Från och med lektion 6!!!

1 Potential som elastisk potentiell energi

I klassisk mekanik är elastisk potentiell energi $\frac{1}{2}kx^2$ men inte riktigt i QM.

Går att lösa på två sätt:

1. Algebraisk metod
2. Analytisk metod

1.1 Algebraisk metod

Tar ut algebraiskt med hjälp av TOSE stegoperatorerna $\hat{a}_+$ och $\hat{a}_-$. Stegoperatorerna är ej kommutativa så vi kan inte bara byta plats på dem.

Vi kan ta fram en kommutator för lägesoperatorn och rörelsemängdsoperatorn $[\hat{x}, \hat{p}]$:
Vi använder oss av en testfunktion $f(x)$ för att kunna evaluera Stegoperatorerna.

$$\begin{aligned}[\hat{x}, \hat{p}]f(x) = (\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x})f(x) = -i\hbar\left(x\frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}(xf(x))\right) = \\ -i\hbar\left[x\frac{d}{dx}f(x) - \frac{dx}{dx}f(x) - x\frac{d}{dx}f(x)\right] = i\hbar f(x)\end{aligned} \tag{1}$$

$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ kallas "canonical commutation relation"/"Osäkerhets sambandet"

Detta resultat appliceras på stegoperatorerna:

$$\hat{a}_-\hat{a_+} = \frac{1}{2\hbar m\omega}[\hat{p}^2 + (m\omega\hat{x})^2] - \frac{i}{2\hbar}[\bar{x}, \bar{p}] \tag{2}$$

$$\hat{a}_-\hat{a_+} = \frac{1}{\hbar\omega}\hat{H} - \frac{i}{2\hbar}(i\hbar) = \frac{1}{\hbar\omega}\bar{H} + \frac{1}{2} \tag{3}$$

$$\hat{H} = \hbar(\hat{a}_-\hat{a}_+ - \frac{1}{2}) \tag{4}$$

Jämföra med att byta plats på stegoperatorerna:

$$\hat{a}_+\hat{a}_- = \frac{1}{\hbar\omega}\bar{H} - \frac{1}{2} \tag{5}$$

$$\hat{H} = \hbar(\hat{a}_+\hat{a}_- + \frac{1}{2}) \tag{6}$$

Vilker leder till att vi kan skriva hamiltonoperatorn $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}_\mp\hat{a}_\pm \mp \frac{1}{2})$

Sätter in uttrycket i SE:

$$\hbar\omega(\hat{a}_\mp\hat{a}_\pm \mp \frac{1}{2})\Psi = E\Psi \tag{7}$$

Om vågfunktionen Ψ är en egenfunktion med egenvärde E, vad är $\hat{a}_\pm\Psi$?
Från SE för harmonisk oscillator: $\hat{H}\hat{a}_+\hat{a}_- + \frac{1}{2} = \hbar\omega(\hat{a}_+\hat{a}_- + \frac{1}{2})\hat{a}_+\Psi$

$$\hat{H}(\hat{a}_+, \Psi) = \hbar\omega(\hat{a}_+\hat{a}_-\hat{a}_+ + \frac{1}{2}\hat{a}_+)\Psi = \hbar\omega\hat{a}_+(\hat{a}_-\hat{a}_+ + \frac{1}{2})\Psi \tag{8}$$

För att kommutatorn $[\hat{a}_-, \hat{a}_+]$ ska vara kommutativt så måste den vara lika med 1 detta leder till:

$$\hat{H}(\hat{a}_+\Psi) = \hbar\omega\hat{a}_+(1 + \hat{a}_+\hat{a}_- + \frac{1}{2})\Phi = \hat{a}_+(\hat{H} + \hbar\omega)\Psi = \hat{a}_+(E + \hbar\omega)\Psi \tag{9}$$

Mellantermen är en konstant och kommutativ med de andra termerna:

$$\hat{H}(\hat{a}_+\Psi) = (E + \hbar\omega)\hat{a}_+\Psi \tag{10}$$

Detta betyder att om $\hat{H}\Psi = E\Psi$ så är $\hat{a}_+\Psi$ en egenfunktion med egenvärde $E + \hbar\omega$.
På samma sätt så ger det att $\hat{a}_-$ är en egenfunktion med egenvärde $E - \hbar\omega$.

$$\hat{H}(\hat{a}_-\Psi) = (E - \hbar\omega)\hat{a}_-\Psi \tag{11}$$

Detta gör så att om man multiplicerar vågfunktionen med steg-upp-operatorn $\hat{a}_+$ så ökar energin med $\hbar\omega$ för varje gång man gör det. Och på samma sätt för steg-ner-operatorn men denna kan inte gå oändligt långt ner utan det finns ett stopp nedåt på E_0.

OBS: $\hat{a}_\pm\Psi$ behöver inte vara normerade även om Ψ är det.

Vi tar lägsta energinivån E_0, om vi applicerar $\hat{a}_-$: $\hat{a}_-\Psi_0 = 0$

I SE:

$$\frac{d}{dx}\Psi_0 + \frac{m\omega}{\hbar}x\Psi_0 = 0 \tag{12}$$

Om man integrerar detta får man:

$$\ln\Psi_0 = -\frac{m\omega}{\hbar}\frac{x^2}{2} + c \tag{13}$$

vilket kan skrivas om till:

$$\Phi_0 = Ae^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \tag{14}$$

För allmänn lösning så behöver vi först normera Ψ_0

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |A|^2 e^{-(m\omega x^2)/\hbar} dx = A^2\sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega}} = 1 \tag{15}$$

$$A = \sqrt[4]{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \tag{16}$$

Vilket ger:

$$\Phi_0 = \sqrt[4]{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \tag{17}$$

Detta är stationära tillståndet för harmoniska oscillatorn för lägsta energi.

Hur ser E_0 ut?
Från SE: Beräkna energi för Ψ_0:

$$\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}_+\hat{a}_- + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\hbar\omega\Psi_0 = E_0\Psi_0 \tag{18}$$

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega \tag{19}$$

Ψ_0, E_0 är grundtillståndet vilket gör att de resterande är exiterade tillstånd och kan beskrivas med hjälp av att kliva uppåt med $\hat{a}_+$:

Energi för exiterade tillstånd:

$$E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega \tag{20}$$

vågfunktionen för exiterade tillstånd:

$$\Phi_n(x) = A_n(\hat{a}_+)^n\Phi_0(x) \tag{21}$$

Där n är större eller lika med 0.
Den generella bågfunktionen skulle då bli:

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\Psi_n(x,t) \tag{22}$$

Titta själv på sida 45-46 och räkna på det!