

用 LAMBDA 改进算法固定 GPS 整周模糊度

高成发¹ 赵毅¹ 万德钧¹

(1 东南大学交通学院, 南京市四牌楼 2 号, 210096)

摘要:介绍了 LAMBDA 算法原理, 结合国土资源调查的工程实践, 对常规的 LAMBDA 方法作了两点改进, 即扩大超椭球的体积 E_n 和以点位的先验信息检验坐标解算结果。实测数据分析表明, 两点改进均能有效地提高基线解算的可靠性, 具有一定的理论价值。
关键词:GPS; 整周模糊度; LAMBDA 算法; 国土资源调查
中图分类号:P228.41

在 GPS 定位中, 内业数据处理较为关键, 特别是周跳探测与修复和整周模糊度的正确解算直接影响了坐标所能达到的精度指标。

正确求解整周模糊度一直是 GPS 坐标解算中的一个技术难点。目前整周模糊度解算方法中 LAMBDA 算法最为有效^[2]。针对 GPS 国土资源调查的特点, 本文提出了对 LAMBDA 算法的两点改进。

1 LAMBDA 算法及其固定整周模糊度的方法

1.1 LAMBDA 算法简介

在基线的双差数学模型中, 有基线坐标和双差整周模糊度两种待求的未知参数。双差观测方程的数学模型简化为:

$$y = Bb + Aa + e \tag{1}$$

式中, $m \times (p + n)$ 系数矩阵 $[BA]$ 被认为是满秩矩阵, 且秩等于 $(p + n)$; 双差观测量 y 的协因数矩阵记为 Q , Q 为对称正定矩阵。大气延迟等其他未知参数均包括在向量 b 中。所有的双差整周模糊度未知参数被包含在 a 中, 而所有的其他未知数均被包含在 b 中。在最终的精确计算时, 所有的双差模糊度浮点值均将被固定后的整数值所替代。

对基线坐标和整周模糊度的估计主要运用了最小二乘原理, 整个参数估计大致可以分为计算实数解、整周模糊度的固定以及最终计算固定解

几个过程。

LAMBDA 算法的核心就是整周模糊度最小二乘估计, 它分为两个重要组成部分: 整数变换和基于 LDL^T 分解的整周搜索。整数变换也称为 Z 变换, 其目的是降低整周模糊度之间的相关性, 提高整周搜索的效率。

整周模糊度的估计成功与否将直接决定基线解算的效率及其结果的精度。模糊度估计的目的是从下式中求出 a_0 。满足下式的 a 记为 \hat{a} :

$$\min_a \|\hat{a} - a\|_{Q_a}^2 \tag{2}$$

其中, $a \in Z^n$ 。最后, 将模糊度固定到整数最小二乘估计值上, 即可得到精确的基线坐标值:

$$\hat{b} = b - Q_{ba}(Q_a^{-1})(\hat{a} - a')$$

1.2 用 LAMBDA 算法固定整周模糊度

模糊度估计实际上是对式 (2) 的求解, 而对于式 (2) 的求解至今仍然没有标准可行的数学方法, 而 LAMBDA 方法则是从概率的角度, 以离散的方法对式 (2) 进行近似的讨论, 于是式 (2) 可变为:

$$(a' - a)^T Q_a^{-1} (a' - a) \leq x^2 \tag{3}$$

式 (3) 表示的是一个 n 维超椭球搜索空间, 式中的 x^2 表征了 a 所在椭球空间的大小。

将式 (3) 中的 Q_a^{-1} 进行 L^TDL 分解, 可以得到:

$$\sum_{i=1}^n d_i \left[(a_i - \hat{a}_i) + \sum_{j=i+1}^n l_{ji} (a_j - \hat{a}_j) \right]^2 \leq x^2 \tag{4}$$

式 (3) 即是对被选模糊度是否满足要求进行判断的不等式, 而进行模糊度搜索只能是对模糊

度分量中每个分量进行单独搜索。LAMBDA 方法采用了从模糊度的第 n 个分量到第 1 个分量顺序搜索的方法,由此还必须要知道每个分量的搜索空间表达式。而对式(4)作一系列的数学变换,最终得到:

$$\begin{aligned} \underline{a_i} - \sqrt{R_i} - \sum_{j=i+1}^n l_{ji} (a_j - \underline{a_j}) &\leq a_i \leq \underline{a_i} + \\ &\sqrt{R_i} - \sum_{j=i+1}^n l_{ji} (a_j - \underline{a_j}) \end{aligned} \quad (5)$$

式(5)即是严格范围内的 a_i 的搜索空间,左边为搜索空间的下界,右边为搜索空间的上界。

1.3 搜索空间大小的确定

式(3)中的 x^2 表征了超椭球搜索空间的大小。 x^2 取值过大将大大增加 LAMBDA 搜索的时间;而其取值过小,则有可能漏掉模糊度的真实值而降低其搜索可靠性。于是,怎样合理地确定 x^2 的取值(LAMBDA 搜索空间的大小)便变得尤为重要。

根据体积计算公式,超椭球的体积可以由以下公式计算得到:

$$E_n = c^n \sqrt{|Q_{a_i}|} V_n \quad (6)$$

式中, E_n 表示为超椭球的体积,可以通过近似公式 $N \approx \text{int}(E_n)$ 计算得到; V_n 为单位超圆球的体积,在实际应用中一般通过以下思路来确定搜索空间。

如果将实数模糊度向量里的每一个模糊度分量值取整到离它们各自最接近的整数,这时将得到一个整数模糊度向量。由于在进行 LAMBDA 搜索之前,已经对原始模糊度及其协方差矩阵进行了 Z 变换,模糊度分量之间的相关性已经降到了相当小的程度,所以通过以上方法得到的这个整数模糊度解将很接近于真值。于是可以用这个实数模糊度解所求得的二次范数为式(3)中的 x^2 。除了用以上方法确定一个较小的 x^2 值,还可以将实数模糊度向量中的某一个分量取整到次接近于它的整数,而另外 $n-1$ 个分量分别取整到最接近于它们的整数,这样便可以得到 n 个模糊度整数解,即可以用它们确定出 n 个较小的 x^2 值。加上以前的那个 x^2 值,总共可以求出 $n+1$ 个 x^2 值。然后从这些 x^2 值中找出次最小的 x^2 作为式(3)中的 x^2 ,便可以保证搜索空间内不会有很多但至少会有两个整数模糊度备选解。

2 用 LAMBDA 改进算法固定整周模糊度

进处。

1) LAMBDA 算法对整周模糊度固定过程中,用到了公式 $N \approx \text{int}(E_n)$,即是假定超椭球的体积 E_n 和超椭球内所包含的解个数之间有着——对应的关系。然而它只是一个经验公式,缺乏理论依据。超椭球的体积 E_n 的计算错误将会直接导致整数最小二乘的阈值 x^2 计算失真。

2) 在观测历元数较多时,LAMBDA 算法十分有效。然而通过实例分析发现,当观测历元数较少(如小于 5)时,虽然其整周模糊度也能固定,但其基线固定解的精度较差,或者说次小方差与最小方差相差不多(RATIO 因子较小)。

针对上述两个不足之处,并结合土地调查的具体特点,笔者对 LAMBDA 算法实施了两点改进:一是扩大超椭球的体积 E_n ;二是以点位的先验信息检验坐标解算结果。

2.1 扩大超椭球的体积

在用事后 RTK 模式进行国土资源调查时,每一界址点及图斑特征点观测时间较短,此时为了较为准确地求定整数最小二乘的阈值 x^2 ,人为扩大 E_n 不失为一种行之有效的方法。

具体做法是:首先根据基线浮动解的解算结果取整到最接近于它们的整数,此时的整周模糊度向量为 a_0 ;然后将实数模糊度向量中的某一个分量分别取整到次接近于它的两个整数,而另外 $n-1$ 个分量分别取整到最接近于它们的整数,这样便可以得到 $2n$ 个模糊度整数解,即可以用它们确定出 $2n$ 个较小的 x^2 值,加上由 a_0 确定的那个 x^2 值,总共可以求出 $2n+1$ 个 x^2 值;最后从这些 x^2 值中找出次最小的那个 x^2 作为式(3)中的 x^2 。如此改进的目的就是要尽可能地找出最小和次最小 x^2 。虽然这样做会增加计算的工作量,降低搜索效率,但作为事后 RTK 的计算模式,加之目前计算机的计算速度也较快,以降低一定的搜索效率来换取提高搜索的可靠性是值得的。

笔者对 GPS 实测数据进行了计算分析,数据处理软件为 GPS 基线处理软件 GBPS。表 1 为改进前和改进后阈值 x^2 的对比结果。不难发现,当观测历元数较多时,由于整周模糊度浮动解精度较高,改进前和改进后的 x^2 相同;但当观测历元数较少时,改进前、后的 x^2 相差较大,需要用本文提出的较为严密的改进算法来求定 x^2 。当然并非所有观测历元数少时用改进算法求定的 x^2 一定比改进之前求定的阈值 x^2 要小(出现这种现象的比例约为 20%),但从可靠性角度出发,采用本文提出的改进算法更为严密。

表1 不同历元数在扩大 E_n 后对 x^2 的影响分析

Tab. 1 Influencing Analysis on x^2 for Different Record

After Enlarging E_n

历元数	$E_n = n+1$	$E_n = 2n+1$	备注
(GPS5_GPS4)	50	1.0	1~ 50 历元
	30	2.2	71~ 100 历元
	20	6.5	121~ 140 历元
	10	9.4	321~ 330 历元
	5	261.7	232~ 236 历元
	3	286.1	263~ 265 历元
(GPS1_GPS3)	50	1.0	1~ 50 历元
	30	3.4	51~ 80 历元
	20	8.6	81~ 100 历元
	10	25.5	343~ 352 历元
	5	412.0	101~ 105 历元
	3	95.7	324~ 326 历元

2.2 用点位的先验信息检验坐标解算结果

在国土资源调查中,动态坐标解算结果可用点位的先验信息进行检验。

假设图斑开始的特征点(第1点)星况及外业观测良好(这是可以保障的),观测者正常行进速度在2 m/s之内,数据采样率为1 s,由第1点和第2点的解算坐标计算得到的行进速度为 V_2 、方位角为 T_2 。观测者在行进过程中一般不会突然加速或转向(在1 s内),则由点2的坐标(x_2, y_2)及 V_2, T_2 推算得到点3的坐标(x_3, y_3)。

用LAMBDA算法固定后的基线解算结果与上述推算结果比较,其差值应在某一合理限差范围内,若超过该限差需及时进行检验处理。

2.2.1 坐标限值的取定

根据误差传播定律,假设忽略(x_n, y_n)的坐标误差,推算坐标(x_{n+1}, y_{n+1})的误差为:

$$m_{x_{n+1}}^2 = m_{v_n}^2 \cos^2 T_n + v_n^2 \sin^2 T_n \frac{m_{T_n}^2}{r^2}$$
 (7)

$$m_{y_{n+1}}^2 = m_{v_n}^2 \sin^2 T_n + v_n^2 \cos^2 T_n \frac{m_{T_n}^2}{r^2}$$

$$m_{p_{n+1}}^2 = m_{v_n}^2 + v_n^2 \frac{m_{T_n}^2}{r^2}$$
 (8)

式(8)中取正常观测者行进中的极值 $m_{v_n}^2 = 1, v_n^2 = 4, m_{T_n}^2/r^2 = 1$, 则 $m_{p_{n+1}}^2 = 5, m_{p_{n+1}} = 2.23$ m, 也就是说当行进者从 n 点至 $n+1$ 点时,以2 m/s的速度行走,速度误差为1 m/s、方位误差为60°时所引起的点位误差的限差为2.23 m。当大于这一限时必须进行检验处理。

2.2.2 检验处理

当坐标推算结果与用LAMBDA算法固定后的基线解算结果大于点位限值(2.23 m)时,其检验处理过程如下。

按照 x_n, y_n, V_n 和 T_n 的值继续计算 x_{n+2}, y_{n+2} 的坐标推算值并与用LAMBDA算法固定后的基线解算结果相比较,若在限差范围内,说明 $n+1$ 点只是一个孤立的粗差点,此时可舍去 $n+1$ 点继续往后计算。

若 $n+2$ 点仍然超限,则需检查双差相位观测值是否仍存在周跳,若存在需按照特定方法予以修复。

由此可见,用类似滤波的方法检验LAMBDA算法固定后的基线解算结果可以有效剔除粗差的影响,提高基线解算的可靠性。

3 结 语

本文结合具体的国土资源调查工程实践,对常规的LAMBDA方法作了一些改进。实测数据分析表明,本文的改进均能有效地提高基线解算的可靠性,具有一定的理论价值。

笔者认为,以点位的先验信息检验坐标解算结果比扩大超椭球的体积更为重要。本文对此的改进还只是初步的,若能引入卡尔曼滤波等数学方法效果可能会更好,这也是本文需进一步完善的地方。

参 考 文 献

[1] 徐绍铨,张华海,杨志强,等. GPS 测量原理及应用[M]. 武汉:武汉测绘科技大学出版社,1998

[2] 胡伍生,高成发. GPS 测量原理与应用[M]. 北京:人民交通出版社,2002

[3] 张勤,陈永奇. 基于整周模糊度概率特性的有效性检验[J]. 测绘科学,2003,28(2): 16~ 20

[4] de Paul Jonge, Christian T. The LAMBDA Method for Integer Ambiguity Estimation: Implementation Aspects. Technical Report 12[R]. Delft: Delft University of Technology, 1996

[5] Teunissen P J G. Success Probability of Integer GPS Ambiguity Rounding and Bootstrapping[J]. Journal of Geodesy, 1998, 72: 606~ 612

[6] 李淑慧,刘经南. 整周模糊度搜索方法的效率比较和分析[J]. 测绘通报,2003(10): 1~ 3

[7] 陈永奇. 一种检验GPS整周模糊度解算有效性的方法[J]. 武汉测绘科技大学学报,1997,22(4): 342~ 345

[8] 冯宝红,郑小元,王庆,等. GPS-PDA在土地变更调查中的应用研究[J]. 测控技术,2003,22(8): 23~ 25

[9] He Xiufeng. A Fast Kalman Filter for Integrated GPS/INS Based on U-D Factorization[J]. Trans of Nanjing University of Aeronautics&Astronautics,

1998 , 15(2) : 159-164

[10] Teunissen P J G. The Probability Distribution of the GPS Baseline for a Class of Integer Ambiguity Estimators[J]. Journal of Geodesy, 1999,73: 275-284

[11] Teunissen P J G. The Probability Distribution of the Ambiguity Bootstrapped GNSS Baseline[J]. Journal of Geodesy, 2001, 75:267- 275

[12] Teunissen P J G. The Parameter Distributions of the Integer GPS Model[J]. Journal of Geodesy, 2002, 76: 41- 48

[13] Vollath U, Birnbach S, landau H, et al. Analysis of Three Carrier Ambiguity Resolution Technique for Precise Relative Positioning in GNSS 2 [J]. Journal of the Institute of Navigation, 1999, 46(1): 13- 23

第一作者简介: 高成发, 博士, 副教授, 从事 GPS 及交通工程测量领域的教学与科研工作。

E mail: gaochfa@ seu. edu. cn

Restricting GPS Integer Ambiguity by Improved LAMBDA Algorithm

GA O Chengf a¹ ZHA O Yi¹ WAN Dejun¹
(¹ Transtation College, Southeast University, 2 Sipailou Road, Nangjing 210096, China)

Abstract: The integer ambiguity is one of the main problems in the GPS solution. On the basis of the theory of LAMBDA method for integer ambiguity estimation and land inventor-y, two improvements to routine LAMBDA are made. That is enlarging the volume of the ellipsoid and checking the results of coordinate solution by apriori information of the points. Verified by a lot of actual data, the improved LAMBDA algorithm improves the reliability of the base-line solution effectively and has some value in theory.

Key words: GPS; ambiguity; LAMBDA algorithm; land resource investigation

About the first author: GAO Chengfa, Ph. D, associate professor, engaged in the theoretical and experimental researches on GPS and transportation engineering surveying.
E mail: gaochfa@ seu. edu. cn

(上接第 715 页)

of data, visualization and so on are discussed in detail. On the basis of these theory and tech-niques, a proto-type system is developed, and applied in correlative department.

Key words: digital waterway; 3D GIS; 3D waterway model; mult-source data integration

About the first author: SU Haigang, associate professor, Ph. D. He is engage in research on GIS theory and application, remotely image un-derstanding, digital ocean and so on.
E mail: haigang_sui@263. net