

## BAB 3

### DIFERENSIAL FUNGSI

#### 3.1 Diferensial (turunan ) Fungsi Aljabar

Berikut ini akan diberikan rumus-rumus dasar turunan dari bentuk fungsi aljabar. Rumus dasar turunan aljabar ini merupakan bentuk yang paling sederhana yang harus dipahami oleh pembaca agar untuk nantinya dapat menurunkan bentuk-bentuk fungsi yang lain. Jika sebuah fungsi dimisalkan adalah  $y = f(x)$  maka turunan pertama dari fungsi tersebut dituliskan  $y' = f'(x)$  atau boleh juga  $\frac{dy}{dx}$  yang artinya  $y$  diturunkan terhadap variabel  $x$ .

##### Rumus-rumus dasar fungsi aljabar.

- Jika  $y = a$  maka turunannya  $y' = 0$
- Jika  $y = ax$  maka turunannya  $y' = a$
- Jika  $y = ax^n$  maka turunannya  $y' = a \cdot nx^{n-1}$
- Jika  $y = f^n(x)$  maka turunannya  $y' = n \cdot f'(x) \cdot f^{n-1}(x)$
- Jika  $y = u \cdot v$  maka turunannya  $y' = u' \cdot v + v' \cdot u$
- Jika  $y = \frac{u}{v}$  maka turunannya  $y' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$

##### Catatan:

- $u$  dan  $v$  yang terdapat pada formula diatas adalah merupakan sebuah fungsi, dan formula ini ke depannya nanti akan sangat sering digunakan, sehingga diharapkan pembaca harus mengerti cara penggunaannya dengan baik dan benar.
- Dua rumus terakhir diatas sering disebut rumus turunan untuk perkalian dan bentuk pembagian fungsi dan rumus ini sangat sering dipergunakan untuk menyelesaikan persoalan yang lebih kompleks.
- Turunan berarti pangkat dari variabel yang ada dikurangi dengan satu, sedangkan pangkat awalnya dipindahkan sebagai koefisien variabel.
- Turunan setiap bilangan konstan adalah nol

Berikut akan diberikan contoh soal yang lengkap dengan pembahasannya secara detail sehingga dapat diikuti langkah demi langkah dalam penyelesaiannya.

### Contoh soal 1.

Tentukan turunan pertama dari fungsi-fungsi berikut

- a.  $y = 2x^3 - 15x + 17$
- b.  $y = (2x^2 + 7x)^5$
- c.  $y = (3x + 5)(x^2 - 3)^3$
- d.  $y = \frac{x-3}{3x+1}$

### Jawab dan pembahasan

- a.  $y' = \frac{dy}{dx} = 2.3x^{3-1} - 15.1x^{1-1} + 0 = 6x^2 - 15$
- b.  $y' = \frac{dy}{dx} = 5.(2.2.x + 7)(2x^2 + 7x)^4 = 5(4x + 7)(2x^2 + 7x)^4 = (20x + 35)(2x^2 + 7x)^4$
- c. Misalkan  $u = (3x + 5)$  maka turunannya  $u' = 3$   
 $v = (x^2 - 3)^3$  maka turunannya  $v' = 3(2x)(x^2 - 3)^2 = 6x(x^2 - 3)^2$   
Substitusi  $y' = \frac{dy}{dx} = u'.v + v'.u$  maka akan diperoleh:  
 $\frac{dy}{dx} = y' = (3)(x^2 - 3)^3 + (6x(x^2 - 3)^2)(3x + 5) = (x^2 - 3)^2(18x^2 + 30x)$
- d. Misalkan  $u = (x - 3)$  maka turunannya  $u' = 1$   
 $v = (3x + 1)$  maka turunannya  $v' = 3$   
Substitusikan  $y' = \frac{u'.v - v'.u}{v^2} = \frac{1.(3x+1) - 3(x-3)}{(3x+1)^2} = \frac{10}{(3x+1)^2}$

### 3.2 Diferensial Fungsi Logaritma

Bentuk umum turunan fungsi logaritma dapat dituliskan sebagai berikut.

- $y = \ln x$  maka turunannya  $y' = \frac{1}{x}$
- $y = a \ln u$  maka turunannya  $y' = \frac{a.u'}{u}$   
dimana  $u$  adalah sebuah fungsi.

### Contoh soal 2.

Tentukan turunan pertama dari fungsi  $y = 2 \ln(5x + 1)$

### Jawab dan pembahasan

Persoalan ini dapat diselesaikan dengan melakukan permisalan sebagai berikut.

Misalkan  $U = 5x + 1$  maka turunannya  $U' = 5$

Kemudian dari rumus  $y' = \frac{a.u'}{u}$  akan diperoleh  $y' = \frac{2.5}{5x+1} = \frac{10}{5x+1}$

### 3.3 Diferensial Fungsi Eksponensial

Berikut ini akan diberikan formula untuk menentukan turunan dari fungsi eksponensial.

- $y = e^x$  maka turunannya adalah  $y' = e^x$
- $y = ae^u$  maka turunannya adalah  $y' = a \cdot u' \cdot e^u$   
dimana  $u$  adalah sebuah fungsi dan  $a$  adalah konstanta

#### Contoh soal 3.

Tentukan turunan dari fungsi  $y = 3e^{5x-2}$

#### Jawab dan pembahasan

Misalkan bentuk pangkat adalah  $U = 5x - 2$  maka  $U' = 5$  sehingga turunan fungsi  $y$  adalah:

$$y' = \frac{dy}{dx} = 3 \cdot 5 \cdot e^{5x-2} = 15e^{5x-2}$$

### 3.4 Diferensial Bentuk Fungsi $f(x) = f(x)^{g(x)}$

Berikut akan diturunkan langkah untuk mendapatkan rumus turunan untuk penyelesaian soal berbentuk  $f(x)^{g(x)}$ . Contoh berikut adalah langkah menjabarkan untuk mencari turunan fungsi berbentuk  $f(x)^{g(x)}$ .

#### Contoh soal 4.

Tentukan turunan dari fungsi  $y = f(x)^{g(x)}$

#### Jawab dan pembahasan

$y = f(x)^{g(x)}$  (Logaritmakan bagian kiri dan kanan persamaan)

$$\ln y = \ln f(x)^{g(x)}$$

$$\ln y = g(x) \ln f(x)$$

$$\frac{1}{y} dy = g(x) \cdot d \ln f(x) + \ln f(x) \cdot dg(x)$$

$$dy = y \left[ \frac{g(x)}{f(x)} \cdot df(x) + \ln f(x) \cdot dg(x) \right]$$

$$dy = f(x)^{g(x)} \left[ \frac{g(x)}{f(x)} \cdot \frac{df(x)}{dx} + \ln f(x) \cdot \frac{dg(x)}{dx} \right]$$

$$dy = f(x)^{g(x)} \left[ \frac{g(x)}{f(x)} \cdot f'(x) + \ln f(x) \cdot g'(x) \right]$$

Jika dimisalkan  $f(x) = u$  dan  $g(x) = v$  maka secara umum bentuk  $y'$  dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\text{Jika } y = u^v \text{ maka turunannya adalah } y' = u^v \left[ u' \cdot \frac{v}{u} + v' \cdot \ln u \right]$$

### Contoh soal 5.

Tentukan turunan dari fungsi  $y = (2x)^{3x}$

### Jawab dan pembahasan

Agar lebih mudah, penyelesaian dilakukan dengan permisalan sebagai berikut.

Misal  $u = 2x$  maka turunannya adalah  $u' = 2$

$v = 3x$  maka turunannya adalah  $v' = 3$

Substitusikan ke persamaan  $y' = u^v \left[ u' \cdot \frac{v}{u} + v' \cdot \ln u \right] = (2x)^{3x} \left[ 2 \cdot \frac{3x}{2x} + 3 \cdot \ln 2x \right] = (2x)^{3x} [3 + 3 \cdot \ln 2x]$  maka diperoleh turunan dari fungsi  $y$ :

$$y' = \frac{dy}{dx} = (2x)^{3x} \left[ 2 \cdot \frac{3x}{2x} + 3 \cdot \ln 2x \right] = (2x)^{3x} [3 + 3 \ln 2x]$$

### 3.5 Diferensial Bentuk Fungsi $f(x) = a^u$

Berikut akan diberikan formula untuk menentukan turunan dari fungsi konstanta berpangkat variabel  $x$  (fungsi).

- $y = a^x$  maka turunannya adalah  $y' = a^x \cdot \ln a$
- $y = ca^u$  maka turunannya adalah  $y' = c \cdot u' \cdot a^u \cdot \ln a$   
dimana  $A = \text{konstanta}$  dan  $u$  adalah sebuah fungsi.

### Contoh soal 6.

Tentukan turunan pertama dari fungsi  $y = 3^{5x-1}$

### Jawab dan pembahasan

Agar penyelesaian sesuai dengan formula, maka dimisalkan:

$u = 5x - 1$  maka  $u' = 5$  sehingga dengan rumus  $y' = c \cdot u' \cdot a^u \cdot \ln a$  maka diperoleh

$$y' = 5 \cdot 3^{5x-1} \cdot \ln 3$$

### 3.6 Rumus-rumus Dasar Turunan Fungsi Trigonometri

Setelah dapat dipahami materi yang disampaikan di atas, maka selanjutnya akan dibahas mengenai penentuan turunan fungsi dalam bentuk fungsi trigonometri.

No	Fungsi	Turunan
1	$y = \sin x$	$y' = \cos x$
2	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
3	$y = \tan x$	$y' = \sec^2 x$
4	$y = \cotan x$	$y' = -\operatorname{cosec}^2 x$
5	$y = \sec x$	$y' = \sec x \cdot \tan x$
6	$y = \operatorname{cosec} x$	$y' = -\operatorname{cosec} x \cdot \cotan x$

#### Contoh soal 1.

Tentukan turunan dari fungsi  $y = 2 \sin(5x^2 - 7x + 8)$

#### Jawab dan pembahasan

Penyelesaian dilakukan dengan memisalkan yang dalam sinus sebagai sebuah fungsi  $U$ , sehingga  $U = 5x^2 - 7x + 8$  maka  $\frac{du}{dx} = U' = 10x - 7$  dan  $y = 2 \sin U$  maka  $y' = \frac{dy}{du} = 2 \cos U$  sehingga diperoleh:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 2 \cos U \cdot (10x - 7) = 2 \cdot (10x - 7) \cos(5x^2 - 7x + 8) = (20x - 14) \cos(5x^2 - 7x + 8)$$

#### Contoh soal 2.

Tentukan turunan dari fungsi  $y = -15x \cdot \cos e^x$

#### Jawab dan pembahasan

Misalkan  $u = -15x$  maka turunan nya adalah  $u' = -15$

$$v = \cos e^x \text{ maka turunan nya adalah } v' = -e^x \sin e^x$$

$$y' = u' \cdot v + v' \cdot u = -15 \cos e^x + -e^x \sin e^x (-15) = -15 \cos e^x + 15x e^x \sin e^x$$

#### Contoh soal 3.

Tentukan turunan dari fungsi  $y = 3 \tan \sqrt{x^2 - 4x}$

**Jawab dan pembahasan**

Misalkan  $u = \sqrt{x^2 - 4x} = (x^2 - 4x)^{\frac{1}{2}}$  maka turunan nya adalah  $u' = \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \cdot (2x -$

$4)(x^2 - 4x)^{-\frac{1}{2}}$  dan  $y = 3 \tan u$  maka turunannya  $\frac{dy}{du} = 3 \sec^2 u$  sehingga diperoleh:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} x \frac{du}{dx} = 3 \sec^2 u \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot (2x - 4)(x^2 - 4x)^{-\frac{1}{2}} \right) = (3x - 6)(x^2 -$$

$$4x)^{-\frac{1}{2}} \sec^2 \sqrt{x^2 - 4x} = \frac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x}} \sec^2 \sqrt{x^2 - 4x}$$