F0048T: Datorövning: Gaussisk stråle

Simon Johnsson *johsim-7@student.ltu.se*

November 27, 2020

Uppgift 1:

Den komplexa amplituden för en gaussisk stråle är definerad utav ekvationen:

$$U(\bar{r}) = A_0 \frac{W_0}{W(z)} e^{-\frac{\rho^2}{W^2(z)}} e^{-ikz - ik\frac{\rho^2}{2R(z)} + i\zeta(z)}; \qquad \rho^2 = x^2 + y^2$$

Uttryck A_0 i termer av effekten P, våglängden λ och skärpedjupet z_0. Vi använder ekvationerna nedan för att skriva om A_0 på önskat sätt.

$$\begin{cases} \text{Intensitet} & I_0 = |A_0|^2 \\ \text{Effekt} & P = \frac{1}{2} I_0 (\pi W_0^2) \\ & W_0 = \sqrt{\frac{\lambda z_0}{\pi}} \end{cases}$$

Omskrivningarna ger:

$$A_0 = \sqrt{I_0} = \sqrt{\frac{2P}{\pi W_0^2}} = \sqrt{\frac{2P}{\pi \frac{\lambda z_0}{\pi}}} = \sqrt{\frac{2P}{\lambda z_0}}$$

Uppgift 2:

Första uttrycket

För att beskriva q_2 som en funktion q_1 och linsens fokallängd f så används ekvationen:

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D}$$

Där konstanterna kan bestämmas med hjälp av matrismetoden där vi använder matrisen för en tunn lins.

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}$$

Vid ihopslagning av de två ekvationerna så får vi:

$$q_2 = \frac{q_1}{-\frac{q_1}{f} + 1} = \frac{fq_1}{f - q_1}$$

Andra uttrycket

För att göra ett uttryck för fokallängden f med endast q_1 och den laterala förstoringen M så startars det från svaret i den tidigare delen:

$$q_2 = \frac{fq_1}{f - q_1} \Longrightarrow f = \frac{q_1 q_2}{q_2 - q_1}$$

Först används uttrycket $q_2 = -z' + iz_0'$

$$f = \frac{q_1(-z' + iz_0')}{-z' + iz_0' - q_1} \tag{1}$$

Sedan behövs både z' och z_0' tas bort ur uttrycket. En ekvation för z_0' kan tas fram ifrån ekvationen för fokusdjupet, $2z_0' = M^2(2z_0)$. Sedan för att göra en ekvation för z_0 så används randvilkoret, $W(z) = W(-z')$, samt förhållandet för strålmidjorna, $W_0' = MW_0$:

$$W(z) = W(-z') \Rightarrow W_0\sqrt{1 + (\frac{z}{z_0})^2} = MW_0\sqrt{1 + (\frac{z}{z_0})^2} \Rightarrow z' = \frac{z_0'}{M}\sqrt{1 + (\frac{z}{z_0})^2 - M^2}$$

Detta ger:

$$\begin{cases} z_0' = M^2 z_0 \\ z' = Mz_0\sqrt{1 + (\frac{z}{z_0})^2 - M^2} \end{cases}$$

Vid insättning av dessa i ekvation (1), skriva om $z = Re\{q_1\}$ och $z_0 = Im\{q_1\}$ samt omskrivning så får vi:

$$f = \frac{q_1\left(\sqrt{1 + \left(\frac{Re\{q_1\}}{Im\{q_1\}}\right)^2 - M^2} - iM\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{Re\{q_1\}}{Im\{q_1\}}\right)^2 - M^2} - iM + \frac{q_1}{Im\{q_1\}M}}$$

Uppgift 3:

Att kollimera en stråle innebär att strålens ljus parallellriktas. För att beräkna en lämplig kollimeringslins, f, så används ekvationen:

$$f = \frac{q_1 q_2}{q_2 - q_1}$$

Givet är $q_1 = (100 + i20)\mu m$ samt för att kollimera en stråle så är $W_0' = W(z)$ och realdelen av q_2 är lika med 0. För att beräkna q_2:

$$W(z) = W_0' \Rightarrow \begin{cases} W(z) = \sqrt{\frac{\lambda z_0}{\pi}\left(1 + \left(\frac{z}{z_0}^{2}\right)\right)} \\ W_0' = \sqrt{\frac{\lambda z_0'}{\pi}} \end{cases} \Rightarrow z_0' = z_0(1 + (\frac{z}{z_0})^2)$$

$$q_2 = iz_0(1 + (\frac{z}{z_0})^2) = \frac{i(z^2 + z_0^2)}{z_0}$$

Insättning i formeln för fokallängden blir:

$$f = \frac{z^2 + z_0^2}{z}$$

Och numeriskt där q_1 ger $z = 100\mu m$ och $z_0 = 20\mu m$

$$f = \frac{(100 \times 10^{-6})^2 + (20 \times 10^{-6})}{100 \times 10^{-6}} = \mathbf{104\mu m}$$

Uppgift 4:

För att beräkna vad för lins som behövs för att ljuset ska brytas ihop igen till en midja på $2W_0' = 4\mu m$ då $q_1 = (100 + i20)\mu m$ och $\lambda = 1\mu m$ så används ekvation:

$$f = \frac{q_1\big(\sqrt{1 + \big(\frac{Re\{q_1\}}{Im\{q_1\}}\big)^2 - M^2} - iM\big)}{\sqrt{1 + \big(\frac{Re\{q_1\}}{Im\{q_1\}}\big)^2 - M^2} - iM + \frac{q_1}{Im\{q_1\}M}}$$

q_1 är redan givet så det är endast förstoringen M som behöver beräknas. Förstoringen är given av $M = \frac{W_0'}{W_0}$ där $W_0 = \sqrt{\frac{\lambda Im\{q_1\}}{\pi}}$ vilket ger:

$$M = W_0'\sqrt{\frac{\pi}{\lambda Im\{q_1\}}} = 2 \times 10^{-6}\sqrt{\frac{\pi}{1 \times 10^{-6} \times 20 \times 10^{-6}}} = 0.7927$$

Sedan sätts detta in i ekvationen för brännvidden f:

$$f = \frac{(100 + i20) \times 10^{-6}\big(\sqrt{1 + \big(\frac{100}{20}\big)^2 - 0.7927^2} - i0.7927\big)}{\sqrt{1 + \big(\frac{100}{20}\big)^2 - 0.7927^2} - i0.7927 + \frac{(100+i20)\times 10^{-6}}{1\times 10^{-6}\times 20\times 10^{-6}}} = \mathbf{45.797\mu m}$$