BAB 4
PENGGUNAAN TURUNAN

4.1 Persamaan Garis Singgung dan Persamaan Garis Normal

Gradien garis singgung pada suatu titik $x_\circ$ diperoleh dari turunan pertama fungsi $f(x)$:

$$m = \tan \emptyset = f'(x_\circ)$$

Untuk mencari persamaan garis singgung kita dapat menggunakan rumus

$$y - y_\circ = m(x - x_\circ)$$

Jika $f(x)$ mempunyai turunan $f'(x_\circ)$ pada titik $x = x_\circ$ maka kurva $y = f(x)$ mempunyai garis singgung di titik $P_\circ(x_\circ, y_\circ)$ dalam hal ini ada 3 kasus:

1. $\tan \emptyset = 0, \emptyset = 0, m = 0$ garis singgung sejajar sumbu x dengan persamaan $y = y_\circ$
2. Bila $m \neq 0$ persamaan garis singgung $y - y_\circ = m(x - x_\circ)$
3. $\tan \emptyset = \sim,\ \emptyset = \frac{\pi}{2},\ m = \sim$ garis singgung tegak lurus terhadap sumbu x dengan persamaan garis singgung $x = x_\circ$

4.2 Persamaan Garis Normal

n adalah persamaan garis normal yang memiliki gradien garis. Gradien garis normal bisa kita dapatkan, yaitu

$$Gradien\ Garis\ Normal = -\frac{1}{m}$$

$m =$ gradien garis singgung

Untuk mencari persamaan garis normal kita bisa gunakan rumus

$$y - y_\circ = -\frac{1}{m}(x - x_\circ)$$

Jika $f(x)$ mempunyai turunan $f'(x_\circ)$ pada titik $x = x_\circ$ maka kurva $y = f(x)$ mempunyai garis normal di titik $P_\circ(x_\circ, y_\circ)$ dalam hal ini ada 3 kasus:

1. $x = x_\circ$ Garis normal tegak lurus sumbu x
2. $y - y_\circ = -\frac{1}{m}(x - x_\circ)$
3. $y = y_\circ$ Garis normal sejajar sumbu x

Contoh soal 1

Sebuah kurva dengan persamaan $y = x^3 - 2x^2 - 4$ Tentukan persamaan garis singgung dan garis normal pada titik $P(2, -4)$.

Jawab dan pembahasan

Gradien garis singgung $m = f'(x) = 3x^2 - 4x$

Gradien garis singgung pada titik $P(2, -4)$ diperoleh $m = f'(2) = 3(2)^2 - 4.2 = 4$

Persamaan garis singgung pada titik $P(2, -4)$ yaitu $y - y_\circ = m(x - x_\circ)$ sehingga diperoleh:

$y - (-4) = 4(x - 2)$

$y = -4 + 4(x - 2)$

$y = 4x - 12$

Persamaan garis normal pada titik $P(2, -4)$ yaitu $y - y_\circ = -\frac{1}{m}(x - x_\circ)$ sehingga diperoleh:

$y - (-4) = -\frac{1}{4}(x - 2)$

$y = -4 - \frac{1}{4}(x - 2)$

$y = -\frac{1}{4}x - \frac{14}{4}$

4.3 Nilai Maksimum dan Nilai Minimum

Maksimum dan minimum suatu fungsi pada himpunan tertentu. Andaikan *S* adalah daerah asal *f* yang memuat titik *c*. Kita katakana bahwa:

- $f(c)$ adalah nilai maksimum *f* pada *S* jika $f(c) \geq f(x)$ untuk semua *x* di *S*
- $f(c)$ adalah nilai minimum *f* pada *S* jika $f(c) \leq f(x)$ untuk semua *x* di *S*
- $f(c)$ adalah nilai ekstrim *f* pada *S* jika $f(c)$ adalah nilai maksimum atau minimum

Prosedur mencari nilai maksimum dan nilai minimum

1. Carilah titik kritis (titik-titik ujung selang interval, titik stasioner $(f'(c) = 0)$ dan titik singular $(f'(c)\ tidak\ ada)$ dari fungsi $f(x)$ pada selang interval.
2. Hitunglah nilai f pada setiap nilai kritis, nilai yang terbesar adalah nilai maksimum dan nilai yang terkecil adalah nilai minimum

Contoh soal 2.

Carilah nilai-nilai maksimum dan minimum dari $f(x) = -2x^3 + 3x^2$ pada selang interval $\left[-\frac{1}{2}, 2\right]$.

Jawab dan pembahasan

1. Titik kritis
   - ✓ Titik-titik ujung dari selang interval yaitu $x = -\frac{1}{2}$ dan $x = 2$
   - ✓ Titik stasioner dari $f(x)$ yaitu $f'(x) = 0$

     $f'(x) = -6x^2 + 6x = 6x(-x + 1) = 0$

     Sehingga diperoleh pembuat nol atau titik stasionernya

     $x = 0$ atau $x = 1$
   - ✓ Titik singular dari $f(x)$, $f'(x)$ tidak ada. Tidak terdapat titik singular, karena nilai $f'(x)$ ada untuk semua x.

2. Nilai *f* untuk semua nilai kritis
   - ✓ $x = -\frac{1}{2}$ maka $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = -2\left(\frac{-1}{8}\right) + 3\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1$ (maksimum)
   - ✓ $x = 2$ maka $f(2) = -2(2)^3 + 3(2)^2 = -2(8) + 3(4) = -16 + 12 = -4$ (minimum)
   - ✓ $x = 0$ maka $f(0) = -2(0)^3 + 3(0)^2 = -2(0) + 3(0) = 0 + 0 = 0 = 0$
   - ✓ $x = 1$ maka $f(1) = -2(1)^3 + 3(1)^2 = -2(1) + 3(1) = -2 + 3 = 1$ (maksimum)

     Jadi diperoleh bahwa

     Nilai Maksimum $= 1$

     Nilai Minimum $= -4$

4.4 Kemonotonan, Kecekungan, dan Titik Balik

Andaikan fungsi *f* terdefinisi pada selang *I* (terbuka, tertutup, atau tak satupun) kita katakan bahwa:

- Fungsi *f* adalah naik pada interval *I* jika untuk setiap pasang bilangan x_1 dan x_2 dalam interval *I*

$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

- Fungsi *f* adalah turun pada selang *I* jika untuk setiap pasang bilangan x_1 dan x_2 dalam interval *I*

$$x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

- Fungsi *f* adalah monoton murni pada interval *I* jika *f* naik pada *I* atau turun pada *I*

Teorema Kemonotonan

Andai *f* kontinu pada selang *I* dan dapat diferensialkan pada setiap titik dalam *I*.

- Jika $f'(x) > 0$ untuk setiap titik dalam *x* dari selang *I* maka *f* naik pada selang *I*.
- Jika $f'(x) < 0$ untuk setiap titik dalam *x* dari selang *I* maka *f* turun pada selang *I*.

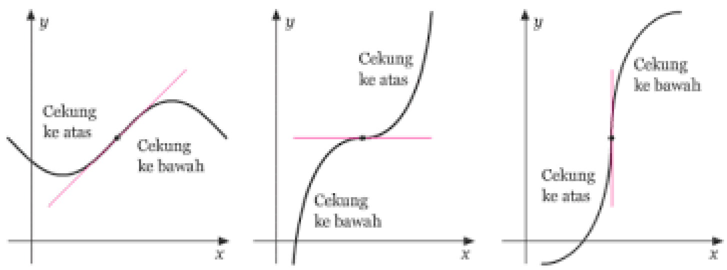
Teorema Kecekungan

Anda *f* terdiferensialkan dua kali pada selang terbuka $[a, b]$

- Jika $f''(x) > 0$ untuk semua *x* dalam $[a, b]$ maka *f* cekung ke atas pada $[a, b]$
- Jika $f''(x) < 0$ untuk semua *x* dalam $[a, b]$ maka *f* cekung ke bawah pada $[a, b]$

Titik Balik

Andaikan *f* kontinu di *c* kita sebut $(c, f(c))$ suatu titik balik dari grafik *f* jika *f* cekung ke atas pada satu sisi dan cekung ke bawah pada sisi lainnya dari *c*.



Gambar 1. Titik Balik

Langkah-langkah menentukan titik balik

1. Cari nilai-nilai *x* dengan $f''(x) = 0$
2. Periksa apakah nilai-nilai tersebut merupakan titik balik

Contoh soal 3.

Gambarkan grafik $f(x) = x^4 - 4x^2$ pada selang interval $-3 \leq x \leq 3$

a. Interval *f* naik dan *f* turun
b. Carilah titik balik
c. Cekung ke atas dan cekung ke bawah
d. Gambarkan grafiknya

Jawab dan pembahasan

a. Interval *f* naik dan *f* turun $f(x) = x^4 - 4x^2$

$f'(x) = 0$

$4x^3 - 8x = 0$

$x(4x^2 - 8) = 0$

$x = 0$ atau $x = \pm\sqrt{2}$

Uji coba beberapa titik

$x = -3 \rightarrow f'(-3) = -84$

$x = -1 \rightarrow f'(-1) = 4$

$x = 1 \rightarrow f'(1) = -4$

$x = 3 \rightarrow f'(3) = 84$

Dari hasil uji coba beberapa titik di atas dapat disimpulkan

Interval: $-3 \leq x \leq -\sqrt{2}$, $f'(x) < 0$, f turun

Interval: $-\sqrt{2} \leq x \leq 0$, $f'(x) > 0$, f naik

Interval: $0 \leq x \leq \sqrt{2}$, $f'(x) < 0$, f turun

Interval: $\sqrt{2} \leq x \leq 3$, $f'(x) > 0$, f naik

b. Titik balik

$f''(x) = 0$

$12x^2 - 8 = 0$

$x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

c. Uji coba beberapa titik

$x = -1 \rightarrow f''(-1) = 4$

$x = 0 \rightarrow f''(0) = -8$

$x = 1 \rightarrow f''(1) = 4$

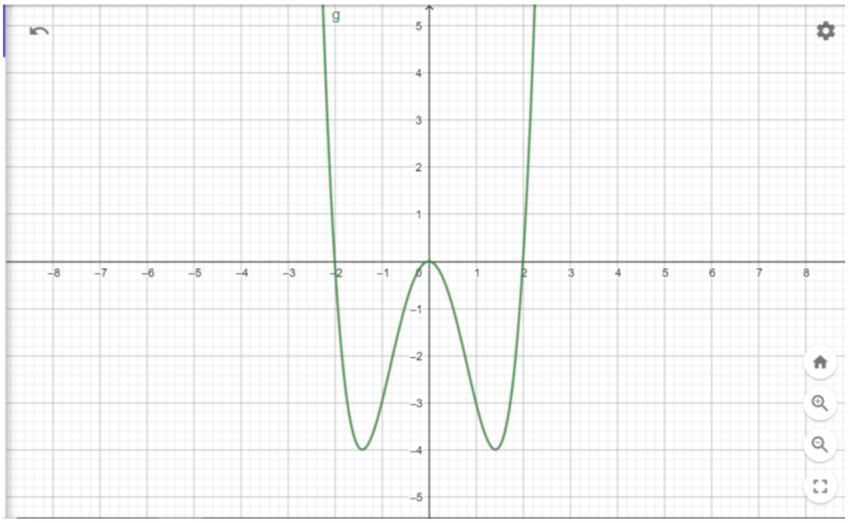
Dari uji coba beberapa titik diatas dapat disimpulkan

Interval: $x < -\sqrt{\frac{2}{3}}$, $f''(x) > 0$, f cekung ke atas

Interval: $-\sqrt{\frac{2}{3}} < x < \sqrt{\frac{2}{3}}$, $f''(x) < 0$, f cekung ke bawah

Interval: $x > \sqrt{\frac{2}{3}}$, $f''(x) > 0$, f cekung ke atas

d. Gambar grafik



Gambar 1. Grafik $f(x) = x^4 - 4x^2$