Zürcher Hochschule für Angewandte Wissenschaften

zh aw School of Engineering

Höhere Mathematik 1

1 Rechnerarithmetik

1.1 Maschinenzahlen

- $x = m \cdot B^e$
- $m : \pm 0.m_1...m_n$
- B: Basis (Binär: B=2)
- $e : \pm e_1...e_l$
- M: $\{x \epsilon R | x = \pm 0.m_1...m_n \cdot B^{\pm e_1...e_l}\} \cup \{0\}$
- $m_i, e_i \epsilon \{0, 1, ..., B-1\}$
- Wert $\hat{w} = \sum m_i B^{\hat{e}-i}$
- $\hat{e} = \sum m_i B^{\hat{e}-i}$

1.2 Approximations- und Rundungsfehler

- Maschinengenauigkeit eps $= \frac{B}{2} \cdot B^{-n}$
- Die Maschinengenauigkeit ist die kleinste positive Maschinenzahl, für die auf dem Rechner $1+\text{eps} \neq 1$ gilt.

1.2.1 Konditionierung

- Konditionszahl $K := \frac{|f'(x)| \cdot |x|}{|f(x)|}$
- Näherungsweise Angabe, um wieviel sich der relative Fehler von x vergrössert bei einer Funktionsauswertung f(x).
- Ein Problem ist gut konditionierte, wenn die Konditionszahl klein ist.

1.2.2 Absoluter Fehler

- $|\tilde{x} - x|$
- $|f(\tilde{x}) - f(x)| \approx |f'(x)| \cdot |\tilde{x} - x|$

1.2.3 Relativer Fehler

- $\frac{|\tilde{x} - x|}{|x|}$
- $\frac{|f(\tilde{x}) - f(x)|}{|f(x)|} \approx \frac{|f'(x)| \cdot |x|}{|f(x)|} \cdot \frac{|\tilde{x} - x|}{|x|}$

2 Nullstellenproblemen

2.1 Fixpunktgleichung

- Idee: $f(x) = F(x) - x$
- $F(x) = x$

2.2 Fixpunktiteration

- $x_{n+1} \equiv F(x_n)$

2.2.1 Anziehender Fixpunkt

- Ist $|F'(x)| < 1$, so konvergiert x_n gegen $\bar{x}$, falls der Startwert x_0 nahe genug bei $\bar{x}$ liegt.

2.2.2 Abstossender Fixpunkt

- Ist $|F'(x)| > 1$, so konvergiert x_n für keinen Startwert $x_0 \neq \bar{x}$.

2.3 Banachsche Fixpunktsatz

Wenn eine Lipschnitz-Konstante α mit:

- $F : [a, b] \rightarrow [a, b]$
- $0 < \alpha < 1$
- $|F(x) - F(y)| \leq \alpha |x - y|$ mit $x, y \epsilon [a, b]$

existiert, dann gilt:

- F hat genau einen Fixpunkt $\bar{x}$ in $[a, b]$
- Die Fixpunktiteration $x_{n+1} = F(x_n)$ konvergiert gegen $\bar{x}$ für alle Startwerte $x_0 \epsilon [a, b]$
- a-priori Abschätzung $|x_n - \bar{x}| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \cdot |x_1 - x_0|$
- a-posteriori Abschätzung $|x_n - \bar{x}| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot |x_n - x_{n-1}|$

2.4 Newtonverfahren

- $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

2.4.1 Vereinfachte Newtonverfahren

- $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}$

2.5 Sekantenverfahren

- $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \cdot f(x_n)$

2.6 Konvergenzordnung q

- $|x_{n+1} - \bar{x}| \leq c \cdot |x_n - \bar{x}|^q$
- $c > 0$
- $q \geq 1$
- Für $q = 1$ muss $c < 1$ gelten

Für einfache Nullstellen konvergiert:

- Das Newton-Verfahren quadratisch (q=2)
- Das vereinfachte Newton-Verfahren linear (q=1)
- Das Sekantenverfahren $q = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$

3 Lineare Gleichungssysteme

3.1 Dreiecksmatrix

- Untere Dreiecksmatrix: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
- Obere normierte Dreiecksmatrix: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3.2 Gauss-Algorithmus

- Ausgangslage: $Ax = b$
- $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} | b_1 \\ a_{21} & a_{22} | b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} | b_1 \\ 0 & a_{22} - a_{12} \cdot \frac{a_{21}}{a_{11}} | b_2 - b_1 \cdot \frac{a_{21}}{a_{11}} \end{pmatrix}$

3.2.1 Spaltenpivotisierung

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3.3 LR-Zerlegung

- $A = L \cdot R$
- L ist eine untere normierte Dreiecksmatrix
- R ist eine obere Dreiecksmatrix $r_{ii} \neq 0$
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
- $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $A_1^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0.5 & 1.5 \\ 0 & 1.5 & 1.5 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0.5 & ? & 1 \end{pmatrix}$
- $A_1^{**} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1.5 & 1.5 \\ 0 & 0.5 & 1.5 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
- $R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1.5 & 1.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0.33 & 1 \end{pmatrix}$
- $P = P_2 \cdot P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $Ly = Pb$
- $Rx = y$

3.4 QR-Zerlegung

- $Q^T \cdot Q = I \rightarrow Q$ ist orthogonal
- orthogonal $\rightarrow Q^{-1} = Q^T \rightarrow Q$ ist regulär
- $Q^T = Q \rightarrow Q$ ist symmetrisch

3.4.1 Householder-Matrizen

- u normierter Vektor (Länge 1)
- $H := I - 2uu^T$
- H ist symmetrisch und orthogonal
- $v_1 := a_1 +$ sign$(a_{11}) \cdot |a_1| \cdot e_1$
- $u_1 := \frac{1}{|v_1|} v_1$

3.4.2 Vorgehen

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $v_1 = \begin{pmatrix} 3.45 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_1 = \begin{pmatrix} 0.84 \\ 0.49 \\ 0.24 \end{pmatrix}$
- $H_1 = Q_1 = \begin{pmatrix} -0.41 & -0.82 & -0.41 \\ -0.82 & 0.53 & -0.24 \\ -0.41 & -0.24 & 0.88 \end{pmatrix}$
- $Q_1 A = \begin{pmatrix} -2.45 & -2.04 & -2.45 \\ 0 & -0.76 & -1.58 \\ 0 & 1.12 & 0.71 \end{pmatrix}$
- $A_2 = \begin{pmatrix} -0.76 & -1.58 \\ 1.12 & 0.71 \end{pmatrix}$
- $v_2 = \begin{pmatrix} -2.12 \\ 1.12 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} -0.88 \\ 0.47 \end{pmatrix}$
- $H_2 = \begin{pmatrix} -0.56 & 0.83 \\ 0.83 & 0.56 \end{pmatrix}$
- $Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.56 & 0.83 \\ 0 & 0.83 & 0.56 \end{pmatrix}$
- $Q = Q_1^T Q_2^T$
- $R = Q_1 Q_2 A$

3.5 Fehlerrechnung

- Ziel: Von Residuum auf Fehler von x schliessen.
- $A\tilde{x} = \tilde{b} = b + \Delta b$
- Residuum: Δb
- Fehler von x: $\Delta x = \tilde{x} - x$

3.6 Vektornormen / Matrixnormen

3.6.1 1-Norm

- $|| \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} ||_1 = 1 + 2 + 3 = 6$
- $|| \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \\ 7 & -3 & 5 \end{pmatrix} ||_1 =$ max(1+3+7, 2+4+3, 3+2+5) = 11

3.6.2 2-Norm

- $|| \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} ||_2 = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$

3.6.3 $\infty-$Norm

- $|| \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} ||_\infty =max(1 + 2 + 3) = 3$
- $|| \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \\ 7 & -3 & 5 \end{pmatrix} ||_\infty =$ max(1+2+3, 3+4+2, 7+3+5)=15

3.7 Abschätzung für fehlerbehaftete Vektoren

- $||x - \tilde{x}|| \leq ||A^{-1}|| \cdot ||b - \tilde{b}||$
- $\frac{||x - \tilde{x}||}{||x||} \leq ||A|| \cdot ||A^{-1}|| \cdot \frac{||b - \tilde{b}||}{||b||}$, falls $||b|| \neq 0$
- Konditionszahl cond$(A) = ||A|| \cdot ||A^{-1}||$

3.8 Abschätzung für fehlerbehaftete Matrix

- $\tilde{A} \cdot \tilde{x} = \tilde{b}$
- Wenn: cond$(A) \cdot \frac{||A - \tilde{A}||}{||A||} < 1$
- Dann: $\frac{||x - \tilde{x}||}{||x||} \leq \frac{cond(A)}{1 - cond(A) \cdot \frac{||A - \tilde{A}||}{||A||}} \cdot (\frac{||A - \tilde{A}||}{||A||} + \frac{||b - \tilde{b}||}{||b||})$

3.9 Iterative Verfahren

- Ein Startvektor $x^{(0)}$ wird solange iteriert ($x^{(k+1)} = F(x^{(k)})$), bis x gegen das Gleichungssystem $Ax = b$ konvergiert
- Ein hochgestellter Index in Klammern $x^{(k)}$ bezeichnet einen Vektor aus R^n nach der k-ten Iteration
- A = L + D + R
- $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- Matrizen L und R entsprechen nicht den Matrizen der LR-Zerlegung

3.10 Das Jacobi-Verfahren / Gesamtschrittverfahren

- $Dx^{(x+1)} = -(L + R)x^{(k)} + b$
- $x^{(x+1)} = -D^{-1}(L + R)x^{(k)} + D^{-1}b$
- $B = -D^{-1}(L + R)$

3.11 Das Gauss-Seidel-Verfahren / Einzelschrittverfahren

- $(D+L)x^{(x+1)} = -Rx^{(k)} + b$
- $x^{(x+1)} = -(D+L)^{-1}Rx^{(k)} + (D+L)^{-1}b$
- $B = -(D+L)^{-1}R$

3.12 Konvergenz

- Falls A diagonaldominant ist, konvergiert das Gesamtschrittverfahren und das Einzelschrittverfahren für Ax = b
- Es gibt nicht diagonaldominante Matrizen, für die die Verfahren trotzdem konvergieren kann
- Ein notwendiges und hinreichendes Kriterium ist, dass der Spektralradius $\rho(B) < 1$

3.12.1 Anziehender oder abstossender Fixpunkt

- $x^{(n+1)} = Bx^{(n)} + b$
- $\bar{x}$ anziehender Fixpunkt, wenn $||B|| < 1$
- $\bar{x}$ abstossender Fixpunkt, wenn $||B|| > 1$

3.12.2 Abschätzung

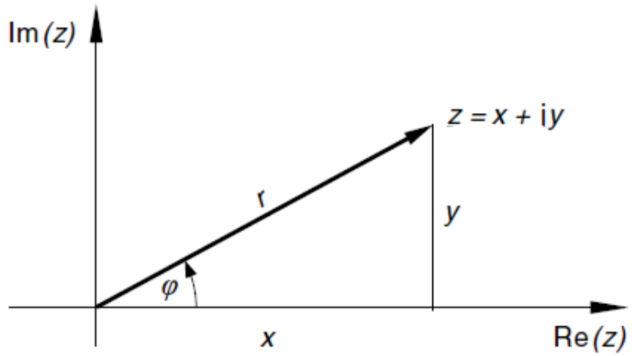
- $x^{(n+1)} = Bx^{(n)} + b$
- a-priori Abschätzung: $||x^{(n)} - \bar{x}|| \leq \frac{||B||^n}{1-||B||} \cdot ||x^{(1)} - x^{(0)}||$
- a-posteriori Abschätzung: $||x^{(n)} - \bar{x}|| \leq \frac{||B||}{1-||B||} \cdot ||x^{(n)} - x^{(n-1)}||$

3.12.3 Diagonaldominanz

- A ist diagonaldominant, wenn das Zeilensummenkriterium oder das Spaltensummenkriterium gilt
- Zeilensummenkriterium: für alle i = 1,...,n: $|a_{ii}| > \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{ij}|$
- Spaltensummenkriterium: für alle j = 1,...,n: $|a_{jj}| > \sum_{i=1,i\neq j}^{n} |a_{ij}|$

3.13 Komplexe Zahlen

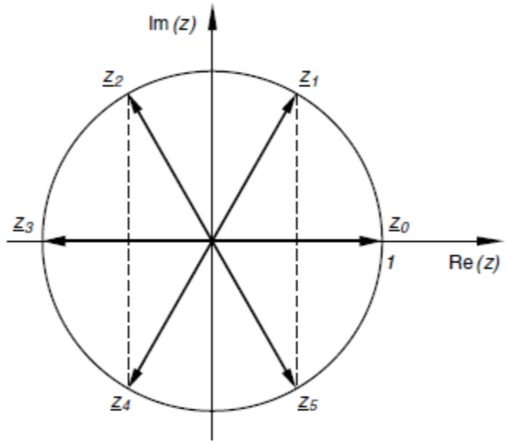
- Eine komplexe Zahl z ist ein geordnetes Paar (x, y) zweier reeller Zahlen x und y
- $z = x + iy$
- $z^* = x - iy$
- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $i^2 = -1$
- Realteil von $z: Re(z) = x$
- Imaginärteil von $z: Im(z) = y$



- Normalform: $z = x + iy$
- Trigonometrische Form: $z = r(cos(\varphi) + i \cdot sin(\varphi))$
- Exponentialform: $z = re^{i\varphi}$

3.13.1 Rechenregeln

- Addition: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
- Subtraktion: $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$
- Multiplikation: $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + x_2y_1)$
- $z_1 \cdot z_2 = r_1e^{i\varphi_1} \cdot r_2e^{i\varphi_2} = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$
- Division: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot z_2^*}{z_2 \cdot z_2^*}$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1e^{i\varphi_1}}{r_2e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$



- Die Lösungen der Gleichung $z^6 = 1$

3.14 Eigenwerte und Eigenvektoren

- $Ax = \lambda x$
- Eigenwert λ
- Eigenvektor x
- Der Nullvektor wird als triviale Lösung nicht berücksichtigt
- Eigenvektoren werden i.d.R. auf die Länge 1 normiert
- $(A - \lambda I_n)x = 0$

3.14.1 Charakteristisches Polynom / Spur

Spur von A = $tr(A) = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn} = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n$

3.14.2 Algebraische Vielfachheit / Spektrum

- Das Spektrum $\sigma(A)$ ist die Menge aller Eigenwerte von A
- $(1-\lambda)^2 = 0$ Algebraische Vielfachheit = 2
- $\lambda = 0$ Algebraische Vielfachheit = 1

3.14.3 Eigenraum

- Die Eigenvektoren zum Eigenwert λ bilden zusammen mit dem Nullvektor 0 einen Unterraum
- Der Eigenraum des Eigenwertes λ ist die Lösungsmenge des homogenen lin. Gleichungssystems $(A - \lambda I_n)x = 0$
- Weist nur dann eine nicht-triviale Lösung auf, wenn gilt: $Rg(A - \lambda I_n) < n$
- **Geometrische Vielfachheit**: $n - Rg(A - \lambda I_n)$

3.14.4 Vielfachheit

- Geometrische und algebraische Vielfachheit eines Eigenwerts müssen nicht gleich sein
- Die geom. Vielfachheit ist aber stets kleiner oder gleich der algebraischen Vielfachheit

3.14.5 Ähnliche Matrizen / Diagonalisierbarkeit

- A und B sind ähnlich: $B = T^{-1}1AT$
- Ist B eine Diagobalmatrix ist A **diagonalisierbar**
- Ähnliche Matrizen haben dieselben Eigenwerte, inkl. deren algebraischer Vielfachheit.
- Ist x ein Eigenvektor zum Eigenwert λ von B, dann ist Tx ein Eigenvektor zum Eigenwert λ von A
- In einer diagonalisierbar Matrix sind die n Diagonalelemente von D die Eigenwerte von A
- In einer diagonalisierbar Matrix stehen die n linear unabhängigen Eigenvektoren von A in den Spalten von T

3.14.6 Determinante von $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$: $\det(A) = |A|$

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, |A_{12}| = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- $|A| = \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot |A_{ij}|$ Entwicklung n. j-ter Spalte
- $|A| = \sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot |A_{ij}|$ Entwicklung n. i-ter Zeile
- $\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(D)$
- $\begin{vmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = \begin{vmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \lambda_n \end{vmatrix}$
- $A = B \cdot C \quad \Rightarrow \quad |A| = |B| \cdot |C|$
- $\det(A) = \det(A^\top)$
- Hat A zwei gleiche Zeilen/Spalten $\Rightarrow |A| = 0$
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$
- Ist A invertierbar, so gilt: $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$
- $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(B)\det(A) = \det(BA)$

Umformung Determinante

- Vertauschen von Zeilen/Spalten ändert Vorzeichen von $|A|$
- Zeile/Spalte mit λ multiplizieren, $|A|$ um Faktor λ größer
- Addition des λ-fachen der Zeile X zur Zeile Y ändert $|A|$ nicht

Vereinfachung für Spezialfall $A \in \mathbb{K}^{2\times 2}$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = |A| = ad - bc$

3.14.7 Äquivalente Aussagen für $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$

1) A ist invertierbar	2) $\dim(\mathrm{col}(A)) = \dim(\mathrm{row}(A)) = n$
3) $\mathrm{kern}(A) = 0$	4) Die strenge ZSF von A ist $\mathbb{I}_n$
5) $\det(A) \neq 0$	6) Zeilen/Spalten von A linear unabhängig
7) $Ax = b$ hat eine	8) 0 ist kein Singulärwert von A
eind. Lös. $\forall b \in \mathbb{R}^n$	9) Lineare Abbildung ist bijektiv
10) $\mathrm{rang}(A) = n$	11) 0 ist kein Eigenwert von A