总复习

一，行列式

1，行列式的定义(定义的三个特点)

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

其中$j_1j_2\cdots j_n$为$1,2,\cdots$，n的全排列

2，行列式的计算：

$$\left.\begin{array}{l}(1),\text{行列式最终用定义计算；}\\(2),\text{行列式的性质(6+3)}\\(3),\text{行列式的展开(2种方式,3个定理)}\end{array}\right\}\text{化行列式为特殊类型}$$

行列式的性质(6+3)

性质1 $D = D^T$ (称为D的转置行列式)

性质2：交换两行（列），行列式变号

推论1 D中有两行(列)元素对应相等 $\Rightarrow D=0$

性质3：如果D中某一行（列）所有元素有公因子k，则可将k提到D外。

或者用数k乘D的某一行（列）等于用k乘D

推论2：如果D中某一行（列）元素全为0，则D=0

性质4: 如果D中有两行（列）对应元素成比例，则D=0

性质5 分行(列)的可加性

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论3 如果D的某行每个元素都是k个元素的和，则D可有k个行列式的和

性质6，把D某行(列)的k倍加到另一行(列)上，D的值不变

1.4 行列式的展开

展开方式 1.按某一行（列）展开（两个定理）

2.按某k行（列）展开（一个定理）

定理 1 行列式等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=D\left(i=1,2,\cdots,n\right)$$

(行列式按第i行展开)

定理 2 行列式任一行（列）的元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,\quad i\neq j.$$

定理（拉普拉斯 *Laplace* 定理） （A相当于A_{ij}）

设 D 为n阶行列式，任取定其中 k 行（列）（$1\le k\le n$）则由这 k 行（列）构成的一切 k 阶子式 $N_1,N_2,\cdots,N_t$ 与它们所对应代数余子式 $A_1,A_2,\cdots,A_t$ 乘以之和等于 D，即：

$$D=N_1A_1+N_2A_2+\cdots+N_tA_t$$

其中 $t=C_n^k$ 证明从略

行列式的10种常用的特殊类型

1,2 关于主对角线上(下)三角行列式 = 主对角线上元素的乘积

3,4 关于次对角线上(下)三角行列式, $D_n =$ 次对角线上元素的乘积且带有符号 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

5， 箭形, 三对角等

6范德蒙行列式: $D(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_1^{\,n-1} & a_2^{\,n-1} & \cdots & a_n^{\,n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n}(a_j - a_i)$

7,8 关于主对角块上（下）三角行列式: $D =$ 主对角上两个行列式的乘积

(特点：分成4块后，次对角块上至少有一块元素全为零，主对角2 块都为方块)

9,10 关于次对角块上（下）三角行列式 = 次对角上两个行列式的乘积且有符号 $(-1)^{s\cdot t}$

(特点：分成4块后，主对角块上至少有一块元素全为零，次对角上 2块都为方块)

$$D_{s+t} = \begin{vmatrix} \begin{matrix} a_{11}\cdots a_{1s} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{s1}\cdots a_{ss} \end{matrix} & 0 \\ * & \begin{matrix} b_{11}\cdots b_{1t} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ b_{t1}\cdots b_{tt} \end{matrix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{1s} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{s1}\cdots a_{ss} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11}\cdots b_{1t} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ b_{t1}\cdots b_{tt} \end{vmatrix},$$

$$D_{s+t} = \begin{vmatrix} 0 & \begin{matrix} a_{11}\cdots a_{1s} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{s1}\cdots a_{ss} \end{matrix} \\ \begin{matrix} b_{11}\cdots b_{1t} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ b_{t1}\cdots b_{tt} \end{matrix} & * \end{vmatrix} = (-1)^{s\cdot t}\begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{1s} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{s1}\cdots a_{ss} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11}\cdots b_{1t} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ b_{t1}\cdots b_{tt} \end{vmatrix}$$

二 矩阵

1，矩阵的运算：

- 1，加法 } 8条运算规律
- 2，数乘 }
- 3，乘法 5条运算规律
- 4，转置
- 5，对称(反对称)矩阵
- 6，分块矩阵
- 矩阵的迹trA

矩阵的初等变换：
- 初等行变换
- 初等列变换

2，$A_{n\times n}$ 可逆 $\Leftrightarrow$ R(A)=n $\Leftrightarrow |A|\neq 0 \Leftrightarrow A^*$ 可逆 $\Leftrightarrow AX=0$ 只有零解

$\Leftrightarrow A$ 与 E 等价 $\Leftrightarrow$ A的列(行)向量组线性无关

$\Leftrightarrow A$行(列)满秩 $\Leftrightarrow$ 特征值不为零

$\Leftrightarrow A$可以表示成一系列初等矩阵的乘积

3 秩
- 矩 阵 的 秩
- 向 量 组 的 秩
- 二 次 型 的 秩

;区 别
- 定 义
- 性 质
- 判 别 方 法

4，矩阵之间的关系

$$\begin{cases} \text{等价} \quad PAQ = B \quad \text{三个充要条件, 等价标准形的合理运用} \\ \text{相似} \quad P^{-1}AP = B \quad \text{五个必要条件，相似理论的应用} \\ \text{合同} \quad P^{T}AP = B \quad \text{三个保持} \begin{cases} \text{复数域上对称矩阵合同的充要条件} \\ \text{实数域上对称矩阵合同的充要条件} \end{cases} \end{cases}$$

5，矩阵的对角化

(1)普通矩阵 $P^{-1}AP = \Lambda$ (P,Λ 的特点，如何求？)

一个定理，两个判别法则

(2)对称矩阵 $\mathrm{U}^{T}AU = \Lambda$ $(U^{T}U = E)$

6，特征值与特征向量

$$\text{性质，求法} \begin{cases} f(\lambda) = |\lambda E - A| = 0 & \text{求特征值} \\ (\lambda E - A)X = 0 & \text{求特征向量} \end{cases}$$

实对称矩阵的特征值与特征向量和普通矩阵的区别

7，一些特殊矩阵

1，对称与反对称矩阵(运算规律，实对称矩阵的特点)

2，可逆矩阵 (性质，求法，判断）

3，伴随矩阵 A^* ($AA^* = A^*A = |A|E$,由此得到一系列公式)

4，初等矩阵$E(\mathrm{i,j})$;$E(i(k))$;$E(i+j(k),j)$ (性质，定理）

5，过渡矩阵M,(($\eta_1 \cdots \eta_n$)=($\xi_1 \cdots \xi_n$)M ,坐标变换公式)

6，度量矩阵$\mathrm{A}_{n\times n}=\left[(\xi_i,\xi_j)\right]$,$\xi_1,\cdots,\xi_n$为$V$的一组基，特点

7，正交矩阵($A^TA=E \Leftrightarrow A^{-1}=A^T \Leftrightarrow A$的列向量组为$R^n$的一组标准正交基)

8，正定矩阵 (A为正定矩阵 $\Rightarrow A = A^T$, A可逆，$a_{ii} > 0$)

A为正定矩阵 $\Leftrightarrow f = X^TAX$为正定二次型

$\Leftrightarrow \lambda > 0 \Leftrightarrow A = B^TB, B$可逆 $\Leftrightarrow \Delta_{\mathrm{i}} > 0$

$\Leftrightarrow$ A的正惯性指数p=n

$\Leftrightarrow$ A与E合同

关于A * (设A为n阶方阵)

1.A *如何构造

2 $AA^* = A^* A = |A| E$

3 $|A^*| = |A|^{n-1}$

4 当A可逆时; $A^{-1} = \dfrac{A^*}{|A|}, (A^*)^{-1} = \dfrac{A}{|A|}$

5 A^*可逆$\Leftrightarrow$ A可逆

6 $(AB)^* = B^* A^*$

7,当A可逆时,$(A^*)^* = |A|^{n-2} A$

8 $R(A^*)=\begin{cases} n & R(A)=n \\ 1 & R(A)=n-1 \\ 0 & R(A)<n-1 \end{cases}$

9 $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}, (A^T)^* = (A^*)^T, (kA)^* = k^{n-1}A^*$

3 $\because A^* A = |A| E, \Rightarrow |A^*||A| = |A|^n$

当$|A| \neq 0$时,$|A^*| = |A|^{n-1}$

当$|A|=0$时 $\Leftrightarrow |A^*|=0$ (另证)

7 $\because A^*(A^*)^* = |A^*| E$ $\therefore$ 当A可逆时,

$(A^*)^* = |A^*|(A^*)^{-1} = |A|^{n-1} \dfrac{A}{|A|} = |A|^{n-2} A$

三，线性方程组的求解

1， 求 解 过 程

$$\overline{A}\xrightarrow{\text{行变换}}\text{阶梯形}\xrightarrow[\text{如有解}]{\text{行变换}}\text{约化阶梯形}$$

2,解的定理

$$\begin{cases} A_{m\times n}X=b \begin{cases} R(A)\neq R(\overline{A}) \Rightarrow \text{无解} \\ R(A)=R(\overline{A})=\text{r} \Rightarrow \text{有解} \begin{cases} r=n \Rightarrow \text{唯一解} \\ r<n \Rightarrow \text{无穷多解，且有}n-r\text{个自由变量} \end{cases} \end{cases} \\ A_{m\times n}X=0 \ \text{设}R(A)=\text{r} \begin{cases} r=n \Rightarrow \text{只有零解，即唯一解} \\ r<n \Rightarrow \text{有非零解，即有无穷多解，且有}n-r\text{个自由变量} \end{cases} \end{cases}$$

3，通解的表示(解的结构)

$$\begin{cases} A_{m\times n}X=0 \ \text{设}R(A)=\text{r，} \ \xi_1\cdots\xi_{n-r} \ \text{为一组基础解系(n-r=自由变量)} \\ \qquad \text{通解 } X=k_1\xi_1+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r} \\ A_{m\times n}X=\text{b} \ \text{设}R(A)=R(\overline{A})=\text{r} \qquad \text{设}\eta^* \text{ 为一个特解，利用解的结构原理} \\ \qquad \text{通解 } X=\eta^*+(k_1\xi_1+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}) \end{cases}$$

四，两个空间

1，线性空间
- 1，定义 $\{V,P,+,\cdot\}$.三个常用空间 $P^{n}, P^{m\times n}, P[X]_n$
- 2，向量之间的关系(线性表示，线性相关性，正交性)
- 3，基和维数dimV,
- 4, 子空间的判别及基，维数

2,欧氏空间
- 1，内积,欧氏空间的定义
- 2，长度，夹角，度量矩阵，正交矩阵，正交向量组，标准正交基
- 3，如何求标准正交向量组或者标准正交基(Schmidt正交化）

五， 二 次 型

二 大 问 题
- 1， 化 成 标 准 形
  - 配 方 法
  - 对 称 矩 阵 原 理
- 2，判 断 二 次 型 的 正 定 性

2019研究生考试

1，$A_{3\times3}=A^T, A^2+A=2E, |A|=4, X^TAX$的规范形为？ $y_1^2-y_2^2-y_3^2$

2，$A_{3\times3}=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3], \alpha_1,\alpha_2$线性无关，$\alpha_3$=-$\alpha_1$+2$\alpha_2$，$AX=0$通解？ $k(1,-2,1)^T$

3，设向量组$\alpha_1=[1,2,1]^T, \alpha_2=[1,3,2]^T, \alpha_3[1,a,3]^T$为$R^3$已知基，

$\beta=[1,1,1]^T$在基下坐标$[b,c,1]^T$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

（1），求a,b,c $3,2,-2$

（2），证明α_2,α_3，β为R^3一组基，求α_2,α_3，β到$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$过度矩阵。

4，设$A=\begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & x & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$与$B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix}$相似，$P=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

（1），求x,y. $3,-2$ (2)可逆矩阵P, 使$P^{-1}AP=B$

5, 设$A_{4\times4}X=0$的基础解系只有两个解，求$R(A^*)=0$

6, 设向量组：（Ⅰ）$\alpha_1=[1,1,4]^T, \alpha_2=[1,0,4]^T, \alpha_3=[1,2,a^2+3]^T$

(II) $\beta_1=[1,1,a+3]^T, \beta_2=[0,2,1-a]^T, \beta_3=[1,3,a^2+3]^T$

如果（Ⅰ）与(II)等价，求a,并将β表为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的线性表示。

$a=-1$不等价；$a=1, \beta_3=3\alpha_1-2\alpha_2; a\neq\pm1, \beta_3=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$

2018研究生考试

1，向量矩阵中与G=$\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$相似的矩阵……

$(A)\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix},(B)\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix},(C)\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},(D)\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

2，设向量组α_1，α_2，α_3与向量组α_1，α_2等价，则……

$(A)\alpha_1$，α_2线性相关,$(B)\alpha_1$，α_2线性无关,$(C)\alpha_1$，α_2,α_3线性相关,$(D)\alpha_1$，α_2,α_3线性无关

3，A=$\begin{bmatrix}0&0&a\\0&0&b\\c&0&0\end{bmatrix}$的伴随矩阵……

4, $A,B\in P^{n\times n}$,则……

$(1)r(A,AB)=r(A),(2)r(A,BA)=r(A),(3)r(A,B)=\max(r(A),r(B)),(4)r(A,B)=r(A^TB^T)$

$$C=AB\Leftrightarrow(\gamma_1,\gamma_2,\cdots\gamma_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{bmatrix}b_{11}&b_{21}&\cdots&b_{n1}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{n2}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\b_{n1}&b_{2n}&\cdots&b_{nn}\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{array}{l}\gamma_1=b_{11}\alpha_1+b_{21}\alpha_2+\cdots+b_{n1}\alpha_n\\\gamma_2=b_{21}\alpha_1+b_{22}\alpha_2+\cdots+b_{n2}\alpha_n\\\cdots\\\gamma_n=b_{n1}\alpha_1+b_{n2}\alpha_2+\cdots+b_{nn}\alpha_n\end{array}$$

$$\therefore(A,AB)\xrightarrow{\text{列变换}}(A,0)$$

2017研究生考试题目

1，设$A_{3\times3}$ $,P=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$可逆，$P^{-1}AP=diag(0,1,2),A(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=$

$$2,A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&3\\0&0&1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

1, A,C相似，B,C相似　　2，A,C相似，B,C不相似

3，A,C不相似，B,C相似　4，A,C不相似，B,C不相似

3，设$A_{3\times3}=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$有3个不同特征值，$\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$，

1，证明：$R(A)=2$，　　2,若$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，求$AX=\beta$通解

4，设α为n维单位列向量，则：

1, $E-\alpha\alpha^T$不可逆　　2，$E+\alpha\alpha^T$不可逆

3，$E+2\alpha\alpha^T$不可逆　　2，$E-2\alpha\alpha^T$不可逆

5，$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&1\end{bmatrix}$,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为线性无关的3维列向量，求$A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3$的秩

6，设f$(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$

在正交变换X=QY下，化为标准形$\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$,求$a$及一个正交矩阵

2016 研究生考试题

1 设A, B可逆且相似，则下列错误的是

(1).A^T与B^T相似,(2).A^{-1}与B^{-1}相似,(3).$A+A^T$与B+B^T相似,(4).$A+A^{-1}$与B+B^{-1}相似

2 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$的正负惯性次数为1和2

则 (1).$a>1$, (2).$a<-2$,(3).-2<a<1,(4).a=1 or a=-2

3, $$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & & \\ & \lambda & -1 & \\ & & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

4 设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \\ a+1 & 1 & a+1 \end{bmatrix}$ $\beta=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2a-2 \end{bmatrix}$且$AX=\beta$无解

求(1) a (2) $A^TAX=A^T\beta$ 的解

5 设$A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (1) 求A^{99}

(2),设$B=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$ 满足$B^2=BA$ 记$B^{100}=[\beta_1,\beta_2,\beta_3]$

将β_1,β_2,β_3表示为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的线性组合

5, 设$A_{2\times2}$有两个不同特征值，α_1，α_2是A的线性无关的特征向量满足$A^2(\alpha_1+\alpha_2)=\alpha_1+\alpha_2$,则$|A|=\ldots\ldots$

6, 设实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+ax_3)^2$

(1), 求$f(x_1,x_2,x_3)=0$的解

(2), $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形

$$a\neq 2, f=y_1^2+y_2^2+y_3^2$$

$$a=2, f=2x_1^2+2x_2^2+6x_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3$$

$$=2(x_1-\frac{1}{2}x_2+\frac{3}{2}x_3)^2+\frac{3}{2}(x_2+x_3)^2$$

$$=z_1^2+z_2^2$$

$$f(x_1,x_2,x_3)=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0\\x_2+x_3=0\\x_1+ax_3=0\end{cases}$$

$$a\neq 2, X=0$$

$$a=2, X=k(-2,-1,1)^T$$

7，设$A=\begin{bmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{bmatrix}$可经初等列变换化为$B=\begin{bmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{bmatrix}$

(1)求a, (2)求满足$AP=B$的可逆矩阵P

$$A\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{bmatrix}1&0&3a\\0&1&-a\\0&0&0\end{bmatrix}\quad\therefore a=2$$

$$B\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&2-a\end{bmatrix}$$

$$[A\vdots B]\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{bmatrix}1&0&6&\vdots&3&4&4\\0&1&-2&\vdots&-1&-1&-1\\0&0&0&\vdots&0&0&0\end{bmatrix}$$

$\therefore AX=B$的解：

$$X=\begin{bmatrix}3-6k_1&4-6k_2&4-6k_3\\-1+2k_1&-1+2k_2&-1+2k_3\\k_1&k_2&k_3\end{bmatrix},$$

$$\because |X|=k_3-k_2,\therefore k_3\neq k_2$$

8, 设$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$为3阶可逆矩阵，

$$A\alpha_1=\alpha_1+\alpha_2, A\alpha_2=-\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3, A\alpha_3=2\alpha_3$$

(1)求$P^{-1}AP$, (2)证明A可对角化

考试9

$$D=x(x+1)\cdots(n-1+x)(1+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{x+i})$$

1，计算n阶行列式(n ≥ 2) D= $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2+x & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & n+x \end{vmatrix}$, 其中 $x\in R-\{0,-1,-2,\cdots,1-n\}$

$$\overline{A}\to\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & b-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1-\frac{a}{2} & 1-\frac{a}{2} & 1\frac{a}{2} \end{bmatrix}, \text{当} a=2 \text{时} \Rightarrow \begin{cases} x_1=1-t-bt \\ x_2=-1+(1-2b)t \\ x_3=t \end{cases}$$

2，当a,b为何值时，线性方程组：$\begin{cases} ax_1+x_2+x_3=1 \\ 2x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+x_2+x_3=0 \end{cases}$ 无解，唯一解，无穷多解？有解时求解。

当$a=2$时，$\overline{A}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b-1 & -1 \end{bmatrix}$

此时，$b\neq 1$时，无解；b=1时，唯一解，$x_1=0, x_2=\frac{b}{b-1}, x_3=\frac{1}{1-b}$

3, 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$,线性无关，而向量组$\alpha_1,2\alpha_2,\cdots,r\alpha_r,\beta$线性相关, 证明，向量$\beta$可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$,线性表示。

4，设V为所有二阶实对称矩阵的集合，已知V关于矩阵加法和矩阵的乘法构成一个实线性空间，

又设A=$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $W=\{B\in V \mid AB=BA\}$.(1), 证明W是V的一个子空间,(2) 求W的一组基和维数

5，在实线性空间$\mathrm{R}[x]_3$中定义内积为：$\forall f,g\in \mathrm{R}[x]_3, (f,g)=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx$, 已知(Ⅰ)：1, x, x^2为$\mathrm{R}[x]_3$的一组基

(1), 将基(Ⅰ)改造成$\mathrm{R}[x]_3$的一组标准正交基，记为(Ⅱ);(2) 求从基(Ⅰ)到基(Ⅱ)的过渡矩阵

解(1), 先正交化记$\beta_1=1$，$\beta_2=x-\frac{\int_{-1}^{1}xdx}{\int_{-1}^{1}1dx}\cdot 1=x, \beta_3=x^2-\frac{\int_{-1}^{1}x^2dx}{\int_{-1}^{1}1dx}\cdot 1-\frac{\int_{-1}^{1}x^3dx}{\int_{-1}^{1}x^2dx}\cdot x=x^2-\frac{1}{3}$

再标准化得到基(II): $\eta_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\eta_2=\frac{\sqrt{6}}{2}x, \eta_3=\frac{3\sqrt{10}}{4}x^2-\frac{\sqrt{10}}{4}$ (2)求从基(Ⅰ)到基(II)的过渡矩阵：$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & & -\frac{\sqrt{10}}{4} \\ & \frac{\sqrt{6}}{2} & \\ & & \frac{3\sqrt{10}}{4} \end{bmatrix}$

6，设实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2$，(1)写出二次型矩阵$A$，(2)求出$A$的所有特征值，(3)求一个正交矩阵Q，使得$Q^TAQ$为对角矩阵，(4)，求二次型$f$的正惯性定指数和符号差。

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix},$$

$|\lambda E-A|=\lambda^2(\lambda-3)\Rightarrow\lambda_1=0,\lambda_2=3$，特征向量$\xi_{11}=(1,0,-1)^T,\xi_{12}=(1，1，0)^T$

正交单位化：$\eta_{11}=(\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2})^T,\eta_{12}=(\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3},-\frac{\sqrt{6}}{6})^T$；

特征向量$\xi_{21}=(1，-1,1)^T$，单位化$\eta_{21}=(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})^T$

正交矩阵$Q=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{6}}{6}&\frac{\sqrt{3}}{3}\\0&\frac{\sqrt{6}}{3}&-\frac{\sqrt{3}}{3}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{6}}{6}&\frac{\sqrt{3}}{3}\end{bmatrix}$

7，设实矩阵$A_{m\times n}$，证明：$r(A^TA)=r(A)$，(P191，例4.11.2)

8，设A正定矩阵正定矩阵是n阶正定矩阵，证明$A+A^{-1}-2E$为半正定矩阵。

证明，显然$\left(A+A^{-1}-2E\right)^T=A+A^{-1}-2E$

方法1，$\because A$正定，$\therefore$有可逆矩阵C，使得$A=C^2$，$\Rightarrow A^{-1}=(C^{-1})^2$，

$\therefore A+A^{-1}-2E=(C-C^{-1})^2$

方法2，设λ为A的一个特征值，$\because A$正定，$\therefore\lambda>0$，则$\lambda+\frac{1}{\lambda}-2$为$A+A^{-1}-2E$的特征值，

$\because\lambda+\frac{1}{\lambda}\geq2\sqrt{\lambda\cdot\frac{1}{\lambda}}=2$，$\therefore A+A^{-1}-2E$的特征值$\geq0$

考试8

一. 设有n阶行列式如下：

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & 1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & a_n \end{vmatrix}$$

其中a_1，⋯，a_n为任意实常数

（1）证明：$\forall_n\geq 3, D_n=a_nD_{n-1}+D_{n-2}$

证：按最后一行展开即得：

（2）当$a_1=\cdots=a_n=0$时，计算D_n的值

答：当n为奇数时$D_n=0$,当n为偶数时$D_n=1$

（3）当$a_1=\cdots=a_n=1$时，计算D_n的值

答：$D_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}((\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1}-(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1})$

二.，设V为所有二阶实对称矩阵组成的集合，

已知V关于矩阵的加法和数乘构成一个实线性空间，

证明；$\alpha_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$，$\alpha_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，$\alpha_3=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$是$V$的一组基

证明,(1)显然α_1，α_2，$\alpha_3\in V$

(2)α_1，α_2，α_3线性无关,$\because k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=\theta\Leftrightarrow k_i=0$

(3)$\forall\begin{bmatrix}a & c\\ c & b\end{bmatrix}=\dfrac{a-b}{2}\alpha_1+\left(\dfrac{a+b}{2}-c\right)\alpha_2+c\alpha_3$

三. 解线性方程组$\begin{cases}2x_1+5x_2+x_3+3x_4=2\\ 4x_1+6x_2+3x_3+5x_4=4\\ 4x_1+14x_2+x_3+7x_4=4\\ 2x_1-3x_2+3x_3+\lambda x_4=7\end{cases}$

其中λ为实参数

解：线性方程组对应的增广矩阵

$$\overline{A}=(A\vec{b})=\begin{pmatrix}2 & 5 & 1 & 3 & 2\\ 4 & 6 & 3 & 5 & 4\\ 4 & 14 & 1 & 7 & 4\\ 2 & -3 & 3 & \lambda & 7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1\\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

于是可知，当λ=1时，由于$r(A)=2\neq 3=r(\overline{A})$,因此线性方程组无解

当$\lambda\neq 1$时，由于$r(A)$=$r(\overline{A})$=3<4,因此线性方程组有无穷多解，解为

$x_1=1-\dfrac{1}{8}(\dfrac{35}{\lambda-1}+9t),x_2=-\dfrac{1}{4}(\dfrac{5}{\lambda-1}-t),x_3=t,x_4=\dfrac{5}{\lambda-1}$, 其中$t$为任意常数

四．设A是一个$n(n\ge 3)$阶方阵，试求所有满足$(A^*)^*=A$的方阵A

解：若$|A|=0$,则$r(A^*)\le 1$，又$n>2$,故$(A^*)^*=O$,故此时要满足题意，则$A=O$;若$|A|\ne 0$，则由$AA^*=|A|E$可得$(A^*)^*=|A|^{n-2}A$

于是有（$1-|A|^{n-2}$）$A=O$.故$|A|^{n-2}=1$.总之满足题意的矩阵要么为零矩阵，要么A满足$|A|^{n-2}=1$.

五. 设$\mathrm{R}(x)_3$是次数≤ 3的实系数多项式和零多项式组成的集合。已知$\mathrm{R}(x)_3$关于多项式加法和实数与多项式的乘法构成一个实线性空间. 设

$$W=\left\{k_1x+k_2\left(1+x^2\right)\mid k_1,k_2\in\mathrm{R}\right\}$$

(1) 证明W是$\mathrm{R}[x]_3$的一个子空间；

(2) 若在W上定义一个内积：$\forall\alpha(x),\beta(x)\in W,\ (\alpha(x),\beta(x))=\int_0^1\alpha(x)\beta(x)dx.$

试将W的一组基$x,1+x^2$化为W的一组标准正交基η_1，η_2：

(3) 求基$x,1+x^2$到基η_1，η_2的过度矩阵：

证：零多项式属于W;再验证关于多项式加法和实数多项式的乘法运算封闭

$$(2)\ \eta_1=\sqrt{3}x,\ \eta_2=4\sqrt{\frac{15}{43}}\left(1-\frac{9}{4}x+x^2\right);(3)\text{过渡矩阵为}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -9\sqrt{\frac{15}{43}}\\ 0 & 4\sqrt{\frac{15}{43}}\end{pmatrix}.$$

六.设有实二次型$f\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)=2x_1x_2+2x_3x_4+tx_3^2+tx_4^2$.其中$t$为参数

(1)写出二次型f对应的矩阵A:

答：$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&t&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}$

(2)若3是A的一个特征值，试求出t的值

答：由题意得:$|3E-A|=0$,计算得：$t=2$;

(3)设$B=A^TA$，问t取何值时B不是正定的？

答：计算得：$B=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&t^2+1&t+2\\0&0&t+2&5\end{pmatrix}$,

计算可得B的顺序主子式：$_1=1>0$,

$_2=1>0$，$_3=t^2+1>0$，$_4=(2t-1)\geq 0$.

要B不是正定的仅当$t=\dfrac{1}{2}$.

七，设A为n阶实对称矩阵，且$|A|<0$.

试证明存在一个n维实列向量X,使得$X^TAX<0$

证：因为A为n阶实对称矩阵，故其特征值全为实数，不妨设为λ_1，…，λ_n.

又$|A|=\lambda_1\cdots\lambda_n<0$,故$A$必有一个特征值小于零.不妨设$\lambda_1<0$,又设属于$\lambda_1$的

特征向量为$X=\left(x_1,\cdots,x_n\right)^T\neq\left(0,\cdots,0\right)^T$，则有$AX=\lambda_1X$.两边乘上$X^T$得：

$X^TAX=\lambda_1X^TX=\lambda_1\left(x_1^2+\cdots+x_n^2\right)<0$(因为实对称矩阵的特征向量全为实向量.

所以$x_1^2+\cdots+x_n^2>0$).证毕.

八. 设A，B是两个$m\times n$阶矩阵且存在两个方阵C,D使得$A=BC$，$B=AD$，试证明：存在可逆矩阵M使得$B=AM$.

证：由$A=BC,B=AD$可得$r(A)=r(B)$，于是设$r(A)=r$，则$r\le \min\{m,n\}$：于是可知存在可逆的n阶方阵P,Q使得$AP=(A_1O),BQ=(B_1O)$，其中A_1,B_1为秩为r的$m\times r$阶矩阵，对P,Q^{-1}作适当分块：$P=(P_1P_2),Q^{-1}=\begin{pmatrix}Q_1\\Q_2\end{pmatrix}$

使得$AP_1=A_1,B=B_1Q_1$，于是$A_1=AP_1=BCP_1=B_1Q_1CP_1$.记$W=Q_1CP_1$，由于$Q_1$是$r\times n$阶矩阵，而$P_1$是$n\times r$阶矩阵，因此$W$为$r$阶方阵，又因为$A_1=B_1W$，所以$r=r(A_1)\le r(W)$，于是$W$是$r$阶可逆矩阵，于是有

$$B=(B_1O)Q^{-1}=(A_1W^{-1}O)Q^{-1}$$

$$=(A_1O)\begin{pmatrix}W^{-1}&O\\O&E_{n-r}\end{pmatrix}Q^{-1}$$

$$=AP\begin{pmatrix}W^{-1}&O\\O&E_{n-r}\end{pmatrix}Q^{-1}$$

令$M=\begin{pmatrix}W^{-1}&O\\O&E_{n-r}\end{pmatrix}Q^{-1}$即得结论.

考试7

1, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 & 5^3 \\ 1 & 2^5 & 3^5 & 4^5 & 5^5 \end{vmatrix}$

$=(1+2+3+4+5)1!2!3!4!$

2(15) (1)叙述向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$线性相关与线性无关的定义;

(2)设向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$线性相关,而向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta$线性无关

证明，β可以由向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$唯一线性表示。

3，设$X_1,\cdots,X_t$是非齐次线性方程组AX=b的t个解，证明，$k_1X_1+\cdots+k_tX_t$是$AX=b$的解$\Leftrightarrow k_1+\cdots+k_t=1$

4, 设$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$为某个实线性空间V中的n个向量，

其秩为$r\ge1$, 且$n-r\ge1$,

设W=$\left\{(k_1,\cdots,k_n)^T\in R^n \mid k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n=\theta\right\}$

证明(1)W为R^n的一个子空间;(2)求W的一组基和维数。

（2），不妨设$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$为一个极大线性无关组，

设$\alpha_{r+i}=-l_{1i}\alpha_1-\cdots-l_{ri}\alpha_r \quad (i=1,\cdots,n-r)$

于是设$X_1=(l_{11},\cdots,l_{r1},1,0,\cdots0)^T$

$X_2=(l_{12},\cdots,l_{r2},0,1,\cdots0)^T$

$\cdots\ X_{n-r}=(l_{1n-r},\cdots,l_{rn-r},0,0,\cdots1)^T$

显然，$X_1,\cdots,X_{n-r}$线性无关，且$(k_1,\cdots,k_n)^T=k_{r+1}X_1+\cdots+k_nX_{n-r}$

5，设(Ⅰ):1, x, x^2,(Ⅱ):(x-2)(x-3), (x-1)(x-3), (x-1)(x-2)

是设线性空间$R(x)_3$的两组基，求

(1)从基(Ⅰ)到基(Ⅱ)的过渡矩阵

(2)从基(Ⅱ)到基(Ⅰ)的过渡矩阵

(3) 设$p(x)=1+x+x^2$, 求$p(x)$在基(Ⅱ)坐标

$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ -5 & -4 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & -2 & -4 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{9}{2} \end{bmatrix}$, $(\frac{3}{2},-7,\frac{13}{2})^T$

7，设α，β是n维欧氏空间的两个相异向量，$\|\alpha\|=\|\beta\|=1$

证明：$(\alpha, \beta)\neq 1$

证明：$\because \|\alpha\|=1$，把α扩充为V的标准正交基，$\alpha, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$

令$\beta=\mathrm{k}_1\alpha+k_2\varepsilon_2+\cdots+k_n\varepsilon_n \Rightarrow (\alpha, \beta)=k_1$

如果$k_1=1, (\beta, \beta)=(k_1)^2+(k_2)^2+\cdots+(k_n)^2=1$

$\Rightarrow k_2=\cdots=k_n=0 \Rightarrow \alpha=\beta$矛盾

8，设A是n阶实对称矩阵，如果有n阶实矩阵B，使得AB^T+BA的所有特征值为正实数，，证明：A可逆。

证明，$\because (\mathrm{AB}^T+BA)^T=\mathrm{AB}^T+BA$,

又AB^T+BA的所有特征值为正实数，$\therefore \mathrm{AB}^T+BA$为正定矩阵

设$\mathrm{AX}=\lambda\mathrm{X}, \because 0<\mathrm{X}^T(\mathrm{AB}^T+BA)X=2\lambda(X^TBX)$

(其中$X^TB^TX=(X^TB^TX)^T=X^TBX$)

$\therefore \lambda\neq 0 \therefore$ A可逆

5, 设$A_{2\times2}$有两个不同特征值，α_1，α_2是A的线性无关的特征向量

满足$A^2(\alpha_1+\alpha_2)=\alpha_1+\alpha_2$, 则$|A|=\ldots\ldots$

6, 设实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+a x_3)^2$

(1), 求$f(x_1,x_2,x_3)=0$的解

(2), $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形

$$a\neq 2, f=y_1^2+y_2^2+y_3^2$$

$$a=2, f=2x_1^2+2x_2^2+6x_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3$$

$$=2(x_1-\frac{1}{2}x_2+\frac{3}{2}x_3)^2+\frac{3}{2}(x_2+x_3)^2$$

$$=z_1^2+z_2^2$$

$$f(x_1,x_2,x_3)=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0\\x_2+x_3=0\\x_1+a x_3=0\end{cases}$$

$$a\neq 2, X=0$$

$$a=2, X=k(-2,-1,1)^T$$

7, 设A=$\begin{bmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{bmatrix}$可经

初等列变换化为B=$\begin{bmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{bmatrix}$

(1)求a, (2)求满足$AP=B$的可逆矩阵P

$$A\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{bmatrix}1&0&3a\\0&1&-a\\0&0&0\end{bmatrix}\quad\therefore a=2$$

$$B\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&2-a\end{bmatrix}$$

$$[A\vdots B]\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{bmatrix}1&0&6&\vdots&3&4&4\\0&1&-2&\vdots&-1&-1&-1\\0&0&0&\vdots&0&0&0\end{bmatrix}$$

$\therefore AX=B$的解：

$$X=\begin{bmatrix}3-6k_1&4-6k_2&4-6k_3\\-1+2k_1&-1+2k_2&-1+2k_3\\k_1&k_2&k_3\end{bmatrix},$$

$\because |X|=k_3-k_2, \therefore k_3\neq k_2$

8, 设P=$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$为3阶可逆矩阵，

$A\alpha_1=\alpha_1+\alpha_2, A\alpha_2=-\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3, A\alpha_3=2\alpha_3$

(1)求$P^{-1}AP$, (2)证明A可对角化

考试6

1（10），设D=$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$,证明:$\begin{vmatrix} a_{11}+b_1 & \cdots & a_{1n}+b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}+b_1 & \cdots & a_{nn}+b_b \end{vmatrix} = D+\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\sum_{i=1}^{n} A_{ij}$

2(15)设α_1，α_2，α_3，$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$是某个线性空间的4个向量，证明

β-α_1，β-α_2，β-α_3线性无关的充要条件α_1，α_2，α_3线性无

3(15) 设$A_{n\times n}(n\geq 2)$,求所有满足A=A^*的矩阵A。

4(15)求向量组$\alpha_1=[6,4,1,-1,2]^T$,$\alpha_2=[1,0，2,3，-4]^T$,$\alpha_3=[1,4，-9，-16,22]^T$,

$\alpha_4=[7，1，0,-1，3]^T$的一个极大线性无关组和秩。

5(15) 设A=$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{bmatrix}$, 其中$\omega\neq 1$，$\omega^3$=1，令$V=\{f(\mathrm{A})\colon$ f为复系数一元多项式$\}$

(1),证明V关于矩阵的加法和数乘构成复数域C上的一个线性空间；

(2),求V的一组基和维数。

6(15)设A=$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 3.5 & -1.5 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{bmatrix}$

(1)求A的所有特征值和特征向量

(2)是否存在可逆矩阵P,使得$P^{-1}AP$为对角矩阵，

如果存在，求P；如果不存在，说明理由。

(2)是否存在正交矩阵U,使得$\mathrm{U}^{-1}AU$为对角矩阵，

如果存在，求U；如果不存在，说明理由。

7(8)设A为n阶实对称矩阵，证明，A为半正定矩阵$\Leftrightarrow\forall$c>0,cE+A为正定矩阵。

8(7)设A为n阶可逆实对称矩阵，B为n阶实反对称矩阵，且有AB=BA,证明：A-B可逆。

1，$D=\begin{vmatrix} a_{11}+b_1 & a_{12}+b_2 & \cdots & a_{1n}+b_n \\ a_{21}+b_1 & a_{22}+b_2 & \cdots & a_{2n}+b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}+b_1 & a_{n2}+b_2 & \cdots & a_{nn}+b_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b_2 & \cdots & a_{1n}+b_n \\ a_{21} & a_{22}+b_2 & \cdots & a_{2n}+b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}+b_2 & \cdots & a_{nn}+b_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_{12}+b_2 & \cdots & a_{1n}+b_n \\ b_1 & a_{22}+b_2 & \cdots & a_{2n}+b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_1 & a_{n2}+b_2 & \cdots & a_{nn}+b_n \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b_2 & \cdots & a_{1n}+b_n \\ a_{21} & a_{22}+b_2 & \cdots & a_{2n}+b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}+b_2 & \cdots & a_{nn}+b_n \end{vmatrix} + b_1 \begin{vmatrix} 1 & a_{12}+b_2 & \cdots & a_{1n}+b_n \\ 1 & a_{22}+b_2 & \cdots & a_{2n}+b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_{n2}+b_2 & \cdots & a_{nn}+b_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b_2 & \cdots & a_{1n}+b_n \\ a_{21} & a_{22}+b_2 & \cdots & a_{2n}+b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}+b_2 & \cdots & a_{nn}+b_n \end{vmatrix} + b_1 \sum_{i=1}^{n} A_{i1} = \cdots$$

3,(1),如果$A=0$,则A满足条件；

(2),如果$0<R(A)<n-1$,$\because A^*=0$,此时$A\neq A^*$;

(3),如果$R(A)=n-1$,$\Rightarrow R(A^*)=1$

(a),当$n>2$时，$A\neq A^*$

(b),当$n=2$时，即R(A)=1,设$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$,

则$A^*=\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$,如果$A=A^*\Rightarrow a=d, b=c=0$

$\therefore A=\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$,此时R(A)=0，或者，R(A)=2，

矛盾。$\therefore A\neq A^*$

（4）如果$R(A)=n\Rightarrow R(A^*)=n$,

$\therefore A^*=|A|A^{-1}=A\Leftrightarrow A^2=|A|E$

综上，满足$A=A^*$的矩阵为零矩阵，

或者$A^2=|A|E$的可逆矩阵

5,(1)显然V非空,$\because 0\in V$;又$\because A^{3k}=E, A^{3k+1}=A, A^{3k+2}=A^2$

$\therefore V=L(A^2,A,E)$,$\therefore \forall c\in C, f_1(A), f_2(A)\in V$,

$f_1(A)+f_2(A)\in V, cf_1(A)\in V$

$\therefore$ V关于矩阵的加法和数乘构成复数域C上的一个线性空间

(2)设有：$k_1A^2+k_2A+k_3E=0$,

$$\Rightarrow k_1\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{bmatrix} + k_3\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k_1+k_2+k_3=0 \\ \omega^2k_1+\omega k_2+k_3=0 \\ \omega k_1+\omega^2k_2+k_3=0 \end{cases} \because \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \omega^2 & \omega & 1 \\ \omega & \omega^2 & 1 \end{vmatrix} = 3(\omega-\omega^2)\neq 0$$

$\therefore k_1=k_2=k_3=0 \therefore A^2, A, E$线性无关，为$V$的一组基,$\dim V=3$

$6(1)\left|\lambda E-A\right|=\lambda^2(\lambda-1)(\lambda-\frac{1}{2})$

$\lambda_1=\lambda_2=0, AX=0$基础解系：$\left(1,0,0,0\right)^T$,$\left(0,1,0,0\right)^T$

$\lambda_1=1,(\mathrm{E}-A)X=0$基础解系：$\left(-7,5,3,5\right)^T$

$\lambda=\frac{1}{2},(\frac{1}{2}\mathrm{E}-A)X=0$基础解系：$\left(-8,6,1,2\right)^T$

(2) P存在,(3) U不存在,$\because$ A不是对称矩阵

$7\Rightarrow$由已知，$X^TAX\geq 0,\therefore X^T(cE+A)X=cX^TX+X^TAX>0$

$\Leftarrow$设λ为A的特征值，则$c+\lambda$为$cE+A$的特征值，

$\because\forall c>0, cE+A$为正定$\Rightarrow\forall c>0$，$c+\lambda>0,\Rightarrow\lambda\geq 0$

$8,\left|A-B\right|=\left|A\right|\left|E-A^{-1}B\right|$

$\because(A^{-1}B)^T=-A^{-1}B$,下证明,1不是反对称矩阵的实特征值

设$C^T=-C, CX=\lambda X\Rightarrow X^TCX=\lambda X^TX=0\Rightarrow\lambda=0$

$\therefore\left|E-A^{-1}B\right|\neq 0\ \therefore\left|A-B\right|\neq 0$

$\left(\text{反对称矩阵的实特征值必为}0\right)$

考试5

1，(10) D= $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n-2 & 2-n & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & n-1 & 1-n \end{vmatrix}$

$=\frac{1}{2}(-1)^{n-1}(n+1)!$

2,(15) 设a, b, c, d为任意常数，有线性方程组如下：

$\begin{cases} x_1+ax_2+a^2x_3=a^3 \\ x_1+bx_2+b^2x_3=b^3 \\ x_1+cx_2+c^2x_3=c^3 \\ x_1+dx_2+d^2x_3=d^3 \end{cases}$

1, 证明当a, b, c, d互异时，方程组无解

2，设a=b=k, c=d=-k时，$(-1, 1, 1)^T$时方程组的一个解

求方程组的通解

$X=(-1,1,1)^T+t(-1,0,1)^T$

$\begin{cases} x_1+kx_2+k^2x_3=k^3 \\ x_1-kx_2+k^2x_3=-k^3 \end{cases}$

$\Rightarrow k=\pm 1, \begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1-x_2+x_3=-1 \end{cases}$

3(15) 设$R^{2\times 2}$是2阶实矩阵关于矩阵的加法和数乘应算构成的实线性空间，

令V=$\{A\in R^{2\times 2}: tr(A)=0\}$

(1), 证明V是$R^{2\times 2}$的一个子空间

(2)求V的一组基及dimV=3 基：$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

4(15), 设$A_{n\times n}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

求A的设特征值和对应的特征向量（n≥2）

$|\lambda E-A|=\lambda^n-1=0$

$\Rightarrow \begin{cases} \text{当}n\text{为偶数，}\lambda_1=1,\ \lambda_2=-1, \\ \zeta_1=[1,1,\cdots,1]^T,\ \zeta_2=[1,-1,1,-1,\cdots,1,-1]^T \\ \text{当}n\text{为奇数，}\lambda=1,\ \xi=[1,1,\cdots,1]^T \end{cases}$

5(15)当$t=?$时，实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$为正定二次型 $t\in(-0.8, 0)$

6(15), 设V=$R[X]_3$是次数小于3的实系数多项式和零多项式组成的关于多项式的加法和数乘所组成的实线性空间

1，证明：$\{1+x^2, 1+x, 1\}$为V的一组基，记为基(A)

2，如对于多项式$p_1(x)=a_1+a_2x+a_3x^2, p_2(x)=b_1+b_2x+b_3x^2$, 定义内积$(p_1(x), p_2(x))=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

试用simit正交化把基(A)改造为V的标准正交基

3，设$\{1+x+x^2, 1-x^2, 1-x\}$为V的另一组基, 记为基(B)，求基(A)到基(B)的过度矩阵

4，基(A)，基(B)的度量矩阵之间有何关系？

8, A=$P\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q=(P\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1})(PQ)$

$=BC, B^2=B, C$可逆

7(8), 设$A, B\in P^{n\times n}$, 证明：(1) $AB+B$与$BA+B$有相同特征值，(2), 如果$AB=(B-A^T)A$, 证明$A=0$

8(7)，证明任意一个方阵一定可以表示为一个幂等矩阵和一个可逆矩阵的乘积

1, $\because \begin{bmatrix} E & B \\ A & E \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2-Ar_1} \begin{bmatrix} E & B \\ 0 & AB \end{bmatrix} \therefore \begin{bmatrix} E & 0 \\ -A & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E & B \\ A & E \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E & B \\ 0 & AB \end{bmatrix} \therefore \begin{vmatrix} E & B \\ A & E \end{vmatrix}=|E-AB|$

$\begin{bmatrix} E & A \\ B & E \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2-Br_1} \begin{bmatrix} E & A \\ 0 & BA \end{bmatrix} \therefore \begin{bmatrix} E & 0 \\ -B & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E & A \\ B & E \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E & A \\ 0 & BA \end{bmatrix} \therefore \begin{vmatrix} E & A \\ B & E \end{vmatrix}=|E-BA|$

$\therefore |E-AB|=|E-BA|, \frac{1}{\lambda}A$替换$A \Rightarrow |\lambda E-AB|=|\lambda E-BA$

$AB+B=(A+E)B, BA+B=B(A+E)$

$2, AB=(B-A^T)A=BA-A^TA$

$\Rightarrow A^TA=BA-AB, \Rightarrow tr(A^TA)=0 \Rightarrow a=0$

6(15), 设V=R$\left[X\right]_3$是次数小于3的实系数多项式和零多项式组成的关于多项式的加法和数乘所组成的实线性空间

1，证明:$\left\{1+x^2,1+x,1\right\}$为$V$的一组基，记为基(A)

2，如对于多项式$\left\{1+x^2,1+x,1\right\}$为$V$的一组基$p_1(x)=a_1+a_2x+a_3x^2$, $p_2(x)=b_1+b_2x+b_3x^2$, 定义内积$\left(p_1(x),p_2(x)\right)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$
试用simit正交化把基(A)改造为V的标准正交基

3，设$\left\{1+x+x^2,1-x^2,1-x\right\}$为$V$的另一组基,记为基(B)，求基(A)到基(B)的过度矩阵

4，基(A)，基(B)的度量矩阵之间有何关系？

解:1,$\because\left[1+x^2,1+x,1\right]=\left[1, x,x^2\right]\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}=\left[1, x,x^2\right]M_1$,$\because M_1$可逆,$\therefore\left\{1+x^2,1+x,1\right\}$为$V$的一组基

2，令$\beta_1=p_1(x)=1+x^2$，$\beta_2=p_2(x)-\dfrac{(p_2(x),\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=p_2(x)-\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\beta_1=(1+x)-\dfrac{1}{2}(1+x^2)=\dfrac{1}{2}(1+2x-x^2)$

$$\beta_3=p_3(x)-\frac{(p_3(x),\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(p_3(x),\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=1-\frac{1}{2}(1+x^2)-\frac{1/2}{3/2}\cdot\frac{1}{2}(1+2x-x^2)=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}x^2$$

单位化得到一组标准正交基:$\left\{\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}x,\dfrac{\sqrt{6}}{6}+\dfrac{\sqrt{6}}{3}x-\dfrac{\sqrt{6}}{6}x^2,\dfrac{\sqrt{3}}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x^2\right\}$

3,$\left[1+x+x^2,1-x^2,1-x\right]=\left[1, x,x^2\right]\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&-1\\1&-1&0\end{bmatrix}=\left[1, x,x^2\right]M_2=\left[1+x^2,1+x,1\right]M_1^{-1}M_2$

$\therefore$基(A)到基(B)的过度矩阵:$M=M_1^{-1}M_2=\begin{bmatrix}1&-1&0\\1&0&-1\\-1&1&1\end{bmatrix}$

4,基(A)的度量矩阵: $A=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&1\end{bmatrix}$;基(B)的度量矩阵:B=$\begin{bmatrix}3&0&0\\0&2&1\\0&1&2\end{bmatrix}\Rightarrow A,B$等价，合同，不相似

考试4

1（10）$\begin{vmatrix} \cos\frac{\alpha-\beta}{2} & \sin\frac{\alpha+\beta}{2} & \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \\ \cos\frac{\beta-\gamma}{2} & \sin\frac{\beta+\gamma}{2} & \cos\frac{\beta+\gamma}{2} \\ \cos\frac{\gamma-\alpha}{2} & \sin\frac{\gamma+\alpha}{2} & \cos\frac{\gamma+\alpha}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}[\sin(\beta-\alpha)+\sin(\gamma-\beta)+\sin(\alpha-\gamma)]$

2 (15) 设$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,且$A^{-1}+E$可逆，又设：$A^{-1}XA+XA+2E=0$求X

$$(A^{-1}+E)X=-2A^{-1}, X=-2(A+E)^{-1}=-\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & & \\ 2 & 4 & \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

3,（15），求解线性方程组：$\begin{cases} x+y+z=1 \\ ax+by+cz=d \\ a^2x+b^2y+c^2z=d^2 \end{cases}$ $\overline{A} \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & 0 & (c-a)(c-b) & (d-a)(d-b) \end{bmatrix}$

1,当a,b,c互不相同时，唯一解：x=$\frac{(b-d)(c-d)}{(b-a)(c-a)}, y=\frac{(b-d)(c-d)}{(b-a)(b-c)}, z=\frac{(d-a)(d-c)}{(c-a)(c-b)}$

2,当a=b=c$\neq$d时，无解。

3，当a=b=c=d时，x=1$-k_1-k_2, y=k_1, z=k_2$

4,当a,b,c,d再只有两个不同，例如$d=a\neq b=c$,则有一个自由变量，$x=1, y=\frac{a-c}{b-d}, z=k$

4,(15),1,设$A_{n\times n}$的n个特征值为λ_1，$\lambda_2,\cdots$，λ_n,求矩阵$C=\begin{bmatrix}0 & A\\ A & 0\end{bmatrix}$的特征值。

2，已知$\sum_{k=1}^{n} a_k=0$,求$A_{n\times n}=\begin{bmatrix}a_1^2+1 & a_1a_2+1 & \cdots & a_1a_n+1\\ a_2a_1+1 & a_2^2+1 & \cdots & a_2a_n+1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_na_1+1 & a_na_2+1 & \cdots & a_n^2+1\end{bmatrix}$的特征值。

1,$|\lambda E_{2n}-C|=\begin{vmatrix}\lambda E_n & -A\\ -A & \lambda E_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda E_n-A & -A\\ \lambda E_n-A & \lambda E_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda E_n-A & -A\\ 0 & \lambda E_n+A\end{vmatrix}=|\lambda E_n-A||\lambda E_n+A|$

$\therefore C$的特征值为λ_1，$\lambda_2,\cdots$，λ_n,-λ_1,-$\lambda_2,\cdots$,-λ_n

2，$A=\begin{bmatrix}a_1 & 1\\ a_2 & 1\\ \vdots & \vdots\\ a_n & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}$,

$$|\lambda E-A|=\left|\lambda E-\begin{bmatrix}a_1 & 1\\ a_2 & 1\\ \vdots & \vdots\\ a_n & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}\right|$$

$$=\lambda^{n-2}\left|\lambda E_2-\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1 & 1\\ a_2 & 1\\ \vdots & \vdots\\ a_n & 1\end{bmatrix}\right|=\lambda^{n-2}(\lambda-n)(\lambda-\sum_{k=1}^{n} a_k^2)$$

5,(15) 已知$A=\begin{bmatrix}A_1\\A_2\end{bmatrix}$为实的对称矩阵，其中$A_1$，$A_2$分别为$p\times n,(n-p)\times n$ 矩阵

(1)，求二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^T(A_1{}^TA_1-A_2{}^TA_2)X$的正惯性指数和负惯性指数。

(2), 证明矩阵$A_1{}^TA_1-A_2{}^TA_2$可逆

6，(15) 设R$[X]$是实系数多项式全体，定义其上的内积如下：

$$(f(x),g(x))=\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}f(x)g(x)dx \quad \forall f(x),g(x)\in \mathrm{R}[X]$$

(1) 将1，x, x^2, x^3 改造成正交多项式组;

(2)将多项式$4x^3+3x^2+2x+1$ 用上多项式线性表示

证明(15)

7(8)设$A\in R^{n\times n}$, 如$\forall X\in R^n$, 有 $\|AX\|=\|X\|$, 证明A是正交矩阵

8(7) 1, 求矩阵U, W, X, Y使得 $U=aE_r-AB, W=-A, X=-\frac{1}{a}B, Y=E_s-\frac{1}{a}BA$

$$\begin{bmatrix}E_r&0\\X&E_s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}aE_r&A\\B&E_s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}aE_r&A\\0&Y\end{bmatrix},\begin{bmatrix}E_r&W\\0&E_s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}aE_r&A\\B&E_s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}U&0\\B&E_s\end{bmatrix}$$

2, $a^s|aE_r-AB|=a^r|aE_s-BA|$是否成立?

$5, \because R(A_1^T A_1) = R(A_1) = p, R(A_2^T A_2) = R(A_2) = n-p,$

$\because A_1^T A_1$为半正定，$\therefore$ 有正交矩阵$Q_1 \Rightarrow Q_1^T (A_1^T A_1) Q_1 = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p, 0, \cdots, 0), \lambda_i > 0$

设$X = Q_1 Y \Rightarrow f = X^T (A_1^T A_1 - A_2^T A_2) X = Y^T Q_1^T A_1^T A_1 Q_1 Y - Y^T Q_1^T A_2^T A_2 Q_1 Y$

$= Y^T diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p, 0, \cdots, 0) Y - Y^T Q_1^T A_2^T A_2 Q_1 Y$

$\because Q_1^T A_2^T A_2 Q_1$为半正定，$\therefore$ 有正交矩阵$Q_2 \Rightarrow Q_2^T (Q_1^T A_2^T A_2 Q_1) Q_2 = diag(0, \cdots, 0, \lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \cdots, \lambda_n), \lambda_i > 0$

设$Y = Q_2 Z, Q_2 = (q_{ij})_{n\times n}, f(Z) = \lambda_1 (q_{11} z_1 + \cdots + q_{1n} z_n) + \cdots + \lambda_p (q_{p1} z_1 + \cdots + q_{pn} z_n) - \lambda_{p+1} z_{p+1}{}^2 - \cdots - \lambda_n z_n{}^2$

令$W = \begin{bmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1p} & q_{1\,p+1} & & q_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{p1} & \cdots & q_{pp} & q_{pp+1} & & q_{pn} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix} Z,$

$$5 A_1^T A_1 - A_2^T A_2 = (A_1^T, A_2^T) \begin{bmatrix} E_p & \\ & -E_{n-p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$$

$$= A^T \begin{bmatrix} E_p & \\ & -E_{n-p} \end{bmatrix} A, \therefore A_1^T A_1 - A_2^T A_2 \text{与} \begin{bmatrix} E_p & \\ & -E_{n-p} \end{bmatrix} \text{合同}$$

$\Rightarrow f(W) = \lambda_1 w_1{}^2 + \cdots + \lambda_p w_p{}^2 - \lambda_{p+1} w_{p+1}{}^2 - \cdots - \lambda_n w_n{}^2$

$$6, \quad \beta_1 = 1, \beta_2 = x - \frac{\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} x dx}{\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx} = x, \beta_3 = x^2 - \frac{\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} x^2 dx}{\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx} - \frac{\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} x^3 dx}{\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} x^2 dx} = x^2 - \frac{1}{2}, \beta_4 = x^3 - \frac{3}{4} x$$

$$4x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = \frac{5}{2} + 5x + 3(x^2 - \frac{1}{2}) + 4(x^3 - \frac{3}{4} x)$$

$$7, \|AX\|^2 = (AX, AX) = (AX)^T (AX) = X^T A^T AX = \|X\|^2 = X^T X$$

$$\therefore X^T (A^T A - E) X = 0, \because (A^T A - E)^T = (A^T A - E) \therefore A^T A = E$$

考试3

解答题

1.计算行列式
$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & -2 & 7 & 7 & -7 \\ -6 & 4 & -9 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 4 & 1 & -2 \\ -2 & 6 & 5 & 4 & -3 \end{vmatrix} = -84$$

2，设A是r阶可逆矩阵，B,C,D为相关矩阵使得$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$为m×n矩阵，$E_r$，$E_{m-r}$，$E_{n-r}$为单位矩阵。

（1）试求（m-r）×r矩阵X和r×（n-r）矩阵Y使得下面两式成立：

$$\begin{pmatrix} E_r & O \\ X & E_{m-r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ O & F_1 \end{pmatrix},$$

并求出F_1和F_2。

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_r & Y \\ O & E_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ C & F_2 \end{pmatrix},$$

$X=-CA^{-1}, Y=-A^{-1}B, F_1=D-CA^{-1}B=F_2$

$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D-CA^{-1}B|$

（2）当$m=n$时，化$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}$为较低阶得行列式的积。

3.（1）已知矩阵A满足$(A-E)^2=2(A+E)^2$，求A^{-1}.

(2)已知矩阵A满足$2A^2+3A-3E=0$，求证（$A+2E$)可逆，并求出（$A+2E)^{-1}$

$A^{-1}=-A-6E$，$(A+2E)^{-1}=2A-E$

4，设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是$n$维线性空间$V$的一组基，向量$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$有

$\beta_1=\alpha_1$，$\beta_2=\alpha_1+\alpha_2$，$\cdots$，$\beta_n=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$，

（1）求证向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$，也是线性空间$V$的一组基，

（2）求基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$到基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$的过渡矩阵，

（3）在V中求基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$和基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$下具有相同坐标的向量$\alpha$。

5，$A=\begin{bmatrix}2&1&1&2\\0&1&3&1\\1&a&c&1\end{bmatrix},\beta^T=[0,1,0],\eta^T=[1,-1,1,-1]$

如果η是$AX=\beta$的一个解，求$AX=\beta$的通解

6，设$A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\a&4&b\\-3&-3&5\end{bmatrix}$有三个线性无关的特征向量，且$\lambda=2$是$A$的二重特征值，求可逆矩阵$P$，使得$P^{-1}AP$为对角矩阵。

二， 证 明 题 与 判 断 题 ： （ 共 2题 ， 共 20分 ）

7.设实二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$,证明：在条件$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$下，$f$的最大值恰是该二次型的矩阵$A$的最大特征值。

8，设α_1，α_2，α_3，α_4，α_5，为5个5元向量，$A=(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5)_{5\times5}$.
甲乙两人都对A实施了有限次初等变换如下：

$$A \xrightarrow{\text{有限次初等变换}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所不同的是：甲只使用了初等行变换，而乙既使用了初等行变换也使用了初等列变换。基于上述初等变换过程，甲乙都得出$r(A)=3$, 且α_1，α_2，α_4是α_1，α_2，α_3，α_4，α_5的一组极大线性无关组。请判断甲乙两人是否正确，请说明详细理由。

4 (1) $(\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n)\begin{bmatrix}1&1&1&\cdots&1\\&1&1&\cdots&1\\&&1&\cdots&1\\&&&\ddots&\vdots\\&&&&1\end{bmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n)M$

M 可逆，$\therefore\ \beta_1,\beta_2,\cdots\beta_n$ 也是线性空间V的一组基

（2）$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n)=(\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_n)M^{-1},\ M^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&0&\cdots&0\\&1&-1&\cdots&0\\&&\ddots&\cdots&0\\&&&1&-1\\&&&&1\end{bmatrix}=N$

（3）设 α 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n$ 下坐标 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\Rightarrow X=NX$

$X=(1,0,\cdots,0)^T\quad\therefore\ \alpha=k\alpha_1$

5 $\because\ A\eta=\beta\quad 1-a+c-1=0\Rightarrow a=c$

$\overline{A}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{bmatrix}2&1&1&2&0\\0&1&3&1&1\\0&a-\frac{1}{2}&c-\frac{1}{2}&0&0\end{bmatrix}$ 当 $a=c=\frac{1}{2}$ 时，$R(A)=R(\overline{A})=2$

通解 $\eta+k_1(-1,-3,1,0)^T+k_2(-2,1,-1,2)^T$

6 $\lambda_1 = 2$ (2重)， $R(2E-A)=1 \Rightarrow 2E-A \xrightarrow{\text{行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2-a & a-b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow a=2, b=-2$

$\lambda_1+\lambda_1+\lambda_2=1+4+5 \Rightarrow \lambda_2=6$

特征向量 $\alpha_{11}=(-1,1,0)^T, \alpha_{12}=(1,\ 0,\ 1)^T\ ;\alpha_{21}=(1,\ -2,\ 3)^T$

令 $P=(\alpha_{11},\alpha_{12},\alpha_{21})$ 则有 $P^{-1}AP=diag(2,2,6)$

7 $f = X^TAX \overset{X=UY,U^TU=E}{=\!=\!=\!=\!=} Y^T(U^TAU)Y = \lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2$

$\underset{设\lambda_1=\max(\lambda_i)}{\overset{X^TX=1\Rightarrow Y^TY=1}{\leq}} \lambda_1(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2) \overset{令y_1=1,y_2=\cdots=y_n=0}{=\!=\!=\!=\!=\!=} \lambda_1$

8 甲对， 乙错

乙错是因为初等列变换可能使得向量顺序改变

甲对是因为由Gauss消元法，可以证明：

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_4\alpha_4=\theta \Leftrightarrow x_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}2\\2\\0\\0\\0\end{bmatrix}x+x_4\begin{bmatrix}1\\0\\3\\0\\0\end{bmatrix}=\theta$$

考试2

一，计算题85分

1，$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & & & \\ & \lambda & -1 & & \\ & & \lambda & -1 & \\ & & & \lambda & -1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix}$ $=\lambda^5+\lambda^4+2\lambda^3+3\lambda^2+4\lambda+5$

2，设$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & 2 & 3 \\ & & 3 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \end{bmatrix}$，求$(A^*)^*, (B^*)^*$

$$R(B^*)=\begin{cases} n & R(B)=n \\ 1 & R(B)=n-1 \\ 0 & R(B)<n-1 \end{cases}$$

$$|A|=6, A^*(A^*)^*=(A^*)^*E, (A^*)^*=|A^*|(A^*)^{-1}=|A|A=6A$$

$$R(B)=2 \Rightarrow R(B^*)=1 \Rightarrow R(B^*)^*=0 \Rightarrow (B^*)^*=0$$

3，求a，使得$A=\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$与$B=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$等价

$$a=1$$

4，设$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 2 & a & 1\\ -1 & 1 & a\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 1 & a\\ -a-1 & -2\end{bmatrix}$，当$a=?$方程$AX=B$

无解，唯一解，无穷多解。且有解时求解(用基础解系表示)

解，$(A\vdots B)\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & \vdots & 2 & 2\\ 0 & a+2 & 3 & \vdots & -3 & a-4\\ 0 & 0 & a-1 & \vdots & -a+1 & 0\end{bmatrix}$

1，$a\neq 1$ 且 $a\neq -2$ $\because R(A)=R(A\vdots B)=3$ $\therefore AX=B$ 有唯一解

$\because (A\vdots B)\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{bmatrix}1 & & & \vdots & 1 & \dfrac{3a}{a+2}\\ & 1 & & \vdots & 0 & \dfrac{a-4}{a+2}\\ & & 1 & \vdots & -1 & 0\end{bmatrix}$，$\therefore X=\begin{bmatrix}1 & \dfrac{3a}{a+2}\\ 0 & \dfrac{a-4}{a+2}\\ -1 & 0\end{bmatrix}$

$2, a=-2$ $\because R(A)=2\neq R(A\vdots B)=3$ $\therefore$无解

$3, a=1$时，$(A\vdots B)\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & \vdots & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow X=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1-k_1 & -1-k_2\\ k_1 & k_2\end{bmatrix}$

5, 求a, 使得二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)$ 正惯性指数为1，, 负惯性指数为2

解，二次型矩阵 $A=\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$

$$|\lambda E-A|=(\lambda-a+1)^2(\lambda-a-2) \qquad \begin{cases} \lambda_1=a-1\text{（2重根）} \\ \lambda_2=a+2\quad\text{（单根）} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} a-1<0 \\ a+2>0 \end{cases} \Rightarrow -2<a<1$$

6, 设 $A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} 4 & -15 & u \\ 2 & -7 & v \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

这里u,v是已知实数，求 $A^{99},BA,CB,C^{99}B$

解 特征值 $\begin{cases} \lambda_1=0 & \text{特征向量} & \xi_1=(3,2,2)^T \\ \lambda_2=-1 & \text{特征向量} & \xi_2=(1,0,0)^T \\ \lambda_3=-2 & \text{特征向量} & \xi_3=(1,2,0)^T \end{cases}$

令 $P=(\xi_1\xi_2\xi_3) \Rightarrow P^{-1}AP=diag(0,-1,-2)$

$$A = P\Lambda P^{-1} \Rightarrow A^{99} = P\Lambda^{99}P^{-1} = \begin{bmatrix} -2+2^{99} & 1\text{-}2^{99} & 2\text{-}2^{98} \\ \text{-}2+2^{100} & 1\text{-}2^{100} & 2\text{-}2^{99} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$CB = BA = \begin{bmatrix} 4 & -7 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C^2B = BA^2, C^{,3}B = C(BA^2) = BA^3, \cdots, C^{99}B = BA^{99}$$

$$\therefore C^{99}B = BA^{99} = \begin{bmatrix} -6+5\cdot 2^{99} & 3-5\cdot 2^{99} & 6-5\cdot 2^{99} \\ -2+2^{100} & 1-2^{100} & 2-2^{99} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

二.证明题

7(8), 设A,B都是实对称矩阵，A的特征值在区间$\left[a,b\right]$上，

B的特征值在区间$\left[c,d\right]$上,

则，A+B的特征值在区间$\left[a+c,b+d\right]$上

证明：$\forall\lambda_0 < a+c$, 一定$\exists\lambda_1 < a, \lambda_2 < c$, 使得$\lambda_0=\lambda_1+\lambda_2$

$\because A+B-\lambda_0 E=(A-\lambda_1 E)+(B-\lambda_2 E)$

$\because (A-\lambda_1 E)$ 与 $(B-\lambda_2 E)$ 都是正定矩阵

$\therefore A+B-\lambda_0 E$ 也是正定矩阵, $\therefore \left|A+B-\lambda_0 E\right| \neq 0$

$\therefore \lambda_0$不是$A+B$的特征值

同理，$\forall\lambda_0 > b+d$, 也不是$A+B$的特征值

命题得证

8，设n阶矩阵A的每列有两个非零元素，一个在主对角线上，
另一个不在主对角线上，若主对角线上元素大于1,
不在主对角线上元素等于1，问A是否可逆，证明你的结论

证明 记$B = A^T$,则B的每行有两个非零元素，一个在主对角线上，
另一个不在主对角线上，且主对角线上元素大于1，
不在主对角线上元素等于1， 考虑 BX=0

若有非零解 X=$\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)^T \neq \theta$ 使得$BX = 0$

设$\left|x_s\right| = \max\left(\left|x_j\right|\right) > 0$

则存在j_s，使得 $b_{ss}x_s + b_{sj_s}x_{j_s} = 0$ $(b_{ss} > 1, b_{sj_s} = 1)$

$\therefore \left|x_{j_s}\right| = \left|b_{ss}x_s\right| > \left|x_s\right|$ 矛盾 $\therefore BX = 0$,只有零解,$\therefore B$ 可逆

考试1

1, $\begin{vmatrix} 1-x & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ a & a^2-x & a^3 & \cdots & a^n \\ a^2 & a^3 & a^4-x & \cdots & a^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{n-1} & a^n & a^{n+1} & \cdots & a^{2n-2}-x \end{vmatrix}$

$$\xrightarrow[c_1+a\sum_{i=2}^{n}c_i]{r_i-ar_{i-1}\ \mathrm{i}=n\cdots 2}(-1)^n\left(x^n-x^{n-1}\frac{a^{2n}-1}{a^2-1}\right)$$

2，(1) $|A_{3\times3}|=-2$,求$\left|\left(\frac{1}{12}A\right)^{-1}+(3\mathrm{A})^*\right|$ $=108$

(2) A 满足 $A^3+3A+E=0$,求$(A+2E)^{-1}$ $=\frac{1}{13}(A^2-2A+7E)$

3，已知线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=1 \\ x_1-2x_2+x_3=2 \\ x_1+ax_2+bx_3=c \end{cases}$有解$\alpha_1=\begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}^T,\alpha_2=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & -1 \end{bmatrix}^T$求通解

解 利用解的结构原理，先求$AX=0$的基础解系

显然 $R(A)\geq 2$

又 $\because\ \beta=\alpha_1-\alpha_2=\frac{5}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ 是$AX=0$的非零解 $\therefore R(A)\leq 2$

$\therefore R(A)=2$ 且β是 $AX=0$的基础解系

$\therefore$ 方程组的通解 $X=\alpha_1+k\beta \quad k\in P$

5,已知$A=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & a & 2 \\ 3 & 1 & b \end{bmatrix}$与$B=\begin{bmatrix} -1 & & \\ & 2 & \\ & & c \end{bmatrix}$相似，求$a,b,c$和$P$,使得$P^{-1}AP=B$

$a,b,c=0,1,-2\ \ or\ \ 1,0,-2$

当$a,b,c=0,1,-2$ 时 $P_1=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$，当$a,b,c=1,0,-2$ 时 $P_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

4，在 R^4 中两组基 (a) $\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4$，(b) $\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4$

其中 $\xi_1=[1,0,0,0]^T$，$\xi_2=[0,1,0,0]^T$ $\xi_3=[0,0,1,0]^T$ $\xi_4=[0,0,0,\ 1]^T$

$\eta_1=[8,1,2,-7]^T$，$\eta_2=[5,4,2,-5]^T$，$\eta_3=[4,2,4,-4]^T$，$\eta_4=[8,2,3,-7]^T$

(1) 求从基 (a) 到基 (b) 的过渡矩阵

(2) 在 R^4 中另有一组基 (c),求从基 (c) 到基 (b) 的过渡矩阵

$\varepsilon_1=[1,0,0,0]^T$，$\varepsilon_2=[1,1,0,0]^T$ $\varepsilon_3=[1,1,1,0]^T$ $\varepsilon_4=[1,1,1,1]^T$

(3) 在 R^4 中求向量 α，使得 α 在基 (a) 和基 (b) 下有相同的坐标

解 (1) $\because$ $(\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4)=(\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4)\begin{bmatrix}8&5&4&8\\1&4&2&2\\2&2&4&3\\-7&-5&-4&-7\end{bmatrix}=(\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4)M_{12}$

(2) $\because$ $(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4)=(\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4)\begin{bmatrix}1&1&1&1\\&1&1&1\\&&1&1\\&&&1\end{bmatrix}=(\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4)M_{13}$

$\therefore$ $(\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4)=(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4)M_{13}^{-1}$

$\therefore$ $(\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4)=(\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4)M_{12}=(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4)M_{13}^{-1}M_{12}=(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4)M_{32}$

$$M_{32}=M_{13}^{-1}M_{12}=\begin{bmatrix}7&1&2&6\\-1&2&-2&-1\\9&7&8&10\\-7&-5&-4&-7\end{bmatrix}$$

(3) $\alpha=(\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4)X=EX$

$=(\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4)X=(\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4)M_{12}X$ $\therefore$ $(M_{12}-E)X=0$

求得基础解系 $\beta=[5,1,2,-6]^T$ $\therefore$ $\alpha=k\beta$ $k\in P$

6, 已知$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^{\,2}+3x_2^{\,2}+3x_3^{\,2}+6x_2x_3$

求$f(x_1,x_2,x_3)$在条件$x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+x_3^{\,2}=1$下的最大值

解 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{bmatrix}2 & & \\ & 3 & 3 \\ & 3 & 3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=X^TAX$

求得A的特征值我$0,2,6$

$$f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX\underset{U^TU=E}{\overset{X=UY}{\rightleftarrows}}Y^T\begin{bmatrix}0 & & \\ & 2 & \\ & & 6\end{bmatrix}Y=2y_2^{\,2}+6y_3^{\,2}\le 6(y_2^{\,2}+y_3^{\,2})=6$$

取$Y_0=[0,0,1]^T$,则有$X_0=UY_0$且$\|X_0\|=\|Y_0\|=1$,使得

$f(X_0)=6\quad\therefore f_{\max}=6=\max\{\lambda_i\}$

7，在R^3中取2015 个向量，如果每一个向量都是一个正数与其余向量之和的数乘，求这2015 个向量的和

解　由已知 $\alpha_{\mathrm{i}} = c_c \sum_{j=1(\neq i)}^{2015} \alpha_j \quad (i=1\cdots 2015) \quad c_i > 0$

$$\therefore -\frac{1}{c_i}\alpha_i + \sum_{j\neq i}\alpha_j = 0 \qquad (i=1\cdots 2015)$$

上面可以看为关于 $\alpha_1 \cdots \alpha_{2015}$ 的线性方程组

$$\because 系数行列式 D = \begin{vmatrix} -\frac{1}{c_1} & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -\frac{1}{c_2} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & -\frac{1}{c_{2015}} \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \ \ (i = 1\cdots 2015)$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{2015}\alpha_i = 0$$

8(7) 设$\left|A_{n\times n}\right|<0$证明

(1) 当n为偶数时，A的特征值既有正的特征值，又有负的特征值

(2)当n为奇数时，A必有负的特征值

证明 设$\lambda_1\cdots\lambda_t$为A的实特征值，

$u_1,\overline{u_1},\cdots u_s,\overline{u_s}$ 是A的复特征值 则 t+2s=n

则$|A|=(\lambda_1\cdots\lambda_t)(u_1\overline{u_1}\cdots u_s\overline{u_s})<0$

$\because\left|u_i\overline{u_i}\right|>0\ \therefore(u_1\overline{u_1}\cdots u_s\overline{u_s})>0$

$\therefore\lambda_1\cdots\lambda_t<0$

$\therefore$当n为偶数时，t为奇数

当n为奇数时，t为偶数