Uppgift 1

Givet: Proton med kinetisk energi på $E_k = 6.50keV$ samt att vi vet att massan för en proton är $m_p = 938.272MeV/c^2$

A - Vad är protonens linjära momentum?

Det linjära momentumet för en proton ges utav ekvationen:

$$p = m_p v \tag{1}$$

Den kinetiska energin kan beräknas med hjälp utav ekvation:

$$E_k = \frac{1}{2} m_p v^2 \tag{2}$$

Med hjälp av ekvation (1) och (2) så kan en ekvation för p göras som endast innehåller kända värden:

$$p = \sqrt{2E_k m_p} \tag{3}$$

Nummeriskt så blir det:

$$p = \sqrt{2 \times 6.50 \times 10^3 \times 938.272 \times 10^6} eV/c \approx \mathbf{2.47MeV/c} \tag{4}$$

B - Vad är protonens de Broglie våglängd?

De Broglie våglängden ges utav ekvationen:

$$\lambda = \frac{h}{p} \tag{5}$$

Där h är Plancks konstant med ett värde på $4.1356673 feVs$ och p är momentumet från föregående del.

$$\lambda = \frac{4.1356673 \times 10^{-15} eVs}{2.469568 \times 10^6 eV/c} = 1.67465187 \times 10^{-21} cs \tag{6}$$

För att skriva om våglängden till SI-enheter så multipliceras svaret med ljusets hastihet, $c = 299792458 m/s$:

$$\lambda = 1.67465187 \times 10^{-21} s \times 299792458 m/s \approx \mathbf{0.502pm} \tag{7}$$

Uppgift 2

Givet: Protonen rör sig i en endimensionell låda med längden $a = 1.50nm$ med potentialen:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{för} \quad 0 \leq x \leq a \\ \infty, & \text{annars} \end{cases}$$

Givet är även att då tiden $t = 0$ så är vågfunktionen $\psi(x)$ är partikeln kända att vara:

$$\psi(x) = \begin{cases} Ax^2(a-x), & \text{för} \quad 0 \leq x \leq a \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

Där A är en konstant

A - Bestäm konstanten A så att vågfunktionen är normaliserad

Normalisering av vågekvationen i en endimensionell låda bestämms med ekvation:

$$1 = \int_0^a |\psi(x)|^2 dx$$

Med insättning av $\psi(x)$ blir ekvationen:

$$1 = \int_0^a |Ax^2(a-x)|^2 dx = |A|^2 \int_0^a x^4(a-x)^2 dx = |A|^2 \int_0^a (a^2x^4 - 2ax^5 + x^6) dx =$$

$$= |A|^2 \left[\frac{a^2x^5}{5} - \frac{ax^6}{3} + \frac{x^7}{7} \right]_0^a = |A|^2 \left(\frac{a^7}{5} - \frac{a^7}{3} + \frac{a^7}{7} \right) = |A|^2 \frac{a^7}{105}$$

A bryts ut ur ekvationen samt värdet på a läggs in:

$$A = \sqrt{\frac{105}{a^7}} = \sqrt{\frac{105}{(1.50 \times 10^{-9})^7}} = \mathbf{264575.1311}$$

B - Bestäm sannolikheten att det är grundtillståndets energi om man mäter energin

Sannolikheten att det är en specifik energinivå ges utav $|c_n|^2$ där c_n ges utav:

$$c_n = \int_0^a \psi_n^* f(x) dx$$

Där ψ_n^* ges utav:

$$\psi_n^* = \psi_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}$$

och $f(x)$ ges utav:

$$f(x) = Ax^2(a-x)^2$$

c_n blir då:

$$c_n = \sqrt{\frac{2}{a}} A \int_0^a \sin \frac{n\pi x}{a} x^2 (a-x)^2$$

Sätter in algebraiska versionen av A innan samt förenklar c_n:

$$c_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \sqrt{\frac{105}{a^7}} \int_0^a \sin \frac{n\pi x}{a} x^2 (a-x) dx = \sqrt{210} a^{-4} \int_0^a \sin \frac{n\pi x}{a} x^2 (a-x) dx =$$

$$= \sqrt{210} a^{-4} \int_0^a \sin \frac{n\pi x}{a} (ax^2 - x^3) dx =$$

$$= \sqrt{210} a^{-4} \left(a \int_0^a \sin \frac{n\pi x}{a} x^2 dx - \int_0^a \sin \frac{n\pi x}{a} x^3 dx \right)$$

Beräknar integralerna var för sig för att underlätta:

$$\int_0^a \sin \frac{n\pi x}{a} x^2 dx = \left[-\frac{a \cos \frac{n\pi x}{a}}{n\pi} x^2 \right]_0^a - \int_0^a -\frac{a \cos \frac{n\pi x}{a}}{n\pi} 2x dx =$$

$$= -\frac{a^3(-1)^n}{n\pi} + \left[\frac{2a^2 \sin \frac{n\pi x}{a}}{n^2\pi^2} x \right]_0^a - \int_0^a \frac{2a^2 \sin \frac{n\pi x}{a}}{n^2\pi^2} dx =$$

$$= -\frac{a^3(-1)^n}{n\pi} - \left[-\frac{2a^3 \cos \frac{n\pi x}{a}}{n^3\pi^3} \right]_0^a = \frac{a^3((-1)^n(2 - n^2\pi^2) - 2)}{n^3\pi^3}$$

Och andra integralen:

$$\int_0^a \sin \frac{n\pi x}{a} x^3 dx = \left[-\frac{a \cos \frac{n\pi x}{a}}{n\pi} x^3 \right]_0^a - \int_0^a -\frac{a \cos \frac{n\pi x}{a}}{n\pi} 3x^2 dx =$$

$$= -\frac{a^4(-1)^n}{n\pi} + \left[\frac{3a^2 \sin \frac{n\pi x}{a}}{n^2\pi^2} x^2 \right]_0^a - \int_0^a \frac{6a^2 \sin \frac{n\pi x}{a}}{n^2\pi^2} x dx =$$

$$= -\frac{a^4(-1)^n}{n\pi} - \left[-\frac{6a^3 \cos \frac{n\pi x}{a}}{n^3\pi^3} x \right]_0^a + \int_0^a -\frac{6a^3 \cos \frac{n\pi x}{a}}{n^3\pi^3} dx =$$

$$= -\frac{a^4(-1)^n}{n\pi} + \frac{6a^4(-1)^n}{n^3\pi^3} - \left[\frac{6a^4 \sin \frac{n\pi x}{a}}{n^4\pi^4} \right]_0^a = \frac{a^4(-1)^n(6 - n^2\pi^2)}{n^3\pi^3}$$

Sätt in de båda integralerna igen:

$$c_n = \sqrt{210} a^{-4} \left(a \frac{a^3((-1)^n(2 - n^2\pi^2) - 2)}{n^3\pi^3} - \frac{a^4(-1)^n(6 - n^2\pi^2)}{n^3\pi^3} \right) =$$

$$= \frac{\sqrt{210}}{n^3\pi^3} \Big(\big((-1)^n(2 - n^2\pi^2) - 2\big) - (-1)^n(6 - n^2\pi^2) \Big) = \frac{2\sqrt{210}}{n^3\pi^3} \Big(2(-1)^{n+1} - 1 \Big)$$

För att bräkna sannolikheten för att det ska vara grundtillståndets energi om man mäter energin så sättes $n = 1$ in i $|c_n|^2$:

$$|c_n|^2 = \left(\frac{2\sqrt{210}}{\pi^3} \big(2(-1)^2 - 1\big) \right)^2 = 0.873736... \approx 87.4\%$$