

**Υλοποίηση Αλγορίθμων για την Κάλυψη Σημείων με ένα Ορθογώνιο Μικρού Εμβαδού**

**Σπυρίδων Σιλίρας**

**Διπλωματική Εργασία**

Επιβλέπων Καθηγητής: Λεωνίδας Παληός

Ιωάννινα, Σεπτέμβριος, 2024

**Τμήμα Μηχ. Η/Υ & Πληροφορικής**

**Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων**

**Department of Computer Science & Engineering**

**University of Ioannina**

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους φίλους μου και συμφοιτητές, για τις γόνιμες συζητήσεις που είχαμε καθ’ όλη τη διάρκεια των σπουδών μου κάνοντας πιο χαρούμενη την ολοκλήρωση τους. Επίσης, πολύ σημαντικός ήταν ο ρόλος και το έργο όλων των καθηγητών του τμήματος, που συνέβαλαν έτσι ώστε να κατανοήσω καλύτερα τους διάφορου τομείς της επιστήμης μας, όμως ιδιαίτερες ευχαριστίες οφείλω στον Καθηγητή, κ. Λεωνίδα Παληό, που με καθοδήγησε στην εκπόνηση αυτής της εργασίας με τις σημαντικές παρατηρήσεις και διευκρινήσεις του. Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω την οικογένεια μου για την υπομονή και την στήριξη, αλλά και εμπιστοσύνη που μου έδειξαν όλα αυτά τα χρόνια.

Σεπτέμβριος, 2024

Σπυρίδων Σιλίρας

Περίληψη

Θεωρούμε ένα σύνολο P των n σημείων στον χώρο. Δοθέντος ενός ακέραιου k > 0, δείχνουμε πως υπολογίζουμε ένα ορθογώνιο, παράλληλο στους άξονες, με το μικρότερο εμβαδό, που περιέχει k σημεία, σε χρόνο O(n k2 log n + n log2 n). Επίσης, θεωρούμε το πρόβλημα για το οποίο δοθέντος μιας τιμής α > 0, υπολογίζουμε μια προσέγγιση του μέγιστου δυνατού αριθμού σημείων του P που περιέχονται σε ένα ορθογώνιο παράλληλο στους άξονες με εμβαδόν ίσο με α. Γι’ αυτό το πρόβλημα χρησιμοποιούμε έναν 4–προσεγγιστικό αλγόριθμο που τρέχει σε χρόνο O(n log2 n).

**Λέξεις Κλειδιά:** Ορθογώνιο, Εμβαδόν, 4-προσεγγιστικός

Abstract

Let P be a set of n points in the plane. We show how to find, for a given integer k > 0, the smallest-area axis parallel rectangle that covers k points of P in O(n k2 log n + n log2 n) time. We also consider the problem of, given a value α > 0, covering as many points of P as possible with an axis-parallel rectangle of area at most α. For this problem we give a 4-approximation algorithm that works in O(n log2 n) time.

**Keywords:** Rectangle, Area, 4-approximation

**Πίνακας Περιεχομένων**

[Κεφάλαιο 1. Εισαγωγή 1](#_Toc499829260)

[1.1 Κύριοι Ορισμοί 1](#_Toc499829261)

[1.2 Αντικείμενο της Διπλωματικής Εργασίας 3](#_Toc499829261)

[1.3 Σχετικά Ερευνητικά Αποτελέσματα 3](#_Toc499829261)

[1.4 Δομή της Διπλωματικής Εργασίας 4](#_Toc499829261)

[Κεφάλαιο 2. Αλγόριθμοι Κάλυψης Σημείων 5](#_Toc499829263)

[2.1 Ελαχιστοποίηση Εμβαδού Ορθογωνίου για Δοθέν Πλήθος Σημείων 2](#_Toc499829264)

[2.2 Μεγιστοποίηση του Πλήθους Σημείων για Δοθέν Εμβαδόν Ορθογωνίου 2](#_Toc499829265)

[Κεφάλαιο 3. Η Υλοποίηση 3](#_Toc499829263)

[3.1 Είσοδος - Έξοδος 3](#_Toc499829264)

[3.2 Δομές Δεδομένων 3](#_Toc499829265)

[3.3 Ελαχιστοποίηση Εμβαδού Ορθογωνίου για Δοθέν Πλήθος Σημείων 3](#_Toc499829265)

[*3.3.1* *Η συνάρτηση/κλάση ΑΑΑΑ………………………………………………………………………3*](file:///C:\code\Bachelor\bachelor\template_Diploma_CSE_UoI-16.docx#_Toc499829262)

[3.4 Μεγιστοποίηση του Πλήθους Σημείων για Δοθέν Εμβαδόν Ορθογωνίου 3](#_Toc499829265)

[*3.4.1* *Η συνάρτηση/κλάση ΑΑΑΑ………………………………………………………………………3*](file:///C:\code\Bachelor\bachelor\template_Diploma_CSE_UoI-16.docx#_Toc499829262)

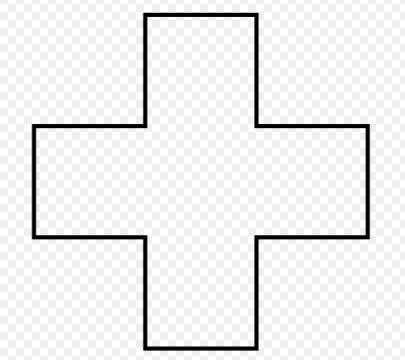
[Κεφάλαιο 4. Επίλογος 4](#_Toc499829263)

[Βιβλιογραφία 5](#_Toc499829263)

# Εισαγωγή

## Κύριοι Ορισμοί

Σε αυτήν την ενότητα θα παρουσιάσουμε βασικές έννοιες και ορισμούς που είναι απαραίτητες για την περιγραφή και κατανόηση του προβλήματος που θα μας απασχολήσει σε αυτήν την εργασία. Πιο συγκεκριμένα θα αναλυθούν οι έννοιες του *ορθογώνιου* (orthogonal) *πολυγώνου*, του *κλιμακωτού* (staircase) *πολυγώνου*, της *ορατότητας* (visibility), της *k-ορατότητας* (k-visibility), του *1-φύλακα* (1-modem), του *k-φύλακα* (k-modem) καθώς και η έννοια της *φύλαξης πολυγώνου από k-φύλακες* για k >= 1.

Το *ορθογώνιο* (orthogonal) *πολύγωνο* είναι ένα πολύγωνο του οποίου οι ακμές είναι παράλληλες προς τους άξονες του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων (Σχήμα 1.1).

**Σχήμα 1.1:** ορθογώνιο πολύγωνο

Το *κλιμακωτό* (staircase) *πολύγωνο* είναι μια περιορισμένη εκδοχή του ορθογώνιου πολυγώνου, όπου έχει τη μορφή ‘’σκάλας’’, όλες οι εσωτερικές του γωνίες είναι 90° και 270°, είναι xy-μονότονο και οι ‘’σκάλες’’ επιτρέπεται να είναι μόνο ανοδικές και προς τα δεξιά. Για ευκολία παρουσιάζεται το παρακάτω σχήμα (Σχήμα 1.2).

Με τον όρο *ορατότητα* (visibility)αναφερόμαστε στο γεγονός όπου δύο σημεία μπορούν να συνδεθούν με μία ευθεία γραμμή χωρίς να παρεμβάλλεται κάποιο εμπόδιο μεταξύ τους. Επιπλέον, λέμε ότι δύο σημεία έχουν *k-ορατότητα* (k-visibility) μεταξύ τους, όταν παρεμβάλλονται τουλάχιστον k εμπόδια μεταξύ της νοητής ευθείας που τα ενώνει.

**Σχήμα 1.2:** κλιμακωτό πολύγωνο

Με την έννοια του *1-φύλακα* (1-modem)

### <Τίτλος υπο-ενότητας>

Κείμενο της υπο-ενότητας

#### <Τίτλος υπο-υπό-ενότητας>

Κείμενο υπο-υπό-ενότητας

## Αντικείμενο της Διπλωματικής Εργασίας

Το αντικείμενο της Διπλωματικής Εργασίας είναι η μελέτη του προβλήματος της κάλυψης σημείων με ένα ορθογώνιο μικρού εμβαδού. Πιο συγκεκριμένα θα μελετήσουμε και θα υλοποιήσουμε τους αλγορίθμους των Berg, Cabello, Cheong, Eppstein και Knauer [9] για την επίλυση αυτού του προβλήματος. Στον πρώτο αλγόριθμο έχουμε ως στόχο την ελαχιστοποίηση του εμβαδού ενός ορθογωνίου που πρέπει να περικλείει συγκεκριμένο αριθμό σημείων. Ενώ στον δεύτερο αλγόριθμο, στόχος είναι η μεγιστοποίηση του πλήθους σημείων μέσα σε ένα ορθογώνιο δοθέντος του ακριβή εμβαδού του ορθογωνίου.

Η υλοποίηση πραγματοποιήθηκε στην γλώσσα προγραμματισμού Python, ενώ η οπτικοποίηση των δεδομένων και των πολυγώνων έγινε με χρήση της βιβλιοθήκης matplotlib της Python.

## Σχετικά Ερευνητικά Αποτελέσματα

Το πρόβλημα της κάλυψης σημείων με ένα ορθογώνιο μικρού εμβαδού έχει λάβει ιδιαίτερη προσοχή από πολλούς επιστήμονες. Αρχικά, οι Segal και Kedem [20] παρουσίασαν έναν O(n + k(n – k)2) αλγόριθμο όπου ο αριθμός των σημείων εντός του ορθογωνίου (k) προσεγγίζει τον αριθμό των σημείων (n) που περιλαμβάνει όλο το σετ P. Σε αντίθεση, εμείς μελετάμε την περίπτωση όπου το k είναι μικρό, έτσι ώστε να είναι προτιμότερο να μειώσουμε την εξάρτηση από το n και να αυξήσουμε την εξάρτηση από το k. Για την περίπτωση όπου το k έχει μικρή τιμή, αρκετές έρευνες [3, 7, 20] ισχυρίστηκαν ότι οι προηγούμενοι αλγόριθμοι των Aggarwal, Imai, Katoh και Suri [2] και των Eppstein και Errickson [12] λύνουν το πρόβλημα σε χρόνο O(k2 n log n) και O(n log n +k2n) αντίστοιχα. Ωστόσο, οι παραπάνω αλγόριθμοι εφαρμόζονται για την εκδοχή ελάχιστης περιμέτρου του προβλήματος. Δεν λειτουργούν για την εκδοχή του ελάχιστου εμβαδού, διότι βασίζονται στο γεγονός ότι, στην περίπτωση ελάχιστης περιμέτρου, το βέλτιστο υποσύνολο των k σημείων, το υπολογίζουμε από τους O(k) κοντινότερους γείτονες ενός σημείου, κάτι που δεν αληθεύει για την περίπτωση ελάχιστου εμβαδού. Το ίδιο πρόβλημα αντιμετωπίζουμε και όταν προσπαθούμε να υλοποιήσουμε τους αλγορίθμους των Datta, Lenhof, Schwarz και Smid [8]. Για την επίλυση του προβλήματός μας, δε μπορούμε να σταθούμε μόνον στα σύνολα τον κοντινότερων γειτόνων, αλλά πρέπει να χρησιμοποιήσουμε διαφορετικές μεθόδους για να πετύχουμε τους αλγοριθμικούς χρόνους που θέλουμε.

Αργότερα, οι Kaplan, Roy και Sharir [16] έδειξαν ότι το πρόβλημά μας μπορεί να λυθεί σε χρόνο O(n5/2 log2n). Αυτός είναι και ο πρώτος υπό-κυβικός αλγόριθμος που είναι και αρκετά αποτελεσματικός, σε σχέση με προηγούμενους αλγόριθμους, για διάφορες τιμές του k.

Έχουν υπάρξει και αρκετές προσπάθειες ερευνητών για το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης του μεγέθους δίσκου που περιέχει k σημεία. Σε αυτό το πρόβλημα έχουν υπάρξει πολύ αποδοτικές λύσεις διότι δεν έχει σημασία εάν θα ελαχιστοποιήσουμε την περίμετρο ή το εμβαδό του δίσκου.

Όσον αφορά τους αλγορίθμους που υλοποιήσαμε, υπολογίζουμε το ελάχιστο εμβαδό που περικλείει k σημεία του συνόλου P σε χρόνο O(nk2logn + nlog2n) χρησιμοποιώντας κατάλληλα τη μέθοδο διαίρει-και-βασίλευε που μοιάζει με αυτή που χρησιμοποίησαν οι Aronov, Ezra και Sharir [4]. Αυτός είναι και ο μόνος γνωστός αλγόριθμος με σχεδόν γραμμική εξάρτηση από το n. Για τον υπολογισμό του μέγιστου πλήθους σημείων που μπορούν να περικλείονται σ’ ένα ορθογώνιο με συγκεκριμένο εμβαδό κατασκευάσαμε έναν 4-προσεγγιστικό O(n log2n) αλγόριθμο, που χρησιμοποιεί με παρόμοιο τρόπο την τεχνική διαίρει-και-βασίλευε.

## Δομή της Διπλωματικής Εργασίας

Η Διπλωματική Εργασία αποτελείται από τέσσερα κεφάλαια. Το Κεφάλαιο 1 αποτελεί την εισαγωγή, όπου γίνεται αναφορά σε βασικές έννοιες και ορισμούς που έχουν σχέση με τα πολύγωνα και τις ιδιότητές τους. Στη συνέχεια παρουσιάζεται το αντικείμενο της Διπλωματικής Εργασίας και σχετικά ερευνητικά αποτελέσματα.

Στο Κεφάλαιο 2 περιγράφουμε αναλυτικά τους αλγορίθμους ελαχιστοποίησης εμβαδού ορθογωνίου για δοθέν πλήθος σημείων και μεγιστοποίησης του πλήθους σημείων για δοθέν εμβαδόν ορθογωνίου των Berg, Cabello, Cheong, Eppstein και Knauer [9] παρουσιάζοντας το θεωρητικό υπόβαθρο, την πολυπλοκότητα αλλά και τα βήματα εκτέλεσης των αλγορίθμων μέσω ενός απλού παραδείγματος.

Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάζεται η ακριβής υλοποίηση των αλγορίθμων στην γλώσσα προγραμματισμού Python, περιγράφοντας όλες τις συναρτήσεις αυτών. Επίσης, περιγράφονται η μορφή της εισόδου και της εξόδου του προγράμματος καθώς και οι δομές δεδομένων που χρησιμοποιήθηκαν. Τέλος, υπάρχουν κάποια παραδείγματα εκτέλεσης των προγραμμάτων.

Στο Κεφάλαιο 4 συνοψίζουμε τα αποτελέσματα της εργασίας και παρουσιάζουμε ενδιαφέρουσες επεκτάσεις του προβλήματος.

# Αλγόριθμοι Κάλυψης Σημείων

## Ελαχιστοποίηση Εμβαδού Ορθογωνίου για Δοθέν Πλήθος Σημείων

Στην εργασία [JJQV98] περιγράφεται μία αρχιτεκτονική …

Οι Bernstein et al., [BBC+99] εισάγουν ένα καινούριο μοντέλο για …

Η θεωρητική ανάλυση του μοντέλου [Orr98a] δείχνει ότι …

## Μεγιστοποίηση του Πλήθους Σημείων για Δοθέν Εμβαδόν Ορθογωνίου

Στον Πίνακα 2.1 βλέπουμε τα στατιστικά για τα διαφορετικά σύνολα δεδομένων: το μέγεθος, τη μέση τιμή της Μετρικής 1, και την μέση τιμή της Μετρικής 2.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Μέγεθος | Μετρική 1 | Μετρική 2 |
| Dataset 1 | 2000 | 2.3 | 23 |
| Dataset 2 | 1000 | 4.3 | 45 |
| Dataset 3 | 3000 | 6.7 | 100 |

Πίνακας 2.1. Στατιστικά για τα δεδομένα

## Παραδείγματα Σχημάτων

Στην Εικόνα 2.1 βλέπουμε την γραφική παράσταση για τις τιμές της Μετρικής Ι για τα διαφορετικά σύνολα δεδομένων.

Εικόνα 2.1. Η τιμή της Μετρικής Ι για τα διαφορετικά σύνολα δεδομένων.

Εικόνα 2.2. Η τιμή της Μετρικής Ι ως συνάρτηση της Τιμής Χ για το Πείραμα 1.

# <Τίτλος Κεφαλαίου 2>

## Παραδείγματα Αναφορών

Στην εργασία [JJQV98] περιγράφεται μία αρχιτεκτονική …

Οι Bernstein et al., [BBC+99] εισάγουν ένα καινούριο μοντέλο για …

Η θεωρητική ανάλυση του μοντέλου [Orr98a] δείχνει ότι …

## Παράδειγμα Πίνακα

Στον Πίνακα 2.1 βλέπουμε τα στατιστικά για τα διαφορετικά σύνολα δεδομένων: το μέγεθος, τη μέση τιμή της Μετρικής 1, και την μέση τιμή της Μετρικής 2.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Μέγεθος | Μετρική 1 | Μετρική 2 |
| Dataset 1 | 2000 | 2.3 | 23 |
| Dataset 2 | 1000 | 4.3 | 45 |
| Dataset 3 | 3000 | 6.7 | 100 |

Πίνακας 2.1. Στατιστικά για τα δεδομένα

# <Τίτλος Κεφαλαίου 2>

## Παραδείγματα Αναφορών

Στην εργασία [JJQV98] περιγράφεται μία αρχιτεκτονική …

Οι Bernstein et al., [BBC+99] εισάγουν ένα καινούριο μοντέλο για …

Η θεωρητική ανάλυση του μοντέλου [Orr98a] δείχνει ότι …

## Παράδειγμα Πίνακα

Στον Πίνακα 2.1 βλέπουμε τα στατιστικά για τα διαφορετικά σύνολα δεδομένων: το μέγεθος, τη μέση τιμή της Μετρικής 1, και την μέση τιμή της Μετρικής 2.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Μέγεθος | Μετρική 1 | Μετρική 2 |
| Dataset 1 | 2000 | 2.3 | 23 |
| Dataset 2 | 1000 | 4.3 | 45 |
| Dataset 3 | 3000 | 6.7 | 100 |

Πίνακας 2.1. Στατιστικά για τα δεδομένα

Βιβλιογραφία

|  |  |
| --- | --- |
| [1] | Michael Segal and Klara Kedem. Enclosing k points in the smallest axis parallel rectangle. Inform. Process. Lett., 65(2):95-99, 1998. |
| [2] | Alok Aggarwal, Hiroshi Imai, Naoki and Subhash Suri. Finding k-points with minimum diameter and related problems. J. Algorithms, 12(1):38-56, 1991. |
| [3] | Hee-Hap Ahn, Sang Won Bae, Erik D. Demaine, Martin L. Demaine, Sang-Sub Kim, Matias Korman, Iris Reinbacher and Wanbin Son. Covering points by disjoint boxes with outliers. Comput. Geom., 44(3):178-190, 2011.. |
| [4] | Boris Aronov, Esther Ezra and Micha Sharir. Small-size ε-nets for axis-parallel rectangles and boxes. SIAM J. Comput., 39(7):3248-3282, 2010. |
| [5] | Sandip Das, Partha P. Goswami and Subhas C. Nandy. Smallest k-point enclosing rectangle and square of arbitrary orientation. Inf. Process. Lett., 94(6):259-266, 2005. |
| [6] | Mark de Berg, Sergio Cabello, Otfried Cheong, David Eppstein and Christian Knauer. Covering many points with a small-area box. JoCG 10(1), 207-222, 2019. |
| [7] | Sandip Das, Partha P. Goswami and Subhas C. Nandy. Smallest k-point enclosing rectangle and square of arbitrary orientation. Inf. Process. Lett., 94(6):259-266, 2005 |
| [8] | Amitava Datta, Hans-Peter Lenhof, Christian Schwarz and Michiel H. Smid. Static and dynamic algorithms for k-point clustering problems. J. Algorithms, 19(3):474-503, 1995. |
| [9] | Mark de Berg, Sergio Cabello, Otfried Cheong, David Eppstein and Christian Knauer. Covering many points with a small-area box. JoCG 10(1), 207-222, 2019.. |
| [10] | Hee-Hap Ahn, Sang Won Bae, Erik D. Demaine, Martin L. Demaine, Sang-Sub Kim, Matias Korman, Iris Reinbacher and Wanbin Son. Covering points by disjoint boxes with outliers. Comput. Geom., 44(3):178-190, 2011. |
| [11] | Sandip Das, Partha P. Goswami and Subhas C. Nandy. Smallest k-point enclosing rectangle and square of arbitrary orientation. Inf. Process. Lett., 94(6):259-266, 2005. |
| [12] | David Eppstein and Jeff Erickson. Iterated nearest neighbors and finding minimal polytopes. Discrete Comput. Geom., 11(3):321-350, 1994. |
| [13] | Michael Segal and Klara Kedem. Enclosing k points in the smallest axis parallel rectangle. Inform. Process. Lett., 65(2):95-99, 1998. |
| [14] | Sandip Das, Partha P. Goswami and Subhas C. Nandy. Smallest k-point enclosing rectangle and square of arbitrary orientation. Inf. Process. Lett., 94(6):259-266, 2005. |
| [15] | Alok Aggarwal, Hiroshi Imai, Naoki and Subhash Suri. Finding k-points with minimum diameter and related problems. J. Algorithms, 12(1):38-56, 1991. |
| [16] | Haim Kaplan, Sasanka Roy and Micha Sharir. Finding axis-parallel rectangles of fixed perimeter or area containing the largest number of points. In Proc. 25th Annual European Symposium (ESA), volume 87 of LIPIcs, pages 52:1-52:13. Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum fuer Informatik, 2017. |
| [17] | Sandip Das, Partha P. Goswami and Subhas C. Nandy. Smallest k-point enclosing rectangle and square of arbitrary orientation. Inf. Process. Lett., 94(6):259-266, 2005. |
| [18] | Mark de Berg, Sergio Cabello, Otfried Cheong, David Eppstein and Christian Knauer. Covering many points with a small-area box. JoCG 10(1), 207-222, 2019. |
| [19] | Michael Segal and Klara Kedem. Enclosing k points in the smallest axis parallel rectangle. Inform. Process. Lett., 65(2):95-99, 1998. |
| [20] | Michael Segal and Klara Kedem. Enclosing k points in the smallest axis parallel rectangle. Inform. Process. Lett., 65(2):95-99, 1998 |
| [21] | Alok Aggarwal, Hiroshi Imai, Naoki and Subhash Suri. Finding k-points with minimum diameter and related problems. J. Algorithms, 12(1):38-56, 1991. |
| [22] | Hee-Hap Ahn, Sang Won Bae, Erik D. Demaine, Martin L. Demaine, Sang-Sub Kim, Matias Korman, Iris Reinbacher and Wanbin Son. Covering points by disjoint boxes with outliers. Comput. Geom., 44(3):178-190, 2011. |
| [23] | Sandip Das, Partha P. Goswami and Subhas C. Nandy. Smallest k-point enclosing rectangle and square of arbitrary orientation. Inf. Process. Lett., 94(6):259-266, 2005. |
| [9] | Mark de Berg, Sergio Cabello, Otfried Cheong, David Eppstein and Christian Knauer. Covering many points with a small-area box. JoCG 10(1), 207-222, 2019. |

|  |  |
| --- | --- |
| [20] | Michael Segal and Klara Kedem. *Enclosing k points in the smallest axis parallel rectangle. Inform. Process. Lett., 65(2):95-99, 1998*. |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
| [20] | Michael Segal and Klara Kedem. Enclosing k points in the smallest axis parallel rectangle. Inform. Process. Lett., 65(2):95-99, 1998. |
| [7] | Sandip Das, Partha P. Goswami and Subhas C. Nandy. Smallest k-point enclosing rectangle and square of arbitrary orientation. Inf. Process. Lett., 94(6):259-266, 2005. |
| [2] | Alok Aggarwal, Hiroshi Imai, Naoki and Subhash Suri. Finding k-points with minimum diameter and related problems. J. Algorithms, 12(1):38-56, 1991. |
| [3] | Hee-Hap Ahn, Sang Won Bae, Erik D. Demaine, Martin L. Demaine, Sang-Sub Kim, Matias Korman, Iris Reinbacher and Wanbin Son. Covering points by disjoint boxes with outliers. Comput. Geom., 44(3):178-190, 2011. |
| [7] | Sandip Das, Partha P. Goswami and Subhas C. Nandy. Smallest k-point enclosing rectangle and square of arbitrary orientation. Inf. Process. Lett., 94(6):259-266, 2005. |
| [9] | Mark de Berg, Sergio Cabello, Otfried Cheong, David Eppstein and Christian Knauer. Covering many points with a small-area box. JoCG 10(1), 207-222, 2019. |