F0048T: Datorövning: Plana vågor

Simon Johnsson *johsim-7@student.ltu.se*

November 27, 2020

Uppgift 1

$$U(\bar{r}) = e^{i(k\bar{s}\cdot\bar{r}+\alpha)}$$

A - Beskriv vad som menas med vågtalet k, riktningsvektorn $\bar{s}$, positionsvektorn $|r|$ och faskonstanten α.

- Vågtalet k används för att ge ekvationerna en enklare form, vågtalet representerar $k = \frac{2\pi}{\lambda}$
- Riktningsvektorn $\bar{s}$ är en vektor som beskriver i vilken riktning som vågen propagerar
- positionsvektorn $|\bar{r}|$ betecknar vilket avstånd U mäts på från ljuskällan
- Faskonstanten α betecknar förskjutning av vågen i propageringsriktningen, $\bar{s}$.

B - Beskriv hur intensiteten beräknas från den komplexa amplituden och vad som menas med den komplexa amplitudens fas

Intensiteten för den komplexa amplituden beräknas med hjälp av

$$I(\bar{r}) = |U(\bar{r})|^2 = U(\bar{r})U^*(\bar{r})$$

Komplexa amplitudens fas innebär vågens relativa höjd jämfört med planet den propagerar i. Till exempel om vågen propagerar i yz-planet så är fasen värdet på x i punkten fasen beräknas i.

C - Skriv ner ekvationen för den komplexa amplituden och dess intensitet av en godtycklig plan monokromatisk våg med våglängden $\lambda = \lambda_0/n$ som propagerar i riktning $\bar{s}$ i ett fast kartesiskt koordinatsystem. Exemplifiera med ett fall då $\lambda = \lambda_0 = 1\mu m$ och $\bar{s}$ ligger i yz-planet med vinkeln 10° mot z-axeln

De givna storheterna ger

- $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi n}{\lambda_0}$
- $\bar{s} = \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{bmatrix}$

Detta ger komplexa amplituden

$$U(\bar{r}) = e^{i\left(\frac{2\pi n}{\lambda_0}\begin{bmatrix} s_x & s_y & s_z \end{bmatrix}^T \cdot \bar{r} + \alpha\right)}$$

och intensiteten

$$I(\bar{r}) = e^{i\left(\frac{2\pi n}{\lambda_0}\begin{bmatrix} s_x & s_y & s_z \end{bmatrix}^T \cdot \bar{r} + \alpha\right)} e^{-i\left(\frac{2\pi n}{\lambda_0}\begin{bmatrix} s_x & s_y & s_z \end{bmatrix}^T \cdot \bar{r} + \alpha\right)} = 1$$

Med insättning av värdena som skulle exemplifieras med får vi:
Komplexa amplituden

$$U(\bar{r}) = e^{i\left(2\pi 10^{12}\begin{bmatrix} 0 & \sin 10^\circ & \cos 10^\circ \end{bmatrix}^T \cdot \bar{r} + \alpha\right)}$$

och intensiteten kommer att fortsätta att vara 1 då det endast är komplexa exponenter och vi inte ändrat någon amplitud.

Uppgift 2

A - Beskriv vad som menas med fasmatchning. Skriv ner sambanden mellan de olika rikningscosinerna $(\{s_x, s_y, s_z\})$ vid gränsytan mellan de två mediumen.

Fasmatchning kommer ifrån när ljus bryts i ett medium så ändras riktningen samt våglängden, detta gör så att för att bibehålla kontinuerligteten i vågen så kan fasen på den utgående vågen behövas att fasförflyttas.

För fasmatchning så används likheten att vågen i första mediet ska vara lika som vågen i det andra mediet i brytningsytan vilket ger ekvationen:

$$\bar{f}_1 \cdot \bar{r} = \bar{f}_2 \cdot \bar{r} = \bar{f}_3 \cdot \bar{r}$$

Där $\bar{r}$ är en vektor i brytningsytan, $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$ och $\bar{f}_3$ är vektorer som beskriver den infallande, utfallande respektive reflekterade vågen. Givet av:

$$\bar{f}_1 = \frac{n_1}{\lambda_0}\bar{s_1}, \quad \bar{f}_1 = \frac{n_2}{\lambda_0}\bar{s_2}, \quad \bar{f}_1 = \frac{n_1}{\lambda_0}\bar{s_3}$$

Där λ_0 är våglängden i vakum och de olika riktningscosinerna kan beskrivas om man lägger vågen i yz-planet genom:

$$\bar{s_1} = \begin{bmatrix} s_{x1} \\ s_{y1} \\ s_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin\theta_1 \\ \cos\theta_1 \end{bmatrix}, \quad \bar{s_2} = \begin{bmatrix} s_{x2} \\ s_{y2} \\ s_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin\theta_2 \\ \cos\theta_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{s_3} = \begin{bmatrix} s_{x3} \\ s_{y3} \\ s_{z3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin\theta_3 \\ -\cos\theta_3 \end{bmatrix}$$

Där s_1 är den infallande riktningen, s_2 är den utfallande riktningen och s_3 är den reflekterade riktningen. $\theta_2 = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_1\right)$ och $\theta_3 = -\theta_1$.

Vågen kan även behöva förflyttas i propageringsriktningen för att matcha i brytningsytan detta görs i så fall av att bestämma α före och efter brytningen så att vågorna matchar. Till exempel vid translation:

$$e^{i(k_1\bar{s_1}\cdot\bar{r}+\alpha_1)} = e^{i(k_1\bar{s_2}\cdot\bar{r}+\alpha_2)}$$

B - Skriv ner sambanden för Fresnels ekvationer för p-polariserat ljus och hur de förhåller sig till riktningscosinerna och brytningsindexen.

Fresnels ekvationer för de p-polariserade ljuset kan beskrivas med följande ekvationer:

$$r_p = \frac{n_1 s_{z2} - n_2 s_{z1}}{n_1 s_{z2} + n_2 s_{z1}}$$

$$t_p = \frac{2n_1 s_{z1}}{n_1 s_{z2} + n_2 s_{z1}}$$

Där r_p och t_p är reflektion- respektive transmissionskoefficienter.

C - Beräkna samtliga riktningscosiner och transmissionskoefficienter (t_p) för fallen: I $\theta_1 = 20°$, $n_1 = 1$, $n_2 = 1.6$ och II $\theta_1 = 20°$, $n_1 = 1.6$, $n_2 = 1$

FALL I:
$\theta_2 \approx 12.3429°$
Riktningscosinerna:

$$\bar{s_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.3420 \\ 0.9397 \end{bmatrix} \qquad \bar{s_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2138 \\ 0.9769 \end{bmatrix}$$

Transmissionskoefficienten:

$$t_p = \frac{2 \times 1 \times 0.9397}{1 \times 0.9769 + 1.6 \times 0.9397} \approx 0.7577$$

FALL II:
$\theta_2 \approx 33.1773°$
Riktningscosinerna:

$$\bar{s_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.3420 \\ 0.9397 \end{bmatrix} \qquad \bar{s_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5472 \\ 0.8370 \end{bmatrix}$$

Transmissionskoefficienten:

$$t_p = \frac{2 \times 1.6 \times 0.9397}{1.6 \times 0.8370 + 1 \times 0.9397} \approx 1.3195$$

Uppgift 3

Beräkna energitransmitansen T för bägge fallen i uppgift 2c

FALL I:

$$T = |t_p|^2 \frac{n_2 s_{z2}}{n_1 s_{z1}} = |0.7577|^2 \frac{1.6 \times 0.9769}{1 \times 0.9397} \approx 0.9549$$

FALL II:

$$T = |t_p|^2 \frac{n_2 s_{z2}}{n_1 s_{z1}} = |1.3195|^2 \frac{1 \times 0.8370}{1.6 \times 0.9397} \approx 0.9693$$

Uppgift 4

A - Beskriv vad som menas med Brewstervinkeln, $theta_B$, och den kritiska vinkeln, θ_C, samt hur dessa förhåller sig till brytningsindex och infallande vinklar.

Brewservinkeln är den vinkeln där allt ljus som reflekteras är polariserat och vinkeln bestämms utav ekvationen: $\theta_B = \arctan\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$

Kritiska vinkeln är en vinkel som när man har en vinkel som är större så transmiteras inget ljus, den betämms utav ekvationen: $\theta_C = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$

Beräkna Brewstervinkeln θ_B för fallet $n_1 = 1$, $n_2 = 1.6$. Beräkna den kritiska vinkeln θ_C för fallet $n_1 = 1.6$, $n_2 = 1$

Brewservinkeln:

$$\theta_B = \arctan\left(\frac{1.6}{1}\right) = 57.99$$

Kritiska vinkeln:

$$\theta_C = \arcsin\left(\frac{1}{1.6}\right) = 38.68$$