IMT2220 Semestre 2024-1
Tarea 3

Elwin van 't Wout

25 de mayo de 2024

Introducción

El área de un dominio bidimensional $D \subset \mathbb{R}^2$ se puede calcular con la integral

$$A(D) = \iint_D 1 \, \mathrm{d}A.$$

En el caso de dominios del tipo I y II se puede aplicar el teorema de Fubini y calcular la integral doble como una integral iterada. Sin embargo, no todos los dominios son del tipo I o II. Un ejemplo son los fractales. En estos casos, ya no es posible calcular el área analíticamente pero debe ser aproximada con un método numérico.

El conjunto de Mandelbrot es uno de los ejemplos más conocidos de los fractales. Este conjunto se define como todos los números complejos c tal que la sucesión $x_0 = 0$, $x_n = x_{n-1}^2 + c$, $n = 1, 2, \ldots$ se mantiene acotada en valor absoluto. Es decir, $|x_n|$ es acotado para $n \to \infty$. Se puede demostrar que el número complejo c pertenece al conjunto de Mandelbrot si $|x_n| < 2$ para todos n. Al revés, si $|x_j| \geq 2$ para algún j, entonces no pertenece al conjunto de Mandelbrot.

Calcular el área del conjunto de Mandelbrot es desafiante debido a su carácter fractal. Uno de los métodos numéricos para estimar su área se llama *pixel counting*, lo cual es similar al método de Monte Carlo. En este algoritmo, distintos valores complejos c son generados de forma aleatoria en una región adecuada del plano complejo. En seguido, se calcula la sucesión x_n y se

verifica su convergencia. La proporción de puntos que se mantiene acotados entrega la estimación del área del conjunto de Mandelbrot.
Se puede resumir el algoritmo como sigue.

1. Definir un dominio $V \subset \mathbb{C}$ que incluye todo el conjunto de Mandelbrot.

2. Generar m puntos aleatorios $c_j \in V$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

3. Inicializar los valores $x_{0,j} = 0$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

4. Iterar sobre $k = 1, 2, 3, \ldots, K$ con K el número de iteraciones.

    a) Calcular $x_{k,j} = x_{k-1,j}^2 + c_j$ para $j = 1, 2, \ldots, m$.
    b) Contar el número de valores $|x_{k,j}| < 2$ para $j = 1, 2, \ldots, m$.
    c) Aproximar el área $\hat{A}_{k,m}(D)$.

El área del conjunto de Mandelbrot es

$$A(D) = \lim_{m,K \to \infty} \hat{A}_{K,m}(D)$$

pero en la práctica tomar un valor m y K fijo y largo es suficiente para tener una aproximación razonable.

Tarea

Esta tarea contempla el cálculo del área del conjunto de Mandelbrot.

1. Encuentre un dominio $V \subset \mathbb{C}$ que incluye todo el conjunto de Mandelbrot. Justifiquen por qué este dominio contiene todo el fractal.

2. Programe el método de *pixel counting* en Python.

3. Visualize con Matplotlib la convergencia de las aproximaciones $\hat{A}_{k,m}(D)$. Es decir, una figura con k en el eje horizontal y $\hat{A}_{k,m}(D)$ en el eje vertical, para un m grande.

4. No se conoce el valor exacto del área, pero las estimaciones comúnes dicen 1,506. Calcule la diferencia con tu estimación y justifique si tu algoritmo es correcto.

5. Visualize el conjunto de Mandelbrot en el plano complejo: dibujen los puntos c_j tal que $|x_{K,j}| < 2$. Utilice funciones de Matplotlib, p.ej., `scatter` o `imshow`.

Evaluación

Entregue todo el código y las respuestas a las preguntas en un Jupyter notebook a través de Canvas.

Los reglamientos del curso se puede encontrar en Canvas. Se destaca que las tareas deben ser hechas de forma individual. No se puede compartir código entre compañeros, tampoco usar código de fuentes externos.

Sugerencias

La librería `numpy.random` ofrece funcionalidad para generar números aleatorios. Revisen bien el intervalo de estos números: dibujen los puntos que crearon.

Pueden representar un número complejo como `a + 1j * b` en Python con `a` y `b` números o Numpy arrays. La variable `1j` representa la unidad imaginaria $\imath$: $\imath^2 = -1$.

Es común visualizar el conjunto de Mandelbrot con los colores dado por $x_{k,j}$. Cómo tarea adicional (sin puntaje) para los interesados: dibujen el valor $|x_{k,j}|$ para cada punto en el conjunto de Mandelbrot.