ниже некоторой критической величины. При падении плотности популяции ниже критической среднее время, в течение которого может состояться оплодотворение, становится больше времени жизни отдельной особи, точнее времени, в течение которого особь способна к размножению. В этом случае популяция вымирает.

В MATLAB найти приближенное решение задачи Коши (11)-(12). Построить графики точного и приближенного решения задачи Коши (11)-(12). Найти абсолютную и относительную погрешности.

**Задание 4.**

Этот эффект может быть учтен, если в формулу (11) ввести член, пропорциональный численности и описывающий смертность. Зависимость скорости роста популяции от ее численности при этом примет вид

. D:\Книги\Биоинформатика\Ризниченко Г.Ю. - Лекции по математическим моделям в биологии - 2002\html\Lect03_files\image076.gif, (13)

. (14)

В MATLAB найти приближенное решение задачи Коши (13)-(14). Построить графики точного и приближенного решения задачи Коши (13)-(14). Найти абсолютную и относительную погрешности.

**Задание 5.**

Общая формула, учитывающая как нижнюю границу численности, так и внутривидовую конкуренцию, имеет вид

. D:\Книги\Биоинформатика\Ризниченко Г.Ю. - Лекции по математическим моделям в биологии - 2002\html\Lect03_files\image086.gif, (15)

. (16)

В MATLAB найти приближенное решение задачи Коши (15)-(16). Построить графики точного и приближенного решения задачи Коши (15)-(16). Найти абсолютную и относительную погрешности.