Zürcher Hochschule für Angewandte Wissenschaften
zh aw School of Engineering

Statistik

1 Deskriptive Statistik

1.1 Merkmalstypen

1.1.1 Qualitativ/Kategoriell

Endliche Anzahl Ausprägungnen

- Nominal (Kategorisierung, keine Ordnung)
- Ordinal (Ranggierung möglich, Ordnung möglich)

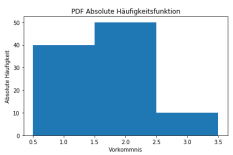
1.1.2 Quantitativ/Metrisch

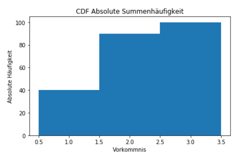
Ausmass in Zahlen

- Diskret (Fixe Sprunggrösse)
- Stetig (Reelle Sprunggrösse)

1.2 PDF & CDF

Vorkommnis: 1, 2, 3
Häufigkeit: 40, 50, 10
Relativ: $\frac{Absolut}{Total} = \frac{40}{40+50+10} = 0.4 = 40\%$

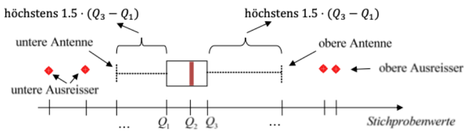




1.3 Quantil

- wenn: $n \cdot q\%1 == 0 \rightarrow R_q = \frac{1}{2}(x_{n \cdot q} + x_{n \cdot q+1})$
- wenn: $n \cdot q\%1 <> 0 \rightarrow R_q = x_{n \cdot q+i}$
  mit i: zwischen 0 und 1 und n·q+1 ganzzahlig
- $R_{0.25} = Q_1$
- $R_{0.5} = Q_2 = \tilde{x}$ (Median)
- $R_{0.75} = Q_3$
- $Q_3 - Q_1 = IQR$

1.4 Boxplot



1.5 Varianz & Standartabweichung

- Vorkommnis: 1, 4, 7
- Varianz: $\sigma^2 = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{9+0+9}{3} = 6$
- kor. Varianz: $\hat{\sigma}^2 = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{9+0+9}{2} = 9$
- Standartabweichung: $\sigma = \sqrt{6}$
- kor. Standartabweichung $\hat{\sigma} = \sqrt{9} = 3$

2 Regression

2.1 Lineare Regression

- $g(x) = mx + d$
- Steigung: $m = \frac{s_{xy}}{s_{xx}}$
- $d = \bar{y} - m\bar{x}$
- Kovarianz: $s_{xy} = \overline{x \cdot y} - \bar{x} \cdot \bar{y}$
- Varianz der x-Werte: $s_{xx} = \overline{x^2} - \bar{x}^2$
- Totale Varianz: $s_y^2 = s_{yy} = \overline{y^2} - \bar{y}^2 = \frac{1}{n}\Sigma(y_i - \bar{y})^2$
- Residuenvarianz: $s_\varepsilon^2 = s_{yy} - \frac{s_{xy}^2}{s_{xx}}$
- Summe der Residuen Quadrate: $s_\varepsilon^2 \cdot n$
- Erklärte Varianz: $s_{\hat{y}}^2 = s_y^2 - s_\varepsilon^2$
- Bestimmtheitsmass: $R^2 = \frac{s_{\hat{y}}^2}{s_y^2}$
- Pearson Korrelationskoeffizient: $R = r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$
- Korrigiertes X: $X_{kor} = \frac{X \cdot n}{n-1}$

2.2 Korrelationskoeffizient r_{xy}

- Pearson-Korrelationskoeffizient, auch Bravais-Pearson-Korrelation oder Produkt-Moment-Korrelation.
- Der Korrelationskoeffizient r_{xy} ist so definiert, das seine Werte immer zischen -1 und +1 liegen, also $-1 \leq r_{xy} \leq +1$
- Je näher r_{xy} bei -1 oder bei 1 liegt, umso besser liegen die Punkte (x_i, y_i) um eine Gerade konzentriert.
- $r_{xy} > 0$: Die Punkte liegen tendenziell um eine Gerade mit positiver Steigung (gleichsinniger linearer Zusammenhang, positive Korrelation).
- $r_{xy} < 0$: Die Punkte liegen tendenziell um eine Gerade mit negativer Steigung (gegensinniger linearer Zusammenhang, negative Korrelation).
- $r_{xy} \approx 0$: Kein linearer Zusammenhang zwischen den beiden Merkmalen.

2.3 Spearman-Rangkorrelation r_{sp}

- Die Spearman-Rangkorrelation misst Stärke und Richtung des streng monotonen Zusammenhangs zwischen zwei Merkmalen x und y.
- Bei der Spearman-Korrelation wird nicht davon ausgegangen, dass die Daten aus einer bestimmten Verteilung stammen, es handelt sich um ein sogenanntes nichtparametrisches Korrelationsmass.

2.3.1 Rang

- $x_i : 12, 17, 6, 17, 23$
- $rg(x_i) : 2, 3.5, 1, 3.5, 5$
- $\overline{rg(x)} : 3$
- $rg(x_i) - \overline{rg(x)} : -1, 0.5, -2, 0.5, 2$
- $r_{sp} = \frac{\Sigma(rg(x_i) - \overline{rg(x)})(rg(y_i) - \overline{rg(y)})}{\sqrt{\Sigma(rg(x_i) - \overline{rg(x)})^2} \cdot \sqrt{\Sigma(rg(y_i) - \overline{rg(y)})^2}}$

2.4 Nichtlineares Verhalten

Ausgangsfunktion	Transformation
$y = q \cdot x^m$	$\log(y) = \log(q) + m \cdot \log(x)$
$y = q \cdot m^x$	$\log(y) = \log(q) + \log(m) \cdot x$
$y = q \cdot e^{m \cdot x}$	$\ln(y) = \ln(q) + m \cdot x$
$y = \frac{1}{q + m \cdot x}$	$V = q + m \cdot x; \quad V = \frac{1}{y}$
$y = q + m \cdot \ln(x)$	$y = q + m \cdot U; \quad U = \ln(x)$
$y = \frac{1}{q \cdot m^x}$	$\log\left(\frac{1}{y}\right) = \log(q) + \log(m) \cdot x$

3 Kombinatorik

- Binomialkoeffizient $\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)! \cdot m!}$
- Wenn jede der n Stellen m Zustände einnehmen kann, dann gibt es m^n mögliche Kombinationen.
- Wenn aus n unterschiedlichen Elementen m mit **unbestimmter** Reihenfolge ausgewählt werden, dann gibt es $\binom{n}{m}$ mögliche Kombinationen.

- Wenn aus n unterschiedlichen Elementen m mit **bestimmter** Reihenfolge ausgewählt werden, dann gibt es $\frac{n!}{(n-m)!}$ mögliche Kombinationen.
- Wenn aus n unterschiedlichen **Kategorien** m Elemente ausgewählt werden, dann gibt es $\binom{n+m-1}{m}$ mögliche Kombinationen.

4 Kenngrössen

- $E(X) = \Sigma P(X = x)$
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
- $E(aX) = aE(X)$
- $V(X) = E(X) \cdot (x - E(X))^2$
- $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$
- $V(aX + b) = a^2 \cdot V(X)$

5 Intervallwahrscheinlichkeiten

- $P(X \leq b) = \int_{-\infty}^{b} f(u)\delta u$
- $P(a < X \leq b) = \int_{-\infty}^{b} f(u)\delta u - \int_{a}^{\infty} f(u)\delta u = \int_{a}^{b} f(u)\delta u$
- $P(X > a) = \int_{a}^{\infty} f(u)\delta u$

6 Diskrete Verteilungen

6.1 Hypergeometrische Verteilung

- $X \sim H(N, M, n)$
- N Objekteanzahl, M Merkmalsträger, n Ziehungsanzahl
- $P(X = x) = \frac{\binom{M}{x} \cdot \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$
- Lotto: $P(X = x) = \frac{\binom{6}{x} \cdot \binom{49-6}{6-x}}{\binom{49}{6}}$
- N Kugeln, M schwarz, ohne Zurücklegen n ziehen. Wahrscheinlichkeit für x schwarze Kugeln $P(X = x)$
- $E(X) = n \cdot \frac{M}{N}$
- $V(X) = n \cdot \frac{M}{N}(1 - \frac{M}{N})\frac{N-n}{N-1}$

6.2 Bernoulliverteilungverteilung

- Bernoulli-Experimente sind Zufallsexperimente mit nur zwei möglichen Ergebnissen (0/1)
- $P(X = 1) = p$
- $P(X = 0) = 1 - p = q$
- $E(X) = p$
- $V(X) = p \cdot q$

6.3 Binomialverteilung

- $X \sim B(n, p)$
- $q = 1 - p$
- n-faches Bernoulli-Experiment
- $P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x}$
- $E(X) = n \cdot p$
- $V(X) = n \cdot p \cdot q$

6.3.1 Binomialverteilung als Näherung der hypergeometrischen Verteilung

- Faustregel: $n \lesssim \frac{N}{20}$
- $H(N, M, n) \approx B(n, \frac{M}{N})$
- N Einheiten, M Merkmalsträger, Stichprobengrösse n

6.4 Poissonverteilung

- $X \sim Poi(\lambda)$
- Beschreibt die Anzahl Ereignisse pro Zeit, Fläche, Länge,...
- $P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}, \lambda > 0$
- $E(X) = \lambda$
- $V(X) = \lambda$
- $V(X) = \lambda$

6.4.1 Poissonverteilung als Näherung der Binomialverteilung

- Faustregel: $n \gtrsim 50$, $p \lesssim 0.1$
- $B(n, p) \approx Poi(n \cdot p)$
- N Einheiten, M Merkmalsträger, Stichprobengrösse n

7 Stetige Verteilungen

7.1 Gaussverteilung/Normalverteilung

- $X \sim N(\mu; \sigma)$
- Standardnormalverteilung $N(0; 1)$
- $U = \frac{X - \mu}{\sigma}$
- $P(X \leq x) = P(U \leq \frac{x - \mu}{\sigma}) = \phi(u) =$ Tabellenwert
- $E(X) = \mu$
- $V(X) = \sigma^2$
- Ca. 68 % der beobachteten Werte liegen zwischen $\mu - \sigma$ und $\mu + \sigma$.
- Ca. 95 % der beobachteten Werte liegen zwischen $\mu - 2\sigma$ und $\mu + 2\sigma$.
- Ca. 99.7 % der beobachteten Werte liegen zwischen $\mu - 3\sigma$ und $\mu + 3\sigma$.

7.1.1 Normalverteilung als Näherung der Binomialverteilung

- Faustregel: $npq > 9$
- $\mu = np$
- $\sigma = npq$
- $X \sim B(n; p)$
- $Y \sim N(\mu; \sigma)$
- $P(a \leq X \leq b) = P((a - 1) < X < (b - 1))$
- $P(a \leq X \leq b) \approx P((a - 0.5) < Y < (b + 0.5))$

7.2 Zentraler Grenzwertsatz

Identisch verteilte und stochastisch unabhängige Zufallsvariablen:

- $E(S_n) = n \cdot \mu$
- $V(S_n) = n \cdot \sigma^2$
- $E(\bar{X}_n) = \mu$
- $V(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$
- $S_n \sim N(n \cdot \mu; \sqrt{n} \cdot \sigma)$
- $\bar{X}_n \sim N(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

8 Schliessende Statistik

- Schätzfunktion Θ eines Parameters θ erwartungstreu: $E(\Theta) = \theta$
- Erwartungstreue Schätzfunktion Θ_1 effizienter Θ_2: $V(\Theta_1) < V(\Theta_2)$
- Konsistent $E(\Theta) \to \theta$ und $V(\Theta) \to 0$ für $n \to \infty$

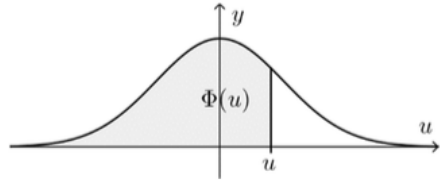
8.1 Schätzfunktionen für die wichtigsten statistischen Parameter

	Schätzfunktion	Schätzwert
Erwartungswert Spezialfall: Anteilswert einer Bernoulli-Verteilung	$\bar{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i$	$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$ $\hat{p} = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{\text{Anzahl 1en}}{n}$
Varianz	$S^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$	$\hat{\sigma}^2 = s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$
Standardabweichung	$S = \sqrt{S^2}$	$\hat{\sigma} = s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$

Satz
(1) $\bar{X}$ und S^2 sind erwartungstreu und konsistent.
(2) S ist konsistent, aber nicht erwartungstreu.

9 Tabellen

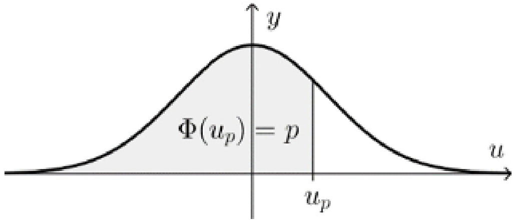
9.1 CDF $\Phi(u)$ der Standardnormalverteilung



$$P(U \le u) = \Phi(u)$$
$$P(U \ge u) = 1 - \Phi(u)$$
$$P(-u \le U \le u) = 2 \cdot \Phi(u) - 1$$
$$\Phi(-u) = 1 - \Phi(u)$$

u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

9.2 Quantile der Standardnormalverteilung

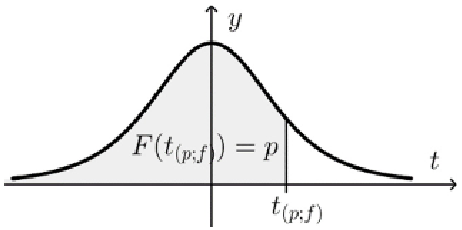


p: vorgegebene Wahrscheinlichkeit

u_p: zur Wahrscheinlichkeit p gehöriges Quantil

p	u_p	p	u_p
0.90	1.282	0.10	−1.282
0.95	1.645	0.05	−1.645
0.975	1.960	0.025	−1.960
0.99	2.326	0.01	−2.326
0.995	2.576	0.005	−2.576
0.999	3.090	0.001	−3.090

9.3 Quantile der t-Verteilung



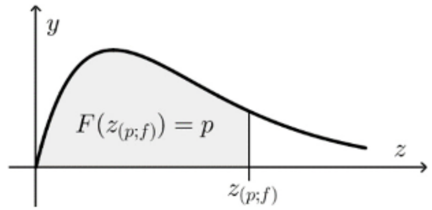
p: vorgegebene Wahrscheinlichkeit

$t_{(p;f)}$: zur Wahrscheinlichkeit p gehöriges Quantil bei f Freiheitsgraden

$$\boxed{t_{(1-p;f)} = -t_{(p;f)}}$$

	p				
f	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
50	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
100	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626
200	1.286	1.653	1.972	2.345	2.601
500	1.283	1.648	1.965	2.334	2.586
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

9.4 Quantile der Chi-Quadrat-Verteilung



p: vorgegebene Wahrscheinlichkeit

$z_{(p;f)}$: zur Wahrscheinlichkeit p gehöriges Quantil bei f Freiheitsgraden

	p									
f	0.005	0.01	0.025	0.05	0.1	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
1	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.41	0.55	0.83	1.15	1.61	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.68	0.87	1.24	1.64	2.20	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.99	1.24	1.69	2.17	2.83	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
22	8.6	9.5	11.0	12.3	14.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8
24	9.9	10.9	12.4	13.8	15.7	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7
40	20.7	22.2	24.4	26.5	29.1	51.8	55.8	59.3	63.7	66.8
50	28.0	29.7	32.4	34.8	37.7	63.2	67.5	71.4	76.2	79.5
60	35.5	37.5	40.5	43.2	46.5	74.4	79.1	83.3	88.4	92.0
70	43.3	45.4	48.8	51.7	55.3	85.5	90.5	95.0	100.4	104.2
80	51.2	53.5	57.2	60.4	64.3	96.6	101.9	106.6	112.3	116.3
90	59.2	61.8	65.6	69.1	73.3	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3
100	67.3	70.1	74.2	77.9	82.4	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2