

# **BAB 1**

## **FUNGSI**

Dalam kalkulus, ada beberapa macam fungsi yaitu fungsi aljabar, fungsi transenden, fungsi khusus, fungsi genap atau ganjil, dan fungsi periodic. Berikut akan diberikan dan dibahas tentang macam-macam fungsi tersebut.

### **1.1 Fungsi Aljabar**

Fungsi aljabar adalah fungsi yang menggunakan operasi-operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian, perpangkatan, dan penarikan akar. Fungsi aljabar meliputi fungsi irasional dan fungsi rasional.

#### **1.1.1 Fungsi Irrasional**

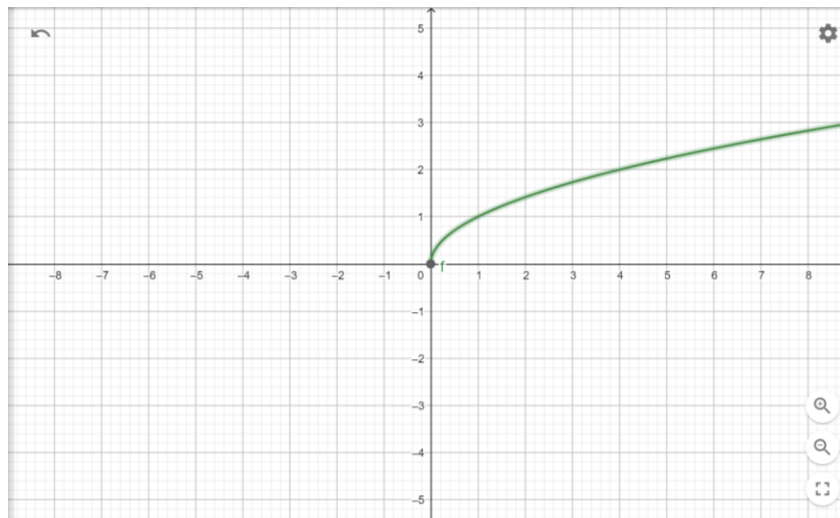
Fungsi irasional adalah fungsi yang variabel bebasnya terdapat dibawah tanda akar, contoh  $y = \sqrt{x}$ ;  $y = \sqrt{2x + 7}$

#### **Contoh soal 1**

Gambarkan grafik fungsi  $y = \sqrt{x}$

#### **Jawab dan pembahasan**

Grafik dapat digambar dengan mengambil nilai-nilai  $x$  sembarang ( $x \geq 0$ ) dan kemudian mensubstitusikannya ke persamaan  $y = \sqrt{x}$  untuk mendapatkan nilai  $y$  dan letakkan koordinat titik tersebut pada sistem koordinat.



Gambar 1.1. Kurva  $y = \sqrt{x}$

### 1.1.2 Fungsi Rasional

Fungsi rasional adalah fungsi yang variabel bebasnya berpangkat bilangan bulat. Fungsi rasional meliputi fungsi: linier, kuadrat, kubik, polinom, dan fungsi pecahan. Berikut dibahas tentang fungsi rasional.

- Fungsi linier

Fungsi linier adalah fungsi yang dengan variabel bebasnya berpangkat satu atau sering juga disebut fungsi garis lurus.

- Fungsi kuadrat

Fungsi kuadrat adalah fungsi yang dengan variabel bebasnya berpangkat dua atau sering juga disebut fungsi kuadrat.

- Fungsi kubik

Fungsi kubik adalah fungsi yang dengan variabel bebasnya berpangkat tiga atau sering juga disebut fungsi kubik.

Berikut beberapa contoh ketiga fungsi diatas:

- a.  $y = 2x + 4$
- b.  $y = x^2 + 3x - 4$
- c.  $y = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

### a. Fungsi garis (Linier)

Sekedar mengulang atau mengingatkan kembali, grafik fungsi linier dapat digambarkan cukup hanya dengan menentukan dua buah titik saja dan kedua titik tersebut dihubungkan sehingga membentuk sebuah garis lurus.

#### Contoh soal 2

Gambarkan grafik fungsi  $y = 2x + 4$

#### Jawab dan Pembahasan

##### Langkah-1:

Tentukan titik potong dengan sumbu- $x$  ( $y = 0$ ):

$$0 = 2x + 4$$

$$2x = -4$$

$$x = -2$$

Jadi, koordinat titik potong terhadap sumbu- $x$  adalah  $(-2, 0)$

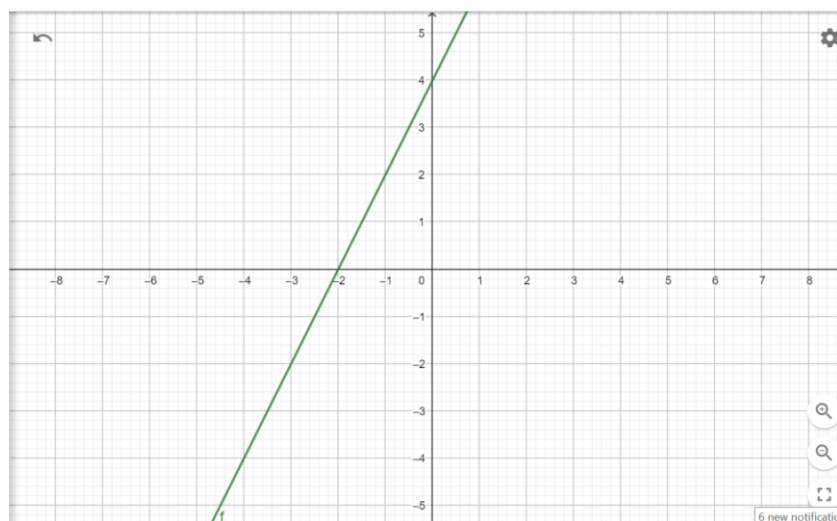
##### Langkah-2:

Tentukan titik potong dengan sumbu- $y$  ( $x = 0$ ), maka:

$$y = 0 + 4$$

$$y = 4$$

Jadi, koordinat titik potong terhadap sumbu- $y$  adalah  $(0, 4)$ .



Gambar 2. Grafik garis  $y = 2x + 4$

**Langkah-3:**

Letakkan kedua titik tersebut pada sumbu-x dan sumbu-y, kemudian hubungkan kedua titik tersebut dengan garis lurus sehingga diperoleh grafik seperti Gambar 2.

**b. Fungsi Parabola (Kuadrat)**

Bentuk umum fungsi parabola adalah  $y = ax^2 + bx + c$  dimana  $a, b, c$  konstanta bilangan real dan  $a \neq 0$ .

Parabola memiliki koordinat titik puncak  $(x_p, y_p)$  dimana:

$$x_p = \text{absis titik puncak} = \frac{-b}{2a}$$

$$y_p = \text{ordinat titik puncak} = \frac{-b^2 - 4ac}{4a}$$

**Contoh soal 3**

Gambarlah sketsa grafik  $y = x^2 + 3x - 4$

**Jawab dan pembahasan**

Berikut adalah Langkah untuk menggambar sketsa grafik parabola di atas.

**Langkah-1:**

Tentukan titik potong dengan sumbu-x ( $y = 0$ )

$$0 = x^2 + 3x - 4$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$(x + 4)(x - 1) = 0$$

$$x = -4 \text{ atau } x = 1$$

Sehingga koordinat titik potong terhadap sumbu-x adalah  $(-4, 0)$  dan  $(1, 0)$ .

**Langkah-2:**

Tentukan titik potong dengan sumbu-y ( $x = 0$ )

$$y = 0^2 + 3 \cdot 0 - 4$$

$$y = -4$$

Jadi koordinat titik potong pada sumbu-y adalah  $(0, -4)$

**Langkah-3:**

Tentukan koordinat titik puncak  $(x_p, y_p)$

$$x_p = \frac{-b}{2a} = \frac{-3}{2 \cdot 1} = \frac{-3}{2} \text{ dan}$$

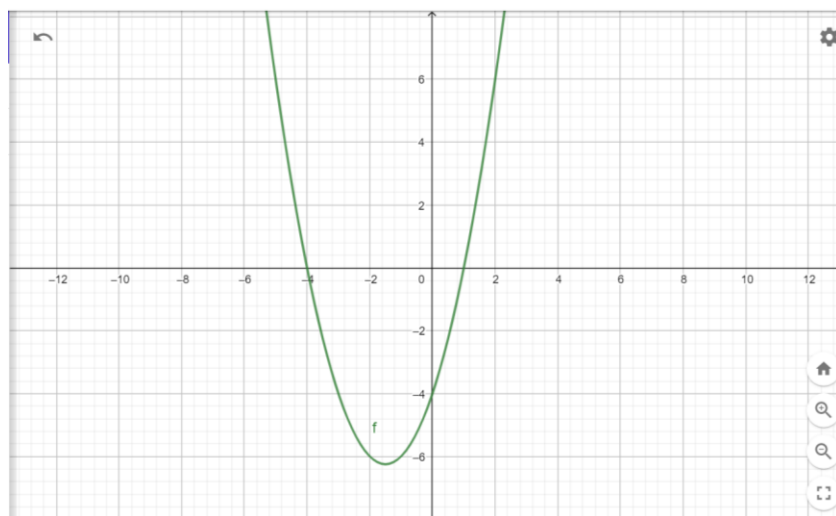
$$y_p = \frac{-b^2 - 4ac}{4a} = \frac{-3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}{4 \cdot 1} = \frac{-25}{4}$$

Atau nilai  $y_p$  dapat diperoleh dengan mensubstitusikan nilai  $x_p$  ke fungsi parabola sebagai berikut:

$$y_p = \left(\frac{-3}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{-3}{2}\right) - 4 = \frac{-25}{4} \text{ sehingga koordinat titik puncaknya diperoleh } \left(\frac{-3}{2}, \frac{-25}{4}\right).$$

**Langkah 4:**

Letakkan keempat titik tersebut pada sistem koordinat dan hubungkan keempat titik tersebut dengan garis lengkung sehingga diperoleh sebuah grafik parabola yang terbuka ke atas (Gambar 3).



Gambar 3. Grafik Parabola  $y = x^2 + 3x - 4$

**Contoh Soal 4**

Tentukan koordinat titik potong fungsi  $y = x$  dengan fungsi  $y = x^2 - 2$  serta gambarkan sketsa grafiknya.

**Jawab dan pembahasan**

Menentukan titik potong kedua fungsi dilakukan dengan mensubstitusikan  $y = x$  ke persamaan  $y = x^2 - 2$ , sehingga menjadi

$$y = y$$

$$x = x^2 - 2$$

$$x^2 - 2 - x = 0$$

$$(x - 2)(x + 1) = 0$$

Diperoleh akar-akar  $x = 2$  dan  $x = -1$ .

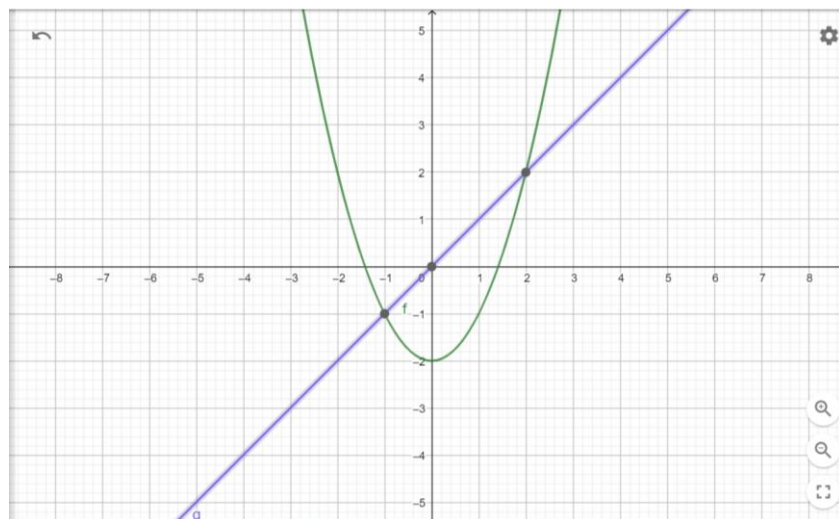
Substitusikan nilai  $x = 2$  dan  $x = -1$  ke persamaan  $y = x$  sehingga diperoleh

untuk  $x = 2 \rightarrow y = 2$  dan

untuk  $x = -1 \rightarrow y = -1$

sehingga koordinat titik potong nya ada 2 yaitu di  $(2, 2)$  dan  $(-1, -1)$ .

Sketsa grafik kedua fungsi dapat digambar dengan cara seperti cara atau langkah di atas (garis dan parabola) sehingga diperoleh grafiknya seperti gambar berikut:



Gambar 4. Grafik titik potong garis dengan parabola

### Contoh Soal 5

Tentukan koordinat titik potong fungsi  $x + y = 3$  dengan fungsi  $x^2 - 2x + y = 1$  serta gambarkan sketsa grafiknya.

### Jawab dan pembahasan

Dari persamaan  $x + y = 3 \rightarrow y = 3 - x$

Dari persamaan  $x^2 - 2x + y = 1 \rightarrow y = -x^2 + 2x + 1$

Substitusikan persamaan (i) ke persamaan (ii), sehingga:

$$y = y$$

$$3 - x = -x^2 + 2x + 1$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$(x - 2)(x - 1) = 0$$

Maka diperoleh akar-akar  $x = 2$  dan  $x = 1$ .

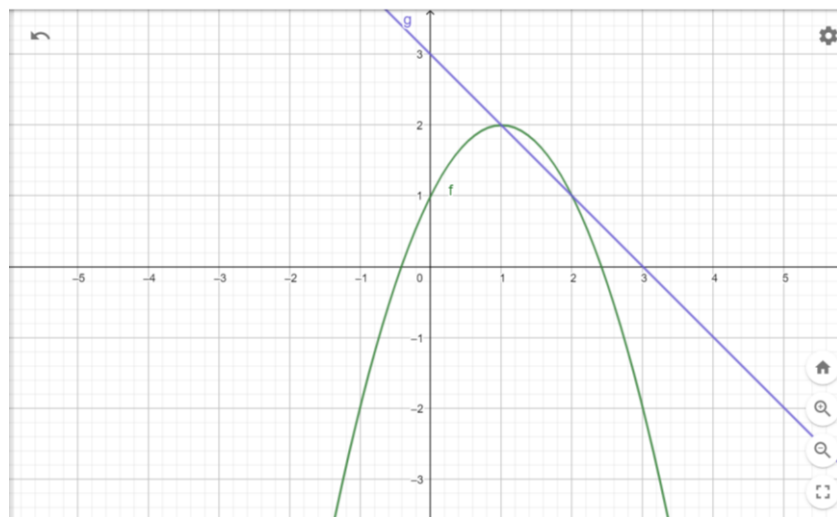
Substitusikan nilai  $x = 2$  dan  $x = 1$  ke persamaan  $y = 3 - x$  sehingga:

$$\text{Untuk } x = 2 \text{ diperoleh } y = 3 - 2 = 1$$

$$\text{Untuk } x = 1 \text{ diperoleh } y = 3 - 1 = 2$$

Sehingga koordinat titik potong nya adalah  $(2,1)$  dan  $(1,2)$

Sketsa grafik kedua fungsi dapat digambar dengan cara seperti cara atau langkah di atas (garis dan parabola) sehingga diperoleh grafiknya seperti gambar berikut:



Gambar 5. Grafik titik potong garis dengan parabola

### Contoh soal 6

Tentukan koordinat titik potong fungsi parabola  $y = x^2$  dengan fungsi parabola  $y = -x^2 - 4x$  serta gambarkan sketsa grafiknya.

### Jawab dan pembahasan

Koordinat titik potong dapat diperoleh dengan cara sebagai berikut.

Substitusi  $y = x^2$  ke persamaan  $y = -x^2 - 4x$  sehingga menjadi:

$$y = y$$

$$x^2 = -x^2 - 4x$$

$$2x^2 + 4x = 0$$

$$x^2 + 2x = 0$$

$$x(x + 2) = 0$$

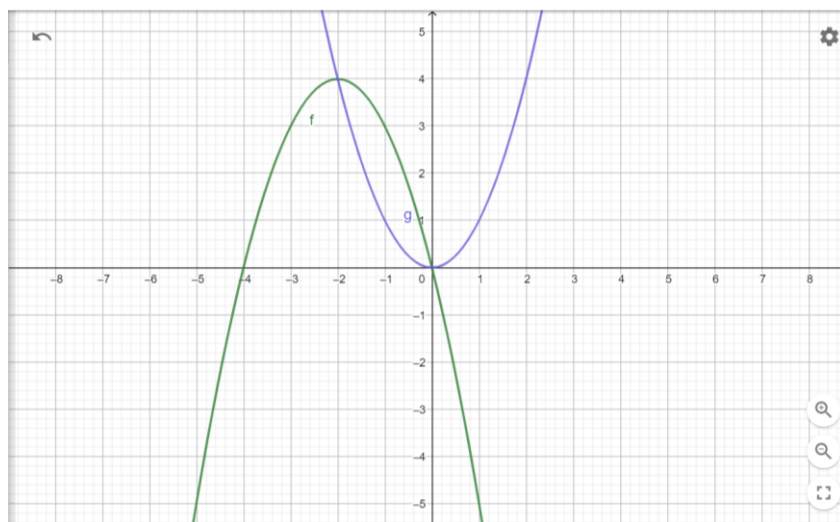
$$x = 0 \text{ atau } x = -2$$

Untuk  $x = 0$  diperoleh  $y = 0^2 = 0$

Untuk  $x = -2$  diperoleh  $y = (-2)^2 = 4$

Maka koordinat titik potong kedua parabola adalah  $(0, 0)$  dan  $(-2, 4)$ .

Sketsa grafik kedua fungsi dapat digambar dengan cara seperti cara atau langkah di atas (parabola dan parabola) sehingga diperoleh grafiknya seperti gambar berikut:



Gambar 6. Grafik titik potong parabola dengan parabola

### c. Fungsi Kubik

Seperti yang disebut diatas, bahwa fungsi kubik adalah suatu fungsi yang memiliki pangkat tertinggi tiga, atau secara umum dapat dituliskan:  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  dengan  $a, b, c$  dan  $d$  bilangan real, dan  $a \neq 0$ .

### Contoh soal 7

Gambarkan sketsa grafik dari fungsi  $y = x^3 - 6x^2 + 8x$



### Jawab dan pembahasan

Berikut Langkah yang dilakukan untuk menggambar grafik fungsi di atas.

#### Langkah-1:

Tentukan titik potong dengan sumbu-x ( $y = 0$ )

$$0 = x^3 - 6x^2 + 8x \text{ atau } x^3 - 6x^2 + 8x = 0$$

Faktorkan persamaan pangkat tiga di atas:

$$x(x^2 - 6x + 8) = 0$$

$x(x - 2)(x - 4) = 0$  maka diperoleh akar-akar persamaan  $x = 0, x = 2$ , dan  $x = 4$  yang berarti grafik memotong sumbu-x di tiga titik yaitu  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$  dan  $(4, 0)$ .

#### Langkah-2:

Tentukan titik potong dengan sumbu-y ( $x = 0$ )

$$y = (0)^3 - 6(0)^2 + 8(0) = 0 \text{ maka koordinat titik potong pada sumbu-y adalah } (0, 0).$$

#### Langkah-3:

Menentukan titik stasioner adalah titik puncak maksimum atau titik puncak minimum atau titik peralihan dari minimum ke maksimum atau dari maksimum ke minimum. Ini diperoleh dengan mengambil turunan pertama dari fungsi dan menyamakannya dengan nol ( $f'(x) = 0$ ).

$$y = x^3 - 6x^2 + 8x$$

$$y' = 3x^2 - 12x + 8 = 0$$

Akar-akar persamaan kuadrat diatas, dengan menggunakan rumus abc diperoleh  $x = 0.84530$  dan  $x = 3.1547$  selanjutnya substitusikan kedua nilai x ini ke fungsi  $y = x^3 - 6x^2 + 8x$  sehingga:

$$\text{Untuk } x = 0.84530 \text{ diperoleh } y = (0.84530)^3 - 6(0.84530)^2 + 8(0.84530) = 3.0792$$

$$\text{Untuk } x = 3.1547 \text{ diperoleh } y = (3.1547)^3 - 6(3.1547)^2 + 8(3.1547) = -3.0792$$

Dari kedua titik ini ternyata titik maksimum adalah  $(0.84530, 3.0792)$  sedangkan titik minimum adalah  $(3.1547, -3.0792)$ .

#### Langkah-4:

Menentukan titik sembarang nilai batas kiri dan kanan grafik, missal  $x = -1$  dan  $x = 5$ .

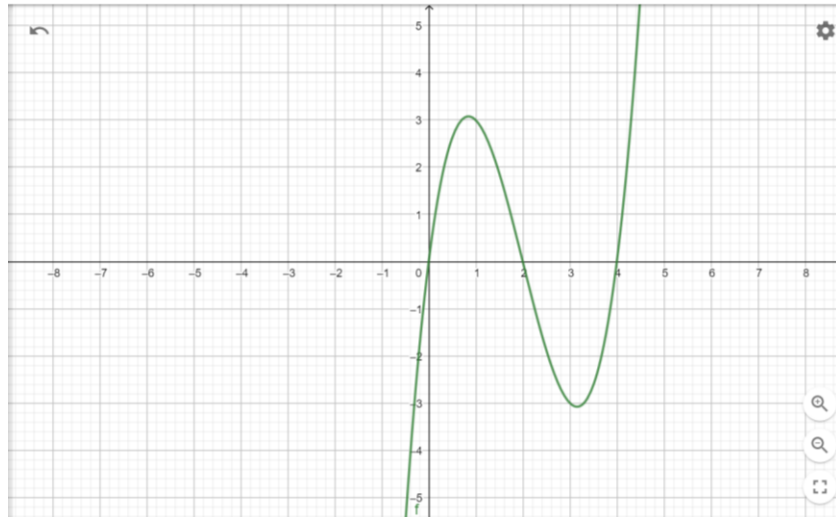
$$\text{Untuk } x = -1 \text{ maka } y = (-1)^3 - 6(-1)^2 + 8(-1) = -15$$

$$\text{Untuk } x = 5 \text{ maka } y = (5)^3 - 6(5)^2 + 8(5) = 15$$

Maka koordinat batas kiri dan kanan masing-masing adalah  $(-1, -15)$  dan  $(5, 15)$

#### Langkah-5:

Ambil beberapa buah nilai  $x$  lagi dan substitusikan ke persamaan untuk mendapatkan nilai  $y$  sehingga diperoleh titik-titik dalam jumlah banyak dan dengan menghubungkan titik-titik tersebut dengan garis lengkung, maka akan diperoleh grafik yang lebih baik (mulus).



Gambar 7. Grafik fungsi  $y = x^3 - 6x^2 + 8x$

#### d. Fungsi Pecahan

Fungsi pecahan adalah fungsi polinom dalam bentuk pembagian. Berikut diberikan fungsi pecahan linier dan fungsi pecahan kuadrat.

- Bentuk umum fungsi pecahan linier:  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ;  $c \neq 0$  dan  $cx + d \neq 0$  sehingga dari bentuk umum ini diperoleh

$$\text{Persamaan garis asimtot datar } y = \frac{a}{c}$$

$$\text{Persamaan garis asimtot tegak } x = \frac{-d}{c}$$

**Catatan:** garis asimtot adalah garis yang akan bertemu dengan kurva pada jauh tak berhingga.

- Bentuk umum fungsi pecahan kuadrat:  $y = \frac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}$ ;  $px^2 + qx + r \neq 0$ .

#### Contoh soal 8

Gambarkan sketsa grafik dari fungsi  $y = \frac{4x+1}{x-2}$ ,  $x \neq 2$

## Jawab dan pembahasan

### Langkah-1:

Pertama sekali tentukan terlebih dahulu garis asimtot datar dan tegaknya dengan menggunakan rumus diatas. Dari fungsi  $y = \frac{4x+1}{x-2}$  diperoleh:

$$\text{Persamaan asimtot datar, } y = \frac{a}{c} \rightarrow y = \frac{4}{1} = 4$$

$$\text{Persamaan asimtot tegak, } x = -\frac{d}{c} = -\frac{-2}{1} = 2$$

### Langkah-2:

Tentukan koordinat titik potong dengan sumbu-y ( $x = 0$ )

Untuk  $x = 0$  maka diperoleh  $y = \frac{4x+1}{x-2} = \frac{4 \cdot 0 + 1}{0 - 2} = -\frac{1}{2}$  sehingga koordinat titik potong dengan sumbu-y diperoleh  $(0, -\frac{1}{2})$ .

### Langkah-3:

Tentukan koordinat titik potong dengan sumbu-x ( $y = 0$ )

Untuk  $y = 0$ , maka diperoleh

$$0 = \frac{4x+1}{x-2}$$

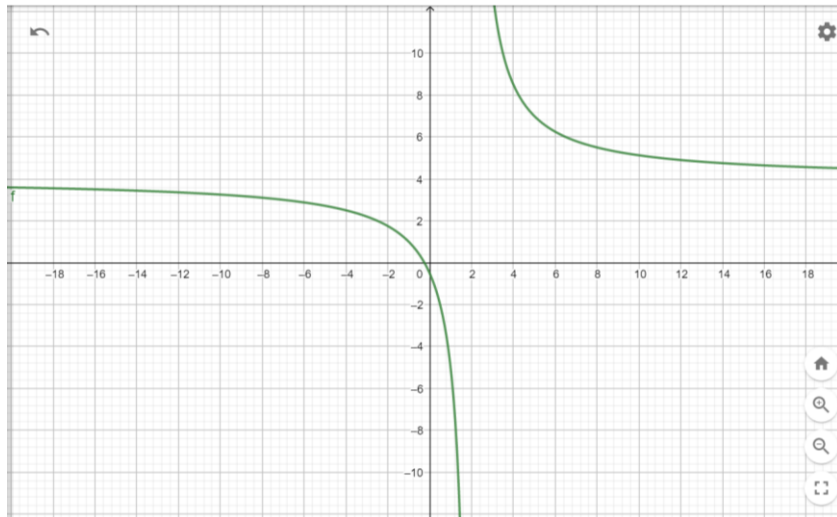
$$4x + 1 = 0$$

$$x = -\frac{1}{4}$$

Sehingga koordinat titik potong dengan sumbu-x diperoleh  $(-\frac{1}{4}, 0)$

### Langkah-4:

Tentukan nilai-nilai  $x$  sembarang untuk mendapatkan nilai  $y$ , sehingga diperoleh titik-titik koordinat dan dihubungkan dengan sebuah garis lengkung. Maka grafiknya seperti berikut;



Gambar 8. Grafik fungsi  $y = \frac{4x+1}{x-2}$

## 1.2 Fungsi Transenden

Fungsi transenden adalah fungsi yang bukan merupakan fungsi aljabar. Yang termasuk fungsi transenden diantaranya adalah fungsi logaritma, fungsi eksponensial, fungsi trigonometri, fungsi hiperbolik, fungsi siklometri.

### a. Fungsi Trigonometri

Fungsi trigonometri adalah fungsi yang mengandung sinus dan cosinus. Bentuk umum fungsi trigonometri:

$$y = a \sin(bx \pm \alpha^\circ) \pm k \text{ atau}$$

$$y = a \cos(bx \pm \alpha^\circ) \pm k$$

Dimana

$a$  = amplitude atau simpangan maksimum

$b$  = banyak gelombang dalam interval  $2\pi$

$-\alpha^\circ$  = pergeseran gelombang kearah kanan sejauh  $\alpha^\circ$

$+\alpha^\circ$  = pergeseran gelombang kearah kiri sejauh  $\alpha^\circ$

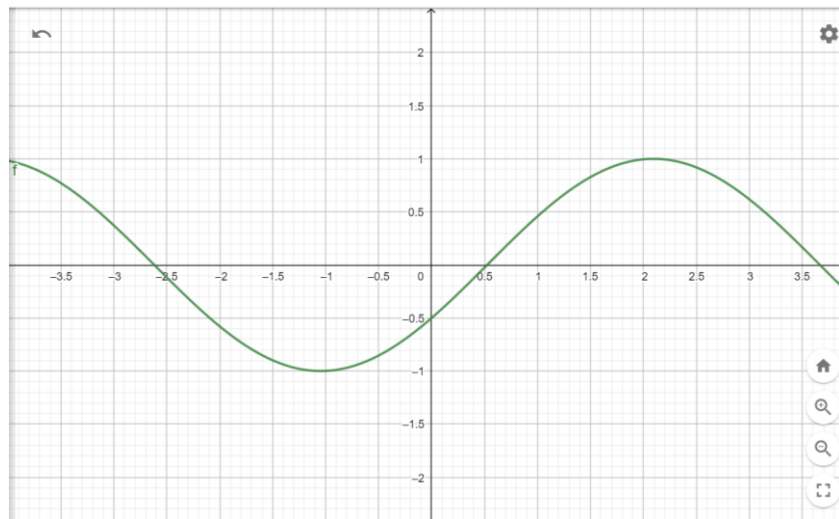
$-k$  = pergeseran gelombang arah bawah sejauh  $k$  satuan

$+k$  = pergeseran gelombang arah atas sejauh  $k$  satuan

### Contoh soal 9

Gambarkan grafik dari fungsi  $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

### Jawab dan pembahasan



Gambar 9. Grafik fungsi  $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

Karena tanda sudut adalah negative, maka fungsi  $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$  mengalami pergeseran sebesar  $30^\circ$  ke arah kanan, dan ini terlihat titik potong pada sumbu-x sudah berpindah sejauh pada  $30^\circ$ .

#### b. Fungsi eksponensial

Fungsi eksponensial adalah sebuah fungsi yang berpangkatkan variabel bebas, bentuk umumnya sebagai berikut:

$$y = a^x$$

Dimana  $a = \text{konstanta}$ ,  $a \neq 0$ ,  $a \neq 1$ ;  $x = \text{variabel bebas}$ .

#### Contoh soal 10

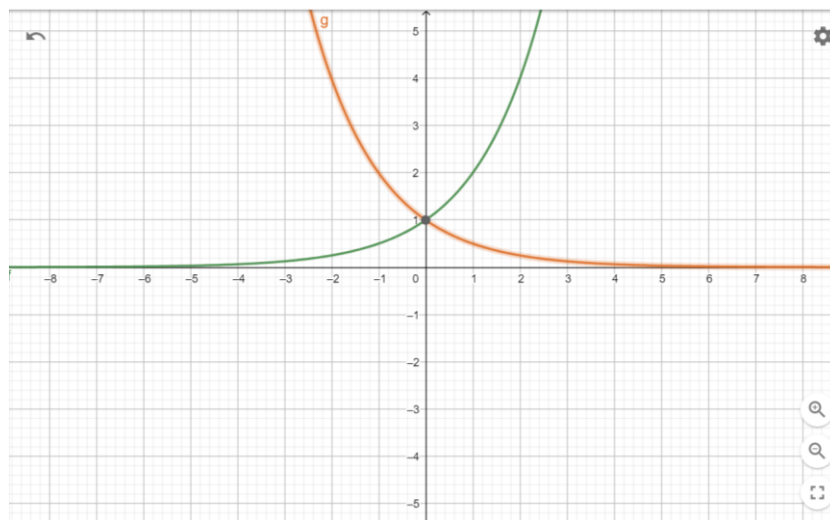
Gambarkan sketsa grafik  $y = 2^x$  dan  $y = 2^{-x}$

### Jawab dan pembahasan

Ciri khas dari grafik fungsi eksponen adalah grafik selalu memotong sumbu-y di  $y = 1$  (apabila tidak ada pergeseran grafik) dan memiliki garis asimtot sumbu-x. dengan mengambil nilai-nilai  $x$  sembarang dan disubstitusikan ke fungsinya maka diperoleh titik-titik pembentuk fungsi. Kemudian hubungkan titik tersebut dengan garis lengkung maka grafik akan diperoleh.

$x$	$y = 2^x$	Koordinat	$y = 2^{-x}$	Koordinat
-2	$y = 2^{-2} = 1/4$	$(-2, \frac{1}{4})$	$y = 2^{-2} = 4$	$(-2, 4)$
-1	$y = 2^{-1} = 1/2$	$(-1, \frac{1}{2})$	$y = 2^{-1} = 2$	$(-1, 2)$
0	$y = 2^0 = 1$	$(0, 1)$	$y = 2^{-0} = 1$	$(0, 1)$
1	$y = 2^1 = 2$	$(1, 2)$	$y = 2^{-1} = 1/2$	$(1, 1/2)$
2	$y = 2^2 = 4$	$(2, 4)$	$y = 2^{-2} = 1/4$	$(2, 1/4)$

Tabel 1. Koordinat titik pembentuk fungsi  $y = 2^x$  dan  $y = 2^{-x}$



Gambar 10. Grafik fungsi  $y = 2^x$  dan  $y = 2^{-x}$

### c. Fungsi Logaritma

Fungsi logaritma merupakan invers dari fungsi eksponen, sehingga sifat grafik fungsi logaritma adalah grafik akan selalu memotong sumbu- $x$  di  $x = 1$  dan sumbu- $y$  sebagai garis asimtotnya. Agar nilai  $y$  terdefinisi maka  $x$  haruslah selalu bernilai positif ( $x > 0$ ).

Bentuk umum fungsi logaritma:

$$y = \log_a x$$

Dimana:

$a$  = bilangan pokok (konstanta),  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $x$  = variabel bebas,  $x > 0$ .

### Contoh soal 11

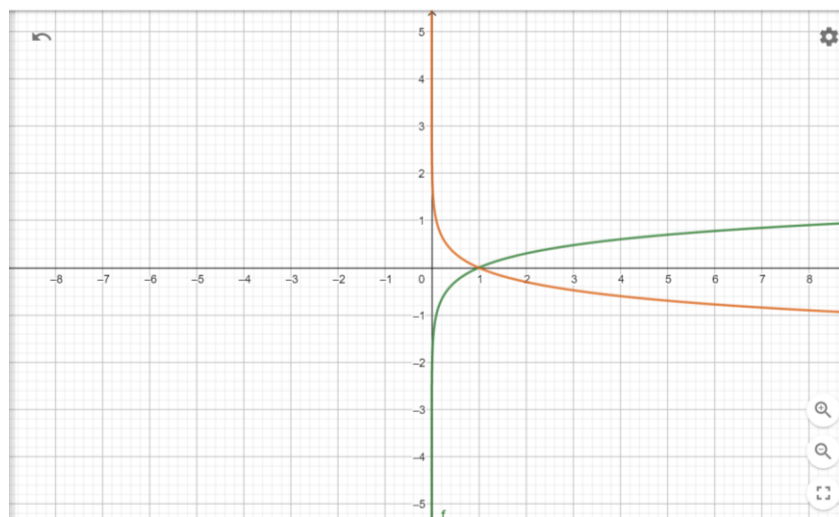
Gambarkan sketsa grafik fungsi  $y = \log x$  dan  $y = -\log x$

### Jawab dan pembahasan

Seperti yang disebutkan di atas bahwa grafik fungsi logaritma akan selalu memotong sumbu- $x$  di  $x = 1$  (jika grafik tidak ada pergeseran) dan selalu memotong sumbu- $y$ . Kemudian ambil nilai-nilai  $x$  sembarang dan substitusikan ke fungsi untuk memperoleh nilai  $y$  sehingga diperoleh titik-titik koordinat pembentuk grafik. Seterusnya hubungkan titik-titik tersebut dengan garis lengkung sehingga terbentuk grafik seperti berikut.

$y = \log x$	$x$	$y = -\log x$
-3	0.001	3
-2	0.01	2
-1	0.1	1
0	1	0
1	10	-1
2	100	-2
3	1000	-3

Tabel 2. Koordinat titik pembentuk fungsi  $y = \log x$  dan  $y = -\log x$



Gambar 11. Grafik fungsi  $y = \log x$  dan  $y = -\log x$

### d. Fungsi Hiperbolikus

Bentuk umum fungsi hiperbolikus adalah sebagai berikut:

$$1. y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$2. y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$3. y = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$4. y = \operatorname{cosech} x = \frac{1}{\sinh x}$$

$$5. y = \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$$

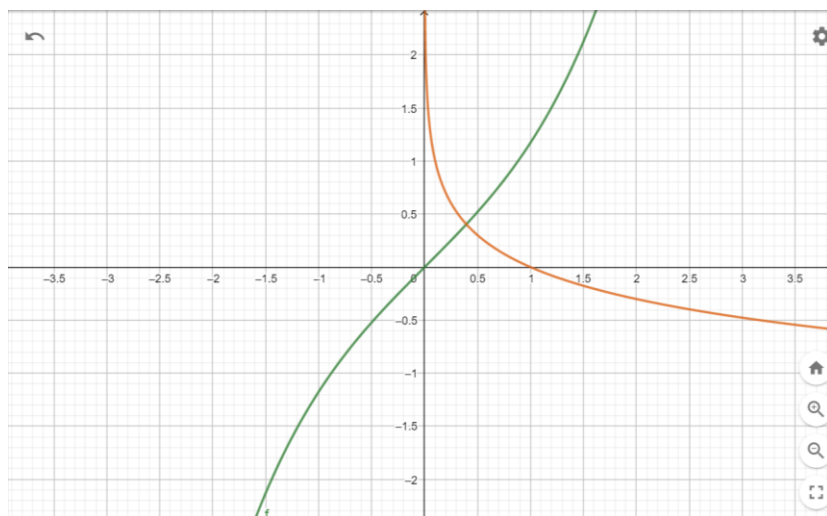
$$6. y = \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$$

### Contoh soal 12

Gambarkanlah sketsa grafik dari fungsi hiperbolikus  $y = \sinh x$  dan  $y = \cosh x$

### Jawab dan pembahasan

Sama dengan cara-cara untuk menggambar semua grafik seperti diatas yaitu dengan menguji nilai-nilai  $x$  sembarang ke fungsi untuk memperoleh titik-titik pembentuk kurva.



Gambar 12. Grafik  $y = \sinh x$  dan  $y = \cosh x$

## 1.3 Fungsi-fungsi lain

### 1.3.1 Fungsi Modulus (mutlak)

Fungsi modulus adalah sebuah fungsi yang selalu bernilai positif ( $y \geq 0$ ).

Bentuk umum fungsi ini adalah:

$$y = |f(x)|$$



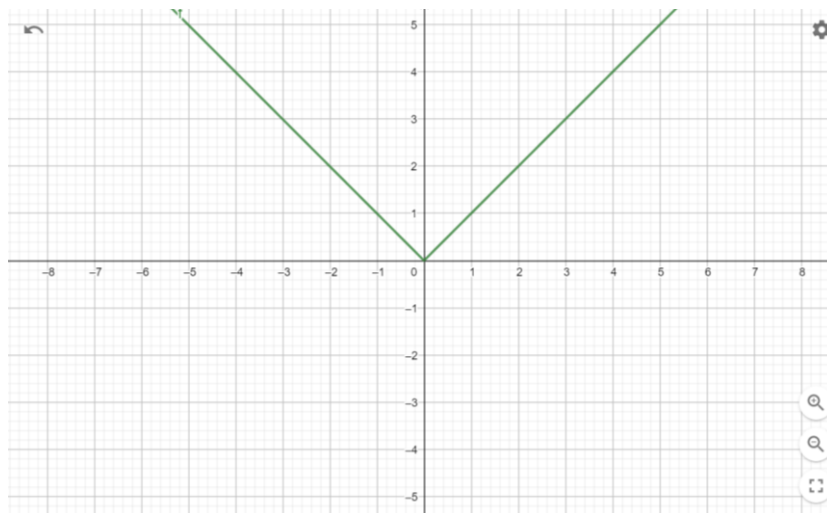
Adapun ciri dari fungsi mutlak ini adalah bahwa grafik akan selalu berada di atas sumbu-x dengan kata lain selalu bernilai positif.

### Contoh soal 13

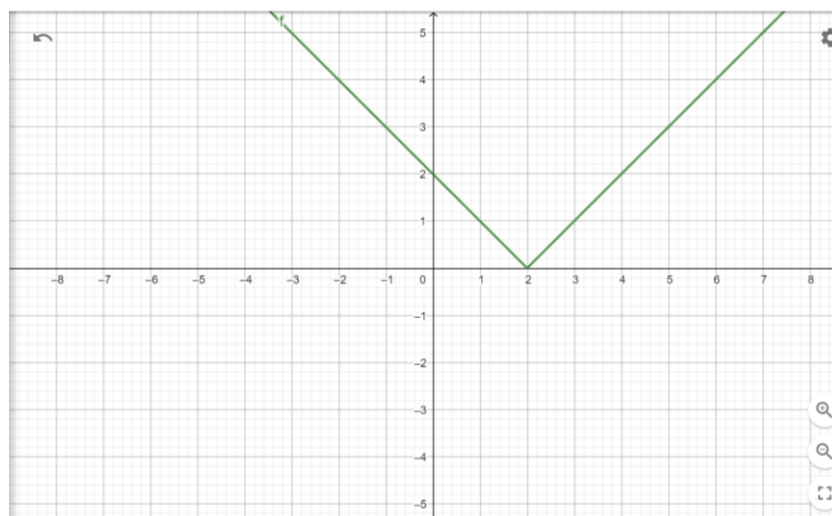
Gambarkan sketsa grafik dari fungsi  $y = |x|$  dan fungsi  $y = |x - 2|$

### Jawab dan pembahasan

Grafik dapat digambar dengan mengambil nilai  $x$  negative dan positif dan disubstitusikan ke fungsi sehingga diperoleh nilai  $y$ . Jika nilai yang berada di dalam tanda  $| \quad |$  adalah negative maka nilai yang dipakai untuk  $y$  berubah menjadi positif. Berarti nilai dari fungsi ini tidak akan pernah negative akan tetapi selalu positif atau nol.



Gambar 13. Grafik linier fungsi modulus  $y = |x|$



Gambar 14. Grafik linier fungsi modulus  $y = |x - 2|$