आधारभूत गणित
(Basic Mathematics)

JEE

द्विघात समीकरण

यदि समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल x_1 व x_2 हैं तो–

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \quad \text{तथा} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

द्विपद सन्निकटन

यदि $x << 1$ तो $(1 + x)^n = 1 + nx$

तथा $(1 - x)^n = 1 - nx$

लघुगणक

- ❖ $\log mn = \log m + \log n$
- ❖ long $m/n = \log m - \log n$
- ❖ $\log m^n = n \log m$
- ❖ $\log_e m = 2.303 \log_{10} m$
- ❖ $\log 2 = 0.3010$

समान्तर श्रेणी

$a, a + d, a + 2d, a + 3d, \ldots\ldots\ldots\ldots, a + (n - 1)d$

जहाँ, d = सार्वान्तर

n पदों का योग $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

- ❖ $\sum n = \frac{n(n+1)}{2}$
- ❖ $\sum n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

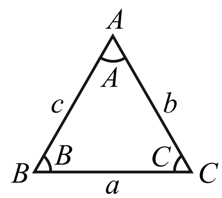
गुणोत्तर श्रेणी

$a, ar, ar^2, ar^3, \ldots\ldots\ldots\ldots$ जहाँ, r सर्वानुपात है।

n पदों का योग $S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$

अनंत पदों का योग $S_\infty = \frac{a}{1-r}$

ज्या नियम



$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

कोज्या नियम

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \ \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca};$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

फलन $y = f(x)$ का उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ

- ❖ उच्चिष्ठ के लियेः– $\frac{dy}{dx} = 0$ और $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$
- ❖ निम्निष्ठ के लियेः– $\frac{dy}{dx} = 0$ और $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$
- ❖ फलन $(A\cos\theta + B\sin\theta)$ का अधिकतम व न्यूनतम मान क्रमशः $\sqrt{A^2 + B^2}$ व $-\sqrt{A^2 + B^2}$ है।

परिवर्ती राशि का औसत मान–

$y = f(x)$ का x_1 से x_2 तक का औसत मानः

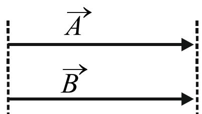
$$\langle y \rangle = \bar{y} = \frac{\int_{x_1}^{x_2} y\,dx}{\int_{x_1}^{x_2} dx} = \frac{\int_{x_1}^{x_2} y\,dx}{x_2 - x_1}$$

सदिश

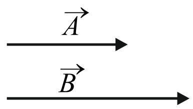
वे भौतिक राशियाँ जिनमें परिमाण व दिशा होती है तथा जो सदिश नियमों का पालन करती है, सदिश कहलाती है।

सदिश के प्रकार–

- **समान सदिश**

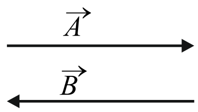


- **समान्तर सदिश**



$\vec{A}$ की दिशा = $\vec{B}$ की दिशा

- **प्रति समान्तर सदिश**

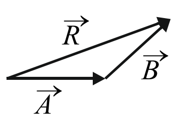


- **इकाई सदिश**

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

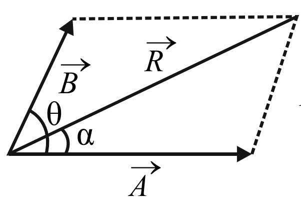
x, y व z अक्ष के अनुदिश इकाई सदिश $\hat{i}, \hat{j}$ व $\hat{k}$ द्वारा प्रदशित किये जाते हैं।

दो सदिशों के योग का त्रिभुज नियमः–



$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$$

सदिशों के योग का समान्तर चतुर्भुज नियमः–

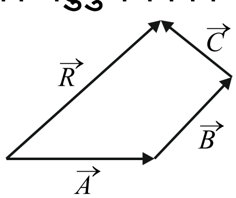


$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$$

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}$$

$$\tan\alpha = \frac{B\sin\theta}{A + B\cos\theta}$$

सदिशों के योग का बहुभुज नियमः–



$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$$

- दो असमान सदिशों का परिणामी शून्य नहीं हो सकता।
- तीन समतलीय सदिशों का परिणामी शून्य अथवा अशून्य दोनों हो सकता है।
- तीन असमलीय सदिशों का परिणामी शून्य नहीं हो सकता।
- समान परिमाण तथा परस्पर समान कोण वाले समतलीय सदिशों का परिणामी शून्य होता है।

सदिशों का अंतरः–

$$|\vec{A} - \vec{B}| = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}$$

जहाँ θ, $\vec{A}$ व $\vec{B}$ के बीच कोण है।

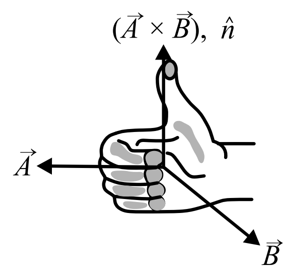
अदिश (बिंदु) गुणनफलः–

$$\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta; \ \cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{AB}$$

सदिश (वज्र) गुणनफल–

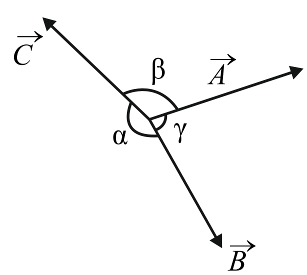
$$\vec{A} \times \vec{B} = -(\vec{B} \times \vec{A}) = -\vec{B} \times \vec{A} = AB\sin\theta\,\hat{n}$$

जहाँ $\hat{n}$, $\vec{A}$ व $\vec{B}$ के लंबवत् एकांक सदिश है।



$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

लामी प्रमेय



यदि $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = 0$ तोः–

$$\frac{A}{\sin\alpha} = \frac{B}{\sin\beta} = \frac{C}{\sin\gamma}$$

अवकलन के मूलभूत सूत्र–

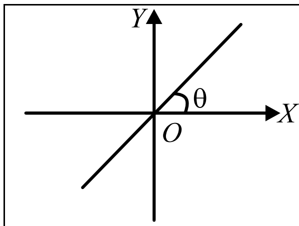
फलन	अवकलन
यदि c कोई नियतांक है	$\frac{d}{dx}(c) = 0$
यदि $y = cx$ जहाँ c नियतांक है	$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(cx) = c\frac{dx}{dx} = c$
यदि $y = cu$ जहाँ c नियतांक है तथा u, x का फलन है	$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}$
यदि $y = x^n$ जहाँ n वास्तविक संख्या है	$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$
यदि $y = u^n$ जहाँ n वास्तविक संख्या तथा u, x का फलन है	$\frac{dy}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$
यदि $y = u + v$ जहाँ u तथा v, x के फलन है	$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$
यदि $y = uv$ जहाँ u तथा v, x के फलन है (गुणनफल सूत्र)	$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$
यदि $y = \frac{u}{v}$ जहाँ u तथा v, x के फलन है (भागफल सूत्र)	$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$
यदि $y = f(u)$ तथा $u = f(x)$	$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$
यदि $y = (ax + b)^n$	$\frac{dy}{dx} = n(ax+b)^{n-1} \times \frac{d}{dx}(ax+b)$
यदि $y = \sin x$	$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$
यदि $y = \cos x$	$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$
यदि $y = \tan x$	$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$
यदि $y = \cot x$	$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\cot x) = -\text{cosec}^2\, x$
यदि $y = \sec x$	$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sec x) = \tan x \sec x$
यदि $y = \text{cosec}\, x$	$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\text{cosec}\, x) = -\cot x\, \text{cosec}\, x$
यदि $y = \sin u$ जहाँ u, x का फलन है	$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin u) = \cos u \frac{d(u)}{dx}$
यदि $y = \cos u$ जहाँ u, x का फलन है	$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\cos u) = -\sin u \frac{d(u)}{dx}$
यदि $y = \tan u$ जहाँ u, x का फलन है	$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\tan u) = \sec^2 u \frac{d(u)}{dx}$
यदि $y = \cot u$ जहाँ u, x का फलन है	$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\cot u) = -\text{cosec}^2\, u \frac{d(u)}{dx}$
यदि $y = \sec u$ जहाँ u, x का फलन है	$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sec u) = \sec u \tan u \frac{d(u)}{dx}$
यदि $y = \text{cosec}\, u$ जहाँ u, x का फलन है	$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\text{cosec}\, u)$
यदि $y = \log_a x$, तब	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\log_a e$
यदि $y = \log_e x$, तब	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\log_e e = \frac{1}{x}$
यदि $y = \log_a u$, तब	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u}\log_a e \times \frac{d(u)}{dx}$
यदि $y = \log_e u$, तब	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \times \frac{d(u)}{dx}$
यदि $y = a^x$, तब	$\frac{dy}{dx} = a^x \log_e a$
यदि $y = e^x$, तब	$\frac{dy}{dx} = e^x \log_e e = e^x$
यदि $y = e^u$, तब	$\frac{dy}{dx} = e^u \frac{d(u)}{dx}$
यदि $y = a^u$, तब	$\frac{dy}{dx} = a^u \log_e a \times \frac{d(u)}{dx}$

समाकलन के मूलभूत सूत्र–

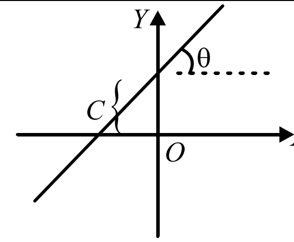
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, जहाँ $n \neq -1$	$\int \sec^2 x\, dx = \tan x$
$\int dx = \int x^0 dx = \frac{x^{0+1}}{0+1} = x$	$\int \text{cosec}^2 x\, dx = -\cot x$
$\int (u+v)dx = \int u\, dx + \int v\, dx$	$\int \sec x \tan x\, dx = \sec x$
$\int cu\, dx = c\int u\, dx$	$\int \text{cosec}\, x \cot x\, dx = -\text{cosec}\, x$

जहाँ c नियतांक है तथा u, x का फलन है।	
$\int cx^n dx = c\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$(ax+b)^n dx$ $\int = \dfrac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)\dfrac{d}{dx}(ax+b)}$ $= \dfrac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}$
$\int x^{-1}dx = \int \dfrac{dx}{x} = \log_e x$	$\int \dfrac{a}{(ax+b)}dx = \dfrac{a\log_e(ax+b)}{\dfrac{d}{dx}(ax+b)}$ $= \log_e(ax+b)$
$\int e^x dx = e^x$	$\int e^{ax+b}dx = \dfrac{e^{ax+b}}{\dfrac{d}{dx}(ax+b)} = \dfrac{e^{ax+b}}{a}$
$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\log_e a}$	$\int a^{cx+d}dx = \dfrac{a^{cx+d}}{\log_e a\dfrac{d}{dx}(cx+d)}$ $= \dfrac{a^{cx+d}}{c\log_e a}$
$\int \sin x dx = -\cos x$	$\int \sec^2(ax+b)dx$ $= \dfrac{\tan(ax+b)}{\dfrac{d}{dx}(ax+b)} = \dfrac{\tan(ax+b)}{a}$
$\int \sin nx dx = \dfrac{-\cos nx}{n}$	$\int \text{cosec}^2(ax+b)dx$ $= \dfrac{-\cot(ax+b)}{\dfrac{d}{dx}(ax+b)} = \dfrac{-\cot(ax+v)}{a}$
$\int \cos x dx = \sin x$	$\int \sec(ax+b)\tan(ax+b)dx$ $= \dfrac{\sec(ax+b)}{\dfrac{d}{dx}(ax+b)} = \dfrac{\sec(ax+b)}{a}$
$\int \cos nx dx = \dfrac{\sin nx}{n}$	$\int \text{cosec}(ax+b)\cot(ax+b)dx$ $= \dfrac{-\text{cosec}(ax+b)}{\dfrac{d}{dx}(ax+b)}$ $= \dfrac{-\text{cosec}(ax+b)}{a}$

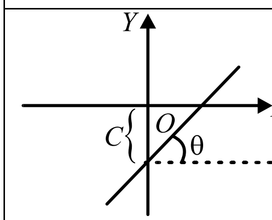
विभिन्न समीकरणों के लिए कुछ महत्वपूर्ण ग्राफ



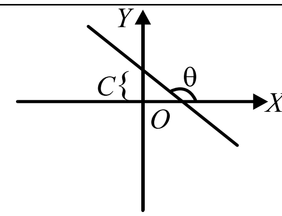
$y = mx$
$m = \tan\theta = x$- अक्ष के साथ रेखा की ढ़ाल (प्रवणता)



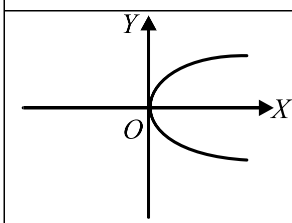
$y = mx + c$
$c = Y$- अक्ष पर धनात्मक अन्तःखण्ड (c) तथा धनात्मक ढ़ाल



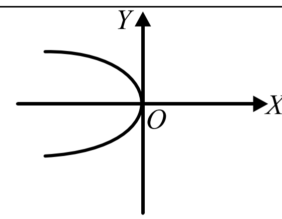
$y = mx - c$
ऋणात्मक अन्तःखण्ड तथा धनात्मक ढ़ाल



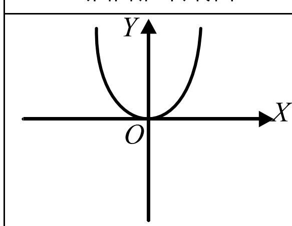
$y = -mx + c$
धनात्मक अन्तःखण्ड तथा ऋणात्मक ढ़ाल



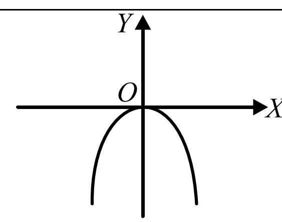
$y^2 = kx$
धनात्मक X-अक्ष के परितः सममित परवलय



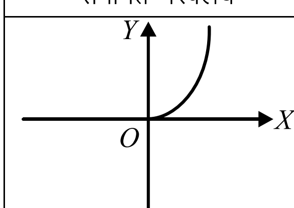
$y^2 = -kx$
ऋणात्मक X-अक्ष के परितः सममित परवलय



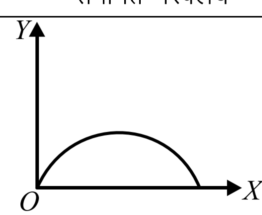
$x^2 = ky$
धनात्मक Y-अक्ष के परितः सममित परवलय



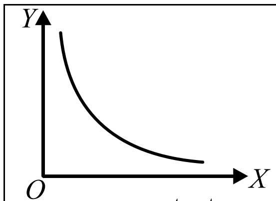
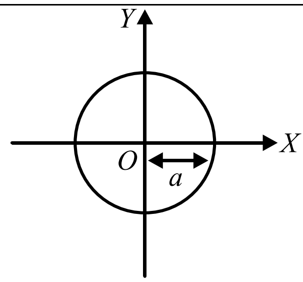
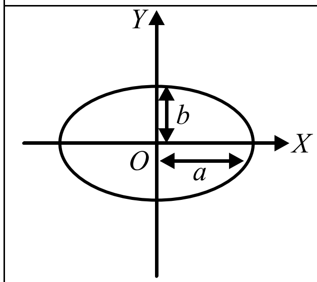
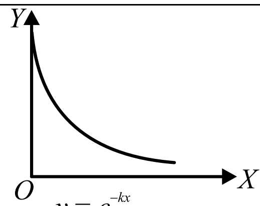
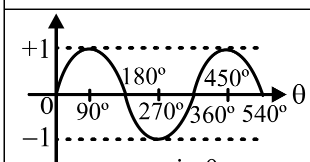
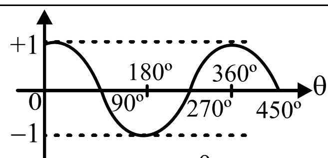
$x^2 = -ky$
ऋणात्मक Y-अक्ष के परितः सममित परवलय



$y = ax + bx^2$
असममित परवलय



$y = ax - bx^2$
असममित परवलय

 xy = constant आयताकार अतिपरवलय	 $x^2 + y^2 = a^2$ 'a' त्रिज्या का वृत्त
 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ अर्द्ध दीर्घ अक्ष a अर्द्ध लघु अक्ष b का दीर्घवृत्त	 $y = e^{-kx}$ चरघातांकीय वक्र
 $y = \sin\theta$ ज्या (sine) वक्र	 $y = \cos\theta$ कोज्या (cosine) वक्र