



Guía de Algebra para Planta Exterior

Secretario General

Co. Ing. Francisco Hernández Juárez

Encargado de la Secretaría de InSTRUCCIÓN,
Formación e Investigación Sindical

Co. Ing. Carlos Manuel Figueroa Barrón

Agradecimientos

2

Al Co. Francisco Hernández Juárez por el apoyo para fortalecer el desarrollo de los aspirantes y así poder ingresar a ser parte de nuestras filas sindicales.

Agradecemos también al Co. Carlos Manuel Figueroa Barrón por las facilidades para desarrollar esta guía de estudio, y así lograr ser un apoyo para los profesores y aspirantes en general.

Objetivos

En la vida cotidiana estamos en constante enfrentamiento a las situaciones que involucran tomar decisiones de forma eficiente, en varias ocasiones podemos encontrar una solución rápida y favorable; en otras tantas, nuestra solución resulta más compleja.

El estudio de todas las ramas de las matemáticas tiene como finalidad aprovechar el conocimiento previamente adquirido para dar soluciones de forma directa y sencilla; el álgebra es una de las bases de estos conocimientos necesarios para llevar a cabo ese objetivo.

El presente trabajo tiene como objetivo principal introducir al lector los conceptos y métodos fundamentales del álgebra, mismos que facilitarán el aprendizaje y dominio de la materia.

Como estudiar

Para entender mejor el estudio del álgebra es necesario contar con conocimientos previos de aritmética, como lo es el manejo de las operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división) aplicadas a los números enteros, fraccionarios y decimales, también es recomendable tener práctica en cuanto a la resolución de problemas que involucren operaciones de este tipo.

Considerando que el álgebra es en principio abstracta y no se manejan números como tal; sino en su mayoría son expresiones que representan duchos números, eso se debe tener en cuenta ya que al final se seguirá trabajando de la misma forma.

Temario

- Expresiones algebraicas
 - Monomios
 - Polinomios
- Operaciones básicas
 - Suma
 - Resta
 - Multiplicación
 - División
- Factorización
 - Agrupación
 - Trinomio cuadrado perfecto
 - Diferencia de cuadrados
 - Trinomio cuadrado perfecto por adición y sustracción
 - Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$
 - Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$
 - Suma y diferencia de cubos
- Fracciones algebraicas
 - Suma
 - Resta
 - Multiplicación
 - División
- Ecuación de primer grado
 - Lineales
 - Fraccionarias
 - Con más de una incógnita
- Ecuación de segundo grado
 - Por factorización
 - Por ecuación general
- Ecuaciones simultaneas
 - Sustitución
 - Eliminación por suma y resta
 - Determinantes
- Problemas planteados con palabras
 - Planteamiento con ecuación de primer grado
 - Planteamiento con ecuaciones simultaneas

Sugerencia de guía de estudio.

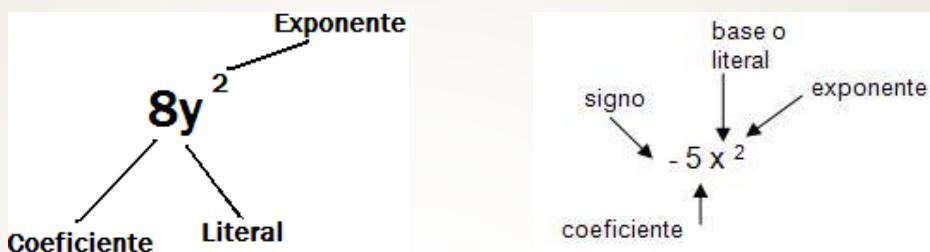
Nota:

Los ejercicios plasmados en el presente material solo son una muestra para prepararse con los conocimientos necesarios; sin embargo, ninguno de ellos será utilizado para los exámenes a presentar por parte del Sindicato.

Expresiones algebraicas

Monomios

Una forma de representar un valor con el cual trabajar en matemáticas es con un monomio y este tiene tres elementos principales como a continuación se explica:



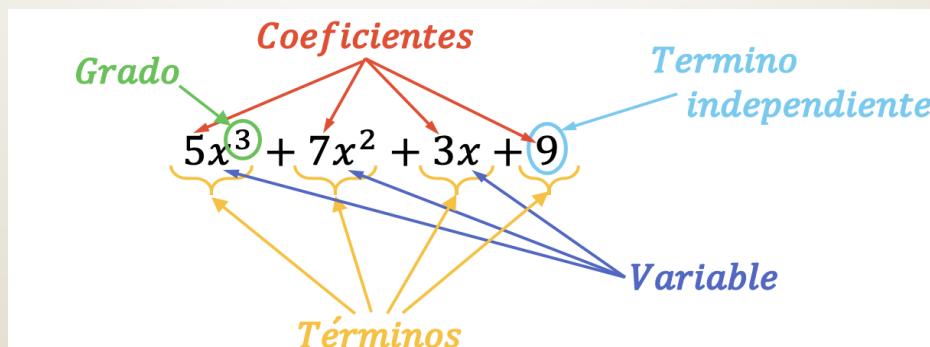
Algo que debe quedar claro es lo siguiente:

- Que el signo es parte del coeficiente (valor numérico).
- La base o literal, puede ser representada por cualquier letra o símbolo que no sea un número y esta representa un concepto.
- Toda base siempre va acompañada de un exponente; incluso, puede ser otra expresión algebraica.

Polinomios

Está formado por dos o más monomios unidos mediante las operaciones de suma y/o resta.

El valor del máximo exponente representa el grado del polinomio.



Regla de los signos

Para resolver operaciones con los polinomios se debe tener en cuenta una de las reglas más básicas de las matemáticas, es la denominada regla de los signos y a continuación se explica:

Leyes de los signos	
Operación	Resultado
$(+) \times (+)$	+
$(+) \times (-)$	-
$(-) \times (+)$	-
$(-) \times (-)$	+
Operación	Resultado
$(+) \div (+)$	+
$(+) \div (-)$	-
$(-) \div (+)$	-
$(-) \div (-)$	+

Aquí observamos claramente que cuando a una operación se le aplica un valor positivo los resultados no cambian, mientras que si se les aplica un valor negativo cambia de sentido.

Operaciones básicas.

Suma y resta.

Cuando son términos con mismas bases y exponentes, la operación de suma y resta es con los coeficientes.

- Suma de monomio con polinomio

$$\begin{array}{r} 5x^2 + (3x^3 - 4x^2 + x) \\ 3x^3 + 5x^2 - 4x^2 + x \\ \hline 3x^3 + x^2 + x \end{array}$$

- Suma de polinomio con polinomio

$$\begin{array}{r} (10y^3 + 4y^2 - 7) + (8y^4 - 5y^3 + 2y^2 - 3y) \\ 8y^4 + 10y^3 - 5y^3 + 4y^2 + 2y^2 - 3y - 7 \\ \hline 8y^4 + 5y^3 + 6y^2 - 3y - 7 \end{array}$$

Nota: Mientras la suma no cambia los signos de cada monomio la resta cambia todos por la regla de los signos.

- Resta de polinomio con polinomio

$$\begin{array}{r} (7x^3 + 8x^2y - 9xy^2) - (3x^3 - 5xy^2 + 2y^3) \\ 7x^3 - 3x^3 + 8x^2y - 9xy^2 + 5xy^2 - 2y^3 \\ \hline 4x^3 + 8x^2y - 4xy^2 - 2y^3 \end{array}$$

El acomodo de los polinomios debe de ser:

- I. Debemos acomodar por orden alfabético.
- II. Ya que hemos acomodado por orden alfabético, lo siguiente es colocar los exponentes de mayor a menor.

Operaciones básicas.

Multiplicación.

Para la multiplicación y la división usaremos las propiedades de los exponentes que se muestran a continuación.

Propiedades de los exponentes

Operación	Propiedad	Operación	Propiedad
$x^a \cdot x^b$	x^{a+b}	$(x \cdot y)^a$	$x^a \cdot y^a$
$\frac{x^a}{x^b}$	x^{a-b}	$\left(\frac{x}{y}\right)^a$	$\frac{x^a}{y^a}$
$(x^a)^b$	$x^{a \cdot b}$	x^{-a}	$\frac{1}{x^a}$
$\sqrt[b]{x^a}$	$x^{a/b}$	x^0	1 ; $x \neq 0$

- Monomio con polinomio

$$\begin{aligned}
 & 5x^2(2x^3 - 5x^2 - 4x + 3) \\
 & 5x^2(2x^3) + 5x^2(-5x^2) + 5x^2(-4x) + 5x^2(3) \\
 & \underline{10x^5 - 25x^4 - 20x^3 + 15x^2}
 \end{aligned}$$

- Polinomio con polinomio

$$\begin{aligned}
 & (x^2 + 4x)(3x^2 + 2x - 7) \\
 & (x^2)(3x^2 + 2x - 7) + (4x)(3x^2 + 2x - 7) \\
 & 3x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 12x^3 + 8x^2 - 28x \\
 & \underline{3x^4 + 14x^3 + x - 28x}
 \end{aligned}$$

Operaciones básicas.

División.

En este caso seguiremos usando las propiedades de los exponentes porque nos auxiliaremos de la multiplicación para resolver estos problemas, posteriormente se resolverá como una división de forma tradicional.

- Monomio con polinomio

$$a \overline{)3a^4 + 2a^3 - 7a^2}$$

Para saber cuál es primer término realizamos la división.

$$\frac{3a^4}{a} = 3a^3$$

Este cociente cuando lo multiplicamos por el divisor obtenemos el residuo y lo restamos.

$$\begin{array}{r} 3a^3 \\ a \overline{)3a^4 + 2a^3 - 7a^2} \\ -3a^4 \\ \hline 0 + 2a^3 \end{array}$$

Hacemos los mismos con el siguiente término:

$$\frac{2a^3}{a} = 2a^2$$

Volvemos a repetir.

Continuamos...

$$\begin{array}{r}
 & \underline{3a^3 + 2a^2} \\
 a \quad | & \underline{3a^4 + 2a^3 - 7a^2} \\
 & \underline{-3a^4} \\
 & \quad 0 + 2a^3 \\
 & \quad \underline{-2a^3} \\
 & \quad \quad 0 - 7a^2
 \end{array}$$

Para finalizar obtenemos el ultimo termino de manera similar.

$$\frac{-7a^2}{a} = -7a$$

Resolvemos finalmente.

$$\begin{array}{r}
 & \underline{3a^3 + 2a^2 - 7a} \\
 a \quad | & \underline{3a^4 + 2a^3 - 7a^2} \\
 & \underline{-3a^4} \\
 & \quad 0 + 2a^3 \\
 & \quad \underline{-2a^3} \\
 & \quad \quad 0 - 7a^2 \\
 & \quad \quad \underline{+7a^2} \\
 & \quad \quad \quad 0
 \end{array}$$

Por lo tanto, el resultado de la división será:

$$\underline{3a^3 + 2a^2 - 7a}$$

- Polinomio con polinomio

$$m^2 - 1 \quad \boxed{m^5 + 2m^4} \quad - 2m^2 - m$$

En este caso, seguimos haciendo la división del término del máximo exponente en el dividendo y solo vamos a dividirlo entre el término del máximo exponente en el divisor.

$$\frac{m^5}{m^2} = m^3$$

Ahora, con este resultado lo vamos a multiplicar con “todo” el divisor y vamos a restar (cambiando de signo) para obtener el residuo.

$$m^2 - 1 \quad \begin{array}{r} m^3 \\ \hline m^5 + 2m^4 \quad - 2m^2 - m \\ -m^5 \quad + m^3 \\ \hline 0 + 2m^4 + m^3 - 2m^2 - m \end{array}$$

Vamos repitiendo los pasos en todo momento, dividimos entre los términos de máximo exponente.

$$\frac{2m^4}{m^2} = 2m^2$$

Multiplicamos por el divisor y con eso el residuo.

$$m^2 - 1 \quad \begin{array}{r} m^3 + 2m^2 \\ \hline m^5 + 2m^4 \quad - 2m^2 - m \\ -m^5 \quad + m^3 \\ \hline 0 + 2m^4 + m^3 - 2m^2 - m \\ -2m^4 \quad + 2m^2 \\ \hline 0 + m^3 + \quad 0 - m \end{array}$$

Obtenemos el último término.

$$\frac{m^3}{m^2} = m$$

Terminamos cuando obtenemos el residuo igual a cero.

$$\begin{array}{r}
 & m^3 + 2m^2 + m \\
 m^2 - 1 & \overline{)m^5 + 2m^4 - 2m^2 - m} \\
 & \underline{-m^5} \quad + m^3 \\
 & \underline{0 + 2m^4 + m^3} - 2m^2 - m \\
 & \underline{-2m^4} \quad + 2m^2 \\
 & \underline{0 + m^3} \quad 0 - m \\
 & \underline{-m^3} \quad + m \\
 & \underline{0} \quad 0
 \end{array}$$

El resultado final será:

$$\underline{m^3 + 2m^2 + m}$$

Este es el procedimiento sugerido para obtener las divisiones de polinomios, se podrá trabajar también con problemas que incluyan fracciones en los coeficientes o expresiones algebraicas en los exponentes, sin embargo, no se debe perder de vista que es el mismo proceso.

Factorización

Agrupación

El primero de los criterios para factorizar es verificar si los polinomios tienen términos en común.

Ejemplos:

- Un término en común nada más.

$$x^5 + 7x^4 - 3x^2$$

Estos tres términos son múltiplos de x^2 ; por lo tanto, ese término será el que factoricemos.

$$\underline{x^2(x^3 + 7x - 3)}$$

- Los coeficientes también se pueden factorizar.

$$24y^4 + 16y^3 - 4y^2 + 12y$$

En esta ocasión todos son múltiplos de "y", pero además todos los coeficientes son múltiplos de 4.

$$\underline{4y(6y^3 + 4y^2 - y + 3)}$$

- También tendremos agrupación en partes, esto los podremos identificar fácilmente porque el número de términos del polinomio es par; por lo tanto, vamos a tomar una mitad que tengan semejanza y la otra mitad que dejemos también debe tener algo en común.

$$6a^2 + 10ab - 3ab^2 - 5b^2$$

Podemos tomar parejas, por ejemplo: $6a^2$ con $3ab^2$, y $10ab$ con $5b^2$ para factorizar por separado.

$$3a(2a - b^2) + 5b(2a - b^2)$$

Aquí vemos que ahora ambos términos comparten un polinomio en común y con respecto a eso realizamos la última factorización.

$$\underline{(3a + 5b)(2a - b^2)}$$

La recomendación para este tipo de problemas es agrupar en parejas con el mismo número de términos.

Otra cosa que se debe de considerar es que el signo también se puede factorizar.

Trinomio cuadrado perfecto

Otra técnica de factorización es identificar el trinomio cuadrado perfecto que tiene la forma

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

Ejemplos:

$$4x^2 + 12x + 9$$

Obtenemos las raíces cuadradas del primer y último término.

$$\begin{array}{rcl} 4x^2 & \rightarrow & 2x \\ 9 & \rightarrow & 3 \end{array}$$

El término de en medio es el producto de los números obtenidos y estos a su vez multiplicados por dos.

$$2(2x)(3) = 12x$$

Por lo tanto, es un trinomio cuadrado perfecto y lo factorizamos

$$\underline{(2x + 3)^2}$$

Otro ejemplo que cumple esta regla sería el siguiente:

$$9m^2 - 6m + 1$$

Lo único que cambia en este ejemplo es el signo negativo del término de en medio, y este será el que acompañe a la factorización también.

$$\underline{(3m - 1)^2}$$

Diferencia de cuadrados

A lo siguiente se le conoce como una resta o diferencia de cuadrados.

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Ejemplos:

$$9m^2 - 4n^2$$

Obtenemos las raíces cuadradas de los dos términos.

$$\begin{aligned} 9m^2 &\rightarrow 3m \\ 4n^2 &\rightarrow 2n \end{aligned}$$

Factorizamos como el producto de una suma y una resta.

$$\underline{(3m + 2n)(3m - 2n)}$$

Mientras sea a una potencia par se puede considerar de este caso, como el siguiente polinomio.

$$121p^6 - 49$$

Al sacar raíz cuadrada a un exponente, lo único que hicimos es dividirlo entre dos.

$$\begin{aligned} 121p^6 &\rightarrow 11p^3 \\ 49 &\rightarrow 7 \end{aligned}$$

La factorización quedaría:

$$\underline{(11p^3 + 7)(11p^3 - 7)}$$

Trinomio cuadrado perfecto por adición y sustracción.

Para resolver este tipo de problemas debemos usar dos métodos de factorización, que será el trinomio cuadrado perfecto y la diferencia de cuadrados.

Ejemplos:

$$a^4 + a^2 + 1$$

Realizamos las raíces cuadradas del primer y último término

$$\begin{array}{rcl} a^4 & \rightarrow & a^2 \\ 1 & \rightarrow & 1 \end{array}$$

Si fuera un trinomio cuadrado perfecto, el término de en medio debería ser el doble producto de estos resultados, pero vemos que no es así; por lo tanto, vemos que es lo que nos falta y se lo agregamos y quitamos al mismo tiempo, para no afectar el polinomio original.

$$a^4 + a^2 + 1 + a^2 - a^2 \quad \rightarrow \quad a^4 + 2a^2 + 1 - a^2$$

Ahora si tenemos lo necesario para tener un trinomio cuadrado perfecto el cuál debemos factorizamos.

$$(a^2 + 1)^2 - a^2$$

Finalmente, tenemos una diferencia de cuadrados.

$$\underline{(a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)}$$

Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

Cuando tenemos este tipo de trinomio vamos a buscar lo siguiente:

- Que el producto de dos números dé como resultado el valor de “c”.
 - Si el valor de “c” es positivo, los dos números deben ser positivos o los deberán ser negativos.
 - Si el valor de “c” es negativo, uno de los números debe ser positivo mientras que el otro será negativo.
 - Saber cuál es cual, lo determinara la siguiente condición.
- Estos números al sumarse(o restarse) será igual al valor de “b”.

Ejemplos:

$$x^2 + 5x + 6$$

Buscamos dos números que multiplicados den +6 y que al sumarse obtengamos +5.

$$3 \times 2 \rightarrow 6$$

$$3 + 2 \rightarrow 5$$

Hallados los dos números los acomodamos en la factorización.

$$\underline{(x + 3)(x + 2)}$$

Otros ejemplos serán:

$$x^2 - 6x + 8 \rightarrow (x - 4)(x - 2)$$

$$x^2 - 3x - 10 \rightarrow (x - 5)(x + 2)$$

$$x^2 + 6x - 7 \rightarrow (x + 7)(x - 1)$$

Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

A comparación del anterior, en este trinomio tenemos un coeficiente distinto de “1” para el valor de “a” y para solucionarlo habrá distintas técnicas, en este caso nos enfocaremos a uno conocido como el método de las tijeras.

- Buscaremos dos números que multiplicados den el valor de “a”.
- Haremos lo mismo para obtener el valor de “c”.
- Haremos un producto cruzado de estos valores para que a la hora de sumar/restar, obtengamos el valor de “b”.
- Cabe recalcar que solo habrá una pareja de números que cumplan dichos criterios.

Ejemplos:

Buscaremos un acomodo fácil para identificar dichos valores

$$3x^2 + 8x + 4$$

$$\begin{array}{r} 3x \\ \times x \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} + 2 \rightarrow 2x \\ + 2 \rightarrow 6x \\ \hline \end{array}$$

Como la suma de los productos nos da el valor requerido, estos serán los términos para la factorización.

$$\underline{(3x + 2)(x + 2)}$$

Otros ejemplos serán:

$$6x^2 - 7x - 3 \rightarrow (3x + 1)(2x - 3)$$

$$10x^2 + 11x - 6 \rightarrow (5x - 2)(2x + 3)$$

Suma y diferencia de cubos

Para encontrar la factorización de este polinomio usaremos las siguientes fórmulas :

- Suma de cubos

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

- Resta de cubos

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

En estos casos aplicando la regla de los exponentes podremos sacar las raíces cubicas de estos mismos dividiendo el exponente entre 3.

Ejemplos:

$$8x^3 + 125$$

Identificamos que será una suma de cubos, así que sacamos las raíces cubicas de cada termino.

$$\begin{aligned} 8x^3 &\rightarrow 2x \\ 125 &\rightarrow 5 \end{aligned}$$

Factorizamos con estos resultados.

$$\underline{(2x + 5)(4x^2 - 10x + 25)}$$

En el caso de una resta de cubo, solo un par de signos cambian, como se puede observar en la siguiente:

$$27m^9 - 64n^6$$

Obtenemos raíces cubicas de la siguiente forma

$$\begin{aligned} 27m^9 &\rightarrow 3m^3 \\ 64n^6 &\rightarrow 4n^2 \end{aligned}$$

$$\underline{(3m^3 - 4n^2)(9m^6 + 12m^3n^2 + 16n^4)}$$

Fracciones algebraicas

Suma y resta.

Al igual que en aritmética, en la suma y resta de fracciones se buscará un mínimo común múltiplo (MCM) para poder resolverlas.

Para este momento, que hayas practicado las factorizaciones, ya que estas nos serán de gran utilidad hasta el final de esta guía.

Ejemplo:

$$\frac{5x}{2} + \frac{4}{3x} - \frac{1}{x}$$

Primero obtenemos el MCM de: 2, 3x, x; para eso empezamos por los coeficientes, 2 y 3, el MCM es 6; después buscamos todas las expresiones algebraicas, en caso de que se repitan solo las consideramos una vez; con esto obtenemos que el MCM de esta operación es “6x”.

Tal como se trabaja en aritmética, teniendo el MCM, vamos a dividirlo entre cada uno de los denominadores y el resultado de cada uno, lo multiplicamos por su respectivo numerador; ahora si, procedemos a realizar las operaciones.

$$\frac{5x}{2} + \frac{4}{3x} - \frac{1}{x} = \frac{3x(5x) + 2(4) - 6(1)}{6x} = \frac{15x^2 + 8 - 6}{6x}$$

$$\frac{15x^2 + 2}{6x}$$

Es muy importante respetar las operaciones; es decir, observa los signos que vayan apareciendo.

Si es factible aplicar factorización a las expresiones, siempre debes hacerlo para buscar reducir la fracción.

Avanzando con estos problemas, vamos a encontrar algunos donde será necesario realizar la factorización de algunos términos para comenzar a resolver.

$$\frac{2x}{x^2 - 9} + \frac{2}{x+3} - \frac{1}{x-3}$$

En este problema, tenemos que realizar todas las factorizaciones posibles por cualquier método.

$$\frac{2x}{(x+3)(x-3)} + \frac{2}{x+3} - \frac{1}{x-3}$$

Aplicamos el MCM recordando las reglas anteriores

$$\frac{2x + 2(x-3) - (x+3)}{(x+3)(x-3)} = \frac{3x-9}{(x+3)(x-3)}$$

Si aun podemos factorizar en el resultado obtenido, lo hacemos para simplificar aún más la respuesta.

$$\frac{3(x-3)}{(x+3)(x-3)}$$

Se simplifican los términos semejantes que se encuentren tanto el numerador como el denominador de la fracción.

$$\frac{3}{x+3}$$

Debemos recordar que el resultado debe quedar en su mínima expresión siempre.

Multiplicación y división

Recordemos como son los productos y cocientes en fracciones comunes.

Ejemplos:

La multiplicación es numerador con numerador y denominador con denominador, como se muestra a continuación.

$$\frac{xz}{15ab} \times \frac{25b^2}{x^2} = \frac{25b^2xz}{15abx^2}$$

Ahora se realiza la simplificación de cada uno de los términos, números con números y literales con sus correspondientes.

$$\frac{5bz}{3ax}$$

En una división va a ser un producto cruzado y el resultado también será cruzado.

$$\frac{28a^4b^9}{x^3y^5} \div \frac{35a^2b^9}{xy^5} = \frac{28a^4b^9xy^5}{35a^2b^9x^3y^5}$$

Volvemos a simplificar de esta forma:

$$\frac{4a^2}{5x^2}$$

A diferencia de la suma y resta, en estos casos no se necesita un MCM y las operaciones son más directas, solo se debe de tener cuidado con el orden a la hora de operar.

Cuando combinamos dos operaciones con polinomios que se pueden factorizar, realizamos las factorizaciones correspondientes y después los productos debidos.

$$\frac{x^2 - 9}{x^2 + 2x - 3} \div \frac{x^2 - 5x - 24}{x^2 - 10x + 9} \times \frac{x^2 - 6x - 16}{x^2 - 7x - 18}$$

Realicemos la factorización de todo lo que se pueda.

$$\frac{(x+3)(x-3)}{(x+3)(x-1)} \div \frac{(x-8)(x+3)}{(x-9)(x-1)} \times \frac{(x-8)(x+2)}{(x-9)(x+2)}$$

Realizamos las operaciones correspondientes, es importante que vayamos de una por una y debemos empezar de izquierda a derecha; en este caso, primero la división y después la multiplicación.

$$\frac{(x-3)(x-9)(x-1)(x-8)}{(x-1)(x-8)(x+3)(x-9)}$$

Simplificamos y obtenemos la siguiente fracción.

$$\frac{x-3}{x+3}$$

Ecuación de primer grado

Caso lineal

Para este tipo de problemas debemos tener muy claro como despejar en una ecuación alguna de las variables usando las operaciones inversas. Además de eso debemos saber diferenciar un polinomio de una ecuación, mientras el primero aparece como tal una expresión como las tratadas anteriormente, la ecuación se distinguirá por tener el símbolo de igualdad.

En la siguiente tabla se muestran las operaciones inversas de cada una y el orden en que se debe ir despejando es; primero van sumas y resta, después multiplicaciones y divisiones, finalmente exponentes y raíces.

Operación	Inversa	Operación	Inversa
Suma	Resta	Resta	Suma
Multiplicación	División	División	Multiplicación
Exponente	Raíz	Raíz	Exponente

Ejemplo:

$$7x - 3 = 18 + 4x$$

Aquí conviene mover a la derecha los números solos y a la izquierda los que vienen acompañados de variables e ir despejando.

$$7x - 4x = 18 + 3$$

$$3x = 21$$

$$x = \frac{21}{3}$$

$$x = 7$$

Caso con fracciones

Habrá ecuaciones de primer grado que vengan acompañadas de fracciones y debamos darle solución de un modo óptimo, para esto haremos uso del MCM, este nos ayudará a llevar de una forma lineal la ecuación y resolvérla como el caso anterior.

Ejemplos:

$$\frac{x}{x^2 - 25} + \frac{5}{x - 5} = \frac{1}{x + 5}$$

Como mencionamos, vamos a usar el MCM, y lo que viene a continuación es multiplicar toda la ecuación por este mismo.

$$\left(\frac{x}{(x+5)(x-5)} + \frac{5}{x-5} = \frac{1}{x+5} \right) (x+5)(x-5)$$

Al hacer esto vamos a simplificar todos los denominadores de sus fracciones.

$$x + 5(x+5) = 1(x-5)$$

Desarrollamos y comenzamos a resolver.

$$x + 5x + 25 = x - 5$$

$$x + 5x - x = -5 - 25$$

$$5x = -30$$

$$x = -\frac{30}{5}$$

$$x = -6$$

Caso con más de una incógnita

Por último, tendremos las ecuaciones de primer grado en las que habrá más de una incógnita, para los cuales nos pedirán resolver.

Por lo regular se suele resolver despejando la variable “ x ” pero puede que lleguen a pedir alguna otra.

Ejemplos:

$$ax + x = 5a - 1$$

En este caso vamos a despejar “ x ”, usaremos los métodos de factorización necesarios en determinado caso.

$$x(a + 1) = 5a - 1$$

$$x = \frac{5a - 1}{a + 1}$$

Como ya no se puede reducir más la ecuación así se queda expresada.

Otro ejemplo sería

$$7x + m(x - 3) = 3x + 7m$$

$$7x + mx - 3m = 3x + 7m$$

$$7x - 3x + mx = 7m + 3m$$

$$4x + mx = 10m$$

$$x(4 + m) = 10m$$

$$x = \frac{10m}{m + 4}$$

Ecuación de segundo grado

Por factorización.

Siempre que resolvamos ecuación de segundo grado vamos a tener dos soluciones, de los cuales habrá dos casos importantes al resolverla:

- Tener la misma solución en los dos.
- Tener dos soluciones distintas

Una de las maneras más rápidas de resolver este problema es aplicando la factorización al final.

Ejemplos:

El caso de que sean iguales las dos soluciones.

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

Debe tener este acomodo, todas las variables y números de un lado no debe de haber nada, o dicho de otra manera, todo debe estar igualado a cero. Con ese acomodo factorizamos.

$$(x - 3)^2 = 0$$

Aquí podemos ver que solo hay un término elevado al cuadrado; por lo tanto, rectificamos que las dos soluciones son el mismo valor. Para poder terminar de resolver solo debo considerar lo que hay dentro del paréntesis y esto igualarlo a cero.

$$x - 3 = 0$$

$$x = 3$$

Con esto podemos concluir lo siguiente.

$$x_1 = x_2 = 3$$

El caso de que sean soluciones distintas veremos lo siguiente en la ecuación.

$$x^2 - 5x - 24 = 0$$

Al momento de factorizar obtendremos dos términos.

$$(x - 8)(x + 3) = 0$$

En este caso como tenemos dos términos, los vamos a igualar a cero uno a uno, independientemente.

$$x - 8 = 0$$

$$x = 8$$

$$x + 3 = 0$$

$$x = -3$$

Por lo tanto, diremos que las soluciones a este problema serán.

$$x_1 = 8$$

$$x_2 = -3$$

Para estos casos cabe recalcar que no importa cual sea la solución uno y cual la dos, ya que en estas no hay ningún criterio para determinar posición o preferencia, las dos son soluciones de la ecuación de segundo grado y punto.

Finalmente, resolveremos un problema que nos lleve a una ecuación de segundo grado para poder darle solución como hemos visto, por el método de factorización.

$$\frac{7}{x+2} + \frac{5}{x-4} = 6$$

Resolvemos como hicimos anteriormente con ecuación de primer grado en la parte de fracciones. Multiplicamos por el MCM y después agrupamos.

$$\left(\frac{7}{x+2} + \frac{5}{x-4} = 6 \right) (x+2)(x-4)$$

$$7(x-4) + 5(x+2) = 6(x+2)(x-4)$$

$$7x - 28 + 5x + 10 = 6x^2 - 12x - 48$$

$$6x^2 - 24x - 30 = 0$$

Factorizando en sus mínimas expresiones.

$$6(x-5)(x+1) = 0$$

Tenemos ahora tres términos, pero el numero 6 tiene un valor ya determinado, así que solo trabajamos con los otros dos los cuales nos darían las siguientes soluciones.

$$x_1 = 5$$

$$x_2 = -1$$

Por ecuación general de segundo grado.

Habrá ecuaciones de segundo grado que no se podrán factorizar y para encontrar las soluciones será necesario apoyarse de la ecuación general de segundo grado.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donde los valores de a , b y c estarán determinados por la forma generalizada de una ecuación de segundo grado.

$$ax^2 + bx + c$$

Aquí vemos que el coeficiente “ a ” acompaña al término cuadrático, el coeficiente “ b ” al término lineal y el coeficiente “ c ” al término independiente.

Ejemplos:

$$x^2 + x - 1 = 0$$

Este es el ejemplo más claro y sencillo de que no se puede factorizar y por ende se usará la ecuación general. En este caso todos los coeficientes son uno, por lo tanto, tendremos lo siguiente

$$x_{1,2} = \frac{-(1) \pm \sqrt{(1)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Debido a que no se puede simplificar más, esa serán nuestras dos soluciones, uno con el más y otro con el menos que se encuentran en la raíz cuadrada.

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \qquad \qquad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

Resolveremos otro ejemplo que nos lleve poco a poco a la solución.

$$x + 3 = \frac{x - 20}{x - 6}$$

Realizamos el mismo procedimiento de multiplicar por el MCM y después ir agrupando.

$$\left(x + 3 = \frac{x - 20}{x - 6} \right) (x - 6)$$

$$(x + 3)(x - 6) = x - 20$$

$$x^2 - 3x - 18 = x - 20$$

$$x^2 - 4x + 2 = 0$$

Aquí podemos ver que es imposible encontrar una factorización de este polinomio, así que tendremos que usar ecuación general.

$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(2)}}{2(1)}$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

En este caso la raíz se puede llevar a una expresión más simple y con ello tener una expresión igual, más reducida.

$$x_1 = 2 + \sqrt{2} \qquad \qquad x_2 = 2 - \sqrt{2}$$

En este tipo de problemas debemos tener especial atención con los signos de los coeficientes y de la ecuación general.

Ecuaciones simultaneas

Sustitución.

Resolveremos ahora un sistema de ecuaciones o ecuaciones simultaneas, en las cuales vamos a tener tantas ecuaciones como incógnitas.

Este primer método, es despejar una de las variables y sustituirla en las siguientes ecuaciones, para volver a hacer lo mismo con las otras variables.

Ejemplos:

$$\begin{aligned}x + y &= 1 \\2x + y &= 3\end{aligned}$$

Para este problema no importa cual queramos despejar primero y tampoco de que ecuación, pero debemos identificar cual será más sencillo de realizar.

$$x + y = 1 \rightarrow y = 1 - x$$

Sustituimos en la otra ecuación y despejamos la otra variable.

$$2x + (1 - x) = 3$$

$$2x + 1 - x = 3$$

$$x = 2$$

Finalmente sustituimos este valor en el primer despeje para encontrar el valor de la otra incógnita.

$$y = 1 - 2$$

$$y = -1$$

Resolveremos otro ejemplo que nos lleve poco a poco a la solución.

$$\begin{aligned}2x + y &= 4 \\3x - 2y &= 27\end{aligned}$$

En esta ocasión despejare “y” de la primera ecuación.

$$2x + y = 4 \quad \rightarrow \quad y = 4 - 2x$$

Lo sustituimos en la segunda ecuación y resolvemos.

$$3x - 2(4 - 2x) = 27$$

$$3x + 4x - 8 = 27$$

$$7x = 35$$

$$x = 5$$

Ahora sustituimos en el primer despeje que hicimos.

$$y = 4 - 2(5)$$

$$y = 4 - 10$$

$$y = -2$$

Cabe recalcar que siempre tendremos una única solución para cada una de las variables, y a diferencia con la ecuación de segundo grado, en este tipo de problemas si nos importa que valor se le de a cada una, no se van a poder intercambiar.

Ecuaciones simultaneas

Eliminación por suma y resta.

Otro de los métodos que podremos aplicar es eliminación por suma y resta, aquí tendremos que hacer uso del MCM que estaremos buscando entre los coeficientes.

Ejemplos:

$$\begin{aligned} 3x - 4y &= 10 \\ 5x + 3y &= 7 \end{aligned}$$

Aquí determinaremos buscar el MCM de los coeficientes que acompañan a la variable "y". Vemos que es 12; por lo tanto, multiplicamos cada ecuación para obtener este, es decir, la primera ecuación la multiplicamos por 3, y la segunda por 4.

$$\begin{aligned} (3x - 4y = 10)(3) &\rightarrow 9x - 12y = 30 \\ (5x + 3y = 7)(4) &\rightarrow 20x + 12y = 28 \end{aligned}$$

Sumamos término a término las ecuaciones nuevas y despejo la variable que queda.

$$9x + 20x - 12y + 12y = 30 + 28$$

$$29x = 58$$

$$x = 2$$

Por último, sustituimos este valor en cualquiera de las otras ecuaciones, ya sean las originales o las modificadas.

$$5(2) + 3y = 7$$

$$3y = 7 - 10$$

$$y = -1$$

Tenemos otro ejemplo

$$\begin{aligned} 4x - 5y &= 12 \\ 6x - 9y &= 24 \end{aligned}$$

Se identifica el MCM de 4 y 6, que es 12, y de 5 y 9, que es 45; por lo tanto, es más fácil llegar al primero y con ese trabajar. Se multiplica por 3 la primera ecuación y por 2 la segunda ecuación, para así llegar al valor de 12 que es lo que espero.

$$\begin{aligned} (4x - 5y = 12)(3) &\rightarrow 12x - 15y = 36 \\ (6x - 9y = 24)(2) &\rightarrow 12x - 18y = 48 \end{aligned}$$

Ahora restaremos las dos ecuaciones, termino a término.

$$12x - 15y - (12x - 18y) = 36 - 48$$

$$-15y + 18y = -12$$

$$3y = -12$$

$$y = -4$$

Ahora sustituyo en alguna de las ecuaciones

$$4x - 5(-4) = 12$$

$$4x + 20 = 12$$

$$4x = -8$$

$$x = -2$$

Muchas veces en este tipo de problema se suele realizar una multiplicación con signo negativo para así evitar trabajar la resta, en pocas palabras es agregar la resta a la hora de multiplicar toda la ecuación y después proceder con suma solamente.

Ecuaciones simultaneas

Determinantes.

Este último método tiene una forma especial para resolver que se conoce como encontrar los determinantes, y que se realiza de la siguiente manera.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

Ejemplos:

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 6 \\ 9x + 4y &= -6 \end{aligned}$$

Para realizar el primer determinante usaremos los coeficientes que acompañan a las dos variables.

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} = (3)(4) - (9)(4) = 12 - 36 = -24$$

Para obtener el “determinante de x ”, sustituimos los coeficientes de “ x ” por los resultados de cada ecuación.

$$D_x = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = (6)(4) - (-6)(4) = 24 + 24 = 48$$

Haremos algo similar para obtener el “determinante de y ”.

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 9 & -6 \end{vmatrix} = (3)(-6) - (9)(6) = -18 - 54 = -72$$

Finalmente, realizamos las siguientes operaciones.

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{48}{-24} \rightarrow x = -2$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-72}{-24} \rightarrow y = 3$$

Otro problema con determinantes seria.

$$\frac{2}{3}x - \frac{3}{4}y = \frac{13}{12}$$

$$\frac{3}{7}x - \frac{5}{8}y = \frac{15}{56}$$

Antes de empezar a resolver, aquí es sugerible eliminar los denominados en cada ecuación, solamente debemos multiplicar por el MCM cada una de estas.

$$\left(\frac{2}{3}x - \frac{3}{4}y = \frac{13}{12} \right) (12) \rightarrow 8x - 9y = 13$$

$$\left(\frac{3}{7}x - \frac{5}{8}y = \frac{15}{56} \right) (56) \rightarrow 24x - 35y = 15$$

Ahora será más fácil obtener cada determinante.

$$D = \begin{vmatrix} 8 & -9 \\ 24 & -35 \end{vmatrix} = (8)(-35) - (24)(-9) = -280 + 216 = -64$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 13 & -9 \\ 15 & -35 \end{vmatrix} = (13)(-35) - (15)(-9) = -455 + 135 = -320$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 8 & 13 \\ 24 & 15 \end{vmatrix} = (8)(15) - (24)(13) = 120 - 312 = -192$$

Con todo esto ya obtenemos el valor de cada variable

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-320}{-64} \rightarrow x = 5$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-192}{-64} \rightarrow y = 3$$

Se podrá usar cualquiera de estos tres métodos para resolver el sistema de ecuaciones y todo tendrán el mismo resultado.

Problemas planteados

Planteamiento con ecuación de 1^{er} grado.

Algunos problemas de este estilo solo se podrán resolver si los planteamos como una ecuación de primer grado, a veces será necesario ir desglosando parte por parte el problema y su interpretación para poder llevarlo a dicha ecuación.

Ejemplos:

Dos terceras partes de un numero exceden a la mitad de él en 3 unidades. Encuentre el número.

$x \rightarrow$ el número que buscamos

$\frac{2}{3}x \rightarrow$ es la primera condición

$\frac{1}{2}x + 4 \rightarrow$ es la segunda condición

Unimos las dos condiciones de nuestro número en una ecuación y la resolvemos como mejor nos convenga.

$\frac{2}{3}x = \frac{1}{2}x + 4 \rightarrow$ ecuación que debemos resolver

$$\left(\frac{2}{3}x = \frac{1}{2}x + 4 \right) (6)$$

$$4x = 3x + 24$$

$$x = 24$$

Ahora resolveremos otros problemas similares.

La suma de dos números es 48. El cuádruplo del menor es igual al doble del mayor. Encuentre los números.

$$\begin{aligned}x &\rightarrow \text{es el número menor} \\48 - x &\rightarrow \text{es el número mayor}\end{aligned}$$

Podemos plantearlos de esta manera o al revés, pero una vez que hayamos escogido su orden seguimos con este hasta el final.

$$4x = 2(48 - x)$$

$$4x = 96 - 2x$$

$$6x = 96$$

$$\begin{aligned}x &= 16 \rightarrow \text{es el número menor} \\48 - 16 &= 32 \rightarrow \text{es el número mayor}\end{aligned}$$

Un número supera en 7 a otro. Determine ambos si el doble del mayor excede al triple del menor en 2.

$$\begin{aligned}x &\rightarrow \text{es el número menor} \\x + 7 &\rightarrow \text{es el número mayor}\end{aligned}$$

$$2(x + 7) = 3x + 2$$

$$2x + 14 = 3x + 2$$

$$14 - 2 = 3x - 2x$$

$$\begin{aligned}x &= 12 \rightarrow \text{número menor} \\12 + 7 &= 19 \rightarrow \text{número mayor}\end{aligned}$$

42

La suma de tres números pares consecutivos es 54. Determínelos.

$$\begin{aligned}x &\rightarrow \text{número menor} \\x + 2 &\rightarrow \text{número de en medio} \\x + 4 &\rightarrow \text{número mayor}\end{aligned}$$

$$x + (x + 2) + (x + 4) = 54$$

$$3x + 6 = 54$$

$$3x = 48$$

$$\begin{aligned}x = 16 &\rightarrow \text{es el número menor} \\16 + 2 = 18 &\rightarrow \text{es el número medio} \\16 + 4 = 20 &\rightarrow \text{es el número mayor}\end{aligned}$$

La suma de los dígitos de un número de dos cifras es 13. Si el número supera en 2 al quíntuplo de la suma de sus dígitos, hállelos.

$$\begin{aligned}x &\rightarrow \text{dígito de las unidades} \\13 - x &\rightarrow \text{dígito de las decenas}\end{aligned}$$

$$\text{número} \rightarrow 10(\text{dígito de las decenas}) + \text{dígito de las unidades}$$

$$10(13 - x) + x = 2 + 5(13)$$

$$130 - 10x + x = 2 + 65$$

$$130 - 67 = 9x$$

$$\begin{aligned}x = 7 &\rightarrow \text{dígito de las unidades} \\13 - 7 = 6 &\rightarrow \text{dígito de las decenas}\end{aligned}$$

$$\text{número} \rightarrow 67$$

Problemas planteados

Planteamiento con ecuaciones simultaneas.

Habrá otros problemas que la manera de resolverlos es solo si los planteamos como ecuaciones simultaneas y debemos fijarnos en cómo interpretar las variables y como plantear las ecuaciones.

Ejemplos:

El triple de un número supera en 1 al otro, mientras que el quíntuplo del primero es 4 unidades menor que el doble del segundo. Encuentre ambos números.

$$\begin{aligned}x &\rightarrow \text{primer número} \\y &\rightarrow \text{segundo número}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3x &= 1 + y \\5x &= 2y - 4\end{aligned}$$

Resolvemos el sistema por el método que queramos. Para este caso usaremos sustitución.

$$y = 3x - 1$$

$$5x = 2(3x - 1) - 4$$

$$5x = 6x - 2 - 4$$

$$\begin{aligned}x &= 6 \rightarrow \text{primer número} \\y &= 3(6) - 1 = 17 \rightarrow \text{segundo número}\end{aligned}$$

Otros problemas serian.

Si $1/4$ de un número se suma con $1/3$ de otro, el resultado es 9. Si se resta $1/2$ del segundo a los $5/6$ del primero, el resultado es 1. Encuentre ambos números.

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{3}y = 9 ; \quad \frac{5}{6}x - \frac{1}{2}y = 1$$

En esta ocasión resolveremos por el método de eliminación por suma y resta, pero primero me conviene quitarme las fracciones multiplicando por su respectivo MCM.

$$3x + 4y = 108 ; \quad 5x - 3y = 6$$

$$(3x + 4y = 108)(3) \rightarrow 9x + 12y = 324 \\ (5x - 3y = 6)(4) \rightarrow 20x - 12y = 24$$

$$29x = 348 \rightarrow x = 12 \\ 3(12) + 4y = 108 \rightarrow y = 18$$

Si 10 paquetes de maíz y 7 de chicharos cuestan \$18.50, mientras que 7 de maíz y 9 de chicharos cuestan \$15.00, halle el precio por paquete de cada uno.

$$10m + 7c = 18.50 \\ 7m + 9c = 15.00$$

Resolveremos con eliminación por suma y resta

$$(10m + 7c = 18.50)(-7) \rightarrow -70m - 49c = -129.50 \\ (7m + 9c = 15.00)(10) \rightarrow 70m + 90c = 150.00$$

$$41c = 20.50 \rightarrow \$0.50 \text{ el paquete de chicharos} \\ 10m + 7(0.5) = 15.00 \rightarrow \$1.50 \text{ el paquete de maíz}$$

Una bolsa contiene \$3.00 en monedas de 5 y 10 centavos. Si las de 5 fueran de 10 y viceversa, el valor total de las monedas sería de \$3.30. ¿Cuántas hay de cada clase en la bolsa?

$$\begin{aligned}x &\rightarrow \text{número de monedas de } 5\text{¢} \\y &\rightarrow \text{número de monedas de } 10\text{¢}\end{aligned}$$

En este problema tenemos que ver el valor nominal de las monedas para plantear nuestra ecuación.

$$\begin{aligned}0.05x + 0.10y &= 3.00 \\0.10x + 0.05y &= 3.30\end{aligned}$$

Ahora resolveremos, no importa si trabajamos con enteros o números decimales se sigue resolviendo igual.

$$\begin{aligned}(0.05x + 0.10y = 3.00)(2) &\rightarrow 0.10x + 0.20y = 6.00 \\(0.10x + 0.05y = 3.30)(-1) &\rightarrow -0.10x - 0.05y = -3.30\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0.15y &= 2.70 & \rightarrow y &= 18 \text{ monedas de } 10\text{¢} \\0.05x + 0.10(18) &= 3.00 & \rightarrow x &= 24 \text{ monedas de } 5\text{¢}\end{aligned}$$

Cabe recalcar que muchas veces estos problemas se van a poder resolver por los dos métodos, ya sea planteando una ecuación de primer grado o ecuaciones simultáneas, el método que usen para estos casos ya será a elección de cada persona.

Bibliografía

46

1. Álgebra. Aurelio Baldor.
2. Álgebra elemental. Alfonse Gobrán.

Problemas de estudio para el examen de SIFEIS

Tema	Libro	Capítulo	Página(s)
Operaciones con polinomios	Algebra: Aurelio Baldor	Capítulo: 4	63
		Capítulo: 5	79
Factorización	Algebra: Alfonse Gobran	Capítulo: 3.6 al 3.7	76 al 105
	Algebra: Aurelio Baldor	Capítulo: 10	143
Fracciones Algebraicas	Algebra: Alfonse Gobran	Capítulo: 6.1 al 6.3	204 al 223
	Algebra: Aurelio Baldor	Capítulo: 13	193
Ecuación de primer grado		Capítulo: 14	210
	Algebra: Alfonse Gobran	Capítulo: 7.1 al 7.7	228 al 269
Ecuación de segundo grado	Algebra: Aurelio Baldor	Capítulo: 15	236
		Capítulo: 16	243
Ecuación de segundo grado	Algebra: Alfonse Gobran	Capítulo: 4.1 al 4.2	110 a 127
	Algebra: Aurelio Baldor	Capítulo: 33	446
Ecuaciones simultaneas	Algebra: Alfonse Gobran	Capítulo: 11.1 al 11.5	390 al 406
	Algebra: Aurelio Baldor	Capítulo: 24	319
Problemas planteados con palabras (Ec. De primer grado)	Algebra: Alfonse Gobran	Capítulo: 8.6 al 8.8	311 al 325
	Algebra: Aurelio Baldor	Capítulo: 17	246
Problemas planteados con palabras (Ecs. Simultaneas)	Algebra: Alfonse Gobran	Capítulo: 4.3	128 al 155
	Algebra: Aurelio Baldor	Capítulo: 26	356
	Algebra: Alfonse Gobran	Capítulo: 8.9	326 al 336