

Uppgift 1

Givet: Proton med kinetisk energi på $E_k = 6.50\text{keV}$ samt att vi vet att massan för en proton är $m_p = 938.272\text{MeV}/c^2$

A - Vad är protonens linjära momentum?

Det linjära momentumet för en proton ges utav ekvationen:

$$p = m_p v \quad (1)$$

Den kinetiska energin kan beräknas med hjälp utav ekvation:

$$E_k = \frac{1}{2} m_p v^2 \quad (2)$$

Med hjälp av ekvation (1) och (2) så kan en ekvation för p göras som endast innehåller kända värden:

$$p = \sqrt{2E_k m_p} \quad (3)$$

Nummeriskt så blir det:

$$p = \sqrt{2 \times 6.50 \times 10^3 \times 938.272 \times 10^6 \text{eV}/c} \approx \mathbf{2.47\text{MeV}/c} \quad (4)$$

B - Vad är protonens de Broglie våglängd?

De Broglie våglängden ges utav ekvationen:

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (5)$$

Där h är Plancks konstant med ett värde på 4.1356673feVs och p är momentumet från föregående del.

$$\lambda = \frac{4.1356673 \times 10^{-15} \text{eVs}}{2.469568 \times 10^6 \text{eV}/c} = 1.67465187 \times 10^{-21} \text{cs} \quad (6)$$

För att skriva om våglängden till SI-enheter så multipliceras svaret med ljusets hastighet, $c = 299792458\text{m/s}$:

$$\lambda = 1.67465187 \times 10^{-21} \text{s} \times 299792458 \text{m/s} \approx \mathbf{0.502\text{pm}} \quad (7)$$

Uppgift 2

Givet: Protonen rör sig i en endimensionell låda med längden $a = 1.50nm$ med potentialen:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{för } 0 \leq x \leq a \\ \infty, & \text{annars} \end{cases}$$

Givet är även att då tiden $t = 0$ så är vågfunktionen $\psi(x)$ är partikeln kända att vara:

$$\psi(x) = \begin{cases} Ax^2(a-x), & \text{för } 0 \leq x \leq a \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

Där A är en konstant

A - Bestäm konstanten A så att vågfunktionen är normaliserad

Normalisering av vågekvationen i en endimensionell låda bestäms med ekvation:

$$1 = \int_0^a |\psi(x)|^2 dx$$

Med insättning av $\psi(x)$ blir ekvationen:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^a |Ax^2(a-x)|^2 dx = |A|^2 \int_0^a x^4(a-x)^2 dx = |A|^2 \int_0^a (a^2x^4 - 2ax^5 + x^6) dx = \\ &= |A|^2 \left[\frac{a^2x^5}{5} - \frac{2ax^6}{6} + \frac{x^7}{7} \right]_0^a = |A|^2 \left(\frac{a^7}{5} - \frac{a^7}{3} + \frac{a^7}{7} \right) = |A|^2 \frac{a^7}{105} \end{aligned}$$

A bryts ut ur ekvationen samt värdet på a läggs in:

$$A = \sqrt{\frac{105}{a^7}} = \sqrt{\frac{105}{(1.50 \times 10^{-9})^7}} = \mathbf{264575.1311}$$

B - Bestäm sannolikheten att det är grundtillståndets energi om man mäter energin

Sannolikheten att det är en specifik energinivå ges utav $|c_n|^2$ där c_n ges utav:

$$c_n = \int_0^a \psi_n^* f(x) dx$$

Där ψ_n^* ges utav:

$$\psi_n^* = \psi_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}$$

och $f(x)$ ges utav:

$$f(x) = Ax^2(a-x)^2$$

c_n blir då:

$$c_n = \sqrt{\frac{2}{a}} A \int_0^a \sin \frac{n\pi x}{a} x^2 (a-x)^2$$

Sätter in algebraiska versionen av A innan samt förenklar c_n :

$$\begin{aligned} c_n &= \sqrt{\frac{2}{a}} \sqrt{\frac{105}{a^7}} \int_0^a \sin \frac{n\pi x}{a} x^2 (a-x) dx = \sqrt{210} a^{-4} \int_0^a \sin \frac{n\pi x}{a} x^2 (a-x) dx = \\ &= \sqrt{210} a^{-4} \int_0^a \sin \frac{n\pi x}{a} (ax^2 - x^3) dx = \\ &= \sqrt{210} a^{-4} \left(a \int_0^a \sin \frac{n\pi x}{a} x^2 dx - \int_0^a \sin \frac{n\pi x}{a} x^3 dx \right) \end{aligned}$$

Beräknar integralerna var för sig för att underlätta:

$$\begin{aligned} \int_0^a \sin \frac{n\pi x}{a} x^2 dx &= \left[-\frac{a \cos \frac{n\pi x}{a}}{n\pi} x^2 \right]_0^a - \int_0^a -\frac{a \cos \frac{n\pi x}{a}}{n\pi} 2x dx = \\ &= -\frac{a^3(-1)^n}{n\pi} + \left[\frac{2a^2 \sin \frac{n\pi x}{a}}{n^2\pi^2} x \right]_0^a - \int_0^a \frac{2a^2 \sin \frac{n\pi x}{a}}{n^2\pi^2} dx = \\ &= -\frac{a^3(-1)^n}{n\pi} - \left[-\frac{2a^3 \cos \frac{n\pi x}{a}}{n^3\pi^3} \right]_0^a = \frac{a^3((-1)^n(2 - n^2\pi^2) - 2)}{n^3\pi^3} \end{aligned}$$

Och andra integralen:

$$\int_0^a \sin \frac{n\pi x}{a} x^3 dx =$$