Höhere Mathematik 1

1 Rechnerarithmetik

1.1 Maschinenzahlen

- $x = m \cdot B^e$
- $m : \pm 0.m_1 ... m_n$
- B: Basis (Binär: B=2)
- $e : \pm e_1 ... e_l$
- M: $\{x \epsilon R | x = \pm 0.m_1 ... m_n \cdot B^{\pm e_1 ... e_l}\} \cup \{0\}$
- $m_i, e_i \epsilon \{0, 1, ..., B-1\}$
- Wert $\hat{w} = \sum m_i B^{\hat{e}-i}$
- $\hat{e} = \sum m_i B^{\hat{e}-i}$

1.2 Approximations- und Rundungsfehler

- Maschinengenauigkeit eps $= \frac{B}{2} \cdot B^{-n}$
- Die Maschinengenauigkeit ist die kleinste positive Maschinenzahl, für die auf dem Rechner 1+eps≠ 1 gilt.

1.2.1 Konditionierung

- Konditionszahl $K := \frac{|f'(x)| \cdot |x|}{|f(x)|}$
- Näherungsweise Angabe, um wieviel sich der relative Fehler von x vergrössert bei einer Funktionsauswertung f(x).
- Ein Problem ist gut konditionierte, wenn die Konditionszahl klein ist.

1.2.2 Absoluter Fehler

- $|\tilde{x} - x|$
- $|f(\tilde{x}) - f(x)| \approx |f'(x)| \cdot |\tilde{x} - x|$

1.2.3 Relativer Fehler

- $\frac{|\tilde{x} - x|}{|x|}$
- $\frac{|f(\tilde{x}) - f(x)|}{|f(x)|} \approx \frac{|f'(x)| \cdot |x|}{|f(x)|} \cdot \frac{|\tilde{x} - x|}{|x|}$

2 Nullstellenproblemen

2.1 Fixpunktgleichung

- Idee: $f(x) = F(x) - x$
- $F(x) = x$

2.2 Fixpunktiteration

- $x_{n+1} \equiv F(x_n)$

2.2.1 Anziehender Fixpunkt

- Ist $|F'(x)| < 1$, so konvergiert x_n gegen $\bar{x}$, falls der Startwert x_0 nahe genug bei $\bar{x}$ liegt.

2.2.2 Abstossender Fixpunkt

- Ist $|F'(x)| > 1$, so konvergiert x_n für keinen Startwert $x_0 \neq \bar{x}$.

2.3 Banachsche Fixpunktsatz

Wenn eine Lipschitz-Konstante α mit:

- $F : [a, b] \to [a, b]$
- $0 < \alpha < 1$
- $|F(x) - F(y)| \leq \alpha |x - y|$ mit $x, y \epsilon [a, b]$

existiert, dann gilt:

- F hat genau einen Fixpunkt $\bar{x}$ in $[a, b]$
- Die Fixpunktiteration $x_{n+1} = F(x_n)$ konvergiert gegen $\bar{x}$ für alle Startwerte $x_0 \epsilon [a, b]$
- a-priori Abschätzung $|x_n - \bar{x}| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \cdot |x_1 - x_0|$
- a-posteriori Abschätzung $|x_n - \bar{x}| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot |x_n - x_{n-1}|$

2.4 Newtonverfahren

- $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

2.4.1 Vereinfachte Newtonverfahren

- $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}$

2.5 Sekantenverfahren

- $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \cdot f(x_n)$

2.6 Konvergenzordnung q

- $|x_{n+1} - \bar{x}| \leq c \cdot |x_n - \bar{x}|^q$
- $c > 0$
- $q \geq 1$
- Für $q = 1$ muss $c < 1$ gelten

Für einfache Nullstellen konvergiert:

- Das Newton-Verfahren quadratisch (q=2)
- Das vereinfachte Newton-Verfahren linear (q=1)
- Das Sekantenverfahren $q = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$

3 Lineare Gleichungssysteme

3.1 Dreiecksmatrix

- Untere Dreiecksmatrix: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
- Obere normierte Dreiecksmatrix: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3.2 Gauss-Algorithmus

- Ausgangslage: $Ax = b$
- $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}|b_1 \\ a_{21} & a_{22}|b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}|b_1 \\ 0 & a_{22} - a_{12} \cdot \frac{a_{21}}{a_{11}} | b_2 - b_1 \cdot \frac{a_{21}}{a_{11}} \end{pmatrix}$

3.2.1 Spaltenpivotisierung

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3.3 LR-Zerlegung

- $A = L \cdot R$
- L ist eine untere normierte Dreiecksmatrix
- R ist eine obere Dreiecksmatrix $r_{ii} \neq 0$
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
- $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $A_1^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0.5 & 1.5 \\ 0 & 1.5 & 1.5 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0.5 & ? & 1 \end{pmatrix}$
- $A_1^{**} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1.5 & 1.5 \\ 0 & 0.5 & 1.5 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
- $R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1.5 & 1.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0.33 & 1 \end{pmatrix}$
- $P = P_2 \cdot P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $Ly = Pb$
- $Rx = y$

3.4 QR-Zerlegung

- $Q^T \cdot Q = I \to Q$ ist orthogonal
- orthogonal $\to Q^{-1} = Q^T \to Q$ ist regulär
- $Q^T = Q \to Q$ ist symmetrisch

3.4.1 Householder-Matrizen

- u normierter Vektor (Länge 1)
- $H := I - 2uu^T$
- H ist symmetrisch und orthogonal
- $v_1 := a_1 +$ sign$(a_{11}) \cdot |a_1| \cdot e_1$
- $u_1 := \frac{1}{|v_1|} v_1$

3.4.2 Vorgehen

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $v_1 = \begin{pmatrix} 3.45 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, u_1 = \begin{pmatrix} 0.84 \\ 0.49 \\ 0.24 \end{pmatrix}$
- $H_1 = Q_1 = \begin{pmatrix} -0.41 & -0.82 & -0.41 \\ -0.82 & 0.53 & -0.24 \\ -0.41 & -0.24 & 0.88 \end{pmatrix}$
- $Q_1 A = \begin{pmatrix} -2.45 & -2.04 & -2.45 \\ 0 & -0.76 & -1.58 \\ 0 & 1.12 & 0.71 \end{pmatrix}$
- $A_2 = \begin{pmatrix} -0.76 & -1.58 \\ 1.12 & 0.71 \end{pmatrix}$
- $v_2 = \begin{pmatrix} -2.12 \\ 1.12 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -0.88 \\ 0.47 \end{pmatrix}$
- $H_2 = \begin{pmatrix} -0.56 & 0.83 \\ 0.83 & 0.56 \end{pmatrix}$
- $Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.56 & 0.83 \\ 0 & 0.83 & 0.56 \end{pmatrix}$
- $Q = Q_1^T Q_2^T$
- $R = Q_1 Q_2 A$

3.5 Fehlerrechnung

- Ziel: Von Residuum auf Fehler von x schliessen.
- $A\tilde{x} = \tilde{b} = b + \Delta b$
- Residuum: Δb
- Fehler von x: $\Delta x = \tilde{x} - x$

3.6 Vektornormen / Matrixnormen

3.6.1 1-Norm

- $|| \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} ||_1 = 1 + 2 + 3 = 6$
- $|| \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \\ 7 & -3 & 5 \end{pmatrix} ||_1 =$ max(1+3+7, 2+4+3, 3+2+5) = 11

3.6.2 2-Norm

- $|| \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} ||_2 = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$

3.6.3 ∞−Norm

- $|| \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} ||_\infty =max(1 + 2 + 3) = 3$
- $|| \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \\ 7 & -3 & 5 \end{pmatrix} ||_\infty =$ max(1+2+3, 3+4+2, 7+3+5)=15

3.7 Abschätzung für fehlerbehaftete Vektoren

- $||x - \tilde{x}|| \leq ||A^{-1}|| \cdot ||b - \tilde{b}||$
- $\frac{||x - \tilde{x}||}{||x||} \leq ||A|| \cdot ||A^{-1}|| \cdot \frac{||b - \tilde{b}||}{||b||}$, falls $||b|| \neq 0$
- Konditionszahl cond$(A) = ||A|| \cdot ||A^{-1}||$

3.8 Abschätzung für fehlerbehaftete Matrix

- $\tilde{A} \cdot \tilde{x} = \tilde{b}$
- Wenn: cond$(A) \cdot \frac{||A - \tilde{A}||}{||A||} < 1$
- Dann: $\frac{||x - \tilde{x}||}{||x||} \leq \frac{cond(A)}{1 - cond(A) \cdot \frac{||A - \tilde{A}||}{||A||}} \cdot (\frac{||A - \tilde{A}||}{||A||} + \frac{||b - \tilde{b}||}{||b||})$

3.9 Iterative Verfahren

3.10 Das Jacobi-Verfahren

3.11 Das Gauss-Seidel-Verfahren

3.12 Konvergenz

3.13 Eigenwerte und Eigenvektoren

3.13.1 Algebraische Vielfachheit / Spektrum

- Geometrische und algebraische Vielfachheit eines Eigenwerts müssen nicht gleich sein.

- Die geom. Vielfachheit ist aber stets kleiner oder gleich der algebraischen Vielfachheit.
- $(1-\lambda)^2 = 0$ Algebraische Vielfachheit $= 2$
- $\lambda = 0$ Algebraische Vielfachheit $= 1$

3.13.2 Determinate

3.13.3 Determinante von $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$: $\det(A) = |A|$

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $|A_{12}| = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- $|A| = \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot |A_{ij}|$ Entwicklung n. j-ter Spalte
- $|A| = \sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot |A_{ij}|$ Entwicklung n. i-ter Zeile
- $\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(D)$
- $\begin{vmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = \begin{vmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \lambda_n \end{vmatrix}$
- $A = B \cdot C \quad \Rightarrow \quad |A| = |B| \cdot |C|$
- $\det(A) = \det(A^\top)$
- Hat A zwei gleiche Zeilen/Spalten $\Rightarrow |A| = 0$
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$
- Ist A invertierbar, so gilt: $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$
- $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(B)\det(A) = \det(BA)$

Umformung Determinante

- Vertauschen von Zeilen/Spalten ändert Vorzeichen von $|A|$
- Zeile/Spalte mit λ multiplizieren, $|A|$ um Faktor λ größer
- Addition des λ-fachen der Zeile X zur Zeile Y ändert $|A|$ nicht

Vereinfachung für Spezialfall $A \in \mathbb{K}^{2\times 2}$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = |A| = ad - bc$

3.13.4 Äquivalente Aussagen für $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$

1) A ist invertierbar	2) $\dim(\mathrm{col}(A)) = \dim(\mathrm{row}(A)) = n$
3) $\mathrm{kern}(A) = 0$	4) Die strenge ZSF von A ist $\mathbb{I}_n$
5) $\det(A) \neq 0$	6) Zeilen/Spalten von A linear unabhängig
7) $Ax = b$ hat eine	8) 0 ist kein Singulärwert von A
eind. Lös. $\forall b \in \mathbb{R}^n$	9) Lineare Abbildung ist bijektiv
10) $\mathrm{rang}(A) = n$	11) 0 ist kein Eigenwert von A

3.13.5 Spur

Spur von A $= tr(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$