1. Teorētiskie uzdevumi

1. uzdevums

Pieņemsim, ka tiek mesti divi spēļu kauliņi. Kā izskatās elementāru notikumu telpa? Definēsim sekojošus notikumus:

1. $A = \{abi\ skaitļi\ vienādi\}$
2. $B = \{summa\ starp\ 7\ un\ 10\}$
3. $C = \{summa\ ir\ 2,\ 7\ vai\ 8\}$.

Aprēķināt:

1. $P(A), P(B)$ *un* $P(C)$
2. *Vai* $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$*?*
3. *Vai* A *un* B *ir neatkarīgi notikumi? Vai* B *un* C *ir neatkarīgi notikumi?*

Atrisinājums: Elementāru notikumu telpa ir visas iespējamās kauliņu kombinācijas $\Omega = \{\omega_{11}, \omega_{12}, .., \omega_{66}\}$

1. $P(A) = P(\{\omega_{11}, \omega_{22}, .., \omega_{66}\}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$
   $P(B) = P(\{\omega_{16}, \omega_{61}, ...\}) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$
   $P(C) = P(\{\omega_{11}, \omega_{16}, ...\}) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$
2. $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{36}$
   $P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{36}$
3. Ja A un B ir neatkarīgi notikumi, tad $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
   $P(A \cap B) = \frac{1}{18}, P(A)P(B) = \frac{1}{12}$, tāpēc A un B nav neatkarīgi notikumi
   $P(B \cap C) = \frac{11}{36}, P(C)P(B) = \frac{1}{6}$, tāpēc A un B nav neatkarīgi notikumi

2. uzdevums

Met trīs spēļu kauliņus. Aprēķināt varbūtību, ka vismaz uz viena no tiem uzkritīs vieninieks, pie nosacījuma, ka uz visiem kauliņiem ir uzkrituši dažādi skaitļi.

Atrisinājums:
Labvēlīgo notikumu skaits: $3 * (1 * 5 * 4) = 60$
Iespējamo notikumu skaits: $6 * 5 * 4 = 120$
Varbūtība: $P = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$

3. uzdevums

1. *Aprēķināt varūtību, ka strāva plūst shēmā, ja katras spuldzītes degšanas (strādāšanas) varbūtība ir $p = 0.5$*
2. *Aprēķināt varbūtību, ka strāva plūst shēmā, ja zināms, ka*
   (a) *a_1 spuldzīte strādā*
   (b) *b spuldzīte strādā*
   (c) *c spuldzīte strādā.*
3. *Aprēķinātt varbūtību, ka b spuldzīte strādā, ja zināms, ka strāva shēmā plūst (nosacītā varbūtība).*

Atrisinājums:

1. $P(A_1 \cup A_2) = 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2}) = 1 - P(\overline{A_1} \cup \overline{A_2}) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}) = 1 - (1 - P(\overline{A_1}))(1 - P(\overline{A_2})) = 1 - (1 - x)^2 = x(2 - x) \equiv P(A)$
   $P(A \cap B) = P(A)P(B) = x^2(2 - x) \equiv P(D)$
   $P(D \cup C) = 1 - (1 - x^2(2 - x))(1 - x) \approx 0.688$
2. (a) Ja $P(A_1) = 1$, tad $P(A) = 1$
   $P(A \cap B) = P(A)P(B) = P(B)$
   $P(D \cup C) = 1 - (1 - P(B)(1 - P(C)) = 0.75 \equiv P(S|A_1)$
   (b) $P(D \cup C) = 1 - (1 - x(2 - x))(1 - x) = 0.875 \equiv P(S|B)$
   (c) Ja $P(C) = 1$, tad $P(S|C) = 1$
3. No iepriekšējiem punktiem zināms:
   $P(S) = 0.688, P(B) = 0.5, P(S|B) = 0.875$
   Atrisinājums:
   $P(S|B) = \dfrac{P(B \cap S)}{P(B)} \Rightarrow P(B \cap S) = P(B)P(S|B) \approx 0.438$
   $P(B|S) = \dfrac{B \cap S}{P(S)} \approx 0.636$

4. uzdevums

Pieņemsim, ka X ir nepārtraukts gadījuma lielums ar blīvuma funkciju

$$f(x) = exp(-(x+2)), ja \ \ -2 < x < \infty \ \ un \ citur \ 0$$

Aprēķināt momentu ģenerējošo funkciju, EX un DX^2

Atrisinājums:

$$M_X(t) = \int_{-2}^{+\infty} e^{tx} e^{-(x+2)} dx = \frac{e^{(t-1)x-2}}{t-1}\Big|_{-2}^{+\infty} = \frac{e^{-2t}}{1-t}$$

$$EX = \frac{d}{dt} M_X(t)\Big|_{t=0} = \frac{e^{-2t}(2t-1)}{(1-t)^2}\Big|_{t=0} = -1$$

$$DX^2 = EX^4 - (EX^2)^2$$

$$EX^2 = \frac{d^2}{dt^2} M_X(t)|_{t=0} = \frac{-2e^{-2t}(2t^2-2t+1)}{(1-t)^3}\Big|_{t=0} = 2$$

$$EX^4 = \frac{d^4}{dt^4} M_X(t)|_{t=0} = \frac{8e^{-2t}(2t^4-4t^3+6t^2-2t+1)}{(1-t)^5}\Big|_{t=0} = 8$$

$$DX^2 = 8 - (2^2) = 4$$

5. uzdevums

$X1, X2, ..., Xn$ ir gadījuma izlase, $Xi\, exp(\lambda)$. Atrast maksimālās ticamības funkcijas novērtējumu parametram λ! Vai iegūtais novērtējums ir nenovirzīts?

Blīvuma funkcija eksponenciālajam sadalījumam

$$f(\lambda) \begin{cases} 1 - e^{-\lambda X} & X \geq 0 \\ 0 & X < 0 \end{cases}$$

Atrisinājums:

$$L(\lambda|X) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i|\lambda) = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i}$$

$$lnL(\lambda) = ln\lambda^n - \lambda \sum_{i=1}^{n} X_i = nln\lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\frac{dlnL(\lambda)}{d\lambda} = \frac{n}{\hat{\lambda}} - \sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i}$$