BAB 2

LIMIT FUNGSI

Limit dari suatu fungsi $f(x)$ untuk x mendekati suatu harga tertentu misalnya c, ditulis $\lim_{x \to c} f(x) = L$ yang berarti bahwa bilamana x dekat tetapi berlainan dari c maka $f(x)$ dekat dengan L. Limit erat sekali hubungan nya dengan turunan karena hasil limit dari suatu fungsi $f(x)$ juga merupakan hasil dari turunan dari fungsi tersebut dan dapat dituliskan sebagai berikut.

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

2.1 Teorema Limit

Bila nilai dari $\lim_{x \to a} f(x) = F$ dan nilai dari $\lim_{x \to a} g(x) = G$ maka:

- $\lim_{x \to a} k = k$

- $\lim_{x \to a} k. f(x) = k. \lim_{x \to a} f(x) = k. F$

- $\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = F \pm G$

- $\lim_{x \to a} [f(x). g(x)] = \left[\lim_{x \to a} f(x) \pm\right]. \left[\lim_{x \to a} g(x)\right] = F. G$

- $\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{F}{G}$

- $\lim_{x \to a} f^n(x) = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^n = F^n$

- $\lim_{x \to \sim} \left[1 + \frac{1}{x}\right]^x = e$

➢ $\lim_{x\to 0}[1+x]^{\frac{1}{x}} = e$

Berikut ini diberikan contoh soal tentang limit serta pembahasannya secara lengkap yang mengacu kepada teorema limit di atas.

Contoh soal 1.

Tentukan nilai limit dari bentuk dibawah ini dengan menggunakan teorema limit.

a. $\lim_{x\to 3} \frac{x}{\sqrt{x^2+7}}$

b. $\lim_{x\to 2} \left(\frac{4x^3+8x}{x+4}\right)^{\frac{1}{3}}$

Jawab dan pembahasan

a. $\lim_{x\to 3} \frac{x}{\sqrt{x^2+7}} = \frac{\lim_{x\to 3} x}{\lim_{x\to 3} \sqrt{x^2+7}} = \frac{3}{\sqrt{3^2+7}} = \frac{3}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}$

b. $\lim_{x\to 2} \left(\frac{4x^3+8x}{x+4}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\lim_{x\to 2} \frac{4x^3+8x}{x+4}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{\lim_{x\to 2} 4x^3+8x}{\lim_{x\to 2} x+4}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{\lim_{x\to 2} 4x^3+\lim_{x\to 2} 8x}{\lim_{x\to 2} x+\lim_{x\to 2} 4}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{32+16}{2+4}\right)^{\frac{1}{3}} =$

$\left(\frac{48}{6}\right)^{\frac{1}{3}} = (8)^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2^1 = 2$

2.2 Menentukan Nilai Limit dengan Subtitusi Langsung

Berikut ini akan diberikan beberapa soal limit yang dengan mensubtitusikan nilai x menuju konstanta $(x \to c)$ langsung ke persamaan limit akan diperoleh nilai limitnya.

Contoh soal 2.

Tentukan hasil untuk setiap limit berikut ini:

a. $\lim_{x\to 0} \frac{x^3-16x+24}{x^2+4x+12}$

b. $\lim_{x\to 3} \frac{49-x^2}{1+\sqrt{x^2+7}}$

Jawab dan pembahasan

a. $\lim_{x\to 0} \frac{x^3-16x+24}{x^2+4x+12} = \frac{(0)^3-16(0)+24}{(0)^2+4(0)+12} = \frac{24}{12} = 2$

b. $\lim_{x\to 3}\frac{49-x^2}{1+\sqrt{x^2+7}}=\frac{49-(0)^2}{1+\sqrt{3^2+7}}=\frac{49-9}{1+\sqrt{16}}=\frac{40}{1+4}=\frac{40}{5}=8$

Catatan:

Jika bilangan yang disubtitusikan diperoleh nilai limitnya, maka cara ini disebut dengan cara subtitusi. Akan tetapi, jika hasil limitnya tidak diperoleh misalnya $\left(\frac{\sim}{\sim},\sim\pm\sim\ dan\ \frac{0}{0}\right)$ maka harus digunakan cara lain untuk mendapatkan hasil limitnya. Adapun cara lain tersebut adalah dengan bilangan sekawan.

2.3 Menentukan Nilai Limit dengan Faktorisasi

Seperti disebutkan sebelumnya bahwa diinginkan nilai setiap limit harus ada, maka salah satu cara untuk membuat agar nilai limit ada yaitu dengan cara faktorisasi apabila dengan cara subtitusi langsung tidak diperoleh nilai limitnya. Tujuan dari faktorisasi ini adalah untuk meniadakan factor penyebut dan pembilang yang sama yang membuat hasil limit tidak terdefinisi sehingga nilai limit menjadi ada (terdefinisi).

Berikut akan diberikan beberapa contoh soal limit yang diselesaikan dengan cara faktorisasi.

Contoh soal 3.

Tentukan hasil limit berikut ini:

a. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+5x+6}{x^3-4x}$

b. $\lim_{x\to 4}\sqrt{\frac{x^2-x-12}{x^2+6x-40}}$

Jawab dan pembahasan

a. $\lim_{x\to -2}\frac{x^2+5x+6}{x^3-4x}=\frac{-2^2-5(-2)+6}{(-2)^3-4(-2)}=\frac{4-10+6}{8-8}=\frac{0}{0}$ (tidak diinginkan), maka digunakan cara lain sebagai berikut (cara faktorisasi).

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+5x+6}{x^3-4x}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+3)(x+2)}{x(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+3)}{x(x-2)}=\frac{-2+3}{-2(-2-2)}=\frac{1}{8}$$

b. $\lim_{x\to 4}\sqrt{\frac{x^2-x-12}{x^2+6x-40}}=\sqrt{\frac{4^2-4-12}{4^2+6.4-40}}=\sqrt{\frac{0}{0}}=\frac{0}{0}$ (tidak terdefinisi) maka dilakukan cara lain untuk menyelesaikannya yaitu cara faktorisasi sebagai berikut.

$$\lim_{x\to 4}\sqrt{\frac{x^2-x-12}{x^2+6x-40}}=\lim_{x\to 4}\sqrt{\frac{(x-4)(x+3)}{(x-4)(x+10)}}=\sqrt{\lim_{x\to 4}\frac{(x+3)}{(x+10)}}=\sqrt{\frac{4+3}{4+10}}=\sqrt{\frac{7}{14}}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

2.4 Menentukan Nilai Limit dengan Perkalian Bilangan Sekawan

Sudah disebutkan di atas, bahwa selain dengan cara faktorisasi (jika bisa difaktorkan), maka persoalan limit fungsi dapat juga diselesaikan dengan perkalian bilangan sekawan (biasanya soal dalam bentuk akar-akar). Berikut ini diberikan beberapa soal yang penyelesaian nya dilakukan dengan cara perkalian dengan bilangan sekawan apabila hasil limit awalnya berbentuk $\left(\frac{\sim}{\sim}, \sim \pm \sim dan\ \frac{0}{0}\right)$.

Contoh soal 4

Hitunglah hasil dari limit berikut ini:

a. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+4}-\sqrt{2x+1}}$

b. $\lim\limits_{x\to -2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$

Jawab dan pembahasan

a. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+4}-\sqrt{2x+1}} = \frac{3-3}{\sqrt{3+4}-\sqrt{2.3+1}} = \frac{0}{\sqrt{7}-\sqrt{7}} = \frac{0}{0}$ (tidak terdefinisi) maka untuk kasus ini penyelesaian dengan cara perkalian dengan bilangan sekawan sebagai berikut.

$\lim\limits_{x\to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+4}-\sqrt{2x+1}} = \lim\limits_{x\to 3} \left(\frac{x-3}{\sqrt{x+4}-\sqrt{2x+1}}\, x\, \frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+1}}{\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+1}}\right) = \lim\limits_{x\to 3} \left(\frac{(x-3)\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+1}\right)}{(x+4)-(2x+1)}\right) =$

$\lim\limits_{x\to 3} \frac{(x-3)\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+1}\right)}{-(x-3)} = \lim\limits_{x\to 3} -\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+1}\right) = -\left(\sqrt{3+4}+\sqrt{2.3+1}\right) =$

$-2\sqrt{7}$

Catatan:

Bilangan sekawan dari $\sqrt{x+4}-\sqrt{2x+1}$ adalah $\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+1}$

b. $\lim\limits_{x\to -2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}} = \frac{4-2^2}{3-\sqrt{2^2+5}} = \frac{4-4}{3-\sqrt{9}} = \frac{0}{0}$ (tidak terdefinisi) maka untuk penyelesaian dilakukan dengan cara perkalian dengan bilangan sekawan sebagai berikut.

$\lim\limits_{x\to -2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}} = \lim\limits_{x\to -2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}\, x\, \frac{3+\sqrt{x^2+5}}{3+\sqrt{x^2+5}} = \lim\limits_{x\to -2} \frac{(4-x^2)\left(3+\sqrt{x^2+5}\right)}{9-(x^2+5)} =$

$\lim\limits_{x\to -2} \frac{(4-x^2)\left(3+\sqrt{x^2+5}\right)}{(4-x^2)} = \lim\limits_{x\to -2}\left(3+\sqrt{x^2+5}\right) = 3+\sqrt{(-2)^2+5} = 3+\sqrt{9} = 6$

2.5 Penerapan Teorema Limit di Tak Berhingga

Dikatakan teorema limit di tak berhingga adalah apabila x menuju tak hingga ($x \to \sim$). Biasanya bentuk soal yang diberikan adalah dalam bentuk fungsi pecahan berpangkat polynomial (pangkat banyak).

Berikut bentuk umum limit tak hingga:

$$\lim_{x \to \sim} \frac{ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \cdots}{px^n + qx^{n-1} + rx^{n-2} + \cdots}$$

Penyelesaian persoalan limit untuk x menuju tak hingga tidaklah susah karena yang perlu diketahui di sini adalah bahwa Langkah awal yang dilakukan adalah membagikan persamaan limit dengan pangkat yang tertinggi kemudian subtitusi ($x \to \sim$) sehingga diperoleh nilai limitnya,

Berikut diberikan beberapa contoh soal dan pembahasan tentang limit tak berhingga.

Contoh soal 5.

Tentukan nilai limit dari bentuk berikut ini:

a. $\lim_{x \to \sim} \frac{2x^2+6x+1}{x^2-2x+3}$

b. $\lim_{x \to \sim} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - x\right)$

Jawab dan pembahasan

a. $\lim_{x \to \sim} \frac{2x^2+6x+1}{x^2-2x+3} = \lim_{x \to \sim} \frac{2+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}$ (pembilang dan penyebut semuanya dibagi dengan pangkat tertinggi yaitu x^2).

$$\lim_{x \to \sim} \frac{2x^2+6x+1}{x^2-2x+3} = \lim_{x \to \sim} \frac{2+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}} = \frac{2+\frac{6}{\sim}+\frac{1}{\sim}}{1-\frac{2}{\sim}+\frac{3}{\sim}} = \frac{2+0+0}{1-0+0} = 2$$

b. $\lim_{x \to \sim} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - x\right) = \lim_{x \to \sim} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - x\right) x \frac{(\sqrt{x^2+2x}+x)}{(\sqrt{x^2+2x}+x)} = \lim_{x \to \sim} \frac{(x^2+2x)-x^2}{(\sqrt{x^2+2x}+x)} =$

$\lim_{x \to \sim} \frac{2x}{(\sqrt{x^2+2x}+x)}$ pangkat tertinggi adalah pangkat satu, berarti semua dibagi dengan x tetapi untuk yang didalam tanda akar dibagi dengan x^2 sehingga:

$$\lim_{x \to \sim} \frac{2}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1\right)} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{\sim}}+1} = \frac{2}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{2}{2} = 1$$

Catatan:

Bilangan tak berhingga ($\sim$) berarti sangat banyak, yang berarti jika sebuah bilangan dibagi tak berhingga akan diperoleh bernilai nol $\left(\frac{c}{\sim} = 0\right)$.

2.6 Limit Trigonometri

Sebagaimana diketahui bahwa trigonometri terkandung padanya bentuk sinus, cosinus, tangen, cotangent, secan, dan cosecant. Dalam limit trigonometri, hasil nilai limit berikut ini sudah ditentukan sebagai berikut:

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

Jadi, untuk menentukan nilai limit trigonometri jika hasil limit nya tidak terdefinisi dilakukan dengan merubah bentuk limit menjadi bentuk yang dapat diselesaikan.

Berikut diberikan contoh soal limit trigonometri dan pembahasannya.

Contoh soal 6.

Tentukan nilai limit dari bentuk-bentuk berikut ini:

a. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x}$

b. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x+\sin 3x}{x-\sin 2x}$

Jawab dan pembahasan

a. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \frac{1-\cos 0}{0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$ (tidak terdefinisi) maka untuk penyelesaian nya dilakukan dengan merubahnya menggunakan sifa-sifat trigonometri.

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\left(1-2sin^2\frac{1}{2}x\right)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2sin^2\frac{1}{2}x}{x} = 2\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{sin\frac{1}{2}x}{x}.sin\frac{1}{2}x\right) =$

$2\lim\limits_{x \to 0} \frac{sin\frac{1}{2}x}{x}.\lim\limits_{x \to 0} sin\frac{1}{2}x = 2\lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2}sin\frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}x}.\lim\limits_{x \to 0} sin\frac{1}{2}x = 2.\frac{1}{2}\lim\limits_{x \to 0} \frac{sin\frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}x}.\lim\limits_{x \to 0} sin\frac{1}{2}x =$

$2.\frac{1}{2}.1.sin\frac{1}{2}.0 = 1.1.\sin 0 = 1.1.0 = 0$

b. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x+\sin 3x}{x-\sin 2x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x\left(1+\frac{\sin 3x}{x}\right)}{x\left(1-\frac{\sin 2x}{x}\right)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1+\frac{\sin 3x}{x}}{1-\frac{\sin 2x}{x}} = \frac{\lim\limits_{x \to 0} 1+\lim\limits_{x \to 0}\frac{\sin 3x}{x}}{\lim\limits_{x \to 0} 1-\lim\limits_{x \to 0}\frac{\sin 2x}{x}} = \frac{1+\lim\limits_{x \to 0} 3\frac{\sin 3x}{3x}}{1-\lim\limits_{x \to 0} 2\frac{\sin 2x}{2x}} = \frac{1+3}{1-2} = \frac{4}{-1} =$

-4