第 40 卷第 10 期
2015 年 10 月

测绘科学
Science of Surveying and Mapping

Vol. 40 No. 10
Oct.

改进的整周模糊度搜索算法

宋福成[1]，杨 汀[1]，陈宜金[1]，时爽爽[2]
（1. 中国矿业大学(北京)，北京 100083；2. 武汉大学，武汉 430079）

摘 要：针对现有模糊度搜索方法仍不能很好地满足快速定位需求的问题，该文在简要介绍解决最近向量问题的搜索算法基础上，将 M-VB 搜索算法引入到模糊度的解算中，并对其作了两方面改进。一是优化了该算法执行过程中更新上界的问题，二是提出借助序贯最小二乘平差(Bootstrapped)估计值来确定其搜索空间半径的方法。基于仿真数据和实测 GPS 数据，分别在降相关和不降相关条件下，将上述改进方法与最小二乘降相关平差(LAMBDA)方法和其修正方法(MLAMBDA)作了对比分析。结果表明，改进的 M-VB 算法比其他 2 种方法能更快地固定整数向量，有效地提高了模糊度搜索效率。

关键词：全球导航卫星系统；模糊度估计；最近向量问题；LAMBDA；MLAMBDA；M-VB
【中图分类号】P228.4 【文献标识码】A 【文章编号】1009-2307(2015)10-0016-05
DOI：10.16251/j.cnki.1009-2307.2015.10.003

0 引言

全球卫星导航系统(Global Navigation Satellite Systems，GNSS)，包括美国的 GPS、俄国的 GLONASS、中国的北斗、欧盟的 Galileo 及一些增强系统，已广泛地应用在大地测量、航空航天、地壳地震监测、海洋、农业等各个领域[1]。而正确的固定载波相位整周模糊度是实现 GNSS 定位、导航等应用的关键。近 30 年来，研究人员提出了许多方法来解决此问题。最简单的方法就是对求得的模糊度浮点解直接取整，由于模糊度间的相关性，此种方法效果较差，模糊度固定成功率不高。另外一种方法是利用序贯最小二乘平差法，也被称为 bootstrapping 方法，其思想是在前面模糊度取整固定的条件下，对余下的其他浮点解进行最小二乘平差改正，然后对改正后的值取整[2]。整数最小二乘方法被认为是解算模糊度问题的最严密的一种方法，其固定成功率较高。这类方法中最有代表性的是最小二乘降相关平差(Least-square Ambiguity Decorrelation Adjustment，LAMBDA)方法[3-4]和其修正方法(MLAMBDA)[5]。LAMBDA 方法被认为是目前最有效的方法之一，但其需要一个搜索过程，搜索效率的高低直接影响着整周模糊度的解算效率。

格是 R^n 中一类具有周期性结构离散点的集合[6]。格中的最近向量问题(Closest Vector Problem，CVP)是指给定任意一个目标向量，找一个格上的非零向量，使得这两向量之间距离最短。解决最近向量问题的精确方法是 Pohst 和 Fincke[7-8]提出的枚举算法，在通信领域中也被称为球形解码算法。该方法是通过设置初始半径将搜索空间确定在有限的超椭球中，从而有效地提高了搜索效率。Kannan[9]提出了类似的枚举算法，但搜索空间是在长方体中。Viterbo 和 Biglieri[10-11]将 Pohst 枚举算法引入到通信领域，提出了动态收缩半径的搜索方法，称为 VB 算法。Damen 等[12]基于 VB 算法，提出了 M-VB 算法，通过更新收缩区间上界，避免了重复搜索一些分支，取得较好的效果。刘经南等[13]指出模糊度解算与格论中的最近向量问题有着紧密的联系，并将模糊度解算中的主要降相关方法统一到了格论框架下。范龙等基于格论设计了分块正交化的降相关算法[14]，也很好地解决了模糊度度解算中的降相关问题。实际上，格论中解决最近向量问题的搜索算法也适用于模糊度的搜索。现常用的 LAMBDA 方法中的搜索方法就是根据 Pohst 算法改进而来的。

随着四大卫星导航系统的逐步建设和现代化，以及地基增强系统的建立和完善，未来可用于定

作者简介：宋福成(1986—)，男，山东临沂人，博士研究生，从事 GNSS 定位方法、数据处理及应用研究。
E-mail：songfucheng123@163.com

收稿日期：2015-02-03
基金项目：中央高校基本科研业务费项目(2010YD06)

引用格式：宋福成，杨汀，陈宜金，等．改进的整周模糊度搜索算法［J］．测绘科学，2015，40（10）：16-20．

位的卫星在逐步增多，这也导致了模糊度参数的数量增加。在解决高维模糊度参数时，目前方法的执行效率仍然不高。同时，高精度实时定位需要快速地确定整周模糊度。因此，本文在简单介绍格论中搜索算法的基础上，对 M-VB 搜索算法进行优化改进，并将其引入到模糊度解算中；然后基于仿真数据和 GPS 实测数据，将该算法与两种经典算法进行比较分析。

1 模糊度搜索及 M-VB 算法

1.1 整数模糊度估计与最近向量问题

一般 GNSS 整周模糊度的最小二乘问题，都可表示为[15]：

$$\bar{a} = \min_{a \in Z^n} (\boldsymbol{a} - \hat{a})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q}_{\hat{a}}^{-1} (\boldsymbol{a} - \hat{a}) \tag{1}$$

其中，a 表示整周模糊度向量，$\hat{a}$ 和 $\bar{a}$ 分别表示其浮点解和整数解；$Q_{\hat{a}}^{-1}$ 为浮点解 $\hat{a}$ 的方差－协方差 $Q_{\hat{a}}$ 的逆矩阵。由于 $Q_{\hat{a}}$ 是正定的，所以 $Q_{\hat{a}}^{-1}$ 也是正定的。而 $Q_{\hat{a}}^{-1}$ 的 Cholesky 分解可表示为：

$$\boldsymbol{Q}_{\hat{a}}^{-1} = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R} \tag{2}$$

因此有：

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a} - \hat{a})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q}_{\hat{a}}^{-1} (\boldsymbol{a} - \hat{a}) &= (\boldsymbol{a} - \hat{a})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R} (\boldsymbol{a} - \hat{a}) = \\ &(\boldsymbol{Ra} - \boldsymbol{R}\hat{a})^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{Ra} - \boldsymbol{R}\hat{a})\end{aligned} \tag{3}$$

令 $y = \boldsymbol{R}\hat{a}$，那么式(1)可表示为：

$$\begin{aligned}\bar{a} &= \min_{a \in Z^n} (\boldsymbol{Ra} - \boldsymbol{R}\hat{a})^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{Ra} - \boldsymbol{R}\hat{a}) = \\ &\min_{a \in Z^n} (\boldsymbol{Ra} - y)^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{Ra} - y) = \\ &\min_{a \in Z^n} \| y - \boldsymbol{Ra} \|^2\end{aligned} \tag{4}$$

因为矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的列向量 $r_1, r_2, \cdots, r_n$ 线性无关，由格理论知，其可作为格的一组基，生成的 n 维格为：

$$\Lambda(\boldsymbol{R}) = \{ \boldsymbol{Ra} \mid \boldsymbol{a} \in Z^n \} \tag{5}$$

所以式(4)就是在生成的 n 维格中，寻找一个格点，使得其与给定的一点 y 最近，即格上的最近向量问题。因此，上述的整数最小二乘估计与格上的 CVP 是等价的。

1.2 M-VB 算法

针对格中最短向量问题，数论学家 Pohst 提出了著名的枚举算法。众多学者对其优化改进，提出了不同的变种算法，在最短向量和最近向量问题中取得很好的应用。其中，Damen 等提出的 M-VB 算法就是基于 Pohst 和 VB 算法改进而来的。M-VB 算法按维数分为 n 层，输入值为半径平方 d_c，给定点 y，矩阵 $\boldsymbol{R}$；输出最优格点 $\hat{x}$。M-VB 算法从第 n 层开始，向第一层逐层搜索，并计算出每一层候选值的上界和下界。当搜索到第一层时，表明已经获得了一个候选格点，保存该格点并计算其与给定点 y 的几何二次型。若该值小于初始给定的搜索半径，则使用该值改正其他所有层的上界，并继续进行搜索，且此时从第一层向第 n 层搜索。当重新搜索到 n 层时，整个搜索过程结束，保存此时的候选值向量 $\hat{x}$ 和其与给定点 y 的几何二次型值 $\hat{d}$。M-VB 算法的具体搜索过程如图 1 所示。

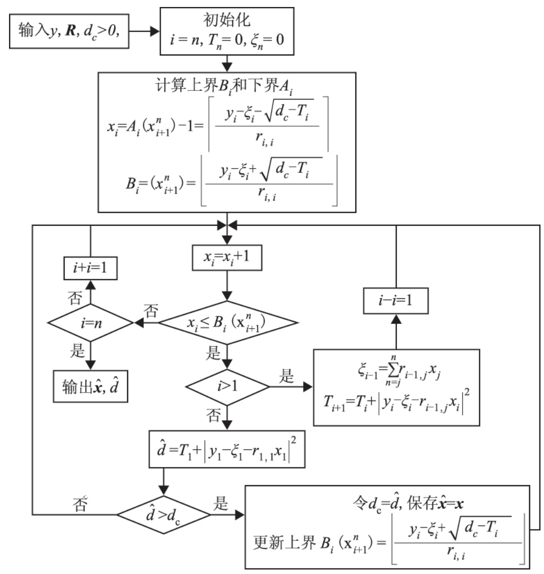

图 1 M-VB 算法流程图

Fig.1 Flowchart of the M-VB Algorithm

2 改进的 M-VB 算法

2.1 算法优化

M-VB 算法比 Pohst 算法及 VB 算法有了较大提升，但此算法仍有改进空间。当搜索到第一层获得一个新的格点后，会更新所有上界。从图 1 可以看出，如果当程序再一次循环到第一层，并且在这个过程中遍历到达的最高层为 $i < n$，那么在重新更新全部上界后，对于上一次更新的上界中 $l = i+1, \cdots, n$ 的 $B_l(x_{l+1}^n)$ 将不再使用。由于在对 $\boldsymbol{R}$ 预处理过程中进行了降序排列，程序在低层来回搜索的概率较大，因此上述情况在整个 M-VB 算法执行中会出现多次，从而致使不必要的计算，降低算法效率。因此，为提高效率，在获得一个新的格点后，只更新上界 $B_1(x_1^n)$，并令 $s = 1$；同时，在算法的 $i = n$ 处修改为：如果 $i = n$，终止程序，输出，否则，$i = i+1$，并且如果 $i > s$，那么计算 $B_i(x_{i+1}^n)$，$s = i$，然后转至 $x_i = x_i + 1$。经过上述改进后，只有在遍历到 i 层，且需用到其上界时，才进行更新，这样避免了多余计算，因而可提高执行效率。

2.2 确定搜索半径

在 M-VB 算法中，为提高搜索效率，选择合

适的半径初始值是非常重要的。半径初始值选择得过小，致使在确定的搜索空间中没有整数点；半径初始值选择得过大，致使包含在搜索空间内的整数点较多，从而增多枚举次数，降低搜索效率。bootstrapped估计值是模糊度的序贯最小二乘估计值，经过降相关处理后，其固定成功率相对较高，在一些文献中常作为最小二乘估计成功率的下界[16]。因此，可考虑将bootstrapped估值到浮点解的距离作为搜索空间的半径，这种方法至少保证获得一组解。但实验发现，以上述方法确定的搜索空间包含的整数点个数往往大于1，从而增加了搜索时间。为探索bootstrapped估值与最佳估值到给定点的欧氏距离之间的关系，进行如下实验。根据文献［5］，通过下式构造仿真数据

$$\hat{a} = 100 \times \mathrm{randn}(n,1)$$

$$\boldsymbol{Q}_{\hat{a}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A} = \mathrm{randn}(n,n) \tag{6}$$

其中，$\mathrm{randn}(i,j)$是MATLAB中可生成一个$i \times j$向量或矩阵的函数，且其内元素服从正态分布。通过式(6)生成5到40维的实验数据，且每一维构造1 000组数据。利用MLAMBDA方法，分别计算每一维中1 000组数据的d_B和d_L的平均值，其中d_B和d_L分别表示bootstrapped估值与最佳估值到给定点的欧氏距离的平方。统计结果如图2所示。

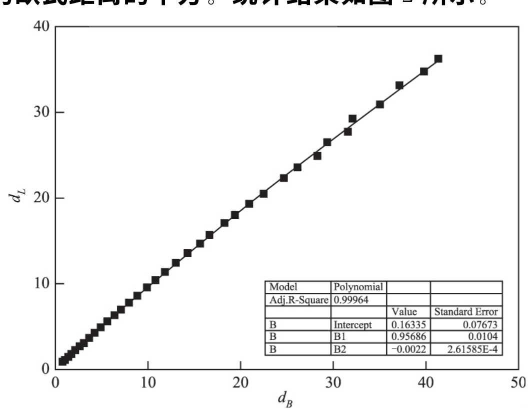

图2　d_B和d_L之间的关系

Fig. 2　Relations between d_B and d_L

由图2可知，d_B和d_L之间呈近似线性关系。为更严密，采用二次多项式方法拟合，拟合公式如下

$$d_L = -0.0022 \times d_B^2 + 0.95686 \times d_B + 0.16335 \tag{7}$$

因此，选择搜索空间的半径平方初始值为

$$d_c = \min(d_B, d_L) \tag{8}$$

并且，如果$\hat{a}$结果输出为0，说明d_c过小，其确定的搜索空间中不包含整数点，那么令$d_c = 1.2d_c$，重新迭代执行，直至$\hat{a}$输出值大于0，即得到最佳估值。

3　实验及分析

3.1　仿真分析

本文将改进的M-VB方法与现在流行的LAMBDA方法和MLAMBDA方法进行比较分析。实验环境为：惠普电脑（2.0GHz，内存3.0GB，Windows 7系统），MATLAB 7.10.0（R2010a）。实验数据仍由式(6)构造。同时在LAMBDA方法和MLAMBDA方法中设置期望候选值为1。

为了分别分析第三部分中两点的改进性能，将优化后的M-VB算法称为M-VB1，用式(7)、式(8)确定搜索半径的M-VB算法称为M-VB2，二者的结合方法称为M-VB3。由式(6)生成5～40维的仿真数据，每一维构造100组数据。为提高效率，在执行上述搜索方法之前，对数据都进行了相同的预处理，即统一用LAMBDA方法中的降相关策略处理。分别采用上述3种方法及LAMBDA方法、MLAMBDA方法计算每一维中100组数据的平均搜索时间，其中M-BV1算法和M-VB2算法的搜索半径由bootstrapping方法获得，实验结果如图3所示。

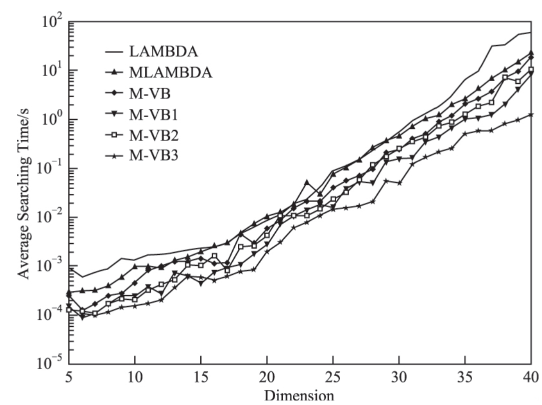

图3　不同算法在降相关条件下独立运行100次的平均搜索时间

Fig. 3　Average Searching Time of Different Algorithms over 100 Independent Runs with Decorrelation

由图3知，M-VB算法比LAMBDA、MLAMBDA方法搜索速度快，分别平均快4.4倍和1.5倍，在高维情形尤其明显。M-VB1也表现出类似的情况。但M-VB1算法比M-VB算法平均快2.3倍，说明对M-VB算法中的上界更新方式改进后，其执行效率有所提升。而对比M-VB2和M-VB发现，M-VB2比M-VB执行效率也要高，平均快1.5倍，但有时出现M-VB2比M-VB用时长的情形，这可能是由于初始半径的取值过小，致使第一次没有获得有效值，然后增加半径重新搜索，从而增加了耗时。两种改进方法的结合M-VB3算法在所有

方法中执行效率是最高的，平均比 LAMBDA、MLAMBDA 和 M-VB 方法分别快 36 倍、11.7 倍和 8.2 倍。在高维中，M-VB3 方法的执行效果更好，比 LAMBDA 方法快 50～60 倍。

为了进一步分析不同算法的执行效率，在上述实验中统计了每种算法运行过程中计算的有效整数点个数。统计结果如图 4 所示。图 4 反映出本文的改进方法在搜索中比 LAMBDA、MLAMBDA 方法平均获得的有效点数少，基本在 1 到 2 个。LAMBDA 方法是所有方法中获得整数点数最多的，说明此方法至少完整地遍历了全部整数点，从而增加了耗时。

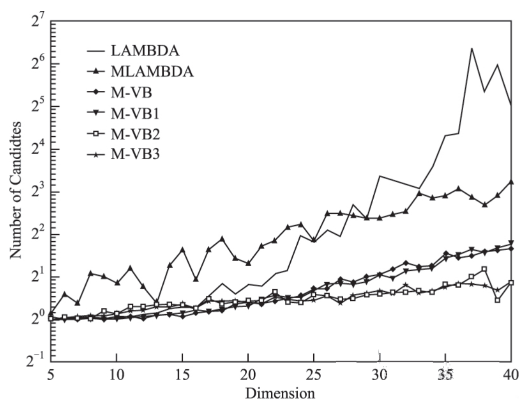

图 4　不同算法在不同维数下独立运行 100 次搜索的整数点个数

Fig. 4　Average Number of Candidates of Different Algorithms over 100 Independent Runs per Dimension

降相关对搜索效率有重要的影响，这种处理策略在格理论中也被称为格基规约。上述实验之前都进行了降相关处理。为了研究几种搜索算法在无降相关条件下的性能，重复上述实验过程，但对构造的原始数据不作预处理。由于没有进行降相关处理，在 30 维以上的搜索时间较长，因此只对 5～30 维的数据进行实验。结果如图 5 所示。图 5 反映出，在无降相关条件下，这几种算法的搜索时间都有明显增加。LAMBDA 方法的搜索效率明显低于其他方法，在 30 维时，平均用时近 88s。改进的 M-VB 方法比 LAMBDA、MLAMBDA 方法搜索速度快，但没有在降相关条件下提高得明显。

3.2　实例验证

为进一步验证 M-VB3 算法的有效性和正确性，采用上述几种方法对实测 GNSS 数据进行了实验。选取河南某 GPS 四等网中的一条基线，其观测时间约为 55min，采样间隔为 15s，剔除不良观测数据后，基线的总观测历元数为 212。分别以单频和双频两种模式对其处理(分别用 A1 和 A2 表示)，根据最小二乘方法求得每个历元的模糊度浮点解和其方差-协方差矩阵。分别采用上述几种算法固定模糊度，统计它们的平均搜索时间。同时，以上述类似方式，分别处理该 GPS 网中的 10 条基线，固定双频模式下的模糊度，计算 4 种方法的平均搜索时间，用 A3 表示。另外，对新疆天池地区一条基线进行处理，其观测时间为60 min，采样间隔为 1s，处理的总历元数为 3 560，GPS 单频和双频模式分别用 B1 和 B2 表示；B3 表示利用 GPS 和 GLONASS 观测数据一起处理。本文分别在降相关和无降相关条件下进行了上述过程，实验结果如表 1 所示。

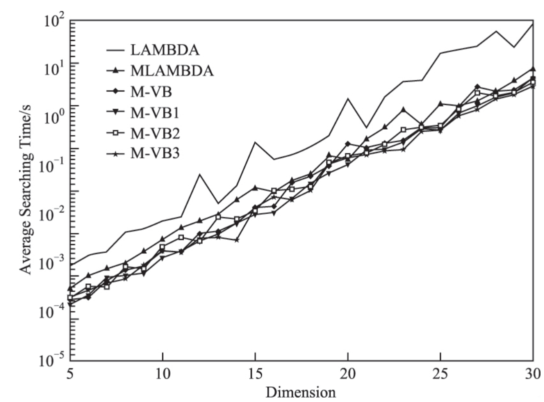

图 5　不同算法在不降相关条件下独立运行 100 次的平均搜索时间

Fig. 5　Average Searching Time of Different Algorithms over 100 Independent Runs Without Decorrelation

表 1　不同算法下模糊度平均搜索时间

Tab. 1　Average Searching Time of Different Algorithms for GNSS Real Data　　s

	LAMBDA		MLAMBDA		M-VB		M-VB3	
A1	0.0035	—	0.00032	0.0439	0.00019	6.6883	0.00055	0.0386
A2	165.8195	—	0.0032	1.2758	0.0067	10.3054	0.0010	0.3006
A3	—	—	0.0068	0.3542	0.0059	25.4056	0.0014	0.1882
B1	0.0063	370.7867	0.00021	0.0009	0.00012	0.0083	0.00064	0.0015
B2	0.0044	—	0.0012	0.0982	0.0006	3.1120	0.00025	0.0542
B3	—	—	0.2646	13.0426	0.1037	—	0.0482	2.0396

表 1 中的横线表示搜索过程中，有的历元搜索时间超过 30min 或大于 1h 仍未固定，所以未予统计；表 1 中各方法下的第一列数据表示在降相关条件下的搜索时间，第二列数据表示在无降相关条件下的搜索时间。从表 1 可看出，随着观测频率的增加，4 种方法的搜索时间都相应增加；4 种方法在降相关条件下的搜索性能更优。其中，LAMBDA 方法的搜索效率最低，且搜索时间较不稳定。在降相关条件下，M-VB 方法与 MLAMBDA 方法的搜索效率相当；但在无降相关条件下，M-VB 方法的搜索时间要大于 MLAMBDA 方法的搜索时间，且有时较长时间不能固定模糊度。M-VB3 方

法在降相关和无降相关条件下都表现出较好的搜索效率，并且随着组合系统定位和观测频率的增加，M-VB3方法的搜索性能较其他方法更为显著。

4 结束语

模糊度估计是导航定位数据处理中关键的一项内容。本文简单介绍了模糊度解算与格中最近向量问题的一致性，然后描述了格中M-VB搜索算法的基本步骤。以此为基础，提出了改进的M-VB算法。基于仿真和实测数据，从搜索时间上分析了改进的M-VB算法的性能，其执行效率比目前的LAMBDA和MLAMBDA方法要高。因此，改进的M-VB方法可应用于快速的模糊解算中。

模糊度的解算包括模糊度估计和模糊度确认两部分，为了模糊度确认，一般需要2个或2个以上的候选值，所以有必要进一步研究该算法在获取多个候选值时的性能。

参考文献

[1] 宁津生，王正涛. 2012-2013年测绘学科发展综合报告[J]. 测绘科学，2014(2)：3-10.

[2] TEUNISSEN P J G. Success Probability of Integer GPS Ambiguity Rounding and Bootstrapping[J]. Journal of Geodesy，1998，72(10)：606-612.

[3] TEUNISSEN P J G. Least-squares Estimation of the Integer GPS Ambiguities[C]//Invited Lecture，Section IV Theory and Methodology，IAG General Meeting，Beijing，China. 1993.

[4] TEUNISSEN P J G. The Least-squares Ambiguity Decorrelation Adjustment：a Method for Fast GPS Integer Ambiguity Estimation[J]. Journal of Geodesy，1995，70(1/2)：65-82.

[5] CHANG X W，YANG X，ZHOU T. MLAMBDA：a Modified LAMBDA Method for Integer Least-squares Estimation[J]. Journal of Geodesy，2005，79(9)：552-565.

[6] 王小云，刘明洁. 格密码学研究[J]. 密码学报，2014(1)：13-27.

[7] POHST M. On the Computation of Lattice Vectors of Minimal Length，Successive Minima and Reduced Bases with Applications[J]. ACM Sigsam Bulletin，1981，15(1)：37-44.

[8] POHST F U. Improved Methods for Calculating Vectors of Short Length in a Lattice，Including a Complexity Analysis[J]. Mathematics of computation，1985，44(170)：463-471.

[9] KANNAN R. Improved Algorithms for Integer Programming and Related Lattice Problems[C]//Proceedings of the Fifteenth Annual ACM Symposium on Theory of Computing，ACM，1983：193-206.

[10] VITERBO E，BIGLIERI E. A Universal Decoding Algorithm for Lattice Codes[C]//14° Colloque sur le traitement du signal et des images，FRA，1993. GRETSI，Groupe d'Etudes du Traitement du Signal et des Images，1993.

[11] VITERBO E，BOUTROS J. A Universal Lattice Code Decoder for Fading Channels[C]//IEEE Transactions on Information Theory，1999，45(5)：1639-1642.

[12] DAMEN M O，EI GAMAL H，CAIRE G. On Maximum-likelihood Detection and the Search for the Closest Lattice Point[C]//IEEE Transactions on Information Theory，2003，49(10)：2389-2402.

[13] 刘经南，于兴旺，张小红. 基于格论的GNSS模糊度解算[J]. 测绘学报，2012(5)：636-645.

[14] 范龙，翟国君，柴洪洲. 模糊度降相关的整数分块正交化算法[J]. 测绘学报，2014(8)：818-826.

[15] JAZAERI S，AMIRI-SIMKOOEI A R，SHARIFI M A. Fast Integer Least-squares Estimation for GNSS High-dimensional Ambiguity Resolution Using Lattice Theory[J]. Journal of Geodesy，2012，86(2)：123-136.

[16] TEUNISSEN P J G. GNSS Ambiguity Bootstrapping：Theory and Application[C]//Proceedings of International Symposium on Kinematic Systems in Geodesy，Geomatics and Navigation，2001：246-254.

An improved method for searching integer ambiguity

Abstract：According to the fact that the current methods for ambiguity estimation do not meet with the demand of fast positioning，M-VB method was introduced for ambiguity estimation after presentation of searching methods for closest vector problem(CVP). Then，M-VB method was improved from two points. One was optimizing the method with updating the upper bounds，and the other was determining the radius with bootstrapped estimator. The improved M-VB method was compared to LAMBDA and MLAMBDA methods based on simulated and real GPS data on the condition of with and without decorrelation. The results indicated that the M-VB method could fix integers faster than LAMBDA and MLAMBDA methods，and the searching efficiency was improved.

Key words：GNSS；ambiguity estimation；closest vector problem；LAMBDA；MLAMBDA；M-VB

SONG Fu-cheng[1]，*YANG Ting*[1]，*CHEN Yi-jin*[1]，*SHI Shuang-shuang*[2] (1. China University of Mining and Technology (Beijing)，Beijing 100083，China；2. Wuhan University，Wuhan 430079，China)