2016－2017秋冬期中考试（2016.11.14）

1,(10) 计算D= $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & x \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & x^2 \\ 0 & 5 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & x^3 \end{vmatrix} = 2x(x-1)(x-2)$

2, (15) 解非齐次线性方程

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 - 3x_5 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 = 1 \\ 4x_1 + 6x_2 - 2x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 7 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 + 4x_5 = 1 \end{cases}$$ P59例2.3.2

3 ,(15) (1),叙述秩的定义 P51定义2.2.2

(2) 求矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 2 & 2\lambda & \lambda+4 & 3 \end{bmatrix}$ 的秩 P61例2.3.4

4, (15) 求矩阵方程 $AXB = C$ 的解，其中：

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

P106例3.4.4

5, (15) 已知: $A^* BA = 2BA - 12E$, 其中： $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, 求 B P88例3.2.2

6, (15) 设 $A_{r\times r}, B_{s\times s}$ 可逆，证明: $G = \begin{bmatrix} & A \\ B & \end{bmatrix}$ 可逆, 并求 G^{-1} P96例3.3.5

7, (15) (1), 证明对 A 进行一次初等行变换等价于用相应的初等矩阵左乘 A P101定理3.4.1

(2), 证明 A 可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$ P86定理3.2.1

2016---2017春夏期中考试

1，(10) D=$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} = x^2y^2$

5，(15) 求矩阵方程：

$$X\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

2,(15) D=$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$，求$A_{11}+2A_{12}+\cdots+nA_{1n} = (2-n)n!$

3, $\begin{cases} x_1+\lambda x_2+\lambda x_3 = 1 \\ \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1+x_2+x_3 = \lambda \end{cases}$ λ取什么值时，无解, 有解，有解时求解

$$\bar{A} \xrightarrow{\text{行变换}} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda & 1-\lambda^2 \\ 0 & 0 & 0 & (2+\lambda)(1-\lambda) \end{array}\right]$$

(1), $\lambda \neq -2$, 且$\lambda \neq 1$，$\Rightarrow$ 无解

(2), $\lambda=1$，$\Rightarrow$ 有解，$x_1 = 1-s-t,\ x_2 = s,\ x_3 = t$

(3), $\lambda=-2$, $\Rightarrow$ 有解 $x_1 = -1,\ x_2 = -1-k,\ x_3 = k$

4, (15), 叙述秩的定义;

设 $A_{n\times n} = \begin{bmatrix} 0 & x_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x_{n-1} \\ x_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$，求$R(A^*) = \begin{cases} n, & 当x_1, x_2, \cdots, x_n全不为零 \\ 1, & 当x_1, x_2, \cdots, x_n只有一个为零 \\ 0, & 当x_1, x_2, \cdots, x_n至少有两个为零 \end{cases}$

6, (10)(利用第三种初等变换) 把矩阵$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix}$表示成$\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix}$型的乘积 ($a \neq 0$)

7, (10)，设R($A_{n\times n}$)=r，$A^2 = A$, 证明：$trA = r$

8, (10), 设A, B$\in P^{n\times n}$, $A+2B = AB$, 证明: $A-2E$可逆

6, (10)(利用第三种初等变换) 把矩阵$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{a} \end{bmatrix}$表示成$\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix}$型的乘积（ a ≠ 0 ）

$$\because \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{a} \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 + a r_2} \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & \dfrac{1}{a} \end{bmatrix} \xrightarrow{c_1 + c_2} \begin{bmatrix} a+1 & 1 \\ \dfrac{1}{a} & \dfrac{1}{a} \end{bmatrix} \xrightarrow{c_1 - a c_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{1}{a} - 1 & \dfrac{1}{a} \end{bmatrix} \xrightarrow{c_2 - c_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{1}{a} - 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{c_1 - (\frac{1}{a} - 1) c_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 - \dfrac{1}{a} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 - \dfrac{1}{a} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -a & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 + \dfrac{1}{a} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

7, (10), 设R($A_{n\times n}$) =r, $A^2=A$, 证明：$trA=r$

7, 证明　　设: $A=P\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q$

$$\because A^2=A\Rightarrow P\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}QP\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q=P\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}(QP)\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

分 $QP=\begin{bmatrix} C_{r\times r} & F \\ G & H \end{bmatrix}\Rightarrow C_{r\times r}=E_r$

$$trA=tr(P\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q)=tr(\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}QP)=tr(\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_{r\times r} & F \\ G & H \end{bmatrix})$$

$$=tr\begin{bmatrix} C_{r\times r} & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=trC_{r\times r}=trE_r=r$$

2017-2018春夏期中考试（2018-5-2）

1(10) 计算D= $\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 2x^4 - x^3 - 7x^2 + 12x - 8$

4(15) A 为n阶矩阵(n ≥ 2)，A= $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 求 $r((A^*)^*)$

$n = 2$时 $\begin{cases} x \neq 0, r((A^*)^*) = 2 \\ x = 0, r((A^*)^*) = 1 \end{cases}$

$n > 2$时 $\begin{cases} x \neq 0, r((A^*)^*) = n \\ x = 0, r((A^*)^*) = 0 \end{cases}$ $\because r(A^*)^* = 1$

2(15) 设 $D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$，求 $x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_nA_n = n\prod_{i=1}^{n} x_i$

其中：A_i为x_i的代数余主式

3(15) 设 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$

λ取什么值时无解？唯一解？无穷多解？有解时求其解。

λ=-2时，无解；

$\lambda \neq 1$且$\lambda \neq -2$时，唯一解：$x_1 = -\frac{\lambda+1}{\lambda+2}, x_1 = \frac{1}{\lambda+2}, x_1 = \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}$,

$\lambda = 1$,无穷多解：$x_1 = 1 - s - t, x_2 = s, x_3 = t$

5(15) 设A是对角线上元素全为零的4阶实对称可逆矩阵

B= $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2018 \end{bmatrix}$

设A= $\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & a_{34} \\ a_{13} & a_{24} & a_{34} & 0 \end{bmatrix}$, $E + AB = \begin{bmatrix} 1 & & a_{13} & 2018a_{14} \\ & 1 & a_{23} & 2018a_{24} \\ & & 1 & 2018a_{34} \\ & & a_{34} & 1 \end{bmatrix}$, $|E + AB| = 1 - 2018(a_{34})^2 \neq 0$

(1) A中元素满足什么条件时，$E + AB$可逆。

(2)当$E + AB$可逆时，证明（$E + AB)^{-1}A$是对称矩阵。

$((E + AB)^{-1}A)^T = A^T((E + AB)^{-1})^T = A((E + AB)^T)^{-1} = A(E + BA)^{-1}$

$= \left[(E + BA)A^{-1}\right]^{-1} = \left[A^{-1} + B\right]^{-1} = \left[A^{-1}(E + AB)\right]^{-1} = (E + AB)^{-1}A$

6(10)设$A_{2\times2}^{2018}=0$.证明：$A^2=0$

证明$\because |A|=0 \therefore \begin{cases} R(A)=0 \Rightarrow A=0 \\ R(A)=1 \Rightarrow A^2=\lambda A \Rightarrow A^{2018}=\lambda^{2017}A=0 \Rightarrow \lambda=0 \end{cases}$

7(10), 设A, B, C, D为n阶方阵，A可逆，M=$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$

证明，$R(M)=n \Leftrightarrow D=CA^{-1}B$

证明$\because \begin{bmatrix} E & 0 \\ -CA^{-1} & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{bmatrix}$

$\therefore R(M)=R\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{bmatrix}=R(A)+R(D-CA^{-1}B)=n+R(D-CA^{-1}B)$

8(10)设n阶方阵A满足$A^3=2E$, $B=A^2-2A+E$, 证明B可逆，并求B^{-1}

证明$\because A^3=2E \Rightarrow A^3-E=(A-E)(A^2+A+E)=E \Rightarrow (A-E)^{-1}=A^2+A+E$

$B=A^2-2A+E=(A-E)^2 \Rightarrow B$开逆，

$B^{-1}=\left[(A-E)^2\right]^{-1}=\left[(A-E)^{-1}\right]^2=\left[A^2+A+E\right]^2$

$=3A^2+4A+5E$

2017--2018秋冬期中考试2017.11.18

1.(15)，计算n阶行列式：

$$\begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y \\ z & x & y & \cdots & y \\ z & z & x & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x \end{vmatrix}, x, y, z\text{为任意实常数}$$

2，（20）设k为实常数，当k为何值时，

下面线性方程组无解？唯一解？

无穷多解？有解时，求解。

$$\begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = k-3 \\ x_1 + kx_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + kx_3 = -2 \end{cases}$$

3,(20)求矩阵方程

$$x\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

4,(15)，设$R(A_{n\times n})=r$，证明存在$B_{n\times n}$，

且$R(B)=n-r$，使得$AB=0$

5,(15).$R(A_{n\times n})=1$，$A_{n\times n}\in P^{n\times n}$，证明：

1，存在两组不全为零的实数

$a_1,\cdots a_n; b_1,\cdots,b_n$，使得：

$A=(a_1,\cdots a_n)^T(b_1,\cdots,b_n)$

2，存在实数k，使得$A^2=kA$

6,(8)设$A_{m\times n}X_{n\times 1}=d_{m\times 1}$有解，

$B_{m\times s}X_{s\times 1}=c_{m\times 1}$无解，

令$G=(ABdc)_{m\times(n+s+2)}$

证明，$R(G)\le R(A)+R(B)+1$

7,(10)设$A,B,C,D\in R^{n\times n}$，证明：当$AC=CA$时

有：$\begin{vmatrix} A & D \\ C & B \end{vmatrix}=|AB-CD|$

1, (15) $\begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y \\ z & x & y & \cdots & y \\ z & z & x & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x \end{vmatrix}$

当$z = y$时，$D_n = \left[x + (n-1)y\right](x-y)^{n-1}$

当$z \neq y$时，

$$D_n \overset{\text{拆第一列}}{=\!=} \begin{vmatrix} z & y & y & \cdots & y \\ z & x & y & \cdots & y \\ z & z & x & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x-z & y & y & \cdots & y \\ 0 & x & y & \cdots & y \\ 0 & z & x & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & z & z & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= z(x-y)^{n-1} + (x-z)D_{n-1} \qquad (1)$$

$$D_n \overset{\text{拆第一行}}{=\!=} \begin{vmatrix} y & y & y & \cdots & y \\ z & x & y & \cdots & y \\ z & z & x & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x-y & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ z & x & y & \cdots & y \\ z & z & x & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= y(x-z)^{n-1} + (x-y)D_{n-1} \qquad (2)$$

$$\Rightarrow D_n = \frac{z(x-y)^n - y(x-z)^n}{z-y}$$

2, (20) $\begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = k-3 \\ x_1 + kx_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + kx_3 = -2 \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = (k-1)^2(k-2)$$

$\therefore$ 当$D \neq 0$时，即当$k \neq 1$且$k \neq 2$时

有唯一解：$x_1 = \dfrac{k-1}{k+2}$, $x_2 = x_3 = \dfrac{-3}{k+2}$

当$k = 2$时，$R(A) = 2 \neq R(\bar{A}) = 3 \Rightarrow$ 方程组无解

当$k = 1$时，$R(A) = R(\bar{A}) \Longrightarrow$ 方程组无穷多组解

$$\begin{cases} x_1 = -2 - t_1 - t_2 \\ x_2 = t_1 \\ x_3 = t_2 \end{cases}, t_1, t_2 \in P$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} k & 1 & 1 & \vdots & k-3 \\ 1 & k & 1 & \vdots & -2 \\ 1 & 1 & k & \vdots & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & k & \vdots & -2 \\ 1 & k & 1 & \vdots & -2 \\ k & 1 & 1 & \vdots & k-3 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & k & \vdots & -2 \\ 0 & k-1 & 1-k & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & (1-k)(2+k) & \vdots & 3(k-1) \end{bmatrix}$$

3, (20) 求矩阵方程

$$X\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&2\\1&0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&-6\end{bmatrix}$$, 即XA=B

$\because |A|=3\neq 0,\therefore A$可逆, $\Rightarrow$ $X=BA^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-2&-2\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}A\\ \cdots\\ B\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{列变换}}\begin{bmatrix}E\\ \cdots\\ BA^{-1}\end{bmatrix}$$

4, (15), 设$R(A_{n\times n})=r$, 证明存在$B_{n\times n}$,

且$R(B)=n-r$, 使得$AB=0$

$A=P\begin{bmatrix}E_r&0\\0&0\end{bmatrix}Q$, 取$B=Q^{-1}\begin{bmatrix}0&0\\0&E_{n-r}\end{bmatrix}$

则, $R(B)=n-r$, 且 $AB=0$

5, (15). $R(A_{n\times n})=1$, $A_{n\times n}\in P^{n\times n}$, 证明:

1, 存在两组不全为零的实数 $a_1,\cdots a_n;b_1,\cdots,b_n$, 使得: $A=(a_1,\cdots a_n)^T(b_1,\cdots,b_n)$

2, 存在实数k, 使得$A^2=kA$

$$A=P\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{bmatrix}Q=P\begin{bmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix}\cdot[1\quad 0\quad \cdots\quad 0]\,Q=\begin{bmatrix}p_{11}\\p_{21}\\ \vdots\\p_{n1}\end{bmatrix}[q_{11}\quad q_{12}\quad\cdots\quad q_{1n}]$$

$$A^2=\begin{bmatrix}p_{11}\\p_{21}\\ \vdots\\p_{n1}\end{bmatrix}\left([q_{11}\quad q_{12}\quad\cdots\quad q_{1n}]\begin{bmatrix}p_{11}\\p_{21}\\ \vdots\\p_{n1}\end{bmatrix}\right)[q_{11}\quad q_{12}\quad\cdots\quad q_{1n}]$$

$$=(q_{11}p_{11}+\cdots+q_{1n}p_{n1})A$$

6, (8) 设$A_{m\times n}X_{n\times 1}=d_{m\times 1}$有解，$B_{m\times s}X_{s\times 1}=c_{m\times 1}$无解，

令$G=(ABdc)_{m\times(n+s+2)}$，证明：$R(G)\le R(A)+R(B)+1$

令 $\bar{A}=[A\vdots d]$，$\tilde{B}=[B\vdots c]$　则有：$R(\bar{A})=R(A)$，$R(\tilde{B})=R(B)+1$

$$R(G)=R(AdBc)=R(\bar{A}\tilde{B})\le R(\bar{A})+R(\tilde{B})=R(A)+R(B)+1$$

(其中：$R(A)+R(B)=R\begin{bmatrix}A & \\ & B\end{bmatrix}=R\begin{bmatrix}A & AB\\ & B\end{bmatrix}\ge R(AB)$)

7, 设A, B, C, D$\in R^{n\times n}$, 证明：当$AC=CA$时

有：$\begin{vmatrix}A & D\\ C & B\end{vmatrix}=|AB-CD|$　　$\because \begin{bmatrix}A & D\\ C & B\end{bmatrix}\xrightarrow{c_2-c_1(A^{-1}D)}\begin{bmatrix}A & 0\\ C & B-CA^{-1}D\end{bmatrix}$

证明，当A可逆时，$\because \begin{bmatrix}A & D\\ C & B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E & -A^{-1}D\\ 0 & E\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & 0\\ C & B-CA^{-1}D\end{bmatrix}$

$$\therefore \begin{vmatrix}A & D\\ C & B\end{vmatrix}=|A||B-CA^{-1}D|=|A(B-CA^{-1}D)|=|AB-ACA^{-1}D|=|AB-CD|$$

当A不可逆时，即$|A|=0$，令：$f(x)=|xE+A|=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$

则总存在一个实数Z, 当x ≥ Z时，$f(x)\ne 0$，此时$xE+A$可逆

$\because AC=CA \therefore (xE+A)C=C(xE+A)$　　$\therefore \begin{vmatrix}xE+A & D\\ C & B\end{vmatrix}=|(xE+A)B-CD|$

等式俩边为关于x的多项式，常数项相等(即当x=0)，

$$\therefore \begin{vmatrix}A & D\\ C & B\end{vmatrix}=|AB-CD|$$

2018--2019秋冬(2018, 11, 13)

1(15) $D=\begin{vmatrix} a_1+x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+x \end{vmatrix}=\begin{cases} a_1+x & n=1 \\ x^{n-1}(a_1+a_2+\cdots+a_n+x) & n>1 \end{cases}$

2(15) 设$\sigma=(i_1 i_2\cdots i_n)$是一个n阶排列，A=$\left[a_{rj}\right]$是一个$n$解方阵，并且A中元素满足对于每个固定r，当$j=i_r$时，$a_{rj}=1$，否则$a_{rj}=0$，求$|A|=(-1)^{\tau(\sigma)}$

3(15) $\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=1 \\ x_1+x_2+\lambda x_3=1 \end{cases}$ 问，当λ取什么值时，方程组无解？唯一解？无穷多解？有解时求解。

当$\lambda\neq 1,-2$时, 唯一解: $x_1=x_2=x_3=\dfrac{1}{\lambda+2}$，

当$\lambda=1$,时，无穷多解$x_1=1-s-t,\ x_2=t,\ x_3=s$：当$\lambda=2$时，无解。

4(15), 设A=$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, 求矩阵方程：$AX=A+2X$ $\quad X=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

5(15)设A为4阶反对称矩阵，B=$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, 证明，$E+AB$可逆

设A=$\begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{bmatrix}$, $|E+AB|=1+2f^2\neq 0$

6(10), 设A为n阶实对称矩阵(n>1), $|A|=0$, 证明， $A_{ii}A_{jj}=(A_{ij})^2, (i, j=1,2,\cdots,n)$

A^*为对称矩阵， R(A)=n-1, or, R(A)<n-1,

$\therefore$ R(A^*)=1, or, R(A^*) = 0, A^*的任意二阶子式等于0

7(7), $A, B \in P^{n\times n}$, $M = \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}$, 证明： R(M) ≥ R(A+B) +R(A-B)

$$\because \begin{bmatrix} E & E \\ 0 & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E & -E \\ 0 & E \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A+B & 0 \\ A & A-B \end{bmatrix}$$

$$\therefore R(M)=R(\begin{bmatrix} A+B & 0 \\ A & A-B \end{bmatrix}) \geq R(A+B)+R(A-B)$$

8(8)设$A, B \in P^{n\times n}$, 满足$B=E+AB$, 证明: $AB=BA$

$$\because B=E+AB \Rightarrow (E-A)B=E \Leftrightarrow B(E-A)=E \Rightarrow AB=BA$$